

AMÉLIE JEANNEAU

**ANALYSE DES MÉCANISMES COMPLIANTS AVEC
APPLICATION AUX MÉCANISMES PARALLÈLES DE
PRÉCISION**

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2005

Résumé

Dans ce mémoire, l'analyse de liaisons flexibles et de mécanismes compliants est réalisée dans le but de les appliquer aux mécanismes de haute précision. Trois liaisons compliantes présentant des caractéristiques intéressantes pour les mécanismes compliants de haute précision sont tout d'abord étudiées. La synthèse de différentes architectures parallèles utilisant les liaisons étudiées comme élément de base est ensuite effectuée. Les manipulateurs plans utilisant *le joint roulant compliant* comme élément de base ont la particularité de présenter un comportement cinématique particulier qui n'avait jamais été étudié auparavant. *le joint roulant compliant sera appelé joint X_R dans le corps de ce travail.* L'analyse cinématique de ces mécanismes a donc été réalisée. Comme le contrôle des mécanismes a un impact prépondérant sur leur précision et que plusieurs architectures étudiées requièrent des actionneurs prismatiques, une revue des actionneurs linéaires disponibles sur le marché a été effectuée pour permettre un choix plus éclairé. Enfin, les performances des liaisons déformables sont directement reliées au matériau choisi. Les critères de sélection des matériaux sont donc discutés plus en détail et une sélection non exhaustive de matériaux adaptés aux applications compliantes est présentée.

Avant-propos

Je remercie les personnes suivantes pour leur aide précieuse tout au long de ma maîtrise. Tout d'abord monsieur Boris Mayer-St-Onge qui a eu la patience de répondre à mes nombreuses questions en informatique. Ensuite, monsieur Thierry Laliberté pour son aide technique et la fabrication des prototypes. Enfin, je tiens à remercier monsieur Clément Gosselin qui m'a guidée au cours de mon projet et qui m'a aidée à surmonter les obstacles rencontrés.

J'aimerais également souligner le soutien financier du CRSNG qui m'a permis de réaliser ce projet.

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Liste des abréviations	x
Introduction	1
1 Description de trois types de liaisons compliantes	6
1.1 Joint compliant à contact roulant X_R	7
1.1.1 Description	7
1.1.2 Analyse des contraintes	8
1.1.3 Prototypes	9
1.1.3.1 Prototypage rapide	9
1.1.3.2 Autres méthodes de fabrication	11
1.2 Joint compliant en croix	12
1.2.1 Description	12
1.2.2 Équations de rigidité	13
1.2.3 Prototypes	14
1.3 Joint à col semi-circulaire	15

1.3.1	Équations de rigidité et de course angulaire pour un joint à col semi-circulaire	16
1.3.2	Simulations sur Ansys de joints à col semi-circulaire	16
1.4	Conclusion	18
2	Synthèse de mécanismes parallèles compliant	21
2.1	Mécanismes à cols semi-circulaires	22
2.1.1	Table à quatre cols semi-circulaires	22
2.1.1.1	Description	22
2.1.1.2	Équations de rigidité et de course linéaire de la table	22
2.1.1.3	Méthodes de fabrication	25
2.1.2	Mécanisme à 1 ddl à cols semi-circulaires avec mouvement parasite compensé	25
2.1.2.1	Description	25
2.1.2.2	Équations de rigidité et de course angulaire pour une table à cols semi-circulaires double	26
2.1.2.3	Prototype	28
2.1.3	Mécanisme à 2 ddls à col semi-circulaire avec mouvement parasite compensé	28
2.1.3.1	Description	28
2.1.3.2	Équations de rigidité	30
2.2	Tripteron compliant	30
2.2.1	Description et Prototype	30
2.3	Mécanismes parallèles plans avec joints X_R	31
2.4	Conclusion	34
3	Analyse cinématique de mécanismes parallèles compliant utilisant des liaisons X_R	35
3.1	Cinématique d'un joint X_R	36
3.2	Problème géométrique inverse des mécanismes	37
3.2.1	Mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$	37
3.2.1.1	Définition des vecteurs	38
3.2.1.2	Modèle géométrique	39
3.2.2	Mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$	43
3.2.2.1	Définition des vecteurs	43
3.2.2.2	Modèle géométrique	45
3.2.3	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{P}X_RX_R$	48

3.2.3.1	Définition des vecteurs	49
3.2.3.2	Modèle géométrique	50
3.2.4	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{R}X_RX_R$	51
3.2.4.1	Définition des vecteurs	51
3.2.4.2	Modèle géométrique	52
3.2.5	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{X}_RX_RX_R$	53
3.2.5.1	Définition des vecteurs	54
3.2.5.2	Modèle géométrique	55
3.3	Équations de vitesse	57
3.3.1	Mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$	57
3.3.2	Mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$	58
3.3.3	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{P}X_RX_R$	59
3.3.4	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{R}X_RX_R$	60
3.3.5	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{X}_RX_RX_R$	61
3.3.6	Vérification des matrices jacobiennes	63
3.4	Lieux de singularité et espace de travail	64
3.5	Problème géométrique direct	70
3.5.1	Mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$	70
3.5.2	Mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$	71
3.5.3	Mécanisme $\mathcal{B}\text{-}\underline{P}X_RX_R$	71
3.5.4	Mécanismes $\mathcal{B}\text{-}\underline{R}X_RX_R$ et $\mathcal{B}\text{-}\underline{X}_RX_RX_R$	72
3.6	Conclusion	72
4	Choix des actionneurs	75
4.1	Critères de sélection	75
4.1.1	Résumé des critères de sélection	77
4.2	Moteur à matériaux magnétostrictifs	77
4.3	Actionneur piezoélectrique	78
4.4	Moteurs ultrasoniques	79
4.5	Moteur électrique linéaire sans balais	81
4.5.1	Calcul de la fréquence et de la force continue en fonction de l'accélération	82
4.6	Conclusion	86
5	Sélection des matériaux	87
5.1	Critères de sélection	88
5.1.1	Modules de rigidité	88

5.1.2	Limite en fatigue σ_F	88
5.1.3	Rapport de la limite en fatigue sur le module de rigidité	89
5.1.4	Méthodes de fabrication	90
5.1.5	Disponibilité et coût du matériau	90
5.2	Sélection de matériaux	91
Conclusion		93
Bibliographie		96
A Coefficients		98
A.1	Coefficients des équations (3.9) et (3.10)	98
A.2	Coefficients des équation (3.19) et (3.20)	99
A.3	Coefficients des équations (3.25) et (3.26)	99
A.4	Coefficients de l'équation (3.32)	99
A.5	Coefficients des équations (3.27) et (3.28)	100
A.6	Coefficients de l'équation (3.42)	100
A.7	Coefficients des équations (3.50) et (3.51)	101
A.8	Coefficients des équations (3.59) et (3.60)	102
A.9	Coefficients de l'équation (3.61)	102
A.10	Coefficients des équations (3.69) et (3.70)	103
A.11	Coefficients de l'équation (3.61)	103
A.12	Coefficients des équations (3.145) et (3.146)	104
A.13	Coefficients des équations (3.147) et (3.148)	105
A.14	Coefficients de l'équation (3.151)	106
B Solutions du PGI des mécanismes		107
B.1	Solutions du PGI du mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$	107
B.2	Solutions du PGI du mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$	112
B.3	Solutions du PGI du mécanisme $\mathcal{P}\underline{P}X_RX_R$	118
B.4	Solutions du PGI du mécanisme $\mathcal{P}\underline{R}X_RX_R$	119
B.5	Solutions du PGI du mécanisme $\mathcal{P}\underline{X}_RX_RX_R$	122

Liste des tableaux

1.1	Propriétés des matériaux utilisés.	17
1.2	Paramètres géométriques des joints.	18
1.3	Comparaison des trois liaisons flexibles étudiées.	18
5.1	Limites en fatigue du titane bêta.	89
5.2	Propriétés de matériaux métalliques.	91
5.3	Propriétés de matériaux métalliques.	92

Liste des figures

1	Exemples de mécanismes compliants de haute précision	2
2	Exemple de liaisons à compliance localisée et distribuée.	3
1.1	Configurations d'un joint à contact roulant.	8
1.2	Mécanisme de mise en tension des lamelles	8
1.3	Procédure pour éliminer l'espace cylindre-lamelle.	9
1.4	Assemblage d'un joint X_R fabriqué par électro-érosion.	11
1.5	Photographie d'un prototype de joint en croix.	13
1.6	Dimensions du joint en croix.	13
1.7	Photographie du prototype fabriqué au CNRC.	15
1.8	Géométrie du joint à col semi-circulaire.	17
1.9	Analyse des contraintes dans les joints à col semi-circulaire.	19
2.1	Illustration de la course normale en translation sur la table à quatre cols semi-circulaires.	23
2.2	Illustration de la force appliquée pour le calcul de la rigidité équivalente en translation.	23
2.3	Illustration de la force appliquée pour le calcul de la rigidité équivalente transverse en translation.	24
2.4	Table à cols semi-circulaires double compensée pour le mouvement parasite.	26
2.5	Illustration de la force normale sur la table à cols semi-circulaires double compensée pour le mouvement parasite.	27
2.6	Illustration des forces transverses horizontale et verticale sur la table à cols semi-circulaires double compensée pour le mouvement parasite.	28

2.7	Prototype de mécanisme à 1 ddl à cols semi-circulaires avec mouvement parasite compensé.	29
2.8	mécanisme à 2 ddls à col semi-circulaire.	29
2.9	Rigidité équivalente du mécanisme à 2 ddls.	30
2.10	Prototype du Tripteron compliant.	31
2.11	Architectures à 2 ddls avec joints X_R	32
2.12	Architectures à 3 ddls avec joints X_R	33
2.13	Prototype d'un mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$	33
3.1	Cinématique d'un joint X_R	36
3.2	Schéma du mécanisme $\underline{P}X_R \underline{P}X_R X_R$	37
3.3	Définition des vecteurs.	38
3.4	Algorithme de calcul du PGI.	42
3.5	Schéma du mécanisme à $\underline{R}X_R \underline{R}X_R X_R$	43
3.6	Représentation graphique des vecteurs.	44
3.7	Schéma du mécanisme à $\mathcal{3}\text{-}\underline{P}X_R X_R$	48
3.8	Définition des vecteurs.	49
3.9	Schéma du mécanisme à $\mathcal{3}\text{-}\underline{R}X_R X_R$	51
3.10	Définition des vecteurs.	52
3.11	Schéma du mécanisme à $\mathcal{3}\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$	54
3.12	Définition des vecteurs.	54
3.13	Exemples d'espace de travail et de lieux de singularité pour le mécanisme $\underline{P}X_R \underline{P}X_R X_R$	66
3.14	Exemples d'espace de travail et de lieux de singularité pour le mécanisme $\underline{R}X_R \underline{R}X_R X_R$	68
4.1	Schéma du moteur ultrasonique.	79
4.2	Courbes de vitesse et d'accélération.	83
4.3	Courbes de vitesse et d'accélération pour une vitesse limitée.	85
B.1	Solutions au PGI du $\underline{P}X_R \underline{P}X_R X_R$	111
B.2	Solutions au PGI du $\underline{R}X_R \underline{R}X_R X_R$	117
B.3	Solutions au PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{P}X_R X_R$	118
B.4	Solutions au PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{R}X_R X_R$	121
B.5	Solutions au PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$	125

Liste des abréviations

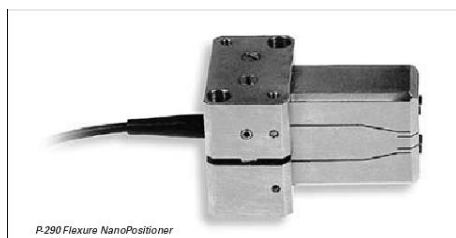
CAO	Conception assistée par ordinateur
CNRC	Centre national de recherche du Canada
ddl	degré de liberté
EDM	Electrical discharge machining
FDM	Fused deposition modeling
MEMS	Micro Electro-Mechanical Systems
PGD	Problème géométrique direct
PGI	Problème géométrique inverse
Tripteron	Mécanisme parallèle spatial 3- <u>P</u> RRR

Introduction

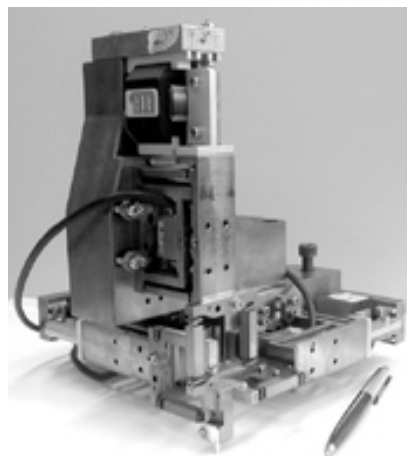
Un mécanisme compliant, contrairement à un mécanisme à corps rigide, tient sa mobilité en tout ou en partie d'une flexibilité relative de ses membres ([8] et [16]).

Les mécanismes compliants sont utilisés dans l'industrie depuis plusieurs années. En effet, dans plusieurs cas ils permettent de réduire les coûts de fabrication, la friction, le bruit et ne nécessitent pas de lubrification. Prenons par exemple une agrafeuse. Le mouvement relatif des deux pièces est relativement faible et il peut être avantageux de modifier son design pour en faire un mécanisme compliant. L'agrafeuse peut ainsi être produite en une seule pièce ce qui élimine le temps d'assemblage requis et permet d'en réduire le coût de production (voir [13]). Le bruit dans un mécanisme vient du frottement entre deux corps rigides. Les mécanismes compliants sont donc généralement moins bruyants. De plus, les liaisons flexibles, contrairement aux liaisons rigides ne nécessitent pas de lubrifiant, ce qui élimine le besoin d'entretien du mécanisme.

Plus récemment, les mécanismes compliants ont été utilisés dans des applications de haute technologie comme les MEMS et les manipulateurs de haute précision (micronanométrique) dans lesquelles l'élimination de la friction de Coulomb et du jeu dans les articulations représentent un avantage non-négligeable. *Grâce à cela, la compagnie PI, Physikinstrumente, utilise les mécanismes compliants pour augmenter l'amplitude de mouvement de leurs actionneurs de haute précision tel qu'illustré à la figure 1(a). Une équipe de chercheurs composée de Bacher, Joseph et Clavel a conçu un mécanisme*



(a) Actionneur piezoélectrique de la compagnie PI



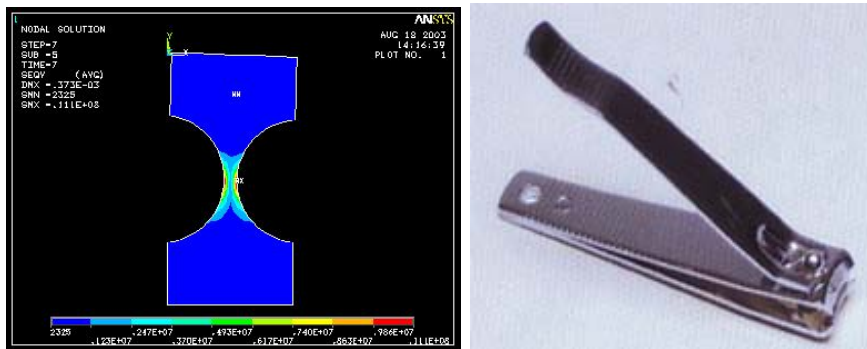
(b) Mécanisme de positionnement nanométrique

FIG. 1 – Exemples de mécanismes compliants de haute précision

compliant de positionnement de précision nanométrique, illustré à la figure 1(b). De plus, comme il n’y a pas d’usure, la précision du mécanisme reste constante dans le temps. Cela ne veut cependant pas dire que la durée de vie est infinie. Les mécanismes compliants sont soumis à la fatigue. Ceux-ci sont aussi utilisés dans le domaine de l’aéronautique et de l’aérospatiale, où la réduction de la masse est essentielle.

Le développement des mécanismes compliants dans les domaines de haute technologie s’est fait en parallèle du développement de matériaux plus performants, comme des alliages de titane et certains polymères et de méthodes de fabrication mieux adaptées aux mécanismes flexibles, par exemple l’usinage par électro-érosion et le prototypage rapide.

Ananthasuresh et Kota [2] font une distinction importante dans leur article : les mécanismes compliants sont soit à compliance localisée, soit à compliance distribuée. L’inconvénient majeur des mécanismes à compliance localisée, c’est que les déformations, donc les contraintes, sont concentrées dans une petite partie du système. De plus, la fabrication est plus difficile car il faut généralement fabriquer des sections très minces. Cependant, ils peuvent être analysés cinématiquement comme des mécanismes à corps rigides ce qui en simplifie beaucoup le design. Ils sont généralement utilisés dans les mécanismes de haute précision, car dans ce cas il est important de pouvoir prédire



(a) Liaison à cols semi-circulaire (compliance localisée) (b) Coupe ongle (compliance distribuée)

FIG. 2 – Exemple de liaisons à compliance localisée et distribuée.

précisément le comportement des liaisons flexibles lorsque soumis à un effort externe. Les mécanismes à compliance distribuée offrent en comparaison beaucoup plus de possibilités. C'est d'ailleurs ceux-ci qui sont généralement utilisés pour réduire les coûts de production car ils sont plus faciles à fabriquer. De plus, ils permettent de réduire davantage le poids et l'encombrement.

Ce travail vise l'étude de trois liaisons compliantes utilisées dans des mécanismes parallèles dans le but d'en augmenter la précision globale.

Pour augmenter la précision d'un mécanisme, il y a plusieurs aspects à considérer. Dans un premier temps, les trois liaisons flexibles sont étudiées indépendamment dans le chapitre 1 pour en évaluer la précision. Le joint X_R ou joint roulant est tout d'abord étudié. Contrairement aux liaisons subséquentes, sa rigidité n'est pas évaluée. Celle-ci n'est pas constante et est difficile à estimer. Par ailleurs, les facteurs influençant le plus sa précision sont décrits. Dans un deuxième temps, le joint en croix, qui travaille en torsion, est étudié. Dans ce cas-ci, les équations de rigidité sont dérivées de façon à déterminer le ratio de rigidité. Ce ratio est important pour quantifier la précision de la liaison. Finalement, le joint à col semi-circulaire est étudié. En plus des équations de rigidité, des simulations numériques ont été faites pour évaluer le déplacement de l'axe de rotation. Ces deux facteurs ont une influence sur la précision de l'articulation. Pour les trois liaisons étudiées, des prototypes ont été fabriqués par prototypage rapide. Cette technique est décrite un peu plus en détails. De plus, pour chaque liaison, des méthodes alternatives de fabrication sont discutées.

Une fois les propriétés des liaisons mieux connues, plusieurs mécanismes parallèles sont envisagés pour construire des manipulateurs de précision au chapitre 2. Les liaisons à col semi-circulaire sont d'abord utilisées dans un cas simple de mécanisme à 4 barres et les équations de rigidité de ce dernier sont dérivées. Ensuite, un mécanisme à 1 ddl qui est compensé pour produire un mouvement rectiligne est évalué. Ce mécanisme est ensuite utilisé dans un mécanisme parallèle à 2 ddl. Ce dernier présente l'avantage d'être parfaitement découplé. Le joint en croix est quant à lui utilisé dans une version compliant du Tripteron [18]. Ce mécanisme présente à la base de très bonnes propriétés pour la précision. Enfin, le joint X_R est utilisé dans plusieurs mécanismes plans.

L'une des particularités des joints X_R est de présenter une cinématique plus complexe que des liaisons rotoïdes car l'axe de rotation n'est pas fixe par rapport à l'articulation. Au contraire, le joint en croix permet de reproduire la cinématique du même mécanisme mais constitué de liaisons rigides. Lorsqu'un joint X_R est utilisé dans une architecture particulière la cinématique est complètement différente. L'analyse cinématique complète des mécanismes plans comportant les joints X_R a donc été effectuée dans le chapitre 3. Cette analyse a pour but de pouvoir éventuellement contrôler ces mécanismes et d'en déterminer les avantages et inconvénients d'un point de vue cinématique. Le problème géométrique inverse a tout d'abord été calculé. Ce dernier permet de calculer la position des actionneurs pour obtenir une position particulière de l'effecteur. Ensuite les équations de vitesse sont calculées. Ceci permet de déterminer une trajectoire en position et en vitesse. À partir de la matrice Jacobienne, calculée pour les équations de vitesse, les lieux de singularité et l'espace atteignable sont évalués. Quelques exemples de lieux de singularité et d'espace atteignable sont donnés. Enfin, les équations algébriques du problème géométrique direct sont développées en partie. Ces équations étant trop complexes elles ne peuvent être développées pour un cas général. Il devient donc évident qu'une procédure numérique pour résoudre le PGD s'avère beaucoup plus rapide et efficace.

L'architecture des mécanismes et les liaisons choisies ne sont pas les seuls facteurs qui déterminent la précision. L'élément le plus limitatif de la précision d'un manipulateur est souvent ses actionneurs. Les moteurs rotatifs sont bien connus, mais pour produire un mouvement linéaire, un moteur rotatif couplé à une crémaillère ou à une vis sans fin est souvent utilisé. La friction et le jeu présents dans les engrenages sont souvent responsables d'une perte de précision importante. Une recherche sur les moteurs linéaires présents dans l'industrie permettant de mieux connaître les technologies

accessibles a donc été menée. Pour mieux cibler la recherche, les critères de sélection sont choisis pour un moteur utilisé avec un prototype de mécanisme à 2 ddl avec des joints à col semi-circulaire ou un prototype de Tripteron. En plus de la précision, la course du moteur, l'encombrement, la vitesse et la force sont considérés dans le choix.

Enfin, la performance des liaisons flexibles est reliée directement au matériau utilisé. Un matériau performant doit avoir un pourcentage de déformation élevé. Celui-ci doit pouvoir supporter des contraintes élevées pour un module de Young relativement faible. Comme les liaisons flexibles sont habituellement sollicitées en fatigue, la limite en fatigue, lorsque cette donnée est disponible, est habituellement utilisée. Le choix des matériaux est traité au dernier chapitre de ce mémoire.

Chapitre 1

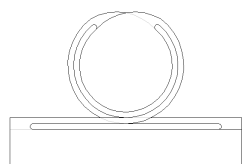
Description de trois types de liaisons compliantes

Au court des dernières années, plusieurs types de liaisons flexibles ont été créées. Ce travail cible trois de ces liaisons qui semblent plus appropriées aux mécanismes parallèles de grande précision. Ces trois liaisons, soit le joint X_R [10], le joint en croix [15, 17] et le joint à col semi-circulaire [7] présentent des propriétés très différentes qui seront décrites et analysées plus en détail dans ce chapitre.

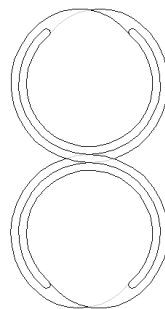
1.1 Joint compliant à contact roulant X_R

1.1.1 Description

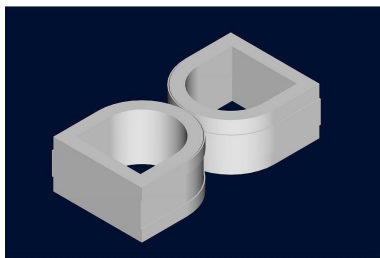
Le joint X_R est composé de deux surfaces qui roulent l'une sur l'autre sans glissement. Dans le cas étudié ici, les deux surfaces sont cylindriques de rayons semblables. D'autres configurations sont cependant envisageables, par exemple un cylindre sur un plan ou deux ellipses tel qu'illustré à la figure 1.1. Les deux surfaces sont attachées l'une à l'autre par de minces lamelles flexibles. Ces lamelles permettent un contact roulant, mais limitent les glissements et la séparation des cylindres. Les lamelles flexibles s'enroulent sur l'un ou l'autre des cylindres du joint. Comme il n'y a pas de glissement, il n'y a pas de perte d'énergie par friction. Le joint X_R est caractérisé par de très faibles déformations parasites, c'est-à-dire des déformations dans les directions non désirées. Cependant, pour permettre une bonne rigidité dans la direction normale au plan de rotation, le joint doit avoir une épaisseur importante et les efforts dans cette direction doivent être limités. *Pour améliorer la rigidité du joint, il est avantageux de s'assurer que le joint travaille en compression uniquement. Un mécanisme parallèle peut être ajouté aux joints pour les garder en compression. Cependant, il serait difficile de garder le joint complètement compliant sans en augmenter grandement la complexité. On perdrait alors certains avantages des mécanismes compliants. Un mécanisme pour garder les lamelles en tension constante, illustré à la figure 1.2, a été élaboré à l'Université des technologies de Delft. Un tel mécanisme ne peut garantir à lui seul que le joint ne travaillera qu'en compression. Cependant, il peut grandement augmenter la rigidité du joint.* Contrairement à une liaison rotoïde, la rotation ne se produit pas autour d'un axe fixe. Dans le cas du joint X_R , la position de l'axe de rotation correspond toujours au point de contact, ce qui augmente significativement la complexité de la cinématique. La cinématique d'un joint X_R est semblable à un engrenage planétaire externe. Finalement, la caractéristique qui rend ce joint compliant unique est son amplitude de mouvement de $\pm 180^\circ$.



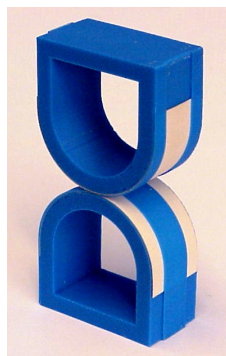
(a) Cylindre sur un plan



(b) Cylindre sur un cylindre



(c) modèle CAO d'un joint X_R



(d) Prototype d'un joint X_R

FIG. 1.1 – Configurations d'un joint à contact roulant.

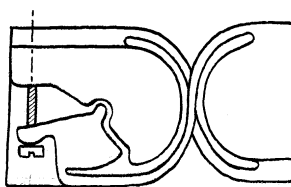


FIG. 1.2 – Mécanisme de mise en tension des lamelles

1.1.2 Analyse des contraintes

Les bandes flexibles subissent des déformations importantes et l'estimation des contraintes est une étape essentielle dans le design de cette liaison. Une bonne approximation de la contrainte maximale dans les lamelles peut être obtenue très simplement.

Les contraintes proviennent de deux sources. La première est la flexion de la lamelle qui produit une contrainte oscillant entre $-\frac{Ec}{2R} < \sigma_{max} < \frac{Ec}{2R}$ où E est le module de Young, c est l'épaisseur de la lamelle et R le rayon des cylindres. Au point de contact, il n'y a pas de contrainte causée par la flexion. Ailleurs dans la lamelle, la contrainte en flexion prend l'une ou l'autre des valeurs maximales. Une précontrainte peut être induite dans la lamelle lors de l'assemblage. Cette précontrainte créera une contrainte en tension dans toute la lamelle. Cette tension aura tendance à maintenir les deux cylindres collés ce qui produira une contrainte en compression au point de contact. Si un joint fabriqué par prototypage rapide est considéré, l'analyse des contraintes sera un peu différente. Dans ce cas, la lamelle est sans contrainte à la position d'équilibre. La contrainte de flexion oscille entre $0 < \sigma_{max} < \frac{Ec}{R}$. La contrainte en flexion augmente graduellement lorsque le joint s'éloigne de sa position d'équilibre pour atteindre sa valeur maximale dès que le rayon de courbure s'inverse en un point. En effet, lors de la fabrication du joint, la lamelle est fabriquée avec un rayon de courbure égal au rayon du cylindre. Lorsque la lamelle s'enroule sur le cylindre opposé, son rayon de courbure sera le même mais dans le sens inverse. Ainsi, la contrainte prend sa valeur maximale dans toute la partie de la lamelle enroulée sur le cylindre opposé.

Selon l'application, les joints X_R peuvent subir des milliers ou des millions de cycles. Les phénomènes de fatigue doivent être pris en compte lors de la conception de ce type d'articulation. Les phénomènes de contrainte et de fatigue sont discutés plus en détail dans les références suivantes [7, 9, 14, 17].

1.1.3 Prototypes

1.1.3.1 Prototypage rapide

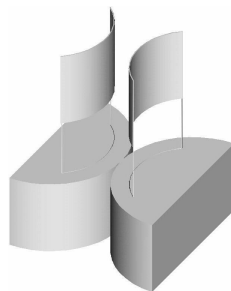


FIG. 1.3 – Procédure pour éliminer l'espace cylindre-lamelle.

Le prototypage rapide permet une fabrication rapide et facile. La machine utilisée pour les prototypes est une FDM 2000 de Stratasys. Le plastique ABS liquide est déposé couche par couche. Le lien entre les couches n'est pas parfait et cela peut induire une faiblesse dans la pièce finale. Lors de la fabrication, l'articulation doit être orientée pour que les contraintes principales ne tendent pas à séparer les couches. Dans le cas d'un joint X_R , l'axe de rotation doit être perpendiculaire aux couches. Pour produire une pièce par prototypage rapide, un modèle CAO est exporté en format STL qui est ensuite séparé en couches par un logiciel conçu à cet effet. Les couches sont des courbes fermées dont l'intérieur doit être rempli de matériel. Le logiciel choisit la trajectoire d'application du plastique pour chacune des couches. L'épaisseur minimale est de deux lignes de contour soit 0.8 mm. Dans le cas du joint X_R , il est préférable de réduire davantage l'épaisseur de la bande flexible en n'appliquant qu'une seule ligne de contour. Le modèle est séparé de façon à créer les deux cylindres et la bande séparément. Les cylindres sont créés de la façon standard, alors que la lamelle flexible est créée par une seule ligne de contour. Les extrémités de cette dernière sont placées suffisamment près des cylindres de façon à s'y attacher solidement. Cette méthode s'est avérée suffisamment solide. Le rayon minimum des cylindres est déterminé par les spécifications du matériau et l'épaisseur des lamelles. Le pourcentage de déformation en flexion suggéré par le fournisseur est de 2.5%. Pour augmenter la fiabilité des prototypes, une déformation maximale de 2% a été considérée. Les équations de résistance des matériaux ont été utilisées pour déterminer le rayon de courbure des cylindres. Dans le cas présent, la lamelle passe d'un rayon de courbure de $-R$ à $+R$ et le pourcentage de déformation de la fibre externe ϵ_{max} est donné à l'équation suivante :

$$\epsilon_{max} = \frac{c}{R} \quad (1.1)$$

où c est l'épaisseur de la lamelle. Donc le rayon de courbure minimum requis est de :

$$R = \frac{c}{\epsilon_{max}} = \frac{0,4 \text{ mm}}{0,02} = 20 \text{ mm} \quad (1.2)$$

Pour éviter que la lamelle flexible ne soit attachée aux cylindres un espace minimum entre eux doit être prévu. Cet espace réduit la rigidité en flexion et en torsion. Pour réduire cet espace, une feuille de papier est insérée entre les lamelles et les cylindres tel qu'illustré à la figure (1.3).

1.1.3.2 Autres méthodes de fabrication

L'entrecroisement des bandes flexibles rend la fabrication par électro-érosion en un seul bloc impossible. Cependant, il est possible de créer deux ou trois blocs facilement assemblables. En fait, il doit y avoir autant de blocs qu'il y a de lamelles flexibles car il est facile de créer deux cylindres reliés par une seule bande flexible. Les cylindres sont pourvus d'une partie mâle ou femelle qui permet de les assembler avec une grande précision. Cet assemblage est illustré à la figure 1.4. Les formes d'assemblage peuvent être usinées par des méthodes conventionnelles avant que les lamelles ne soit créées par électro-érosion.

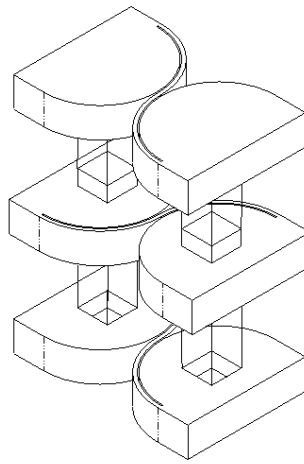


FIG. 1.4 – Assemblage d'un joint X_R fabriqué par électro-érosion.

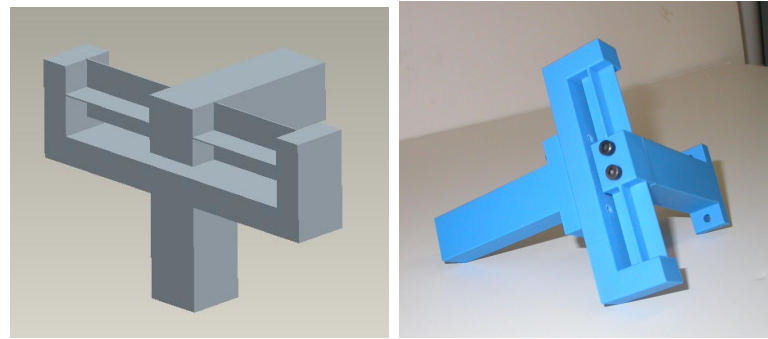
L'assemblage est une méthode appropriée parce qu'elle permet d'appliquer une précontrainte dans les bandes flexibles. Cette précontrainte a l'avantage d'augmenter la rigidité du joint en flexion et en torsion. Cependant, cette contrainte s'ajoute aux contraintes dues aux rotations. Il faut alors prévoir soit une épaisseur plus petite pour les bandes ou un plus grand diamètre des cylindres. La précision de l'assemblage est moins critique que pour d'autres types de liaisons. Les lamelles sont brasées sur les cylindres. C'est une méthode qui s'apparente à la soudure, mais où le métal d'apport est infiltré entre les deux surfaces à souder. Cette méthode, contrairement à la soudure permet de conserver les propriétés du matériau à proximité de la soudure, ce qui est essentiel pour cette application. Cette méthode est coûteuse en temps et le brasage est une technique difficile à réaliser, mais cela s'avère approprié pour la fabrication d'un prototype. La méthode précédente peut être semi-automatisée et serait préférable

pour une fabrication en série. De plus, elle assure une certaine uniformité des pièces fabriquées.

1.2 Joint compliant en croix

1.2.1 Description

Le pivot en croix est constitué de deux bandes flexibles qui s'intersectent à angle droit pour former une section en croix. Les extrémités de cette croix sont encastrées et la croix, en se déformant en torsion, permet un mouvement en rotation d'une extrémité par rapport à l'autre. La torsion se fait autour de l'axe d'intersection des deux bandes flexibles. L'avantage de la section en croix est d'avoir une faible rigidité en torsion par rapport à la rigidité en flexion. Cette particularité permet de construire un pivot ayant un grand ratio de rigidité. On définit le ratio de rigidité comme étant la comparaison de la rigidité dans les directions où le mouvement n'est pas désiré par rapport à la rigidité dans la direction de déplacement. Comme il y a habituellement cinq directions (linéaires ou angulaires) où le mouvement n'est pas désiré, la direction dans laquelle la rigidité est la plus faible est habituellement utilisée pour définir le ratio de rigidité. Un grand ratio de rigidité est donc préférable. La position de l'axe de rotation est fixe si les déformations parasites en flexion sont négligées. Ceci est un avantage par rapport aux pivots à lames croisées séparées et non-séparées, qui eux vont voir la position de leur centre de rotation se déplacer avec le déplacement angulaire (Voir [17] pages. 202–203). Ces deux caractéristiques font en sorte que le joint en croix est bien adapté aux mécanismes de précision. L'encombrement est bon pour un pivot offrant un ratio de rigidité aussi grand. L'amplitude de déplacement angulaire est bonne pour une liaison flexible. Le pivot en croix est étudié plus en détail dans [15]. Dans cet article, le pivot en croix est comparé à plusieurs autres géométries de pivots compliants. Les auteurs concluent que le pivot en croix est supérieur lorsque comparé à l'aide des critères suivants : (1) amplitude de mouvement, (2) déplacement parasite de l'axe de rotation, (3) ratio de rigidité, (4) concentrations de contraintes et (5) encombrement.



(a) Model

(b) Prototype

FIG. 1.5 – Photographie d'un prototype de joint en croix.

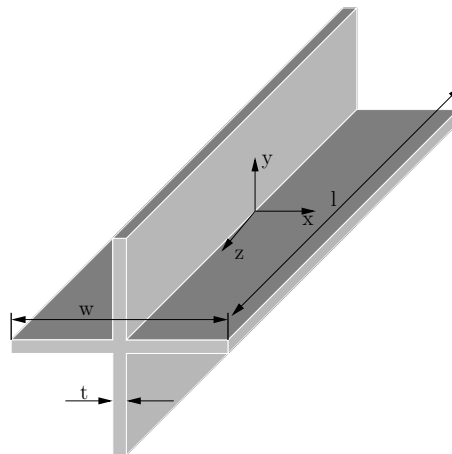


FIG. 1.6 – Dimensions du joint en croix.

1.2.2 Équations de rigidité

L'amplitude maximale de rotation du pivot dépend de la géométrie et du matériau utilisé. Elle est définie par l'équation suivante :

$$\theta_{max} = \frac{l\tau_{max}}{Gt} \quad (1.3)$$

où, tel qu'illustré à la figure 1.6, θ_{max} = amplitude maximale de rotation, l = longueur de la partie en croix, τ_{max} = contrainte maximale admissible du matériau, G = module d'élasticité en torsion et t = épaisseur des bandes flexibles.

La rigidité en torsion est approximée par l'équation suivante :

$$K_{tor} = \left(\frac{w}{t} - 0,373 \right) \frac{2Gt^4}{3l} \quad (1.4)$$

où K_{tor} est la rigidité en torsion et $w =$ est la largeur de la section en croix (voir la figure 1.6).

Après la rigidité en torsion, la rigidité en flexion est la plus faible. Elle est approximée par l'équation suivante :

$$K_f = \frac{Gt^4 (1 + \nu) \left(\frac{w}{y} + \frac{w^3}{t^3} - 1 \right)}{6l} \quad (1.5)$$

où $\nu =$ ratio de Poisson. Le ratio de rigidité est donc donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} r &= \frac{K_f}{K_{tor}} \\ &= \frac{(1 + \nu) (\lambda + \lambda^3 - 1)}{4 (\lambda - 0,373)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

où

$$\lambda = \frac{w}{t} \quad (1.7)$$

et λ est donc l'unique paramètre qui influence le ratio de rigidité. Ce dernier croît de façon quadratique avec l'augmentation de λ . Pour réduire les dimensions du joint, il est donc avantageux de réduire l'épaisseur des bandes flexibles. Pour plus d'information sur l'analyse statique de ce pivot, consulter ([17], pages. 204–206 ; [18]).

1.2.3 Prototypes

Cette liaison est relativement complexe à fabriquer. Sa géométrie ne permet pas de le fabriquer par électro-érosion à fil en une seule pièce. L'assemblage des pièces est habituellement requis, sauf pour la fabrication par prototypage rapide. Le prototype fabriqué par cette méthode présentait un bon ratio de rigidité. Une méthode de fabrication qui aurait permis de faire des bandes flexibles plus minces aurait permis d'améliorer les caractéristiques du prototype. Les dernières générations en matière de prototypage rapide permettent d'utiliser des matériaux plus performants tel que le polypropylène et des sections plus minces. Ces dernières avancées technologiques rendent le prototypage rapide compétitif face à d'autres méthodes de fabrication. Cependant, pour pouvoir



FIG. 1.7 – Photographie du prototype fabriqué au CNRC.

utiliser des métaux dans la fabrication de cette liaison il faut procéder à l’assemblage de pièces fabriquées par électro-érosion. Tout d’abord, la forme en croix est découpée dans un bloc. Pour former les extrémités de la liaison il est possible d’utiliser le bloc découpé dans lequel la forme en croix est déjà présente. Le bloc doit être coupé en deux. Par contre, il n’est pas possible d’ajuster le serrage de cette manière. Il est aussi possible de fabriquer les extrémités indépendamment, ce qui permet de choisir l’épaisseur de la cavité. Des lamelles très minces dans des matériaux métalliques très performants, peuvent être assemblées pour fabriquer les articulations. Les manipulations délicates que requiert l’assemblage rendent cette méthode coûteuse, mais les performances qui peuvent être atteintes sont supérieures. Un prototype miniature, illustré à la figure 1.7, a été assemblé au CNRC de cette façon.

1.3 Joint à col semi-circulaire

Le comportement d’un joint à col semi-circulaire est très proche d’un pivot. Les déformations sont concentrées dans la partie la plus mince de l’articulation. La cinématique du joint à col semi-circulaire est donc beaucoup plus prévisible que celle d’un joint à col prismatique par exemple. Les rigidités dans les directions non souhaitées sont cependant plus faibles que pour d’autres joints plus complexes. Par contre, le ratio de rigidité peut être amélioré par un design adéquat du mécanisme.

1.3.1 Équations de rigidité et de course angulaire pour un joint à col semi-circulaire

Des équations ont été développées par Simon Henein dans son livre [7]. Ces équations facilitent le design de mécanismes à base de joints à col semi-circulaire. La géométrie de l'articulation est donnée à la figure 1.8. Les équations (1.8) à (1.11) sont valides à $\pm 5\%$ dans le domaine suivant :

$$e \in [10^{-6}, 10^{-3}]$$

$$r \in [10^{-4}, 1]$$

$$\frac{r}{e} > 5$$

$$K_{\alpha_M} = \frac{2Ebe^{2,5}}{9\pi\sqrt{r}} \quad (1.8)$$

$$K^t_{\alpha_M} \simeq 0,0295Eb^3\sqrt{\frac{e}{r}} \quad (1.9)$$

$$\alpha_M \simeq 0,75\pi\frac{\sigma_{adm}\sqrt{r}}{E\sqrt{e}} \quad (1.10)$$

$$K_{trac} \simeq 0,353Eb\sqrt{\frac{e}{r}} \quad (1.11)$$

où E est le module de Young, σ_{adm} est la contrainte maximale admissible, b est l'épaisseur du joint, e est l'épaisseur de la section mince et r est le rayon du col. K_{α_M} est la rigidité en flexion autour de l'axe de rotation, $K^t_{\alpha_M}$ la rigidité en flexion dans la direction transverse, α_M est l'amplitude de rotation maximale du joint et K_{trac} est la rigidité en traction.

L'équation (1.8) correspond à la rigidité angulaire normale, l'équation (1.9) à la rigidité angulaire transverse, l'équation (1.10) à la course angulaire et l'équation (1.11) à la rigidité en traction/compression.

1.3.2 Simulations sur Ansys de joints à col semi-circulaire

Le joint à col semi-circulaire a un comportement proche d'une liaison rotoïde. Cette similitude varie en fonction de la géométrie du joint. L'effet de la géométrie est illustré

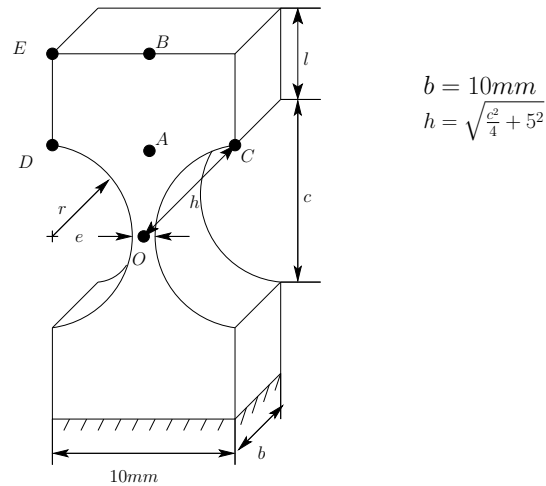


FIG. 1.8 – Géométrie du joint à col semi-circulaire.

Matériau	σ_D^1 (MPa)	E (GPa)
P400 ABS	22.5 ²	1.8
Aluminium 6061-T6	96.5	69
Aluminium 7039-T64	180	69.6
Titane	500	114

TAB. 1.1 – Propriétés des matériaux utilisés.

par la comparaison de quatre joints. Ces derniers ont été dessinés de façon à obtenir une même course angulaire, $\sin \theta_{max} = 0.05$, pour quatre matériaux différents : le P400 ABS, l'aluminium 6061-T6, l'aluminium 7039-T64 et le titane. Les propriétés des alliages de titane varient beaucoup et celles utilisées pour la comparaison ont été tirées de [7]. Dans le tableau 1.1, on retrouve les propriétés des quatre matériaux mentionnés. Les dimensions géométriques des quatre joints sont données ensuite dans le tableau 1.2 où le joint 1 est en ABS, le 2 en 6061-T6, le 3 en 7039-T64 et le 4 en titane.

La linéarité de rotation du joint dépend de l'amplitude de la trajectoire de l'axe de rotation. En effet, la position de ce dernier varie en fonction de l'angle de rotation. Plus la zone dans laquelle l'axe de rotation se déplace est grande, plus les effets non-linéaires sont importants. Théoriquement, si toutes les déformations étaient concentrées au point de pivot, l'axe de rotation resterait fixe. On peut estimer l'amplitude de déplacement

¹Contrainte admissible en fatigue pour 500,000,000 cycles

²La limite en fatigue du matériau n'étant pas connue, la limite élastique du matériau est donc utilisée

No du joint	e (mm)	r (mm)	c (mm)	h (mm)
1	1	5	9.9496	7.0533
2	0.1	24	9.2516	6.8116
3	0.1	7	12.9348	8.1748
4	0.1	2.3	4	5.3852

TAB. 1.2 – Paramètres géométriques des joints.

de l'axe de rotation par l'étendue des contraintes dans le col. Une rotation de 2.85° a été imposée sur un modèle *Ansys* de chaque joint. Les figures 1.9 donnent l'étendue des contraintes dans les différents joints. De ces figures, on constate que le paramètre e a une très grande influence sur la distribution des contraintes. Les figures 1.9(b), 1.9(c) et 1.9(d) sont montrées en faisant un zoom sur la zone d'intérêt. On ne peut cependant pas comparer avec précision l'étendue des contraintes, car le logiciel *Ansys* ne permet pas de choisir l'échelle du zoom. Les figures agrandies ne sont donc pas toutes à fait à la même échelle. La différence entre les trois joints n'est pas suffisamment importante pour qu'il soit possible de la visualiser dans ces conditions.

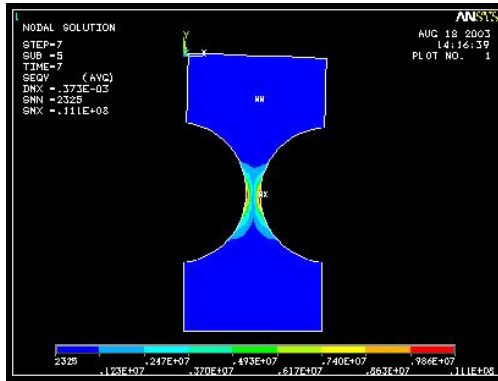
1.4 Conclusion

La description des trois liaisons étudiées dans ce chapitre ne permet pas de choisir directement une liaison flexible mieux adaptée que les autres aux mécanismes de haute précision. Le tableau 1.3 compare les liaisons flexibles entre elles.

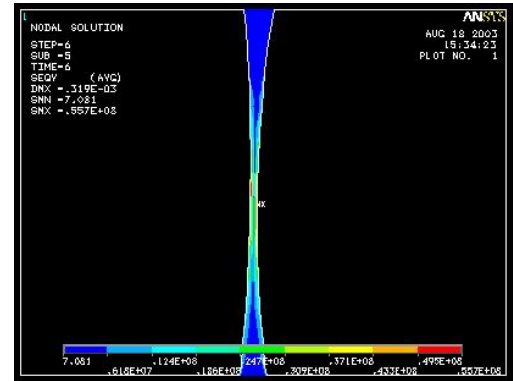
Caractéristiques	Joint X_R	Joint en croix	Joint semi-circulaire
Ratio de rigidité	bien	excellent	bien
Plage angulaire	excellent	très bien	moyen
Encombrement	bien	bien	excellent
Facilité à fabriquer	moyen	moyen	excellent

TAB. 1.3 – Comparaison des trois liaisons flexibles étudiées.

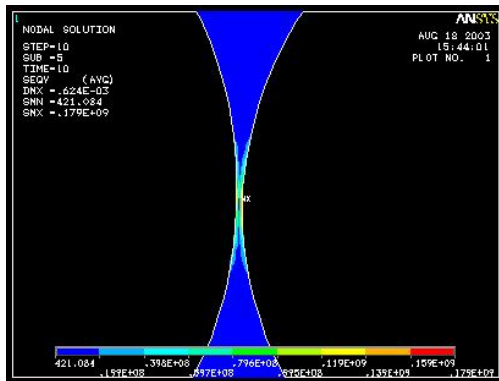
Le joint X_R possède un avantage non négligeable, soit de pouvoir couvrir un angle de $\pm 180^\circ$. Cette caractéristique permet de concevoir des mécanismes ayant un espace atteignable aussi grand qu'avec des liaisons rotoïdes rigides. Cependant, pour obtenir un



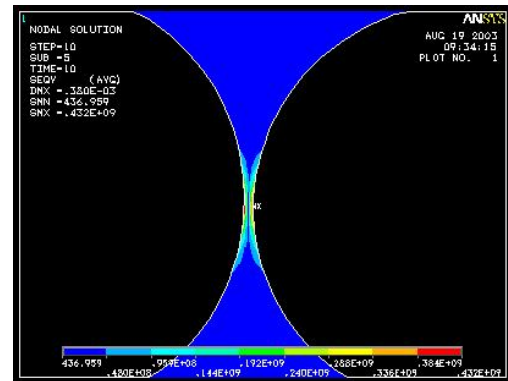
(a) Joint 1



(b) Joint 2



(c) Joint 3



(d) Joint 4

FIG. 1.9 – Analyse des contraintes dans les joints à col semi-circulaire.

ratio de rigidité acceptable, le joint X_R doit être conçu de façon à minimiser le jeu entre les lamelles et les cylindres, ce qui peut être difficile. Sauf dans le cas du prototypage rapide, l'assemblage est requis pour constituer ce joint. Des recherches sont actuellement en cours à l'Université de Delft pour trouver une méthode de fabrication qui maximise le ratio de rigidité du joint. Il faut aussi noter que la cinématique d'un mécanisme constitué d'un ou plusieurs joints X_R serait plus complexe qu'avec des liaisons rotoïdes. Cette caractéristique sera étudiée plus en détail au chapitre 3.

Le joint en croix peut couvrir un angle beaucoup moins important. Dans des conditions optimales, le joint pourrait couvrir une plage de $\pm 45^\circ$, mais probablement moins dans des conditions réelles. Cette amplitude est néanmoins exceptionnelle dans le domaine des joints flexibles et le ratio de rigidité est excellent. L'encombrement est ac-

ceptable et semblable au joint X_R . On peut considérer que le déplacement de l'axe de rotation est négligeable et la cinématique est identique à celle d'une liaison rotoïde. La conception de cette liaison peut être un peu complexe. Tout comme pour le joint X_R , il est impossible de construire l'articulation d'une seule pièce sauf par prototypage rapide. L'assemblage est donc requis pour pouvoir choisir un matériau métallique.

Le joint à col semi-circulaire est très différent des deux autres. À lui seul, il présente un ratio de rigidité plus faible que le joint en croix ou un joint X_R possédant un faible jeu. Il peut cependant être assemblé en parallèle tel qu'il sera présenté dans le chapitre 2 et ses propriétés sont alors fortement augmentées. Il peut être conçu facilement par électro-érosion ce qui fait qu'il est souvent utilisé.

Ces trois joints flexibles ont été utilisés dans des mécanismes parallèles présentés dans le prochain chapitre.

Chapitre 2

Synthèse de mécanismes parallèles compliants

Les propriétés d'un mécanisme dépendent autant des liaisons utilisés que de son architecture. L'architecture parallèle offre plusieurs avantages. Tout d'abord, les efforts sont répartis dans toutes les branches du mécanisme ce qui le rend plus rigide. La rigidité face aux efforts externes est primordiale pour garantir la précision du mécanisme. De plus, les actionneurs peuvent être placés à la base. Comme le mécanisme ne doit pas supporter ses propres actionneurs, ses membrures peuvent être plus légères et la puissance requise aux actionneurs inférieure. En général, plus la puissance à fournir par les actionneurs est grande, moins bonne est la précision. Enfin, les liaisons flexibles sont généralement des articulations passives. Les architectures sérielles ont des moteurs à toutes les articulations mais les architectures parallèles n'ont en général que des moteurs à la base. Les architectures parallèles sont donc mieux adaptées à l'utilisation de liaisons flexibles.

Dans ce chapitre, les liaisons compliantes étudiées au chapitre précédent seront utilisées pour synthétiser des mécanismes parallèles possédant de un à trois degrés de liberté. Dans un premier temps, trois mécanismes avec des joints à col semi-circulaire sont présentés. Comme le ratio de rigidité d'un seul joint est faible, tous les mécanismes proposés sont composés de mécanismes à quatre barres. Ensuite, un Tripteron compliant composé de joints en croix est décrit avec ses équations de rigidité. Enfin, cinq mécanismes parallèles plans composés de joints X_R sont présentés dans le but d'en faire l'analyse cinématique dans le chapitre suivant.

2.1 Mécanismes à cols semi-circulaires

2.1.1 Table à quatre cols semi-circulaires

2.1.1.1 Description

La table à quatre cols semi-circulaires est en fait un mécanisme à quatre barres plan compliant où chaque articulation est un joint à col semi-circulaire. Le mécanisme est en fait un parallélogramme, c'est-à-dire un cas particulier de mécanisme à quatre barres plan. Le particularité d'un mécanisme parallélogramme est de produire un mouvement en arc de cercle. Pour de petits déplacements, le mouvement de l'effecteur est pratiquement rectiligne. Le petit déplacement dans la direction non désirée est appelé déplacement parasite. Ce déplacement parasite est facilement estimé. Un deuxième mouvement parasite est présent. Ce dernier est dû au déplacement de l'axe de rotation des liaisons compliantes tel qu'expliqué au chapitre précédent. Ce mouvement parasite est très difficile, voir impossible, à estimer a priori.

2.1.1.2 Équations de rigidité et de course linéaire de la table

Les équations pour la table à quatre cols semi-circulaires sont tirées des équations présentées au chapitre précédent. Elles ont le même domaine de validité que les équations des joints semi-circulaires. Cependant, de nouvelles hypothèses simplificatrices sont faites diminuant la précision des équations.

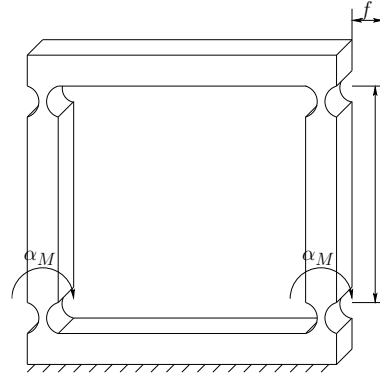


FIG. 2.1 – Illustration de la course normale en translation sur la table à quatre cols semi-circulaires.

Course normale en translation La course en translation f pour une course angulaire α_M est (voir la figure 2.1) :

$$f = l \sin \alpha_M \quad (2.1)$$

où l est la longueur de la tige entre la base et l'effecteur et α_M est la course angulaire d'un joint à col semi-circulaire. En posant l'hypothèse des petits angles et en utilisant l'équation (1.10), l'expression devient :

$$f \simeq l\alpha_M = \frac{3\pi l\sigma_{adm}\sqrt{r}}{4E\sqrt{e}} \quad (2.2)$$

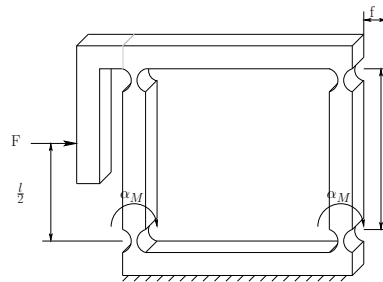


FIG. 2.2 – Illustration de la force appliquée pour le calcul de la rigidité équivalente en translation.

Rigidité en translation L'énergie potentielle totale de la table est utilisée pour déterminer la rigidité équivalente en translation. Seul le mouvement horizontal est considéré. L'énergie potentielle de la table représentée par un ressort linéaire est donnée par l'équation suivante :

$$U_{tot} = \frac{1}{2}Kf^2 \quad (2.3)$$

où K est la rigidité équivalente en translation du système.

L'énergie potentielle totale doit être égale à la somme des énergies potentielles stockées dans chacune des liaisons. On suppose que les déformations dans le reste de la table sont négligeables. Selon la position du point d'application de la force, l'amplitude du moment induit dans l'effecteur varie. Ce moment est transmis dans les liaisons comme des efforts en traction et compression. La rigidité dans cette direction étant très grande, les déformations sont très petites. Comme dans l'équation de l'énergie potentielle les déformations sont élevées au carré, leur contribution est considérée négligeable. Pour des tables qui ont un faible ratio de rigidité c'est-à-dire que la rigidité en traction/compression n'est pas beaucoup plus élevée que la rigidité naturelle en translation, cette hypothèse n'est plus valide. De plus, dans un tel cas, la table ne pourra plus être considérée comme un mécanisme à un degré de liberté. L'énergie potentielle totale dans les quatre liaisons est donnée par l'équation suivante :

$$U_{tot} \simeq 4 \frac{1}{2} K_{\alpha} \alpha_M^2 \quad (2.4)$$

En combinant les équations (2.3) et (2.4), on obtient l'expression de la rigidité équivalente en translation, soit :

$$K \simeq 4 K_{\alpha_M} \frac{\alpha_M^2}{f^2} = 4 \frac{K_{\alpha_M}}{l^2} \quad (2.5)$$

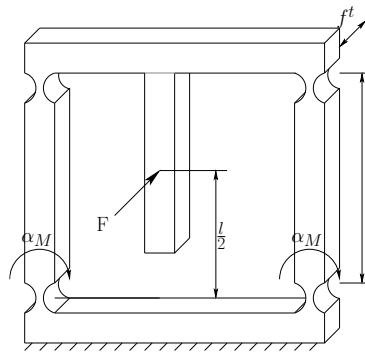


FIG. 2.3 – Illustration de la force appliquée pour le calcul de la rigidité équivalente transverse en translation.

Rigidité transverse en translation En utilisant la même démarche que pour la rigidité naturelle en translation, la rigidité transverse en translation est obtenue.

$$K^t \simeq 4 \frac{K_{\alpha_M}^t}{l^2} \quad (2.6)$$

La position de la force F illustrée à la figure 2.3 est importante pour éliminer tout mouvement de rotation à l'effecteur. Si la force n'est pas trop loin de la position illustrée, la rotation à l'effecteur est négligeable.

Rigidité en traction/compression L'équation de l'énergie potentielle totale obtenue par la méthode décrite précédemment est

$$U_{tot} = \frac{1}{2}K_{trac}^T f_{trac}^2 = 4\frac{1}{2}K_{trac} f_{trac}^2 \quad (2.7)$$

où K_{trac}^T est la rigidité en traction/compression équivalent de la table, K_{trac} est la rigidité en traction/compression du joint à col semi-circulaire et f_{trac} est le déplacement en traction/compression. En isolant K_{trac}^T dans l'équation (2.7) et en utilisant l'équation (1.11) on obtient

$$K_{trac}^T = 4K_{trac} = 1.412Eb\sqrt{\frac{e}{r}} \quad (2.8)$$

2.1.1.3 Méthodes de fabrication

La table à quatre cols semi-circulaires est utilisée comme liaison en translation. Ce mécanisme a l'avantage d'être facile à fabriquer et offre une bonne rigidité dans les directions où le mouvement est contraint. Cependant l'encombrement est important.

En effet, l'amplitude de rotation des joints à col semi-circulaire étant limitée, les barres doivent être longues pour obtenir le déplacement requis. La fabrication du mécanisme peut être également réalisée par électro-érosion car il présente une géométrie bidimensionnelle.

2.1.2 Mécanisme à 1 ddl à cols semi-circulaires avec mouvement parasite compensé

2.1.2.1 Description

La table à quatre cols semi-circulaires présentée à la section précédente est caractérisée par un mouvement parasite. Pour certaines applications, ce mouvement parasite n'est pas acceptable, comme c'est le cas pour un mécanisme actionné par des

moteurs linéaires. En effet, les moteurs linéaires requièrent une très grande précision de positionnement. Le mouvement parasite risquerait de créer un contact entre le moteur et le rail magnétique. Dans une telle situation, il est préférable d'utiliser une table à quatre cols modifiée pour éliminer le mouvement parasite. Cette table est présentée à la figure 2.4. Ce mécanisme est composé de deux mécanismes à quatre barres en série. Comme les barres des deux tables ont la même longueur, le mouvement parasite de chacune est identique. De plus, la direction des mouvements parasites étant dans des directions inverses, ceux-ci s'annulent pour produire un mouvement parfaitement linéaire. Le mécanisme ainsi décrit est en fait un mécanisme sériel à 2 ddls. Pour contraindre un degré de liberté, une deuxième branche identique à la première est ajoutée perpendiculairement (Voir figure 2.4). Le mécanisme ainsi obtenu est plus rigide dans les directions contraintes que le mécanisme précédent. Cependant, l'encombrement est encore plus important.

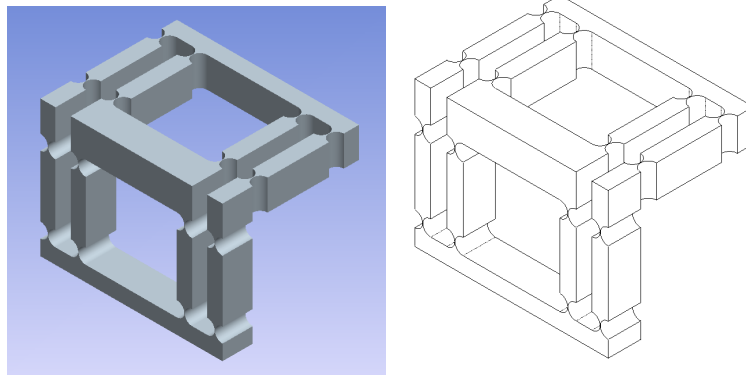


FIG. 2.4 – Table à cols semi-circulaires double compensée pour le mouvement parasite.

Il est important de noter que le comportement d'un tel mécanisme pourrait dégénérer à la position neutre. En effet, lorsque l'effecteur est la position centrale, un petit mouvement dans les joints à col semi-circulaire est possible. Il s'agit donc d'une position singulière pour ce mécanisme. Le joint pourrait possiblement entrer en vibration plus facilement à la position neutre. Cependant, plus la rigidité du joint sera grande, plus les risques de vibration seront minimales. De plus, si le joint est actionné directement, la position singulière ne peut occasionner aucun problème.

2.1.2.2 Équations de rigidité et de course angulaire pour une table à cols semi-circulaires double

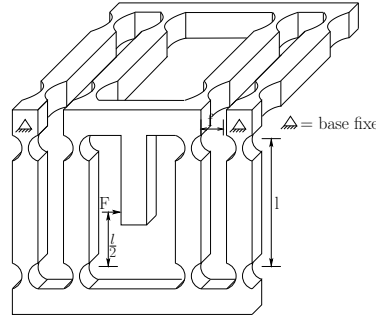


FIG. 2.5 – Illustration de la force normale sur la table à cols semi-circulaires double compensée pour le mouvement parasite.

Course normale en translation Comme la table à cols semi-circulaires double est composée de deux tables à quatre cols en série, la course admissible est le double de la course de cette dernière, c'est-à-dire :

$$f \simeq 2l\alpha_M = \frac{3\pi l\sigma_{adm}\sqrt{r}}{2E\sqrt{e}} \quad (2.9)$$

Rigidité normale en translation Ce mécanisme étant semblable à la table à quatre cols semi-circulaires, les mêmes hypothèses sont posées. Cependant, il y a seize cols semi-circulaires au lieu de quatre d'où l'expression suivante

$$K_d \simeq 16K_{\alpha_M} \frac{\alpha_M}{f^2} \quad (2.10)$$

La course angulaire étant deux fois plus grande, la rigidité équivalente sera donc identique à celle de la table à quatre cols semi-circulaires.

$$K_d \simeq 4 \frac{K_{\alpha_M}}{l^2} \quad (2.11)$$

Rigidité transverse en translation et en traction/compression En raison de la géométrie du mécanisme, ces deux rigidités sont équivalentes. En effet, lorsqu'une force est appliquée dans l'une ou l'autre des directions indiquées sur la figure 2.6, la moitié des liaisons travaillent en traction/compression. La contribution des quatre liaisons travaillant en flexion est négligée car elle est beaucoup plus faible. L'équation de l'énergie potentielle totale est la suivante :

$$U_{tot} \simeq \frac{1}{2}K_t^d f^2 \simeq 4 \frac{1}{2}K_{trac} f^2 \quad (2.12)$$

où K_t^d est la rigidité équivalente transverse en translation et en traction/compression et f^t est la course linéaire transverse. En isolant K_t^d on obtient :

$$K_t^d \simeq 4K_{trac} \quad (2.13)$$

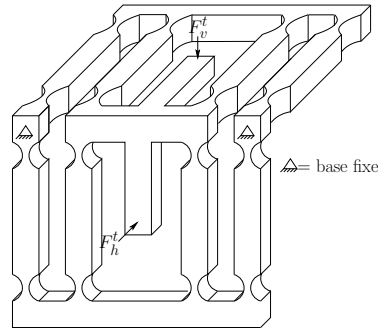


FIG. 2.6 – Illustration des forces transverses horizontale et verticale sur la table à cols semi-circulaires double compensée pour le mouvement parasite.

2.1.2.3 Prototype

Un prototype de ce mécanisme a été produit par prototypage rapide. Ce prototype est illustré à la figure 2.7.

2.1.3 Mécanisme à 2 ddls à col semi-circulaire avec mouvement parasite compensé

2.1.3.1 Description

Le mécanisme précédent peut être utilisé comme articulation en translation pour créer des mécanismes à plusieurs ddls. En utilisant des liaisons en translation il est facile de créer des mécanismes ayant jusqu'à trois ddls parfaitement découplés. Un exemple de mécanisme à deux ddls est illustré à la figure 2.8(a). Il est plus facile de visualiser le mécanisme si les joints à col semi-circulaires sont remplacés par des liaisons prismatiques tel qu'illustré à la figure 2.8(b). Ces deux mécanismes ont la même architecture. Dans un mécanisme parallèle, seules les liaisons à la base sont actionnées. On peut voir sur

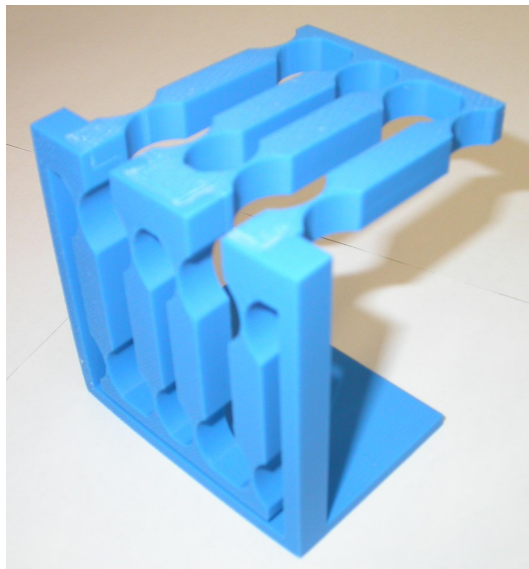


FIG. 2.7 – Prototype de mécanisme à 1 ddl à cols semi-circulaires avec mouvement parasite compensé.

la figure 2.8(a) la place réservée aux moteurs. Au chapitre 4 un modèle plus détaillé avec les actionneurs sera présenté.

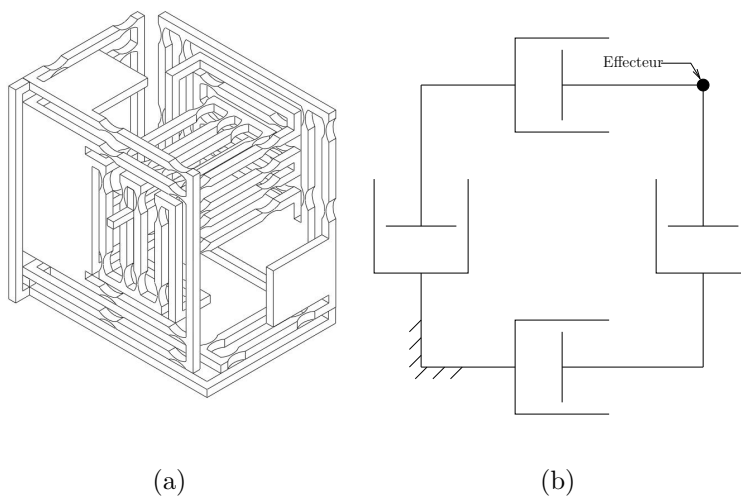


FIG. 2.8 – mécanisme à 2 ddl à col semi-circulaire.

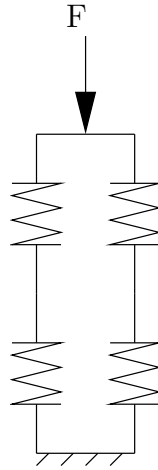


FIG. 2.9 – Rigidité équivalente du mécanisme à 2 ddl.

2.1.3.2 Équations de rigidité

L'analyse de la rigidité se fait très facilement à partir des équations du mécanisme à un ddl. La rigidité dans chaque direction du plan dans lequel se déplace l'effecteur est équivalente à deux ressorts en parallèle.

$$K_{2ddl} = 2K_{1ddl} \quad (2.14)$$

où K_{1ddl} est la rigidité exprimée à l'équation (2.11). La rigidité dans la direction normale au plan de déplacement de l'effecteur est un assemblage de ressorts en série et en parallèle. Tel qu'illustré à la figure 2.9 on a :

$$K_{2ddl}^t = \frac{2}{\frac{1}{K_{1ddl}^t} + \frac{1}{K_{1ddl}^t}} = K_{1ddl}^t \quad (2.15)$$

où K_{1ddl}^t est la rigidité exprimée à l'équation (2.13).

2.2 Tripteron compliant

2.2.1 Description et Prototype

Le Tripteron est un mécanisme parallèle translationnel à trois ddls dont l'architecture est 3-PRRR. Cette architecture a été proposée par Kong et Gosselin [12] et

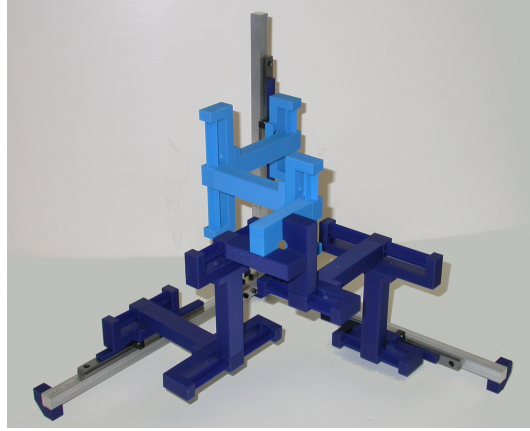


FIG. 2.10 – Prototype du Tripterion compliant.

par Kim et Tsai [11]. Ce mécanisme a la particularité d'être complètement découplé, d'avoir une matrice Jacobienne constante et de ne présenter aucune singularité. Tous ces éléments facilitent grandement le contrôle du mécanisme. L'effecteur se déplace selon les directions des trois axes des liaisons prismatiques à la base. Le Tripterion compliant est obtenu en remplaçant les liaisons rotoïdes non-actionnées par des liaisons compliantes. Le mécanisme résultant a les mêmes caractéristiques d'un point de vue cinématique que les mécanismes présentés dans les articles [12] et [11]. La liaison flexible choisie pour remplacer les articulations rotoïdes dans le mécanisme proposé par Wang et Gosselin [18] est le joint en croix décrit à la section précédente. Cet article présente les solutions aux problèmes cinématiques inverse et direct ainsi que le modèle statique. Le prototype construit au laboratoire [18], qui est illustré à la figure 2.10, utilise des rails pour les liaisons prismatiques à la base. Ces rails sont très précis et engendrent très peu de frottement. Pour profiter complètement des avantages des mécanismes compliantes, les liaisons à la base devraient être flexibles. Le mécanisme présenté à la section 2.1.2 pourrait être utilisé pour remplacer les rails. Dans le cas de ce mécanisme, l'encombrement de la liaison ne pose pas véritablement d'inconvénient.

2.3 Mécanismes parallèles plans avec joints X_R

Les joints X_R peuvent être utilisés pour remplacer les liaisons rotoïdes dans n'importe quelle architecture. La cinématique du mécanisme en sera cependant modifiée. Comme la cinématique est plus complexe que pour des mécanismes utilisant des liaisons

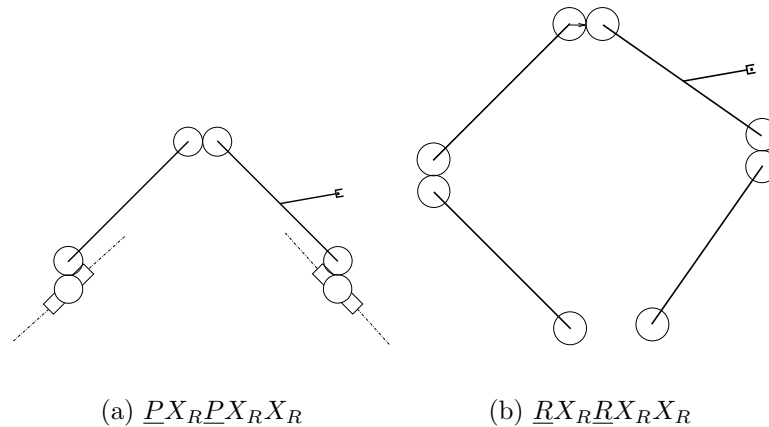


FIG. 2.11 – Architectures à 2 ddls avec joints X_R .

rotoïdes, seuls des mécanismes plans sont proposés. Cinq architectures, dont deux sont à deux ddls et les autres à trois ddls, sont proposées et leur cinématique est résolue dans le chapitre suivant. Les architectures à deux ddls sont les suivantes : $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$ et $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$. Dans les deux cas les deux degrés de liberté utiles à l'effecteur sont en translation. La seule différence entre les deux mécanismes est le type des articulations à la base qui sont dans le premier cas des liaisons prismatiques et dans le deuxième des liaisons rotoïdes. Ces deux mécanismes sont illustrés schématiquement à la figure 2.11. Dans le cas des mécanismes à trois ddls, la seule distinction entre les trois mécanismes est le type des articulations à la base. On a les trois architectures suivantes : $3 - \underline{P}X_RX_R$, $3 - \underline{R}X_RX_R$ et $3 - \underline{X}_RX_RX_R$. Dans tous les cas il y a deux degrés de liberté en translation et un en rotation à la plate-forme. Ces mécanismes sont illustrés à la figure 2.12. *Un prototype du mécanisme $3 - \underline{X}_RX_RX_R$ a été fabriqué et est illustré à la figure 2.13. Ce prototype est caractérisé par un très grand espace atteignable. Cependant, le mécanisme a du être conçu pour reposer sur une planche dû à la faible rigidité des joints X_R en flexion.* Il n'est pas précisé si les liaisons à la base sont compliant ou non car cela n'a pas d'influence sur la cinématique. D'autres exemples de mécanismes parallèles utilisant des liaisons roulantes, tel le joint X_R , sont présentés en [6].

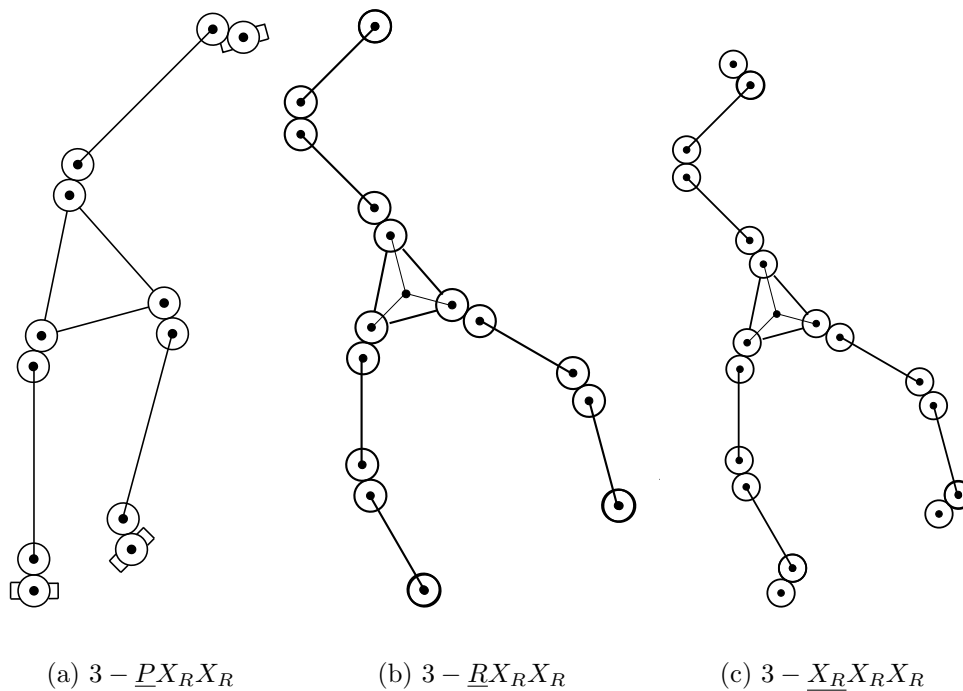


FIG. 2.12 – Architectures à 3 ddls avec joints X_R .

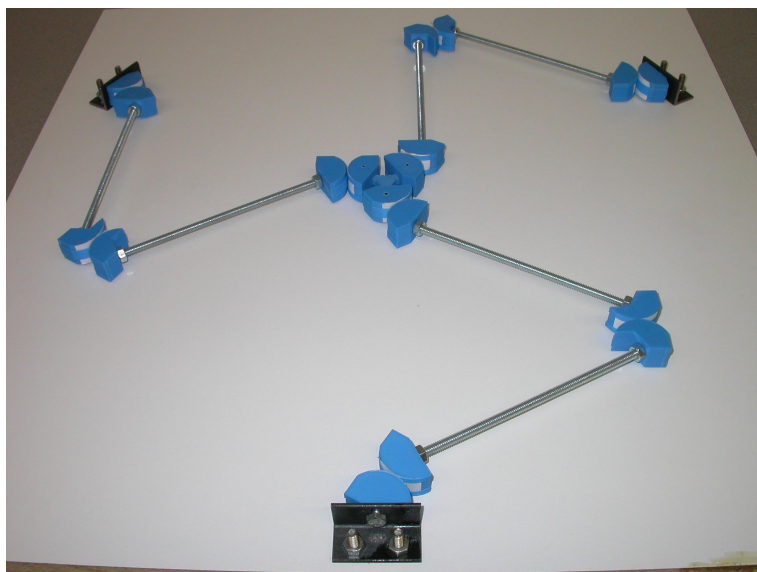


FIG. 2.13 – Prototype d'un mécanisme $3 - \underline{X}_RX_RX_R$.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, des architectures de mécanismes parallèles ont été synthétisées en utilisant les liaisons compliantes étudiées au chapitre 1. Ces architectures sont soit tirées de la littérature, soit nouvelles, comme celles utilisant les joints X_R . Ces dernières étant originales, leur cinématique sera développée au chapitre suivant.

Chapitre 3

Analyse cinématique de mécanismes parallèles compliants utilisant des liaisons X_R

Pour pouvoir contrôler adéquatement un mécanisme parallèle il faut en connaître les équations cinématiques. Pour une commande en boucle ouverte seule la connaissance du PGI est nécessaire, mais pour une commande en boucle fermée, il faut aussi pouvoir calculer le PGD. Le calcul des équations de vitesse est aussi requis pour permettre un suivi de trajectoire dans le temps. De plus, la connaissance de la Jacobienne permet de calculer le lieu des singularités et l'espace atteignable qui sont des informations nécessaires à la planification des trajectoires.

Les équations cinématiques d'un mécanisme contenant des joints X_R étant très différentes de celles d'un mécanisme construit à l'aide de liaisons rotoïdes, il est nécessaire

de refaire l'analyse cinématique détaillée. Dans ce chapitre, les équations cinématiques sont développées pour les cinq mécanismes parallèles plans utilisant des joints décrits à la section 2.3. Pour les cas simples, il est possible de solutionner explicitement les équations algébriques.

3.1 Cinématique d'un joint X_R

La procédure générale pour résoudre la cinématique d'un joint X_R qui a été développée par Collins dans [3] est utilisée ici. Dans son approche, le joint X_R est représenté par deux liaisons rotoïdes reliées par une barre. Cette barre est dite virtuelle pour la distinguer d'un corps réel. Dans tous les cas étudiés, les rayons des deux cylindres sont égaux, $r_1 = r_2 = r$, et la barre virtuelle est de longueur $2r$. Dû à la condition de non glissement imposée par les bandes flexibles du joint X_R , l'hypothèse suivante est posée :

$$r_1\theta_{i1} = r_2\theta_{i2} \quad (3.1)$$

Pour des cylindres de rayons égaux on a donc :

$$\theta_{i1} = \theta_{i2} \quad (3.2)$$

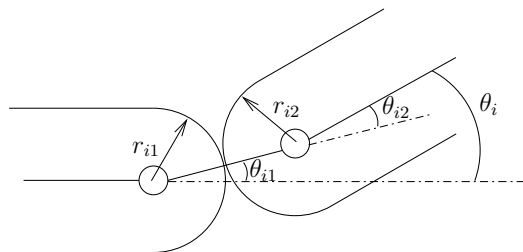


FIG. 3.1 – Cinématique d'un joint X_R .

Si les deux cylindres n'ont pas des rayons égaux, les angles ne sont plus égaux, tel qu'exprimé à l'équation (3.2), mais proportionnels.

3.2 Problème géométrique inverse des mécanismes

Le PGI permet de calculer les coordonnées articulaires à partir de la connaissance des coordonnées cartésiennes. Pour chaque mécanisme, la résolution du PGI est divisée en deux ou trois sections. La première contient deux schémas présentant les angles, les variables et les vecteurs utilisés pour résoudre les équations. L'expression de chacun des vecteurs est donnée explicitement. Les sections suivantes décrivent les étapes pour obtenir les polynômes qui permettent de simplifier le PGI au maximum. Pour le premier mécanisme, un algorithme est donné à titre d'exemple de la procédure de résolution du PGI.

3.2.1 Mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$

Ce mécanisme possède deux ddls et peut être utilisé pour positionner un point dans le plan. Les coordonnées cartésiennes sont données par le vecteur \mathbf{p}_e . Le mécanisme est illustré schématiquement à la figure 3.2 où tous les angles sont définis positifs dans le sens antihoraire.

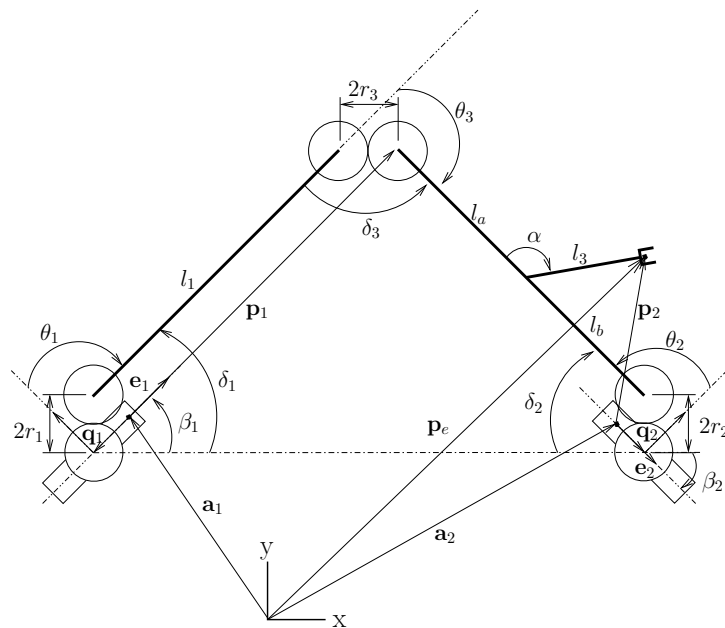


FIG. 3.2 – Schéma du mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$.

3.2.1.1 Définition des vecteurs

Le vecteur $2\mathbf{r}_i$ est défini comme le vecteur reliant le centre des deux cylindres du $i^{\text{ème}}$ joint X_R . Les vecteurs \mathbf{l}_i sont les vecteurs définis le long des membrures, tel qu'illustré à la figure 3.3. Ces vecteurs peuvent être obtenus comme suit :

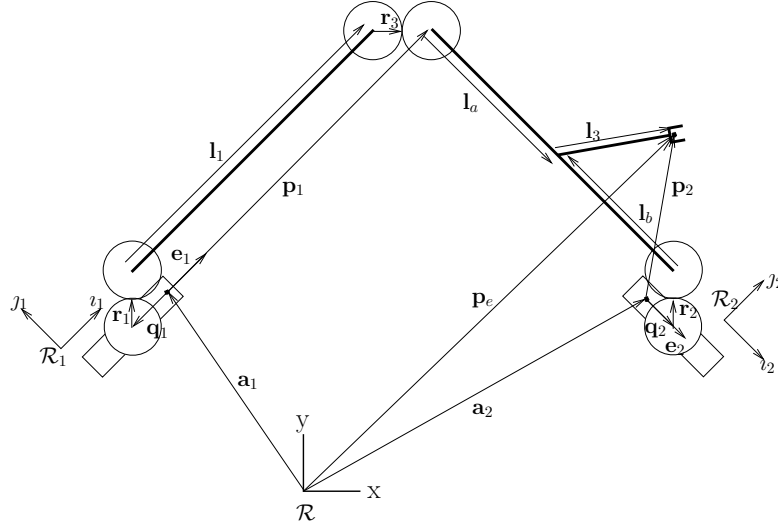


FIG. 3.3 – Définition des vecteurs.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= r_1 \mathbf{Q}(t_1) \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{r}_2 &= r_2 \mathbf{Q}(t_2) \mathbf{E} \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{r}_3 &= r_1 \mathbf{Q}(\theta_1 + t_3) \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{l}_1 &= l_1 \mathbf{Q}(\theta_1) \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{l}_a &= -l_a \mathbf{Q}(\theta_2) \mathbf{E} \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{l}_b &= l_b \mathbf{Q}(\theta_2) \mathbf{E} \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{l}_3 &= l_3 \mathbf{Q}(\theta_2 + \alpha) \mathbf{E} \mathbf{e}_2
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont des vecteurs unitaires orientés le long des axes des liaisons prismatiques tel qu'indiqué à la figure 3.3 et avec

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{(A)} &= \begin{bmatrix} \cos(A) & -\sin(A) \\ \sin(A) & \cos(A) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 t_1 &= \frac{\theta_1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{\theta_2}{2} \\ t_3 &= \frac{\theta_3}{2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

et où les matrices $\mathbf{Q}(A)$ et \mathbf{E} permettent de faire des rotations respectives d'un angle A et de $\frac{\pi}{2}$. En fait, on peut écrire que $E = \mathbf{Q}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3.2.1.2 Modèle géométrique

La première équation de boucle correspond à la branche droite du mécanisme. Celle-ci étant plus simple, il est possible de la résoudre en premier. À partir des figures 3.2 et 3.3, on peut écrire :

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_2 + \mathbf{q}_2 + 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_b + \mathbf{l}_3 \quad (3.5)$$

où les vecteurs \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 sont illustrés à la figure 3.3.

On rassemble tous les termes inconnus dans le membre de droite, soit

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_2 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2 + 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_b + \mathbf{l}_3 \quad (3.6)$$

On exprime alors le vecteur \mathbf{p}_2 dans le repère \mathbf{R}_2 qui fait un angle β_2 avec le repère global.

$$\mathbf{p}_2 = (2r_2\mathbf{Q}(t_2) + l_b\mathbf{Q}(2t_2) + l_e\mathbf{Q}(2t_2 + \alpha)) \mathbf{E} \mathbf{e} \quad (3.7)$$

On peut également exprimer la partie connue (le membre de gauche de l'équation (3.6)) dans le repère \mathbf{R}_2

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{Q}^T \beta_2 (\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_2) \quad (3.8)$$

En égalant les équations (3.7) et (3.8) composante par composante, on obtient les deux expressions suivantes :

$$A_1 \cos^2 t_2 + B_1 \cos t_2 \sin t_2 + C_1 \sin t_2 + D_1 + q_2 = 0 \quad (3.9)$$

$$-B_1 \cos^2 t_2 + A_1 \cos t_2 \sin t_2 - C_1 \cos t_2 + E_1 = 0 \quad (3.10)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.1. On remarque que l'équation (3.10) dépend seulement de t_2 alors que l'équation (3.9) dépend de t_2 et q_2 . On solutionne donc d'abord l'équation (3.10).

On utilise la substitution de tangent demi angle pour exprimer l'équation (3.10) sous forme d'un polynôme. On pose $\cos t_2 = \frac{1-T_2^2}{1+T_2^2}$ et $\sin t_2 = \frac{2T_2}{1+T_2^2}$ où $T_2 = \tan \frac{t_2}{2}$. On

ne garde que le numérateur et on trouve :

$$(-B_1 + C_1 + E_1) T_2^4 - 2A_1 T_2^3 + 2(E_1 + B_1) T_2^2 + 2A_1 T_2 - B_1 - C_1 + E_1 = 0 \quad (3.11)$$

La résolution de l'équation (3.11) donne quatre solutions pour T_2 et donc quatre solutions pour t_2 . On remplace t_2 dans l'équation (3.9) pour trouver q_2 . Connaissant t_2 , il est maintenant possible de résoudre la seconde branche du mécanisme. La deuxième équation de boucle correspond à la branche gauche du mécanisme, soit

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_1 + \mathbf{q}_1 + 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_1 + 2\mathbf{r}_3 + \mathbf{l}_a + \mathbf{l}_3 \quad (3.12)$$

On rassemble tous les termes inconnus en dans le membre de droite.

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_1 - \mathbf{l}_a - \mathbf{l}_3 = \mathbf{p}_1 = \mathbf{q}_1 + 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_1 + 2\mathbf{r}_3 \quad (3.13)$$

On exprime alors le vecteur \mathbf{p}_1 dans le repère \mathbf{R}_1 qui fait un angle β_1 par rapport au repère global.

$$\mathbf{p}_1 = (2r_1\mathbf{Q}(t_1) + l_1\mathbf{Q}(2t_1) + 2r_3\mathbf{Q}(2t_1 + t_3)) \quad (3.14)$$

On peut également exprimer la partie connue (le membre de gauche) de l'équation (3.13) dans le repère \mathbf{R}_1 .

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{Q}^T(\beta_1) (\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_1 - \mathbf{l}_3 - \mathbf{l}_a) \quad (3.15)$$

L'angle t_3 est dépendant des angles t_1 et t_2 . En effet, on peut exprimer l'angle que fait le vecteur \mathbf{l}_a avec l'axe des x à l'aide de l'angle t_2 où des angles t_1 et t_3 de la façon suivante (figure 3.2) :

$$\beta_2 + \frac{\pi}{2} + \theta_2 \pm \pi = \beta_1 + \frac{\pi}{2} + \theta_1 + \theta_3 \quad (3.16)$$

donc

$$t_3 = \gamma - t_1 + t_2 \quad (3.17)$$

où

$$\gamma = \frac{\beta_2 - \beta_1 \pm \pi}{2} \quad (3.18)$$

ce qui donne deux expressions pour t_3 . En utilisant l'équation (3.17) pour éliminer t_3 des équations (3.14) et (3.15) et en faisant quelques manipulations on obtient les équations suivantes :

$$A_2 \cos^2 t_1 + B_2 \cos t_1 \sin t_1 + C_2 \sin t_1 + D_2 + q_1 = 0 \quad (3.19)$$

$$-B_2 \cos^2 t_1 + A_2 \cos t_1 \sin t_1 - C_2 \cos t_1 + E_2 = 0 \quad (3.20)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.2. La valeur des coefficients des équations (3.19) et (3.20) dépend de l'expression choisie pour t_3 . Selon que la première ou la deuxième expression de l'équation (3.17) pour t_3 ait été choisie, les valeurs calculées de t_1 et t_3 seront différentes.

On utilise la substitution de tangent demi angle pour exprimer l'équation (3.20) sous forme d'une polynôme. On pose $\cos t_1 = \frac{1-T_1^2}{1+T_1^2}$ et $\sin t_1 = \frac{2T_1}{1+T_1^2}$ où $T_1 = \tan \frac{t_1}{2}$. On obtient alors :

$$(-B_2 + C_2 + E_2)T_1^4 - 2A_2T_1^3 + 2(E_2 + B_2)T_1^2 + 2A_2T_1 - B_2 - C_2 + E_2 = 0 \quad (3.21)$$

La résolution de l'équation (3.21) donne quatre solutions. Cependant, comme il y a deux expressions possibles de t_3 , il y a un maximum de 8 solutions pour la première patte du mécanisme. Il y a donc un maximum de 32 solutions pour ce mécanisme. On remplace t_1 dans l'équation (3.19) pour trouver q_1 .

Le PGI a été résolu pour un exemple particulier. Les solutions sont présentées à l'annexe B.1. L'algorithme de calcul est illustré schématiquement à la figure 3.4. Le test sur la valeur de t_3 exprimé dans l'algorithme représente la plage de débattement d'un joint X_R réel.

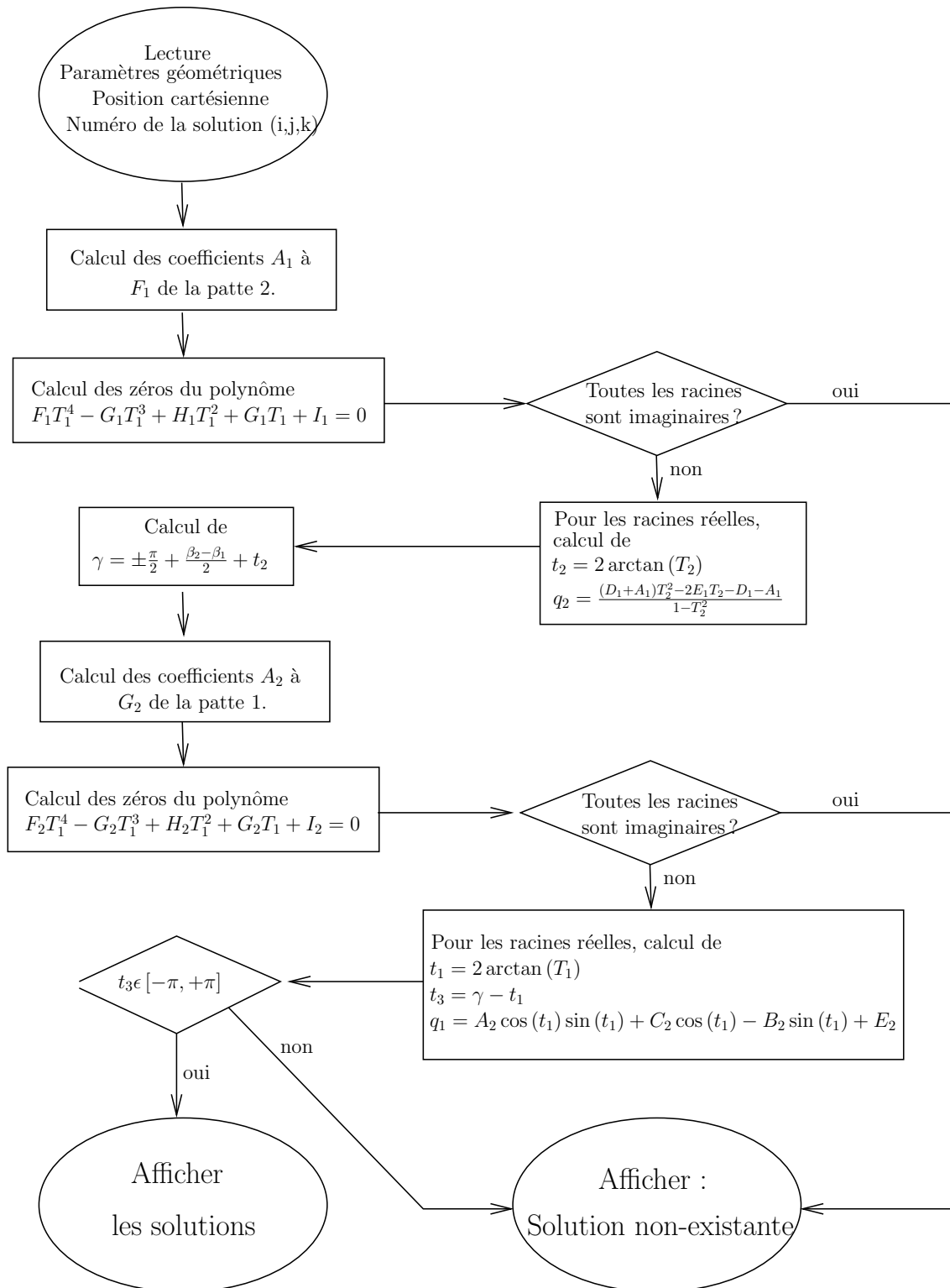


FIG. 3.4 – Algorithme de calcul du PGI.

3.2.2 Mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$

Le mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$ est aussi un mécanisme à deux degrés de liberté. Il est obtenu en remplaçant les actionneurs prismatiques du mécanisme précédent par des actionneurs rotoïdes. Le mécanisme est illustré schématiquement aux figures 3.5 et 3.6 où tous les angles sont définis positifs dans le sens antihoraire. Les variables q_1 et q_2 sont ici les angles de rotation des actionneurs rotoïdes.

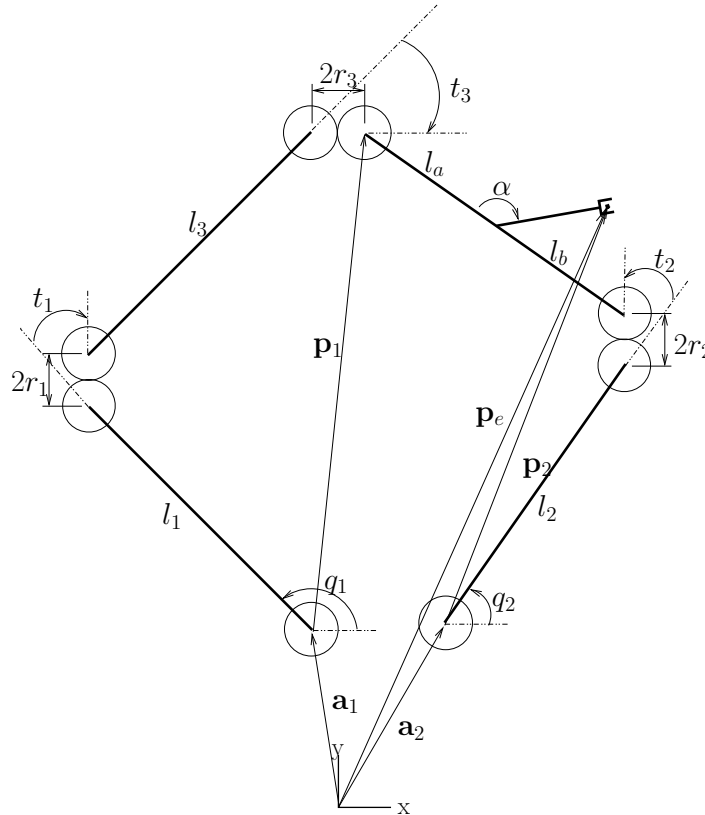


FIG. 3.5 – Schéma du mécanisme à $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$.

3.2.2.1 Définition des vecteurs

Comme pour le mécanisme précédent, les vecteurs \mathbf{r}_i sont définis comme les vecteurs reliant les centres des cylindres et les vecteurs \mathbf{l}_i sont définis le long des membrures, tel qu'illustré à la figure 3.6.

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{Q}(t_1) \mathbf{e}$$

$$\mathbf{r}_2 = r_2 \mathbf{Q}(t_2) \mathbf{e}$$

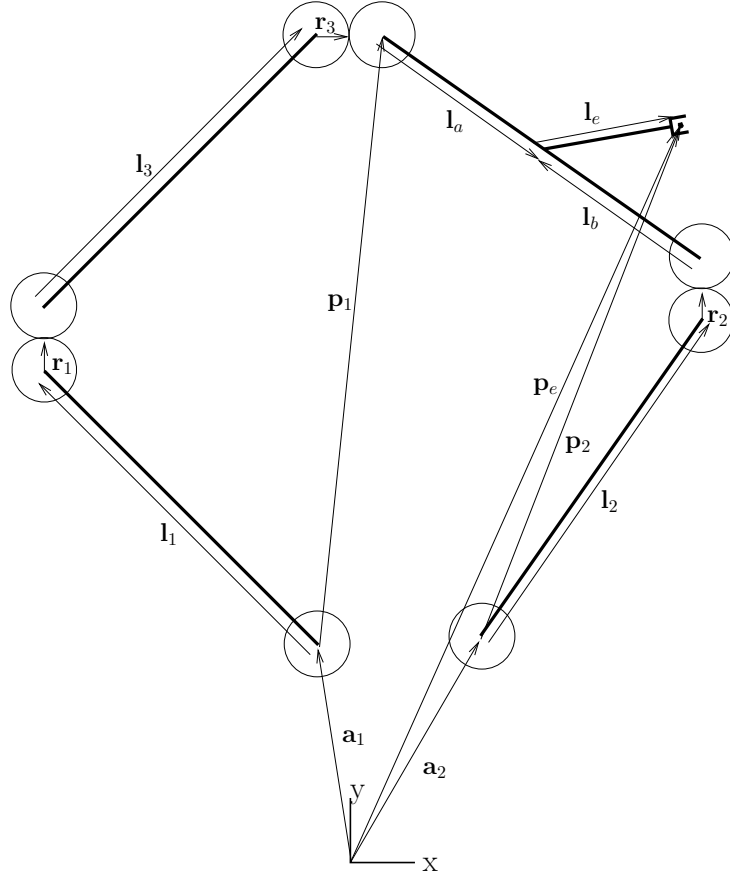


FIG. 3.6 – Représentation graphique des vecteurs.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_3 &= r_1 \mathbf{Q}(\theta_1 + t_3) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_1 &= l_1 \mathbf{Q}(2t_1) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_2 &= l_2 \mathbf{Q}(2t_2) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_3 &= l_3 \mathbf{Q}(2t_1 + t_3) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_a &= -l_a \mathbf{Q}(2t_2) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_b &= l_b \mathbf{Q}(2t_2) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_e &= l_e \mathbf{Q}(2t_2 + \alpha) \mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

où \mathbf{e} est un vecteur unitaire dans la direction de x positif, c'est-à-dire $\mathbf{e} = [1 \ 0]^T$.

3.2.2.2 Modèle géométrique

La première équation de boucle correspond à la branche droite du mécanisme. Celle-ci étant plus simple, il est possible de la résoudre en premier. On peut écrire.

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_2 + \mathbf{l}_2 + 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_b + \mathbf{l}_e \quad (3.23)$$

On rassemble tous les termes inconnus dans le même membre de l'équation. On a :

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_2 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{l}_2 + 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_b + \mathbf{l}_e \quad (3.24)$$

En égalant les deux membres de l'équation composante à composante on a :

$$A_1 \cos^2 t_2 + B_1 \cos t_2 \sin t_2 + C_1 \cos t_2 + D_1 \sin t_2 + E_1 = 0 \quad (3.25)$$

et

$$-B_1 \cos^2 t_2 + A_1 \cos t_2 \sin t_2 - D_1 \cos t_2 + C_1 \sin t_2 + F_1 = 0 \quad (3.26)$$

où les coefficients qui dépendent de q_2 , sont donnés à l'annexe A.3 Il est possible de combiner ces deux équations pour obtenir deux équations plus simples. En effet, en additionnant l'équation (3.25), qui a été multipliée par $\cos t_2$, à l'équation (3.26), qui elle a été multipliée par $\sin t_2$, on obtient :

$$F_1 \cos t_2 + A_1 \cos t_2 + C_1 + G_1 \sin t_2 = 0 \quad (3.27)$$

En soustrayant l'équation (3.26), qui a été multipliée par $\cos t_2$, à l'équation (3.25), qui elle a été multipliée par $\sin t_2$, on obtient :

$$B_1 \cos t_2 + E_1 + F_1 \sin t_2 - G_1 \cos t_2 = 0 \quad (3.28)$$

Pour obtenir une expression de $\cos t_2$ en fonction des coefficients A_1 à G_1 , on isole $\sin t_2$ dans l'équation (3.28) que l'on remplace dans l'équation (3.27). On isole alors $\cos t_2$ pour obtenir :

$$\cos t_2 = \frac{-C_1 F_1 + G_1 E_1}{F_1^2 + A_1 F_1 - G_1 B_1 + G_1^2} \quad (3.29)$$

Dans l'expression de $\sin t_2$, $\cos t_2$ est remplacé par son expression à l'équation (3.29). On obtient :

$$\sin t_2 = \frac{B_1 C_1 - E_1 F_1 - E_1 A_1 - G_1 C_1}{F_1^2 + A_1 F_1 - G_1 B_1 + G_1^2} \quad (3.30)$$

On remplace les deux équations (3.29) et (3.30) dans l'équation suivante : $\cos^2(t_2) + \sin^2(t_2) - 1 = 0$. De l'équation obtenue, on ne garde que le numérateur puisque l'expression est égale à zéro :

$$\begin{aligned} & 2F_1^2G_1B_1 - 2F_1^2G_1^2 + 2F_1A_1G_1B_1 - 2F_1A_1G_1^2 - F_1^4 \\ & - 2F_1E_1C_1B_1 + A_1^2E_1^2 - 2A_1E_1C_1B_1 + 2A_1E_1C_1G_1 \\ & E_1^2G_1^2 - F_1^2A_1^2 + C_1^2B_1^2 - 2C_1^2B_1G_1 + C_1^2G_1^2 + C_1^2F_1^2 \\ & F_1^2E_1^2 - 2F_1^3A_1 + 2F_1E_1^2A_1 - G_1^2B_1^2 + 2G_1^3B_1 - G_1^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

En remplaçant les coefficients A_1 à G_1 par leur expression, on obtient une équation en q_2 de la forme suivante :

$$H_1 \cos^2(q_2) + I_1 \sin(q_2) \cos(q_2) + J_1 \cos(q_2) + K_1 \sin(q_2) + L_1 = 0 \quad (3.32)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.4

On utilise la substitution de tangent demi angle pour exprimer l'équation (3.32) sous forme d'un polynôme. On pose $\cos(q_2) = \frac{1-T_2^2}{1+T_2^2}$ et $\sin(q_2) = \frac{2T_2}{1+T_2^2}$ où $T_2 = \tan \frac{q_2}{2}$. Comme l'expression est égale à zéro on garde uniquement le numérateur :

$$(H_1 - J_1 + L_1) T_2^4 + (-2I_1 + 2K_1) T_2^3 + (2L_1 - 2H_1) T_2^2 + (2I_1 + 2K_1) T_2 + H_1 + J_1 + L_1 = 0 \quad (3.33)$$

Ce qui donne un maximum de quatre solutions. On trouve directement q_2 à l'aide de l'équation suivante :

$$q_2 = 2 \arctan(T_2) \quad (3.34)$$

Connaissant q_2 , les valeurs numériques des coefficients A_1 à F_1 sont remplacées dans les équations (3.29) et (3.30) pour trouver la valeur de t_2 .

La deuxième équation de boucle correspond à la branche gauche du mécanisme. On a

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_1 + \mathbf{l}_1 + 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_3 + 2\mathbf{r}_3 + \mathbf{l}_a + \mathbf{l}_e \quad (3.35)$$

On rassemble tous les termes inconnus dans le membre de droite.

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_1 - \mathbf{l}_a - \mathbf{l}_e \mathbf{p}_1 = \mathbf{l}_1 + 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_3 + 2\mathbf{r}_3 \quad (3.36)$$

L'équation précédente est fonction de tous les angles illustrés à la figure 3.5. L'angle t_3 peut cependant être exprimé en fonction des autres angles. De la figure 3.5 on peut

déduire que :

$$q_2 + 2t_2 \pm \pi = q_1 + 2t_1 + 2t_3 \quad (3.37)$$

En isolant t_3 on obtient :

$$t_3 = \gamma - \frac{\theta_1}{2} - t_1 \quad (3.38)$$

où

$$\gamma = \frac{\pm\pi + \theta_2}{2} + t_2 \quad (3.39)$$

En développant l'équation (3.36) et en remplaçant t_3 par son expression en (3.38) on obtient les équations suivantes :

$$A_2 \cos^2 t_1 + B_2 \cos t_1 \sin t_1 + C_2 \cos t_1 + D_2 \sin t_1 + E_2 = 0 \quad (3.40)$$

$$-B_2 \cos^2 t_1 + A_2 \cos t_1 \sin t_1 - E_2 \cos t_1 + C_2 \sin t_1 + F_2 = 0 \quad (3.41)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.5

En utilisant la même démarche que pour l'équation (3.32) on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} & H_2 \cos^4 \left(\frac{q_1}{2} \right) + I_2 \sin \left(\frac{q_1}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{q_1}{2} \right) + J_2 \cos^3 \left(\frac{q_1}{2} \right) \\ & + K_2 \sin \left(\frac{q_1}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{q_1}{2} \right) + L_2 \cos^2 \left(\frac{q_1}{2} \right) + M_2 \sin \left(\frac{q_1}{2} \right) \cos \left(\frac{q_1}{2} \right) \\ & + N_2 \cos \left(\frac{q_1}{2} \right) + O_2 \sin \left(\frac{q_1}{2} \right) + P_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.6

On utilise la substitution de tangent demi angle pour exprimer l'équation (3.42) sous forme d'un polynôme. On pose $\cos \left(\frac{q_1}{2} \right) = \frac{1-T_1^2}{1+T_1^2}$ et $\sin \left(\frac{q_1}{2} \right) = \frac{2T_1}{1+T_1^2}$ où $T_1 = \tan \frac{q_1}{4}$. Comme l'expression est égale à zéro on garde uniquement le numérateur :

$$\begin{aligned} & (H_2 - N_2 + P_2 - J_2 + L_2) T_1^8 + (2K_2 + 2O_2 - 2M_2 - 2I_2) T_1^7 \\ & + (4P_2 + 2J_2 - 4H_2 - 2N_2) T_1^6 + (6O_2 - 2M_2 - 2K_2 + 6I_2) T_1^5 \\ & + (6P_2 + 6H_2 - 2L_2) T_1^4 + (2M_2 - 6I_2 - 2K_2 + 6O_2) T_1^3 \\ & + (4P_2 + 2N_2 - 2J_2 - 4H_2) T_1^2 + (2O_2 + 2I_2 + 2K_2 + 2M_2) T_1 \\ & + H_2 + P_2 + J_2 + N_2 + L_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ce qui donne un maximum de 8 solutions. On trouve directement q_1 à l'aide de l'équation suivante :

$$q_1 = 4 \arctan (T_1) \quad (3.44)$$

Connaissant q_1 , les valeurs numériques des coefficients A_2 à F_2 sont connues, permettant de calculer la valeur de t_1 . La valeur de t_3 est calculée à partir de l'équation (3.38).

3.2.3 Mécanisme $3\text{-}\underline{P}X_RX_R$

Un mécanisme à trois ddls est obtenu en reliant trois pattes d'architecture $\underline{P}X_RX_R$ à une plate-forme commune. Le mécanisme est représenté schématiquement à la figure 3.7, où tous les angles sont définis positifs dans le sens antihoraire. Les actionneurs sont associés aux trois liaisons prismatiques fixées à la base.

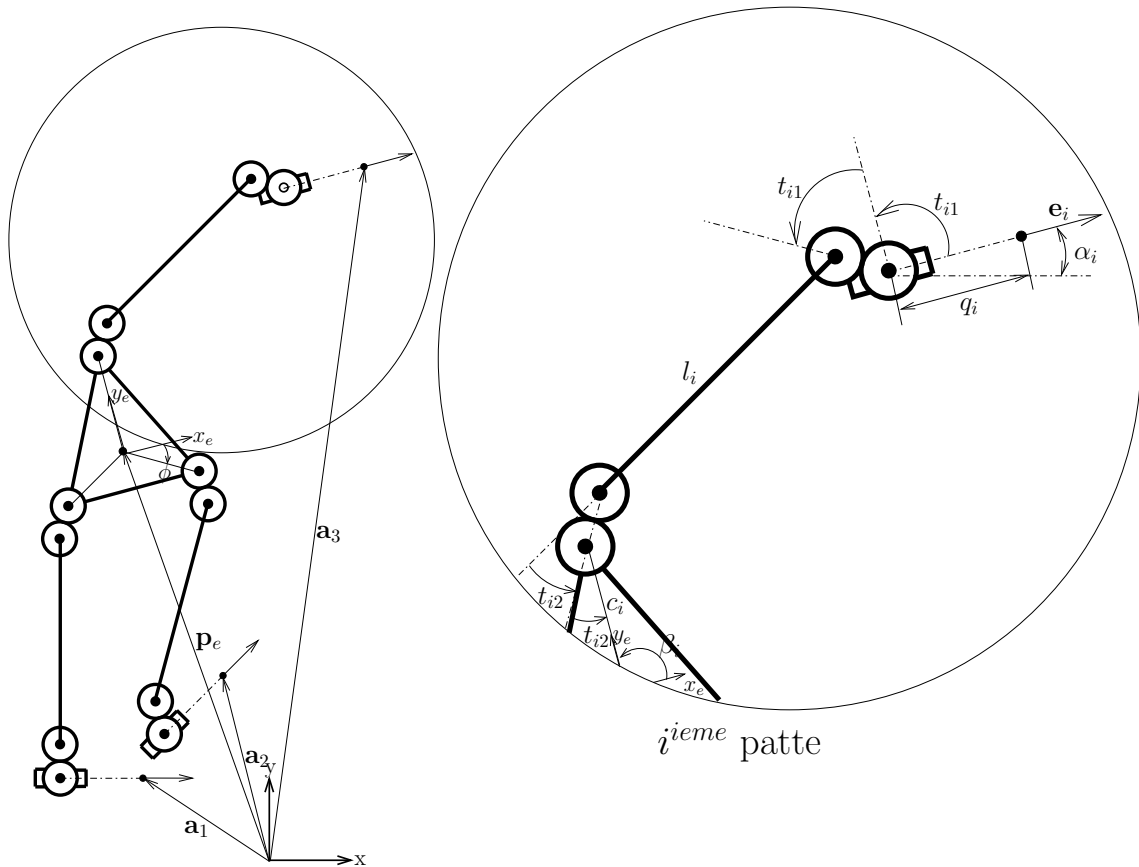


FIG. 3.7 – Schéma du mécanisme à $3\text{-}\underline{P}X_RX_R$.

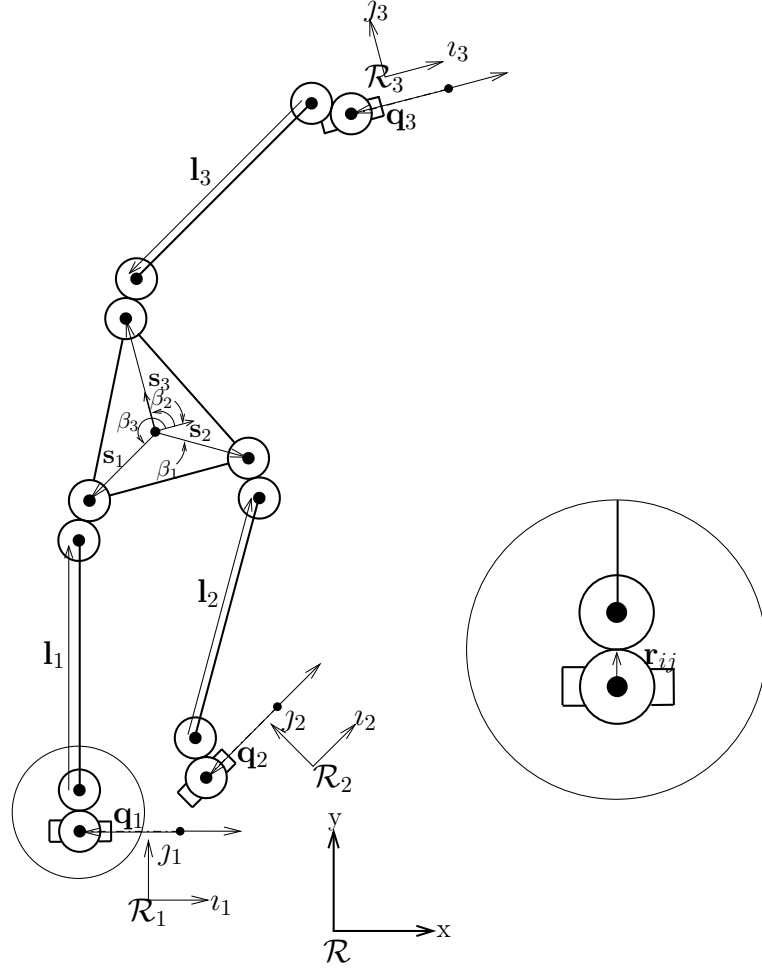


FIG. 3.8 – Définition des vecteurs.

3.2.3.1 Définition des vecteurs

Le vecteur \mathbf{r}_{ij} de la figure 3.8 correspond au vecteur reliant les centres des cylindres de l'articulation j de la patte i , le joint X_R à la base étant le premier joint et celui à l'effecteur le deuxième. Le vecteur \mathbf{l}_i est le vecteur défini le long de la membrure de la patte i . On a, exprimé dans le repère \mathcal{R} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i1} &= r_{i1} \mathbf{Q}(t_{i1}) \mathbf{E} \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{r}_{i2} &= r_{i2} \mathbf{Q}(2t_{i1} + t_{i2}) \mathbf{E} \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{l}_i &= l_i \mathbf{Q}(2t_{i1}) \mathbf{E} \mathbf{e}_i \\
 \mathbf{s}_i &= c_i \mathbf{Q}(\beta_i + \phi) \mathbf{e} \\
 \mathbf{q}_i &= q_i \mathbf{e}_i
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

où \mathbf{e}_i est un vecteur unitaire défini le long de l'axe de la $i^{\text{ème}}$ liaison prismatique et où $\mathbf{e} = [1 \ 0]^T$.

3.2.3.2 Modèle géométrique

Pour chacune des pattes, on peut écrire :

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i + 2\mathbf{r}_{i1} + \mathbf{l}_i + 2\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{s}_i \quad (3.46)$$

On rassemble tous les termes inconnus dans le membre de droite.

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_i + \mathbf{s}_i = [\mathbf{p}_i]_{\mathbf{R}} = \mathbf{q}_i + 2\mathbf{r}_{i1} + \mathbf{l}_i + 2\mathbf{r}_{i2} \quad (3.47)$$

On exprime le vecteur \mathbf{p}_i dans le repère \mathbf{R}_i qui fait un angle α_i avec le repère global.

$$[\mathbf{p}_i]_{\mathbf{R}_i} = \mathbf{Q}^T(\alpha_i) [\mathbf{p}_i]_{\mathbf{R}} \quad (3.48)$$

On peut également exprimer la partie connue de l'équation dans le repère \mathbf{R}_i

$$[\mathbf{p}_i]_{\mathbf{R}_i} = \mathbf{Q}^T(\alpha_i) (\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_i + \mathbf{s}_i) \quad (3.49)$$

Si les parties de droites des équations (3.48) et (3.49) sont égalées et que l'on manipule un peu les équations, on obtient les deux expressions suivantes :

$$-A_i \cos t_{i1} \sin t_{i1} + C_i \sin t_{i1} - B_i \sin t_{i1} + E_i + q_i = 0 \quad (3.50)$$

$$A_i \cos^2 t_{i1} + B_i \cos t_{i1} + C_i \sin t_{i1} + D_i = 0 \quad (3.51)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.7. L'angle t_{i2} a été éliminé des équations précédentes par la relation suivante :

$$t_{i2} = -t_{i1} + \frac{\phi + \beta_i - \alpha_i \pm \pi}{2} \quad (3.52)$$

On utilise la substitution de tangent demi angle pour exprimer l'équation (3.51) sous forme d'un polynôme. On pose $\cos t_{i1} = \frac{1-T_{i1}^2}{1+T_{i1}^2}$ et $\sin t_{i1} = \frac{2T_{i1}}{1+T_{i1}^2}$ où $T_{i1} = \tan \frac{t_{i1}}{2}$.

$$(A_i - B_i + D_i) T_{i1}^4 + 2C_i T_{i1}^3 + 2(D_i - A_i) T_{i1}^2 + 2C_i T_{i1} + A_i + B_i + D_i = 0 \quad (3.53)$$

La résolution de l'équation (3.53) donne quatre solutions. Cependant, comme il y a deux expressions de l'angle t_{i2} possibles, il y a un maximum de 8 solutions par patte. On remplace t_{i1} dans l'équation (3.50) pour trouver q_i .

3.2.4 Mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{R}X_RX_R$

De même que pour le mécanisme précédent, un mécanisme à trois ddls est obtenu en reliant trois pattes d'architecture $\underline{R}X_RX_R$ à une plate-forme commune. Le mécanisme est représenté schématiquement à la figure 3.9, où tous les angles sont définis positifs dans le sens antihoraire. Les actionneurs sont reliés aux trois liaisons rotoïdes fixées à la base.

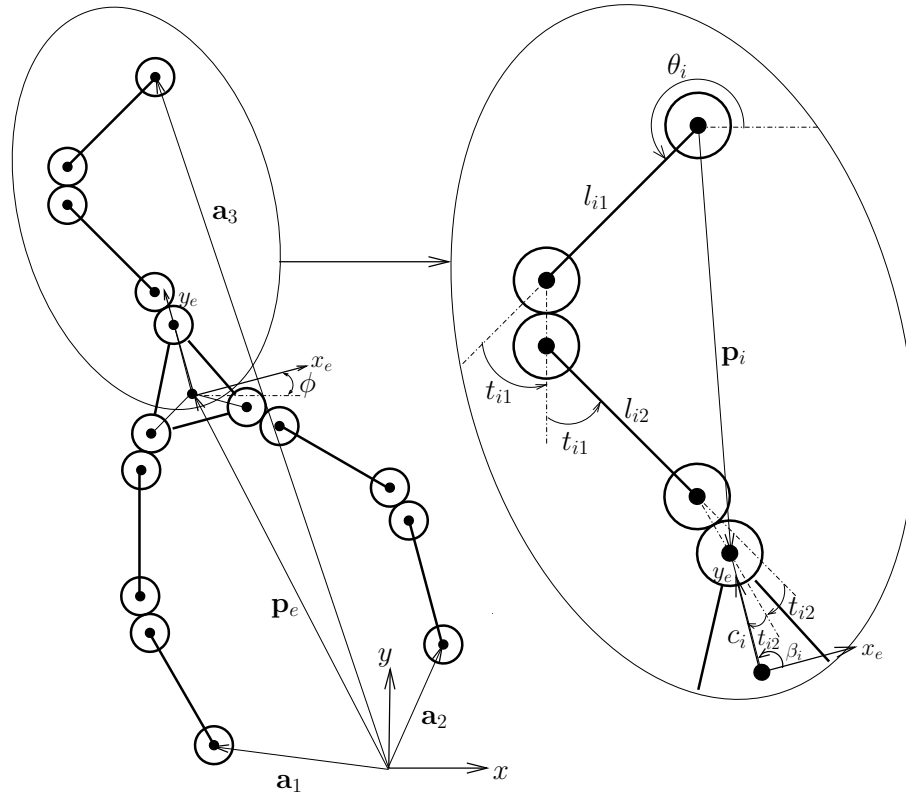


FIG. 3.9 – Schéma du mécanisme à $\mathcal{3}\text{-}\underline{R}X_RX_R$.

3.2.4.1 Définition des vecteurs

Le vecteur \mathbf{r}_{ij} de la figure 3.10 correspond au vecteur reliant les centres des cylindres de l'articulation j de la patte i , le joint X_R à l'effecteur étant le deuxième et l'autre, le premier. Le vecteur \mathbf{l}_i est le vecteur défini le long de la membrure de la patte i . On a :

L'indice i dans les figures 3.9 et 3.10 correspond au numéro de la patte.

$$\mathbf{l}_{i1} = l_{i1} \mathbf{Q}(q_i) \mathbf{e}$$

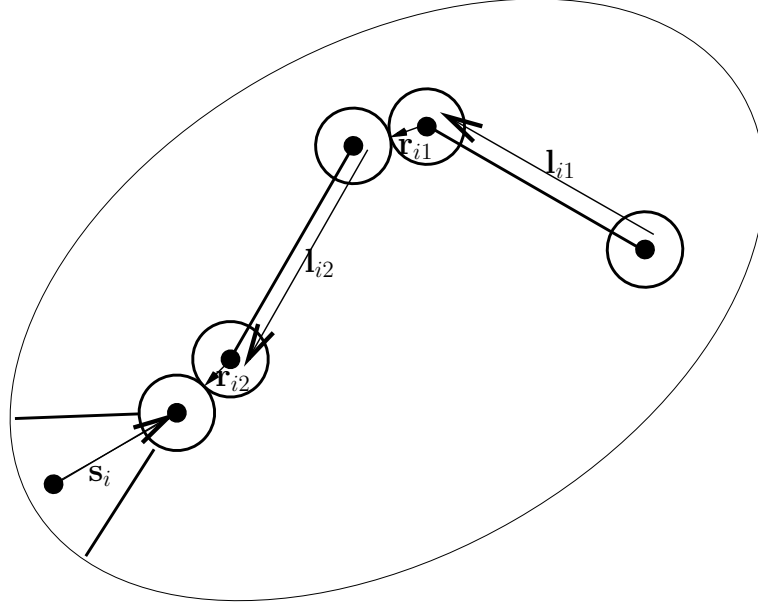


FIG. 3.10 – Définition des vecteurs.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{i1} &= r_{i1} \mathbf{Q}(q_i + t_{i1}) \mathbf{e} \\
 \mathbf{l}_{i2} &= l_{i2} \mathbf{Q}(q_i + 2t_{i1}) \mathbf{e} \\
 \mathbf{r}_{i2} &= r_{i2} \mathbf{Q}(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) \mathbf{e} \\
 \mathbf{s}_i &= c_i \mathbf{Q}(\beta_i + \phi) \mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

où \mathbf{e} est un vecteur unitaire dans la direction de x positif, c'est-à-dire $\mathbf{e} = [1 \ 0]^T$.

3.2.4.2 Modèle géométrique

Pour chacune des pattes on peut écrire :

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_i + \mathbf{l}_{i1} + 2\mathbf{r}_{i1} + \mathbf{l}_{i2} + 2\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{s}_i \tag{3.55}$$

On rassemble tous les termes inconnus dans le membre de droite.

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_i + \mathbf{s}_i = \mathbf{p}_i = \mathbf{l}_{i1} + 2\mathbf{r}_{i1} + \mathbf{l}_{i2} + 2\mathbf{r}_{i2} \tag{3.56}$$

$$t_{i2} = \gamma_i - \frac{q_i}{2} - t_{i1} \tag{3.57}$$

où

$$\gamma_i = \frac{\phi + \beta_i \pm \pi}{2} \tag{3.58}$$

En développant l'équation (3.56) et en remplaçant l'angle t_{i2} par l'équation (3.57), on obtient les équations suivantes :

$$A_i \cos^2 t_{i1} + B_i \cos t_{i1} \sin t_{i1} + C_i \cos t_{i1} + D_i \sin t_{i1} + E_i = 0 \tag{3.59}$$

$$-B_i \cos^2 t_{i1} + A_i \cos t_{i1} \sin t_{i1} - D_i \cos t_{i1} + C_i \sin t_{i1} + F_i = 0 \quad (3.60)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.8

En utilisant la même démarche que pour l'équation (3.32) on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} H_i \cos^4 \left(\frac{q_i}{2} \right) + I_i \sin \left(\frac{q_i}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{q_i}{2} \right) + J_i \cos^3 \left(\frac{q_i}{2} \right) \\ K_i \sin \left(\frac{q_i}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{q_i}{2} \right) + L_i \cos^2 \left(\frac{q_i}{2} \right) + M_i \sin \left(\frac{q_i}{2} \right) \cos \left(\frac{q_i}{2} \right) \\ N_i \cos \left(\frac{q_i}{2} \right) + O_i \sin \left(\frac{q_i}{2} \right) + P_i = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.9

On utilise la substitution de tangent demi angle pour exprimer l'équation (3.61) sous forme d'un polynôme. On pose $\cos \left(\frac{q_i}{2} \right) = \frac{1-T_i^2}{1+T_i^2}$ et $\sin \left(\frac{q_i}{2} \right) = \frac{2T_i}{1+T_i^2}$ où $T_i = \tan \frac{q_i}{4}$. Comme l'expression est égale à zéro on garde uniquement le numérateur :

$$\begin{aligned} (H_i - N_i + P_i - J_i + L_i) T_i^8 + (2K_i + 2O_i - 2M_i - 2I_i) T_i^7 \\ (4P_i + 2J_i - 4H_i - 2N_i) T_i^6 + (6O_i - 2M_i - 2K_i + 6I_i) T_i^5 \\ (6P_i + 6H_i - 2L_i) T_i^4 + (2M_i - 6I_i - 2K_i + 6O_i) T_i^3 \\ (4P_i + 2N_i - 2J_i - 4H_i) T_i^2 + (2O_i + 2I_i + 2K_i + 2M_i) T_i \\ + H_i + P_i + J_i + N_i + L_i = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Il y a 8 solutions au polynôme précédent. Cependant, comme il y a deux valeurs possibles de l'angle t_{i2} , il y a un maximum de 16 solutions par patte. On trouve directement q_i à l'aide de l'équation suivante :

$$q_i = 4 \arctan (T_i) \quad (3.63)$$

3.2.5 Mécanisme $\mathfrak{3}\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$

De même que pour les mécanismes précédents, un mécanisme à trois ddls est obtenu en reliant trois pattes d'architecture $\underline{X}_R X_R X_R$ à une plate-forme commune. Le mécanisme est représenté schématiquement à la figure 3.11, où tous les angles sont définis positifs dans le sens antihoraire. Les actionneurs sont reliés aux trois joints X_R fixés à la base.

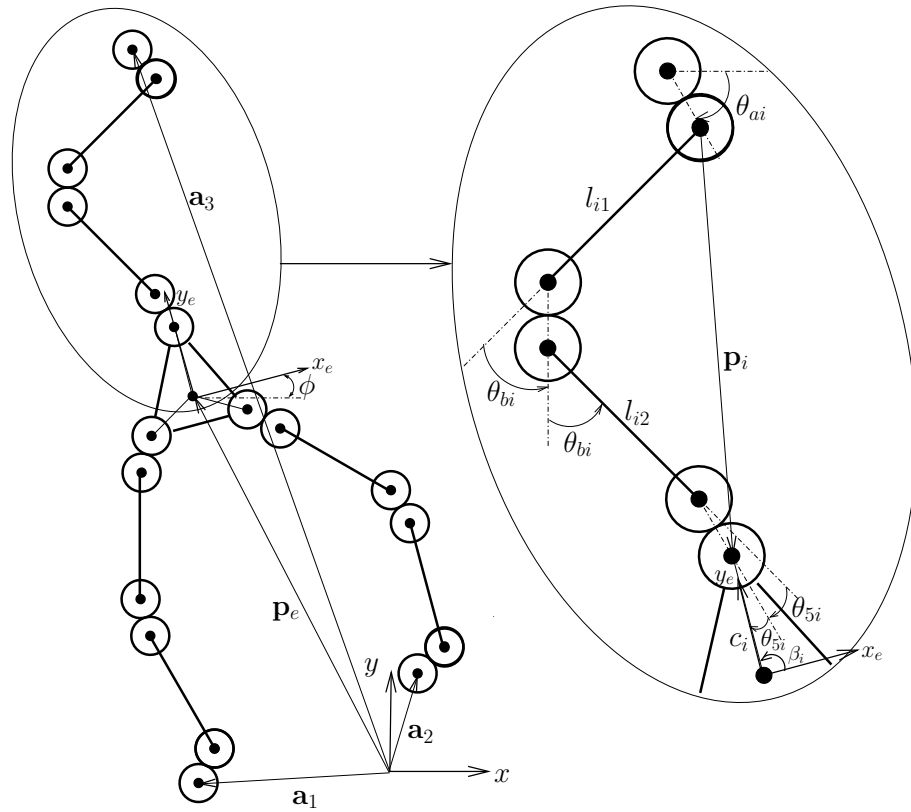


FIG. 3.11 – Schéma du mécanisme à $3\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$.

3.2.5.1 Définition des vecteurs

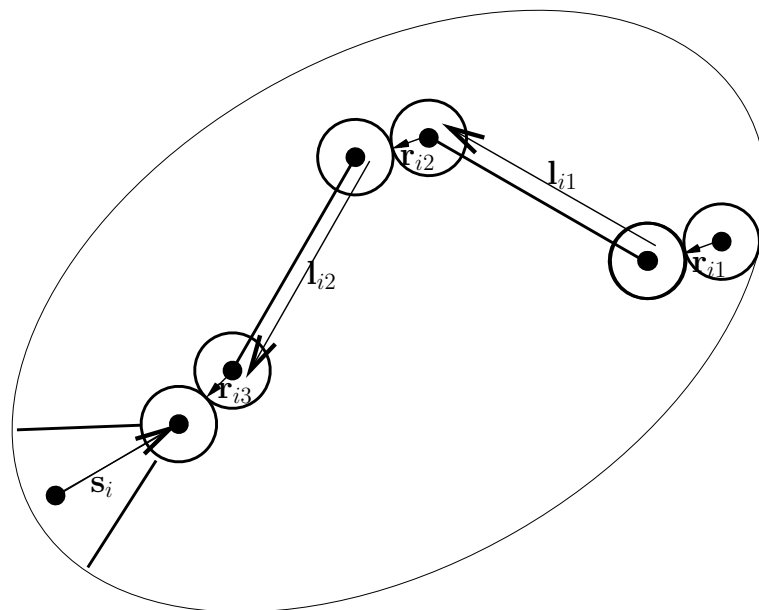


FIG. 3.12 – Définition des vecteurs.

L'indice i dans les figures 3.11 et 3.12 correspond au numéro de la patte. Le vecteur \mathbf{r}_{ij} à la figure 3.12 correspond au vecteur reliant les centres des cylindres de l'articulation j de la patte i , le joint X_R à la base étant le premier joint, celui à l'effecteur le troisième et celui intermédiaire le deuxième. Les vecteurs \mathbf{l}_{ij} sont les vecteurs définis le long des membrures de la patte i . On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{i1} &= r_{i1} \mathbf{Q}(\theta_{ai}) \mathbf{e} \\
\mathbf{l}_{i1} &= l_{i1} \mathbf{Q}(2\theta_{ai}) \mathbf{e} \\
\mathbf{r}_{i2} &= r_{i2} \mathbf{Q}(2\theta_{ai} + \theta_{bi}) \mathbf{e} \\
\mathbf{l}_{i2} &= l_{i2} \mathbf{Q}(2\theta_{ai} + 2\theta_{bi}) \mathbf{e} \\
\mathbf{r}_{i3} &= r_{i3} \mathbf{Q}(2\theta_{ai} + \theta_{bi} + \theta_{i5}) \mathbf{e} \\
\mathbf{c}_i &= c_i \mathbf{Q}(\beta_i + \phi) \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

où \mathbf{e} est un vecteur unitaire dans la direction de x positif, c'est-à-dire $\mathbf{e} = [1 \ 0]^T$.

3.2.5.2 Modèle géométrique

Pour chacune des pattes on peut écrire :

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{a}_i + 2\mathbf{r}_{i1} + \mathbf{l}_{i1} + 2\mathbf{r}_{i2} + \mathbf{l}_{i2} + 2\mathbf{r}_{i3} - \mathbf{c}_i \tag{3.65}$$

On rassemble tous les termes inconnus dans le membre de droite.

$$\mathbf{p}_e - \mathbf{a}_i + \mathbf{c}_i = \mathbf{p}_i = 2\mathbf{r}_{i1} + \mathbf{l}_{i1} + 2\mathbf{r}_{i2} + \mathbf{l}_{i2} + 2\mathbf{r}_{i3} \tag{3.66}$$

$$\theta_{5i} = \gamma_i - \theta_{ai} - \theta_{bi} \tag{3.67}$$

où

$$\gamma_i = \frac{\phi + \beta_i \pm \pi}{2} \tag{3.68}$$

En développant l'équation (3.66) et en remplaçant l'angle θ_{5i} par l'équation (3.67), on obtient les équations suivantes :

$$A_i \cos^2(\theta_{bi}) + B_i \cos(\theta_{bi}) \sin(\theta_{bi}) + C_i \cos(\theta_{bi}) + D_i \sin(\theta_{bi}) + E_i = 0 \tag{3.69}$$

$$-B_i \cos^2(\theta_{bi}) + A_i \cos(\theta_{bi}) \sin(\theta_{bi}) - D_i \cos(\theta_{bi}) + C_i \sin(\theta_{bi}) + F_i = 0 \tag{3.70}$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.10

En utilisant la même démarche que pour l'équation (3.32) on obtient l'équation suivante

$$H_i \cos^4\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) + I_i \sin\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) \cos^3\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) + J_i \cos^3\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
K_i \sin\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) + L_i \cos^2\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) + M_i \sin\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) \\
N_i \cos\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) + O_i \sin\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) + P_i = 0 \quad (3.71)
\end{aligned}$$

où les coefficients sont donnés à l'annexe A.11

On utilise la substitution de tangente demi angle pour exprimer l'équation (3.71) sous forme d'un polynôme. On pose $\cos\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) = \frac{1-T_i^2}{1+T_i^2}$ et $\sin\left(\frac{\theta_{ai}}{2}\right) = \frac{2T_i}{1+T_i^2}$ où $T_i = \tan\frac{\theta_{ai}}{4}$. Comme l'expression est égale à zéro on garde uniquement le numérateur :

$$\begin{aligned}
(H_i - N_i + P_i - J_i + L_i) T_i^8 + (2K_i + 2O_i - 2M_i - 2I_i) T_i^7 \\
(4P_i + 2J_i - 4H_i - 2N_i) T_i^6 + (6O_i - 2M_i - 2K_i + 6I_i) T_i^5 \\
(6P_i + 6H_i - 2L_i) T_i^4 + (2M_i - 6I_i - 2K_i + 6O_i) T_i^3 \\
(4P_i + 2N_i - 2J_i - 4H_i) T_i^2 + (2O_i + 2I_i + 2K_i + 2M_i) T_i \\
+ H_i + P_i + J_i + N_i + L_i = 0 \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Il y a 8 solutions au polynôme précédent. Cependant, comme il y a deux valeurs possibles de l'angle θ_{5i} , il y a un maximum de 16 solutions par patte. On trouve directement θ_{ai} à l'aide de l'équation suivante :

$$\theta_{ai} = 2 \arctan(T_i) \quad (3.73)$$

3.3 Équations de vitesse

3.3.1 Mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive par rapport au temps les équations (3.5), (3.12) et (3.17). Les équations (3.5) et (3.12) sont exprimées respectivement dans le repère \mathcal{R}_2 et \mathcal{R}_1 , ce qui permet de simplifier les expressions des matrices jacobienues. L'équation de vitesse suivante est obtenue :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{p}}_e + \mathbf{B}\dot{\Theta} = 0 \quad (3.74)$$

où

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T \quad (3.75)$$

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{t}_1 & \dot{t}_2 & \dot{t}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.76)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} & B_{25} \\ 0 & -1 & 0 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

et où

$$B_{13} = 2l_1 \sin(2t_1) + 2r_1 \sin t_1 + 4r_3 \sin(2t_1 + t_3) \quad (3.79)$$

$$B_{14} = 2l_e \sin(2t_2 + \alpha) - 2l_a \sin(2t_2) \quad (3.80)$$

$$B_{15} = 2r_3 \sin(2t_1 + t_3) \quad (3.81)$$

$$B_{23} = -4r_3 \cos(2t_1 + t_3) - 2r_1 \cos t_1 - 2l_1 \cos(2t_1) \quad (3.82)$$

$$B_{24} = 2l_a \cos(2t_2) - 2l_e \cos(2t_2 + \alpha) \quad (3.83)$$

$$B_{25} = -2r_3 \cos(2t_1 + t_3) \quad (3.84)$$

$$B_{34} = 2r_2 \sin t_2 + 2l_b \sin(2t_2) + 2l_e \sin(2t_2 + \alpha) \quad (3.85)$$

$$B_{44} = -2r_2 \cos t_2 - 2l_b \cos(2t_2) - 2l_e \cos(2t_2 + \alpha) \quad (3.86)$$

Pour obtenir la matrice jacobienne, les vitesses angulaires \dot{t}_1 , \dot{t}_2 et \dot{t}_3 doivent être éliminées des équations. On pose $\mathbf{J}' = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, ce qui permet de récrire l'équation (3.74) sous la forme $\dot{\Theta} = \mathbf{J}'\dot{\mathbf{p}}_e$. De la matrice \mathbf{J}' obtenue, les deux premières lignes sont gardées pour constituer la matrice jacobienne \mathbf{J} . On a alors

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{p}}_e \quad (3.87)$$

où

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.88)$$

Cette méthode sera appliquée pour trouver les équations de vitesse de tous les mécanismes.

3.3.2 Mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive les équations (3.23), (3.35) et (3.38) par rapport au temps. L'équation de vitesse suivante est obtenue :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{p}}_e + \mathbf{B}\dot{\Theta} = 0 \quad (3.89)$$

où

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^T \quad (3.90)$$

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{t}_1 & \dot{t}_2 & \dot{t}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.91)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} & B_{25} \\ 0 & -1 & 0 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

et où

$$B_{13} = 2l_1 \sin(2t_1) + 2r_1 \sin t_1 + 4r_3 \sin(2t_1 + t_3) \quad (3.94)$$

$$B_{14} = 2l_e \sin(2t_2 + \alpha) - 2l_a \sin(2t_2) \quad (3.95)$$

$$B_{15} = 2r_3 \sin(2t_1 + t_3) \quad (3.96)$$

$$B_{23} = -4r_3 \cos(2t_1 + t_3) - 2r_1 \cos t_1 - 2l_1 \cos(2t_1) \quad (3.97)$$

$$B_{24} = 2l_a \cos(2t_2) - 2l_e \cos(2t_2 + \alpha) \quad (3.98)$$

$$B_{25} = -2r_3 \cos(2t_1 + t_3) \quad (3.99)$$

$$B_{34} = 2r_2 \sin t_2 + 2l_b \sin(2t_2) + 2l_e \sin(2t_2 + \alpha) \quad (3.100)$$

$$B_{44} = -2r_2 \cos t_2 - 2l_b \cos(2t_2) - 2l_e \cos(2t_2 + \alpha) \quad (3.101)$$

Pour obtenir la matrice jacobienne, les vitesses angulaires \dot{t}_1 , \dot{t}_2 et \dot{t}_3 doivent être éliminées des équations. On pose $\mathbf{J}' = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. De la matrice \mathbf{J}' obtenue, les deux premières lignes sont gardées pour constituer la matrice jacobienne \mathbf{J} . On a alors :

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.102)$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.103)$$

3.3.3 Mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{P}\mathbf{X}_R\mathbf{X}_R$

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive les équations (3.46) et (3.52) par rapport au temps. Les équations (3.46) sont exprimées dans le repère \mathcal{R}_i , ce qui permet de simplifier les expressions des matrices jacobienues. L'équation de vitesse suivante est obtenue :

$$\mathbf{A}_i\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}_i\dot{\boldsymbol{\Theta}}_i = 0 \quad (3.104)$$

où

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (3.105)$$

$$\dot{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \dot{q}_i & \dot{t}_{i1} & \dot{t}_{i2} \end{bmatrix}^T \quad (3.106)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -\cos \alpha_i c_i \sin(\phi + \beta_i) + \sin \alpha_i c_i \cos(\phi + \beta_i) \\ \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -\cos \alpha_i c_i \sin(\phi + \beta_i) + \sin \alpha_i c_i \cos(\phi + \beta_i) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & B_{12i} & B_{13i} \\ 0 & B_{22i} & B_{23i} \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

et où

$$B_{12i} = 2r_{i1} \sin t_{i1} + 2l_i \sin(2t_{i1}) + 4r_{i2} \sin(2t_{i1} + t_{i2}) \quad (3.109)$$

$$B_{13i} = 2r_{i2} \sin(2t_{i1} + t_{i2}) \quad (3.110)$$

$$B_{22i} = -2r_{i1} \cos t_{i1} - 2l_i \cos(2t_{i1}) - 4r_{i2} \cos(2t_{i1} + t_{i2}) \quad (3.111)$$

$$B_{23i} = -2r_{i2} \cos(2t_{i1} + t_{i2}) \quad (3.112)$$

Pour obtenir la matrice jacobienne, les vitesses angulaires \dot{t}_{i1} et \dot{t}_{i2} pour $i=(1, 2$ et $3)$ doivent être éliminées des équations. On pose $\mathbf{J}'_i = -\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{A}_i$. La première ligne de chacune des matrices \mathbf{J}'_i est gardée pour constituer la matrice jacobienne \mathbf{J} . On a alors :

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.113)$$

où

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.114)$$

3.3.4 Mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{R}X_R X_R$

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive les équations (3.55) et (3.57) par rapport au temps. L'équation de vitesse suivante est obtenue :

$$\mathbf{A}_i \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}_i \dot{\Theta}_i = 0 \quad (3.115)$$

où

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (3.116)$$

$$\dot{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i & \dot{t}_{i1} & \dot{t}_{i2} \end{bmatrix}^T \quad (3.117)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c_i \sin(\phi + \beta_i) \\ 0 & 1 & c_i \cos(\phi + \beta_i) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

et où

$$\begin{aligned} B_{11i} &= l_{i1} \sin q_i + 2r_{i1} \sin(q_i + t_{i1}) + l_{i2} \sin(q_i + 2t_{i1}) \\ &= +2r_{i2} \sin(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$B_{12i} = 2l_{i2} \sin(q_i + 2t_{i1}) + 4r_{i2} \sin(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) + 2r_{i1} \sin(q_i + t_{i1}) \quad (3.121)$$

$$B_{13i} = 2r_{i2} \sin(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} B_{21i} &= -l_{i1} \cos q_i - 2r_{i1} \cos(q_i + t_{i1}) - l_{i2} \cos(q_i + 2t_{i1}) \\ &= -2r_{i2} \cos(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$B_{22i} = -2l_{i2} \cos(q_i + 2t_{i1}) - 4r_{i2} \cos(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) - 2r_{i1} \cos(q_i + t_{i1}) \quad (3.124)$$

$$B_{23i} = -2r_{i2} \cos(q_i + 2t_{i1} + t_{i2}) \quad (3.125)$$

Pour obtenir la matrice jacobienne, les vitesses angulaires \dot{t}_{i1} et \dot{t}_{i2} pour $i=(1, 2$ et $3)$ doivent être éliminées des équations. On pose $\mathbf{J}'_i = -\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i$. La première rangée de chacune des matrices \mathbf{J}'_i est gardée pour constituer la matrice jacobienne \mathbf{J} . On a alors :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{p}} \quad (3.126)$$

où

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.127)$$

3.3.5 Mécanisme 3- \underline{X}_R X_R X_R

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive les équations (3.65) et (3.67) par rapport au temps. L'équation de vitesse suivante est obtenue :

$$\mathbf{A}_i \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}_i \dot{\Theta}_i = 0 \quad (3.128)$$

où

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \quad (3.129)$$

$$\dot{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{ia} & \dot{\theta}_{ib} & \dot{\theta}_{i5} \end{bmatrix}^T \quad (3.130)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c_i \sin(\phi + \beta_i) \\ 0 & 1 & c_i \cos(\phi + \beta_i) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{11i} & B_{12i} & B_{13i} \\ B_{21i} & B_{22i} & B_{23i} \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

et où

$$\begin{aligned} B_{11i} &= 4r_{i2} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia} + \theta_{ib}) + 4r_{i3} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib} + \theta_{i5}) \\ &= +2r_{i1} \sin(\alpha_i + \theta_{ia}) + 2l_{i1} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia}) + 2l_{i2} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib}) \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} B_{12i} &= 2r_{i2} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia} + \theta_{ib}) + 4r_{i3} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib} + \theta_{i5}) \\ &= +2l_{i2} \sin(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib}) \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$B_{13i} = -c_i \sin(\phi + \beta_i) \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} B_{21i} &= -4r_{i2} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + \theta_{ib}) - 4r_{i3} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib} + \theta_{i5}) \\ &= -2r_{i1} \cos(\alpha_i + \theta_{ia}) - 2l_{i1} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia}) - 2l_{i2} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib}) \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} B_{22i} &= -2r_{i2} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + \theta_{ib}) - 4r_{i3} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib} + \theta_{i5}) \\ &= -2l_{i2} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib}) \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$B_{23i} = -2r_{i3} \cos(\alpha_i + 2\theta_{ia} + 2\theta_{ib} + \theta_{i5}) \quad (3.138)$$

Pour obtenir la matrice jacobienne, les vitesses angulaires $\dot{\theta}_{ib}$ et $\dot{\theta}_{i5}$ pour $i=(1, 2$ et $3)$ doivent être éliminées des équations. On pose $\mathbf{J}'_i = -\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i$. La première rangée de chacune des matrices \mathbf{J}'_i est gardée pour constituer la matrice jacobienne \mathbf{J} .

$$\dot{\Theta}_a = \mathbf{J} \dot{\mathbf{p}} \quad (3.139)$$

où

$$\dot{\Theta}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{a1} & \dot{\theta}_{a2} & \dot{\theta}_{a3} \end{bmatrix}^T \quad (3.140)$$

3.3.6 Vérification des matrices jacobiennes

Une procédure numérique a été utilisée pour vérifier la validité des matrices jacobiennes des mécanismes étudiés. Dans un premier temps, le PGI est calculé pour deux positions cartésiennes très rapprochées. Par exemple, pour les mécanismes à deux ddls on a :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

et

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} x + \delta x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Si δx est suffisamment petit, on écrit :

$$\delta \Theta = \mathbf{J} \delta \mathbf{p} \quad (3.143)$$

où

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \delta x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Dans un deuxième temps, les écarts articulaires sont obtenus en calculant la matrice jacobienne à la position \mathbf{p}_1 . La matrice jacobienne est multipliée par $\delta \mathbf{p}$. En faisant varier une position cartésienne à la fois, il est possible de vérifier chaque élément de la matrice jacobienne. Ainsi, si on fait varier la première coordonnée cartésienne, chaque coordonnée articulaire correspond à un élément de la première colonne. Toutes les matrices jacobiennes précédentes ont été vérifiées de cette façon pour quelques positions et différentes solutions, ce qui a permis de les valider.

3.4 Lieux de singularité et espace de travail

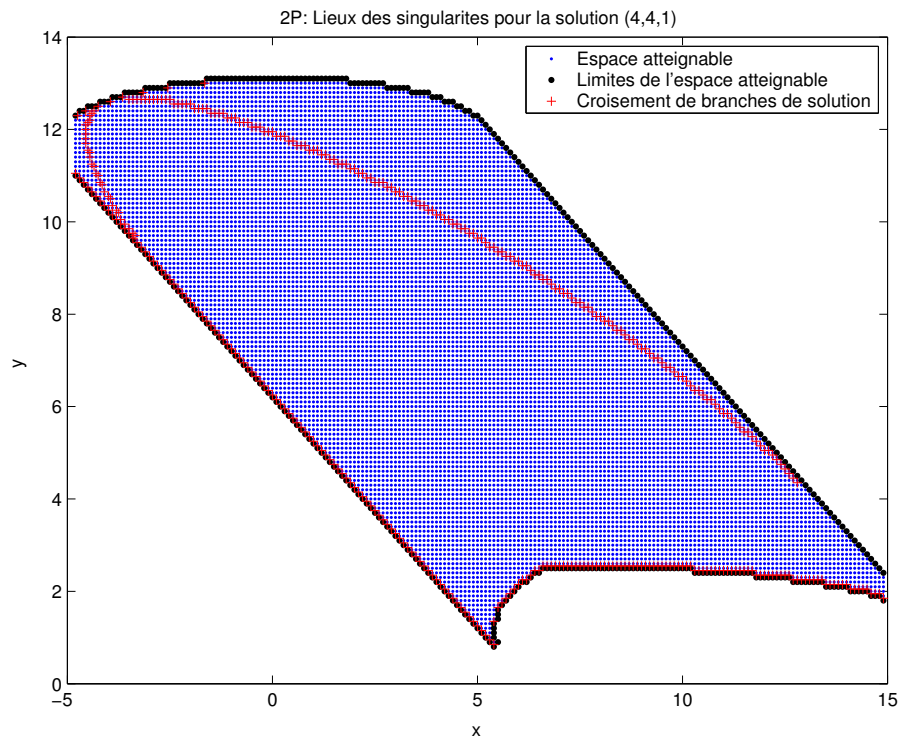
L'emplacement des lieux de singularité est calculé à partir de la matrice jacobienne d'un mécanisme. En effet, si le déterminant de la matrice jacobienne est nul, le mécanisme est en singularité. Dans les cas les plus simples, les lieux de singularité peuvent être tracés algébriquement. Mais dans le cas qui nous occupe ici, les matrices jacobiennes sont trop complexes et le temps de calcul est trop long pour une analyse algébrique. Une procédure numérique a donc été utilisée. L'espace de travail est discrétisé. Pour chaque point, la présence de parties imaginaires dans le PGI est vérifiée. Si une partie imaginaire est présente, la solution n'existe pas dans cette branche de solution. Cette information est utilisée pour construire l'espace atteignable. Si la solution est réelle, le déterminant de la matrice jacobienne est calculé. Le mécanisme est en singularité lorsque le déterminant est nul. Cependant, comme l'espace de travail est discrétisé, il n'y a aucune garantie que les singularités se trouveront aux points testés. Les changements de signe sont donc vérifiés. En effet, si le déterminant change de signe entre deux points consécutifs, le mécanisme est en singularité entre les deux points. La vérification est faite dans la direction des x et des y . Dans le cas des mécanismes à 3 ddls, elle pourrait aussi être faite dans la direction de ϕ , mais comme les résultats sont visualisés en deux dimensions, cela n'est pas utile.

Les mécanismes sont en singularité aux extrémités de l'espace atteignable, lorsque deux branches de solutions se croisent ou se confondent. Donc, plus il y a de branches de solution, plus les singularités risquent d'être nombreuses et complexes. Comme il est difficile de visualiser les lieux de singularité en 3 ddls les exemples seront tirés des mécanismes à 2 ddls. Les figures suivantes présentent les lieux de singularité pour quelques branches de solution des mécanismes 2 ddls.

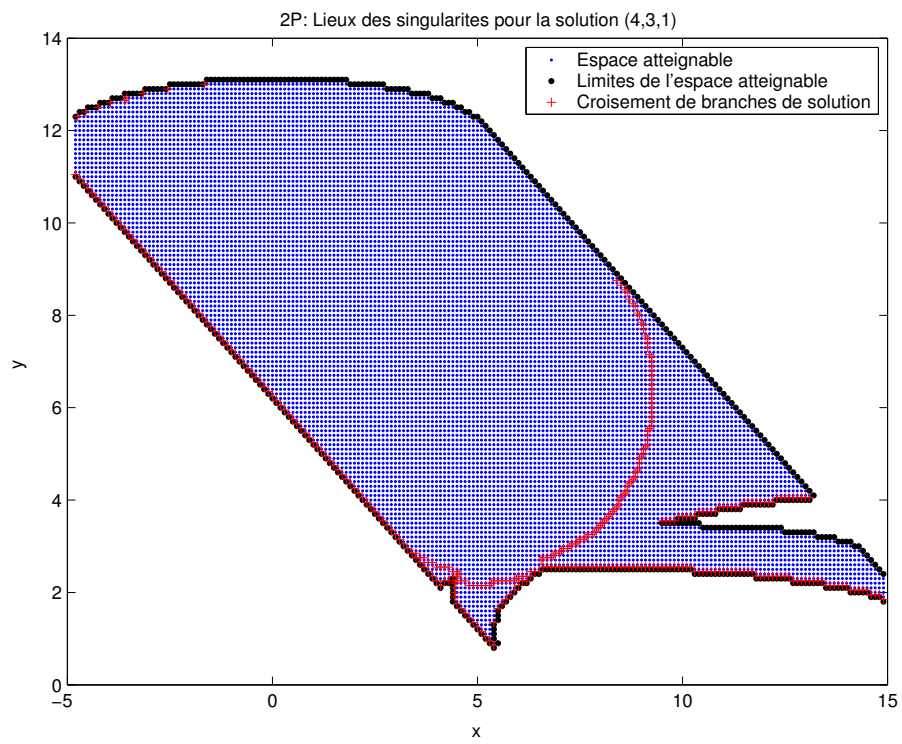
A la figure 3.13 les singularités de quatre des branches de solution du mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$ sont présentées. Les branches choisies ont des espaces de travail parmi les plus grands.

A la figure 3.14 les singularités de quatre branches de solution du mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$ sont présentées.

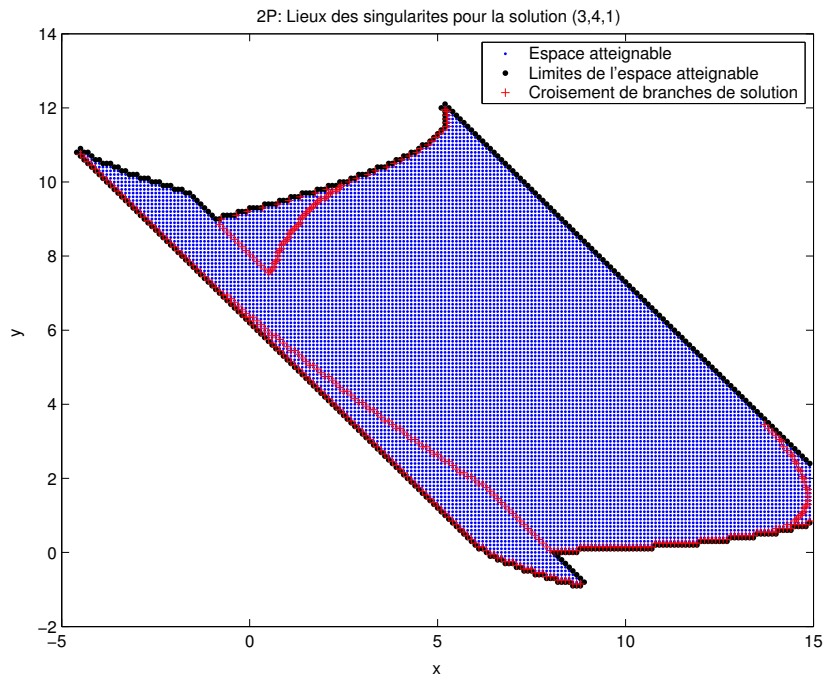
Dans les figures 3.13 et 3.14, les croix rouges pourraient être identifiées comme des



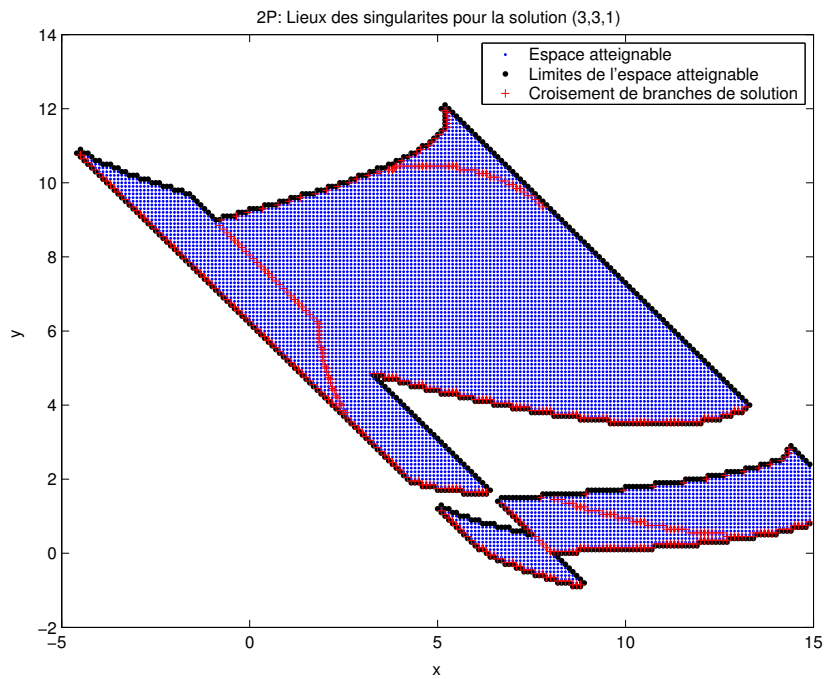
(a) branche 4.4.1



(b) branche 4.3.1

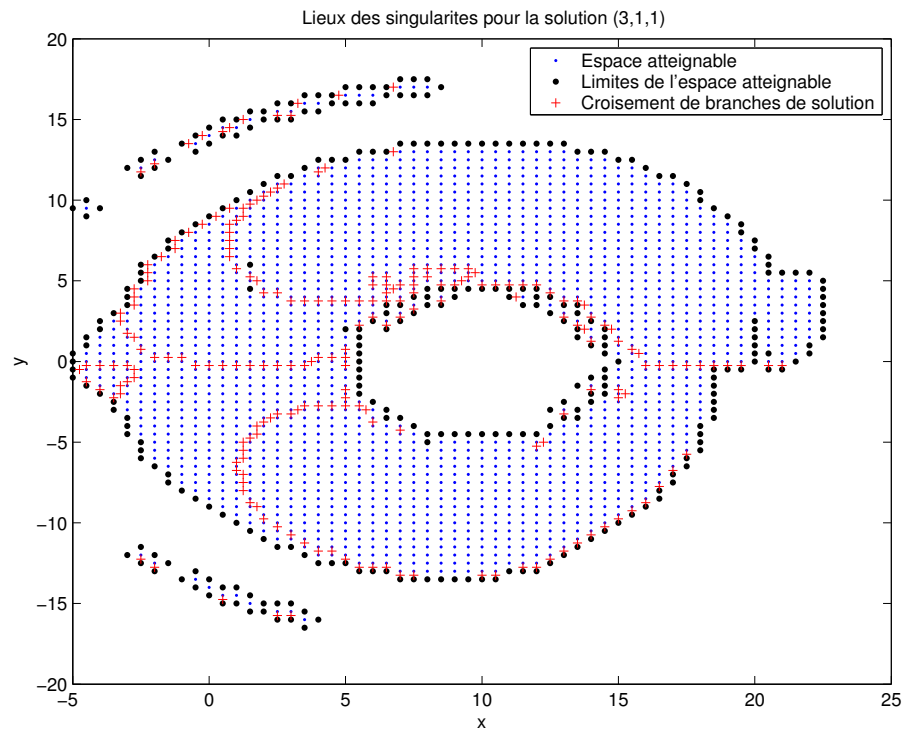


(c) branche 3.4.1

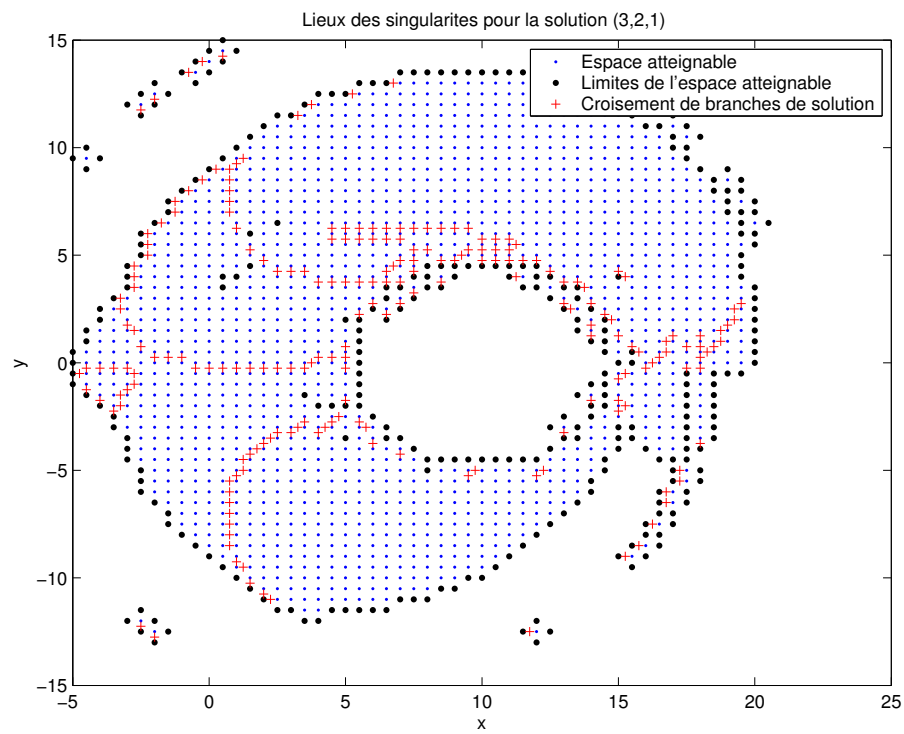


(d) branche 3.3.1

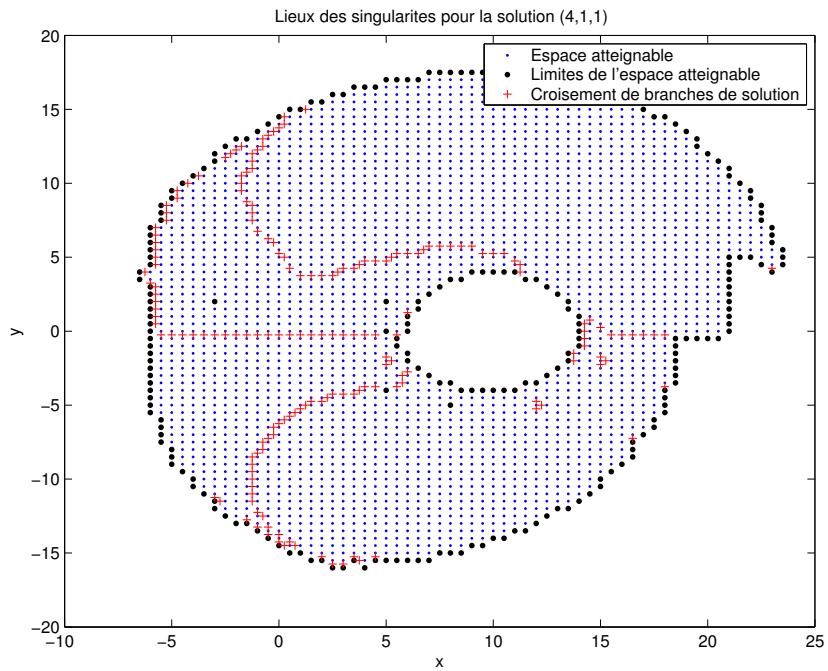
FIG. 3.13 – Exemples d'espace de travail et de lieux de singularité pour le mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$.



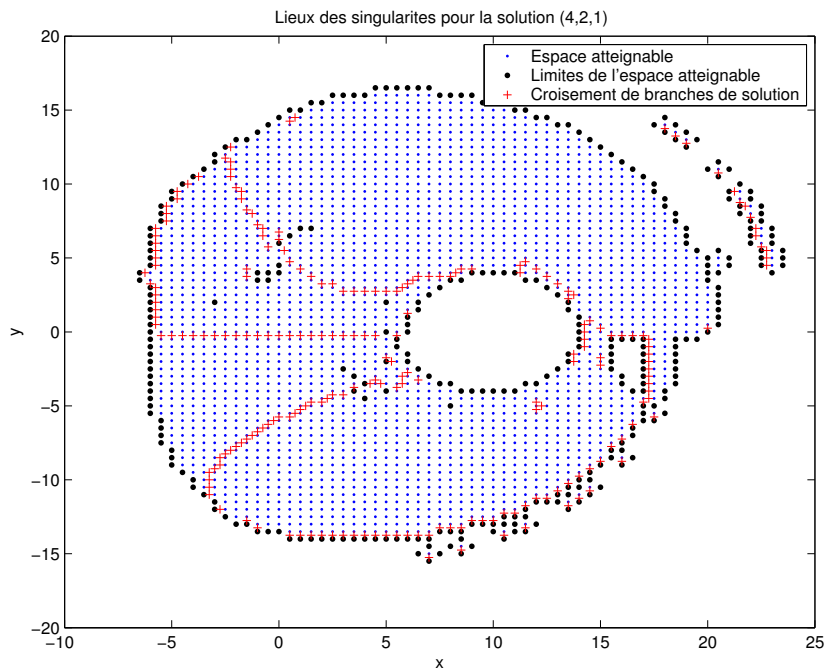
(a) branche 3.1.1



(b) branche 3.2.1



(c) branche 4.1.1



(d) branche 4.2.1

FIG. 3.14 – Exemples d'espace de travail et de lieux de singularité pour le mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$.

lieux de singularité. Le terme croisement de branche de solution a été préféré puisqu'il illustre bien la complexité de l'espace de travail des deux mécanismes. On constate que les mécanismes $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$ a en general un espace de travail beaucoup plus grand que le $\underline{P}X_R\underline{R}X_RX_R$. Les actionneurs prismatiques à la base du $\underline{P}X_R\underline{R}X_RX_R$ ont une plage de mouvement illimitée dans les deux directions ce qui permet de comparer ce mécanisme avec le $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$. En effet, l'espace de travail du $\underline{P}X_R\underline{R}X_RX_R$ est directement proportionnel aux limites des actionneurs à la base. Plus l'espace de travail est grand plus le temps de calcul est long. L'architecture avec deux membrures du $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$ par patte permet d'accéder à plus d'espace. La proportion de singularité sur l'espace atteignable est semblable. On peut retracer le croisement des branches de solution en traçant tous les lieux de singularité. En effet, si deux branches de solution ont des singularités au même endroit, on peut supposer que ces deux branches se croisent ou se confondent.

Les lieux de singularité sont dépendants de la branche de solution choisie. Il y a autant de lieux de singularité qu'il y a de branches de solution dans un mécanisme. Pour les mécanismes étudiés le nombre de branches de solution varie de 64 pour le $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$ à 4096 pour le 3 - $\underline{X}_R\underline{X}_RX_R$. Le choix de la trajectoire articulaire optimale peut donc s'avérer fort complexe.

3.5 Problème géométrique direct

La procédure pour écrire les équations du PGD pour chacun des mécanismes est semblable à celle utilisée pour le PGI.

3.5.1 Mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$

Pour résoudre le PGD, les équations (3.5) et (3.12) sont utilisées. Cependant, comme ce sont les coordonnées cartésiennes qui sont inconnues il est préférable d'exprimer les équations dans le repère global. On obtient les équations suivantes pour l'équation (3.5) :

$$A_1 \cos^2 t_2 + B_1 \cos t_2 \sin t_2 + C_1 \cos t_2 + D_1 \sin t_2 + E_1 + x = 0 \quad (3.145)$$

$$-B_1 \cos^2 t_2 + A_1 \cos t_2 \sin t_2 - D_1 \cos t_2 + C_1 \sin t_2 + F_1 + y = 0 \quad (3.146)$$

Et les équations suivantes pour l'équation (3.12) :

$$A_2 \cos^2 t_1 + B_2 \cos t_1 \sin t_1 + C_2 \cos t_1 + D_2 \sin t_1 + E_2 + x = 0 \quad (3.147)$$

$$-B_2 \cos^2 t_1 + A_2 \cos t_1 \sin t_1 - D_2 \cos t_1 + C_2 \sin t_1 + F_2 + y = 0 \quad (3.148)$$

où les coefficients sont exprimés respectivement dans les sections A.12 et A.13.

À partir des équations (3.145) et (3.146) on tire les expressions suivantes pour $\cos t_2$ et $\sin t_2$:

$$\begin{aligned} \sin t_2 &= -\frac{D_1 E_1 + D_1 x + D_1 A_1 - B_1 C_1 + F_1 C_1 + y C_1}{\Delta} \\ \cos t_2 &= -\frac{-F_1 D_1 - y D_1 + C_1 E_1 + C_1 x}{\Delta} \end{aligned} \quad (3.149)$$

où

$$\Delta = -B_1 F_1 - B_1 y + F_1^2 + 2F_1 y + y^2 + E_1^2 + 2E_1 x + E_1 A_1 + x^2 + x A_1 \quad (3.150)$$

En utilisant la relation $\cos^2 t_2 + \sin^2 t_2 - 1$, l'équation suivante qui est uniquement fonction des coordonnées articulaires est obtenue.

$$-P_{xy}^2 + G_1 x P_{xy} + H_1 y P_{xy} + I_1 x^2 + J_1 x y + K_1 y^2 + L_1 x + M_1 y + N_1 = 0 \quad (3.151)$$

où

$$P_{xy} = x^2 + y^2 \quad (3.152)$$

et où les coefficients sont donnés à la section A.14

On peut répéter la même procédure avec les équations (3.147) et (3.148). Il faut cependant remplacer dans les coefficients les expressions de $\sin t_2$ et $\cos t_2$ de l'équation (3.149) car ces expressions sont fonction des coordonnées cartésiennes. L'équation obtenue est trop complexe pour être gérée par *Maple* sous sa forme générale. Il serait cependant possible d'obtenir cette équation pour un cas particulier qui serait probablement d'un degré plus élevé que l'équation (3.151). Une fois obtenues les deux équations fonction de x et y , une procédure numérique pourrait être utilisée pour trouver les solutions. Le fait d'obtenir des équations non linéaires pose des inconvénients. En effet, il est difficile de connaître le nombre de solutions au PGD et par le fait même on n'est pas certain de toutes les trouver avec une procédure numérique.

3.5.2 Mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$

Pour le deuxième mécanisme à deux ddls, la procédure est la même. De plus, comme les deux pattes du mécanisme sont dépendantes on retrouve le même problème qu'à la section précédente, soit la deuxième équation est trop complexe pour être exprimée par *Maple*. Comme il s'agit de la même procédure elle ne sera pas expliquée une seconde fois.

3.5.3 Mécanisme $\mathfrak{3}\text{-}\underline{P}X_RX_R$

En combinant les équations (3.50) et (3.51), de la même façon qu'à la section 3.5.1 on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & C_i^2 D_i^2 - 2C_i D_i A_i B_i + A_i^2 B_i^2 - 2A_i B_i^2 E_i + E_i^2 B_i^2 + C_i^2 E_i^2 \\ & + D_i^2 B_i^2 - A_i^2 E_i^2 + 2A_i E_i^3 + 2A_i E_i D_i^2 - E_i^4 - 2E_i^2 D_i^2 - D_i^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

où les coefficients sont donnés à la section A.7 et où i est l'indice de la patte.

On obtient donc trois équations non-linéaires et très couplées. Ces équations comportent des racines carrées. Les trois pattes du mécanisme étant indépendantes, pour le PGI, on aurait pu s'attendre à ce que le problème puisse se simplifier. La présence de racines carrées rend cependant toute simplification impossible. Il faut donc envisager une procédure numérique pour résoudre le PGD du $3 - \underline{P}X_RX_R$.

3.5.4 Mécanismes $3-\underline{R}X_RX_R$ et $3-\underline{X}_RX_RX_R$

Dans le cas de ces mécanismes, on peut utiliser directement les équations (3.61) et (3.71). Dans ce cas, les valeurs de θ_i et de θ_{ai} sont connues et les coefficients sont fonction des coordonnées cartésiennes qui sont inconnues. Si on exprime les équations (3.61) et (3.71), on obtient des expressions plus simples qu'à la section précédente car ces dernières ne contiennent pas de racines carrées, mais les expressions sont tout de même trop complexes pour être résolues par une procédure autre que numérique.

3.6 Conclusion

L'étude cinématique des mécanismes plans comportant des joints X_R a démontré qu'il était possible d'utiliser ce type de joint dans des mécanismes parallèles. Cependant, il faut s'attendre à une plus grande complexité lors des calculs cinématiques. Prenons par exemple le mécanisme parallèle plan à deux ddls avec des liaisons rotoïdes à toutes les articulations qui peut être comparé au $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$. La cinématique de ce robot a été résolue à la référence [5]. On constate que la solution du PGI peut être faite d'une façon vectorielle et qu'elle mène à un maximum de 4 solutions. Pour le même mécanisme avec des joints X_R , on a pu montrer qu'il y avait jusqu'à 64 solutions. On peut constater l'augmentation du nombre de solutions avec le manipulateur parallèle plan à trois ddls en le comparant avec le manipulateur construit avec des liaisons rotoïdes $3 - \underline{R}RR$. La cinématique de ce robot est également résolue dans [5]. Le PGI peut dans ce cas également être résolu vectoriellement et mène à un maximum de 8 solutions, comparativement à 4096 solutions pour les robots $3 - \underline{R}X_RX_R$ et $3 - \underline{X}_RX_RX_R$.

On constate donc que l'utilisation de joints X_R dans les mécanismes plans provoque

une augmentation du nombre de solutions au PGI. Cependant, la résolution du PGI n'est pas beaucoup plus complexe puisqu'il est résolu en solutionnant des polynômes de degrés minimum. En effet, la solution numérique d'un polynôme peut être obtenue très rapidement.

Le nombre élevé de solutions est cependant responsable de plusieurs inconvénients. En effet, plus il y a de solutions, plus les singularités sont nombreuses et complexes. Cela a pu être constaté dans la section sur les singularités où seuls les cas les plus simples ont été présentés. De plus, pour tous les mécanismes présentés, la solution d'au moins un polynôme de degré supérieur à quatre était nécessaire. Les polynômes de degré supérieur à quatre doivent être résolus numériquement et l'ordre des solutions est choisi plus ou moins au hasard. L'ordre des solutions ne sera pas nécessairement le même dans deux zones connexes séparées par une surface de singularité. Cela rend plus difficile de conserver la même solution du début à la fin d'une trajectoire.

La complexité des lieux de singularité amène une autre difficulté. Il devient beaucoup plus difficile de planifier une trajectoire. Le temps de calcul pour obtenir les lieux de singularité sur l'ensemble de l'espace de travail peut être énorme et pour les mécanismes à trois ddls, ils sont difficiles à visualiser. Il peut être très fastidieux de consulter des graphiques pour le choix de la trajectoire. D'un autre côté, ce ne sont pas toutes les singularités qui doivent être évitées. Seules les singularités provoquant une instabilité mécanique sont à éviter absolument.

La solution algébrique au PGD s'est avérée très complexe et est peu praticable pour effectuer par exemple le contrôle du mécanisme. Une solution numérique partant des équations initiales seraient probablement plus appropriée et plus rapide. Cette procédure est expliquée à la référence [5].

Finalement, des solutions existent pour tous les problèmes rencontrés dans la résolution de la cinématique des mécanismes étudiés. Ces solutions ont déjà été utilisées pour le contrôle de d'autres mécanismes et leur efficacité a déjà été démontrée.

Les mécanismes flexibles sont beaucoup utilisés dans les mécanismes de précision. L'incorporation des équations cinématiques dans le contrôleur est essentielle pour le contrôle d'un mécanisme parallèle. Dans le cas d'un contrôle en boucle ouverte seule la résolution du PGI est nécessaire. Pour le contrôle en boucle fermée, comme la mesure

précise des coordonnées cartésiennes est très difficile, voir souvent impraticable, la solution du PGD est souvent la seule façon de fermer la boucle. Les polynômes développés dans la section 3.2 permettent de réduire le temps de calcul et ainsi améliorer les temps de réponse.

Chapitre 4

Choix des actionneurs

Les mécanismes compliants ont comme particularité qu'ils permettent d'atteindre de grandes précisions. Les actionneurs ne doivent donc pas limiter la précision atteignable. Les actionneurs étudiés ici seront utilisés avec deux mécanismes compliants, une version compliante du Tripteron et le cube compliant à deux ddls. Le choix des actionneurs a été basé sur plusieurs critères. Plusieurs types d'actionneurs ont été comparés soit les moteurs à matériaux magnétostrictifs, les actionneurs piezoélectriques, les moteurs ultrasoniques et les moteurs linéaires sans balais.

4.1 Critères de sélection

La précision atteignable est primordiale dans le choix des actionneurs. En effet, de par leur nature, les mécanismes compliants peuvent atteindre des précisions mi-

crométriques ou même nanométriques. L'élément limitatif pour la précision est souvent les actionneurs, d'où l'importance de leur sélection. Dans le présent projet, la précision recherchée est de l'ordre de quelques micromètres pour le mécanisme entier. Une précision de $1 \mu m$ est donc souhaitée pour les actionneurs eux-mêmes.

La force requise dépend de la charge déplacée par le mécanisme, des accélérations requises et de la rigidité du mécanisme. Ce critère ne peut être déterminé exactement car la force requise dépend du mécanisme et de l'actionneur lui-même. Pour des fins de comparaison, une charge externe de $5 N$ est posée, soit environ $500 g$. La force requise pour combattre la rigidité du mécanisme est évaluée. Les mécanismes comportant la rigidité interne la plus importante sont ceux fabriqués en P400 ABS. La force requise pour le Tripteron compliant a été évaluée par une simulation sur *ProMechanica*. Cette dernière est de $10 N$. Pour le cube compliant à deux ddls, la force requise est évaluée à l'aide des formules de rigidité dérivées au chapitre sur les liaisons flexibles. La rigidité d'une table à 8 cols semi-circulaires est donnée par l'équation suivante :

$$K = \frac{8Ebe^{2.5}}{9\pi l^2 \sqrt{r}} \simeq 600 \frac{N}{m} \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned} E &= 1.78 GPa \\ b &= 10 mm \\ e &= 1 mm \\ l &= 50 mm \\ r &= 11.2 mm \end{aligned}$$

Pour déplacer l'effecteur de la table de $10 mm$ dans une direction, $6 N$ sont donc nécessaires. Comme il s'agit d'un mécanisme parallèle à deux bras, $12 N$ sont nécessaires pour déplacer l'effecteur. L'actionneur choisi devra donc pouvoir fournir $17 N$ en continu plus son propre poids et les accélérations requises. La charge sur l'actionneur a peu de chances d'être $17 N$ de façon continue. Cela se produira seulement si l'effecteur est maintenu immobile à l'extrémité de son espace de travail. Dans ce cas, l'accélération sera nulle. Lors d'un mouvement oscillatoire, la rigidité du mécanisme contribuera aux accélérations et aux décélérations.

L'amplitude de mouvement de l'actionneur devra être égale ou supérieure à l'amplitude de mouvement du mécanisme compliant. Le cube compliant permet une amplitude

de mouvement de $\pm 10\text{ mm}$. Le Tripteron a pour sa part une amplitude de 10 mm . L'actionneur doit donc avoir une amplitude de plus de 20 mm .

L'effecteur du mécanisme compliant doit pouvoir faire un mouvement oscillatoire sur sa plage entière à une fréquence égale ou supérieure à 1 Hz . La fréquence maximale dépend de l'accélération maximale et de la vitesse maximale du système.

Pour minimiser les dimensions du mécanisme, l'actionneur doit être le plus petit possible. Comme les actionneurs sont positionnés à la base du mécanisme, le poids de ceux-ci n'est pas critique mais doit tout de même être considéré. Les actionneurs doivent être compatibles avec le système de contrôle actuel du laboratoire, soit RT-LAB de la compagnie OpalRT. Enfin, de faibles voltages sont préférables.

4.1.1 Résumé des critères de sélection

- Précision $\leq 1\ \mu\text{m}$
- Force $\geq 20\text{ N}$
- Amplitude de mouvement $\geq 20\text{ mm}$
- Fréquence $\geq 1\text{ Hz}$
- Petites dimensions
- Compatibilité avec le système de contrôle
- Bas voltage
- Prix

4.2 Moteur à matériaux magnétostrictifs

Ces moteurs utilisent des matériaux magnétiques intelligents. Ces matériaux changent de dimension lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique. Il est possible de créer un moteur linéaire à pas avec cette technologie si elle est utilisée avec deux autres moteurs à chaque extrémité de la tige magnétostrictive servant à la maintenir en place. Ainsi, pour un mouvement vers la gauche, la tige est tenue par le moteur de droite lorsqu'elle s'allonge et par le moteur de gauche lorsqu'elle se raccourcit. Le moteur possède les caractéristiques suivantes.

- Précision $\leq 1 \mu m$
- Grande force (non précisée sur le site de la compagnie)
- Amplitude de 10 à 100 mm
- Grandes vitesses (non précisées sur le site de la compagnie)
- Dimensions : 254 mm \times 127 mm \times 203 mm
- Tension de 12 V

Aucun prix n'était donné sur le site de la compagnie. Cependant, le système est assez complexe et peut être assez dispendieux. En effet, chaque actionneur comporte trois moteurs qui doivent être parfaitement synchronisés. De plus, les dimensions sont assez grandes.

4.3 Actionneur piezoélectrique

L'actionneur piezo est fait à partir de céramique ayant la propriété de changer de forme sous l'effet d'un courant électrique. L'effet inverse est observable. En effet, lorsque l'on applique une pression sur un piezo, celui-ci produit une différence de potentiel. Si la céramique est utilisée directement pour produire un mouvement, des forces au-delà de 10 kN peuvent être produites à des fréquences supérieures à 10 kHz . Cependant, l'amplitude de mouvement de ces actionneurs est très faible. Pour un actionneur constitué de céramiques superposées, l'amplitude maximale varie entre 5 et 200 μm . Cette amplitude peut être augmentée jusqu'à 1000 μm en utilisant un mécanisme flexible pour amplifier le mouvement. Dans ce cas, les forces et les fréquences atteignables seront considérablement réduites.

Il existe des actionneurs piezo à bas voltage et à haut voltage, c'est à dire que les voltages requis sont respectivement de $\simeq 100 V$ et de $\simeq 1000 V$. Ces actionneurs se comportent comme des charges capacitives et malgré les voltages importants pour les contrôler, ils nécessitent peu de puissance.

La plupart des actionneurs sont fait de couches superposées de *Lead zirconate titanate (PZT)*. L'amplitude de mouvement dépend de l'épaisseur totale de céramique. Le voltage maximal est fonction de l'épaisseur de chacune des couches. Les actionneurs à faible voltage sont faits de couches très minces. Les techniques de fabrication pour faire des couches minces sont beaucoup plus dispendieuses que pour des faire des actionneurs

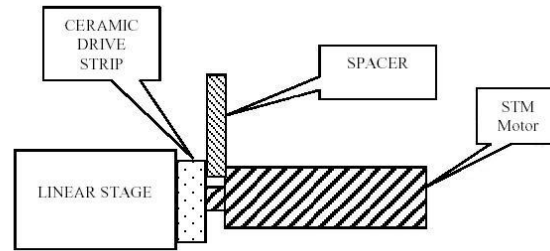


FIG. 4.1 – Schéma du moteur ultrasonique.

à haut voltage.

Enfin théoriquement, la précision de ces actionneurs est infinie. En pratique, elle est limitée par le système de contrôle entourant le piezo.

Ce type d'actionneur ne peut être retenu car la plage de déplacement est trop faible. De plus les voltages importants rendent le contrôle des moteurs plus difficile.

4.4 Moteurs ultrasoniques

Les moteurs ultrasoniques utilisent la propriété des piezoélectriques de créer des vibrations à haute fréquence pour produire un mouvement. Le moteur STM qui est actionné par des piezoelectriques fait bouger une bande de céramique montée sur un rail (linear stage). (Voir la figure 4.1). L'extrémité du moteur est actionnée longitudinalement et transversalement pour créer un mouvement résultant elliptique. Ce mouvement provoque un mouvement linéaire de la bande céramique. La force de poussée de la bande céramique dépend de la friction entre celle-ci et l'extrémité du moteur. Ce dernier doit donc être maintenu fermement contre la bande céramique. Pour deux types de moteurs, les performances suivantes peuvent être atteintes.

Pour le LS8

- Précision $\simeq 0.02 \mu m$
- Force maximale = $8 N$ (dépend de la force de contact)
- Force de contact $\simeq 72 N$
- Amplitude de mouvement : illimitée

- Vitesse maximale = 20 mm/s
- Dimensions : $42 \text{ mm} \times 60 \text{ mm} \times 28 \text{ mm}$
- Poids : 175 g
- Voltage maximal $\simeq 125 \text{ Vrms}$
- Puissance maximale $\simeq 6 \text{ W}$

Pour le HR8

- Précision $\leq 0.1 \mu\text{m}$
- Force maximale $\simeq 30$ à 36 N
- Force de contact $\simeq 144 \text{ N}$
- Vitesse maximale $\simeq 250 \text{ mm/s}$
- Dimensions : $41.9 \text{ mm} \times 46.6 \text{ mm} \times 23.8 \text{ mm}$
- Poids : 120 à 170 g
- Voltage maximal : 270 Vrms
- Puissance maximale : 30 W

Ce type de moteur demande une force de contact de 5 à 10 fois supérieure à la force du moteur. L'utilisation d'un rail n'étant pas souhaitable dans un mécanisme compliant, ce dernier doit être remplacé par la structure même du mécanisme. Ceci a pour inconvénient que les forces de contact doivent donc être supportées par le mécanisme compliant. Pour éviter que les efforts induits nuisent à la précision, le ratio de rigidité du mécanisme doit être beaucoup plus grand. Pour le cube compliant à deux ddls, une force de 12 N est nécessaire pour déplacer l'effecteur sans charge. Pour obtenir cette force, une précontrainte de 60 N serait minimalement nécessaire. Pour limiter le mouvement parasite à $1 \mu\text{m}$, le ratio de rigidité doit être minimalement de $\frac{K_{trans}}{K_{norm}} = \frac{6 \text{ N}}{60 \text{ N}} \frac{10^{-6}}{10^{-2}} = 0.001\%$. La force de 6 N correspond à la force requise pour déplacer une seule table à 8 cols semi-circulaires. Il est possible d'atteindre un tel ratio avec de l'aluminium ou du titane mais non du P400 ABS. De plus, la précontrainte ne peut être alignée avec les tiges de la table et elle crée un moment qui dépend de la position du moteur. Le cube compliant est beaucoup moins rigide en flexion qu'en translation et cela peut causer une déviation angulaire.

Connaissant les rigidités du mécanisme, il est possible de compenser les effets de la précontrainte dans les deux directions qui sont contrôlées. Cependant, un décalage serait présent dans les quatre autres ddls. Enfin, le prix de ces moteurs serait approximativement de $2500 \text{ \$}$ par ddl.

4.5 Moteur électrique linéaire sans balais

Tout comme un moteur rotatif, un moteur linéaire est constitué de deux parties : un rail magnétique comportant des aimants permanents en forme de U constitue le rotor et un moteur constitué de bobines de fil glissant à l'intérieur du rail constitue le stator. Contrairement à un moteur rotatif, le rotor est fixe et le stator est mobile. Il est contrôlé par un signal sinusoïdal à trois phases. Pour éliminer la friction, la position du moteur n'est pas déterminée par des balais, mais plutôt par un dispositif sans contact. Dans ce cas-ci des capteurs à effet Hall ont été choisis pour permettre de synchroniser le signal avec la position du moteur. Deux types principaux de moteur électrique linéaire sont proposés par les compagnies. Les moteurs dits *Ironcore* : les bobines sont collées sur des laminés de silice d'acier ce qui maximise la force du moteur. Les moteurs dits *Ironless* ou leur part ne contiennent pas de fer ce qui évite que le moteur soit attiré par le rail magnétique. Ces derniers sont habituellement choisis pour les utilisations demandant de grandes précisions. Pour les mécanismes parallèles compliants, la précision est primordiale et elle ne nécessite pas des forces importantes, donc le moteur *ironless* a été sélectionné.

La course du moteur est limitée par la longueur du rail. Il est cependant possible d'aligner plusieurs rails l'un à la suite de l'autre et d'obtenir une course aussi longue que nécessaire. Il faut cependant choisir un système de mesure de la position appropriée.

Les moteurs *Ironless* et *Ironcore* ont théoriquement une résolution illimitée. Cette dernière est déterminée par la précision du système de mesure utilisé pour contrôler la position du moteur. Trois types d'encodeurs linéaires ayant une résolution respective de $10\ \mu m$, $1\ \mu m$ et $0.1\ \mu m$ ont été choisis pour être utilisés avec les moteurs.

Pour de telles précisions, la vitesse maximale du moteur est limitée par la fréquence d'acquisition. Il faut donc faire un compromis entre la vitesse et la précision du système. La vitesse maximale est déterminée par l'équation (4.2)

$$V_{max} = R_e \frac{f_{ech}}{FS} \quad (4.2)$$

Vitesse maximale du système : V_{max}

Résolution du capteur de position : R_e

Fréquence d'échantillonnage du système d'acquisition : $f_{ech} = 4.8MHz$

Facteur de sécurité suggéré par la compagnie : $FS = 4$

Selon cette équation, pour les résolutions des trois encodeurs sélectionnés, les vitesses maximales sont respectivement de $12 \frac{m}{s}$, $1.2 \frac{m}{s}$ et $120 \frac{mm}{s}$.

Le cas le plus exigeant d'utilisation du moteur se fait lorsque ce dernier doit maintenir sa charge à l'extrémité de la course du cube compliant. Dans cette situation, la force d'arrêt (F_{ar}) que doit fournir le moteur est de $18.5 N$ telle que présenté dans la section 4.1. ($18.5 N = 17 N + Mg$). La compagnie suggère de multiplier cette force par un facteur $\sqrt{2}$ pour obtenir la force continue (F_c) minimale que peut supporter le moteur.

$$F_c = \sqrt{2}F_{ar} = 26.2N \quad (4.3)$$

À partir de cette information, il est possible de choisir le moteur approprié pour cette utilisation soit le ILF-03-050 de ETEL. Celui-ci présente les caractéristiques suivantes.

- Force maximale : $F_p = 146 N$
- Force continue : $F_c = 28 N$ (bobine pouvant supporter $80^\circ C$)
- Force continue : $F_c = 35 N$ (bobine pouvant supporter $130^\circ C$)
- Masse du moteur : $M = 150 g$ (sans le rail)

4.5.1 Calcul de la fréquence et de la force continue en fonction de l'accélération

Enfin, les données précédentes sont utilisées pour déterminer à quelle fréquence le moteur peut entraîner l'effecteur pour une trajectoire d'aller-retour entre les deux positions extrêmes pour les trois précisions données plus haut. On suppose des courbes de vitesse et d'accélération telles que présentées à la figure 4.2.

On suppose une accélération constante d'amplitude A . Cependant, à l'extérieur de la position d'équilibre, le moteur est entraîné ou freiné par la rigidité du mécanisme. Selon la trajectoire choisie, la force due à la rigidité F_R , est toujours dans la direction de l'accélération ce qui augmente la fréquence permise. La force du moteur F_M doit

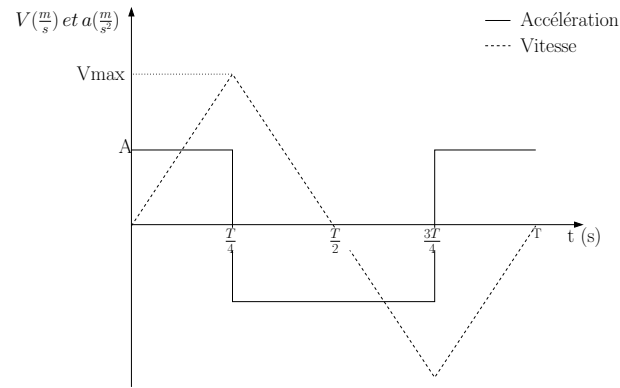


FIG. 4.2 – Courbes de vitesse et d'accélération.

compléter la force de ressort F_R de façon à obtenir l'accélération désirée. F_R n'étant pas constante, F_M ne le sera pas non plus. En premier, la vitesse et la position en fonction du temps sont intégrées.

$$\begin{aligned} V(t) &= \int A d\tau \\ V(t) &= At + C_{v1} \\ V(0) &= C_{v1} = 0 \frac{m}{s} \\ V(t) &= At \\ t &\in \left[0, \frac{T}{4}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(t) &= \int V d\tau \\ X(t) &= \frac{1}{2}At^2 + C_{x1} \\ X(0) &= C_{x1} = -0.01 \text{ mm} \\ X(t) &= \frac{1}{2}At^2 - 0.01 \\ t &\in \left[0, \frac{T}{4}\right] \end{aligned}$$

À l'instant $\frac{T}{4}$, l'effecteur est à la position d'équilibre. C'est-à-dire qu'aucune force de rigidité n'est présente dans le mécanisme à cet instant. La période et la fréquence sont ainsi calculées.

$$\begin{aligned} X\left(\frac{T}{4}\right) &= \frac{AT^2}{32} - 0.01 = 0 \\ T &= \sqrt{\frac{0.32}{A}} \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$f = \sqrt{\frac{A}{0.32}} \quad (4.5)$$

Pour une accélération constante de $A = 1g = 9.89 \frac{m}{s^2}$, on obtient une période de $T = 0.1799 s$, donc une fréquence de $5.6 Hz$. Pour une accélération constante de $A = 0.05g$, on obtient une période de $T = 0.9708 s$, donc une fréquence de $1.0 Hz$.

Pour le calcul de la force constante F_c , il est nécessaire de connaître la position $X(t)$ pour $t = \frac{T}{4}.. \frac{T}{2}$. La vitesse et la position sont données aux équations (4.6) et (4.8).

$$\begin{aligned} V(t) &= \int A d\tau \\ V(t) &= At + C_{v1} \\ V\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{AT}{2} + C_{v1} = 0 \frac{m}{s} \\ V(t) &= At - \frac{AT}{2} \\ t &\in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} X(t) &= \int V d\tau \\ X(t) &= \frac{1}{2}At^2 - \frac{ATt}{2} + C_{x1} \\ X\left(\frac{T}{4}\right) &= \frac{1}{32}AT^2 - \frac{AT^2}{8} + C_{x1} = 0 m \\ X(t) &= \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{2}ATt + \frac{3}{32}AT^2 \\ t &\in \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

La vitesse maximale sera, pour $A = 1g$, de $V_{max} = V\left(\frac{T}{4}\right) = A\frac{T}{4} = 0.4448 \frac{m}{s}$. Cette vitesse est inférieure à celle suggérée lorsque le moteur est utilisé avec des encodeurs de résolution de $10 \mu m$ et de $1 \mu m$. Cependant, cette vitesse est supérieure à celle suggérée avec l'encodeur d'une résolution de $0.1 \mu m$. La période et la fréquence doivent être recalculées en fonction de cette limitation. Le profil de vitesse pour ce cas est présenté à la figure 4.3. Cependant, pour $A = 0.05g$, $V_{max} = 0.036 \frac{m}{s}$ ce qui est inférieur à la vitesse maximale peu importe l'encodeur choisit.

Sur cette courbe une accélération constante est observée jusqu'à l'atteinte de la

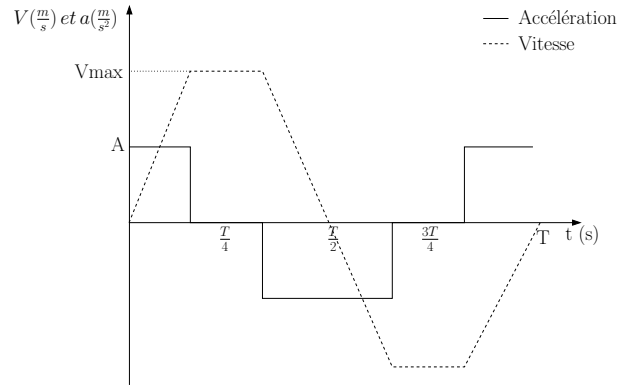


FIG. 4.3 – Courbes de vitesse et d'accélération pour une vitesse limitée.

vitesse maximale qui est maintenue jusqu'à la phase de décélération. Le temps d'accélération T_a est donné à l'équation (4.8)

$$T_a = \frac{V_{max}}{A} \quad (4.8)$$

Le temps restant entre $\frac{T}{4}$ et T_a est donné par l'équation (4.9)

$$T_r = \frac{T}{4} - T_a = \frac{X(\frac{T}{4}) - X(T_a)}{V_{max}} = \frac{0.01 - \frac{AT_a^2}{2}}{V_{max}} \quad (4.9)$$

La période sera donc égale $T = 4(T_r + T_a)$. Pour une accélération de $1g$, on obtient $T_a = 0.012s$, $T = 0.3576s$ et $f = 2.8Hz$.

Il faut ensuite s'assurer que l'accélération exigée n'est pas supérieure à celle admissible pour le moteur. La force continue ne sera calculée que dans le cas où la vitesse n'est pas limitée, car dans le deuxième cas la force continue sera plus faible.

Selon la 3^e loi de Newton $F = MA$ où F est la somme des forces sur l'effecteur.

Durant la période d'accélération qui a lieu de $t = 0$ à $t = \frac{T}{4}$ la somme des forces est la suivante.

$$F_1 = F_{R1} - F_e + F_{m1} = MA \quad (4.10)$$

où F_{Ri} est la force de ressort provenant du mécanisme. Cette force tend à ramener l'effecteur à la position d'équilibre et, pour la trajectoire étudiée, est toujours dans le sens de l'accélération. La rigidité du mécanisme en P400 ABS étant de $1200 \frac{N}{m}$,

$F_{R1} = -1200X(t) = 12 - 600At^2$. La force F_e est la force externe de 5 N. Elle est toujours dans la même direction. Enfin, F_{mi} est la force requise par le moteur pour maintenir l'accélération. Elle est toujours dans le même sens que l'accélération.

Durant la période de décélération qui à lieu de $t = \frac{T}{4}$ à $t = \frac{T}{2}$ la somme des forces est la suivante.

$$F_2 = F_{R2} - F_e - F_{m2} = MA \quad (4.11)$$

où

$$F_{R2} = 600At^2 - 600ATt + 130.5AT^2$$

En calculant les forces requises aux moteurs, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} F_{m1} &= F_1 - F_{R1} + F_e \\ &= MA - 7 + 600At^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

$$\begin{aligned} F_{m2} &= -F_2 + F_{R2} - F_e \\ &= -(MA + 5) + 600At^2 - 600ATt + 130.5AT^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

La force continue est donnée par la valeur rms présentée à l'équation (4.15) :

$$F_c = \frac{2}{T} \sqrt{\left(\int_0^{\frac{T}{4}} F_{m1}\right)^2 + \left(\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} F_{m2}\right)^2} \quad (4.15)$$

4.6 Conclusion

Pour une accélération de 1g, la force continue requise est de $F_c = 24.0 N$. La force continue maximale qui peut être fourni par le moteur Etel ILF-03-050 étant de 28 N, le facteur de sécurité pour une fréquence de 5.6 Hz est de 14%. Pour une accélération de 0.05g, la force continue requise est de $F_c = 10.4 N$ ce qui donne un facteur de sécurité de 63%. Ce moteur respecte tous les critères de sélection et son prix est d'environ 3500 \$ par ddl.

Chapitre 5

Sélection des matériaux

Comme pour toute application mécanique, le choix d'un matériau pour un mécanisme compliant est d'une importance fondamentale. En effet, le choix d'un matériau adéquat permet généralement d'améliorer les performances du mécanisme, de diminuer les dimensions ou les coûts. Par exemple, dans la fabrication d'un vélo plusieurs matériaux sont disponibles pour le cadre comme l'acier, l'aluminium ou un matériau renforcé de fibres de carbone. Le choix dépend de l'objectif recherché soit diminuer le coût ou améliorer les performances. Cependant, face à la très grande variété de matériaux disponibles il est souvent ardu de faire un choix. Ce chapitre présente les critères de sélection importants dans le domaine des mécanismes compliant. Une sélection de matériaux présentant des propriétés intéressantes est ensuite présentée. Il n'existe pas un matériau supérieur aux autres car les applications diffèrent et les propriétés recherchées aussi.

5.1 Critères de sélection

5.1.1 Modules de rigidité

Pour les mécanismes compliant les matériaux présentant une grande flexibilité sont préférables. La flexibilité est inversement proportionnelle au module de rigidité. Il existe plusieurs modules de rigidité pour décrire les matériaux. Le plus fréquent est de module de *Young* E ou module de rigidité en tension. Plus rarement, le module de rigidité en compression et en torsion sont parfois précisés. Cependant, ils sont habituellement semblables au module de *Young*. Enfin, il existe le module de cisaillement G qui est utilisé pour les cas de contrainte en torsion. Celui-ci est rarement précisé car il est relié au module de *Young* par l'expression suivante : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ où ν est le coefficient de Poisson qui est une caractéristique du matériau ([4] page 7).

5.1.2 Limite en fatigue σ_F

Il est important de baser le choix d'un matériau sur sa limite en fatigue plutôt que sa limite élastique σ_y , car la contrainte dans le matériau n'est pas fixe mais varie périodiquement. S'il subit une charge maximale trop importante, il peut voir ses propriétés se dégrader avec le temps. Le comportement en fatigue d'un matériau est caractérisé par sa courbe d'endurance. Celle-ci relie l'amplitude de contrainte maximale sur le nombre de cycles. L'amplitude de contrainte maximale diminue avec le nombre de cycles. Cependant, pour certains matériaux la courbe rejoint une asymptote appelée la limite d'endurance σ_D . En dessous de cette limite, le matériau ne subit en principe pas de phénomène de fatigue. Pour les autres matériaux, une limite appelée la limite en fatigue est déterminée arbitrairement pour un certain nombre de cycles. Dans ce cas, le nombre de cycles doit être précisé.

Le phénomène de fatigue s'amorce dans les zones où il y a concentration de contrainte ou des imperfections dans le matériau. Donc la composition du matériau n'est pas l'unique facteur de la limite en fatigue. Le fini de surface a également une très grande influence. La vitesse de mise en chargement ou fréquence de cyclage a aussi une influence sur la limite en fatigue. Pour des fréquences élevées un échauffement se produit

Caractéristique du test	nombre de cycle	Limite en fatigue (MPa)
Non troué	10^3	1144
Non troué	10^5	1144
Non troué	10^7	600
Troué	10^7	275
Troué	1000	825

TAB. 5.1 – Limites en fatigue du titane bêta.

qui diminue les propriétés du matériau. Les matières plastique sont particulièrement sensibles à la fréquence de cyclage dû à leur comportement viscoélastique et à leur faible conductivité thermique. En effet, ils dissipent mal la chaleur. Dans le cas d'un mécanisme flexible, la vitesse de mise en chargement sera généralement faible.

Pour caractériser un matériau, il faut faire un grand nombre d'essais suivi d'un calcul statistique. Comme un essai en fatigue est très long, les tests normalisés sont très coûteux. C'est pourquoi, pour un grand nombre de matériaux, surtout les plus récents, ces données ne sont pas disponibles ([4] pages 185–187).

Il existe un grand nombre de tests normalisés. Les éprouvettes peuvent être sollicitées en tension, en compression ou en flexion. Il peut y avoir présence ou non de facteur de concentration de contrainte. C'est pourquoi un même matériau peut avoir un grand nombre de limites en fatigue. La limite en fatigue est aussi déterminée en fonction d'un certain nombre de cycles. Par exemple, les caractéristiques en fatigue du titane beta qui proviennent de [1] sont présentées au tableau 5.1.

5.1.3 Rapport de la limite en fatigue sur le module de rigidité

Le rapport de la limite en fatigue sur le module de rigidité $\epsilon_F = \frac{\sigma_F}{E}$ détermine le pourcentage de déformation acceptable d'un matériau. Plus ce rapport est grand, plus le débattement du mécanisme sera grand. Ce rapport n'aura cependant aucune influence sur le ratio de rigidité qui lui dépend uniquement de la géométrie. Ce rapport est préférable à l'allongement à la rupture qui est souvent donné dans les tables de

matériaux. En effet, pour conserver ses propriétés mécaniques pour une durée de vie acceptable, le matériau ne doit pas être sollicité au delà de sa limite en fatigue ou minimalement sa limite élastique. Or, la forme de la courbe de traction varie beaucoup d'un matériau à l'autre et il n'y a pas de lien entre le point de rupture et la limite élastique. C'est le rapport limite en fatigue sur module de *Young* qui est choisi comme étant le principal critère dans la comparaison des matériaux.

5.1.4 Méthodes de fabrication

Certaines méthodes de fabrication ne sont pas accessibles pour tous les types de matériaux. C'est le cas notamment de l'électro-érosion qui ne permet d'usiner que des matériaux conducteurs. C'est donc la résistivité du matériau qui détermine l'usinabilité par EDM. L'électro-érosion a l'avantage dans bien des cas de produire des pièces complexes en un seul bloc et de faire des sections très minces impossibles à atteindre dans la majorité des procédés standards. Ces caractéristiques sont souvent utiles pour fabriquer des joints flexibles très performants. De plus, ce procédé ne modifie pas les propriétés du matériau par l'application de forces ou une augmentation locale de la température en plus de fournir un excellent fini de surface. Toutes ces caractéristiques contribuent à l'augmentation de la durée de vie en fatigue.

Comme les mécanismes compliant ont souvent des formes très complexes, le prototypage rapide FDM est une technique à considérer. Certaines machines permettent de faire des sections minces jusqu'à $100\mu m$ ce qui est suffisant pour bien des applications. L'électro-érosion est toutefois supérieur à ce point de vue. Le choix de matériaux pour le FDM est cependant limité à quelques thermoplastiques soit par exemple l'ABS, le PC (polycarbonate) et le polyphénylsulfone.

5.1.5 Disponibilité et coût du matériau

Certains matériaux sont beaucoup plus disponibles que d'autres et les coûts peuvent varier énormément. Cela peut avoir une très grande influence sur le choix final. Par exemple, les catégories standards d'acier sont disponibles dans la majorité des villes et comme ils sont produits en très grande quantité, ils sont peu dispendieux. Un alliage

exotique de titane peut cependant être disponible à un seul endroit en Amérique du nord ce qui le rend plus difficile à se procurer.

5.2 Sélection de matériaux

Les propriétés des alliages métalliques présentées au tableau 5.2 sont tirée de [1].

Matériau	σ_Y (MPa)	E (GPa)	ν	σ_F (MPa)	Propriété de σ_F	ϵ_F (%)
Be-Cu Alloy ^a	1030-1250	200		517-552	RB ^b 10 ⁸ cycles	.2
AISI 302 ^c	515	193		485-550	NS ^d	.25-.28
Elgiloy ^e	2120	190	0.226	1240	RB 8x10 ⁴ cycles	0.65
TIMETAL ^f	1050	103		755	NS	0.73
Titanium ^g	1200	106	0.33	1000	NT ^h 10 ⁶ cycles	0.94

^aBrush Wellman Beryllium Copper Alloy Temper (UNS C17200)

^bReverse Bending

^cAcier inoxydable durcit

^dnon spécifié

^eCo-Cr-Ni Alloy, Reduction a froid, Traitement thermique

^f15-3 Titanium Alloy (Ti-15V-3Cr-3Sn-3Al) Vieilli à 538°C

^g(Ti-10V-2Fe-3Al) ST 760°C, Vieilli à 525°C

^hnon troué

TAB. 5.2 – Propriétés de matériaux métalliques.

Pour un même polymère, les propriétés varient énormément en fonction des additifs présents. Les propriétés du tableau 5.3 ne sont donc données qu'à titre indicatif pour quelques matériaux thermoplastiques

Parmi les matériaux métalliques, les alliages de titane sont ceux qui comportent les meilleures propriétés. Comme on peut le constater cependant, les thermoplastiques ont pour plusieurs des propriétés supérieures aux alliages métalliques, même ceux de titane.

Malgré le fait que certains thermoplastiques ont des propriétés supérieures aux alliages métalliques, ces derniers peuvent être préférés pour les raisons suivantes : La possibilité d'utiliser l'électro-érosion pour usiner les pièces flexibles permet de fabriquer des sections plus minces qu'avec les autres méthodes de fabrication. De plus, la qualité du fini de surface permet d'améliorer les propriétés en fatigue. Pour des applications

Matériau	σ_Y (MPa)	E (GPa)	σ_F (MPa)	Propriété de σ_F	ϵ_F (%)
POM ^a		2.6	25		1
PEEK ^b		3.4	70-80	10 ⁵ cycles	2.1-2.4
PI ^c		2.5	45		1.8
PC ^d	62	2.3	38	10 ⁵ cycles	1.7

^aAcetal

^bPolyetheretherketone

^cPolyimide

^dPolycarbonate

TAB. 5.3 – Propriétés de matériaux métalliques.

où un grand nombre d'exemplaires doivent être produit et où le coût est plus important que les performances du mécanisme, des méthodes de fabrication à haute échelle peuvent être envisagées. Par exemple, le moulage par injection peut être utilisé pour des matériaux métalliques et thermoplastiques. Pour plusieurs de ces méthode l'utilisation du plastique est souvent moins dispendieuse. Le coût du matériau peut aussi influencer la décision. Parmi les métaux, les alliages de titane sont les plus dispendieux, le titane étant un métal rare comparativement au fer et à l'aluminium. Certains thermoplastiques comme les PEEK et les PI sont très dispendieux.

Finalement, les tableaux 5.2 et 5.3 présentent une sélection parmi les meilleurs matériaux pour les mécanismes compliants. Cependant, le choix final sera dicté par l'application.

Conclusion

Ce mémoire a présenté l'étude de diverses articulations et mécanismes compliant de façon à en déterminer le potentiel vis à vis des mécanismes de haute précision. Le choix d'un actionneur et d'un matériau ont également été abordés puisqu'ils constituent un facteur essentiel pour déterminer la précision globale d'un manipulateur.

Tout d'abord, l'étude de trois types de liaisons compliantes par rapport à plusieurs critères a été menée. Ces critères sont l'amplitude de mouvement, le ratio de rigidité, l'encombrement et les méthodes de fabrication. Les deux premiers types de liaisons, soit le joint X_R et joint en croix sont bien adaptés aux applications de haute précision. Le joint X_R présente une amplitude de mouvement exceptionnelle et de bonnes performances aux autres critères. Le joint en croix se distingue par un excellent ratio de rigidité et de très bonnes performances aux autres critères. Le joint à col semi-circulaire n'offre pas quant à lui des performances intéressantes s'il est utilisé seul. Il existe cependant des exemples où ce type de liaison utilisée en parallèle permet d'atteindre des précisions impressionnantes.

La présence de sections minces dans les liaisons compliantes en rend la fabrication difficile. Pour chaque type de liaison, des méthodes de fabrication ont été présentées. Le prototypage rapide s'avère une solution acceptable. Les prototypes construits de cette façon présentent une bonne flexibilité et un bon ratio de rigidité. Des performances supérieures peuvent être atteintes avec les machines récentes de prototypage rapide.

Celles-ci permettent de créer des sections plus minces avec des matériaux plus performants. Cette méthode a l'avantage de pouvoir reproduire pratiquement toutes les géométries imaginables. Cependant, le choix de matériau pour cette méthode est limité à quelques thermoplastiques. L'électro-érosion est une méthode fortement utilisée pour les mécanismes compliants. Cette méthode permet de faire des sections extrêmement minces avec un fini de surface miroir. De plus, les propriétés des matériaux usinés ne sont pas affectées. Tous les avantages de l'électro-érosion en font la méthode la mieux adaptée aux mécanismes compliants de haute précision. Cependant, le choix de géométrie est un peu plus limité qu'avec le prototypage rapide. Dans certains cas, par exemple pour le joint X_R et le joint en croix, le joint ne peut être fabriqué en un seul bloc et il faut assembler certaines pièces. De plus cette méthode est limitée aux matériaux métalliques.

Ensuite, des exemples de plusieurs mécanismes compliants constitués des liaisons précédentes ont été présentés. Les mécanismes parallèles à col semi-circulaire ont un très bon ratio de rigidité. Deux versions de mécanismes à un ddl ont été présentées. Le premier produit un mouvement en arc de cercle ce qui cause certains inconvénients. Le deuxième offre un mouvement rectiligne et un excellent ratio de rigidité. Il est cependant complexe et encombrant. Le Tripteron compliant allie une architecture très avantageuse d'un point de vue cinématique à des joints compliants très performants. Cette combinaison produit un mécanisme d'une très grande précision et facile à contrôler. Les mécanismes plans avec joints X_R ont la particularité d'avoir un très grand espace atteignable. Un ratio de rigidité légèrement inférieur aux autres mécanismes peut cependant en limiter les applications.

De façon à obtenir une meilleure compréhension des mécanismes plans décrits au chapitre 2, l'analyse cinématique de ces derniers a été réalisée. Cette analyse fait ressortir que la complexité cinématique augmente sensiblement le temps de calcul du contrôleur, mais pas d'une façon excessive. Cependant, le très grand nombre de branches de solution et la complexité des lieux de singularité rend la planification d'une trajectoire très complexe. Certaines méthodes permettent d'automatiser le processus, mais celles-ci sont coûteuses en temps de calcul. La planification et la programmation d'une nouvelle tâche seraient beaucoup plus longues que pour le Tripteron par exemple.

Tout comme l'architecture d'un mécanisme et le design des joints compliants, l'actionnement est un facteur important pour déterminer la précision d'un système. Pour

profiter au maximum des avantages reliés aux mécanismes compliants, l'actionneur choisi doit être d'une précision égale ou supérieure à celle du mécanisme. Les moteurs rotatifs disponibles sur le marché étant bien connus, l'étude s'est portée sur les moteurs linéaires. Les moteurs à matériaux magnétostrictifs se sont avérés très encombrants, complexes d'utilisation et énergivore. Les moteurs piezo permettent de trop faibles débattements. Les moteurs ultrasoniques présentent pour leur part des propriétés intéressantes mais sont mals adaptés aux mécanismes compliants. Finalement les moteurs électriques sans balais offrent les meilleures caractéristiques pour l'application en question.

Finalement, le choix du matériau d'une liaison ou d'un mécanisme a un impact très important sur ses performances. Le choix se base principalement sur le critère suivant soit le ratio de la limite en fatigue sur le module de rigidité. Parmi les matériaux métalliques, les alliages de titane présentent les meilleurs propriétés. Certains aciers comme l'elgiloy présentent aussi des propriétés intéressantes. Parmi les matériaux thermostoplastiques, les PEEK et les PI semblent les plus performants, mais ils sont également les plus dispendieux. D'autres critères entrent en ligne de compte et varient selon l'application comme le coût du matériau, le coût de fabrication, l'aspect, etc. De ces critères dépend donc le choix optimal pour l'application spécifique.

Les éléments présentés dans ce travail permettent de choisir l'architecture la mieux adaptée aux manipulateurs de précision. L'étape suivante serait de construire un mécanisme et d'en effectuer le contrôle. L'architecture la plus intéressante serait certainement le Tripteron pour ses propriétés et sa simplicité. Il serait également intéressant d'étudier davantage le mécanisme plan 3 – $RX_R X_R$ pour corriger certains inconvénients. Le défi serait de faire un design permettant au mécanisme de supporter son propre poids, de programmer le contrôleur de façon à ce qu'il contienne le PGI et le PGD et de créer un programme permettant de simplifier la planification de trajectoire.

Bibliographie

- [1] “Matweb - Material property data,”. Site internet. <http://www.matweb.com/>.
- [2] Ananthasuresh, G. and Kota, S., 1995, “Designing compliant mechanisms,” *ASME Mechanical Engineering*.
- [3] Collins, C. L., 2002, “Kinematics of a spatial three degree-of-freedom robot with rolling contact joints,” in *Proceedings of DETC ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, no. DETC2002/MECH-34250, Montreal, Canada.
- [4] Dorlot, J.-M., Baïlon, J.-P., and Masounave, J., 1986, *Des matériaux*. Édition de l'école Polytechnique de Montréal, deuxième édition.
- [5] Gosselin, C. M., 2004, *Mécanique des manipulateur GMC-64388*. ReproLaval. Notes de cours.
- [6] Hayes, M. J. D., 1999, *Kinematics of General Planar Stewart-Gough Platforms*. Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Quebec, Canada.
- [7] Henein, S., 2001, *Conception des guidages flexibles*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, Suisse.
- [8] Howell, L. L., 1991, *The Design and Analysis of Large-Deflection Members in Compliant Mechanisms*. M.S. Thesis, Purdue University.
- [9] Howell, L. L., 2001, *Compliant Mechanisms*. John Wiley and Sons, Inc.

- [10] Jeanneau, A., Herder, J., Laliberté, T., and Gosselin, C. M., 2004, “A compliant rolling contact joint and its application in a 3-dof planar parallel mechanism with kinematic analysis,” in *Proceedings of DETC ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, no. DETC2002/MECH-57264, Salt Lake City, USA.
- [11] Kim, H. and Tsai, L., 2002, “Design optimisation of a cartesian parallel manipulator,” in *Proceedings of DETC ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, Montréal, Canada.
- [12] Kong, X. and Gosselin, C., 2002, “Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-dof translational parallel manipulator,” *The International journal of Robotics Research*, Vol. 21, No. 9, pp. 791–798.
- [13] Kota, S., 1999, “Design of compliant mechanisms with applications to mems and smart structures,” in *Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Oulu, Finland.
- [14] Lobontiu, N., 2003, *Compliant mechanisms, design of flexure hinges*. CRC press.
- [15] Moon, Y.-M., Trease, B. P., and Kota, S., 2002, “Design of large-displacement compliant joints,” in *Proceedings of DETC ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, no. DETC2002/MECH-34207, Montreal, Canada.
- [16] Salamon, B. A., 1989, *Mechanical Advantages Aspects in Compliant Mechanisms Design*. M.S. Thesis, Purdue University.
- [17] Smith, S. T., 2000, *Flexure elements of elastic mechanisms*. Gordon and Breach Science Publishers.
- [18] Wang, Y. and Gosselin, C. M., 2004, “On the design of a 3-PRRR spatial parallel compliant mechanism,” in *Proceedings of DETC ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, no. DETC2002/MECH-57140, Salt Lake City, USA.

Annexe A

Coefficients

A.1 Coefficients des équations (3.9) et (3.10)

$$\begin{aligned}A_1 &= 2l_3 \cos \alpha + 2l_b \\B_1 &= -2l_3 \sin \alpha + 2l_b \\C_1 &= 2r_2 \\D_1 &= -\cos \beta_2 x - \sin \beta_2 y + \cos \beta_2 a_{2x} + \sin \beta_2 a_{2y} + l_b \\E_1 &= \sin \beta_2 x - \cos \beta_2 y - \sin \beta_2 a_{2x} + \cos \beta_2 a_{2y} + l_3 \sin \alpha\end{aligned}\tag{A.1}$$

A.2 Coefficients des équation (3.19) et (3.20)

$$\begin{aligned}
A_2 &= 2l_1 + 4r_3 \cos t_3 \\
B_2 &= -4r_3 \sin t_3 \\
C_2 &= 2r_1 \\
D_2 &= -\cos \beta_1 x + \cos \beta_1 a_{1x} - \sin \beta_1 y + \sin \beta_1 a_{1y} + 2l_3 \cos \alpha \cos^2 t_2 \\
&\quad - l_3 \cos \alpha - 2l_3 \sin \alpha \sin t_2 \cos t_2 - 2l_a \cos^2 t_2 + l_a - 2r_3 \cos t_3 - l_1 \\
E_2 &= \sin \beta_1 x - \sin \beta_1 a_{1x} - \cos \beta_1 y + \cos \beta_1 a_{1y} + 2l_3 \cos \alpha \sin t_2 \cos t_2 \\
&\quad + 2l_3 \sin \alpha \cos^2 t_2 - l_3 \sin \alpha - 2l_a \sin t_2 \cos t_2 - 2r_3 \sin t_3
\end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3 Coefficients des équations (3.25) et (3.26)

$$\begin{aligned}
A_1 &= -2l_e \cos q_2 \cos \alpha + 2l_e \sin q_2 \sin \alpha - 2l_a \cos q_2 \\
B_1 &= 2l_a \sin q_2 + 2l_e \cos q_2 \sin \alpha + 2l_e \sin q_2 \cos \alpha \\
C_1 &= -2r_2 \cos q_2 \\
E_1 &= 2r_2 \sin q_2 \\
F_1 &= p_{2x} - l_2 \cos q_2 + l_e \cos q_2 \cos \alpha + l_a \cos q_2 - l_e \sin q_2 \sin \alpha \\
G_1 &= p_{2y} - l_2 \sin q_2 + l_e \sin q_2 \cos \alpha + l_a \sin q_2 + l_e \cos q_2 \sin \alpha
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A.4 Coefficients de l'équation (3.32)

$$\begin{aligned}
H_1 &= -4p_{2x}^2 l_2^2 + 4p_{2y}^2 l_2^2 \\
I_1 &= -8p_{2x} l_2^2 p_{2y} \\
J_1 &= 8r_2^2 p_{2x} l_a + 4p_{2x} l_2 p_{2y}^2 + 4p_{2x}^3 l_2 + 8r_2^2 p_{2x} l_e \cos \alpha - 8r_2^2 p_{2x} l_2 \\
&\quad + 4p_{2x} l_2^3 - 4p_{2x} l_2 l_e^2 - 8p_{2x} l_e \cos \alpha l_2 l_a - 4p_{2x} l_2 l_a^2 - 8r_2^2 l_e \sin \alpha p_{2y} \\
K_1 &= 4p_{2y}^3 l_2 + 4p_{2y} l_2^3 - 4p_{2y} l_2 l_a^2 + 4p_{2x}^2 p_{2y} l_2 + 8r_2^2 l_e \cos \alpha p_{2y} - 8r_2^2 p_{2y} l_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +8r_2^2 p_{2x} l_e \sin \alpha - 4l_e^2 p_{2y} l_2 - 8p_{2y} l_2 l_a l_e \cos \alpha + 8r_2^2 l_a p_{2y} \\
L_1 = & -2p_{2x}^2 l_2^2 + 4r_2^2 l_2^2 + 4r_2^2 p_{2x}^2 + 4r_2^2 l_a^2 + 2p_{2y}^2 l_a^2 + 2l_2^2 l_a^2 - p_{2x}^4 - 4l_e^2 l_a^2 \cos \alpha^2 \\
& -6p_{2y}^2 l_2^2 + 2p_{2x}^2 l_a^2 + 4r_2^2 p_{2y}^2 - l_2^4 - l_a^4 - 4l_a^3 l_e \cos \alpha - 4l_e^3 \cos \alpha l_a + 4r_2^2 l_e^2 \\
& +2p_{2x}^2 l_e^2 - 8r_2^2 l_a l_2 - 2l_e^2 l_a^2 + 2l_e^2 l_2^2 + 2l_e^2 p_{2y}^2 - 2p_{2x}^2 p_{2y}^2 - p_{2y}^4 - l_e^4 + 8r_2^2 l_a l_e \cos \alpha \\
& -8r_2^2 l_e \cos \alpha l_2 + 4p_{2x}^2 l_e \cos \alpha l_a + 4l_2^2 l_a l_e \cos \alpha + 4p_{2y}^2 l_a l_e \cos \alpha \quad (A.4)
\end{aligned}$$

A.5 Coefficients des équations (3.27) et (3.28)

$$\begin{aligned}
A_2 &= -2l_3 \cos(q_1) \\
B_2 &= 2l_3 \sin(q_1) \\
C_2 &= -2r_1 \cos(q_1) - 2r_3 \cos\left(\frac{q_1}{2}\right) \cos(\gamma) + 2r_3 \sin\left(\frac{q_1}{2}\right) \sin(\gamma) \\
D_2 &= 2r_1 \sin(q_1) + 2r_3 \cos\left(\frac{q_1}{2}\right) \sin(\gamma) + 2r_3 \sin\left(\frac{q_1}{2}\right) \cos(\gamma) \\
E_2 &= p_{1x} - l_1 \cos(q_1) + l_3 \cos(q_1) \\
F_2 &= p_{1y} - l_1 \sin(q_1) + l_3 \sin(q_1) \quad (A.5)
\end{aligned}$$

où

$$\gamma = t_2 + \frac{q_2 \pm \pi}{2} \quad (A.6)$$

A.6 Coefficients de l'équation (3.42)

$$\begin{aligned}
G_2 &= -16p_{1x}^2 l_1^2 + 16p_{1y}^2 l_1^2 \\
H_2 &= -32p_{1x} p_{1y} l_1^2 \\
I_2 &= -32p_{1x} l_1 r_1 r_3 \cos(\gamma) + 32p_{1y} l_1 r_1 r_3 \sin(\gamma) \\
J_2 &= -32p_{1x} l_1 r_1 r_3 \sin(\gamma) - 32p_{1y} l_1 r_1 r_3 \cos(\gamma) \\
K_2 &= -32l_1 l_3 r_3^2 \cos(\gamma)^2 + 8p_{1x}^3 l_1 + 16p_{1x}^2 l_1^2 + 8p_{1x} l_1^3 - 16p_{1x} l_1 r_1^2 - 8p_{1x} l_1 l_3^2 + 8p_{1x} p_{1y}^2 l_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +16p_{1x}r_1^2l_3 - 16p_{1y}^2l_1^2 + 16l_1l_3r_3^2 - 16p_{1x}l_1r_3^2 \\
L_2 & = -32l_1l_3r_3^2\cos(\gamma)\sin(\gamma) + 8p_{1x}^2p_{1y}l_1 + 16p_{1x}p_{1y}l_1^2 + 8p_{1y}^3l_1 + 8p_{1y}l_1^3 - 16p_{1y}l_1r_3^2 \\
& \quad - 8p_{1y}l_1l_3^2 - 16p_{1y}l_1r_3^2 + 16p_{1y}r_1^2l_3 \\
M_2 & = 8p_{1x}^2r_1r_3\cos(\gamma) + 16p_{1x}r_1l_3r_3\cos(\gamma) + 8p_{1y}^2r_1r_3\cos(\gamma) - 32p_{1y}l_1r_1r_3\sin(\gamma) \\
& \quad + 16p_{1x}l_1r_1r_3\cos(\gamma) + 8l_1^2r_1r_3\cos(\gamma) - 16l_1r_1l_3r_3\cos(\gamma) + 8r_1l_3^2r_3\cos(\gamma) \\
& \quad + 16p_{1y}r_1l_3r_3\sin(\gamma) \\
N_2 & = 8p_{1x}^2r_1r_3\sin(\gamma) + 16p_{1x}l_1r_1r_3\sin(\gamma) - 16p_{1x}r_1l_3r_3\sin(\gamma) + 8p_{1y}^2r_1r_3\sin(\gamma) \\
& \quad + 16p_{1y}r_1l_3r_3\cos(\gamma) + 8l_1^2r_1r_3\sin(\gamma) - 16l_1r_1l_3r_3\sin(\gamma) + 8r_1l_3^2r_3\sin(\gamma) \\
O_2 & = 16p_{1x}l_3r_3^2\cos(\gamma)^2 + 16l_1l_3r_3^2\cos(\gamma)^2 - p_{1x}^4 - 4p_{1x}^3l_1 + 16p_{1y}l_3r_3^2\cos(\gamma)\sin(\gamma) \\
& \quad - 4p_{1x}p_{1y}^2l_1 - 4p_{1x}l_1^3 + 8p_{1x}l_1r_1^2 + 4p_{1x}l_1l_3^2 + 8p_{1x}l_1r_3^2 - 8p_{1x}r_1^2l_3 - 8p_{1x}l_3r_3^2 \\
& \quad - p_{1y}^4 - 2p_{1x}^2p_{1y}^2 - 6p_{1x}^2l_1^2 + 4p_{1x}^2r_1^2 + 2p_{1x}^2l_3^2 + 4p_{1x}^2r_3^2 + 4l_1^2r_1^2 + 2l_1^2l_3^2 + 4l_1^2r_3^2 \\
& \quad - 8l_1r_1^2l_3 - 8l_1l_3r_3^2 + 4r_1^2l_3^2 - l_3^4 + 4l_3^2r_3^2 - 2p_{1y}^2l_1^2 + 4p_{1y}^2r_1^2 + 2p_{1y}^2l_3^2 \\
& \quad + 4p_{1y}^2r_3^2 - l_1^4
\end{aligned} \tag{A.7}$$

A.7 Coefficients des équations (3.50) et (3.51)

$$\begin{aligned}
A_i & = 2l_i \\
B_i & = 2r_{i2} \cos \delta_i + 2r_{i1} \\
C_i & = -2r_{i2} \sin \delta_i \\
D_i & = -l_i - B_{si} \\
E_i & = -B_{ci}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

où

$$\delta_i = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{(\beta_i - \alpha_i + \phi)}{2} \tag{A.9}$$

A.8 Coefficients des équations (3.59) et (3.60)

$$\begin{aligned}
A_i &= -2l_{i2} \cos q_i \\
B_i &= 2l_{i2} \sin q_i \\
C_i &= -2r_{i1} \cos q_i - 2r_{i2} \cos\left(\frac{q_i}{2}\right) \cos \gamma_i + 2r_{i2} \sin\left(\frac{q_i}{2}\right) \sin \gamma_i \\
E_i &= 2r_{i1} \sin q_i + 2r_{i2} \cos\left(\frac{q_i}{2}\right) \sin \gamma_i + 2r_{i2} \sin\left(\frac{q_i}{2}\right) \cos \gamma_i \\
F_i &= p_{ix} - l_{i1} \cos q_i + l_{i2} \cos q_i \\
G_i &= p_{iy} - l_{i1} \sin q_i + l_{i2} \sin q_i
\end{aligned} \tag{A.10}$$

où

$$\gamma_i = \frac{\phi + \beta_i + \pi}{2} \tag{A.11}$$

A.9 Coefficients de l'équation (3.61)

$$\begin{aligned}
H_i &= -16p_{ix}^2 l_{i1}^2 + 16p_{iy}^2 l_{i1}^2 \\
I_i &= -32p_{ix} p_{iy} l_{i1}^2 \\
J_i &= -32p_{ix} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \cos \gamma_i + 32p_{iy} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i \\
K_i &= -32p_{ix} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i - 32p_{iy} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \cos \gamma_i \\
L_i &= -32l_{i1} l_i 2r_{i2}^2 \cos^2 \gamma_i + 8p_{ix}^3 l_{i1} + 16p_{ix}^2 l_{i1}^2 + 8p_{ix} l_{i1}^3 - 16p_{ix} l_{i1} r_{i1}^2 - 8p_{ix} l_{i1} l_i 2^2 \\
&\quad + 8p_{ix} p_{iy}^2 l_{i1} + 16p_{ix} r_{i1}^2 l_i 2 - 16p_{iy}^2 l_{i1}^2 + 16l_{i1} l_i 2r_{i2}^2 - 16p_{ix} l_{i1} r_{i2}^2 \\
M_i &= -32l_{i1} l_i 2r_{i2}^2 \cos \gamma_i \sin \gamma_i + 8p_{ix}^2 p_{iy} l_{i1} + 16p_{ix} p_{iy} l_{i1}^2 + 8p_{iy}^3 l_{i1} + 8p_{iy} l_{i1}^3 \\
&\quad - 16p_{iy} l_{i1} r_{i1}^2 - 8p_{iy} l_{i1} l_i 2^2 - 16p_{iy} l_{i1} r_{i2}^2 + 16p_{iy} r_{i1}^2 l_i 2 \\
N_i &= 8p_{ix}^2 r_{i1} r_{i2} \cos \gamma_i + 16p_{ix} r_{i1} l_i 2r_{i2} \cos \gamma_i + 8p_{iy}^2 r_{i1} r_{i2} \cos \gamma_i \\
&\quad - 32p_{iy} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i + 16p_{ix} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \cos \gamma_i + 8l_{i1}^2 r_{i1} r_{i2} \cos \gamma_i \\
&\quad - 16l_{i1} r_{i1} l_i 2r_{i2} \cos \gamma_i + 8r_{i1} l_i 2^2 r_{i2} \cos \gamma_i + 16p_{iy} r_{i1} l_i 2r_{i2} \sin \gamma_i \\
O_i &= 8p_{ix}^2 r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i + 16p_{ix} l_{i1} r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i - 16p_{ix} r_{i1} l_i 2r_{i2} \sin \gamma_i \\
&\quad + 8p_{iy}^2 r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i + 16p_{iy} r_{i1} l_i 2r_{i2} \cos \gamma_i + 8l_{i1}^2 r_{i1} r_{i2} \sin \gamma_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -16l_{i1}r_{i1}l_i2r_{i2} \sin \gamma_i + 8r_{i1}l_i2^2r_{i2} \sin \gamma_i \\
P_i = & 16p_{ix}l_i2r_{i2}^2 \cos \gamma_i^2 + 16l_{i1}l_i2r_{i2}^2 \cos \gamma_i^2 - p_{ix}^4 - 4p_{ix}^3l_{i1} \\
& + 16p_{iy}l_i2r_{i2}^2 \cos \gamma_i \sin \gamma_i - 4p_{ix}p_{iy}^2l_{i1} - 4p_{ix}l_{i1}^3 + 8p_{ix}l_{i1}r_{i1}^2 + 4p_{ix}l_{i1}l_i2^2 \\
& + 8p_{ix}l_{i1}r_{i2}^2 - 8p_{ix}r_{i1}^2l_i2 - 8p_{ix}l_i2r_{i2}^2 - p_{iy}^4 - 2p_{ix}^2p_{iy}^2 - 6p_{ix}^2l_{i1}^2 + 4p_{ix}^2r_{i1}^2 + 2p_{ix}^2l_i2^2 \\
& + 4p_{ix}^2r_{i2}^2 + 4l_{i1}^2r_{i1}^2 + 2l_{i1}^2l_i2^2 + 4l_{i1}^2r_{i2}^2 - 8l_{i1}r_{i1}^2l_i2 - 8l_{i1}l_i2r_{i2}^2 + 4r_{i1}^2l_i2^2 - l_i2^4 \\
& + 4l_i2^2r_{i2}^2 - 2p_{iy}^2l_{i1}^2 + 4p_{iy}^2r_{i1}^2 + 2p_{iy}^2l_i2^2 + 4p_{iy}^2r_{i2}^2 - l_{i1}^4 \tag{A.12}
\end{aligned}$$

où γ_i a été défini à la section précédente.

A.10 Coefficients des équations (3.69) et (3.70)

$$\begin{aligned}
A_i &= -2l_{2i} \cos(2\theta_{ai}) \\
B_i &= 2l_{2i} \sin(2\theta_{ai}) \\
C_i &= -2r_{2i} \cos(2\theta_{ai}) - 2r_{3i} \cos(\gamma_{ki} + \theta_{ai}) \\
D_i &= 2r_{2i} \sin(2\theta_{ai}) + 2r_{3i} \sin(\gamma_{ki} + \theta_{ai}) \\
E_i &= -2r_{1i} \cos \theta_{ai} + l_{2i} \cos(2\theta_{ai}) + p_{xi} - l_{1i} \cos(2\theta_{ai}) \\
F_i &= -l_{1i} \sin(2\theta_{ai}) + l_{2i} \sin(2\theta_{ai}) + p_{yi} - 2r_{1i} \sin(\theta_{ai}) \tag{A.13}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_{i1} &= \frac{\phi - \alpha_i + \beta_i + \pi}{2} - \theta_{ai} - \theta_{bi} \\
\gamma_{i2} &= \frac{\phi - \alpha_i + \beta_i - \pi}{2} - \theta_{ai} - \theta_{bi} \tag{A.14}
\end{aligned}$$

A.11 Coefficients de l'équation (3.61)

$$G_i = -16p_{xi}^2l_{1i}^2 + 16p_{yi}^2l_{1i}^2$$

$$\begin{aligned}
H_i &= -32l_{1i}^2 p_{yi} p_{xi} \\
J_i &= 32p_{yi} r_{1i} l_{1i}^2 - 32r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} l_{1i} p_{yi} - 32p_{xi} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} - 64l_{1i} p_{yi} r_{1i} p_{xi} \\
I_i &= 32r_{1i} p_{xi} l_{1i}^2 - 32p_{xi} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} + 32r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} l_{1i} p_{yi} - 32r_{1i} p_{xi}^2 l_{1i} + 32p_{yi}^2 r_{1i} l_{1i} \\
K_i &= 8p_{yi}^2 p_{xi} l_{1i} + 32r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} p_{yi} r_{1i} + 16p_{xi}^2 l_{1i}^2 + 64r_{1i}^2 p_{xi} l_{1i} + 32r_{1i} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} \\
&\quad - 32r_{1i} p_{xi} r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} + 8p_{xi} l_{1i}^3 + 16p_{yi}^2 r_{1i}^2 - 16p_{xi} l_{1i} r_{3i}^2 - 16r_{1i}^2 p_{xi}^2 + 8p_{xi}^3 l_{1i} \\
&\quad - 16r_{1i}^2 l_{1i}^2 + 16l_{2i} p_{xi} r_{2i}^2 - 16p_{xi} l_{1i} r_{2i}^2 - 16p_{yi}^2 l_{1i}^2 - 16l_{2i} l_{1i} r_{3i}^2 \cos(2\gamma_{ki}) - 8l_{2i}^2 p_{xi} l_{1i} \\
L_i &= 8l_{1i} p_{yi}^3 - 16l_{2i} l_{1i} r_{3i}^2 \sin(2\gamma_{ki}) + 16l_{2i} r_{2i}^2 p_{yi} - 32r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} p_{yi} r_{1i} - 8p_{yi} l_{2i}^2 l_{1i} \\
&\quad + 8l_{1i} p_{yi} p_{xi}^2 + 16l_{1i}^2 p_{yi} p_{xi} + 64p_{yi} r_{1i}^2 l_{1i} - 32r_{1i} p_{xi} r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} - 16r_{3i}^2 l_{1i} p_{yi} \\
&\quad - 16r_{2i}^2 l_{1i} p_{yi} + 32r_{1i} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} + 8l_{1i}^3 p_{yi} - 32p_{yi} r_{1i}^2 p_{xi} \\
M_i &= -16r_{1i} l_{2i} r_{2i}^2 - 16r_{1i} p_{xi} r_{2i}^2 + 16r_{1i} l_{1i} r_{2i}^2 - 16r_{1i} p_{xi} r_{3i}^2 + 8p_{yi}^2 r_{1i} p_{xi} + 8r_{1i} l_{2i}^2 l_{1i} \\
&\quad - 8r_{1i} l_{2i}^2 p_{xi} + 16r_{3i}^2 l_{1i} r_{1i} - 40p_{yi}^2 r_{1i} l_{1i} + 8r_{1i} p_{xi}^2 l_{1i} - 8r_{1i} p_{xi} l_{1i}^2 + 16p_{xi} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} \\
&\quad - 32r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} l_{1i} p_{yi} + 16l_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} r_{2i} p_{yi} + 16l_{2i} p_{xi} r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} \\
&\quad - 16l_{2i} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} + 8r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} p_{yi}^2 + 8p_{xi}^2 r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} + 8l_{1i}^2 r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} \\
&\quad + 8l_{2i}^2 r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} + 32r_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} r_{1i}^2 - 32l_{1i} r_{1i}^3 + 32r_{1i}^3 p_{xi} - 8r_{1i} l_{1i}^3 + 8r_{1i} p_{xi}^3 \\
&\quad - 16r_{1i} l_{2i} r_{3i}^2 \cos(2\gamma_{ki}) \\
N_i &= -16r_{3i}^2 p_{yi} r_{1i} + 32r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} r_{1i}^2 - 16l_{2i} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} + 8p_{yi} r_{1i} p_{xi}^2 \\
&\quad + 16l_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} r_{2i} p_{yi} - 16l_{2i} r_{3i}^2 r_{1i} \sin(2\gamma_{ki}) + 8r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} p_{yi}^2 + 16l_{1i} p_{yi} r_{1i} p_{xi} \\
&\quad + 16p_{xi} l_{1i} r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} - 8p_{yi} r_{1i} l_{2i}^2 - 16r_{2i}^2 p_{yi} r_{1i} + 8l_{1i}^2 r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} \\
&\quad + 8p_{xi}^2 r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} + 8p_{yi}^3 r_{1i} + 8l_{2i}^2 r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} + 8p_{yi} r_{1i} l_{1i}^2 - 16l_{2i} p_{xi} r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} \\
&\quad + 32p_{yi} r_{1i}^3 \\
O_i &= 4l_{2i}^2 r_{2i}^2 + 4p_{xi}^2 r_{2i}^2 - 2p_{yi}^2 l_{1i}^2 + 2p_{yi}^2 l_{2i}^2 - 16r_{1i}^4 - p_{yi}^4 - l_{2i}^4 - l_{1i}^4 - 4p_{xi} l_{1i}^3 - 4p_{xi}^3 l_{1i} \\
&\quad - 6p_{xi}^2 l_{1i}^2 - p_{xi}^4 + 4l_{2i}^2 p_{xi} l_{1i} + 2l_{2i}^2 p_{xi}^2 + 2l_{2i}^2 l_{1i}^2 + 8p_{xi} l_{1i} r_{3i}^2 - 16r_{1i}^2 p_{xi} l_{1i} - 8l_{2i} l_{1i} r_{2i}^2 \\
&\quad - 8l_{2i} p_{xi} r_{2i}^2 + 8r_{1i}^2 l_{2i}^2 + 16r_{3i}^2 r_{1i}^2 + 4r_{3i}^2 p_{yi}^2 + 4l_{2i}^2 r_{3i}^2 - 8r_{1i}^2 l_{1i}^2 - 8r_{1i}^2 p_{xi}^2 - 24p_{yi}^2 r_{1i}^2 \\
&\quad + 4l_{1i}^2 r_{3i}^2 + 4p_{xi}^2 r_{3i}^2 + 16r_{2i}^2 r_{1i}^2 - 32r_{2i} r_{3i} \sin \gamma_{ki} p_{yi} r_{1i} - 32l_{2i} r_{3i} \cos \gamma_{ki} r_{2i} r_{1i} \\
&\quad + 8p_{xi} l_{1i} r_{2i}^2 - 2p_{yi}^2 p_{xi}^2 + 4r_{2i}^2 p_{yi}^2 - 4p_{yi}^2 p_{xi} l_{1i} + 4l_{1i}^2 r_{2i}^2 + 8l_{2i} r_{3i}^2 p_{yi} \sin(2\gamma_{ki}) \\
&\quad + 8l_{2i} p_{xi} r_{3i}^2 \cos(2\gamma_{ki}) + 8l_{2i} l_{1i} r_{3i}^2 \cos(2\gamma_{ki}) \tag{A.15}
\end{aligned}$$

où γ_{ik} a été défini à la section précédente.

A.12 Coefficients des équations (3.145) et (3.146)

$$A_1 = -2 \cos \beta_2 l_b - 2 \cos \beta_2 l_3 \cos \alpha + 2 \sin \beta_2 l_3 \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= 2 \cos \beta_2 l_3 \sin \alpha + 2 \sin \beta_2 l_3 \cos \alpha + 2 \sin \beta_2 l_b \\
C_1 &= -2 \cos \beta_2 r_2 \\
D_1 &= 2 \sin \beta_2 r_2 \\
E_1 &= -\cos \beta_2 q_2 + \cos \beta_2 l_3 \cos \alpha + \cos \beta_2 l_b - a_{2x} - \sin \beta_2 l_3 \sin \alpha \\
F_1 &= \cos \beta_2 l_e \sin \alpha - a_{2y} - \sin \beta_2 q_2 + \sin \beta_2 l_e \cos \alpha + \sin \beta_2 l_b \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

A.13 Coefficients des équations (3.147) et (3.148)

$$\begin{aligned}
A_2 &= -2 \cos \beta_1 l_1 \\
B_2 &= 2 \sin \beta_1 l_1 \\
C_2 &= -2 \cos \beta_1 r_3 \cos t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) - 2 \cos \beta_1 r_1 \\
&\quad -2 \sin \beta_1 r_3 \sin t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + 2 \sin \beta_1 r_3 \cos t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad +2 \cos \beta_1 r_3 \cos t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + 2 \sin \beta_1 r_3 \cos t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad +2 \cos \beta_1 r_3 \sin t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + 2 \cos \beta_1 r_3 \sin t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad +2 \sin \beta_1 r_3 \sin t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
D_2 &= 2 \cos \beta_1 r_3 \sin t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + 2 \sin \beta_1 r_3 \cos t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad +2 \cos \beta_1 r_3 \cos t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) - 2 \cos \beta_1 r_3 \sin t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad -2 \sin \beta_1 r_3 \cos t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) - 2 \sin \beta_1 r_3 \sin t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad +2 \sin \beta_1 r_1 + 2 \cos \beta_1 r_3 \cos t_2 \cos \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
&\quad -2 \sin \beta_1 r_3 \sin t_2 \sin \left(\frac{\beta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \\
E_2 &= -a_{1x} + 2 \cos \beta_1 l_a \cos^2 t_2 - \cos \beta_1 q_1 + 2 \cos \beta_1 l_3 \sin \alpha \sin t_2 \cos t_2 \\
&\quad -\sin \beta_1 l_3 \sin \alpha - \cos \beta_1 l_a - 2 \sin \beta_1 l_a \sin t_2 \cos t_2 \\
&\quad -2 \cos \beta_1 l_3 \cos \alpha \cos^2 t_2 + 2 \sin \beta_1 l_3 \sin \alpha \cos^2 t_2 \\
&\quad +2 \sin \beta_1 l_3 \cos \alpha \sin t_2 \cos t_2 + \cos \beta_1 l_1 + \cos \beta_1 l_3 \cos \alpha \\
F_2 &= -a_{1y} - \sin \beta_1 l_a - \sin \beta_1 q_1 - 2 \sin \beta_1 l_3 \cos \alpha \cos^2 t_2 \\
&\quad +2 \sin \beta_1 l_3 \sin \alpha \sin t_2 \cos t_2 + 2 \cos \beta_1 l_a \sin t_2 \cos t_2 + \sin \beta_1 l_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \beta_1 l_3 \sin \alpha - 2 \cos \beta_1 l_3 \sin \alpha \cos^2 t_2 - 2 \cos \beta_1 l_3 \cos \alpha \sin t_2 \cos t_2 \\
& + 2 \sin \beta_1 l_a \cos^2 t_2 + \sin \beta_1 l_3 \cos \alpha
\end{aligned}$$

A.14 Coefficients de l'équation (3.151)

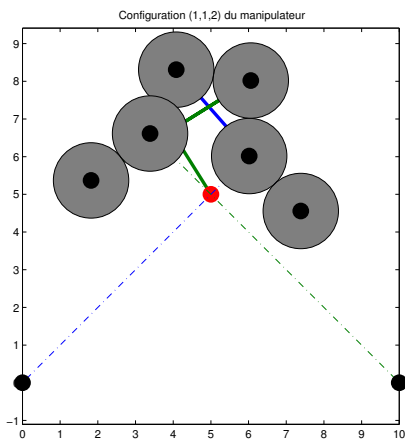
$$\begin{aligned}
G_1 &= -4E_1 - 2A_1 \\
H_1 &= 2B_1 - 4F_1 \\
I_1 &= D_1^2 - 2F_1^2 - A_1^2 - 6E_1A_1 + C_1^2 - 6E_1^2 + 2B_1F_1 \\
J_1 &= 2B_1A_1 + 4B_1E_1 - 8F_1E_1 - 4F_1A_1 \\
K_1 &= C_1^2 - 6F_1^2 + D_1^2 - 2E_1^2 - B_1^2 - 2E_1A_1 + 6B_1F_1 \\
L_1 &= -2E_1A_1^2 - 4F_1^2E_1 - 2F_1^2A_1 - 4E_1^3 + 2B_1F_1A_1 + 2D_1^2E_1 - 2D_1B_1C_1 - 6E_1^2A_1 \\
&\quad + 2C_1^2E_1 + 4B_1F_1E_1 + 2D_1^2A_1 \\
M_1 &= 2D_1A_1C_1 + 2F_1D_1^2 - 4F_1E_1A_1 + 2C_1^2F_1 + 2B_1E_1^2 - 2B_1C_1^2 + 6B_1F_1^2 + 2B_1E_1A_1 \\
&\quad - 4F_1^3 - 4F_1E_1^2 - 2B_1^2F_1 \\
N_1 &= C_1^2E_1^2 + 2D_1^2E_1A_1 - 2D_1E_1B_1C_1 + D_1^2E_1^2 - 2D_1A_1B_1C_1 + 2D_1A_1F_1C_1 + F_1^2C_1^2 \\
&\quad - 2E_1^3A_1 + 2B_1F_1E_1A_1 + 2B_1F_1^3 - E_1^2A_1^2 - 2F_1^2E_1A_1 + F_1^2D_1^2 - 2B_1C_1^2F_1 \\
&\quad - 2F_1^2E_1^2 + 2B_1F_1E_1^2 - F_1^4 + D_1^2A_1^2 + B_1^2C_1^2 - B_1^2F_1^2 - E_1^4
\end{aligned}$$

Annexe B

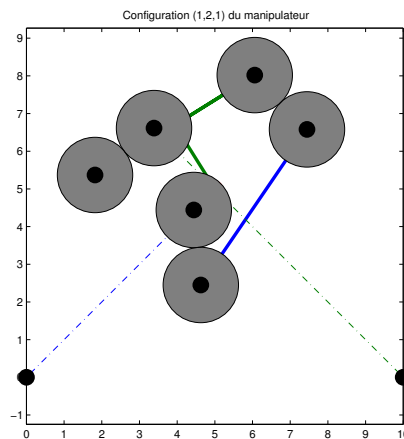
Solutions du PGI des mécanismes

B.1 Solutions du PGI du mécanisme $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$

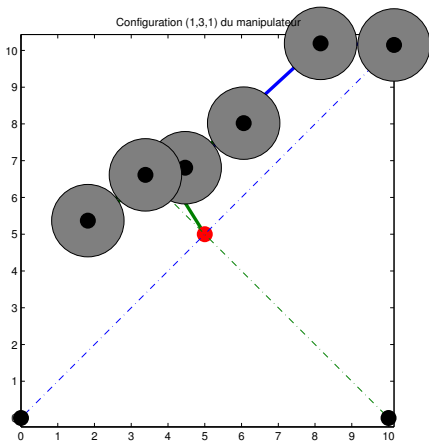
Le PGI du mécanisme $PX_RPX_RX_R$ a été résolu pour une position de l'effecteur de $\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. Pour cet exemple, il y a 21 solutions sur un maximum de 32. Les joints X_R sont représentés par deux cercles ayant un point de contact tangent. Les joints prismatiques sont illustrés par des lignes pointillées. L'effecteur est représenté par un point.



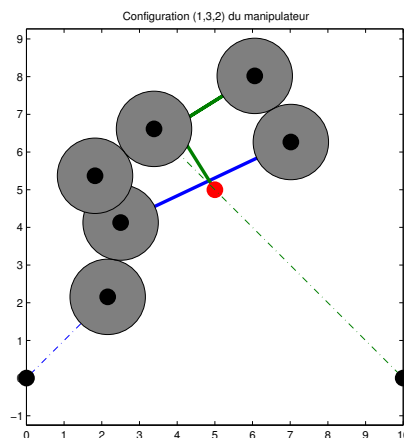
Configuration 1.1.2



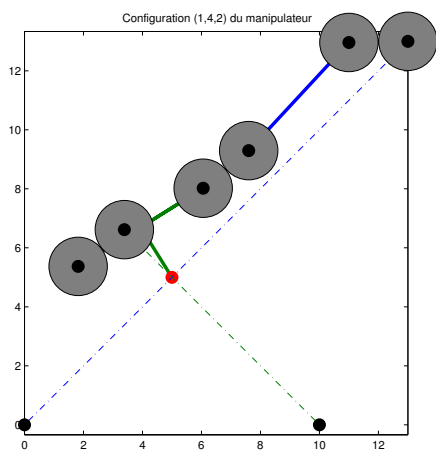
Configuration 1.2.1



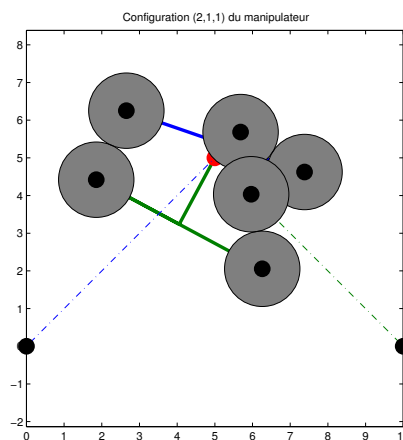
Configuration 1.3.1



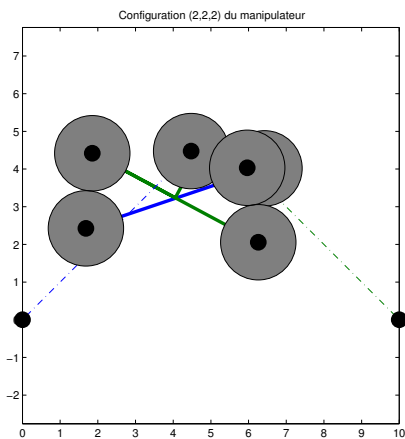
Configuration 1.3.2



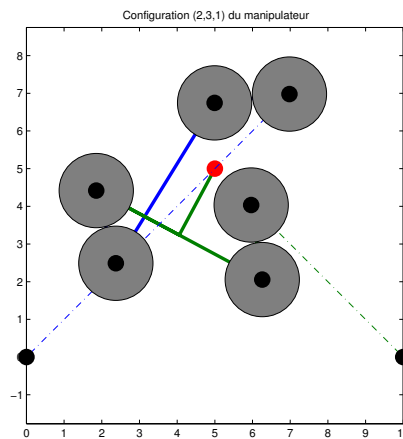
Configuration 1.4.2



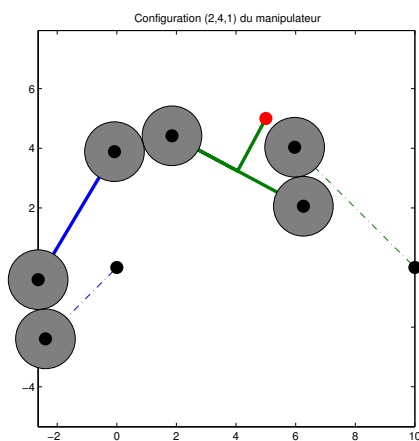
Configuration 2.1.1



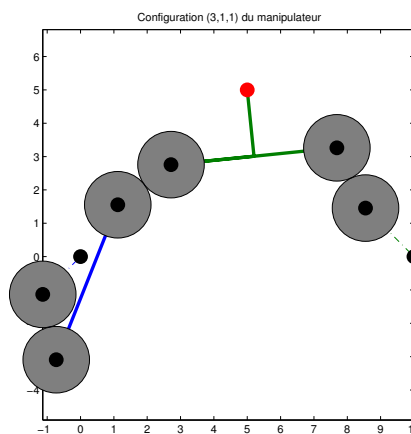
Configuration 2.2.2



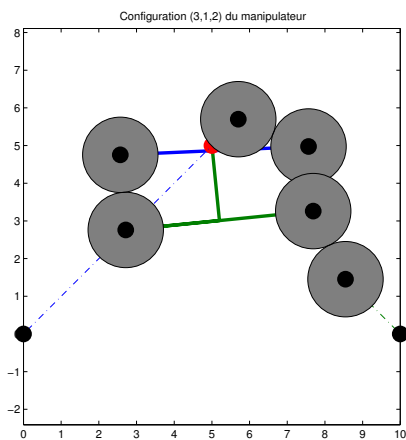
Configuration 2.3.1



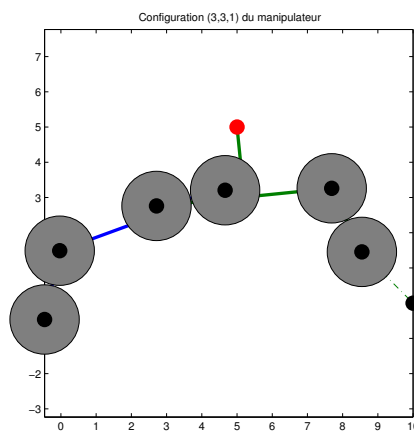
Configuration 2.4.1



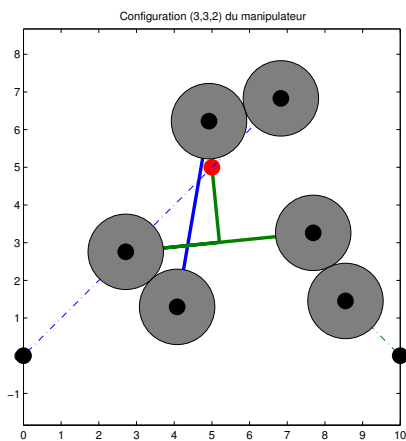
Configuration 3.1.1



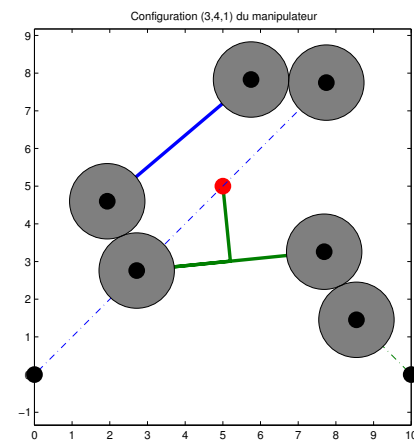
Configuration 3.1.2



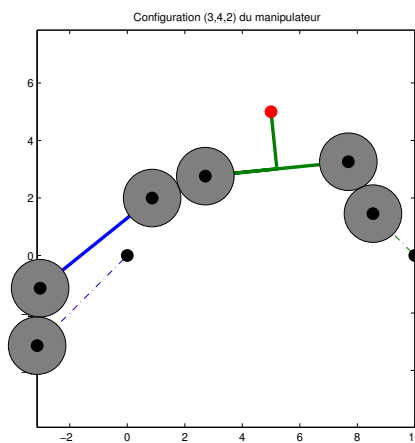
Configuration 3.3.1



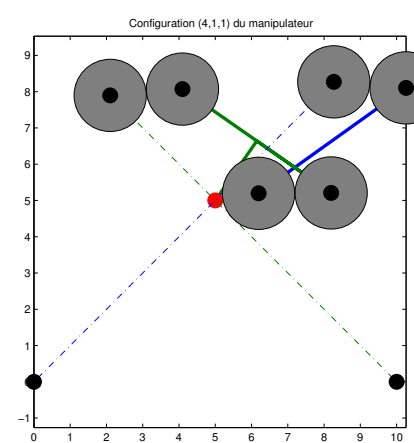
Configuration 3.3.2



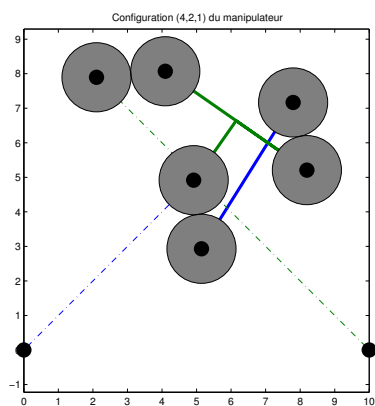
Configuration 3.4.1



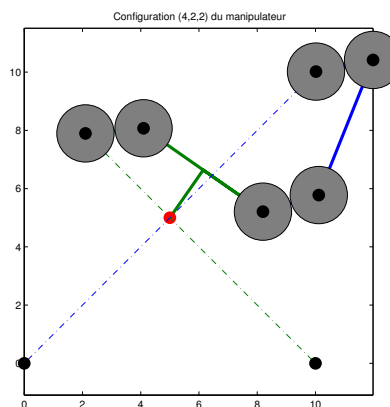
Configuration 3.4.2



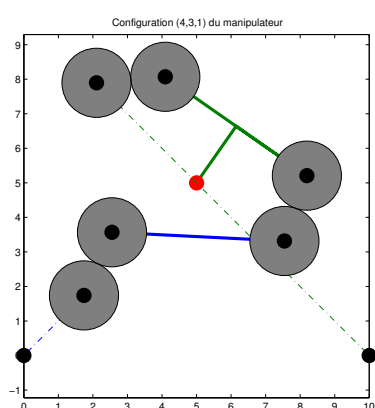
Configuration 4.1.1



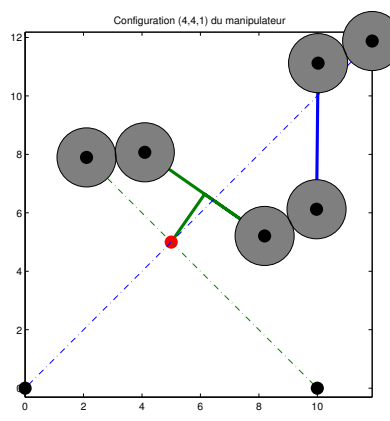
Configuration 4.2.1



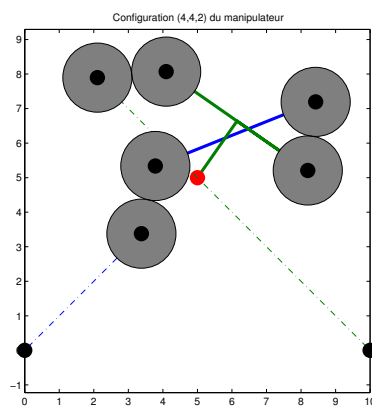
Configuration 4.2.2



Configuration 4.3.1



Configuration 4.4.1

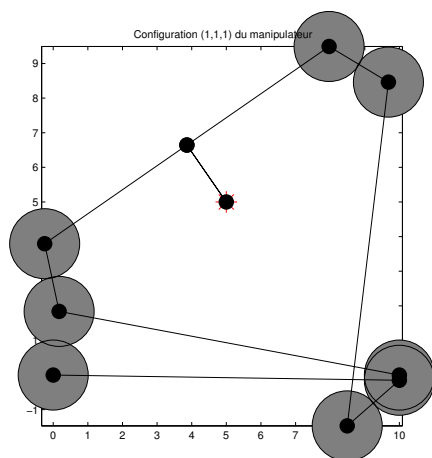


Configuration 4.4.2

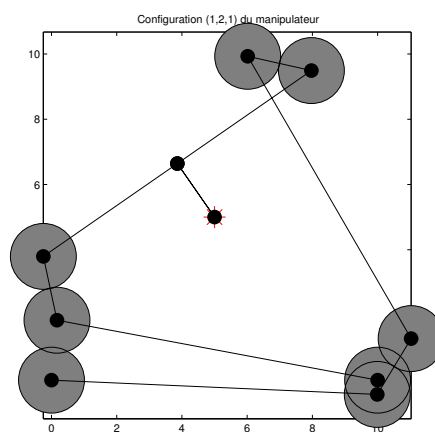
FIG. B.1 – Solutions au PGI du $\underline{P}X_R\underline{P}X_RX_R$.

B.2 Solutions du PGI du mécanisme $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$

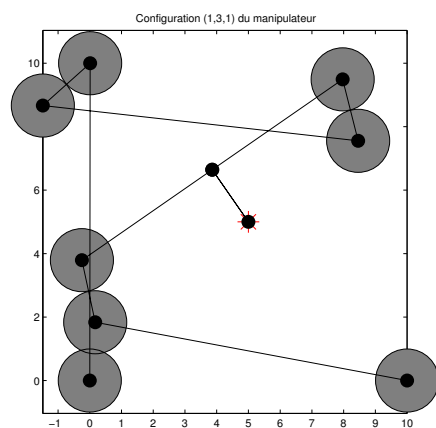
Le PGI du mécanisme $RX_RX_RX_R$ a été résolu pour une position de l'effecteur de $\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. Pour cet exemple, il y a 32 solutions sur un maximum de 32. Les joints X_R sont représentés par deux cercles ayant un point de contact tangent. Les joints rotoïdes sont représentés également par des cercles. L'effecteur est représenté par un point.



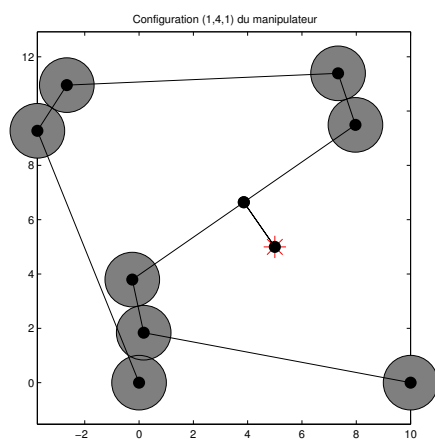
Configuration 1.1.1



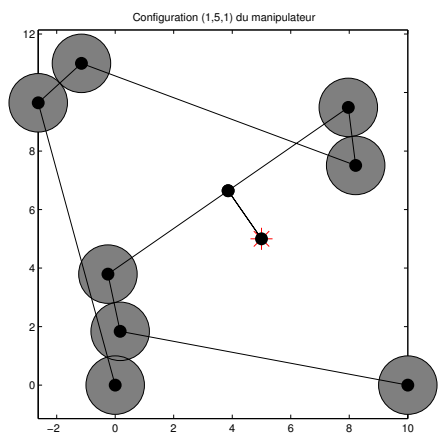
Configuration 1.2.1



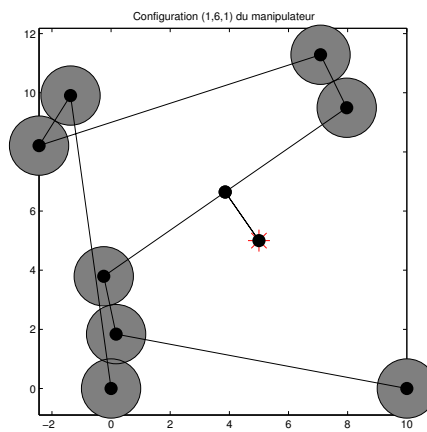
Configuration 1.3.1



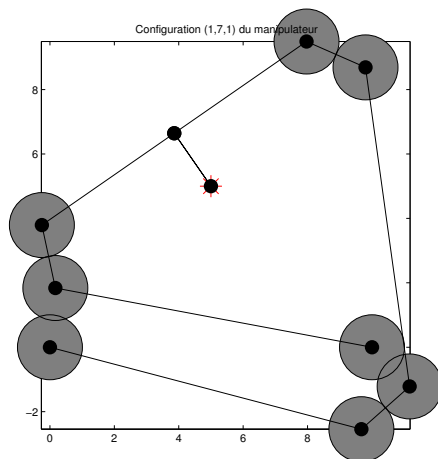
Configuration 1.4.1



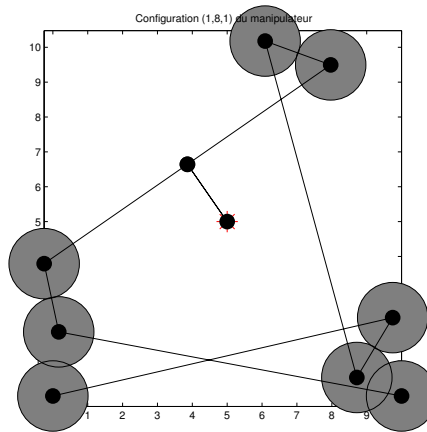
Configuration 1.5.1



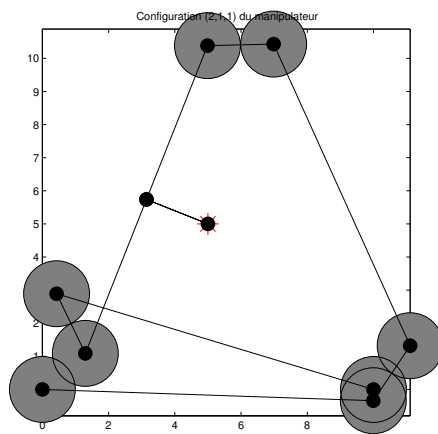
Configuration 1.6.1



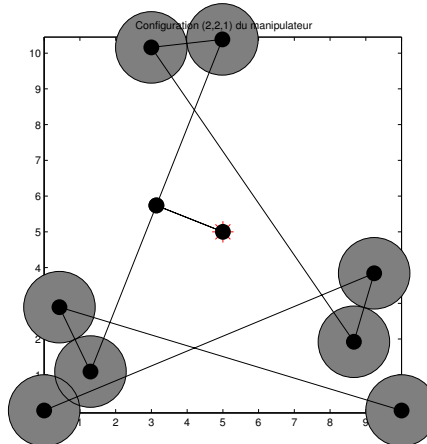
Configuration 1.7.1



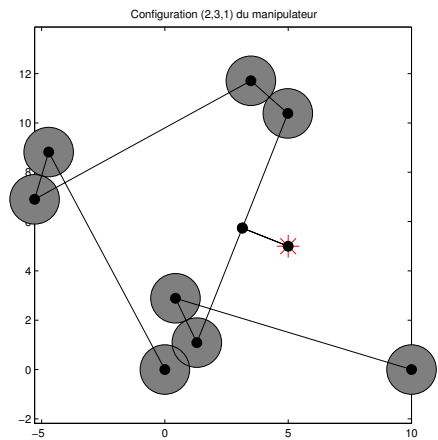
Configuration 1.8.1



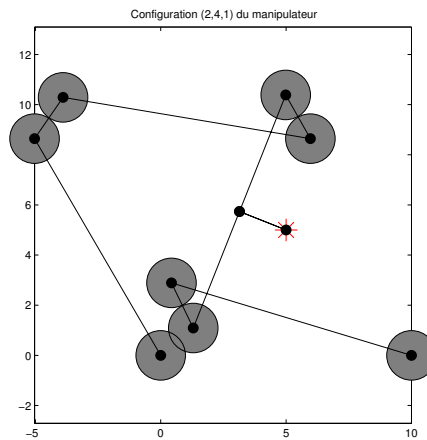
Configuration 2.1.1



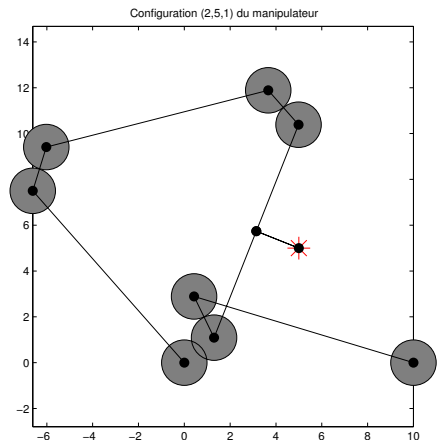
Configuration 2.2.1



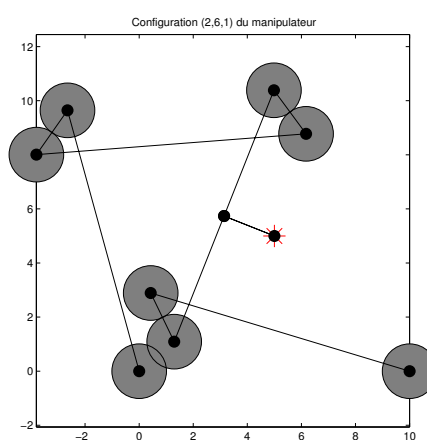
Configuration 2.3.1



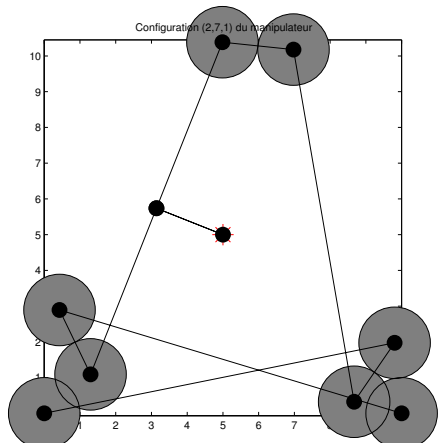
Configuration 2.4.1



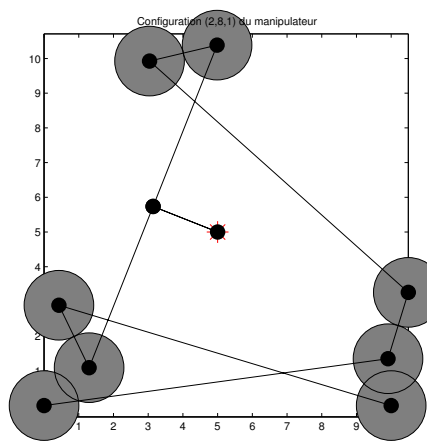
Configuration 2.5.1



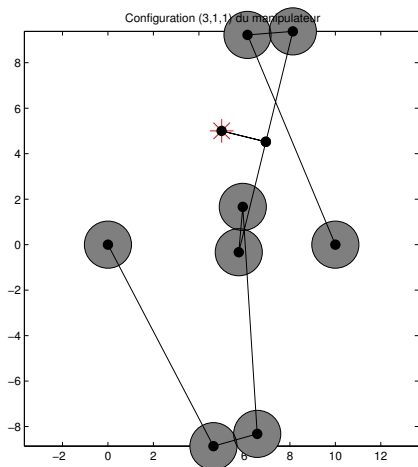
Configuration 2.6.1



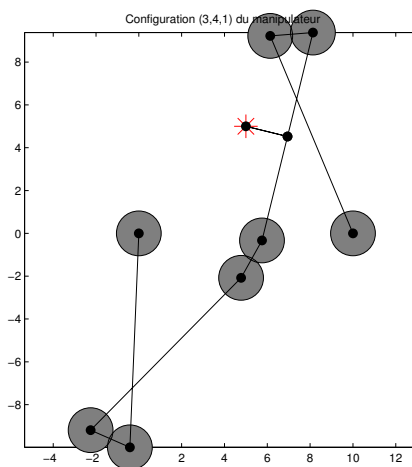
Configuration 2.7.1



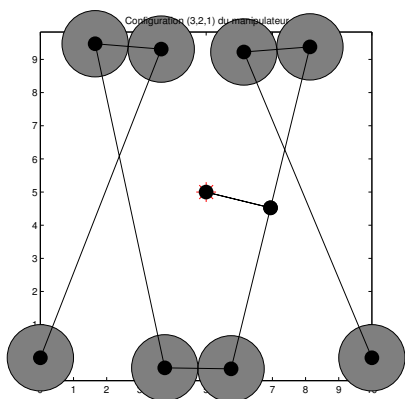
Configuration 2.8.1



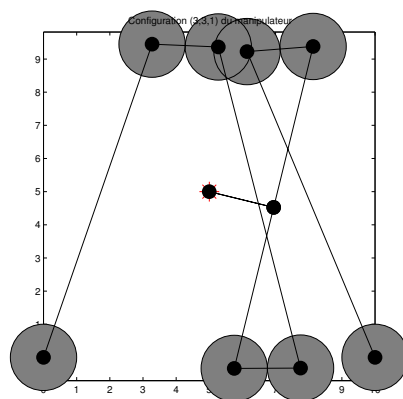
Configuration 3.1.1



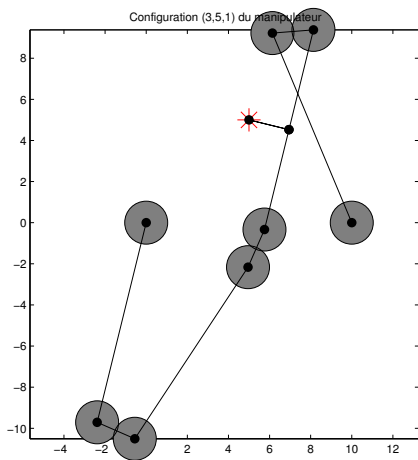
Configuration 3.4.1



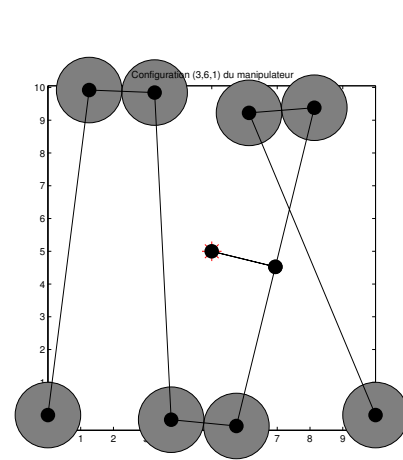
Configuration 3.2.1



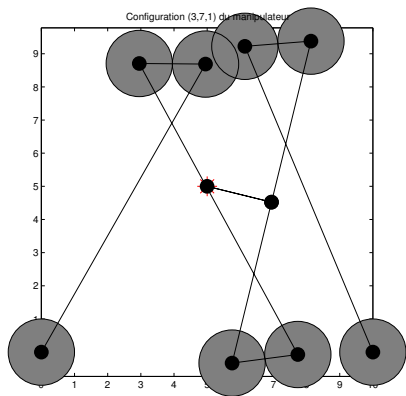
Configuration 3.3.1



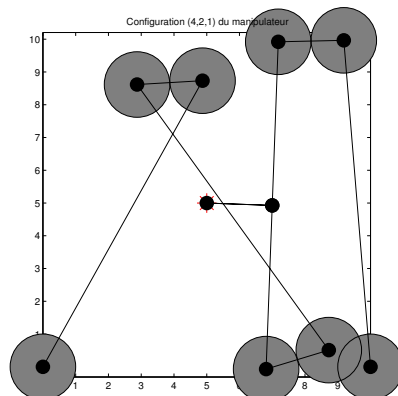
Configuration 3.5.1



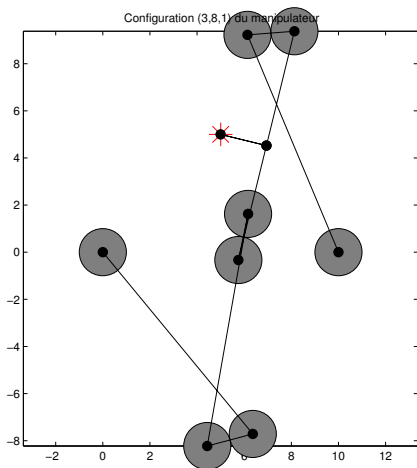
Configuration 3.6.1



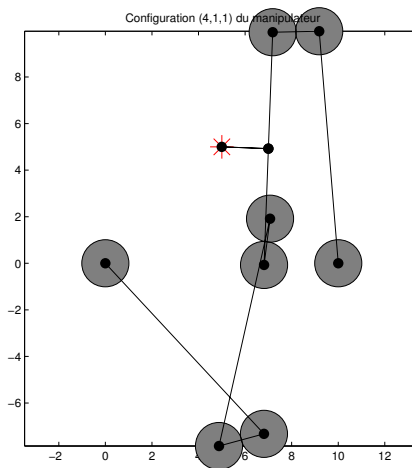
Configuration 3.7.1



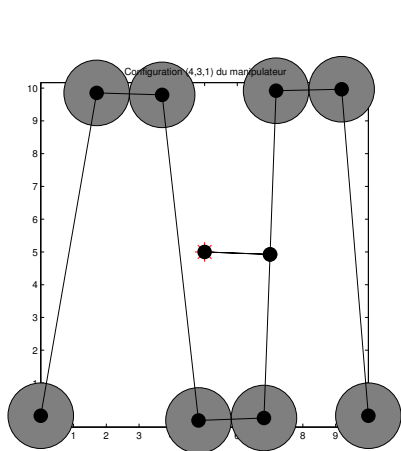
Configuration 4.2.1



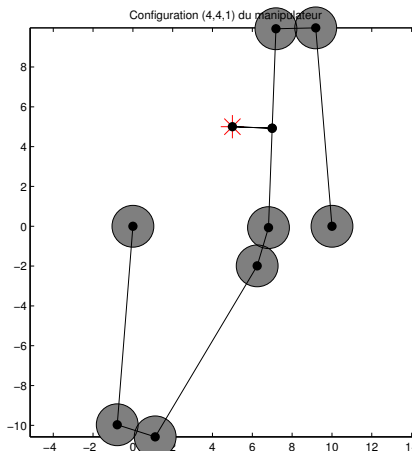
Configuration 3.8.1



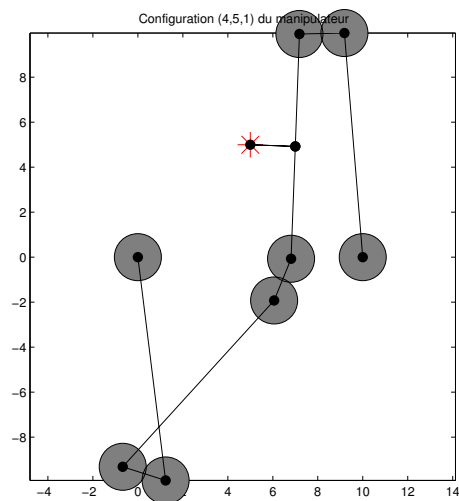
Configuration 4.1.1



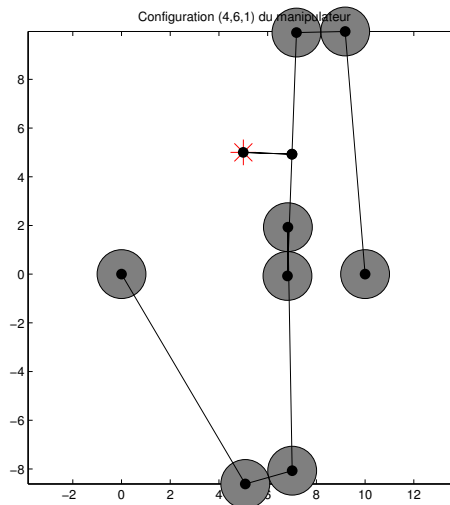
Configuration 4.3.1



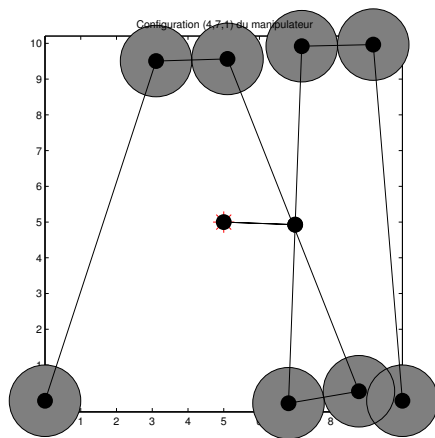
Configuration 4.4.1



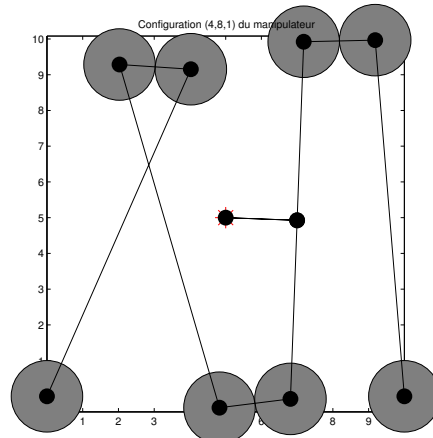
Configuration 4.5.1



Configuration 4.6.1



Configuration 4.7.1

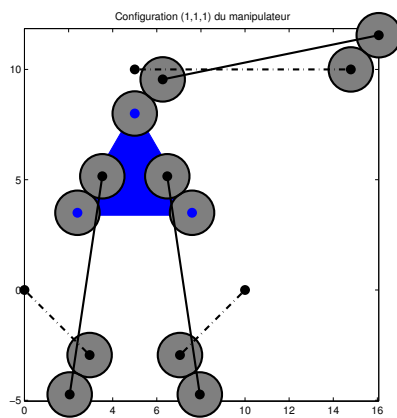


Configuration 4.8.1

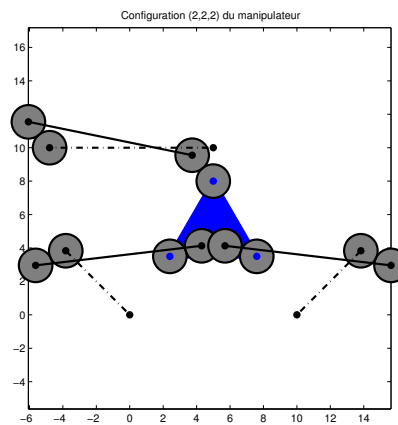
FIG. B.2 – Solutions au PGI du $\underline{R}X_R\underline{R}X_RX_R$.

B.3 Solutions du PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{P}X_RX_R$

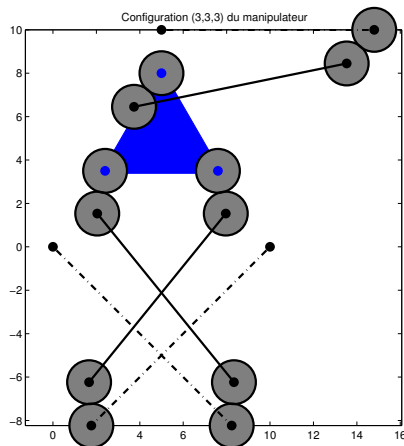
Le PGI du mécanisme PX_RX_R a été résolu pour une position de l'effecteur de $\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. Les pattes du mécanismes sont indépendantes et ont un maximum de 8 solutions par patte. Il y a 128 combinaisons possibles. Pour cet exemple, il y a 128 solutions, mais seules 4 sont illustrées. Les joints X_R sont représentés par deux cercles ayant un point de contact tangent. Les joint prismatiques sont illustrés par des lignes pointillées. L'effecteur est représenté par un triangle.



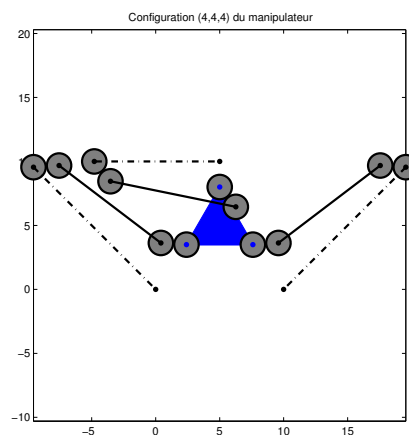
Configuration 1.1.1



Configuration 2.2.2



Configuration 3.3.3

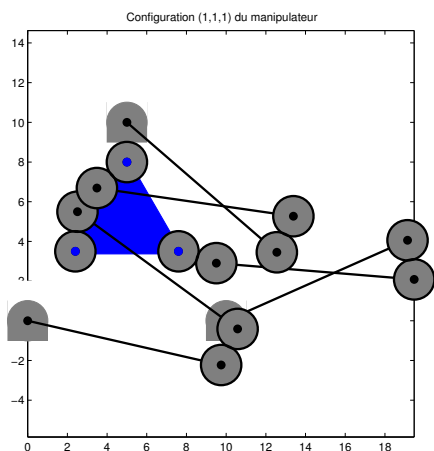


Configuration 4.4.4

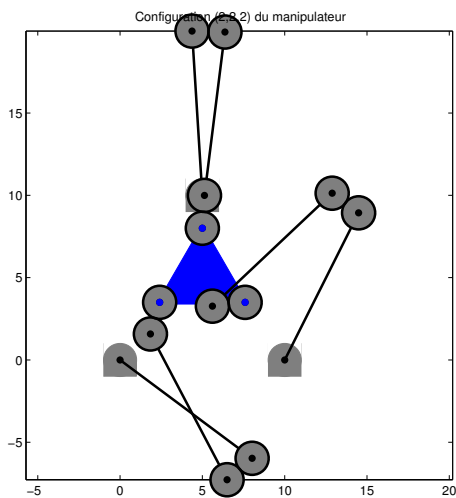
FIG. B.3 – Solutions au PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{P}X_RX_R$.

B.4 Solutions du PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{R}X_RX_R$

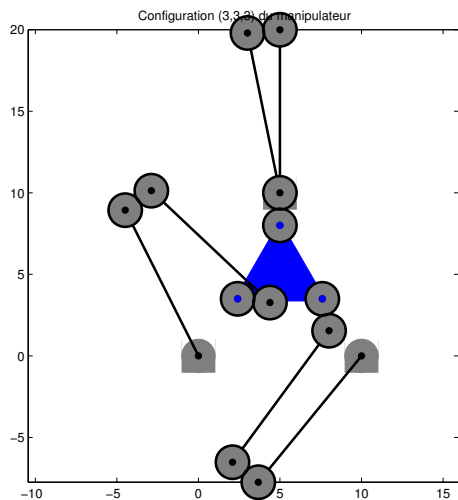
Le PGI du mécanisme RX_RX_R a été résolu pour une position de l'effecteur de $\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. Les pattes du mécanisme sont indépendantes et ont un maximum de 16 solutions par patte. Il y a 4096 combinaisons possibles. Pour cet exemple, il y a 4096 solutions, mais seules les 8 sont illustrées. Les joints X_R sont représentés par deux cercles ayant un point de contact tangent. Les joint rotoïdes sont représentés également par des cercles. L'effecteur est représenté par un triangle.



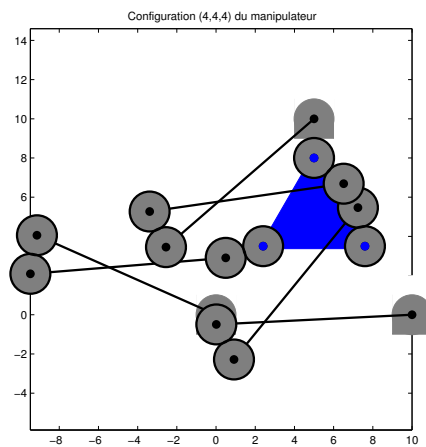
Configuration 1.1.1



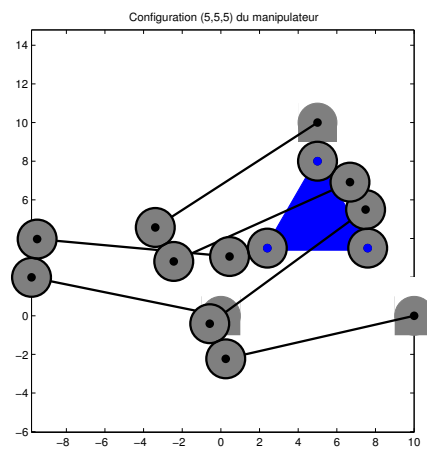
Configuration 2.2.2



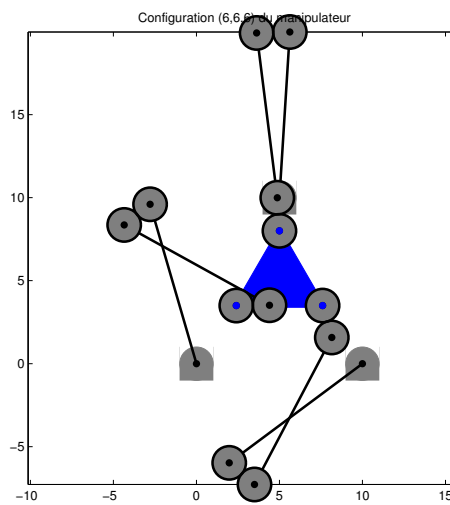
Configuration 3.3.3



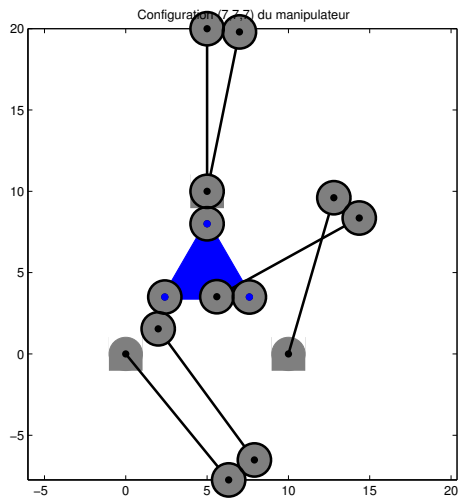
Configuration 4.4.4



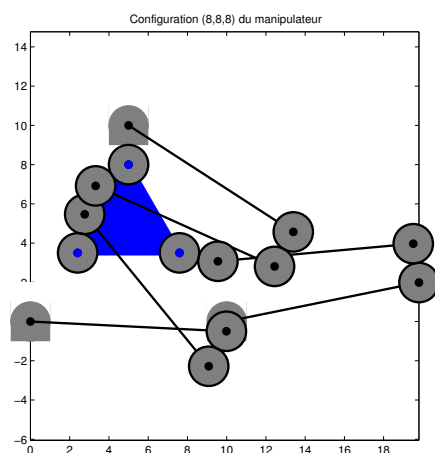
Configuration 5.5.5



Configuration 6.6.6



Configuration 7.7.7

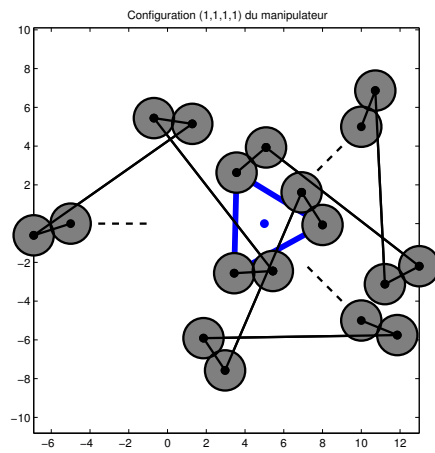


Configuration 8.8.8

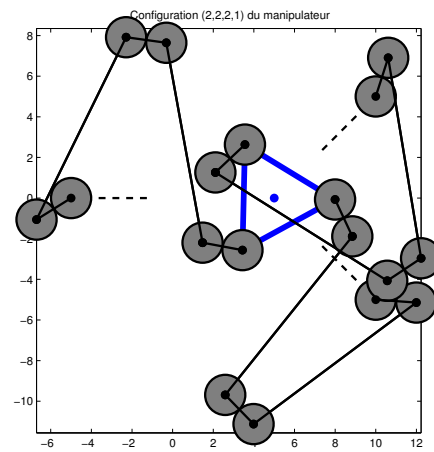
FIG. B.4 – Solutions au PGI du mécanisme $\mathcal{P}\text{-}R_X R_R X_R$.

B.5 Solutions du PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$

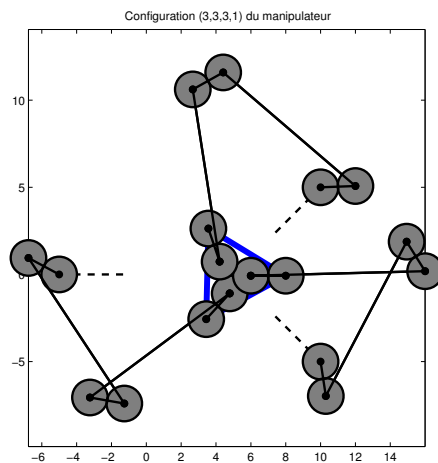
Le PGI du mécanisme $X_R X_R X_R$ a été résolu pour une position de l'effecteur de $\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$. Les pattes du mécanisme sont indépendantes et ont un maximum de 16 solutions par patte. Il y a 4096 combinaisons possibles. Pour cet exemple, il y a 4096 solutions, mais 16 sont présentées. Les joints X_R sont représentés par deux cercles ayant un point de contact tangent. L'orientation de référence des joints X_R à la base est donnée par une ligne pointillée. L'effecteur est représenté par un triangle.



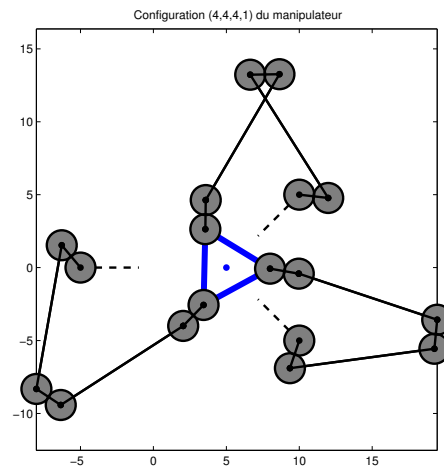
Configuration 1.1.1.1



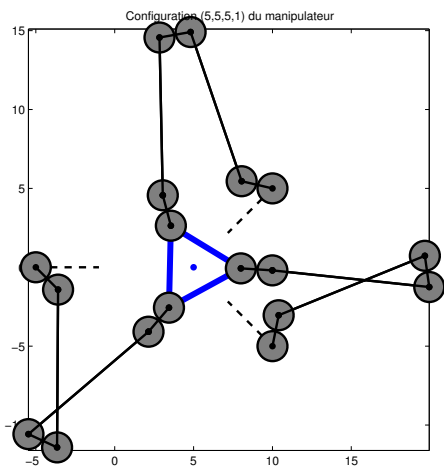
Configuration 2.2.2.1



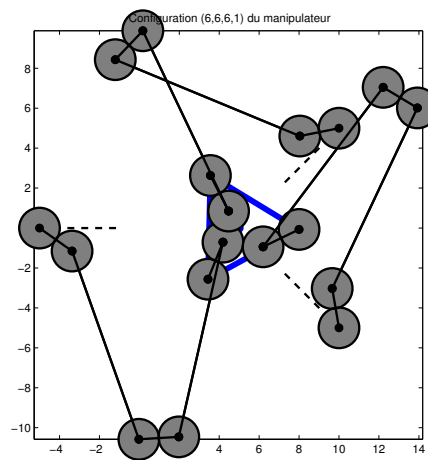
Configuration 3.3.3.1



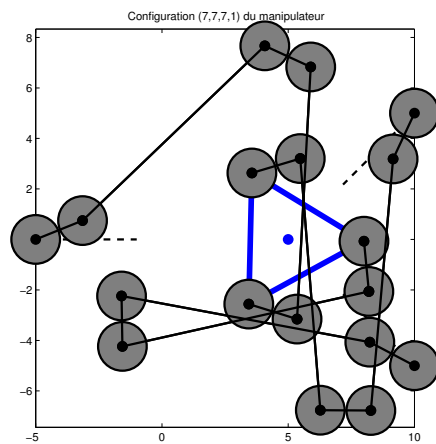
Configuration 4.4.4.1



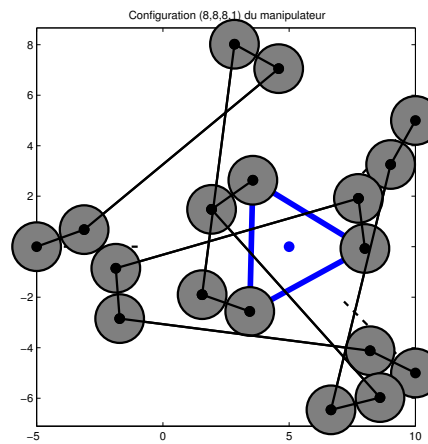
Configuration 5.5.5.1



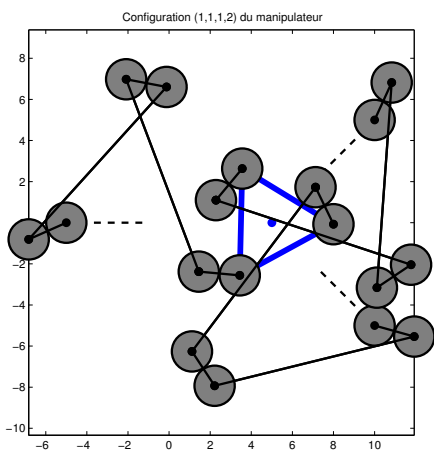
Configuration 6.6.6.1



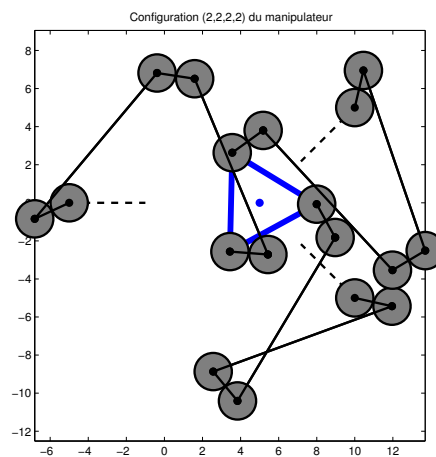
Configuration 7.7.7.1



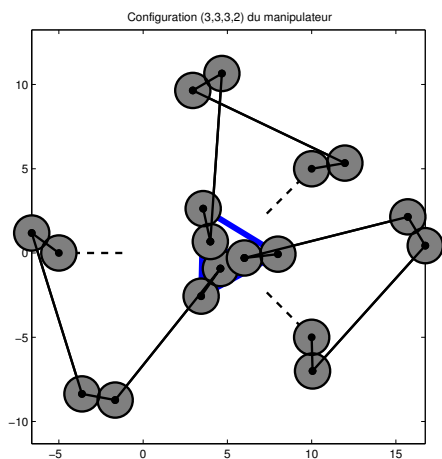
Configuration 8.8.8.1



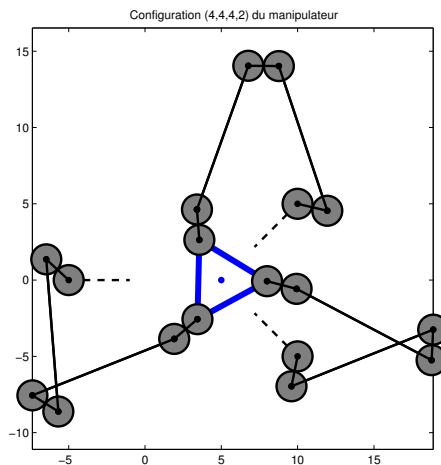
Configuration 1.1.1.2



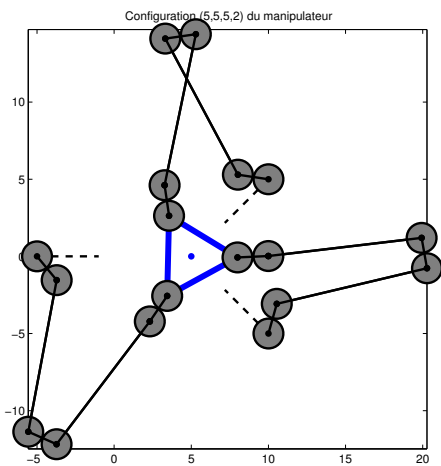
Configuration 2.2.2.2



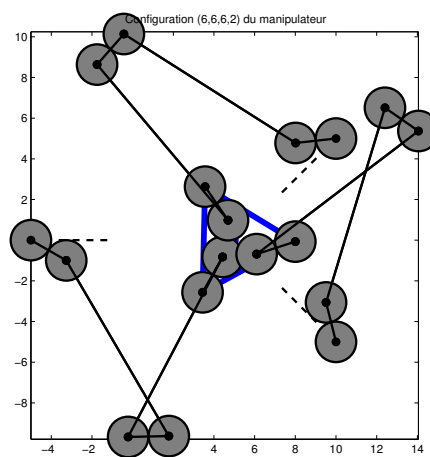
Configuration 3.3.3.2



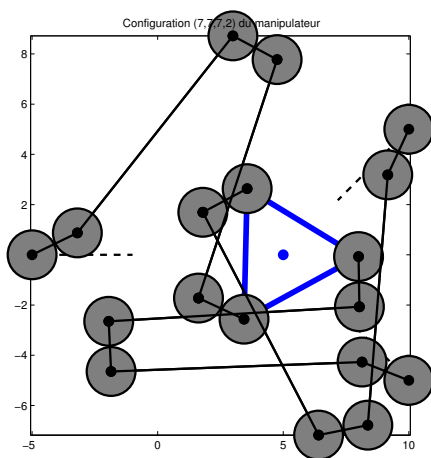
Configuration 4.4.4.2



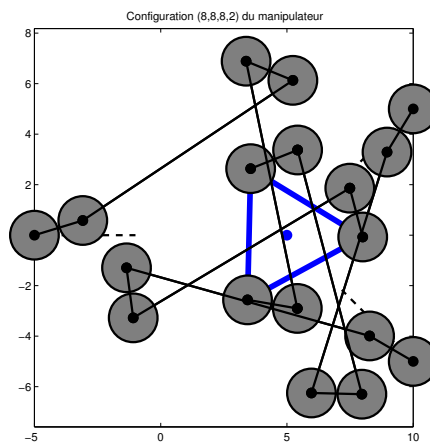
Configuration 5.5.5.2



Configuration 6.6.6.2



Configuration 7.7.7.2



Configuration 8.8.8.2

FIG. B.5 – Solutions au PGI du mécanisme $\mathcal{3}\text{-}\underline{X}_R X_R X_R$.