

BORIS MAYER ST-ONGE

**ÉTUDE ET REPRÉSENTATION DES LIEUX DE  
SINGULARITÉ DE LA PLATE-FORME DE  
GOUGH-STEWART**

Mémoire  
présenté  
à la Faculté des études supérieures  
de l'Université Laval  
pour l'obtention  
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

MARS 1997

# Résumé

Dans ce document, les lieux de singularité des manipulateurs parallèles spatiaux à six degrés de liberté avec actionneurs prismatiques — communément appelés plate-formes de Gough-Stewart — sont étudiés. Une représentation graphique de ces lieux dans l'espace de travail du manipulateur étudié est également obtenue. Tel que mentionné dans la littérature, trois types de singularité peuvent survenir et on s'intéresse ici aux singularités de type II, c'est-à-dire celles pour lesquelles le nombre de solutions au problème géométrique direct dégénère. La méthode utilisée ici est basée sur l'expression analytique du déterminant de la matrice jacobienne du manipulateur en question. Il est montré que pour une orientation donnée de la plate-forme, l'expression des lieux de singularité dans l'espace cartésien est représentée par un polynôme de degré quatre ou de degré trois. Un algorithme de travail est alors introduit afin de rendre systématiquement utilisable ce résultat en temps réel. Enfin, une comparaison avec une approche géométrique — la géométrie de Grassmann — est investiguée et des exemples illustrant l'intérêt de cette étude pour l'optimisation et la conception de manipulateurs parallèles sont présentés.

---

Boris Mayer St-Onge

---

Clément Gosselin

# Avant-propos

Comme il se doit, mes premiers remerciements vont sans retenue et avec beaucoup d'attention à mon directeur de recherche Clément Gosselin. Il a su, par son travail rigoureux et son sens inné pour la recherche, me guider dans le vaste monde de la robotique. Je ne peux passer sous silence sa disponibilité exemplaire et son encadrement continu auquel tout étudiant gradué devrait bénéficier.

Des remerciements amplement mérités vont également à la *gang* du laboratoire. Ils m'ont permis de découvrir ce que signifiait vraiment le mot entraide. Ils ont toujours su donner les bons conseils et les gestes d'encouragement n'ont jamais manqué. Leur dynamisme et leur chaleur ont également permis de créer une véritable vie sociale au laboratoire nous permettant de mieux passer les moments un peu plus sombres. Merci les gars.

Finalement, il y a tous ceux qui n'étaient pas liés directement au projet, mais dont leur présence n'en était pas moins qu'indispensable, c'est-à-dire parents et amis. Ces quelques lignes sont bien peu compte tenu de tout le support moral et affectif que vous m'avez offert. Je tiens à vous en remercier. Je ne peux vous nommer tous mais vous saurez vous reconnaître à ces quelques mots.

*Vivons nos rêves au lieu de rêver notre vie ...*

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des Figures</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les manipulateurs parallèles</b>	<b>3</b>
1.1 Historique des manipulateurs parallèles . . . . .	6
<b>2 Notion de configurations singulières</b>	<b>12</b>
2.1 Relation Physique-Mathématique . . . . .	14
2.2 Classification des singularités . . . . .	15
2.2.1 Singularités de type <i>I</i> . . . . .	15
2.2.2 Singularités de type <i>II</i> . . . . .	16
2.2.3 Singularités de type <i>III</i> . . . . .	17
2.3 Exemple simple: système bielle-manivelle . . . . .	17
2.4 Application aux architectures parallèles . . . . .	20
2.5 Pertinence et délimitation du projet . . . . .	22
<b>3 Première approche: expansion directe du déterminant</b>	<b>23</b>
3.1 Modèle géométrique . . . . .	24

3.2	Matrices jacobiennes sous forme invariante . . . . .	25
3.2.1	Formulation à l'aide des invariants quadratiques . . . . .	28
3.2.2	Formulation à l'aide des angles d'Euler . . . . .	29
3.3	Configurations singulières . . . . .	30
3.3.1	Simplifications numériques . . . . .	31
3.3.1.1	Points fixes . . . . .	32
3.3.1.2	Points et orientation fixes . . . . .	32
3.3.1.3	Points et positionnement fixes . . . . .	34
3.4	Changement de repère . . . . .	34
3.5	Conclusion . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Deuxième approche: expansion semi-directe du déterminant</b>	<b>38</b>
4.1	Modèle de travail: matrice $Q$ . . . . .	39
4.2	Modèle de travail: matrice $A$ . . . . .	39
4.2.1	Configurations singulières . . . . .	40
4.3	Changement de repère . . . . .	41
4.3.1	Modèle de travail: matrice $Q$ . . . . .	42
4.3.2	Modèle de travail: matrice $A$ . . . . .	42
4.3.2.1	Configurations singulières . . . . .	43
4.4	Conclusion . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Troisième approche: expansion cascadée du déterminant</b>	<b>45</b>
5.1	Exemple d'insertion de coefficients . . . . .	47
5.2	Algorithme de travail . . . . .	48
5.3	Résultats . . . . .	49
5.4	Changement de repère . . . . .	51
5.5	Étude de l'expression polynomiale . . . . .	51
5.6	Conclusion . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Application à différents types d'architectures</b>	<b>54</b>
6.1	Plate-forme de Gough-Stewart . . . . .	55
6.2	Base coplanaire . . . . .	56
6.3	Architecture du type SSM . . . . .	56
6.4	Architecture du type TSSM . . . . .	58
6.5	Architecture du type MSSM . . . . .	60

6.6	Conclusion . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Comparaisons analytiques et numériques</b>	<b>63</b>
7.1	Géométrie de Grassmann . . . . .	64
7.1.1	Étude du MSSM . . . . .	66
7.1.1.1	Condition 3D, cas général: quatre pattes sont coplanaires . .	68
7.1.1.2	Condition 3D, cas particulier: quatre pattes sont coplanaires	69
7.1.1.3	Condition 5A: complexe non singulier . . . . .	70
7.1.1.4	Condition 5B, cas général: six pattes coupent une même droite	71
7.1.1.5	Condition 5B, cas particulier: six pattes coupent une même droite . . . . .	74
7.1.2	Comparaison . . . . .	75
7.2	Indice de dextérité . . . . .	76
7.3	Conclusion . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Représentation graphique et exemples d'applications</b>	<b>79</b>
8.1	Simulateur de vol . . . . .	80
8.2	Prototype de recherche . . . . .	84
8.3	Conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Détails de la décomposition par les cofacteurs de la première ligne</b>	<b>94</b>
<b>B</b>	<b>Coefficients <math>F_i</math></b>	<b>102</b>
<b>C</b>	<b>Coefficients <math>E_i</math></b>	<b>108</b>
<b>D</b>	<b>Coefficients <math>D_i</math></b>	<b>114</b>
<b>E</b>	<b>Coefficients <math>C_i</math></b>	<b>118</b>
<b>F</b>	<b>Liste des coefficients nuls pour différents types d'architecture</b>	<b>120</b>
F.1	Plate-forme de Gough-Stewart . . . . .	120
F.2	Base coplanaire . . . . .	121
F.3	Architecture du type SSM . . . . .	122
F.4	Architecture du type TSSM . . . . .	122
F.5	Architecture du type MSSM . . . . .	123

<b>G</b>	<b>Géométrie de Grassmann</b>	<b>125</b>
G.1	Condition 3d, cas général . . . . .	125
G.2	Condition 3d, cas particulier . . . . .	126
G.3	Condition 5a . . . . .	128
G.4	Condition 5b, cas général . . . . .	129
G.5	Condition 5b, cas particulier . . . . .	132

# Liste des Tableaux

1.1	Comparaison entre les 2 manipulateurs de la Figure 1.3, un parallèle et un sériel, qui permettent de positionner et d'orienter un objet dans le plan.	7
3.1	Paramètres géométriques d'un manipulateur quelconque. . . . .	32
6.1	Application de l'équation représentant les lieux de singularité de type <i>II</i> sur différentes architectures. . . . .	61
8.1	Paramètres géométriques du simulateur de vol de CAE — Série 500 (longueurs en pouces). . . . .	81
8.2	Paramètres géométriques du prototype de l'INRIA (longueurs en mm).	85



# Liste des Figures

1.1	Exemple de manipulateur sériel. . . . .	5
1.2	Manipulateur parallèle à six degrés de liberté. . . . .	6
1.3	Comparaison entre 2 manipulateurs, un parallèle et un sériel, qui permettent de positionner et d'orienter un objet dans le plan. . . . .	7
1.4	Machine de Gough servant à tester des pneus. . . . .	8
1.5	Simulateur de vol (courtoisie de CAE Électronique). . . . .	9
1.6	Exemples d'applications de la plate-forme de Gough-Stewart. . . . .	11
2.1	Exemple de configurations singulières sur un mécanisme simple. . . . .	20
3.1	Notation utilisée pour le manipulateur parallèle à six degrés de liberté.	24
3.2	Notation simplifiée pour le manipulateur parallèle à six degrés de liberté.	35
6.1	Architecture du type SSM (vue du dessus). . . . .	57
6.2	Architecture du type TSSM (vue du dessus). . . . .	59
6.3	Architecture du type MSSM (vue du dessus). . . . .	60
7.1	Coordonnées de Plücker. . . . .	64
7.2	Notation utilisée pour l'architecture du type MSSM (vue du dessus). . . . .	67

7.3	Condition géométrique 3D selon la géométrie de Grassmann. . . . .	68
7.4	Condition géométrique 5A selon la géométrie de Grassmann. . . . .	71
7.5	Condition géométrique 5B selon la géométrie de Grassmann. . . . .	72
7.6	Graphique de la dextérité montrant les lieux de singularité. . . . .	78
8.1	Simulateur de vol Série 500. . . . .	82
8.2	Section de l'espace de travail obtenue pour le simulateur du Tableau 8.1 et illustrant les lieux de singularité. . . . .	83
8.3	Représentation des lieux de singularité en trois dimensions. . . . .	84
8.4	Prototype de l'INRIA avec $z = 512$ mm. . . . .	86
8.5	Section de l'espace de travail pour le prototype de l'INRIA obtenue (a) dans le plan $xy$ , avec $z = 512$ mm et (b) dans le plan $xz$ , avec $y = -65$ mm, illustrant les lieux de singularité. . . . .	87

# Introduction

## Problématique

Les manipulateurs parallèles, dont fait partie la plate-forme de Gough-Stewart, sont des mécanismes construits à partir de chaînes cinématiques fermées. Ce type de structure leur confère des propriétés cinématiques enviables, comme une excellente rigidité, une très bonne précision et un rapport charge utile/masse du manipulateur très élevé. L'application la plus connue et la plus répandue de ce mécanisme est sans contredit les simulateurs de vol utilisés pour l'entraînement des pilotes au sol. Cependant, plusieurs aspects de la cinématique et de la dynamique de ces manipulateurs demeurent mal connus. Nous nous intéressons ici à l'un d'eux, soit les lieux de singularité que l'on nomme également configurations singulières. Il s'agit des postures pour lesquelles la rigidité naturelle des mécanismes est perdue. Le mécanisme devient alors incontrôlable. Ces configurations sont déjà connues pour la plate-forme de Gough-Stewart grâce à une approche géométrique, la géométrie de Grassmann. C'est ainsi que l'on connaît toutes les conditions géométriques qui conduisent à des configurations singulières. Cependant, l'utilisation de ces conditions ne se traduit pas, dans tous les cas, par des équations analytiques. Il est donc, en général, très difficile de prévoir les configurations cartésiennes pour lesquelles une singularité se produit. L'utilisation d'une approche analytique s'avère ainsi nécessaire si on veut obtenir des expressions pour le lieu des configurations

singulières dans l'espace cartésien. Une telle approche n'a jamais été envisagée mais devient maintenant possible grâce à la puissance des outils de calcul symbolique.

## Structure du mémoire

Le mémoire est divisé en trois parties principales. La première, comportant les Chapitres 1 et 2, introduit les notions de base traitant des manipulateurs parallèles et des configurations singulières. La deuxième partie englobe les Chapitres 3 à 5. À travers ceux-ci, on présente successivement trois approches pour le développement du déterminant de la matrice jacobienne du manipulateur: l'expansion directe, semi-directe et cascadée. Les résultats ainsi obtenus sont exprimés sous forme de théorèmes et un algorithme de travail est introduit afin de les rendre utilisables en temps réel. Quant à la troisième partie, elle regroupe les Chapitres 6 à 8. C'est dans cette partie que l'on analyse les différents résultats. On applique d'abord, dans le Chapitre 6, l'expression des lieux de singularité à différents types d'architectures de la plate-forme de Gough-Stewart. Par la suite une vérification analytique, à l'aide de la géométrie de Grassmann, et une vérification numérique, à l'aide de la dextérité, sont présentées dans le Chapitre 7. Enfin, la représentation graphique de ces lieux dans l'espace cartésien est réalisée sur deux mécanismes connus dans le Chapitre 8. Ces représentations sont liées au développement d'outils informatiques interactifs pour l'optimisation et la conception de mécanismes parallèles.

# Chapitre 1

## Les manipulateurs parallèles

De tous les temps les humains, et principalement les ingénieurs, ont tenté de reproduire artificiellement les incroyables capacités du corps humain. On a qu'à penser, entre autres choses, aux coeurs artificiels, à l'intelligence artificielle, et bien sûr, aux manipulateurs construits selon le caractère anthropomorphique du bras humain. C'est ainsi qu'à l'heure actuelle, la première architecture qui vient à l'esprit des gens lorsque l'on parle de manipulateurs est la caricature du bras humain (Figure 1.1). Dans un langage plus scientifique, on nomme ce type d'architecture *manipulateurs sériels* puisqu'ils sont construits par une suite de moteurs et de membres intermédiaires: les moteurs ne produisent un mouvement que de l'articulation à laquelle ils sont associés. Il va sans dire que le choix de cette architecture dans l'application de tâches robotiques se base sur des performances bien spécifiques, comme par exemple un grand espace de travail. D'un autre côté, le fait que cette structure soit en porte-à-faux entraîne des imprécisions, une faible rigidité et un rapport charge utile/masse du manipulateur

très petit. En regardant les tableaux illustrant les différentes caractéristiques des manipulateurs industriels de type sériel (Merlet 1990), on constate principalement trois choses:

- Un grand espace de travail. L'espace de travail de l'organe terminal est en fait l'union de l'espace de travail de chacun des actionneurs<sup>1</sup>. L'espace de travail ainsi obtenu est de loin supérieur à l'espace obtenu par un seul actionneur.
- L'erreur de positionnement est additive. Puisque les actionneurs sont placés un à la suite de l'autre, l'erreur associée au premier moteur se répercutera sur l'ensemble des moteurs suivants. Ainsi, l'erreur de positionnement à l'organe terminal sera la somme de chacune des erreurs aux différents actionneurs. C'est pour cette raison qu'il est dit que l'erreur de positionnement est additive.
- Le rapport charge utile/masse du manipulateur est très faible ( $\simeq 1/10$ ). Puisque les actionneurs sont en porte-à-faux, l'actionneur à la base doit supporter la charge de tous les autres actionneurs. De plus, en tenant compte des différents bras de levier, on se retrouve avec un manipulateur qui ne peut soulever que le dixième de son poids.

Les lacunes de ces manipulateurs conventionnels ont donc motivé les chercheurs à trouver d'autres formes de mécanismes. Parmi les différentes architectures, une attention particulière a été portée sur les manipulateurs parallèles. Un manipulateur parallèle est représenté grossièrement à la Figure 1.2. On voit que cette architecture comporte des chaînes cinématiques fermées, c'est-à-dire que plusieurs branches relient l'effecteur à la base. Les actionneurs travaillent maintenant en coopération: ils produisent chacun des mouvements de l'ensemble des articulations passives du mécanisme contrairement au cas des manipulateurs sériels. De ce fait, les architectures formées de chaînes cinématiques fermées génèrent des manipulateurs avec une excellente rigidité, une très bonne précision et un rapport charge utile/masse du manipulateur très élevé. Malheureusement, puisque chacune des branches relie la base à l'effecteur, l'espace de travail est très restreint. Ce type d'architecture est donc utilisé dans plusieurs applications où les propriétés de rigidité, de précision et de rapport charge utile/masse du

---

<sup>1</sup>actionneur est un synonyme de moteur

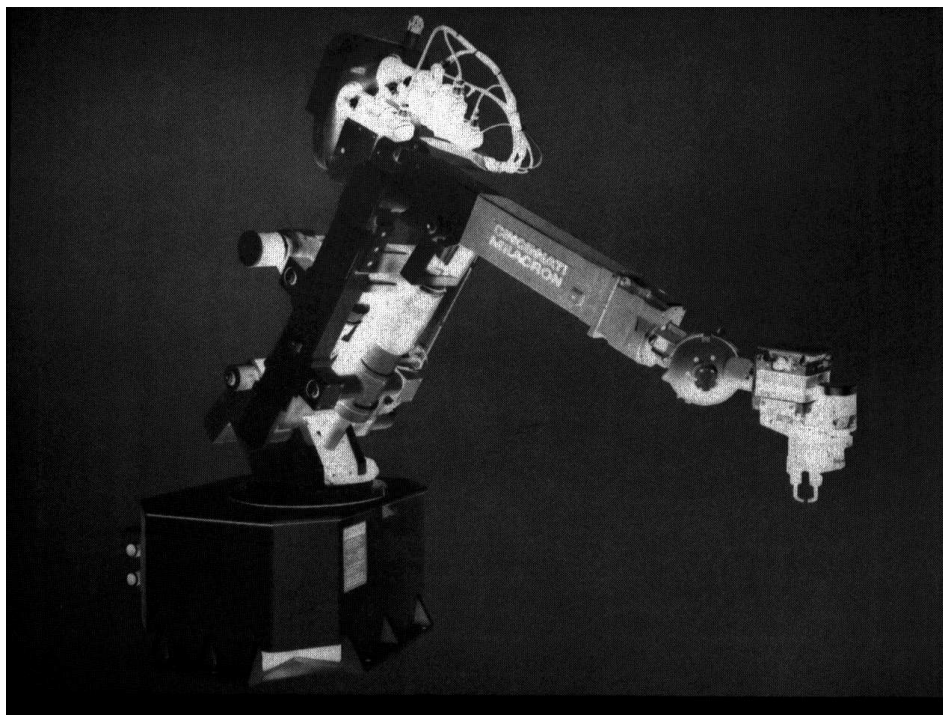


Figure 1.1: Exemple de manipulateur sériel.

manipulateur sont d'une importance capitale alors qu'un espace de travail limité est acceptable. Regardons de plus près les caractéristiques des manipulateurs parallèles:

- Un petit espace de travail. L'espace de travail de l'organe terminal est en quelque sorte l'intersection de l'espace de travail de chacun des actionneurs. L'espace de travail ainsi obtenu est de loin inférieur à l'espace obtenu par un seul actionneur.
- L'erreur de positionnement est faible. Puisque les actionneurs sont placés en parallèle, c'est-à-dire qu'ils travaillent en coopération, l'erreur ne sera pas additive. En fait, tous les actionneurs travaillent pour positionner le même point. L'erreur de positionnement à l'organe terminal sera donc faible.
- Le rapport charge utile/masse du manipulateur est très élevé. Les actionneurs sont maintenant déportés à la base du manipulateur. Ainsi, le manipulateur parallèle pourra supporter des charges beaucoup plus élevées qu'un manipulateur sériel puisqu'il n'a pas à supporter les différents moteurs et que le poids total est réparti sur les différentes pattes. Le rapport charge utile/masse du manipulateur est ainsi de beaucoup supérieur à un. Il peut facilement atteindre 50.

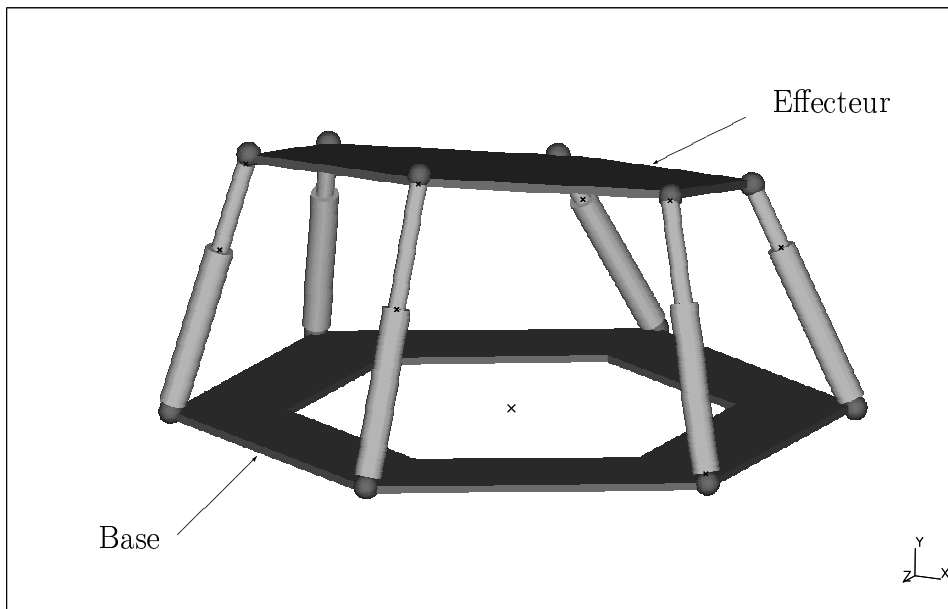


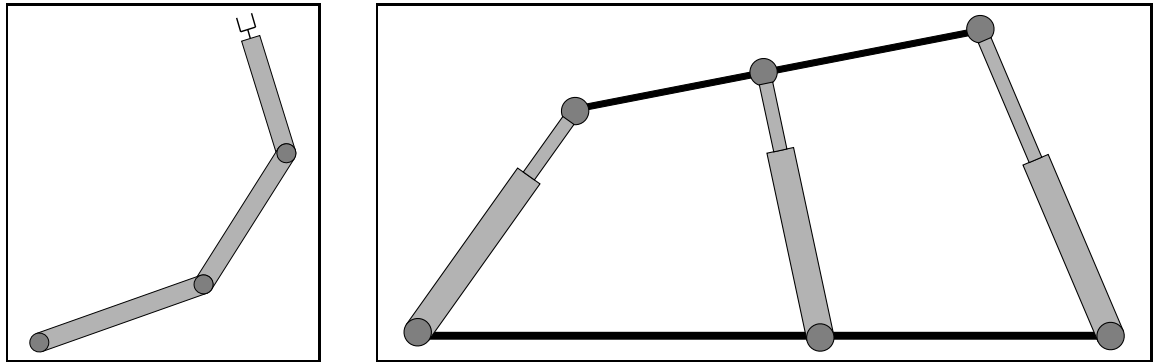
Figure 1.2: Manipulateur parallèle à six degrés de liberté.

On se rend donc rapidement compte des principales différences entre les chaînes cinématiques ouvertes (manipulateurs sériels) et les chaînes cinématiques fermées (manipulateurs parallèles) ainsi que les avantages que ces derniers possèdent. Le Tableau 1.1 ainsi que la Figure 1.3 illustrent bien ces principales différences.

## 1.1 Historique des manipulateurs parallèles

La première application connue des manipulateurs parallèles par les roboticiens est une machine inventée par le britannique Gough, en 1947 (Gough 1956–57). La machine, qui servait à tester des pneumatiques, est représentée à la Figure 1.4. On peut remarquer que ce mécanisme, à chaînes cinématiques fermées, est composé de six vérins à vis qui relient la base fixe à la plate-forme mobile. La variation de la longueur de ces vérins permet de positionner et d’orienter le plateau mobile sur lequel le pneu est installé pour les différents tests. Une vingtaine d’années se sont ensuite écoulées avant l’apparition de la deuxième application. Avec l’expansion de l’industrie aéronautique et les coûts exorbitants pour l’entraînement en vol des pilotes, des simulateurs de vol étaient devenus indispensables. C’est ainsi qu’un autre britannique, Stewart, proposa en 1965 sans avoir entendu parler de celle de Gough, une architecture semblable pour l’entraînement





(a) Manipulateur sériel

(b) Manipulateur parallèle

Figure 1.3: Comparaison entre 2 manipulateurs, un parallèle et un sériel, qui permettent de positionner et d'orienter un objet dans le plan.

	Manipulateur sériel	Manipulateur parallèle
Degrés de liberté	3	3
Espace de travail	grand	petit
Rapport charge utile/ masse du manip.	$\simeq 1/10$	$\gg 1$
Erreur de positionnement	additive	faible
Rigidité	variable	excellente

Tableau 1.1: Comparaison entre les 2 manipulateurs de la Figure 1.3, un parallèle et un sériel, qui permettent de positionner et d'orienter un objet dans le plan.

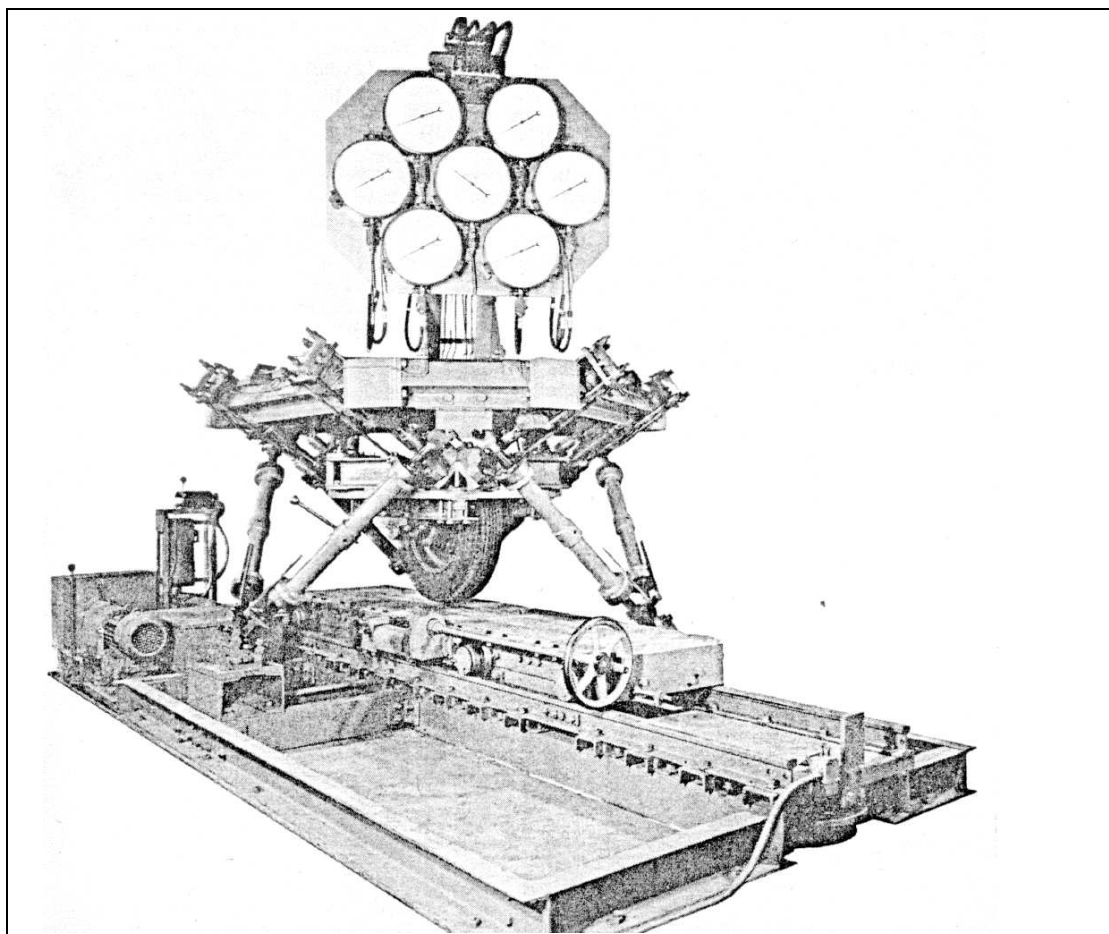


Figure 1.4: Machine de Gough servant à tester des pneus.

des pilotes au sol (Stewart 1965). En fait, cette architecture n'était pas complètement parallèle: il s'agissait d'un manipulateur hybride, c'est-à-dire d'architecture sérielle et parallèle. La contribution majeure de Stewart a donc été de proposer cette architecture comme simulateur de vol puisque son architecture telle quelle n'a à peu près pas d'application connue. Les simulateurs de vol, appelés à tort plate-formes de Stewart, sont fabriqués selon le principe de Gough et représentent l'application la plus courante de mécanisme parallèle (Figure 1.5). Nous désignerons alors ce mécanisme comme la plate-forme de Gough-Stewart.

Ce n'est cependant qu'à la fin des années 70 que Hunt (1978) introduisit le concept de manipulateur parallèle et proposa, dans son livre, d'utiliser ce type de mécanisme en robotique. L'année suivante, McCallion et Pham (1979) utilisèrent pour la première fois les manipulateurs parallèles en robotique sur une station d'assemblage robotisée.

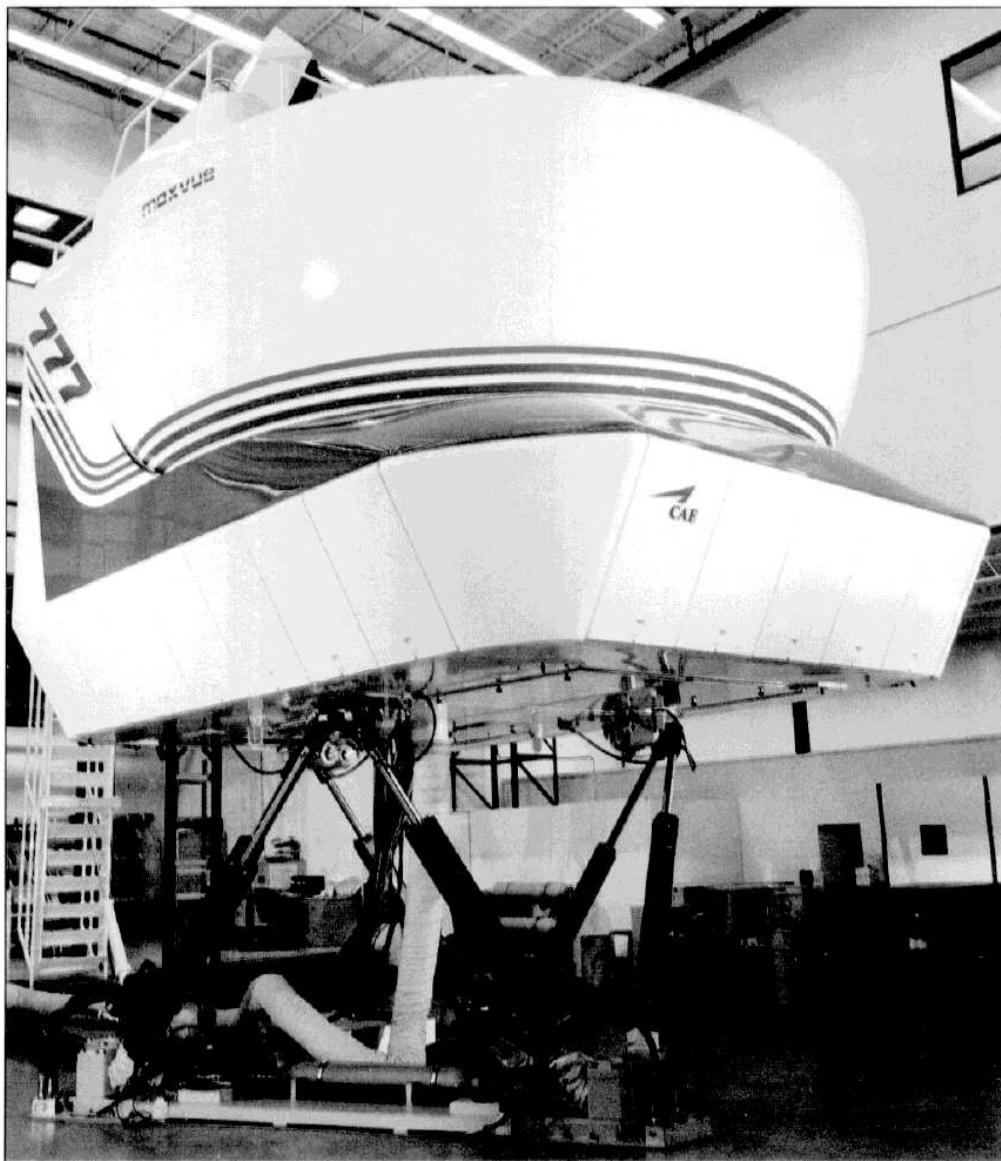
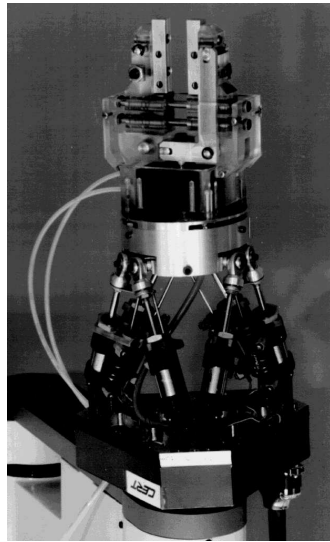


Figure 1.5: Simulateur de vol (courtoisie de CAE Électronique).

Depuis, le nombre de projets de recherche sur ce type d'architecture n'a cessé de croître et plusieurs prototypes ont vu le jour. Les applications dans lesquelles ce type de structure est utilisé se sont également multipliées, quoique les simulateurs de vol demeurent toujours et de loin l'application la plus connue et la plus répandue. La Figure 1.6 illustre bien le potentiel que cette architecture possède par les diverses applications qui peuvent lui être associées. En premier lieu (*a*), il s'agit d'un prototype de *poignet de robot* qui a été développé au CERT (Centre d'Études et de Recherches de Toulouse) par Reboulet (Reboulet et Robert 1988). Il s'agit d'un poignet actif à six degrés de liberté, dont les actionneurs sont des vérins pneumatiques. Une version de ce prototype est commercialisée par la société AICO en Europe. En (*b*), il s'agit d'un mécanisme servant à positionner et à orienter une antenne dans l'espace (Merlet 1990). Il est intéressant de remarquer la dimension des actionneurs par rapport à la grosseur de l'objet à orienter. Enfin, en (*c*), nous avons un appareil servant à faire du positionnement et de l'orientation en précision ( $1 \mu\text{m}$  et une seconde d'arc). Il a été développé par la compagnie POLYTEC PI INC et est présentement commercialisé. Ce dernier mécanisme peut, entre autres choses, être utilisé dans des accélérateurs de particules. Il sert à fixer avec précision la particule avant sa propulsion dans l'accélérateur.

Comme on peut le constater, les manipulateurs parallèles et principalement la plateforme de Gough-Stewart font partie des mécanismes actuellement utilisés en industrie même s'ils sont inconnus de la majorité des gens. C'est pourquoi ils ont été étudiés par plusieurs chercheurs au cours des dernières années. Malheureusement, plusieurs aspects de la cinématique et de la dynamique de ces manipulateurs demeurent mal connus; nous allons donc nous intéresser à l'un d'eux, les lieux de singularité ou configurations singulières.



(a) Poignet de robot  
(courtoisie du CERT)



(b) Orientation d'une antenne  
(Merlet 1990)



(c) Positionnement en précision  
(courtoisie de Polytec PI Inc.)

Figure 1.6: Exemples d'applications de la plate-forme de Gough-Stewart.

# Chapitre 2

## Notion de configurations singulières

Un des principaux avantages d'utiliser des manipulateurs robotisés en industrie est la précision avec laquelle ils sont capables de travailler. Il devient alors tout à fait inutile d'utiliser ces manipulateurs si la précision qui les caractérise est perdue. C'est pourtant une situation qui peut se produire en pratique. L'espace de travail de tout manipulateur est nappé de courbes de précision que l'on nomme dextérité. Lorsque cette dextérité atteint le seuil critique de zéro, on perd alors toute la précision pour laquelle le mécanisme était utilisé. On nomme ces endroits lieux de singularité, ou configurations singulières. On définit ces configurations comme des postures pour lesquelles la rigidité naturelle des mécanismes est perdue. Il va sans dire que cette propriété a attiré l'attention de plusieurs chercheurs et est d'une importance capitale dans un contexte d'analyse et de design de manipulateurs parallèles. Pour bien comprendre ce que l'on entend par

la notion de configurations singulières — ou lieux de singularité — nous analyserons tout d'abord le comportement des mécanismes d'un point de vue simplement physique. Deux aspects seront alors traités: l'effet des configurations singulières au niveau des vitesses et ensuite au niveau des forces. Mais avant de débiter, il est important de définir ce que l'on entend par variables d'entrée et variables de sortie d'un mécanisme. Les variables d'entrée sont tout simplement celles qu'on associe aux membres actionnés par l'utilisateur et utilisés pour contrôler le mécanisme. Il peut s'agir, entre autres, d'articulations rotoïdes (moteurs rotatifs) ou bien d'articulations prismatiques (vérins linéaires) comme c'est le cas pour la plate-forme de Gough-Stewart. Quant aux variables de sortie, ce sont celles qu'on associe à la partie du mécanisme que l'on cherche à contrôler, c'est-à-dire que l'on cherche à positionner et à orienter. Ces variables sont en général des coordonnées de position ou d'orientation d'un corps rigide.

### **Interprétation au niveau des vitesses**

Les configurations singulières se reflètent de deux façons au niveau des vitesses. Premièrement, il est possible que le mécanisme se retrouve dans une position telle que des vitesses (mouvements) aux variables d'entrée ne produisent plus de vitesses (mouvements) aux variables de sortie. Le contrôle de notre mécanisme est alors perdu puisque les variables d'entrée n'ont plus d'effet sur les variables de sortie. La deuxième façon d'être en configuration singulière est tout simplement l'inverse, c'est-à-dire que le mécanisme soit dans une posture telle que les vitesses (mouvements) aux variables de sortie ne produisent pas de vitesses aux variables d'entrée. Ainsi, dans ces postures, l'organe terminal de notre mécanisme est libre de bouger localement même si tous les membres actionnés sont fixes, ce qui veut dire qu'il est incontrôlable.

### **Interprétation au niveau des forces**

L'interprétation au niveau des forces est semblable à celle faite au niveau des vitesses (Waldron et Hunt 1988). Premièrement, il est possible que le mécanisme se retrouve dans une position telle que des forces — ou moments — aux variables d'entrée ne produisent plus de forces — ou moments — aux variables de sortie. Ainsi, la force appliquée aux membres actionnés sera reprise par les membrures. On risque alors d'abîmer le mécanisme. Et puis il y a l'inverse, c'est-à-dire que le mécanisme soit dans une position telle que les forces — ou moments — aux variables de sortie ne produisent

pas de forces — ou moments — aux variables d’entrée.

Ceci explique en grande partie l’importance de pouvoir déterminer les endroits dans l’espace atteignable où le mécanisme se trouve dans une configuration singulière. Pour ce faire, il serait avantageux de pouvoir quantifier cette notion et l’analyser d’un point de vue mathématique. Les avantages d’une telle démarche sont multiples. Tout d’abord, d’un point de vue de l’utilisation d’un mécanisme, elle nous permettra de pouvoir identifier les zones où le mécanisme est en configuration singulière dans son espace de travail. Il nous sera donc possible d’éviter ces postures indésirables en modifiant la trajectoire du manipulateur. De plus, une expression analytique des lieux de singularité sera un outil qui deviendra très utile dans un contexte de design où l’on cherche à maximiser les performances des mécanismes lors de la conception. L’intégration de cette représentation mathématique dans un outil informatisé de conception interactif permettra l’évaluation rapide d’une grande variété de géométries. Il sera ainsi possible d’identifier les lieux de singularité dès la conception et d’en minimiser l’impact.

## 2.1 Relation Physique-Mathématique

Pour voir la relation existant entre l’interprétation physique et mathématique des configurations singulières, regardons d’abord l’énoncé qui suit.

**Énoncé 2.1** *Soit le système de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues suivant*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.1}$$

*Il existe un vecteur solution  $\mathbf{x}$  non nul pour  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  tel que*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

*si et seulement si la matrice  $\mathbf{A}$ , qui est de dimensions  $n \times n$  est singulière. Dans ce cas, le noyau de la matrice  $\mathbf{A}$  n’est pas vide et il existe des vecteurs non nuls  $\mathbf{x}$  pour lesquels  $\mathbf{b}$  sera égal à zéro. Ainsi, pour respecter l’équation (2.2), il faut que le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$  soit nul, c’est-à-dire*

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \tag{2.3}$$



En supposant que les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$  soient les vitesses — ou les forces et moments — associées aux variables d'entrée et de sortie, on vient de trouver la relation mathématique qui exprime l'endroit où l'on retrouve les configurations singulières. On doit donc trouver un système d'équations linéaires qui relie les vitesses — ou les forces et moments — des variables cartésiennes aux variables articulaires. À partir de ce système d'équations il sera alors possible d'établir une classification des singularités, ce dont traite la prochaine section.

## 2.2 Classification des singularités

La relation entre les variables d'entrée et de sortie peut être écrite sous la forme

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{F}$  est une fonction implicite de  $\boldsymbol{\theta}$  et de  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur des coordonnées articulaires (entrée) et  $\mathbf{x}$  est le vecteur des coordonnées cartésiennes (sortie). Ces deux vecteurs sont de dimension  $n$ , où  $n$  est le nombre de degrés de liberté du manipulateur. La dérivation de l'équation (2.4) par rapport au temps conduit à la relation suivante entre les vitesses d'entrée et de sortie

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont de dimensions  $n \times n$  et sont nommées matrices jacobiennes. En se basant sur ces deux matrices, Gosselin et Angeles (1990) ont suggéré une classification des singularités se retrouvant dans les chaînes cinématiques fermées et trois types de singularité ayant différentes interprétations physiques ont été trouvés. Ces singularités se produisent respectivement lorsque *i*) la matrice  $\mathbf{B}$  est singulière, *ii*) la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière et *iii*) les équations de positionnement dégènèrent.

### 2.2.1 Singularités de type *I*

Le premier type de singularité se produit lorsque la condition suivante est vérifiée.

$$\det(\mathbf{B}) = 0 \quad (2.6)$$

Par l'analyse mathématique, on constate que la dimension du noyau de la matrice  $\mathbf{B}$  n'est pas zéro. Ainsi, en présence des singularités du premier type, on peut trouver des

vecteurs  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  non nuls pour lesquels  $\dot{\mathbf{x}}$  sera égal à zéro. Par conséquent, physiquement on remarque que:

- ceci correspond à des configurations pour lesquelles l'effecteur est fixe localement même quand les actionneurs sont en mouvement. Donc, certains vecteurs vitesses  $\dot{\mathbf{x}}$  ne peuvent pas être produits à la sortie avec des vecteurs vitesses  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  finis à l'entrée;
- en vertu de la dualité cinématique-statique (Waldron et Hunt 1988), le membre de sortie peut résister à une ou plusieurs forces ou moments sans exercer aucun couple — ou force — aux liaisons actionnées.

Généralement, ce type de singularité se produit à la limite de l'espace de travail et on dit que dans ces configurations le membre de sortie perd un ou plusieurs degrés de liberté. Visuellement, le premier type de singularité correspond aux configurations pour lesquelles le membre de sortie est à un point mort.

### 2.2.2 Singularités de type *II*

Le second type de singularité se produit lorsque nous avons

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \tag{2.7}$$

Puisque dans ce cas le noyau de la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas vide, il existe des vecteurs  $\dot{\mathbf{x}}$  non nuls pour lesquels  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  sera égal à zéro. Par conséquent, physiquement on remarque que:

- ceci correspond à des configurations pour lesquelles l'effecteur est mobile localement même quand toutes les articulations normalement actionnées sont bloquées. Donc, certains vecteurs vitesses  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  ne peuvent pas être produits à l'entrée avec des vecteurs vitesses  $\dot{\mathbf{x}}$  finis à la sortie;
- en vertu de la dualité cinématique-statique (Waldron et Hunt 1988), le membre de sortie ne peut pas résister à une ou plusieurs forces ou moments même quand tous les actionneurs sont bloqués.

A l'opposé du premier type, ce type de singularité demeure à l'intérieur de l'espace de travail et on dit que le membre de sortie gagne un ou plusieurs degrés de liberté. Visuellement, le second type de singularité correspond aux configurations pour lesquelles les membres d'entrée sont à un point mort.

### 2.2.3 Singularités de type *III*

Le troisième type de singularité a une nature quelque peu différente des deux premiers puisqu'il requiert des conditions spéciales des paramètres architecturaux. On obtient une singularité de type *III* lorsque pour ces conditions spécifiques des paramètres architecturaux, on peut atteindre des configurations où la relation de position donnée à l'équation (2.4) dégénère. Ceci correspond aux configurations pour lesquelles l'effecteur peut subir un mouvement fini quand les actionneurs sont bloqués ou pour lesquelles un mouvement fini des entrées ne produit pas de mouvement à la sortie. Il est important de noter que ce type de singularité peut être éliminé lors de la conception du manipulateur.

Cette classification des lieux de singularité, établie par Gosselin et Angeles a été par la suite raffinée par Zlatanov *et al.* (1994) où des interprétations physiques détaillées sont fournies. Nous utiliserons cependant la classification ci-haut mentionnée et pour bien la comprendre, les trois types de singularités seront illustrées par un exemple simple de mécanisme à chaînes cinématiques fermées.

## 2.3 Exemple simple: système bielle-manivelle

Un mécanisme *RRRP* (système bielle-manivelle) est représenté à la Figure 2.1(a). Cet exemple est tiré de Gosselin et Angeles (1990). Il s'agit d'un mécanisme à quatre barres ne comportant qu'un seul degré de liberté. Il est composé de trois articulations rotoïdes (en *A*, *B* et *C*) et d'une articulation prismatique (en *C*).

La variation de la variable d'entrée  $\theta$  — variable articulaire — permet de positionner le corps glissant sur l'axe *X*. Son abscisse  $x$  est prise comme variable de sortie ou variable cartésienne. On cherche maintenant une relation entre les variables articulaire

et cartésienne. En appliquant la loi des cosinus à la Figure 2.1(a), on écrit

$$l_2^2 = l_1^2 + x^2 - 2l_1x \cos \theta \quad (2.8)$$

que l'on réécrit sous la forme  $x = f(\theta)$  pour avoir la position de l'organe terminal en fonction de la variable d'entrée, soit

$$x = l_1 \cos \theta \pm l_2 \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.9)$$

où

$$r = \frac{l_1}{l_2} \quad (2.10)$$

La dérivation de l'équation (2.9) par rapport au temps donne

$$\dot{x} = -(l_1 \sin \theta) \dot{\theta} \pm l_2 \frac{-r^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}} \dot{\theta} \quad (2.11)$$

Cette équation nous conduit alors au système d'équation voulu, soit

$$A\dot{x} = B\dot{\theta} \quad (2.12)$$

avec

$$A = \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.13)$$

$$B = -l_1 \sin \theta (\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \pm r \cos \theta) \quad (2.14)$$

Étudions maintenant les trois types de singularité. Le premier type de singularité se produit lorsque la matrice  $B$  est singulière, c'est-à-dire, pour un scalaire, lorsque  $B = 0$ . D'après l'équation (2.14), le scalaire  $B$  sera égal à zéro lorsque

$$-l_1 \sin \theta = 0 \quad (2.15)$$

ou bien lorsque

$$\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \pm r \cos \theta = 0 \quad (2.16)$$

On peut écrire ces deux équations comme  $\sin \theta = 0$  et  $r = 1$ . On voit très bien ici que  $r = 1$  correspond à  $l_1 = l_2$ , donc à une singularité due aux paramètres architecturaux (type *III*). Les singularités de type *I* se produisent donc lorsque  $\sin \theta = 0$ , soit  $\theta = 0$  ou  $\pi$ . Ainsi, l'équation (2.9) devient

$$x = \pm l_1 \pm l_2 \quad (2.17)$$

Les positions ainsi obtenues correspondent à l'alignement des deux membres sur l'axe. Une de ces positions est représentée à la Figure 2.1(b). On voit très bien que ce type de singularité correspond à une limite de l'espace de travail. On constate aussi que:

- dans cette configuration, une vitesse à l'actionneur  $\dot{\theta}$  ne produit pas de vitesse à l'effecteur, soit  $\dot{x} = 0$ . Le membre articulé peut subir un mouvement infinitésimal même si le membre glissant est fixe;
- on peut appliquer une force infinie sur le membre glissant dans la direction de  $x$  sans qu'il n'y ait de moment d'induit à l'articulation actionnée.

Le second type de singularité se produit lorsque la matrice  $A$  est singulière, c'est-à-dire lorsque  $A = 0$ . D'après l'équation (2.13), le scalaire  $A$  sera égal à zéro lorsque

$$\sin \theta = \frac{l_2}{l_1} \quad (2.18)$$

La configuration ainsi obtenue est représentée à la Figure 2.1(c). Contrairement aux singularités de type  $I$ , on voit que la glissière est à l'intérieur de l'espace de travail. On constate aussi que:

- dans cette configuration, une vitesse à l'effecteur  $x$  ne produit pas de vitesse à l'actionneur, soit  $\dot{\theta} = 0$ . Le membre glissant peut subir un mouvement infinitésimal même si le membre d'entrée est fixe;
- on peut appliquer un moment infini à l'articulation sans qu'il n'y ait de force d'induite au membre glissant dans la direction de l'axe des  $x$ .

On voit que les singularités de ce type sont beaucoup plus importantes que les premières puisque l'on ne peut plus contrôler le mécanisme: il devient alors impossible de transférer le couple de l'actionneur au membre glissant. Ainsi, dans une situation réelle, si le mécanisme s'immobilise à cet endroit et que l'on décide de repartir, il existe un risque d'abîmer le mécanisme puisque le couple sera absorbé par les membrures.

Il ne reste plus que les singularités du troisième type qui sont dues aux paramètres architecturaux. Dans notre cas, il s'agit de la condition

$$l_1 = l_2 \quad (2.19)$$

L'équation (2.9) devient alors

$$x = l_1 \cos \theta \pm l_1 \cos \theta \quad (2.20)$$

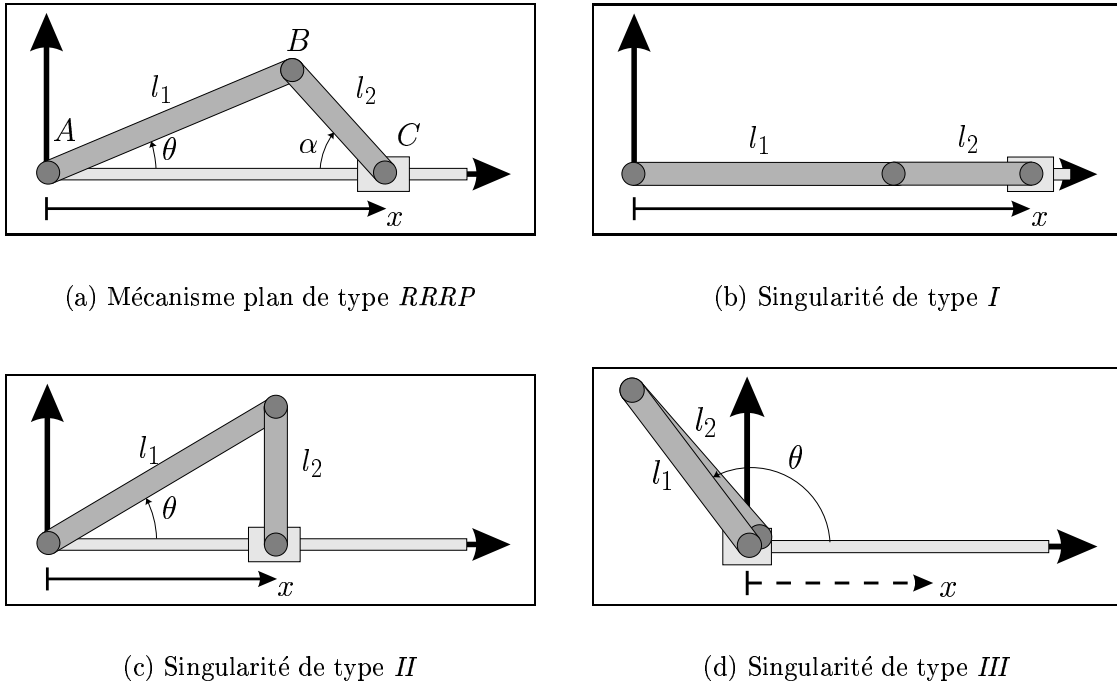


Figure 2.1: Exemple de configurations singulières sur un mécanisme simple.

soit

$$x = \begin{cases} 0 \\ 2l_1 \cos \theta \end{cases} \quad (2.21)$$

Ainsi, si  $x$  vaut zéro comme il est présenté à la Figure 2.1(d), on perd tout contrôle sur la position du membre glissant qui demeure toujours à la même position peu importe la valeur de l'angle  $\theta$ . On se rend très bien compte ici que ce type de singularité peut être éliminé lors de la conception du mécanisme. En effet, pour l'éviter il suffit de poser  $l_1 \neq l_2$ .

## 2.4 Application aux architectures parallèles

Depuis la parution de l'article de Gosselin et Angeles (1990) où la classification des singularités décrite plus haut a été établie, plusieurs travaux de recherche ont été effectués sur la détermination d'expressions analytiques décrivant les lieux de singularité sur les manipulateurs parallèles. Plus particulièrement, les chercheurs se sont attardés aux

manipulateurs parallèles à trois degrés de liberté. C'est ainsi que des expressions analytiques ont été obtenues pour le manipulateur sphérique à actionneurs prismatiques (Sefrioui et Gosselin 1994), pour le manipulateur plan à actionneurs prismatiques (Sefrioui et Gosselin 1993; Sefrioui et Gosselin 1995) et pour le manipulateur plan à actionneurs rotoïdes (Gosselin et Wang 1995). Cependant, étant donné la complexité de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , ces expressions sont beaucoup plus difficiles à obtenir pour des mécanismes avec plus de trois degrés de liberté. Le déterminant de cette matrice devient très difficile à obtenir.

C'est ainsi que pour la plate-forme de Gough-Stewart, le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  — c'est-à-dire les singularités de type *II* — n'a jamais été développé. Par contre, les singularités de type *I* — c'est-à-dire la limite de l'espace de travail — et de type *III* ont déjà été trouvées dans Gosselin et Angeles (1990). En fait, elles conduisent à des expressions très simples. Dans le présent ouvrage, on s'intéresse alors uniquement aux singularités de type *II*.

Pour contourner la manipulation de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , Merlet (1988, 1989) a utilisé une méthode basée sur la géométrie de Grassmann pour caractériser les configurations singulières. Cette méthode repose sur le fait que chaque configuration singulière correspond à une condition géométrique bien spécifique. L'étude établit au total 13 conditions différentes pour lesquelles le mécanisme est en configuration singulière. Par exemple, on est en configuration singulière lorsque les droites associées à quatre vérins sont dans le même plan ou bien que les droites associées à quatre vérins passent par un point commun dans l'espace. Ces conditions ne sont cependant pas toutes valides simultanément pour les différentes architectures de la plate-forme de Gough-Stewart. C'est ainsi que pour un manipulateur dans lequel la base et la plate-forme sont triangulaire (les points sont groupés deux à deux), il existe trois conditions géométriques pour lesquelles le mécanisme est en configuration singulière.

Jusqu'à maintenant, ces études représentent la seule percée dans la détermination d'expressions analytiques pour la plate-forme de Gough-Stewart. Cependant, en utilisant la géométrie de Grassmann, il est facile de déterminer les conditions géométriques produisant les configurations singulières mais il est très difficile de les exprimer mathématiquement. C'est ainsi que pour l'architecture générale de la plate-forme de Gough-Stewart, certaines équations provenant des conditions géométriques manquent encore.

La méthode utilisée comblera cette lacune puisqu'une équation unique représentant toutes les singularités sera introduite.

## 2.5 Pertinence et délimitation du projet

Ce chapitre nous a permis de constater que l'analyse des configurations singulières lors de la planification de trajectoire de mécanismes est essentielle. De plus, dans un contexte de conception, il est très utile d'avoir une expression analytique des lieux de singularité dans le but d'obtenir des mécanismes possédant des propriétés cinématiques optimales. Ainsi, l'objectif de ce travail est double. Le premier consiste à **obtenir une expression analytique représentant les lieux de singularité de type II** de la plate-forme de Gough-Stewart. Tel que mentionné dans la section précédente, la seule étude faite à ce sujet repose sur la géométrie de Grassmann et possède le désavantage de ne pas avoir sous forme analytique toutes les formes de singularités dues aux conditions géométriques. Quant au deuxième objectif, il s'agit d'utiliser cette expression et d'**obtenir une représentation graphique** des lieux de singularité dans l'espace cartésien afin de les superposer graphiquement à l'espace de travail. Cet objectif est lié au développement d'outils informatiques interactifs pour la conception et l'optimisation de mécanismes parallèles.



# Chapitre 3

## Première approche: expansion directe du déterminant

Ce chapitre marque le début de notre étude proprement dite. On se doit d'abord de dériver les matrices jacobiniennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  associées à la plate-forme de Gough-Stewart. Un de ces manipulateurs est représenté schématiquement à la Figure 3.1. Il a été étudié en détail par plusieurs chercheurs (Hunt 1983; Fichter 1986; Merlet 1987; Reboulet et Berthomieu 1991) et son architecture mécanique est la suivante. Elle consiste en une plate-forme mobile  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  et en une base fixe  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ . Les points  $B_i$  et  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sont localisés de façon arbitraire en trois dimensions. La base et la plate-forme sont donc de formes quelconques. Elles sont reliées par six vérins linéaires de longueurs variables, respectivement  $\rho_1$  à  $\rho_6$ . La variation de ces longueurs permet de positionner et d'orienter la plate-forme  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  dans l'espace. Les liaisons sur la plate-forme, aux points  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sont des liaisons sphériques et celles sur la

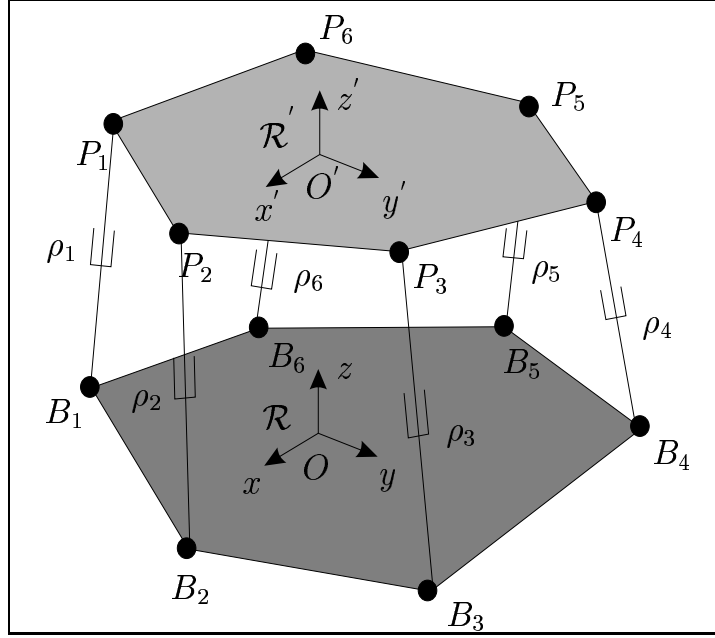


Figure 3.1: Notation utilisée pour le manipulateur parallèle à six degrés de liberté.

base, aux points  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sont des liaisons de cardan, ce qui assure globalement six degrés de liberté au mécanisme.

### 3.1 Modèle géométrique

Pour dériver les matrices jacobiniennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  associées à ce manipulateur, on doit a priori trouver la relation qui existe entre les variables d'entrée et de sortie telle que définie à l'équation (2.4). On utilise alors le problème géométrique inverse qui est formulé de la façon suivante: pour une certaine géométrie du manipulateur et pour une position et une orientation de la plate-forme mobile  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , c'est-à-dire des variables cartésiennes données, calculer les longueurs des six vérins  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$  et  $\rho_6$ , c'est-à-dire les variables articulaires.

Introduisons alors la notation utilisée pour établir les équations cinématiques (Figure 3.1). On définit d'abord un repère  $\mathcal{R}$  ( $Oxyz$ ), fixé à la base du manipulateur, et un repère mobile  $\mathcal{R}'$  ( $O'x'y'z'$ ) lié au plateau. On note  $B_i$  le point situé à la base du  $i$ ème vérin. Les coordonnées de ce point dans le repère fixe sont données par  $(b_{ix}, b_{iy}, b_{iz})$ . On note également  $P_i$  le point d'attache du  $i$ ème segment au plateau. Les coordonnées

de ce point dans le repère mobile lié au plateau sont données par  $(p'_{ix}, p'_{iy}, p'_{iz})$ . Par ailleurs, les coordonnées cartésiennes de la plate-forme sont données par sa position et son orientation. Sa position est définie par la position du point  $O'$  exprimée dans le repère  $\mathcal{R}$  et notée  $(x, y, z)$ . Son orientation est définie pour sa part par l'orientation du repère  $\mathcal{R}'$ , attaché à la plate-forme, dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Soit  $\mathbf{Q}$  la matrice de rotation et  $\mathbf{r}$  le vecteur de translation permettant le passage du repère  $\mathcal{R}'$  au repère fixe  $\mathcal{R}$ . D'après cette modélisation, les coordonnées de la position du point  $P_i$  — le point d'articulation du  $i$ ème segment sur le plateau — exprimées dans le repère  $\mathcal{R}$  et notées  $(p_{ix}, p_{iy}, p_{iz})$ , sont données par

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r} + \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{p}_i = [p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}]^T$ ,  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  et  $\mathbf{p}'_i = [p'_{ix}, p'_{iy}, p'_{iz}]^T$ . En écrivant ces équations sous forme scalaire, on obtient

$$p_{ix} = x + q_{11}p'_{ix} + q_{12}p'_{iy} + q_{13}p'_{iz}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.2)$$

$$p_{iy} = y + q_{21}p'_{ix} + q_{22}p'_{iy} + q_{23}p'_{iz}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.3)$$

$$p_{iz} = z + q_{31}p'_{ix} + q_{32}p'_{iy} + q_{33}p'_{iz}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.4)$$

où  $q_{ij}$  désigne l'élément  $ij$  ( $i$ ème ligne,  $j$ ème colonne) de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Enfin, puisque la longueur du  $i$ ème segment est la distance entre les points  $P_i$  et  $B_i$ , on peut écrire

$$\rho_i^2 = (p_{ix} - b_{ix})^2 + (p_{iy} - b_{iy})^2 + (p_{iz} - b_{iz})^2, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.5)$$

ou sous forme vectorielle

$$\rho_i^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.6)$$

avec  $\mathbf{b}_i = [b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}]^T$ . Les équations (3.1) et (3.6) représentent donc la solution explicite du problème géométrique inverse puisque les coordonnées des actionneurs  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$  et  $\rho_6)$  y sont obtenues à partir des coordonnées cartésiennes du plateau  $(x, y, z, q_{11}, q_{12}, \dots, q_{33})$  et des paramètres dimensionnels du manipulateur  $(b_{ix}, b_{iy}, b_{iz})$  et  $(p'_{ix}, p'_{iy}, p'_{iz})$ , où  $i = 1, \dots, 6$ .

## 3.2 Matrices jacobiennes sous forme invariante

L'équation (3.6) est un système non-linéaire qui peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

qui est la relation souhaitée entre les variables d'entrée,  $x, y, z, q_{11}, q_{12}, \dots, q_{33}$ , et les variables de sortie  $\rho_1$  à  $\rho_6$ . On recherche maintenant les matrices jacobiennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  reliant les vitesses angulaires,  $\dot{\rho}_1$  à  $\dot{\rho}_6$ , aux vitesses cartésiennes de la plate-forme, soit le système d'équations

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (3.8)$$

avec

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\rho}_3, \dot{\rho}_4, \dot{\rho}_5, \dot{\rho}_6]^T \quad (3.9)$$

$$\mathbf{t} = [\dot{\mathbf{r}}^T, \boldsymbol{\omega}^T]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \quad (3.10)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  est le vecteur des vitesses angulaires de la plate-forme. Pour faire intervenir la vitesse angulaire de la plate-forme, on utilise la relation

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q} \quad (3.11)$$

dans laquelle on a

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{1} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On dérive alors les équations (3.1) et (3.6) par rapport au temps. On obtient ainsi

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{p}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.13)$$

$$\rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{p}}_i = (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{p}'_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.14)$$

Sachant que

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q} \quad (3.15)$$

l'équation (3.14) devient

$$\rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.16)$$

$$= (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.17)$$

Le second terme du membre de droite de cette dernière équation peut s'écrire

$$(\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i = (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i)], \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.18)$$

$$= [(\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)]^T \boldsymbol{\omega}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.19)$$

donc l'équation (3.17) devient

$$\rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{r}} + [(\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i)]^T \boldsymbol{\omega}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.20)$$

En assemblant les équations on obtient le système matriciel que l'on désire, soit

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (3.21)$$

où

$$\mathbf{B} = \text{Diag}[\rho_1, \dots, \rho_6] \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_6^T \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{a}_i$  est un vecteur de dimension six défini comme étant

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i) \\ (\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

De façon détaillée, les éléments de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  sont

$$a_{i1} = p_{ix} - b_{ix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.24)$$

$$a_{i2} = p_{iy} - b_{iy}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.25)$$

$$a_{i3} = p_{iz} - b_{iz}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.26)$$

$$a_{i4} = (p_{iz} - b_{iz})(q_{21}p'_{ix} + q_{22}p'_{iy} + q_{23}p'_{iz}) - (p_{iy} - b_{iy})(q_{31}p'_{ix} + q_{32}p'_{iy} + q_{33}p'_{iz}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.27)$$

$$a_{i5} = (p_{ix} - b_{ix})(q_{31}p'_{ix} + q_{32}p'_{iy} + q_{33}p'_{iz}) - (p_{iz} - b_{iz})(q_{11}p'_{ix} + q_{12}p'_{iy} + q_{13}p'_{iz}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.28)$$

$$a_{i6} = (p_{iy} - b_{iy})(q_{11}p'_{ix} + q_{12}p'_{iy} + q_{13}p'_{iz}) - (p_{ix} - b_{ix})(q_{21}p'_{ix} + q_{22}p'_{iy} + q_{23}p'_{iz}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.29)$$

où  $p_{ix}$ ,  $p_{iy}$  et  $p_{iz}$  sont définis d'après les équations (3.2) à (3.4). Il ne nous reste plus qu'à définir la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ . Pour définir l'orientation d'un corps solide dans l'espace, plusieurs représentations sont possibles. Parmi ces représentations, les deux qui sont les plus intéressantes pour nous sont la représentation par les invariants quadratiques et la représentation par les angles d'Euler.

### 3.2.1 Formulation à l'aide des invariants quadratiques

L'expression générale de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  décrivant l'orientation d'un corps rigide par rapport à un repère fixe est donnée par

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \cos \phi(\mathbf{1} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T) + \sin \phi(\mathbf{1} \times \mathbf{e}) \quad (3.30)$$

où

- $\mathbf{e}$  est un vecteur unitaire porté par l'axe de rotation;
- $\phi$  est l'angle de rotation du solide autour de cet axe;
- $\mathbf{1}$  est la matrice identité de dimension 3.

$\mathbf{1} \times \mathbf{e}$  est une matrice antisymétrique définie par

$$\mathbf{1} \times \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où  $e_x$ ,  $e_y$  et  $e_z$  sont les composantes du vecteur unitaire  $\mathbf{e}$ . Les invariants quadratiques de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  sont définis par

$$\mathbf{s} = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathbf{e}, \quad s_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3.32)$$

avec

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3]^T \quad (3.33)$$

Ces invariants sont connus sous le nom de paramètres d'Euler (ne pas confondre avec les angles d'Euler) pour la rotation (Hughes 1986). Ils sont groupés dans un vecteur  $\boldsymbol{\eta}$  de dimension quatre

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{s}^T, s_0]^T \quad (3.34)$$

définissant la rotation. Les quatre composantes de  $\boldsymbol{\eta}$  ne sont pas indépendantes et sont reliées par la relation suivante

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = 1 \quad (3.35)$$

c'est-à-dire

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_0^2 = 1 \quad (3.36)$$

Compte tenu des équations (3.30) et (3.32), l'expression de la matrice  $\mathbf{Q}$  en fonction des invariants quadratiques s'écrit

$$\mathbf{Q} = (2s_0^2 - 1)\mathbf{1} + 2\mathbf{s}\mathbf{s}^T + 2s_0(\mathbf{1} \times \mathbf{s}) \quad (3.37)$$

qui peut s'écrire, compte tenu de l'équation (3.32), sous la forme définitive suivante

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

avec

$$q_{11} = 2s_0^2 + 2s_1^2 - 1 \quad (3.39)$$

$$q_{12} = 2s_1s_2 - 2s_0s_3 \quad (3.40)$$

$$q_{13} = 2s_1s_3 + 2s_0s_2 \quad (3.41)$$

$$q_{21} = 2s_1s_2 + 2s_0s_3 \quad (3.42)$$

$$q_{22} = 2s_0^2 + 2s_2^2 - 1 \quad (3.43)$$

$$q_{23} = 2s_2s_3 - 2s_0s_1 \quad (3.44)$$

$$q_{31} = 2s_1s_3 - 2s_0s_2 \quad (3.45)$$

$$q_{32} = 2s_2s_3 + 2s_0s_1 \quad (3.46)$$

$$q_{33} = 2s_0^2 + 2s_3^2 - 1 \quad (3.47)$$

### 3.2.2 Formulation à l'aide des angles d'Euler

Les angles d'Euler peuvent être utilisés pour définir la matrice  $\mathbf{Q}$ . Leur principe repose sur le fait qu'une rotation arbitraire par rapport à un point fixe nécessite trois degrés de liberté. On décompose alors la rotation voulue en trois rotations successives. La matrice de rotation peut donc être écrite comme

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3 \quad (3.48)$$

En utilisant cette formulation, il est possible d'obtenir 12 conventions. Nous utilisons l'une de celles-ci soit le triplet d'angle d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  selon la convention  $(\mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_z)$ . La matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  a alors une expression similaire à celle de l'équation (3.38)

mais avec

$$q_{11} = \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \quad (3.49)$$

$$q_{12} = -\cos \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \quad (3.50)$$

$$q_{13} = \sin \theta \cos \phi \quad (3.51)$$

$$q_{21} = \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \quad (3.52)$$

$$q_{22} = -\cos \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \quad (3.53)$$

$$q_{23} = \sin \theta \sin \phi \quad (3.54)$$

$$q_{31} = -\sin \theta \cos \psi \quad (3.55)$$

$$q_{32} = \sin \theta \sin \psi \quad (3.56)$$

$$q_{33} = \cos \theta \quad (3.57)$$

D'après ces définitions, on ne peut pas a priori savoir quelle formulation est la plus souhaitable. Les angles d'Euler ont l'avantage de représenter les vrais angles de rotation alors que les termes de la matrice  $\mathbf{Q}$  des invariants quadratiques semblent un peu moins complexes. Nous allons donc utiliser successivement les deux formulations lors de notre étude. La matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  étant maintenant définie, on est prêt à calculer son déterminant.

### 3.3 Configurations singulières

Comme il a été spécifié au Chapitre 2, on s'intéresse ici aux singularités de type II, c'est-à-dire celles pour lesquelles la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est singulière, soit lorsque

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (3.58)$$

où  $\mathbf{A}$  est définie d'après les équations (3.22) et (3.24) à (3.29). La première approche utilisée est l'expansion directe du déterminant. Celui-ci est obtenu directement à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, en l'occurrence *Mathematica*. Les termes de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  sont alors programmés dans le logiciel et le calcul du déterminant est lancé. Malheureusement, aucune expression analytique du déterminant — donc des lieux de singularité — n'est obtenue compte tenu de la complexité de la matrice jacobienne et ce pour les deux types de formulation associés à la matrice  $\mathbf{Q}$ . En fait, le



temps maximum de calcul avait été fixé à une heure, ce qui nous semblait amplement suffisant. Ce résultat, puisqu'il en est un, peut provenir de deux causes: du logiciel *Mathematica* ou bien de la complexité des expressions.

Un des problèmes qui surgit lors de l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique comme *Mathematica* est que l'on ne connaît pas la façon dont il calcule les déterminants. Il est possible que l'algorithme qu'il utilise soit très complexe et qu'il ne soit pas approprié pour des matrices de dimensions  $6 \times 6$ . Ce que l'on sait cependant, d'après différents tests, c'est qu'il est capable de trouver assez facilement le déterminant de matrices de dimensions  $3 \times 3$ . On décompose ainsi le déterminant de la matrice  $6 \times 6$  jusqu'aux déterminants de matrices  $3 \times 3$ . La méthode utilisée est décrite en détail au Chapitre 5 et à l'Annexe A. Il s'agit de la décomposition du déterminant par l'utilisation des cofacteurs de la première ligne. Le déterminant d'une matrice de dimensions  $6 \times 6$  est ainsi scindé en 20 déterminants de matrices  $3 \times 3$ . L'implantation de cet algorithme n'apporte malheureusement pas plus de résultat et aucune expression n'est obtenue. Le problème provient donc de la complexité de la matrice jacobienne. Comme les expressions sont très difficiles à manipuler, le temps nécessaire à leur traitement est vraiment trop long. On devra donc, pour obtenir une expression du déterminant, recourir à l'insertion de quelques données numériques dans la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . On pourra ainsi avoir une idée de l'expression que l'on recherche. C'est ce qui est présenté à la sous-section qui suit.

### 3.3.1 Simplifications numériques

On cherche maintenant à connaître l'influence des éléments contenus dans la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  sur l'expansion de son déterminant. Nous allons donc insérer des données numériques pour les paramètres architecturaux, l'orientation de la plate-forme ainsi que sa position. L'analyse du temps de calcul et des résultats nous permettra ainsi de voir d'où vient la complexité dans l'expansion du déterminant.

$i$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$	$p'_{ix}$	$p'_{iy}$	$p'_{iz}$
1	92.58	99.64	0.00	30.00	73.00	50.10
2	152.58	50.36	7.00	98.22	-30.52	59.10
3	40.00	-130.00	-5.00	48.22	-62.48	45.10
4	-60.00	-160.00	3.00	-68.22	-82.48	42.10
5	-132.58	30.36	-8.00	-78.22	-10.52	54.10
6	-112.58	119.64	-4.00	-50.00	93.00	48.10

Tableau 3.1: Paramètres géométriques d'un manipulateur quelconque.

### 3.3.1.1 Points fixes

En premier lieu, on fixe seulement les paramètres géométriques du robot, soit les coordonnées  $(b_{ix}, b_{iy}, b_{iz})$  et  $(p'_{ix}, p'_{iy}, p'_{iz})$ . Les paramètres utilisés se trouvent au Tableau 3.1. La matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  dépend donc des coordonnées  $x, y, z$  ainsi que de l'orientation de la plate-forme  $(\phi, \theta, \psi$  ou bien  $s_0, s_1, s_2, s_3)$ . On essaie alors d'obtenir une expression analytique pour les lieux de singularité, mais sans succès. Les termes de la matrice jacobienne sont encore trop complexes et ce peu importe la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  choisie. On doit ainsi insérer d'autres données numériques.

### 3.3.1.2 Points et orientation fixes

En plus de fixer les paramètres géométriques, on fixe également l'orientation de la plate-forme. Les seules inconnues sont donc les coordonnées cartésiennes  $x, y$  et  $z$ . Pour déterminer l'orientation, on a le choix de spécifier les invariants quadratiques ou bien les angles d'Euler. La méthode choisie n'a aucune importance puisque la matrice  $\mathbf{Q}$  sera maintenant numérique. On choisit ainsi les angles d'Euler qui sont fixés arbitrairement. On prend

$$\phi = 22^\circ, \quad \theta = 30^\circ, \quad \psi = 48^\circ \quad (3.59)$$

En développant le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , on obtient un polynôme en  $x, y$  et  $z$  de degré 6 et les termes en  $x, y$  et  $z$  ont un degré maximum de 3. Cette expression peut être écrite sous la forme

$$A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0 \quad (3.60)$$

avec

$$A_1 = B_1y^2 + B_2y + B_3 \quad (3.61)$$

$$A_2 = B_4y^3 + B_5y^2 + B_6y + B_7 \quad (3.62)$$

$$A_3 = B_8y^3 + B_9y^2 + B_{10}y + B_{11} \quad (3.63)$$

$$A_4 = B_{12}y^3 + B_{13}y^2 + B_{14}y + B_{15} \quad (3.64)$$

et où

$$B_1 = C_1z + C_2 \quad (3.65)$$

$$B_2 = C_3z^2 + C_4z + C_5 \quad (3.66)$$

$$B_3 = C_6z^2 + C_7z + C_8 \quad (3.67)$$

$$B_4 = C_9z + C_{10} \quad (3.68)$$

$$B_5 = C_{11}z^2 + C_{12}z + C_{13} \quad (3.69)$$

$$B_6 = C_{14}z^3 + C_{15}z^2 + C_{16}z + C_{17} \quad (3.70)$$

$$B_7 = C_{18}z^3 + C_{19}z^2 + C_{20}z + C_{21} \quad (3.71)$$

$$B_8 = C_{22}z^2 + C_{23}z + C_{24} \quad (3.72)$$

$$B_9 = C_{25}z^3 + C_{26}z^2 + C_{27}z + C_{28} \quad (3.73)$$

$$B_{10} = C_{29}z^3 + C_{30}z^2 + C_{31}z + C_{32} \quad (3.74)$$

$$B_{11} = C_{33}z^3 + C_{34}z^2 + C_{35}z + C_{36} \quad (3.75)$$

$$B_{12} = C_{37}z^2 + C_{38}z + C_{39} \quad (3.76)$$

$$B_{13} = C_{40}z^3 + C_{41}z^2 + C_{42}z + C_{43} \quad (3.77)$$

$$B_{14} = C_{44}z^3 + C_{45}z^2 + C_{46}z + C_{47} \quad (3.78)$$

$$B_{15} = C_{48}z^3 + C_{49}z^2 + C_{50}z + C_{51} \quad (3.79)$$

Les coefficients  $C_i, i = 1, 2, \dots, 51$ , sont des constantes numériques qui dépendent des paramètres géométriques et de l'orientation. Pour le manipulateur et l'orientation choisis, ces coefficients varient de  $10^{17}$  à  $10^{-26}$ . On doit cependant interpréter avec précaution ces résultats puisqu'ils sont le fruit d'une procédure numérique. Des erreurs d'ordre numérique peuvent alors survenir, comme par exemple, la vraie valeur du coefficient  $10^{-26}$ . Est-ce zéro ou est-ce bien  $10^{-26}$ ? Néanmoins, ce qui nous intéresse ici est que l'on est capable de trouver une expression des lieux de singularité en fixant les paramètres géométriques du manipulateur ainsi que son orientation.

### 3.3.1.3 Points et positionnement fixes

Au lieu de fixer l'orientation de la plate-forme, on fixe maintenant le positionnement de celle-ci, soit les coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On obtiendra alors une expression qui dépendra des angles  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$  ou bien des invariants quadratiques  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  et  $s_0$ . La position de la plate-forme est fixée arbitrairement et est

$$x = 10, \quad y = -20, \quad z = 3 \quad (3.80)$$

On n'obtient malheureusement aucun résultat et ce pour les deux types de formulation associés à la matrice  $\mathbf{Q}$ . On en conclut que les termes provenant de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  complexifient énormément le calcul du déterminant. Une autre façon de s'en convaincre est de reprendre les données de la sous-section 3.3.1.2 mais en laissant un des paramètres d'orientation libre. Il est alors possible d'obtenir une expression pour le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ . Même si elle ne dépend que d'un seul paramètre d'orientation, l'équation ainsi obtenue est très complexe et s'étend sur plusieurs pages. Elle ne sera évidemment pas reproduite ici. L'utilisation de données numériques nous permet maintenant d'affirmer que la complexité de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  provient des éléments de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ .

## 3.4 Changement de repère

Lors de la dérivation des équations géométriques à la section 3.1, on a considéré des systèmes de référence tout à fait arbitraires, c'est-à-dire qu'ils étaient situés en des points quelconques de l'espace. On refait ici la même étude mais en plaçant maintenant les repères utilisés sur des points d'articulations. Comme on le constatera, ce changement de repère simplifiera l'expression de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  et par conséquent son déterminant.

Introduisons d'abord la notation utilisée pour établir les équations cinématiques (Figure 3.2). L'origine du système de coordonnées  $\mathcal{R}$  est maintenant localisée sur l'une des articulations fixes, désignée par  $B_1$ . De plus, ce système de coordonnées est orienté de telle sorte que l'axe des  $x$  passe par une autre articulation fixe, désignée par  $B_2$ . Finalement, on fait tourner le système d'axes autour de l'axe  $x$  de telle sorte que le

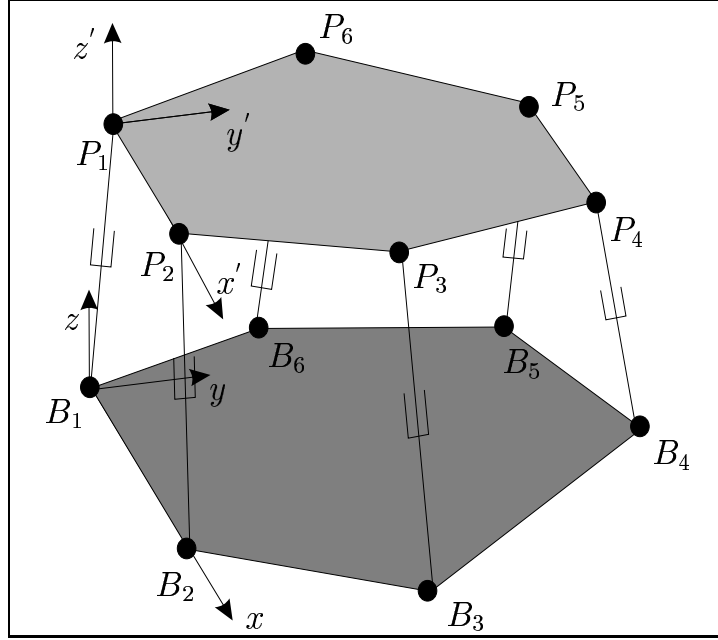


Figure 3.2: Notation simplifiée pour le manipulateur parallèle à six degrés de liberté.

point  $B_3$  se retrouve dans le plan  $xy$ . Ainsi, certaines coordonnées de ces points seront nulles et nous pouvons écrire, sans perte de généralité, que

$$b_{1x} = b_{1y} = b_{1z} = b_{2y} = b_{2z} = b_{3z} = 0 \quad (3.81)$$

De même, l'origine du repère mobile  $\mathcal{R}'$  est localisée sur l'une des articulations mobiles, soit le point  $P_1$ , l'axe des  $x'$  passe par une autre articulation mobile, soit  $P_2$  et le point  $P_3$  se retrouve dans le plan  $x'y'$ . On peut donc écrire

$$p'_{1x} = p'_{1y} = p'_{1z} = p'_{2y} = p'_{2z} = p'_{3z} = 0 \quad (3.82)$$

En utilisant les simplifications données ci-dessus, les six équations de boucle du manipulateur peuvent être obtenues en exprimant les longueurs des membres  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$  et  $\rho_6$  en fonction des coordonnées de la plate-forme mobile. On a donc

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.83)$$

$$\rho_2^2 = (p_{2x} - b_{2x})^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2 \quad (3.84)$$

$$\rho_3^2 = (p_{3x} - b_{3x})^2 + (p_{3y} - b_{3y})^2 + p_{3z}^2 \quad (3.85)$$

$$\rho_i^2 = (p_{ix} - b_{ix})^2 + (p_{iy} - b_{iy})^2 + (p_{iz} - b_{iz})^2, \quad i = 4, 5, 6 \quad (3.86)$$

On constate que les trois premières équations du problème géométrique inverse sont différentes. De ce fait, les trois premières lignes de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  seront

modifiées. En utilisant les équations (3.83) à (3.86) et en suivant la méthode présentée à la section 3.2, on obtient le système matriciel que l'on désire, soit

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (3.87)$$

avec les éléments suivants sur les trois premières lignes de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$

$$a_{11} = x, \quad a_{12} = y, \quad a_{13} = z, \quad a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0 \quad (3.88)$$

$$a_{21} = p_{2x} - b_{2x}, \quad a_{22} = p_{2y}, \quad a_{23} = p_{2z} \quad (3.89)$$

$$a_{24} = -(p_{2y} - b_{2y})q_{31}p'_{2x} + p_{2z}q_{21}p'_{2x} \quad (3.90)$$

$$a_{25} = (p_{2x} - b_{2x})q_{31}p'_{ix} - p_{2z}q_{11}p'_{2x} \quad (3.91)$$

$$a_{26} = -(p_{2x} - b_{2x})q_{21}p'_{ix} + p_{2y}q_{11}p'_{2x} \quad (3.92)$$

$$a_{31} = p_{3x} - b_{3x}, \quad a_{32} = p_{3y} - b_{3y}, \quad a_{33} = p_{3z} \quad (3.93)$$

$$a_{34} = p_{3z}(q_{21}p'_{3x} + q_{22}p'_{3y}) - (p_{3y} - b_{3y})(q_{31}p'_{3x} + q_{32}p'_{3y}) \quad (3.94)$$

$$a_{35} = (p_{3x} - b_{3x})(q_{31}p'_{3x} + q_{32}p'_{3y}) - p_{3z}(q_{11}p'_{3x} + q_{12}p'_{3y}) \quad (3.95)$$

$$a_{36} = (p_{3y} - b_{3y})(q_{11}p'_{3x} + q_{12}p'_{3y}) - (p_{3x} - b_{3x})(q_{21}p'_{3x} + q_{22}p'_{3y}) \quad (3.96)$$

Les équations  $a_{i1}$  à  $a_{i6}$ , avec  $i = 4, 5, 6$  sont exactement les mêmes que précédemment, soit les équations (3.24) à (3.29). On trouve les singularités de type II, c'est-à-dire celles pour lesquelles la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est singulière, de la même façon que précédemment, soit lorsque

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (3.97)$$

Malheureusement, même avec les simplifications dues au changement de repère les termes de la jacobienne  $\mathbf{A}$  sont trop complexes. L'obtention d'une expression analytique pour les lieux de singularité n'est pas possible et ce pour les deux types de formulation de la matrice  $\mathbf{Q}$ . En outre, on ne refait pas l'étude avec les données numériques puisque nous savons déjà que la complexité des équations provient des éléments de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ .

## 3.5 Conclusion

Ce chapitre nous a tout d'abord permis de dériver les équations du problème géométrique inverse ainsi que les équations de vitesse de la plate-forme de Gough-Stewart. On a

alors tenté d'obtenir une expression du déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Malheureusement, aucun résultat n'a été obtenu et ce même avec un modèle cinématique simplifié. Une étude a alors montré que la complexité dans le développement du déterminant provient des éléments de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ . Une approche moins directe permettant de contourner ce problème sera alors introduite dans le prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Deuxième approche: expansion semi-directe du déterminant

Le Chapitre 3 nous a permis de découvrir qu'il est impossible d'obtenir une expression simple et directe des lieux de singularité. En fait, si cela avait été le cas, elle serait déjà connue puisque plusieurs chercheurs s'intéressent depuis longtemps à la cinématique des mécanismes et en particulier aux configurations singulières. Ainsi, pour arriver à notre but il nous faudra dorénavant apporter des modifications — a priori des simplifications — à la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  dans le but de faciliter la dérivation du déterminant. Un autre point intéressant ressort du Chapitre 3: la complexité de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est causée en bonne partie par l'apparition des termes de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ . Ainsi, on utilisera maintenant une approche semi-directe pour le calcul du déterminant dans le sens où l'on apportera des modifications tout d'abord à la matrice  $\mathbf{Q}$  puis à la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  avant l'expansion de son déterminant.



## 4.1 Modèle de travail: matrice $\mathbf{Q}$

Le premier modèle de travail que l'on utilise est le suivant: on remplace les éléments  $q_{ij}$  de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  définis aux équations (3.39) à (3.47) ou (3.49) à (3.57) par des termes constants (coefficients). Ces modifications ne changent en rien notre étude, puisque nos deux objectifs sont d'obtenir une expression analytique et puis de représenter les lieux de singularité dans l'espace cartésien  $xyz$ . Ces deux objectifs seront atteints puisque l'on insère des coefficients uniquement dans les termes de rotation. On se retrouve alors avec la matrice de rotation

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

De ce fait, la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est moins complexe. Malheureusement, cette tentative n'a pas plus réussi que les autres. Aucune expression analytique décrivant les lieux de singularité n'est obtenue. La matrice  $\mathbf{A}$  demeure trop complexe.

## 4.2 Modèle de travail: matrice $\mathbf{A}$

On continue ici la même démarche que précédemment, c'est-à-dire que l'on insère des coefficients, mais cette fois dans la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . On ne fait que regrouper les éléments devant les variables cartésiennes qui restent, soit en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , sous forme de coefficients  $G_i$  à  $U_i$ . On réécrit alors chacun des éléments  $a_{ij}$  définis aux équations (3.24) à (3.29) sous la forme

$$a_{i1} = G_i + x, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.2)$$

$$a_{i2} = H_i + y, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.3)$$

$$a_{i3} = K_i + z, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.4)$$

$$a_{i4} = L_i y + M_i z + N_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.5)$$

$$a_{i5} = P_i x + Q_i z + R_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.6)$$

$$a_{i6} = S_i x + T_i y + U_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.7)$$

avec, après simplifications

$$G_i = q_{11}p'_{ix} + q_{12}p'_{iy} + q_{13}p'_{iz} - b_{ix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.8)$$

$$H_i = q_{21}p'_{ix} + q_{22}p'_{iy} + q_{23}p'_{iz} - b_{iy}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.9)$$

$$K_i = q_{31}p'_{ix} + q_{32}p'_{iy} + q_{33}p'_{iz} - b_{iz}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.10)$$

$$L_i = -(K_i + b_{iz}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.11)$$

$$M_i = H_i + b_{iy}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.12)$$

$$N_i = -b_{iy}L_i - b_{iz}M_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.13)$$

$$P_i = -L_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.14)$$

$$Q_i = -(G_i + b_{ix}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.15)$$

$$R_i = b_{ix}L_i - b_{iz}Q_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.16)$$

$$S_i = -M_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.17)$$

$$T_i = -Q_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.18)$$

$$U_i = b_{ix}M_i + b_{iy}Q_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.19)$$

On voit donc que les coefficients  $G_i$  à  $U_i$  ne dépendent que des paramètres architecturaux du manipulateur (coordonnées des points  $B_i$  et  $P_i$ ) ainsi que de l'orientation de celui-ci (éléments  $q_{ij}$ ).

### 4.2.1 Configurations singulières

En utilisant la formulation définie ci-dessus, il est possible de développer le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$  pour obtenir une expression polynomiale en  $x$ ,  $y$  et  $z$  qui représente les lieux de singularité dans l'espace cartésien pour une orientation donnée de la plateforme. Le polynôme ainsi obtenu est de degré 4 tandis que chacune des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  prise séparément a un degré maximal de 3. Cette expression peut être écrite sous la forme

$$A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0 \quad (4.20)$$

où les coefficients  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , sont des fonctions qui dépendent des coordonnées cartésiennes  $y$  et  $z$  du robot et sont exprimés par

$$A_1 = B_1y + B_2 \quad (4.21)$$

$$A_2 = B_3y^2 + B_4y + B_5 \quad (4.22)$$

$$A_3 = B_6y^3 + B_7y^2 + B_8y + B_9 \quad (4.23)$$

$$A_4 = B_{10}y^3 + B_{11}y^2 + B_{12}y + B_{13} \quad (4.24)$$

où les coefficients  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 13$ , ne dépendent que de la coordonnée cartésienne  $z$  du robot et sont à leur tour exprimés par

$$B_1 = C_1 \quad (4.25)$$

$$B_2 = C_2 z + C_3 \quad (4.26)$$

$$B_3 = C_4 \quad (4.27)$$

$$B_4 = C_5 z + C_6 \quad (4.28)$$

$$B_5 = C_7 z^2 + C_8 z + C_9 \quad (4.29)$$

$$B_6 = C_{10} \quad (4.30)$$

$$B_7 = C_{11} z + C_{12} \quad (4.31)$$

$$B_8 = C_{13} z^2 + C_{14} z + C_{15} \quad (4.32)$$

$$B_9 = C_{16} z^3 + C_{17} z^2 + C_{18} z + C_{19} \quad (4.33)$$

$$B_{10} = C_{20} z + C_{21} \quad (4.34)$$

$$B_{11} = C_{22} z^2 + C_{23} z + C_{24} \quad (4.35)$$

$$B_{12} = C_{25} z^3 + C_{26} z^2 + C_{27} z + C_{28} \quad (4.36)$$

$$B_{13} = C_{29} z^3 + C_{30} z^2 + C_{31} z + C_{32} \quad (4.37)$$

Les coefficients  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 32$ , sont des constantes (dépendent des paramètres architecturaux ainsi que de l'orientation de la plate-forme). La grosseur de ces constantes est cependant problématique. Les plus petites constantes ont 240 lignes chacune (720 termes), soit 4 pages, tandis que la constante la plus grande compte 2850 lignes (8550 termes), soit 48 pages. En fait, la longueur totale du déterminant est de 26 582 lignes, soit environ 440 pages. Il est alors évident que ces coefficients sont beaucoup trop grands et que leur traitement sera très difficile. On refait alors la même étude mais en simplifiant notre modèle cinématique.

### 4.3 Changement de repère

On utilise maintenant la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  définie à la section 3.4 (d'après les équations (3.88) à (3.96)), c'est-à-dire en plaçant les repères à certains points d'ancrage.

### 4.3.1 Modèle de travail: matrice $\mathbf{Q}$

De la même façon qu'à la section 4.1, on remplace les éléments  $q_{ij}$  de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  définis aux équations (3.39) à (3.47) ou (3.49) à (3.57) par des coefficients. La matrice a alors la forme de l'équation (4.1). On insère ces coefficients dans la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  puis on tente de développer son déterminant. Aucun résultat n'est obtenu car la matrice est toujours trop complexe.

### 4.3.2 Modèle de travail: matrice $\mathbf{A}$

On regroupe les éléments devant les variables cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sous forme de coefficients  $G_i$  à  $U_i$  comme à la section 4.2. Les éléments  $a_{ij}$  sont réécrits sous la forme

$$a_{i1} = G_i + x, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.38)$$

$$a_{i2} = H_i + y, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.39)$$

$$a_{i3} = K_i + z, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.40)$$

$$a_{i4} = L_i y + M_i z + N_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.41)$$

$$a_{i5} = P_i x + Q_i z + R_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.42)$$

$$a_{i6} = S_i x + T_i y + U_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.43)$$

qui est la même qu'aux équations (4.2) à (4.7), mais avec

$$G_1 = H_1 = K_1 = \dots = T_1 = U_1 = 0 \quad (4.44)$$

et puis,

$$G_2 = q_{11} p'_{2x} - b_{2x} \quad (4.45)$$

$$H_2 = q_{21} p'_{2x} \quad (4.46)$$

$$K_2 = q_{31} p'_{2x} \quad (4.47)$$

$$L_2 = -K_2 \quad (4.48)$$

$$M_2 = H_2 \quad (4.49)$$

$$N_2 = 0 \quad (4.50)$$

$$P_2 = -L_2 \quad (4.51)$$

$$Q_2 = -(G_2 + b_{2x}) \quad (4.52)$$

$$R_2 = b_{2x}L_2 \quad (4.53)$$

$$S_2 = -M_2 \quad (4.54)$$

$$T_2 = -Q_2 \quad (4.55)$$

$$U_2 = b_{2x}M_2 \quad (4.56)$$

et

$$G_3 = q_{11}p'_{3x} + q_{12}p'_{3y} - b_{3x} \quad (4.57)$$

$$H_3 = q_{21}p'_{3x} + q_{22}p'_{3y} - b_{3y} \quad (4.58)$$

$$K_3 = q_{31}p'_{3x} + q_{32}p'_{3y} \quad (4.59)$$

$$L_3 = -K_3 \quad (4.60)$$

$$M_3 = H_3 + b_{3y} \quad (4.61)$$

$$N_3 = -b_{3y}L_3 \quad (4.62)$$

$$P_3 = -L_3 \quad (4.63)$$

$$Q_3 = -(G_3 + b_{3x}) \quad (4.64)$$

$$R_3 = b_{3x}L_3 \quad (4.65)$$

$$S_3 = -M_3 \quad (4.66)$$

$$T_3 = -Q_3 \quad (4.67)$$

$$U_3 = b_{3x}M_3 + b_{3y}Q_3 \quad (4.68)$$

Les termes  $G_i$  à  $U_i$ , avec  $i = 4, 5, 6$  sont exactement les mêmes que ceux présentés aux équations (4.8) à (4.19).

#### 4.3.2.1 Configurations singulières

En développant le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , on obtient également un polynôme en  $x, y, z$  de degré 4 où les termes en  $x, y$  et  $z$  ont un degré maximum de 3. Cette expression peut être écrite sous la même forme que précédemment, soit les équations (4.20), (4.21) à (4.24) ainsi que (4.25) à (4.37). Le type d'expression obtenu pour représenter les singularités de type II est donc le même indépendamment du modèle cinématique utilisé. En fait, l'utilisation d'un système de coordonnées qui simplifie la matrice jacobienne se répercute sur les coefficients  $C_i, i = 1, 2, \dots, 32$ . Les

plus petites constantes ont maintenant 30 lignes chacune (120 termes), soit une demi-page, tandis que la constante la plus grande compte 360 lignes (1080 termes), soit 6 pages. La longueur totale du déterminant est ainsi réduite à environ 55 pages, au lieu des 440 que l'on avait précédemment. Malgré le fait que ceci représente une réduction significative par rapport au cas général, ce résultat est toujours trop long et beaucoup trop complexe spécialement dans un contexte d'analyse cinématique en temps réel où cette procédure doit être répétée plusieurs fois.

## 4.4 Conclusion

En sachant que la complexité provenait de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ , notre deuxième approche a été d'apporter successivement des modifications à la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  et à la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  avant de développer son déterminant. On a alors regroupé sous forme de coefficients les termes devant les variables  $xyz$  dans la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Contrairement à notre première approche — l'expansion directe — l'expansion semi-directe nous a permis d'obtenir une expression analytique pour la représentation des singularités de type *II*. Le développement du déterminant de  $\mathbf{A}$  donne une équation polynomiale de degré 4 en  $xyz$  où les termes  $x$ ,  $y$  et  $z$  ont un degré maximal de 3. La longueur de cette expression est de 450 pages pour le cas général et de 55 pages pour le cas simplifié. Cependant, cette expression demeure beaucoup trop longue pour l'utilisation d'outils informatiques interactifs. Une troisième approche encore plus efficace est alors introduite dans le prochain chapitre.

# Chapitre 5

## Troisième approche: expansion cascadée du déterminant

Le but de ce chapitre est de réduire la taille — et ainsi le temps de calcul — de l'expression obtenue pour le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Comme il a été spécifié dans le Chapitre 3, l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique comme *Mathematica* ne nous permet pas de contrôler l'algorithme qui est utilisé pour calculer le déterminant. Ainsi, un algorithme sera développé spécialement pour nos besoins. La méthode consiste à décomposer le déterminant par les cofacteurs de la première ligne. L'avantage d'utiliser cette méthode est que l'expansion du déterminant est ainsi divisée en plusieurs étapes, lesquelles permettent des simplifications intermédiaires. Regardons plus en détail ce que nous entendons par décomposition selon les cofacteurs de la première ligne.

**Définition 5.1** *Le déterminant de la matrice carrée  $\mathbf{A}$ , de dimensions  $n \times n$ , peut être développé comme une combinaison des éléments de la  $i$ ème ligne et des cofacteurs de la ligne  $i$ , c'est-à-dire*

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}\mathbf{M}_{i1} + a_{i2}\mathbf{M}_{i2} + \dots + a_{in}\mathbf{M}_{in} \quad (5.1)$$

où les cofacteurs  $\mathbf{M}_{ij}$  sont le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_{ij}$  avec le signe approprié, c'est-à-dire,

$$\mathbf{M}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad (5.2)$$

et où la matrice  $\mathbf{A}_{ij}$  est formée en enlevant la  $i$ ème ligne et la  $j$ ème colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ .

Cette définition exprime donc le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  comme une combinaison de déterminants de dimension  $(n - 1)$ . Suivant ces équations, le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  de dimensions  $6 \times 6$  développé en utilisant la première ligne est alors écrit comme,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = & a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} \det(\mathbf{A}_{13}) - \\ & a_{14} \det(\mathbf{A}_{14}) + a_{15} \det(\mathbf{A}_{15}) - a_{16} \det(\mathbf{A}_{16}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

où, par exemple, la matrice  $\mathbf{A}_{11}$  est obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ . Ainsi, six déterminants de dimensions  $5 \times 5$  doivent maintenant être calculés. Comme la dimension de ces matrices est encore trop grande, on applique de nouveau la décomposition par les cofacteurs de la première ligne. Les matrices de dimensions  $5 \times 5$  sont ainsi décomposées en matrices de dimensions  $4 \times 4$ . Cette méthode est en fait appliquée jusqu'à ce que des matrices de dimensions  $3 \times 3$  soient obtenues (pour les détails de cette décomposition, se référer à l'Annexe A). À ce niveau, il est possible d'obtenir une expression pour le déterminant de ces matrices de dimensions  $3 \times 3$ . Cette expression est par la suite réécrite sous forme polynomiale en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , comme on l'a fait précédemment avec la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Prenons un exemple pour mieux comprendre l'insertion de ces coefficients.



## 5.1 Exemple d'insertion de coefficients

Comme exemple, soit la matrice  $3 \times 3$  associée aux lignes 4, 5, et 6 et aux colonnes 3, 4 et 5. Elle est définie par

$$\mathbf{A}_{345} = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_4 + z) & (L_4y + M_4z + N_4) & (P_4x + Q_4z + R_4) \\ (K_5 + z) & (L_5y + M_5z + N_5) & (P_5x + Q_5z + R_5) \\ (K_6 + z) & (L_6y + M_6z + N_6) & (P_6x + Q_6z + R_6) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Son déterminant, en insérant des coefficients devant les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ , est alors écrit comme

$$\det(\mathbf{A}_{345}) = F_1 + F_2x + F_3y + F_4xy + F_5z + F_6xz + F_7yz + F_8xyz + F_9z^2 + F_{10}xz^2 + F_{11}yz^2 + F_{12}z^3 \quad (5.5)$$

avec les coefficients  $F_i, i = 1, \dots, 12$ , suivants

$$F_1 = -K_6N_5R_4 + K_5N_6R_4 + K_6N_4R_5 - K_4N_6R_5 - K_5N_4R_6 + K_4N_5R_6 \quad (5.6)$$

$$F_2 = -K_6N_5P_4 + K_5N_6P_4 + K_6N_4P_5 - K_4N_6P_5 - K_5N_4P_6 + K_4N_5P_6 \quad (5.7)$$

$$F_3 = -K_6L_5R_4 + K_5L_6R_4 + K_6L_4R_5 - K_4L_6R_5 - K_5L_4R_6 + K_4L_5R_6 \quad (5.8)$$

$$F_4 = -K_6L_5P_4 + K_5L_6P_4 + K_6L_4P_5 - K_4L_6P_5 - K_5L_4P_6 + K_4L_5P_6 \quad (5.9)$$

$$F_5 = -N_5R_4 + N_6R_4 + N_4R_5 - N_6R_5 - N_4R_6 + N_5R_6 - K_6N_5Q_4 + K_5N_6Q_4 + K_6N_4Q_5 - K_4N_6Q_5 - K_5N_4Q_6 + K_4N_5Q_6 - K_6M_5R_4 + K_5M_6R_4 + K_6M_4R_5 - K_4M_6R_5 - K_5M_4R_6 + K_4M_5R_6 \quad (5.10)$$

$$F_6 = -K_6M_5P_4 + K_5M_6P_4 - N_5P_4 + N_6P_4 + K_6M_4P_5 - K_4M_6P_5 + N_4P_5 - N_6P_5 - K_5M_4P_6 + K_4M_5P_6 - N_4P_6 + N_5P_6 \quad (5.11)$$

$$F_7 = -K_6L_5Q_4 + K_5L_6Q_4 + K_6L_4Q_5 - K_4L_6Q_5 - K_5L_4Q_6 + K_4L_5Q_6 - L_5R_4 + L_6R_4 + L_4R_5 - L_6R_5 - L_4R_6 + L_5R_6 \quad (5.12)$$

$$F_8 = -L_5P_4 + L_6P_4 + L_4P_5 - L_6P_5 - L_4P_6 + L_5P_6 \quad (5.13)$$

$$F_9 = -K_6M_5Q_4 + K_5M_6Q_4 - N_5Q_4 + N_6Q_4 + K_6M_4Q_5 - K_4M_6Q_5 + N_4Q_5 - N_6Q_5 - K_5M_4Q_6 + K_4M_5Q_6 - N_4Q_6 + N_5Q_6 - M_5R_4 + M_6R_4 + M_4R_5 - M_6R_5 - M_4R_6 + M_5R_6 \quad (5.14)$$

$$F_{10} = -M_5P_4 + M_6P_4 + M_4P_5 - M_6P_5 - M_4P_6 + M_5P_6 \quad (5.15)$$

$$F_{11} = -L_5Q_4 + L_6Q_4 + L_4Q_5 - L_6Q_5 - L_4Q_6 + L_5Q_6 \quad (5.16)$$

$$F_{12} = -M_5Q_4 + M_6Q_4 + M_4Q_5 - M_6Q_5 - M_4Q_6 + M_5Q_6 \quad (5.17)$$

L'expression du déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_{345}$  est ainsi considérablement simplifiée. On se retrouve avec une équation de deux lignes (équation (5.5)) alors que l'expression au long comporte une vingtaine de lignes. On voit donc qu'en suivant la procédure décrite ci-haut, l'expression du déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  de dimensions  $6 \times 6$  sera simplifiée considérablement puisque chaque coefficient  $F_i$  est multiplié plusieurs fois dans le calcul de son déterminant. Regardons maintenant en quoi consiste l'algorithme de travail.

## 5.2 Algorithme de travail

En partant d'une matrice de dimensions  $6 \times 6$ , 6 matrices différentes de dimensions  $5 \times 5$  sont trouvées (équation (5.3)). De ces 6 matrices, on en trouve 15 de dimensions  $4 \times 4$  lesquelles conduisent à 20 matrices de dimensions  $3 \times 3$ . On peut ainsi représenter l'algorithme par quatre étapes, soit la détermination des matrices de dimensions  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$  et  $6 \times 6$ . À chacune de ces étapes, on insérera de nouveaux coefficients. Les coefficients de la matrice  $6 \times 6$  sont les termes  $C_i$ . Les coefficients des matrices  $5 \times 5$  seront donc  $D_i$ , ceux des matrices  $4 \times 4$   $E_i$  et finalement  $F_i$  seront les coefficients des matrices  $3 \times 3$ . Ainsi, l'expression de chacun des coefficients  $C_i$  sera beaucoup plus simple. En fait, elle dépendra des coefficients  $D_i$ ,  $E_i$  et  $F_i$ . Rappelons que dans le chapitre précédent, les coefficients  $C_i$  dépendaient des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  et avaient entre 4 et 79 pages. Regardons plus en détail chacune des quatre étapes.

**Première étape:** *Développement du déterminant des 20 matrices de dimensions  $3 \times 3$ .* En trouvant le déterminant d'une matrice  $3 \times 3$ , on obtient un polynôme de degré 3 qui dépend des coefficients  $G_i$  à  $U_i$ , avec  $i = 4, 5, 6$ . On insère alors des coefficients  $F_i$  à l'intérieur des polynômes, comme illustré aux équations (5.5) à (5.17). Avec les 20 déterminants à trouver, on introduit 201 coefficients  $F_i$ . Chaque coefficient a entre 6 et 18 termes et leur expression est donnée à l'Annexe B. Les 20 déterminants de dimensions  $3 \times 3$  sont donc tous écrits sous la forme de l'équation (5.5).

**Deuxième étape:** *Développement du déterminant des 15 matrices de dimensions  $4 \times 4$ .* On trouve maintenant les déterminants des 15 différentes matrices de dimensions  $4 \times 4$ . Comme on a utilisé la décomposition par cofacteurs de la première ligne, ces différents

déterminants dépendront de la troisième ligne, soit des coefficients  $G_3$  à  $U_3$ , et des déterminants des matrices de dimensions  $3 \times 3$ , soit les coefficients  $F_1$  à  $F_{201}$ . On insère alors les coefficients  $E_i$  à l'intérieur des polynômes devant les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Il en résulte que 243 de ces coefficients sont définis. Ils ont entre 4 et 11 termes et leur expression est donnée à l'Annexe C. Les 15 déterminants de dimensions  $4 \times 4$  sont donc tous écrits sous la forme de l'équation (5.5) mais avec des coefficients  $E_i$ .

**Troisième étape:** *Développement du déterminant des 6 matrices de dimensions  $5 \times 5$ .* On est rendu aux matrices de dimensions  $5 \times 5$  et la procédure demeure toujours la même. On trouve leur déterminant à l'aide de la deuxième ligne et des déterminants des matrices  $4 \times 4$ . Le polynôme obtenu dépend alors des coefficients  $G_2$  à  $U_2$  et de  $E_1$  à  $E_{243}$ . On insère ainsi 141 coefficients  $D_i$  à l'intérieur des polynômes. Ils ont entre 5 et 13 termes et leur expression est donnée à l'Annexe D. Les 6 déterminants de dimensions  $5 \times 5$  sont donc tous écrits sous la forme de l'équation (5.5) mais avec des coefficients  $D_i$ .

**Quatrième étape:** *Développement du déterminant de la matrice  $6 \times 6$ .*

Il ne reste maintenant que le déterminant de la matrice de dimensions  $6 \times 6$ . On obtient alors un polynôme qui dépend des coefficients  $G_1$  à  $U_1$  et de  $D_1$  à  $D_{141}$  (déterminants des matrices  $5 \times 5$ ). On insère alors les coefficients  $C_i$  à l'intérieur du polynôme. Ainsi, 32 coefficients sont introduits et ils ont entre 6 et 15 termes. Leur expression est donnée à l'Annexe E.

### 5.3 Résultats

En développant le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  selon l'algorithme présenté à la section précédente, un polynôme en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de degré 4 est obtenu. Les termes en  $x$ ,  $y$  et  $z$  pris séparément ont quant à eux un degré maximum de 3. Cette expression peut être écrite sous la forme

$$A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0 \quad (5.18)$$

où les coefficients  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , sont des fonctions qui dépendent des coordonnées cartésiennes  $y$  et  $z$  du robot, et sont donnés par:

$$A_1 = B_1 y + B_2 \quad (5.19)$$

$$A_2 = B_3y^2 + B_4y + B_5 \quad (5.20)$$

$$A_3 = B_6y^3 + B_7y^2 + B_8y + B_9 \quad (5.21)$$

$$A_4 = B_{10}y^3 + B_{11}y^2 + B_{12}y + B_{13} \quad (5.22)$$

où les coefficients  $B_i, i = 1, 2, \dots, 13$ , ne dépendent que de la coordonnée cartésienne  $z$  du robot, et sont

$$B_1 = C_1 \quad (5.23)$$

$$B_2 = C_2z + C_3 \quad (5.24)$$

$$B_3 = C_4 \quad (5.25)$$

$$B_4 = C_5z + C_6 \quad (5.26)$$

$$B_5 = C_7z^2 + C_8z + C_9 \quad (5.27)$$

$$B_6 = C_{10} \quad (5.28)$$

$$B_7 = C_{11}z + C_{12} \quad (5.29)$$

$$B_8 = C_{13}z^2 + C_{14}z + C_{15} \quad (5.30)$$

$$B_9 = C_{16}z^3 + C_{17}z^2 + C_{18}z + C_{19} \quad (5.31)$$

$$B_{10} = C_{20}z + C_{21} \quad (5.32)$$

$$B_{11} = C_{22}z^2 + C_{23}z + C_{24} \quad (5.33)$$

$$B_{12} = C_{25}z^3 + C_{26}z^2 + C_{27}z + C_{28} \quad (5.34)$$

$$B_{13} = C_{29}z^3 + C_{30}z^2 + C_{31}z + C_{32} \quad (5.35)$$

et où les coefficients  $C_i, i = 1, 2, \dots, 32$ , sont des constantes. Ainsi, le résultat est un polynôme de degré 4 fonction de  $x, y$  et  $z$  obtenu à partir d'une cascade de 617 coefficients ( $C_i, D_i, E_i$  et  $F_i$ ). La longueur de chaque coefficient est acceptable (maximum 3 lignes) tandis que la longueur totale de tous les coefficients, donc du déterminant, est de 13 pages. Souvenons-nous que la longueur était de 450 pages avant l'expansion cascadiée (section 4.2.1). Cette réduction significative de la longueur est due au fait qu'avec un algorithme *maison*, il est possible de simplifier les expressions à chaque étape de l'expansion du déterminant. Il s'en suit une importante réduction du temps de calcul, rendant maintenant possible l'utilisation de programme interactif. En fait, le calcul des coefficients  $C_i$  du polynôme nécessite 4810 multiplications et 4234 additions-soustractions, ce qui est bien peu compte tenu des ordinateurs et des contrôleurs utilisés aujourd'hui.

## 5.4 Changement de repère

De la même façon que précédemment, on refait l'étude mais avec le modèle cinématique simplifié. L'algorithme de travail présenté à la section 5.2 est exactement le même à l'exception que l'on utilise maintenant les équations définies à la section 4.3.2 pour l'expression de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . En développant le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$  selon l'algorithme présenté précédemment, l'équation polynomiale reste naturellement la même puisque l'on avait démontré à la section 4.3.2.1 que le type d'expression obtenu pour représenter les singularités de type II est le même indépendamment du modèle cinématique utilisé. Les changements se répercutent au niveau des coefficients. En fait, quelques coefficients  $C_i$  et  $D_i$  sont maintenant égaux à zéro. Par conséquent, l'utilisation du cas simplifié n'est pas justifiée si on tient compte du peu de simplifications qu'il apporte. On utilisera donc le cas général pour le reste de notre étude.

## 5.5 Étude de l'expression polynomiale

Plusieurs points marquants ressortent de notre expression polynomiale. Le plus important est sans contredit que ce polynôme est minimal. Pour s'en assurer, chacun des coefficients  $C_i$  de l'expression finale a été développé au long, c'est-à-dire explosé jusqu'à ce qu'il dépende des termes  $G_i$  à  $U_i$  de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Par cette méthode, on est revenu aux expressions obtenues dans le Chapitre 4. À vrai dire, sans cette vérification, le polynôme normalement obtenu par l'expansion cascadiée est de degré 6 alors que les termes  $x$ ,  $y$  et  $z$  ont un degré maximal de 4 (comme au Chapitre 3, section 3.3.1.2). Ceci vient du fait qu'en insérant nos coefficients à chacune des étapes, certaines simplifications analytiques n'étaient plus possibles. Le développement au long des coefficients  $C_i$  nous permet donc de retomber sur l'expression minimale, c'est-à-dire de degré 4.

Un autre point très important est que cette équation polynomiale est valide pour n'importe quelle matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (G_1 + x) & (H_1 + y) & (K_1 + z) & (L_1 y + M_1 z + N_1) & (P_1 x + Q_1 z + R_1) & (S_1 x + T_1 y + U_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

En effet, lors du développement du déterminant par l'expansion cascadée, nous avons utilisé la matrice jacobienne telle que définie à l'équation (5.36). L'expression est donc toujours bonne peu importe la définition des termes  $G_i$  à  $U_i$ . Au meilleur de notre connaissance, les seules architectures pour lesquelles cette équation s'applique sont celles construites selon le mécanisme de la plate-forme de Gough-Stewart. Comme nous n'avons pas fait d'étude exhaustive sur ce sujet, nous ne pouvons tirer de fortes conclusions mais nous considérons que notre expression puisse servir éventuellement à d'autres types de mécanismes.

Finalement, le dernier point sur lequel une attention est portée est le degré des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Avec un degré maximum de 3 en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , il sera possible de déterminer de façon analytique les racines du polynôme. En effet, il est bien connu qu'une expression polynomiale de degré 3 possède des racines analytiques. Cet avantage est énorme. Tout d'abord il nous sera possible de représenter graphiquement les différentes racines de l'équation du déterminant. Comme il a été spécifié au Chapitre 2, la connaissance des lieux de singularité dans l'espace de travail est nécessaire pour ne pas perdre la rigidité naturelle des mécanismes. D'autre part, le fait d'avoir les racines analytiques nous indique clairement quelles sont les configurations singulières. Dans un esprit d'optimisation, il pourrait être possible d'utiliser la dérivée de ces expressions dans l'espoir de les minimiser ou bien de les utiliser comme fonction potentielle dans un algorithme d'optimisation. Enfin, avec un degré de trois, nous sommes aussi en mesure d'affirmer que nous posséderons en tout temps au moins une racine réelle, ce qui suppose l'existence de configurations singulières.

A l'aide de tous ces résultats, nous énonçons donc le théorème suivant:

**Théorème 5.1** *L'ensemble des lieux de singularité de type II de tout manipulateur parallèle dont la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  s'écrit sous la forme de l'équation (5.36) est représenté par une équation polynomiale minimale en  $xyz$  de degré maximal de 4, alors que le degré maximal des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  prises séparément est de 3.*

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre nous a finalement permis d'obtenir une expression de grandeur *raisonnable* pour la représentation des lieux de singularité de type II. Les deux premières approches — expansion directe et semi-directe du déterminant — n'ayant pas donné de résultats satisfaisants, une troisième approche — expansion cascadée du déterminant — a été utilisée, soit le développement du déterminant selon les cofacteurs de la première ligne. On se retrouve alors avec un polynôme en  $xyz$  de degré maximal de 4, alors que les variables prises séparément ont un degré maximal de 3. Ce polynôme a 13 pages et a été obtenu à partir d'une cascade de 617 coefficients ( $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  et  $F_i$ ). Tel qu'exprimé dans le théorème 5.1, ce résultat est valide pour tout manipulateur parallèle dont la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  peut être écrite sous la forme de l'équation (5.36). Nous allons donc nous intéresser aux différents types d'architecture — donc aux définitions des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  — reliés à la plate-forme de Gough-Stewart et pour lesquels notre expression s'applique. Le chapitre suivant présente ces différents types d'architecture.

# Chapitre 6

## Application à différents types d'architectures

On a vu au Chapitre 5 ainsi qu'au Chapitre 4 que les lieux de singularités étaient représentés par un polynôme de degré 4 en  $xyz$ . Par ailleurs, ce résultat était fonction des coefficients  $G_i$  à  $U_i$ . On veut donc savoir maintenant quel effet aura la définition de ces coefficients sur l'expression des lieux de singularité. On élargit ainsi notre étude sur différents types d'architectures de manipulateurs parallèles spatiaux à six degrés de liberté. Comme chaque mécanisme a une définition des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  qui lui est propre, l'expression représentant les lieux de singularité de type *II* risque d'être différente pour chacun d'eux. On veut voir de quelle façon l'expression se modifiera et surtout remarquer si le nombre de racines du polynôme (c'est-à-dire le degré des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) changera. Le nombre de racines augmente évidemment le nombre de configurations singulières. Il est certain que l'on ne peut pas garantir la diminution



ou l'élimination des configurations singulières dans **l'espace de travail** par le simple fait que le nombre de racine soit plus petit, mais il est possible de garantir que le **nombre total** de singularités sera moindre. Si le nombre de racines diminue, il y aura diminution du nombre de configurations singulières pour des valeurs fixes d'un certain nombre de variables cartésiennes.

## 6.1 Plate-forme de Gough-Stewart

Le premier mécanisme que l'on étudie est tout simplement l'architecture présentée au Chapitre 3 pour établir nos équations cinématiques: la plate-forme de Gough-Stewart sous sa forme la plus générale. Les points situés à la base et à la plate-forme sont localisés de façon générale en trois dimensions. On utilise alors les définitions des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  établies aux équations (4.8) à (4.19). En les insérant dans l'expression représentant les lieux de singularité (section 5.3), on se retrouve maintenant avec un polynôme de degré 3, au lieu de 4 comme auparavant. Le degré des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  demeure cependant de 3. On a donc diminué le degré total du polynôme mais le nombre de racines demeure le même, soit 3. Il en résulte que quelques coefficients intermédiaires sont égaux à zéro (512 coefficients non nuls restent comparativement à 617), mais le nombre de racines du polynôme demeure le même. Comme la réécriture de 512 coefficients est trop honéreuse, on indique à l'Annexe F les coefficients qui sont nuls. Ainsi, on pourra utiliser les coefficients définis aux Annexes B à E pour ce type de plate-forme mais en enlevant les coefficients qui sont maintenant nuls. Nous énonçons ainsi un deuxième théorème.

**Théorème 6.1** *L'ensemble des lieux de singularité de type II de la plate-forme de Gough-Stewart d'architecture générale est représenté par une équation polynomiale minimale en  $xyz$  de degré maximal de 3, alors que le degré maximal des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  prises séparément est également de 3.*

## 6.2 Base coplanaire

On entend par base coplanaire une architecture pour laquelle tous les points sur la base du mécanisme sont dans le même plan, alors que ceux sur la plate-forme demeurent localisés arbitrairement en trois dimensions. Il faut noter que tous les mécanismes connus de l'auteur sont faits, en tout ou en partie, de cette architecture. En regardant de nouveau tous les exemples d'applications présentés dans le Chapitre 1 (Figure 1.5 et 1.6), on se rend compte que les points sur la base sont toujours dans le même plan (souvent le plancher). Pour retrouver l'équation des lieux de singularité, on utilise encore les définitions des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  établies aux équations (4.8) à (4.19), mais cette fois avec

$$b_{1z} = b_{2z} = \dots = b_{6z} \quad (6.1)$$

Le résultat est plutôt intéressant: l'équation représentant les lieux de singularité pour ce type d'architecture est encore un polynôme de degré 3, mais les variables  $x$  et  $y$  ont maintenant un degré maximal de 2 tandis que la variable  $z$  demeure de degré 3. Le nombre de racines en  $x$  et  $y$  devient donc 2. La réduction du nombre de racines du polynôme représentant les lieux de singularité se traduit ainsi par une diminution des configurations singulières pour cette architecture. Un troisième théorème peut ainsi être énoncé.

**Théorème 6.2** *L'ensemble des lieux de singularité de type II de la plate-forme de Gough-Stewart dont les points sur la base sont coplanaires est représenté par une équation polynomiale minimale en  $xyz$  de degré maximal de 3, alors que le degré maximal des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  prises séparément est respectivement de 2, 2 et 3.*

## 6.3 Architecture du type SSM

Le terme SSM provient de la nomenclature employée dans les différents articles et rapports traitant des manipulateurs parallèles (voir entre autres Merlet(1988, 1989, 1990)). Il s'agit de l'acronyme des termes anglais *Simplified Symmetric Manipulator*. Il est vrai que la traduction française de ce terme aurait pu être faite, mais cet acronyme est abondamment employé dans le domaine et ce même en français où il est d'ores et

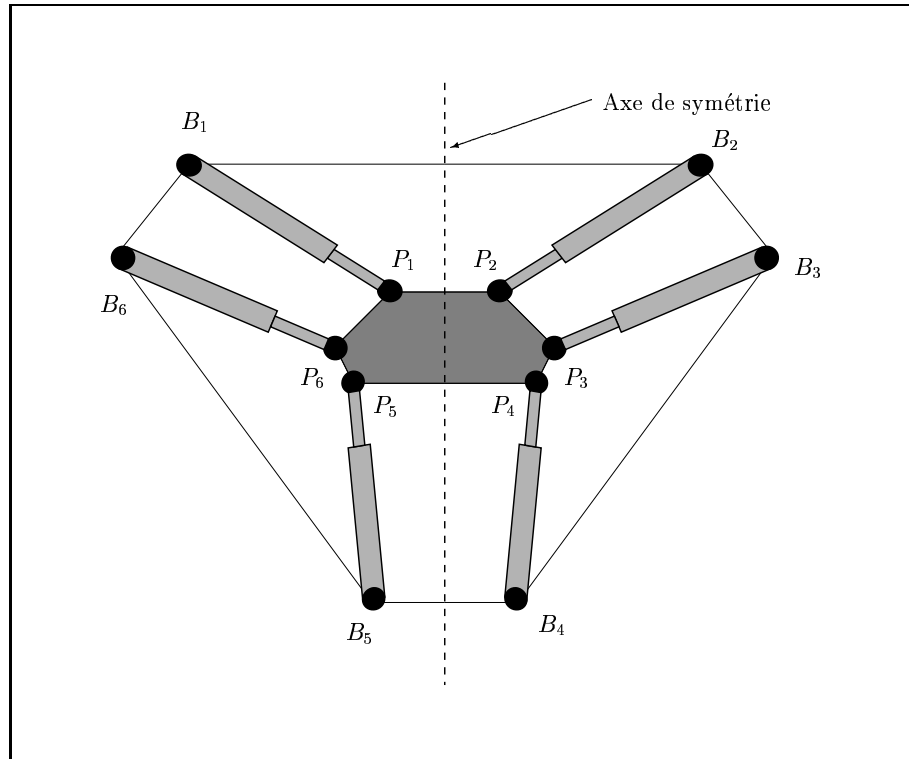


Figure 6.1: Architecture du type SSM (vue du dessus).

déjà très bien accepté ainsi. Ce type d'architecture comporte deux caractéristiques, soit que

- la base et la plate-forme sont toutes les deux coplanaires;
- la base et la plate-forme sont symétriques par rapport à un axe.

Un exemple de cette architecture est montré à la Figure 6.1. Il faut noter que ce type d'architecture est présentement le plus utilisé dans le monde. La majorité des simulateurs de vol sont construits de cette façon ainsi que de nombreux prototypes servant à la recherche.

Pour retrouver le polynôme qui nous intéresse, les valeurs suivantes sont utilisées pour les différents points d'ancrages de la plate-forme et de la base.

$$\left( \begin{array}{ll} \mathbf{b}_1 = [b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_1 = [p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_2 = [-b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_2 = [-p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_3 = [b_{3x}, b_{3y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_3 = [p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_4 = [b_{4x}, b_{4y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_4 = [p'_{4x}, p'_{4y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_5 = [-b_{4x}, b_{4y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_5 = [-p'_{4x}, p'_{4y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_6 = [-b_{3x}, b_{3y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_6 = [-p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \end{array} \right) \quad (6.2)$$

L'utilisation de ces valeurs dans l'expression des lieux de singularité nous ramène sur le polynôme de degré maximal de 3, alors que les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  ont respectivement un degré maximal de 2, 2 et 3. Le résultat est donc identique à celui obtenu lorsque les points sur la base sont coplanaires. On en conclut que le fait de mettre les points sur la plate-forme coplanaires et de supposer que celle-ci et la base soient symétriques ne simplifie pas l'expression des lieux de singularité. La seule différence entre cette architecture et celle où les points sur la base sont coplanaires est au niveau du nombre de coefficients. Il est quelque peu inférieur pour le SSM (se référer à l'Annexe F).

## 6.4 Architecture du type TSSM

Cette appellation provient elle aussi d'un terme anglais, soit *Triangular Simplified Symmetric Manipulator*. Cette architecture comporte les trois caractéristiques suivantes:

- la base et la plate-forme sont toutes les deux coplanaires;
- la base est symétrique par rapport à un axe;
- la plate-forme est triangulaire et symétrique par rapport à un axe (isocèle).

Un exemple de cette architecture est montré à la Figure 6.2. Il s'agit donc d'une architecture du type SSM pour laquelle on lie les points situés sur la plate-forme deux à deux.

Pour retrouver le polynôme qui nous intéresse on utilise, selon la Figure 6.2, les valeurs suivantes pour les différents points d'ancrages de la plate-forme et de la base.

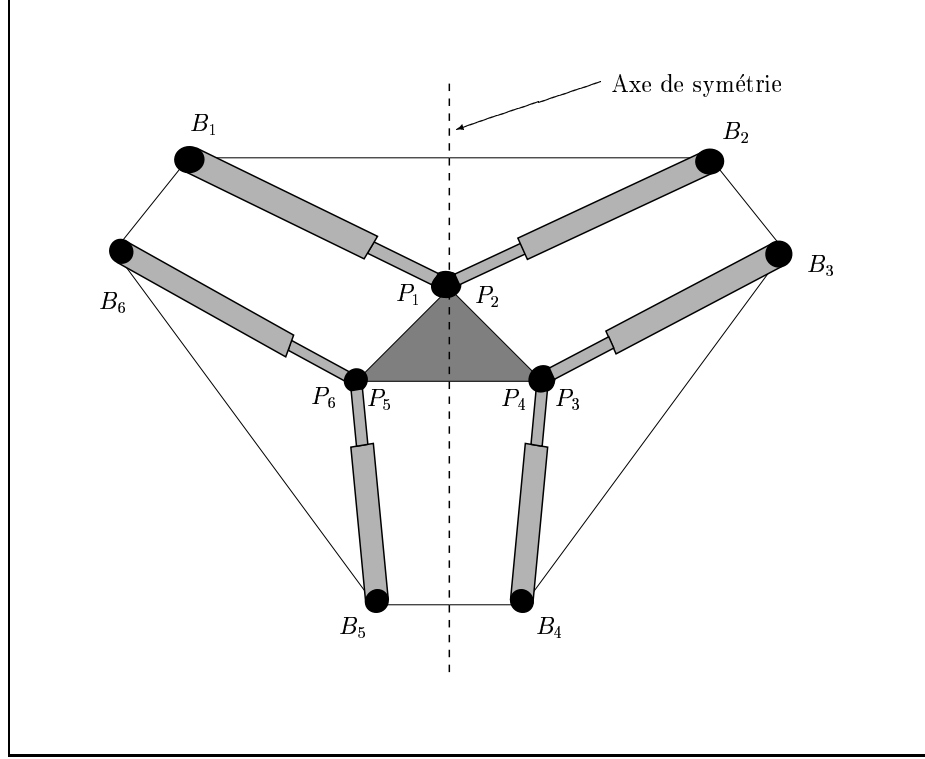


Figure 6.2: Architecture du type TSSM (vue du dessus).

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 = [b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_2 = [-b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_3 = [b_{3x}, b_{3y}, b_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_4 = [b_{4x}, b_{4y}, b_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_5 = [-b_{4x}, b_{4y}, b_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_6 = [-b_{3x}, b_{3y}, b_{1z}]^T \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{p}'_1 = [p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{p}'_2 = [p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{p}'_3 = [p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{p}'_4 = [p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{p}'_5 = [-p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{p}'_6 = [-p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \end{array} \quad (6.3)$$

On se retrouve alors avec un polynôme de degré maximal de 3, alors que les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  ont respectivement un degré maximal de 2, 2 et 3. Le résultat est donc identique à celui obtenu lorsque les points sur la base sont coplanaires ainsi que pour l'architecture du type SSM, à l'exception du nombre de coefficients qui est encore un peu plus petit (se référer à l'Annexe F).

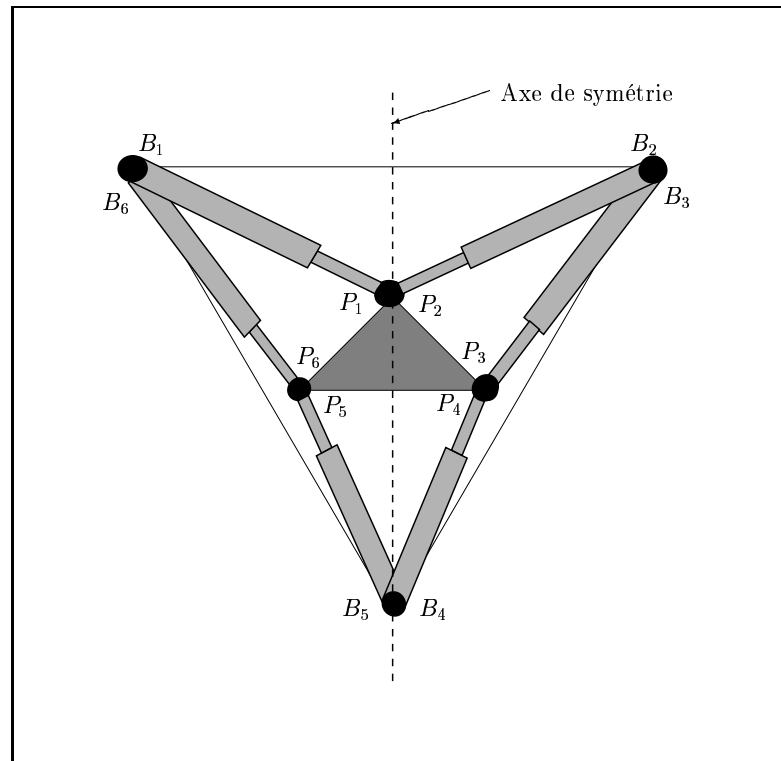


Figure 6.3: Architecture du type MSSM (vue du dessus).

## 6.5 Architecture du type MSSM

La dernière architecture de cette famille est le *Minimal Simplified Symmetric Manipulator*. Elle comporte les deux caractéristiques suivantes:

- la base et la plate-forme sont toutes les deux coplanaires;
- la base et la plate-forme sont triangulaires et symétriques par rapport à un axe (triangles isocèles).

Un exemple de cette architecture est montré à la Figure 6.3. Il s'agit tout simplement d'une architecture du type TSSM pour laquelle on lie les points situés sur la base deux à deux. Il faut cependant noter que cette architecture est difficile à réaliser en pratique si on tient compte des articulations mécaniques passives que l'on doit insérer à la base et à la plate-forme du mécanisme. Son étude sera néanmoins effectuée ici car nous allons nous référer ultérieurement à ces résultats.

Architecture	degré polynôme	degré de $x, y, z$	nb coefficients
Forme de <b>A</b> (Chap. 5)	4	3,3,3	617
Gough-Stewart générale	3	3,3,3	512
Base coplanaire	3	2,2,3	465
SSM	3	2,2,3	447
TSSM	3	2,2,3	354
MSSM	3	2,2,3	359

Tableau 6.1: Application de l'équation représentant les lieux de singularité de type *II* sur différentes architectures.

Pour retrouver le polynôme qui nous intéresse, on utilise les valeurs suivantes pour les différents points d'ancrages de la plate-forme et de la base.

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{b}_1 = [b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_1 = [p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_2 = [-b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_2 = [p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_3 = [-b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_3 = [p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_4 = [b_{4x}, b_{4y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_4 = [p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_5 = [b_{4x}, b_{4y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_5 = [-p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \\ \mathbf{b}_6 = [b_{1x}, b_{1y}, b_{1z}]^T & \mathbf{p}'_6 = [-p'_{3x}, p'_{3y}, p'_{1z}]^T \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

On se retrouve alors avec un polynôme de degré maximal de 3, alors que les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  ont respectivement un degré maximal de 2, 2 et 3. Le résultat est donc identique à celui obtenu lorsque les points sur la base sont coplanaires ainsi qu'avec les architectures SSM et TSSM.

## 6.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'analyser l'effet des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  sur l'équation représentant les lieux de singularité de type *II*. On a d'abord remarqué que l'équation polynomiale devenait de degré 3 pour l'architecture générale de la plate-forme de Gough-Stewart. Pour une base coplanaire, le degré des variables  $x$  et  $y$  est diminué

à 2. Ce résultat est demeuré identique pour tous les autres types d'architecture simplifiés qui ont été étudiés. En réalité, la différence entre ceux-ci était le nombre de coefficients non nuls ainsi que le nombre d'opérations. Cependant, comme l'équation générale présentée au Chapitre 5 s'étudie déjà très bien en temps réel à l'aide d'outils informatiques, nous n'accorderons pas d'importance à ces éléments. Le Tableau 6.1 synthétise ces différents résultats. À noter que le nombre de coefficients a été inséré à titre informatif.



# Chapitre 7

## Comparaisons analytiques et numériques

Le dernier chapitre nous a permis d'appliquer l'expression analytique des lieux de singularité aux différents types d'architectures utilisés présentement en industrie ou dans le domaine de la recherche. Le premier objectif que l'on s'était fixé, c'est-à-dire d'obtenir une expression analytique représentant les lieux de singularité de type *II*, est maintenant atteint. On connaît donc très bien les configurations cartésiennes pour lesquelles une singularité se produit. On veut maintenant comparer notre expression avec les différents travaux effectués précédemment par d'autres chercheurs. Analytiquement, on sait déjà que la seule étude qui a été faite sur la détermination des configurations singulières est l'utilisation de la géométrie de Grassmann. Nous allons donc la présenter ici et la comparer avec notre équation. Par ailleurs, des chercheurs se sont également intéressés à la détermination de propriétés cinématiques, comme les lieux de singularité, mais de

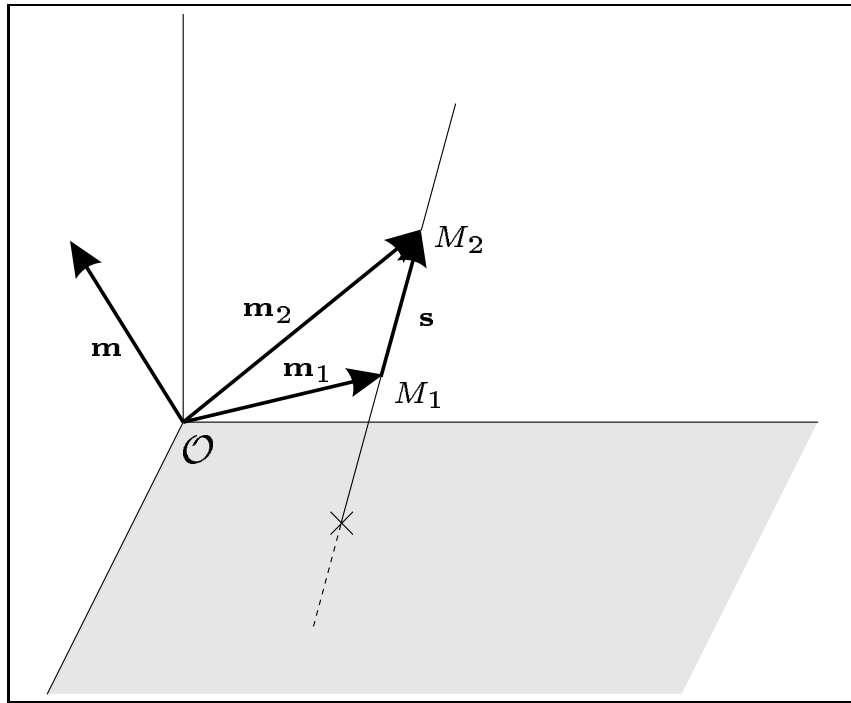


Figure 7.1: Coordonnées de Plücker.

façon numérique. C'est ainsi que le concept de dextérité, introduit brièvement au début du Chapitre 2, est utilisé pour représenter les courbes de précision des manipulateurs. Comme les configurations singulières correspondent à une précision nulle, ce concept nous sera très utile pour vérifier notre équation.

## 7.1 Géométrie de Grassmann

Le Chapitre 3 nous a permis de constater que la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est assez complexe et que l'expression de son déterminant n'est pas simple à obtenir. C'est ainsi que Merlet (1988, 1989, 1990) a utilisé une méthode basée sur la géométrie de Grassmann pour caractériser les configurations singulières. Cette méthode repose sur le fait que chaque configuration singulière correspond à une condition géométrique bien spécifique. Jusqu'à maintenant, ces études représentaient la seule percée dans la détermination d'expressions analytiques pour la plate-forme de Gough-Stewart. Voici une brève introduction de cette géométrie.

Cette approche est basée sur la représentation des droites par les coordonnées de

Plücker. Introduisons alors brièvement ces coordonnées. On considère deux points sur une droite, soit  $M_1$  et  $M_2$ , et un repère de référence  $\mathcal{R}_o$  qui a comme origine le point  $\mathcal{O}$  (Figure 7.1). Les vecteurs  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_2$  sont définis comme les vecteurs reliant respectivement l'origine  $\mathcal{O}$  aux points  $M_1$  et  $M_2$ . Considérons maintenant les deux vecteurs tridimensionnels  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{m}$  définis par

$$\mathbf{s} = \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \quad (7.1)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{s} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{s} \quad (7.2)$$

Si on assemble ces deux vecteurs dans un vecteur à six dimensions on obtient le vecteur  $\mathbf{u}$  des coordonnées de Plücker de cette droite, soit

$$\mathbf{u} = [\mathbf{s}^T, \mathbf{m}^T]^T \quad (7.3)$$

C'est ainsi qu'en considérant les vecteurs des coordonnées de Plücker associés à six différentes droites, on peut définir une matrice  $\mathbf{P}$  de dimensions  $6 \times 6$  constituée de ces six vecteurs, c'est-à-dire

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_6] \quad (7.4)$$

Il est alors possible de démontrer, à l'aide des forces articulaires et externes appliquées sur la plate-forme de Gough-Stewart, que la matrice  $\mathbf{P}$  est identique à la transposée de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  du manipulateur, soit

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \quad (7.5)$$

que l'on peut également écrire sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_6]^T \quad (7.6)$$

La matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  peut donc être obtenue à l'aide des vecteurs de Plücker. Les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  définis à l'équation (3.23) sont alors équivalents aux vecteurs  $\mathbf{u}_i$  des coordonnées de Plücker. Les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  représentent ainsi chacune des six pattes du manipulateur. Par ailleurs, on sait que l'on est en configuration singulière lorsque la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est singulière, c'est-à-dire qu'elle n'est pas de rang plein. Il y a donc, selon l'équation (7.6), une dépendance linéaire entre les différents vecteurs de Plücker. Grassmann (Dandurand 1984; Veblen et Young 1910) a montré que la dépendance linéaire de ces vecteurs induit des relations géométriques sur les droites associées à ces différents

vecteurs. Donc, dans notre cas, il y aura des dépendances géométriques entre les six pattes du manipulateur. C'est ainsi qu'en se basant sur la variété de droites étudiées par Grassmann et en l'appliquant à la plate-forme de Gough-Stewart, 13 conditions géométriques différentes conduisant à des configurations singulières ont été identifiées par Merlet (1988). Parmi celles-ci, on retrouve des configurations singulières lorsque les droites associées à quatre vérins sont dans le même plan ou bien que les droites associées à quatre vérins passent par un point commun dans l'espace. Choisissons alors une architecture pour notre comparaison.

### 7.1.1 Étude du MSSM

Les différents types d'architectures étudiés par Merlet dans son rapport détaillé sur l'application de la géométrie de Grassmann au cas des manipulateurs parallèles ont tous été présentés au chapitre précédent, soit le SSM, le TSSM de même que le MSSM. Malheureusement, on ne pourra comparer notre équation avec tous ces types d'architectures. En utilisant la géométrie de Grassmann, il est facile de déterminer les conditions géométriques produisant les configurations singulières mais il est très difficile de les exprimer mathématiquement. C'est ainsi que pour l'architecture du type SSM, certaines équations provenant des conditions géométriques manquent encore. Le manipulateur que l'on utilisera pour vérifier notre équation sera alors le MSSM — *Minimal Simplified Symmetric Manipulator* — et ce pour deux raisons. La première est que l'on connaît toutes les équations mathématiques permettant de représenter les différentes conditions géométriques pour ce type d'architecture. La deuxième est qu'il a été possible de récupérer des programmes conçus et vérifiés par Merlet (1988) pour la dérivation de ces équations mathématiques. On suppose ainsi que les différents résultats présentés ici, et provenant de la géométrie de Grassmann, sont exacts.

Pour le MSSM, trois conditions géométriques conduisant à des configurations singulières ont été identifiées par Merlet (1988). De façon brève, il s'agit des trois conditions suivantes:

- Condition 3D: lorsque quatre pattes sont coplanaires;
- Condition 5A: lorsque dans chacun des trois plans formés par les droites 1-6, 2-3

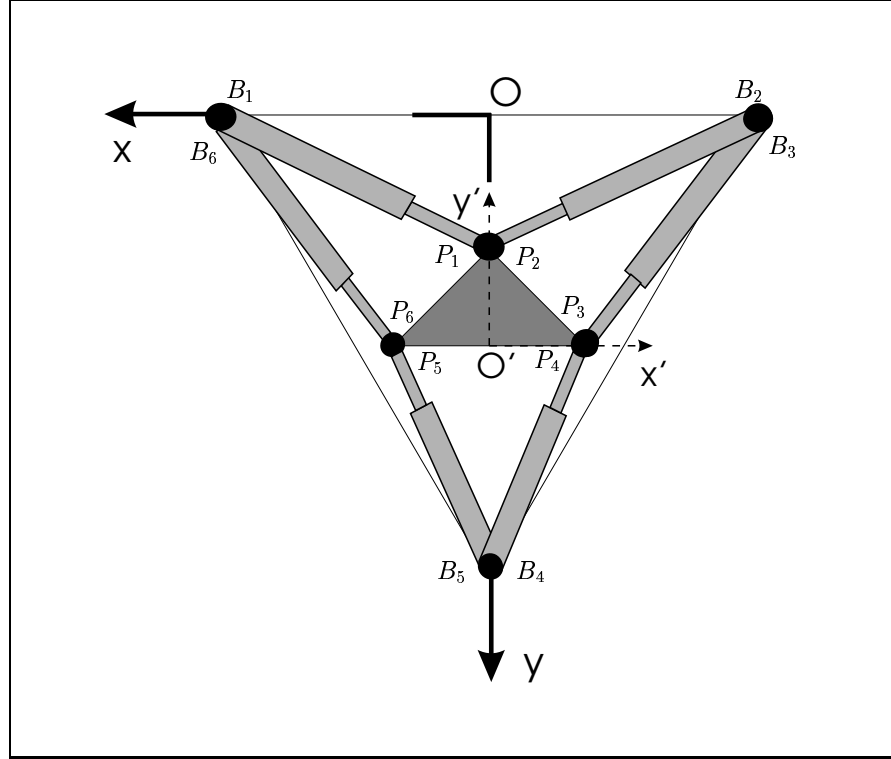


Figure 7.2: Notation utilisée pour l'architecture du type MSSM (vue du dessus).

et 4-5, il y a une droite  $D_i$  qui est coplanaire avec le plan de base tel que les trois droites  $D_i$  s'intersectent en un point commun. On nomme cette condition *complexe non singulier*;

- Condition 5B: lorsque toutes les pattes sont concourantes avec une droite de l'espace.

Quant à l'architecture et la nomenclature du MSSM qui seront utilisées pour les différents calculs, elles sont représentées à la Figure 7.2. Les paramètres architecturaux sont alors les suivants

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{b}_1 = [b_{1x}, 0, 0]^T & \mathbf{p}'_1 = [0, p'_{1y}, 0]^T \\ \mathbf{b}_2 = [-b_{1x}, 0, 0]^T & \mathbf{p}'_2 = [0, p'_{1y}, 0]^T \\ \mathbf{b}_3 = [-b_{1x}, 0, 0]^T & \mathbf{p}'_3 = [p'_{3x}, 0, 0]^T \\ \mathbf{b}_4 = [0, b_{4y}, 0]^T & \mathbf{p}'_4 = [p'_{3x}, 0, 0]^T \\ \mathbf{b}_5 = [0, b_{4y}, 0]^T & \mathbf{p}'_5 = [-p'_{3x}, 0, 0]^T \\ \mathbf{b}_6 = [b_{1x}, 0, 0]^T & \mathbf{p}'_6 = [-p'_{3x}, 0, 0]^T \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

On remarque que l'on se retrouve avec seulement quatre inconnues, soit  $b_{1x}$ ,  $b_{4y}$ ,  $p'_{1y}$

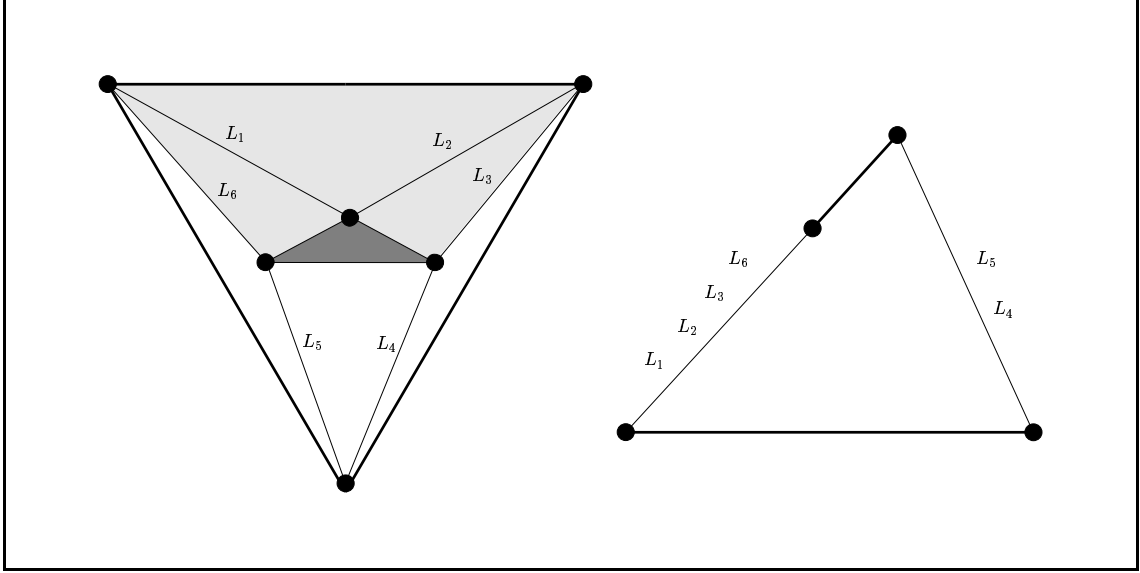


Figure 7.3: Condition géométrique 3D selon la géométrie de Grassmann.

et  $p'_{3x}$ , au lieu de 36 pour le cas général ce qui simplifiera de beaucoup les équations. Analysons maintenant chacune des trois conditions géométriques pour trouver les expressions mathématiques qui nous intéressent. Tous les développements qui suivent proviennent de Merlet (1988).

#### 7.1.1.1 Condition 3D, cas général: quatre pattes sont coplanaires

La première condition que l'on étudie se nomme, selon la classification de Merlet, 3D. Elle correspond géométriquement à la localisation de quatre pattes dans le même plan. Trois quadruplets de droites peuvent satisfaire cette condition, soit les droites associées aux vérins 1-2-3-6, 1-4-5-6 et 2-3-4-5. Prenons le premier groupe de quatre droites comme exemple (Figure 7.3). Pour commencer, on doit d'abord définir les droites associées aux différents vérins. On écrit alors:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (7.8)$$

où les vecteurs  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont définis d'après le modèle géométrique du Chapitre 3 et sont

$$\mathbf{b}_i = [b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}]^T, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (7.9)$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r} + \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (7.10)$$

où  $\mathbf{p}_i = [p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}]^T$ ,  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  et  $\mathbf{p}'_i = [p'_{ix}, p'_{iy}, p'_{iz}]^T$ . Pour ce qui est de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ , on utilise le triplet d'angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  selon la convention  $\mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_z$ , soit

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Pour vérifier que les vérins 1, 2, 3 et 6 sont coplanaires, on résout le système d'équations suivant

$$(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_3 = 0 \quad (7.12)$$

$$(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_6 = 0 \quad (7.13)$$

Il s'agit d'un système linéaire en  $y$  et en  $z$  que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

La solution de ce système d'équations nous donne donc l'équation représentant les configurations singulières lorsque les pattes 1, 2, 3 et 6 sont coplanaires. Cette solution s'écrit

$$y = -p'_{iy} \cos \phi \cos \psi \cos \theta + p'_{iy} \sin \phi \sin \psi \quad (7.15)$$

$$z = -p'_{iy} \cos \phi \sin \theta \quad (7.16)$$

Pour les deux autres quadruplets de droites pouvant satisfaire cette condition, les équations sont décrites à l'Annexe G. On doit cependant porter une attention sur un point. Puisque l'on résout un système de deux équations à deux inconnues (équation (7.14)), un cas particulier se produit lorsque le déterminant de ce système, c'est-à-dire  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  est nul. On doit donc procéder autrement pour identifier les équations mathématiques représentant ce cas particulier.

### 7.1.1.2 Condition 3D, cas particulier: quatre pattes sont coplanaires

La résolution du système d'équations présenté ci-haut est singulière lorsque

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad (7.17)$$

qui donne dans notre cas l'équation suivante:

$$b_{1x}^2 p'_{1y} p'_{3x} \sin \theta \sin \psi = 0 \quad (7.18)$$

On est donc dans le cas particulier lorsque  $\sin \theta = 0$  ou bien  $\sin \psi = 0$ , soit  $\theta = 0, \pi$  ou  $\psi = 0, \pi$ . On prend donc la valeur de  $z$  avec les valeurs correspondantes des angles  $\theta$  et  $\psi$  pour représenter mathématiquement cette condition. Avec  $\psi = 0$  on a

$$z = y \tan \theta \quad (7.19)$$

Avec  $\psi = \pi$  on a

$$z = -y \tan \theta \quad (7.20)$$

Et avec  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , on a

$$z = 0 \quad (7.21)$$

Les équations (7.19) à (7.21) avec les valeurs correspondantes de  $\psi$  et  $\theta$  représentent donc les équations analytiques exprimant cette condition géométrique. Pour les deux autres quadruplets de pattes, les équations sont décrites à l'Annexe G.

### 7.1.1.3 Condition 5A: complexe non singulier

La caractérisation géométrique de ce complexe est que dans chacun des trois plans formés par les droites 1-6, 2-3 et 4-5, il y a une droite  $D_i$  qui est coplanaire avec le plan de base tel que les trois droites  $D_i$  s'intersectent en un point commun (La Figure 7.4 représente cette condition à l'exception du point de rencontre commun). En d'autres mots, ce type de singularité se produit lorsque les droites des faisceaux (1,6), (2,3) et (4,5) qui sont dans le plan de base intersectent le même point. Si  $\mathbf{n}_{ij}$  indique la normale au plan des droites  $i, j$  et  $\mathbf{m}(x_m, y_m, 0)$  le vecteur position du point d'intersection, les trois équations suivantes représentent cette condition géométrique, soit

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{n}_{16} = (\mathbf{m} - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{n}_{16} = 0 \quad (7.22)$$

$$\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{n}_{23} = (\mathbf{m} - \mathbf{b}_3) \cdot \mathbf{n}_{23} = 0 \quad (7.23)$$

$$\mathbf{d}_5 \cdot \mathbf{n}_{45} = (\mathbf{m} - \mathbf{b}_5) \cdot \mathbf{n}_{45} = 0 \quad (7.24)$$

où les normales aux plans sont

$$\mathbf{n}_{16} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_6 \quad (7.25)$$



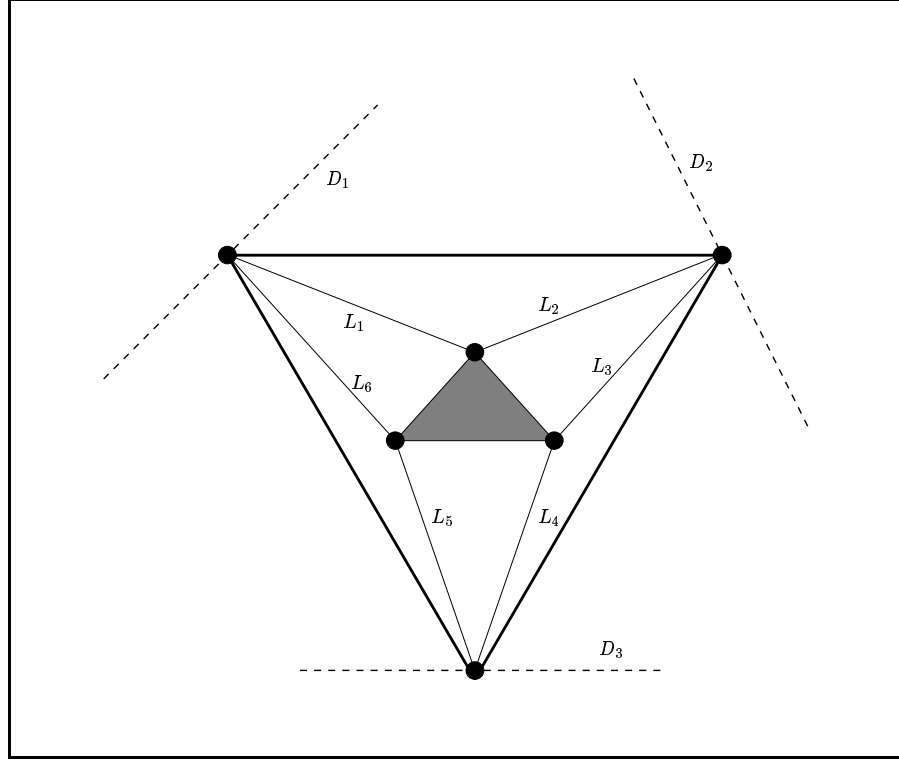


Figure 7.4: Condition géométrique 5A selon la géométrie de Grassmann.

$$\mathbf{n}_{23} = \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3 \quad (7.26)$$

$$\mathbf{n}_{45} = \mathbf{l}_4 \times \mathbf{l}_5 \quad (7.27)$$

On résout alors les deux équations (7.22) et (7.23) pour déterminer la valeur de  $x_m$  et  $y_m$  du point d'intersection. On insère par la suite ces résultats dans l'équation (7.24). Il en résulte une équation de degré 3 en  $z$ , de 2 en  $x$  et de 2 en  $y$ , donc similaire à celle obtenue à l'aide de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  (section 6.5) et qui représente mathématiquement cette condition géométrique. Son expression au long est donnée à l'Annexe G.

#### 7.1.1.4 Condition 5B, cas général: six pattes coupent une même droite

Un exemple de ce type de configuration est illustré à la Figure 7.5. Il se produit lorsque six pattes coupent une même droite dans l'espace. Prenons une des trois configurations possibles pour établir nos équations (Figure 7.5). On suppose ici que les segments 1, 2 et 3 soient coplanaires (zone grise). On prend alors une droite (nommée  $D$ ), qui passe par les articulations  $B_1$  et  $P_3$ . Cette droite coupe ainsi les segments 1,2,3,4 et 6. Il ne reste plus que le segment 5 à relier à cette droite. On identifie alors le point

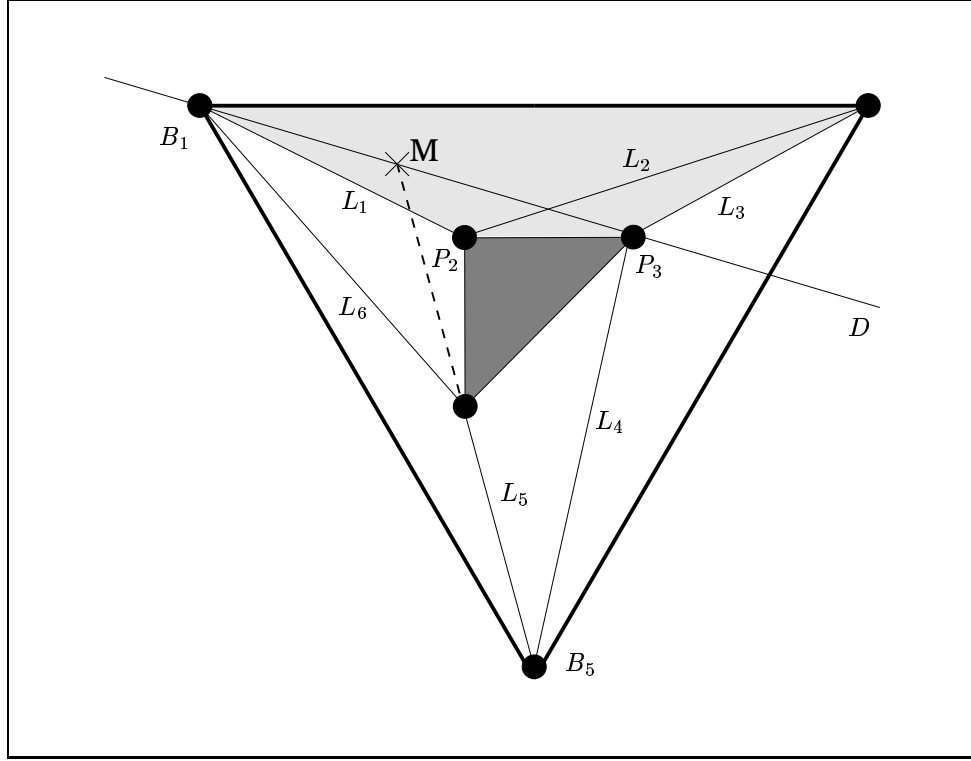


Figure 7.5: Condition géométrique 5B selon la géométrie de Grassmann.

M comme le point d'intersection de la droite 5 avec le plan 1-2-3. On voit ainsi très clairement qu'en effectuant une rotation du plateau mobile autour de l'arête  $P_2P_3$ , il est possible de déplacer le point M sur la droite  $D$ . La droite  $D$  a alors un point commun avec chacune des six droites associées aux segments. Ces conditions géométriques se traduisent en deux équations mathématiques. Tout d'abord par le fait que les droites 1-2-3 sont coplanaires, ce qui s'exprime par

$$(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_3 = 0 \quad (7.28)$$

et puis par une relation supplémentaire qui exprime l'appartenance du point M à la droite  $D$ , ou tout simplement qui indique que les deux droites  $\mathbf{l}_5$  et puis  $D$  se croisent en un point. La relation que l'on choisit est la suivante: si les deux droites ont un point commun, elles forment alors un plan, et le produit scalaire d'un vecteur de ce plan avec sa normale — le produit vectoriel des deux droites — doit donner zéro. On écrit

$$\mathbf{d} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{b}_1 \quad (7.29)$$

La relation montrant que les droites  $\mathbf{l}_5$  et  $D$  se coupent est donc

$$(\mathbf{b}_5 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{l}_5) = 0 \quad (7.30)$$

On utilise alors les équations (7.28) et (7.30) comme un système de deux équations à deux inconnues, soit  $y$  et  $z$ . La solution de ce système d'équations nous permet d'avoir la relation mathématique décrivant les lieux de singularité où les six droites associées aux segments coupent une même droite. Elle est:

$$y = \frac{E_1 x + E_2}{E_3} \quad (7.31)$$

$$z = \frac{E_4 x + E_5}{E_3} \quad (7.32)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 = & b_{4y} p'_{1y} \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi - b_{4y} p'_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi - \\ & b_{4y} p'_{3x} \cos \phi \sin \phi \sin \psi - b_{4y} p'_{1y} \sin^2 \phi \sin \psi \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} E_2 = & -b_{1x} b_{4y} p'_{1y} \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi + b_{1x} b_{4y} p'_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi - \\ & b_{4y} p'_{1y} p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \psi + b_{1x} b_{4y} p'_{3x} \cos \phi \sin \phi \sin \psi - \\ & b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin \phi \sin \psi + b_{1x} b_{4y} p'_{1y} \sin^2 \phi \sin \psi - \\ & b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} \cos \phi \sin^2 \psi + b_{4y} p'_{1y} p'_{3x} \cos \theta \sin \phi \sin^2 \psi \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} E_3 = & b_{4y} p'_{1y} \cos \psi - b_{4y} p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \phi - b_{4y} p'_{1y} \cos \psi \sin^2 \phi + \\ & b_{1x} p'_{1y} \sin \psi - b_{4y} p'_{1y} \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin \psi + b_{4y} p'_{3x} \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$E_4 = b_{4y} p'_{1y} \cos \phi \sin \phi \sin \theta - b_{4y} p'_{3x} \sin^2 \phi \sin \theta \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} E_5 = & -b_{1x} b_{4y} p'_{1y} \cos \phi \sin \phi \sin \theta + b_{1x} b_{4y} p'_{3x} \sin^2 \phi \sin \theta - \\ & b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} \sin \phi \sin \psi \sin \theta \end{aligned} \quad (7.37)$$

Deux autres configurations de la plate-forme sont possibles pour obtenir cette condition géométrique. Le premier cas est celui où les droites 2, 3 et 4 sont coplanaires. La droite  $D$  passe alors par les articulations  $B_4$  et  $P_2$  et touche ainsi aux segments 1,2,3,4 et 5. Il s'agit de trouver les conditions pour lesquelles les droites 2-3-4 sont coplanaires ainsi que les conditions pour l'intersection de la droite  $\mathbf{l}_6$  et la droite  $D$ . Le deuxième cas est celui où les droites 3, 4 et 5 sont coplanaires. La droite  $D$  passe alors par les articulations  $B_2$  et  $P_5$  et touche ainsi aux segments 2,3,4,5 et 6. On doit ainsi trouver le point d'intersection entre les droites  $\mathbf{l}_1$  et  $D$ . Les expressions mathématiques exprimant ces conditions géométriques sont données à l'Annexe G.

### 7.1.1.5 Condition 5B, cas particulier: six pattes coupent une même droite

Il ne nous reste que le cas particulier de la condition 5B. Comme c'était le cas pour la condition 3D, il est possible que la résolution du système de deux équations à deux inconnues — dans notre cas les équations (7.28) et (7.30) — soit singulière. On est donc dans le cas particulier de la condition 5B. En écrivant les deux équations sous la forme matricielle

$$\mathbf{F} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{g} \quad (7.38)$$

on obtient le cas particulier lorsque le déterminant de la matrice  $\mathbf{F}$  est égal à zéro. En reprenant l'exemple présenté à la section précédente, on trouve que ce cas particulier se produit lorsque

$$\begin{aligned} & -b_{4y}p'_{1y} \cos \psi + b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \phi + b_{4y}p'_{1y} \cos \psi \sin^2 \phi - b_{1x}p'_{1y} \sin \psi + \\ & b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin \psi - b_{4y}p'_{3x} \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi = 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

Comme il est impossible ici d'établir avec précision à quelle valeur de  $\phi$ ,  $\theta$  ou  $\psi$  l'équation précédente est vérifiée, on isole la valeur de  $\cos \psi$  et on la substitue dans l'expression de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  (équation (7.11)). On prend alors

$$\cos \psi = \frac{b_{4y}p'_{1y} - b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \sin \phi - b_{4y}p'_{1y} \sin^2 \phi}{-b_{1x}p'_{1y} + b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \theta \sin \phi - b_{4y}p'_{3x} \cos \theta \sin^2 \phi} \sin \psi \quad (7.40)$$

Avec cette valeur, on trouve les expressions des variables  $x$  et  $z$  en solutionnant le système d'équations (7.28) et (7.30). On se retrouve alors avec deux expressions assez complexes que l'on peut écrire sous la forme

$$x = \frac{E_6 y + E_7}{E_8} \quad (7.41)$$

$$z = \frac{E_9 y + E_{10}}{E_{11}} \quad (7.42)$$

et où les coefficients  $E_6$  à  $E_{11}$  sont donnés à l'Annexe G. Les équations (7.41) et (7.42) avec la valeur correspondante de  $\cos \psi$  représentent donc les équations analytiques représentant cette condition géométrique. Pour les deux autres cas possibles, les équations sont décrites à l'Annexe G.

### 7.1.2 Comparaison

Puisque toutes les équations mathématiques provenant des différentes conditions géométriques ont été dérivées, on peut maintenant établir une comparaison. Regardons d'abord la condition 3D, c'est-à-dire lorsque quatre segments sont coplanaires. Les équations décrivant ces singularités, pour les pattes 1-2-3-6, sont alors définies par les équations (7.15) et (7.16), soit

$$y = -p'_{iy} \cos \phi \cos \psi \cos \theta + p'_{iy} \sin \phi \sin \psi \quad (7.43)$$

$$z = -p'_{iy} \cos \phi \sin \theta \quad (7.44)$$

Des équations similaires de  $y$  et  $z$  ont été trouvées pour les deux autres quadruplets de pattes (Annexe G), et par la suite pour les cas particuliers en spécifiant l'angle  $\theta$  ou  $\psi$  ainsi que  $z$ .

Lorsque l'on prend ces équations et qu'on les insère successivement dans l'équation des lieux de singularité obtenue à l'aide de la matrice jacobienne, on retrouve comme résultat zéro, ce qui indique très bien la validité de notre équation pour la condition géométrique 3D. Il en est exactement de même pour les trois cas possibles de la condition géométrique 5B: ils vérifient notre équation.

On arrive alors à la condition géométrique 5A. L'équation alors obtenue pour représenter les lieux de singularité est un polynôme de degré 3 en  $z$ , et de 2 en  $x$  et  $y$ . Le résultat est donc identique à l'équation obtenue à l'aide de la matrice jacobienne. D'ailleurs, chacun des 16 coefficients représentant cette équation, c'est-à-dire les termes devant les variables  $xyz$  (Annexe G), sont identiques pour les deux équations. Il faut se rappeler que l'équation polynomiale obtenue à l'aide de la matrice jacobienne est unique et représente tous les cas géométriques de singularité possibles. De ce fait, l'équation représentant la condition géométrique 5A représente aussi tous les cas de singularité possibles. Cette condition géométrique englobe donc les conditions 3D ainsi que 5B. On voit alors que toutes les équations mathématiques qui ont été obtenues pour ces deux conditions géométriques ne sont plus nécessaires. En fait, elles représentent des cas particuliers de l'équation générale. L'utilisation de l'équation obtenue à l'aide de la matrice jacobienne s'avère beaucoup moins complexe que celles obtenues grâce à la géométrie de Grassmann.

## 7.2 Indice de dextérité

Nous effectuons maintenant une comparaison numérique en utilisant le concept de dextérité (Salisbury et Craig 1982). C'est un concept très important en robotique. Il permet de caractériser les capacités d'un manipulateur à effectuer précisément des mouvements fins. En effet, étant donné une certaine précision des actionneurs, la précision du mouvement obtenu à l'organe terminal dépendra des paramètres géométriques du manipulateur ainsi que de sa configuration. Nous établirons alors l'expression de la dextérité à partir des équations de vitesse, c'est-à-dire

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (7.45)$$

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  caractérisent la transformation linéaire entre les vitesses cartésiennes et articulaires et la dextérité sera par conséquent définie comme la qualité de cette transformation linéaire. Lorsque la dextérité est nulle, c'est-à-dire lorsque la transformation n'est plus de qualité, on est en configuration singulière. On pourra ainsi comparer l'équation obtenue pour l'expression des lieux de singularité avec les courbes de dextérité. Par définition, la dextérité est définie comme l'inverse du conditionnement d'une matrice  $\mathbf{J}$ . On fait donc intervenir la notion de conditionnement utilisée en analyse numérique.

**Définition 7.1** *On définit le conditionnement de la matrice  $\mathbf{J}$  comme*

$$\kappa(\mathbf{J}) = \|\mathbf{J}\| \|\mathbf{J}^{-1}\| \quad (7.46)$$

où  $\|\mathbf{J}\|$  est la norme de la matrice  $\mathbf{J}$  et s'écrit comme

$$\|\mathbf{J}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{J}^T)} \quad (7.47)$$

et où  $\mathbf{W}$  est la matrice  $w\mathbf{1}$  avec  $w = 1/n$ ,  $n$  étant la dimension de la matrice  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{1}$  la matrice identité de dimension  $n \times n$ .

En appliquant cette définition à la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  de notre manipulateur, il est possible d'obtenir des courbes représentant la dextérité du manipulateur associée à cette matrice. C'est ce qui est présenté à la Figure 7.6. Le manipulateur choisi pour ces représentations est celui présenté au Chapitre 3, c'est-à-dire d'architecture quelconque.

Ses paramètres géométriques se trouvent au Tableau 3.1. Quant à son orientation, on prend les valeurs  $\phi = -10^\circ$ ,  $\theta = -8^\circ$  et  $\psi = 56^\circ$  où  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  est un triplet d'angles d'Euler selon la convention  $\mathbf{Q}_z \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_x$ . Deux différents exemples sont alors illustrés. Le premier exemple (Figure 7.6(a)) représente une section dans un plan parallèle au plan  $xy$  lorsque  $z$  égale  $-52$ . Le second exemple (Figure 7.6(b)) représente une section dans un plan parallèle au plan  $xz$  lorsque  $y$  égale  $84$ . On voit très bien l'évolution de la dextérité par le changement de densité du graphique. Plus la zone est foncée, meilleure est la dextérité. À l'opposé, les parties blanches représentent une dextérité nulle. On peut alors remarquer que la courbe représentant les lieux de singularité, c'est-à-dire celle en trait noir, se superpose parfaitement à la dextérité comme on s'y attendait.

### 7.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de comparer l'expression polynomiale représentant les lieux de singularité formulée dans ce mémoire avec la géométrie de Grassmann ainsi qu'avec l'indice de dextérité. La présentation de la géométrie de Grassmann nous a permis de constater que l'on peut caractériser géométriquement tous les cas de dégénérescence mais qu'il était très difficile de les exprimer mathématiquement. De ce fait, la seule architecture qu'il nous a été donné d'analyser est le MSSM. Il a alors été possible de remarquer que toutes les équations provenant des conditions géométriques pour cette architecture satisfaisaient l'équation obtenue à l'aide de la matrice jacobienne. Il a même été démontré qu'une seule condition géométrique s'appliquait à cette architecture alors que les équations provenant des trois conditions géométriques étaient utilisées. De plus, certaines de ces expressions (voir par exemple le cas particulier 5B) sont assez complexes et indiquent clairement que l'équation obtenue à l'aide de la matrice jacobienne est beaucoup plus simple et conviviale à utiliser. Il ne nous reste plus qu'à l'utiliser pour représenter graphiquement les lieux de singularité et de la superposer à l'espace de travail. C'est ce qui est présenté dans le prochain chapitre.

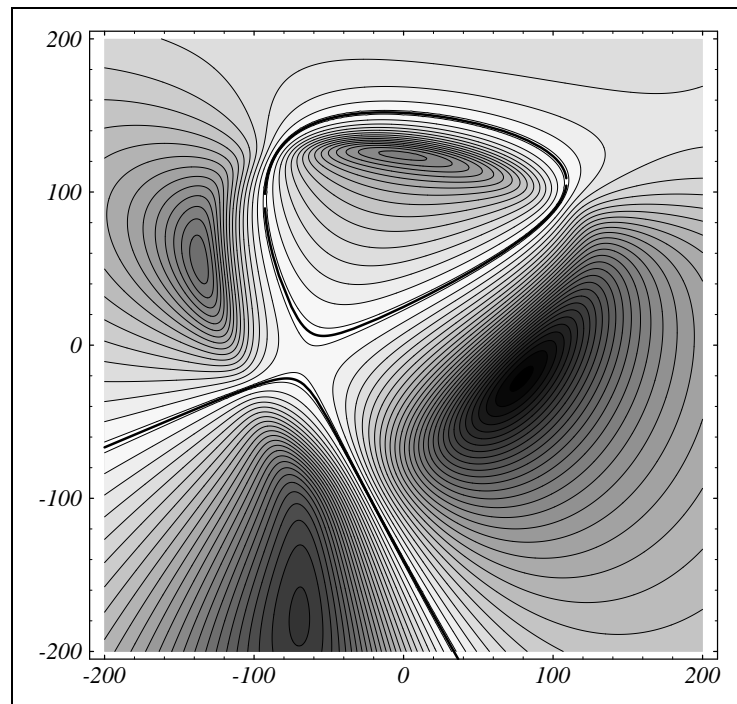
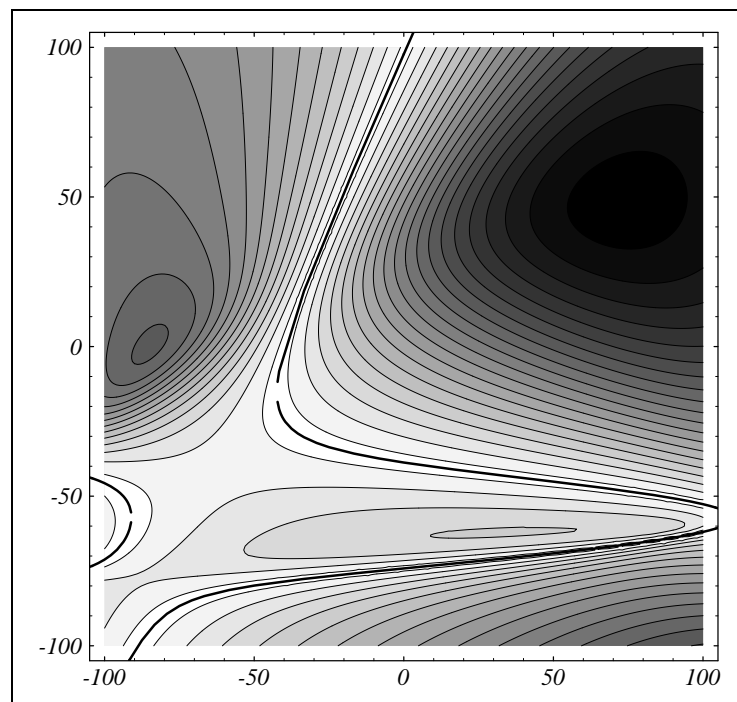
(a) Plan parallèle au plan  $xy$ (b) Plan parallèle au plan  $xz$ 

Figure 7.6: Graphique de la dextérité montrant les lieux de singularité.



# Chapitre 8

## Représentation graphique et exemples d'applications

Ce dernier chapitre traite de la représentation graphique dans l'espace cartésien de l'expression représentant les lieux de singularité ainsi que de son application sur deux mécanismes connus. Comme on l'a déjà mentionné, la superposition graphique des lieux de singularité et de l'espace de travail est d'une grande utilité. Tout d'abord, d'un point de vue de l'utilisation d'un mécanisme, elle nous permet de pouvoir identifier les zones où le mécanisme est en configuration singulière dans son espace de travail. Il nous sera donc possible d'éviter ces postures indésirables en modifiant la trajectoire. D'autre part, l'intégration de cette représentation dans un outil informatisé de conception interactif permet l'évaluation rapide d'une grande variété de géométries. Il sera ainsi possible d'identifier les lieux de singularité dès la conception et d'en minimiser l'impact. On

doit cependant noter que dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à l'identification des configurations singulières dans l'espace de travail et non à la conception de manipulateurs parallèles.

Pour visualiser les lieux de singularité et l'espace de travail, on utilise dans le présent ouvrage un outil d'analyse interactif qui a été développé au Laboratoire de robotique de l'Université Laval (Gosselin *et al.* 1992a; Gosselin *et al.* 1995). Il s'agit en fait d'un logiciel de simulation pour différents types de mécanismes parallèles. Il permet de varier à volonté les paramètres géométriques et d'obtenir en temps réel l'espace atteignable, les lieux de singularité et d'autres propriétés telles que la raideur et la dextérité. Les résultats obtenus au Chapitre 5 ont donc été intégrés à ce logiciel pour visualiser les lieux de singularité. Quant à l'espace de travail, il y est tracé à l'aide d'algorithmes de représentation graphique présentés dans (Gosselin 1990) et (Gosselin *et al.* 1992b). Les seules données nécessaires pour sa représentation sont les élongations maximales ( $\rho_{max}$ ) et minimales ( $\rho_{min}$ ) des actionneurs.

## 8.1 Simulateur de vol

Il va de soi que le premier mécanisme que l'on étudie est un simulateur de vol. La compagnie canadienne CAE Électronique, basée à Ville St-Laurent, est un leader incontesté dans le domaine des simulateurs de vol. Elle détient à elle seule près de la moitié du marché mondial dans ce domaine. Nous allons donc analyser une de leurs architectures. En fait, CAE Électronique possède principalement quatre séries de simulateurs de vol. La série 300 est la plus petite et est habituellement utilisée pour les hélicoptères et pour les avions très légers. Elle est la moins utilisée des quatre séries. Les séries 500 et 550 sont les séries standards qui sont utilisées par la majorité de leurs clients. C'est d'ailleurs une de ces séries — la série 500 — que nous allons étudier. Quant à la série 750, elle est essentiellement comme la série 500 mais plus grosse de 50%. Elle est très populaire auprès des compagnies aériennes KLM et SWR. Elle nécessite cependant un très grand espace pour l'entreposage. C'est donc à partir de ces séries que les différents simulateurs sont conçus et adaptés aux conditions spécifiques des clients.

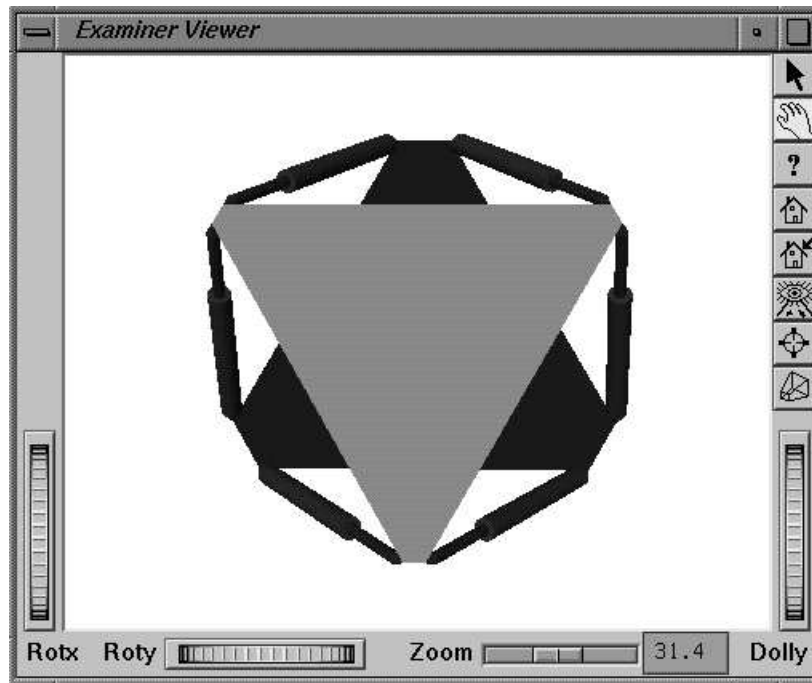
$i$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$	$p'_{ix}$	$p'_{iy}$	$p'_{iz}$
1	-53.7093	-70.0272	0.00	-77.3	-3.75	-95.9782
2	-53.7093	70.0272	0.00	-77.3	3.75	-95.9782
3	-33.7907	81.5272	0.00	35.4024	68.8188	-95.9782
4	87.5	11.5	0.00	41.8976	65.0688	-95.9782
5	87.5	-11.5	0.00	41.8976	-65.0688	-95.9782
6	-33.7907	-81.5272	0.00	35.4024	-68.8188	-95.9782

Tableau 8.1: Paramètres géométriques du simulateur de vol de CAE — Série 500 (longueurs en pouces).

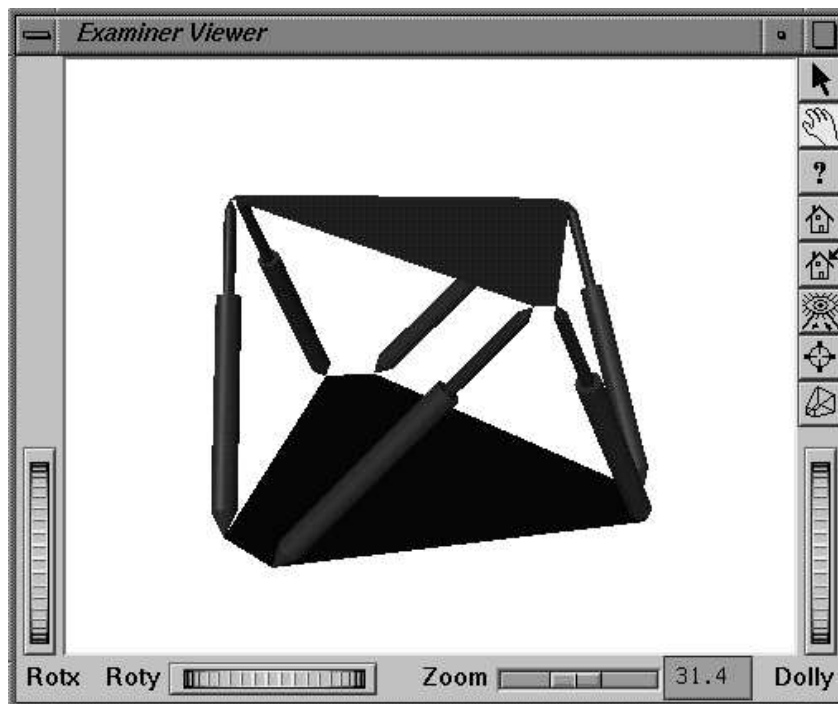
Tel que mentionné, l'architecture de la série 500 est choisie. Ses paramètres géométriques sont représentés au Tableau 8.1. Le logiciel utilisé au laboratoire permet alors de visualiser l'architecture utilisée. C'est ce qui est illustré à la Figure 8.1. On constate facilement que cette architecture est du type TSSM puisque *i*) la base et la plate-forme sont toutes les deux coplanaires et puisque *ii*) la base et la plate-forme sont symétriques par rapport à un axe.

En utilisant les valeurs  $\rho_{min} = 92$  po. et  $\rho_{max} = 146$  po., on peut maintenant visualiser l'espace de travail et les lieux de singularité de notre mécanisme en fixant les paramètres d'orientation. Pour les définir, on utilise le triplet d'angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  d'après la convention  $\mathbf{Q}_z \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_x$ . Deux exemples différents sont présentés. Le premier exemple (Figure 8.2(a)) représente une section de l'espace de travail dans un plan parallèle au plan  $xz$  quand  $y = 11$  po.,  $\phi = -12^\circ$ ,  $\theta = -17^\circ$  et  $\psi = -3^\circ$ . Le second exemple (Figure 8.2(b)) représente lui aussi une section de l'espace de travail dans un plan parallèle au plan  $xz$  mais avec  $y = 14$  po.,  $\phi = -13^\circ$ ,  $\theta = 15^\circ$  et  $\psi = -3^\circ$ .

On remarque dans ces deux figures que les courbes représentant les lieux de singularité ne touchent pas à l'espace de travail du manipulateur. Ainsi, la planification de trajectoire dans ces deux cas ne cause aucun problème puisqu'il est impossible de passer ou de s'immobiliser sur une configuration singulière. Il ne faut toutefois pas généraliser. Le nombre de combinaisons possibles pour fixer l'orientation est infini. Donc, on ne peut garantir que les lieux de singularité ne croisent en aucun temps l'espace de travail. Néanmoins, on voit très bien que pour une trajectoire connue, il est possible de vérifier

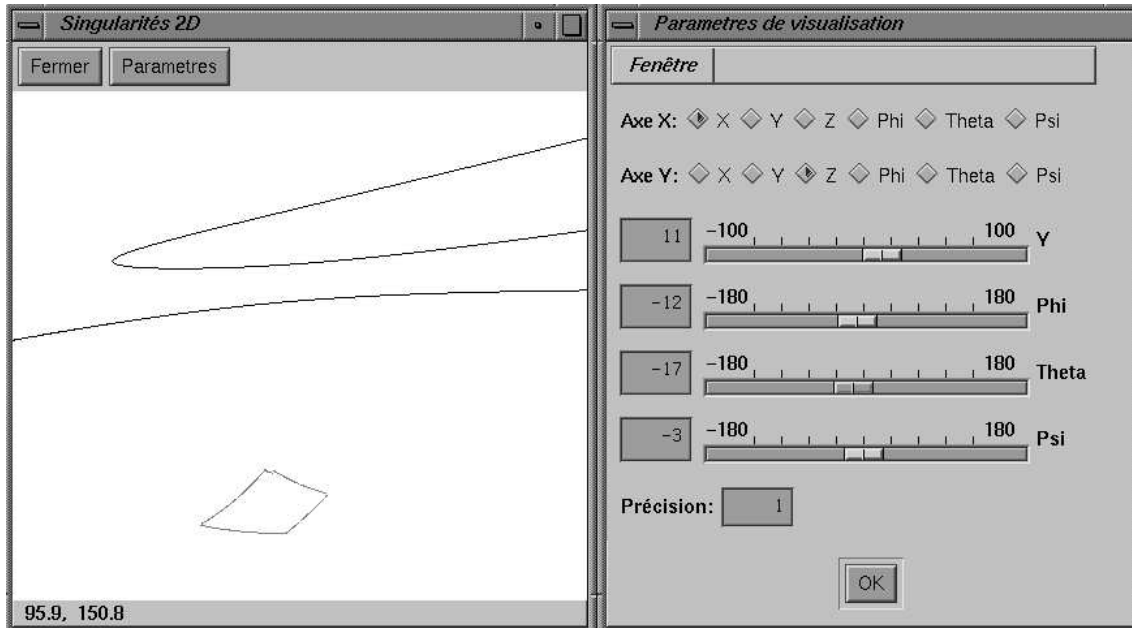


(a) Vue du dessus

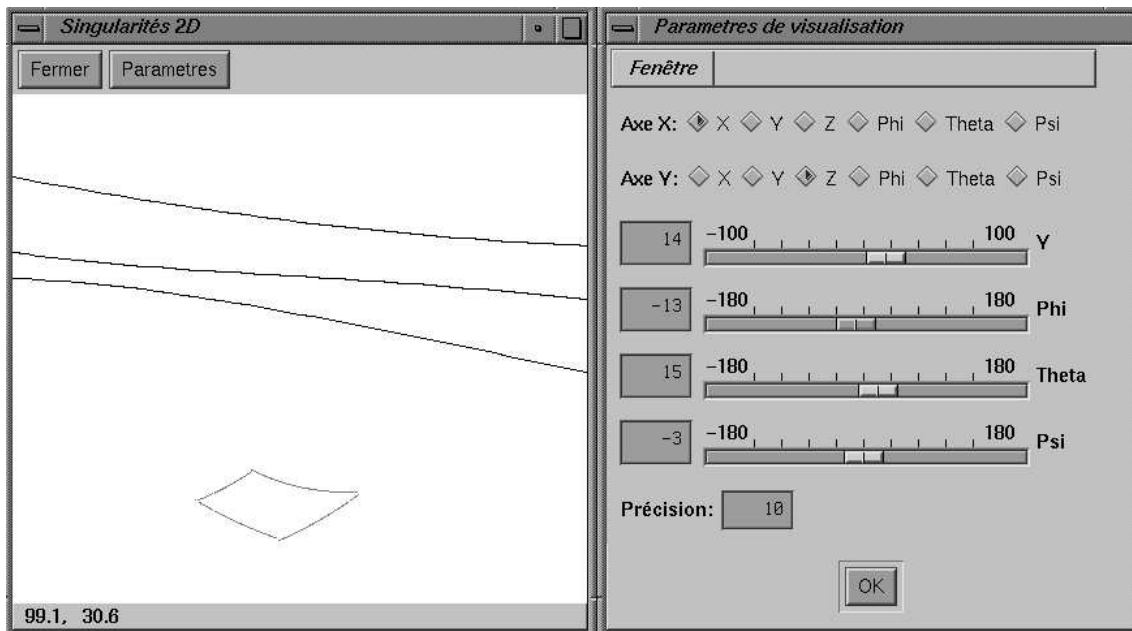


(b) Vue de perspective

Figure 8.1: Simulateur de vol Série 500.



(a)



(b)

Figure 8.2: Section de l'espace de travail obtenue pour le simulateur du Tableau 8.1 et illustrant les lieux de singularité.

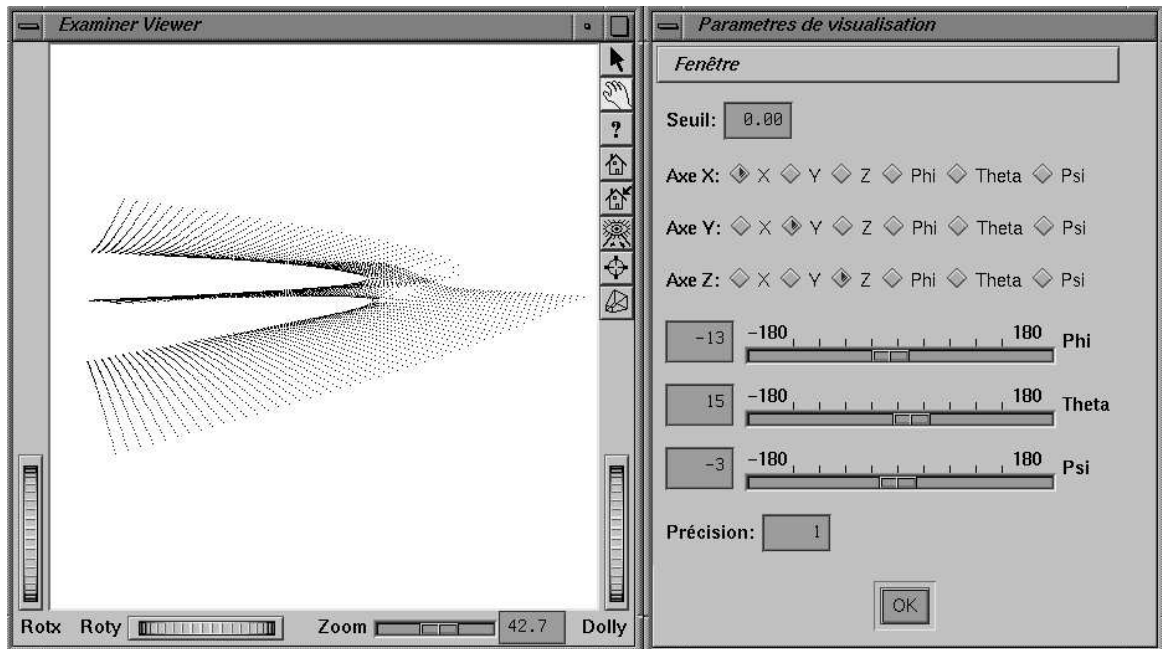


Figure 8.3: Représentation des lieux de singularité en trois dimensions.

si l'évitement des lieux de singularité est possible.

Quant à la Figure 8.3, elle représente l'ensemble des lieux de singularité dans un espace à trois dimensions. L'orientation choisie est celle de la Figure 8.2(b), soit  $\phi = -13^\circ$ ,  $\theta = 15^\circ$  et  $\psi = -3^\circ$ .

## 8.2 Prototype de recherche

Le deuxième mécanisme que l'on étudie est la main gauche de l'INRIA, laquelle est un manipulateur parallèle à six degrés de liberté. On utilise ce prototype de recherche parce que l'on connaît bien ses caractéristiques géométriques (Merlet 1987). Elles sont présentées au Tableau 8.2. L'architecture ainsi obtenue à l'aide du logiciel est représentée à la Figure 8.4. On remarque ici aussi que l'architecture est du type TSSM.

On utilise une orientation qui est quelconque, soit  $\phi = -2^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  et  $\psi = -87^\circ$ , où  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  est un triplet d'angles d'Euler selon la convention  $\mathbf{Q}_z \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_x$  et les valeurs suivantes pour l'élongation des vérins:  $\rho_{max} = 504.5$  mm et  $\rho_{min} = 454.5$  mm. Deux différents exemples sont alors illustrés. Le premier exemple (Figure 8.5(a)) représente

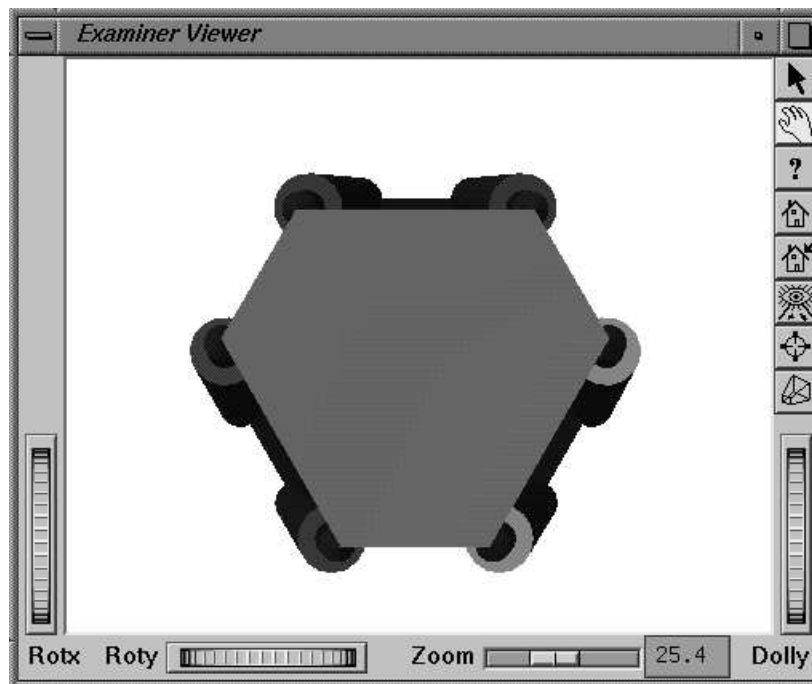
$i$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$	$p'_{ix}$	$p'_{iy}$	$p'_{iz}$
1	92.58	99.64	23.10	30.00	73.00	-37.10
2	132.58	30.36	23.10	78.22	-10.52	-37.10
3	40.00	-130.00	23.10	48.22	-62.48	-37.10
4	-40.00	-130.00	23.10	-48.22	-62.48	-37.10
5	-132.58	30.36	23.10	-78.22	-10.52	-37.10
6	-92.58	99.64	23.10	-30.00	73.00	-37.10

Tableau 8.2: Paramètres géométriques du prototype de l'INRIA (longueurs en mm).

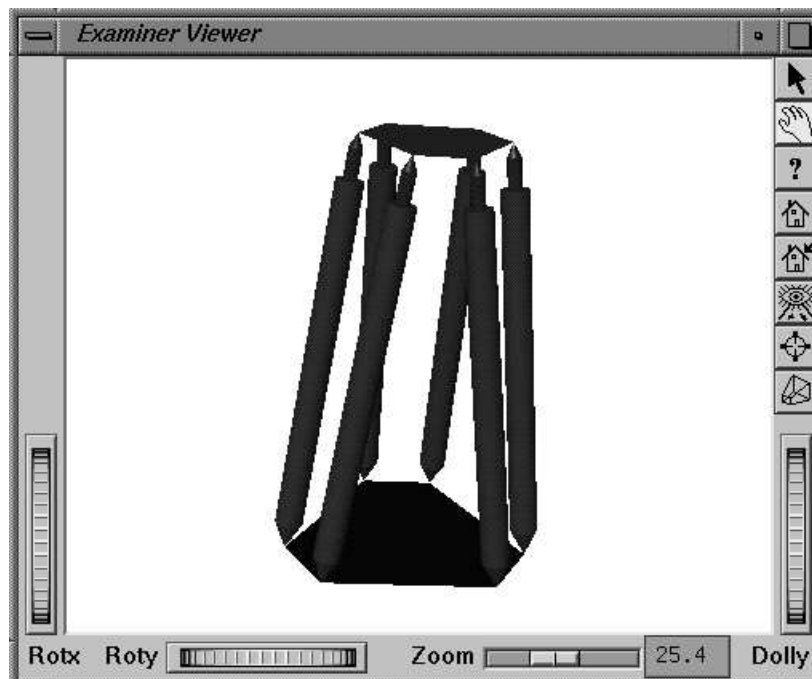
une section de l'espace de travail dans un plan parallèle au plan  $xy$  quand  $z$  est égal à 512 mm. Le second exemple (Figure 8.5(b)) représente une section de l'espace de travail dans un plan parallèle au plan  $xz$  quand  $y$  est égal à -65 mm. Contrairement au mécanisme étudié à la section précédente, on voit très bien ici que les lieux de singularité passent à travers l'espace de travail. On devra donc apporter une attention particulière à la trajectoire du manipulateur s'il doit se déplacer dans l'une ou l'autre des sections de l'espace de travail présentées à la Figure 8.5.

### 8.3 Conclusion

Les exemples donnés ci-haut illustrent bien comment les expressions pour les lieux de singularité peuvent être utilisées dans un contexte de planification de trajectoire. On peut ainsi éviter des positions potentiellement dangereuses pour le mécanisme. D'autre part, elles peuvent aussi être utilisées dans un contexte d'analyse et de conception de manipulateurs parallèles. Des outils interactifs basés sur les algorithmes présentés ici sont d'un grand intérêt puisqu'ils permettent au concepteur d'évaluer les propriétés de certains designs comportant des propriétés cinématiques potentiellement élevées.



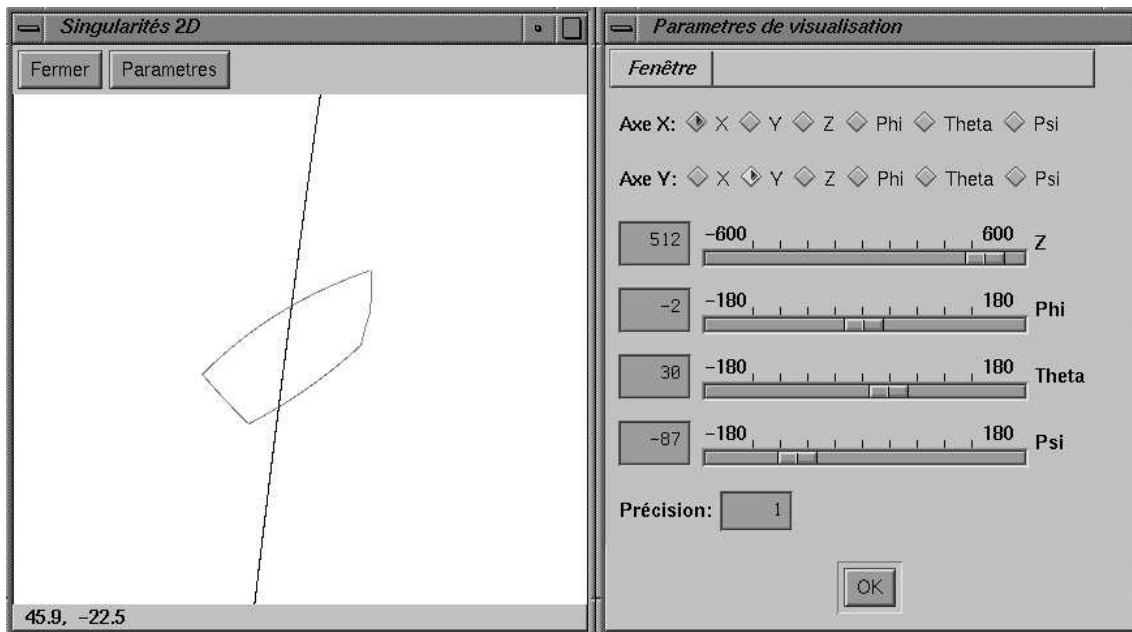
(a) Vue du dessus



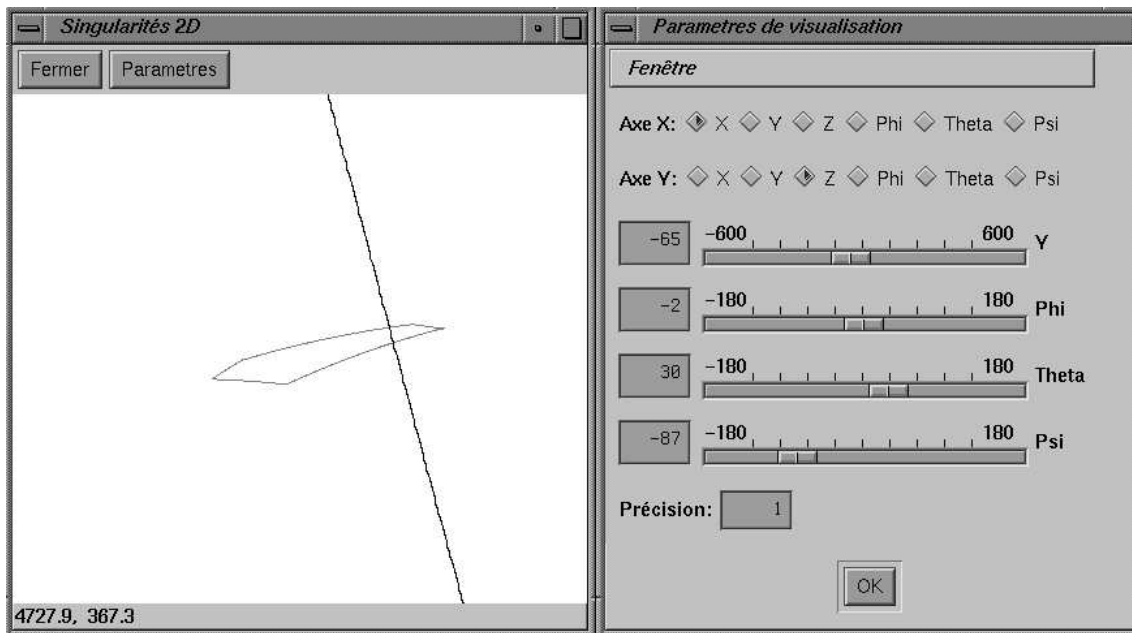
(b) Vue de perspective

Figure 8.4: Prototypé de l'INRIA avec  $z = 512$  mm.





(a)



(b)

Figure 8.5: Section de l'espace de travail pour le prototype de l'INRIA obtenue (a) dans le plan  $xy$ , avec  $z = 512$  mm et (b) dans le plan  $xz$ , avec  $y = -65$  mm, illustrant les lieux de singularité.

# Conclusion

En se reportant au début du mémoire, deux objectifs avaient été identifiés. Le premier consistait à **obtenir une expression analytique représentant les lieux de singularité de type *II*** de la plate-forme de Gough-Stewart. Trois différentes approches ont alors été étudiées, soit l'expansion directe, semi-directe et cascadiée du déterminant. Pour l'expansion directe, il a été démontré qu'elle n'était pas valable pour nous. En fait, aucun résultat n'a été obtenu en utilisant cette approche et ce même avec un modèle cinématique simplifié. Cependant, l'insertion de données numériques nous a permis de constater que la complexité dans le développement du déterminant provenait des éléments de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ . La réécriture de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  en fonction des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  a alors été effectuée.

Cette nouvelle approche, nommée semi-directe, nous a permis d'obtenir une équation représentant l'expression du déterminant. Le résultat était un polynôme de degré 4 avec un degré maximal de 3 en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Cependant, avec 450 pages pour le cas général et 55 pages pour le cas simplifié, cette expression demeurait beaucoup trop longue pour l'utilisation d'outils informatiques interactifs. Une troisième approche, l'expansion cascadiée, a alors été présentée.

Il s'agissait ici de découpler le développement du déterminant en plusieurs étapes. On a alors utilisé les cofacteurs de la première ligne en insérant des coefficients à chacune des étapes. Le polynôme ainsi obtenu était toujours de degré 4 avec un degré maximal

de 3 en  $x$ ,  $y$  et  $z$  mais sa longueur était réduite à 13 pages par l'utilisation d'une cascade de 617 coefficients ( $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  et  $F_i$ ). Tel qu'exprimé dans le théorème 5.1, ce résultat est valide pour tout manipulateur parallèle dont la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  peut être écrite sous la forme de l'équation (5.36). Nous nous sommes donc intéressés aux différents types d'architectures — donc aux définitions des coefficients  $G_i$  à  $U_i$  — reliés à la plate-forme de Gough-Stewart et pour lesquels notre expression s'appliquait.

On a d'abord remarqué que l'équation polynomiale devenait de degré 3 pour l'architecture générale de la plate-forme de Gough-Stewart (théorème 6.1). Puis, on a constaté que pour une base coplanaire, le degré des variables  $x$  et  $y$  était diminué à 2 (théorème 6.2). Ce résultat est demeuré identique pour tous les autres types d'architectures simplifiées qui ont été étudiés (SSM, TSSM, MSSM). Ces différents résultats nous permettent alors d'affirmer que le premier objectif que l'on s'était fixé, c'est-à-dire d'obtenir une expression analytique représentant les lieux de singularité de type *II*, a été atteint.

Avant de réaliser le deuxième objectif, soit d'**obtenir une représentation graphique** des lieux de singularité, une comparaison avec les différents travaux effectués précédemment par d'autres chercheurs a été présentée. C'est ainsi qu'il a été démontré que d'un point de vue analytique et numérique, l'expression représentant les lieux de singularité formulée dans ce mémoire est véridique. La présentation de la géométrie de Grassmann nous a également permis de constater que l'on peut caractériser géométriquement tous les cas de dégénérescence mais qu'il était très difficile de les exprimer mathématiquement. De ce fait, la seule architecture qu'il nous a été donné d'analyser est le MSSM. Il a alors été possible de remarquer que toutes les équations provenant des conditions géométriques pour cette architecture satisfaisaient l'équation obtenue à l'aide de la matrice jacobienne. Il a même été démontré qu'une seule condition géométrique s'appliquait à cette architecture alors que les équations provenant des trois conditions géométriques étaient utilisées. De plus, certaines de ces expressions étaient assez complexes et indiquaient clairement que l'équation obtenue à l'aide de la matrice jacobienne est beaucoup plus simple et conviviale à utiliser.

Enfin, la représentation graphique des lieux de singularité dans l'espace cartésien a été réalisée sur deux mécanismes connus, soit un simulateur de vol de la compagnie CAE Électronique ainsi que sur un prototype de recherche, la main gauche de

l'INRIA. Un outil informatique d'analyse interactif pour la conception et l'optimisation de mécanismes parallèles a alors été utilisé pour représenter différentes sections de l'espace de travail. Les différents exemples qui ont été présentés illustrent bien comment les expressions pour les lieux de singularité peuvent être utilisées dans un contexte de planification de trajectoires. Elles nous permettent de pouvoir identifier les zones où le mécanisme est en configuration singulière dans son espace de travail et ainsi éviter ces postures indésirables en modifiant la trajectoire du manipulateur. D'autre part, ces représentations peuvent aussi être utilisées dans un contexte d'analyse et de conception de manipulateurs parallèles. L'intégration de cette représentation dans un outil informatisé de conception interactif comme nous l'avons fait nous permet une évaluation rapide d'une grande variété de géométries. Il est ainsi possible d'identifier les lieux de singularité dès la conception et d'en minimiser l'impact.

Pour le futur, les travaux de recherche touchant l'expression des lieux de singularité de manipulateurs parallèles peuvent s'étendre sur deux champs. Premièrement, il serait souhaitable que la comparaison avec la géométrie de Grassmann puisse s'élargir aux autres types d'architectures que nous avons étudiés. Il sera alors possible de vérifier si notre équation s'avère plus simple que celles obtenues à partir des conditions géométriques, comme ce fut le cas pour le MSSM. D'autre part, l'algorithme de travail présenté au Chapitre 5 pourrait être appliqué à d'autres types d'architectures de la plate-forme de Gough-Stewart qui n'ont pas été couverts par le présent travail ainsi qu'à d'autres types de manipulateur parallèle à plusieurs degrés de liberté.

À noter que plusieurs résultats présentés ici ont été publiés dans (Mayer St-Onge et Gosselin 1996).

# Bibliographie

- Dandurand, A., (1984), The rigidity of compound spatial grid, *Structural Topology* **10**.
- Fichter, E. F., (1986), A Stewart platform-based manipulator: General theory and practical construction, *The International Journal of Robotics Research*, **Vol. 5, No 2**, pp. 157–182.
- Gosselin, C., (1990), Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators, *ASME Journal of Mechanical Design*, **Vol. 112, No 3**, pp. 331–336.
- Gosselin, C. et Angeles, J., (1990), Singularity analysis of closed-loop kinematic chains, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **Vol. 6, No 3**, pp. 281–290.
- Gosselin, C., Laverdière, S. et Côté, J., (1992a), SIMPA: A graphic simulator for the CAD of parallel manipulators, *Proceedings of the ASME International Computers in Engineering Conference*, **Vol. 1**, pp. 465–471.
- Gosselin, C., Lavoie, E. et Toutant, P., (1992b), An efficient algorithm for the graphical representation of the three-dimensional workspace of parallel manipulators, *Proceedings of the 22nd ASME Mechanisms Conference*, **Vol. 1**, pp. 323–328.

- Gosselin, C., Perreault, L. et Vaillancourt, C., (1995), Simulation and Computer-Aided Kinematic Design of Three-Degree-of-Freedom Spherical Parallel Manipulators, *Journal of Robotic Systems*, **Vol. 12**, **No 12**, pp. 857–869.
- Gosselin, C. et Wang, J., (1995), Singularity loci of planar parallel manipulators, *Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Milano, Italy, **Vol. 3**, pp. 1982–1986.
- Gough, V. E., (1956–57), Contribution to discussion to papers on research in automobile stability and control and in tyre performance, by Cornell staff, *Proceedings of Auto. Div. Instn mech. Engrs*, p. 392.
- Hunt, K. H., (1978), *Kinematic geometry of mechanisms*, Oxford, Great Britain: Oxford University Press.
- Hunt, K. H., (1983), Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, **Vol. 105**, **No 4**, pp. 705–712.
- Hughes, P. C., (1986), *Spacecraft attitude dynamics*, John Wiley and Sons, New-York.
- Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M., (1996), Singularity analysis and representation of spatial six-dof parallel manipulators, *Proceedings of the 5th Recent Advances in Robot Kinematics*, pp. 389–398.
- McCallion, H. et Pham, D. T., (1979), The analysis of a six-degree-of-freedom work station for mechanised assembly, *Proceeding of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, Montréal, Canada, pp. 611–616.
- Merlet, J.-P., (1987), Parallel manipulator, part 1: Theory, design, kinematic, dynamics and control, INRIA Research Report No 646, France.
- Merlet, J.-P., (1988), Parallel manipulator, part 2: Singular configurations and Grassmann geometry, INRIA Research Report No 791, France.
- Merlet, J.-P., (1989), Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry, *The International Journal of Robotics Research*, **Vol. 8**, **No 5**, pp. 45–56.
- Merlet, J.-P., (1990), Les robots parallèles, *Traité des nouvelles Technologies*, Série Robotique, Editions HERMES, France.

- Reboulet, C. et Berthomieu, T., (1991), 'Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulators', *Proceedings of the ICAR*, pp. 1153–1157.
- Reboulet, C. et Robert, A., (1988), Hybrid control of a manipulator with an active compliant wrist, *3th ISRR*, Gouvieux, France, pp. 76–80.
- Salisbury, J.K. et Craig, J.J., (1982), Articulated hands: force control and kinematic issues, *The International Journal of Robotics Research*, **Vol. 1, No 1**, pp. 4–17.
- Sefrioui, J. et Gosselin, C., (1993), Singularity analysis and representation of planar parallel manipulators, *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, **Vol. 10**, pp. 209–224.
- Sefrioui, J. et Gosselin, C., (1994), Étude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques, *Mechanism and Machine Theory*, **Vol. 29, No 4**, pp. 559–579.
- Sefrioui, J. et Gosselin, C., (1995), On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators, *Mechanism and Machine Theory*, **Vol. 30, No 4**, pp. 533–551.
- Stewart, D., (1965), A platform with six degrees of freedom, *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, **Vol. 180, No 15**, pp. 371–378.
- Veblen, O. et Young, J.W., (1910), Projective geometry, *The Athenaeum Press*.
- Waldron, K.J. et Hunt, K.H., (1988), Series-parallel dualities in actively coordinated mechanisms, *Robotics Research 4*, pp. 175–181.
- Zlatanov, D., Fenton, R.G. et Benhabib, B., (1994), Singularity analysis of mechanisms and robots via a motion-space model of the instantaneous kinematics, *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, **Vol. 2**, pp. 980–991.

# Annexe A

## Détails de la décomposition par les cofacteurs de la première ligne

Cette annexe présente en détail la décomposition de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , de dimensions  $6 \times 6$ , par les cofacteurs de la première ligne jusqu'à l'obtention de matrices de dimensions  $3 \times 3$ . Plusieurs résultats inscrits ici sont déjà présentés dans le document principal. Ils ont été insérés dans un souci de clarté.

La matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  associée à la plate-forme de Gough-Stewart est définie d'après les équations (4.2) à (4.19) qui sont

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$



avec

$$a_{i1} = G_i + x, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.2})$$

$$a_{i2} = H_i + y, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.3})$$

$$a_{i3} = K_i + z, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.4})$$

$$a_{i4} = L_i y + M_i z + N_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.5})$$

$$a_{i5} = P_i x + Q_i z + R_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.6})$$

$$a_{i6} = S_i x + T_i y + U_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.7})$$

et où

$$G_i = q_{11}p'_{ix} + q_{12}p'_{iy} + q_{13}p'_{iz} - b_{ix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.8})$$

$$H_i = q_{21}p'_{ix} + q_{22}p'_{iy} + q_{23}p'_{iz} - b_{iy}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.9})$$

$$K_i = q_{31}p'_{ix} + q_{32}p'_{iy} + q_{33}p'_{iz} - b_{iz}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.10})$$

$$L_i = -(K_i + b_{iz}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.11})$$

$$M_i = H_i + b_{iy}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.12})$$

$$N_i = -b_{iy}L_i - b_{iz}M_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.13})$$

$$P_i = -L_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.14})$$

$$Q_i = -(G_i + b_{ix}), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.15})$$

$$R_i = b_{ix}L_i - b_{iz}Q_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.16})$$

$$S_i = -M_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.17})$$

$$T_i = -Q_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.18})$$

$$U_i = b_{ix}M_i + b_{iy}Q_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.19})$$

Le déterminant de la matrice globale est alors décomposé d'après les cofacteurs de la première ligne en 6 déterminants de dimensions  $5 \times 5$ , soit

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12} \det(\mathbf{A}_{12}) + a_{13} \det(\mathbf{A}_{13}) - \\ &\quad a_{14} \det(\mathbf{A}_{14}) + a_{15} \det(\mathbf{A}_{15}) - a_{16} \det(\mathbf{A}_{16}) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

ou plus en détail

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) = & a_{11} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \vdots & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \vdots & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \vdots & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ \vdots & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & \vdots & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & \vdots & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & \vdots & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & \vdots & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & \vdots & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} \\
& + \dots - a_{16} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & \vdots \end{vmatrix} \tag{A.21}
\end{aligned}$$

Ces 6 déterminants sont eux aussi décomposés selon les cofacteurs de la première ligne.

Les déterminants de ces six cofacteurs sont donc

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{11}) = & a_{22} \det(\mathbf{A}_{3456}) - a_{23} \det(\mathbf{A}_{2456}) + a_{24} \det(\mathbf{A}_{2356}) - \\
& a_{25} \det(\mathbf{A}_{2346}) + a_{26} \det(\mathbf{A}_{2345}) \tag{A.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{12}) = & a_{21} \det(\mathbf{A}_{3456}) - a_{23} \det(\mathbf{A}_{1456}) + a_{24} \det(\mathbf{A}_{1356}) - \\
& a_{25} \det(\mathbf{A}_{1346}) + a_{26} \det(\mathbf{A}_{1345}) \tag{A.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{13}) = & a_{21} \det(\mathbf{A}_{2456}) - a_{22} \det(\mathbf{A}_{1456}) + a_{24} \det(\mathbf{A}_{1256}) - \\
& a_{25} \det(\mathbf{A}_{1246}) + a_{26} \det(\mathbf{A}_{1245}) \tag{A.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{14}) = & a_{21} \det(\mathbf{A}_{2356}) - a_{22} \det(\mathbf{A}_{1356}) + a_{23} \det(\mathbf{A}_{1256}) - \\
& a_{25} \det(\mathbf{A}_{1236}) + a_{26} \det(\mathbf{A}_{1235}) \tag{A.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{15}) = & a_{21} \det(\mathbf{A}_{2346}) - a_{22} \det(\mathbf{A}_{1346}) + a_{23} \det(\mathbf{A}_{1246}) - \\
& a_{24} \det(\mathbf{A}_{1236}) + a_{26} \det(\mathbf{A}_{1234}) \tag{A.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{16}) = & a_{21} \det(\mathbf{A}_{2345}) - a_{22} \det(\mathbf{A}_{1345}) + a_{23} \det(\mathbf{A}_{1245}) - \\
& a_{24} \det(\mathbf{A}_{1235}) + a_{25} \det(\mathbf{A}_{1234}) \tag{A.27}
\end{aligned}$$

Par exemple, pour plus de détails, le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_{11}$  est

$$\det(\mathbf{A}_{11}) = a_{22} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \vdots & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \vdots & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ \vdots & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{32} & \vdots & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{42} & \vdots & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{52} & \vdots & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{62} & \vdots & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} \\ + \dots + a_{26} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \vdots \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \vdots \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \vdots \\ a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & \vdots \end{vmatrix} \quad (\text{A.28})$$

En partant des 6 déterminants de dimensions  $5 \times 5$ , le déterminant de 15 matrices de dimensions  $4 \times 4$  doit maintenant être développé. On utilise alors la décomposition selon les cofacteurs de la première ligne pour se retrouver avec des déterminants de matrices de dimensions  $3 \times 3$ . Les déterminants des 15 matrices sont donc

$$\det(\mathbf{A}_{2345}) = a_{32} \det(\mathbf{A}_{345}) - a_{33} \det(\mathbf{A}_{245}) + a_{34} \det(\mathbf{A}_{235}) - a_{35} \det(\mathbf{A}_{234}) \quad (\text{A.29})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1345}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{345}) - a_{33} \det(\mathbf{A}_{145}) + a_{34} \det(\mathbf{A}_{135}) - a_{35} \det(\mathbf{A}_{134}) \quad (\text{A.30})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1245}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{245}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{145}) + a_{34} \det(\mathbf{A}_{125}) - a_{35} \det(\mathbf{A}_{124}) \quad (\text{A.31})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1235}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{235}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{135}) + a_{33} \det(\mathbf{A}_{125}) - a_{35} \det(\mathbf{A}_{123}) \quad (\text{A.32})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1234}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{234}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{134}) + a_{33} \det(\mathbf{A}_{124}) - a_{34} \det(\mathbf{A}_{123}) \quad (\text{A.33})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1236}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{236}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{136}) + a_{33} \det(\mathbf{A}_{126}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{123}) \quad (\text{A.34})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1246}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{246}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{146}) + a_{34} \det(\mathbf{A}_{126}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{124}) \quad (\text{A.35})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1256}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{256}) - a_{32} \det(\mathbf{A}_{156}) + a_{35} \det(\mathbf{A}_{126}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{125}) \quad (\text{A.36})$$

$$\det(\mathbf{A}_{2346}) = a_{32} \det(\mathbf{A}_{346}) - a_{33} \det(\mathbf{A}_{246}) + a_{34} \det(\mathbf{A}_{236}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{234}) \quad (\text{A.37})$$

$$\det(\mathbf{A}_{2356}) = a_{32} \det(\mathbf{A}_{356}) - a_{33} \det(\mathbf{A}_{256}) + a_{35} \det(\mathbf{A}_{236}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{235}) \quad (\text{A.38})$$

$$\det(\mathbf{A}_{2456}) = a_{32} \det(\mathbf{A}_{456}) - a_{34} \det(\mathbf{A}_{256}) + a_{35} \det(\mathbf{A}_{246}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{245}) \quad (\text{A.39})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1346}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{346}) - a_{33} \det(\mathbf{A}_{146}) + a_{34} \det(\mathbf{A}_{136}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{134}) \quad (\text{A.40})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1356}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{356}) - a_{33} \det(\mathbf{A}_{156}) + a_{35} \det(\mathbf{A}_{136}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{135}) \quad (\text{A.41})$$

$$\det(\mathbf{A}_{1456}) = a_{31} \det(\mathbf{A}_{456}) - a_{34} \det(\mathbf{A}_{156}) + a_{35} \det(\mathbf{A}_{146}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{145}) \quad (\text{A.42})$$

$$\det(\mathbf{A}_{3456}) = a_{33} \det(\mathbf{A}_{456}) - a_{34} \det(\mathbf{A}_{356}) + a_{35} \det(\mathbf{A}_{346}) - a_{36} \det(\mathbf{A}_{345}) \quad (\text{A.43})$$

Plus en détail, le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_{3456}$  par exemple est

$$\det(\mathbf{A}_{3456}) = a_{33} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \vdots & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ \vdots & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{43} & \vdots & a_{45} & a_{46} \\ a_{53} & \vdots & a_{55} & a_{56} \\ a_{63} & \vdots & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} +$$

$$a_{35} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{43} & a_{44} & \vdots & a_{46} \\ a_{53} & a_{54} & \vdots & a_{56} \\ a_{63} & a_{64} & \vdots & a_{66} \end{vmatrix} - a_{36} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} & \vdots \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & \vdots \\ a_{63} & a_{64} & a_{65} & \vdots \end{vmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est maintenant divisé en 20 déterminants de matrices de dimensions  $3 \times 3$ . À ce niveau, on développe le déterminant de chacune des matrices et on y insère les coefficients  $F_i$  devant les variables  $xyz$  de la façon suivante: en ordre croissant de degré devant, respectivement, les variables  $z$ ,  $y$  et  $x$ . Par exemple soit la matrice  $3 \times 3$  associée aux lignes 4, 5, et 6 et aux colonnes 3, 4 et 5. Elle est définie comme

$$\mathbf{A}_{345} = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_4 + z) & (L_4y + M_4z + N_4) & (P_4x + Q_4z + R_4) \\ (K_5 + z) & (L_5y + M_5z + N_5) & (P_5x + Q_5z + R_5) \\ (K_6 + z) & (L_6y + M_6z + N_6) & (P_6x + Q_6z + R_6) \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

En insérant des coefficients devant les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ , son déterminant est alors écrit comme

$$\det(\mathbf{A}_{345}) = F_1 + F_2x + F_3y + F_4xy + F_5z + F_6xz + F_7yz + F_8xyz +$$

$$F_9z^2 + F_{10}xz^2 + F_{11}yz^2 + F_{12}z^3 \quad (\text{A.46})$$

En suivant cette procédure, on insère

$F_1$ à $F_{12}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{345}$
$F_{13}$ à $F_{25}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{245}$
$F_{26}$ à $F_{33}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{235}$
$F_{34}$ à $F_{39}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{234}$
$F_{40}$ à $F_{52}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{145}$

$F_{53}$ à $F_{58}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{135}$
$F_{59}$ à $F_{66}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{134}$
$F_{67}$ à $F_{74}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{125}$
$F_{75}$ à $F_{82}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{124}$
$F_{83}$ à $F_{86}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{123}$
$F_{87}$ à $F_{92}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{126}$
$F_{93}$ à $F_{100}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{136}$
$F_{101}$ à $F_{113}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{146}$
$F_{114}$ à $F_{125}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{156}$
$F_{126}$ à $F_{133}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{236}$
$F_{134}$ à $F_{145}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{246}$
$F_{146}$ à $F_{158}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{256}$
$F_{159}$ à $F_{171}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{346}$
$F_{172}$ à $F_{184}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{356}$
$F_{185}$ à $F_{201}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{456}$

Les expressions des coefficients  $F_i$  sont données à l'Annexe B. Les 20 déterminants des matrices de dimensions  $3 \times 3$  sont ainsi tous écrits sous la forme de l'équation (A.46). On remonte maintenant aux matrices de dimensions  $4 \times 4$ . Par exemple, l'expression du déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_{3456}$  (équation (A.43)) sera

$$\det(\mathbf{A}_{3456}) = (K_3 + z) \det(\mathbf{A}_{456}) - (L_3 y + M_3 z + N_3) \det(\mathbf{A}_{356}) + (P_3 x + Q_3 z + R_3) \det(\mathbf{A}_{346}) - (S_3 x + T_3 y + U_3) \det(\mathbf{A}_{345}) \quad (\text{A.47})$$

où les déterminants des matrices de dimensions  $3 \times 3$  dépendent des coefficients  $F_i$ . On développe alors le déterminant des matrices de dimensions  $4 \times 4$  et on y insère les coefficients  $E_i$  de la même façon que précédemment, c'est-à-dire par ordre croissant de degré devant respectivement les variables  $z$ ,  $y$  et  $x$ . Ainsi, on insère les coefficients

$E_1$ à $E_{15}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{2345}$
$E_{16}$ à $E_{30}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1345}$
$E_{31}$ à $E_{47}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1245}$
$E_{48}$ à $E_{56}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1235}$

$E_{57}$ à $E_{65}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1234}$
$E_{66}$ à $E_{74}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1236}$
$E_{75}$ à $E_{89}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1246}$
$E_{90}$ à $E_{104}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1256}$
$E_{105}$ à $E_{119}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{2346}$
$E_{120}$ à $E_{136}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{2356}$
$E_{137}$ à $E_{161}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{2456}$
$E_{162}$ à $E_{178}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1346}$
$E_{179}$ à $E_{193}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1356}$
$E_{194}$ à $E_{218}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{1456}$
$E_{219}$ à $E_{243}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{3456}$

Les expressions des coefficients  $E_i$  sont données à l'Annexe C. Les 15 déterminants des matrices de dimensions  $4 \times 4$  sont ainsi écrits sous la forme de l'équation (A.46) mais avec des coefficients  $E_i$ . On s'attaque alors aux matrices de dimensions  $5 \times 5$ . Par exemple, l'expression du déterminant de la matrice  $\mathbf{A}_{11}$  (équation (A.22)) sera

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{11}) = & (H_2 + y) \det(\mathbf{A}_{3456}) - (K_2 + z) \det(\mathbf{A}_{2456}) + \\
& (L_2y + M_2z + N_2) \det(\mathbf{A}_{2356}) - (P_2x + Q_2z + R_2) \det(\mathbf{A}_{2346}) + \\
& (S_2x + T_2y + U_2) \det(\mathbf{A}_{2345})
\end{aligned} \tag{A.48}$$

où les déterminants des matrices de dimensions  $4 \times 4$  dépendent des coefficients  $E_i$ . On développe alors le déterminant des matrices de dimensions  $5 \times 5$  et on y insère les coefficients  $D_i$  de la même façon que précédemment, c'est-à-dire par ordre croissant de degré devant respectivement les variables  $z$ ,  $y$  et  $x$ . Ainsi, on insère les coefficients

$D_1$ à $D_{29}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{11}$
$D_{30}$ à $D_{58}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{12}$
$D_{59}$ à $D_{87}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{13}$
$D_{88}$ à $D_{105}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{14}$
$D_{106}$ à $D_{123}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{15}$
$D_{124}$ à $D_{141}$	dans le déterminant de la matrice	$\mathbf{A}_{16}$

Les expressions des coefficients  $D_i$  sont données à l'Annexe D. Les 6 déterminants des matrices de dimensions  $5 \times 5$  sont ainsi écrits sous la forme de l'équation (A.46) mais avec des coefficients  $D_i$ . Il ne reste plus que la matrice de dimensions  $6 \times 6$ . L'expression de son déterminant (équation (A.20)) sera donc

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = & (G_1 + x) \det(\mathbf{A}_{11}) - (H_1 + y) \det(\mathbf{A}_{12}) + (K_1 + z) \det(\mathbf{A}_{13}) - \\ & (L_1 y + M_1 z + N_1) \det(\mathbf{A}_{14}) + (P_1 x + Q_1 z + R_1) \det(\mathbf{A}_{15}) - \\ & (S_1 x + T_1 y + U_1) \det(\mathbf{A}_{16}) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

où les déterminants des matrices de dimensions  $5 \times 5$  dépendent des coefficients  $D_i$ . On développe alors le déterminant et on y insère les 32 coefficients  $C_i$ . Leur expression est donnée à l'Annexe E. L'équation ainsi obtenue est représentée à la section 5.3.

# Annexe B

## Coefficients $F_i$

Voici les coefficients  $F_i, i = 1, 2, \dots, 201$ .

$$F_1 = -K_6 N_5 R_4 + K_5 N_6 R_4 + K_6 N_4 R_5 - K_4 N_6 R_5 - K_5 N_4 R_6 + K_4 N_5 R_6 \quad (\text{B.1})$$

$$F_2 = -K_6 N_5 P_4 + K_5 N_6 P_4 + K_6 N_4 P_5 - K_4 N_6 P_5 - K_5 N_4 P_6 + K_4 N_5 P_6 \quad (\text{B.2})$$

$$F_3 = -K_6 L_5 R_4 + K_5 L_6 R_4 + K_6 L_4 R_5 - K_4 L_6 R_5 - K_5 L_4 R_6 + K_4 L_5 R_6 \quad (\text{B.3})$$

$$F_4 = -K_6 L_5 P_4 + K_5 L_6 P_4 + K_6 L_4 P_5 - K_4 L_6 P_5 - K_5 L_4 P_6 + K_4 L_5 P_6 \quad (\text{B.4})$$

$$F_5 = -N_5 R_4 + N_6 R_4 + N_4 R_5 - N_6 R_5 - N_4 R_6 + N_5 R_6 - K_6 N_5 Q_4 + K_5 N_6 Q_4 + K_6 N_4 Q_5 - K_4 N_6 Q_5 - K_5 N_4 Q_6 + K_4 N_5 Q_6 - K_6 M_5 R_4 + K_5 M_6 R_4 + K_6 M_4 R_5 - K_4 M_6 R_5 - K_5 M_4 R_6 + K_4 M_5 R_6 \quad (\text{B.5})$$

$$F_6 = -K_6 M_5 P_4 + K_5 M_6 P_4 - N_5 P_4 + N_6 P_4 + K_6 M_4 P_5 - K_4 M_6 P_5 + N_4 P_5 - N_6 P_5 - K_5 M_4 P_6 + K_4 M_5 P_6 - N_4 P_6 + N_5 P_6 \quad (\text{B.6})$$

$$F_7 = -K_6 L_5 Q_4 + K_5 L_6 Q_4 + K_6 L_4 Q_5 - K_4 L_6 Q_5 - K_5 L_4 Q_6 + K_4 L_5 Q_6 - L_5 R_4 + L_6 R_4 + L_4 R_5 - L_6 R_5 - L_4 R_6 + L_5 R_6 \quad (\text{B.7})$$

$$F_8 = -L_5 P_4 + L_6 P_4 + L_4 P_5 - L_6 P_5 - L_4 P_6 + L_5 P_6 \quad (\text{B.8})$$

$$F_9 = -K_6 M_5 Q_4 + K_5 M_6 Q_4 - N_5 Q_4 + N_6 Q_4 + K_6 M_4 Q_5 - K_4 M_6 Q_5 + N_4 Q_5 - N_6 Q_5 - K_5 M_4 Q_6 + K_4 M_5 Q_6 - N_4 Q_6 + N_5 Q_6 - M_5 R_4 + M_6 R_4 + M_4 R_5 - M_6 R_5 - M_4 R_6 + M_5 R_6 \quad (\text{B.9})$$

$$F_{10} = -M_5 P_4 + M_6 P_4 + M_4 P_5 - M_6 P_5 - M_4 P_6 + M_5 P_6 \quad (\text{B.10})$$

$$F_{11} = -L_5 Q_4 + L_6 Q_4 + L_4 Q_5 - L_6 Q_5 - L_4 Q_6 + L_5 Q_6 \quad (\text{B.11})$$

$$F_{12} = -M_5 Q_4 + M_6 Q_4 + M_4 Q_5 - M_6 Q_5 - M_4 Q_6 + M_5 Q_6 \quad (\text{B.12})$$

$$F_{13} = -H_6 N_5 R_4 + H_5 N_6 R_4 + H_6 N_4 R_5 - H_4 N_6 R_5 - H_5 N_4 R_6 + H_4 N_5 R_6 \quad (\text{B.13})$$

$$F_{14} = -H_6 N_5 P_4 + H_5 N_6 P_4 + H_6 N_4 P_5 - H_4 N_6 P_5 - H_5 N_4 P_6 + H_4 N_5 P_6 \quad (\text{B.14})$$



$$F_{15} = -H_6 L_5 R_4 + H_5 L_6 R_4 - N_5 R_4 + N_6 R_4 + H_6 L_4 R_5 - H_4 L_6 R_5 + N_4 R_5 - N_6 R_5 - H_5 L_4 R_6 + H_4 L_5 R_6 - N_4 R_6 + N_5 R_6 \quad (\text{B.15})$$

$$F_{16} = -H_6 L_5 P_4 + H_5 L_6 P_4 - N_5 P_4 + N_6 P_4 + H_6 L_4 P_5 - H_4 L_6 P_5 + N_4 P_5 - N_6 P_5 - H_5 L_4 P_6 + H_4 L_5 P_6 - N_4 P_6 + N_5 P_6 \quad (\text{B.16})$$

$$F_{17} = -L_5 R_4 + L_6 R_4 + L_4 R_5 - L_6 R_5 - L_4 R_6 + L_5 R_6 \quad (\text{B.17})$$

$$F_{18} = -L_5 P_4 + L_6 P_4 + L_4 P_5 - L_6 P_5 - L_4 P_6 + L_5 P_6 \quad (\text{B.18})$$

$$F_{19} = -H_6 N_5 Q_4 + H_5 N_6 Q_4 + H_6 N_4 Q_5 - H_4 N_6 Q_5 - H_5 N_4 Q_6 + H_4 N_5 Q_6 - H_6 M_5 R_4 + H_5 M_6 R_4 + H_6 M_4 R_5 - H_4 M_6 R_5 - H_5 M_4 R_6 + H_4 M_5 R_6 \quad (\text{B.19})$$

$$F_{20} = -H_6 M_5 P_4 + H_5 M_6 P_4 + H_6 M_4 P_5 - H_4 M_6 P_5 - H_5 M_4 P_6 + H_4 M_5 P_6 \quad (\text{B.20})$$

$$F_{21} = -H_6 L_5 Q_4 + H_5 L_6 Q_4 - N_5 Q_4 + N_6 Q_4 + H_6 L_4 Q_5 - H_4 L_6 Q_5 + N_4 Q_5 - N_6 Q_5 - H_5 L_4 Q_6 + H_4 L_5 Q_6 - N_4 Q_6 + N_5 Q_6 - M_5 R_4 + M_6 R_4 + M_4 R_5 - M_6 R_5 - M_4 R_6 + M_5 R_6 \quad (\text{B.21})$$

$$F_{22} = -M_5 P_4 + M_6 P_4 + M_4 P_5 - M_6 P_5 - M_4 P_6 + M_5 P_6 \quad (\text{B.22})$$

$$F_{23} = -L_5 Q_4 + L_6 Q_4 + L_4 Q_5 - L_6 Q_5 - L_4 Q_6 + L_5 Q_6 \quad (\text{B.23})$$

$$F_{24} = -H_6 M_5 Q_4 + H_5 M_6 Q_4 + H_6 M_4 Q_5 - H_4 M_6 Q_5 - H_5 M_4 Q_6 + H_4 M_5 Q_6 \quad (\text{B.24})$$

$$F_{25} = -M_5 Q_4 + M_6 Q_4 + M_4 Q_5 - M_6 Q_5 - M_4 Q_6 + M_5 Q_6 \quad (\text{B.25})$$

$$F_{26} = -H_6 K_5 R_4 + H_5 K_6 R_4 + H_6 K_4 R_5 - H_4 K_6 R_5 - H_5 K_4 R_6 + H_4 K_5 R_6 \quad (\text{B.26})$$

$$F_{27} = -H_6 K_5 P_4 + H_5 K_6 P_4 + H_6 K_4 P_5 - H_4 K_6 P_5 - H_5 K_4 P_6 + H_4 K_5 P_6 \quad (\text{B.27})$$

$$F_{28} = -K_5 R_4 + K_6 R_4 + K_4 R_5 - K_6 R_5 - K_4 R_6 + K_5 R_6 \quad (\text{B.28})$$

$$F_{29} = -K_5 P_4 + K_6 P_4 + K_4 P_5 - K_6 P_5 - K_4 P_6 + K_5 P_6 \quad (\text{B.29})$$

$$F_{30} = -H_6 K_5 Q_4 + H_5 K_6 Q_4 + H_6 K_4 Q_5 - H_4 K_6 Q_5 - H_5 K_4 Q_6 + H_4 K_5 Q_6 + H_5 R_4 - H_6 R_4 - H_4 R_5 + H_6 R_5 + H_4 R_6 - H_5 R_6 \quad (\text{B.30})$$

$$F_{31} = H_5 P_4 - H_6 P_4 - H_4 P_5 + H_6 P_5 + H_4 P_6 - H_5 P_6 \quad (\text{B.31})$$

$$F_{32} = -K_5 Q_4 + K_6 Q_4 + K_4 Q_5 - K_6 Q_5 - K_4 Q_6 + K_5 Q_6 \quad (\text{B.32})$$

$$F_{33} = H_5 Q_4 - H_6 Q_4 - H_4 Q_5 + H_6 Q_5 + H_4 Q_6 - H_5 Q_6 \quad (\text{B.33})$$

$$F_{34} = -H_6 K_5 N_4 + H_5 K_6 N_4 + H_6 K_4 N_5 - H_4 K_6 N_5 - H_5 K_4 N_6 + H_4 K_5 N_6 \quad (\text{B.34})$$

$$F_{35} = -H_6 K_5 L_4 + H_5 K_6 L_4 + H_6 K_4 L_5 - H_4 K_6 L_5 - H_5 K_4 L_6 + H_4 K_5 L_6 - K_5 N_4 + K_6 N_4 + K_4 N_5 - K_6 N_5 - K_4 N_6 + K_5 N_6 \quad (\text{B.35})$$

$$F_{36} = -K_5 L_4 + K_6 L_4 + K_4 L_5 - K_6 L_5 - K_4 L_6 + K_5 L_6 \quad (\text{B.36})$$

$$F_{37} = -H_6 K_5 M_4 + H_5 K_6 M_4 + H_6 K_4 M_5 - H_4 K_6 M_5 - H_5 K_4 M_6 + H_4 K_5 M_6 + H_5 N_4 - H_6 N_4 - H_4 N_5 + H_6 N_5 + H_4 N_6 - H_5 N_6 \quad (\text{B.37})$$

$$F_{38} = H_5 L_4 - H_6 L_4 - H_4 L_5 + H_6 L_5 + H_4 L_6 - H_5 L_6 - K_5 M_4 + K_6 M_4 + K_4 M_5 - K_6 M_5 - K_4 M_6 + K_5 M_6 \quad (\text{B.38})$$

$$F_{39} = H_5 M_4 - H_6 M_4 - H_4 M_5 + H_6 M_5 + H_4 M_6 - H_5 M_6 \quad (\text{B.39})$$

$$F_{40} = -G_6 N_5 R_4 + G_5 N_6 R_4 + G_6 N_4 R_5 - G_4 N_6 R_5 - G_5 N_4 R_6 + G_4 N_5 R_6 \quad (\text{B.40})$$

$$F_{41} = -G_6 N_5 P_4 + G_5 N_6 P_4 + G_6 N_4 P_5 - G_4 N_6 P_5 - G_5 N_4 P_6 + G_4 N_5 P_6 - N_5 R_4 + N_6 R_4 + N_4 R_5 - N_6 R_5 - N_4 R_6 + N_5 R_6 \quad (\text{B.41})$$

$$F_{42} = -N_5 P_4 + N_6 P_4 + N_4 P_5 - N_6 P_5 - N_4 P_6 + N_5 P_6 \quad (\text{B.42})$$

$$F_{43} = -G_6 L_5 R_4 + G_5 L_6 R_4 + G_6 L_4 R_5 - G_4 L_6 R_5 - G_5 L_4 R_6 + G_4 L_5 R_6 \quad (\text{B.43})$$

$$F_{44} = -G_6 L_5 P_4 + G_5 L_6 P_4 + G_6 L_4 P_5 - G_4 L_6 P_5 - G_5 L_4 P_6 + G_4 L_5 P_6 - L_5 R_4 + L_6 R_4 + L_4 R_5 - L_6 R_5 - L_4 R_6 + L_5 R_6 \quad (\text{B.44})$$

$$F_{45} = -L_5 P_4 + L_6 P_4 + L_4 P_5 - L_6 P_5 - L_4 P_6 + L_5 P_6 \quad (\text{B.45})$$

$$F_{46} = -G_6 N_5 Q_4 + G_5 N_6 Q_4 + G_6 N_4 Q_5 - G_4 N_6 Q_5 - G_5 N_4 Q_6 + G_4 N_5 Q_6 - G_6 M_5 R_4 + G_5 M_6 R_4 + G_6 M_4 R_5 - G_4 M_6 R_5 - G_5 M_4 R_6 + G_4 M_5 R_6 \quad (\text{B.46})$$

$$F_{47} = -G_6 M_5 P_4 + G_5 M_6 P_4 + G_6 M_4 P_5 - G_4 M_6 P_5 - G_5 M_4 P_6 + G_4 M_5 P_6 - N_5 Q_4 + N_6 Q_4 + N_4 Q_5 - N_6 Q_5 - N_4 Q_6 + N_5 Q_6 - M_5 R_4 + M_6 R_4 + M_4 R_5 - M_6 R_5 - M_4 R_6 + M_5 R_6 \quad (\text{B.47})$$

$$F_{48} = -M_5 P_4 + M_6 P_4 + M_4 P_5 - M_6 P_5 - M_4 P_6 + M_5 P_6 \quad (\text{B.48})$$

$$F_{49} = -G_6 L_5 Q_4 + G_5 L_6 Q_4 + G_6 L_4 Q_5 - G_4 L_6 Q_5 - G_5 L_4 Q_6 + G_4 L_5 Q_6 \quad (\text{B.49})$$

$$F_{50} = -L_5 Q_4 + L_6 Q_4 + L_4 Q_5 - L_6 Q_5 - L_4 Q_6 + L_5 Q_6 \quad (\text{B.50})$$

$$F_{51} = -G_6 M_5 Q_4 + G_5 M_6 Q_4 + G_6 M_4 Q_5 - G_4 M_6 Q_5 - G_5 M_4 Q_6 + G_4 M_5 Q_6 \quad (\text{B.51})$$

$$F_{52} = -M_5 Q_4 + M_6 Q_4 + M_4 Q_5 - M_6 Q_5 - M_4 Q_6 + M_5 Q_6 \quad (\text{B.52})$$

$$F_{53} = -G_6 K_5 R_4 + G_5 K_6 R_4 + G_6 K_4 R_5 - G_4 K_6 R_5 - G_5 K_4 R_6 + G_4 K_5 R_6 \quad (\text{B.53})$$

$$F_{54} = -G_6 K_5 P_4 + G_5 K_6 P_4 + G_6 K_4 P_5 - G_4 K_6 P_5 - G_5 K_4 P_6 + G_4 K_5 P_6 - K_5 R_4 + K_6 R_4 + K_4 R_5 - K_6 R_5 - K_4 R_6 + K_5 R_6 \quad (\text{B.54})$$

$$F_{55} = -K_5 P_4 + K_6 P_4 + K_4 P_5 - K_6 P_5 - K_4 P_6 + K_5 P_6 \quad (\text{B.55})$$

$$F_{56} = -G_6 K_5 Q_4 + G_5 K_6 Q_4 + G_6 K_4 Q_5 - G_4 K_6 Q_5 - G_5 K_4 Q_6 + G_4 K_5 Q_6 + G_5 R_4 - G_6 R_4 - G_4 R_5 + G_6 R_5 + G_4 R_6 - G_5 R_6 \quad (\text{B.56})$$

$$F_{57} = G_5 P_4 - G_6 P_4 - G_4 P_5 + G_6 P_5 + G_4 P_6 - G_5 P_6 - K_5 Q_4 + K_6 Q_4 + K_4 Q_5 - K_6 Q_5 - K_4 Q_6 + K_5 Q_6 \quad (\text{B.57})$$

$$F_{58} = G_5 Q_4 - G_6 Q_4 - G_4 Q_5 + G_6 Q_5 + G_4 Q_6 - G_5 Q_6 \quad (\text{B.58})$$

$$F_{59} = -G_6 K_5 N_4 + G_5 K_6 N_4 + G_6 K_4 N_5 - G_4 K_6 N_5 - G_5 K_4 N_6 + G_4 K_5 N_6 \quad (\text{B.59})$$

$$F_{60} = -K_5 N_4 + K_6 N_4 + K_4 N_5 - K_6 N_5 - K_4 N_6 + K_5 N_6 \quad (\text{B.60})$$

$$F_{61} = -G_6 K_5 L_4 + G_5 K_6 L_4 + G_6 K_4 L_5 - G_4 K_6 L_5 - G_5 K_4 L_6 + G_4 K_5 L_6 \quad (\text{B.61})$$

$$F_{62} = -K_5 L_4 + K_6 L_4 + K_4 L_5 - K_6 L_5 - K_4 L_6 + K_5 L_6 \quad (\text{B.62})$$

$$F_{63} = -G_6 K_5 M_4 + G_5 K_6 M_4 + G_6 K_4 M_5 - G_4 K_6 M_5 - G_5 K_4 M_6 + G_4 K_5 M_6 + G_5 N_4 - G_6 N_4 - G_4 N_5 + G_6 N_5 + G_4 N_6 - G_5 N_6 \quad (\text{B.63})$$

$$F_{64} = -K_5 M_4 + K_6 M_4 + K_4 M_5 - K_6 M_5 - K_4 M_6 + K_5 M_6 \quad (\text{B.64})$$

$$F_{65} = G_5 L_4 - G_6 L_4 - G_4 L_5 + G_6 L_5 + G_4 L_6 - G_5 L_6 \quad (\text{B.65})$$

$$F_{66} = G_5 M_4 - G_6 M_4 - G_4 M_5 + G_6 M_5 + G_4 M_6 - G_5 M_6 \quad (\text{B.66})$$

$$F_{67} = -G_6 H_5 R_4 + G_5 H_6 R_4 + G_6 H_4 R_5 - G_4 H_6 R_5 - G_5 H_4 R_6 + G_4 H_5 R_6 \quad (\text{B.67})$$

$$F_{68} = -G_6 H_5 P_4 + G_5 H_6 P_4 + G_6 H_4 P_5 - G_4 H_6 P_5 - G_5 H_4 P_6 + G_4 H_5 P_6 - H_5 R_4 + H_6 R_4 + H_4 R_5 - H_6 R_5 - H_4 R_6 + H_5 R_6 \quad (\text{B.68})$$

$$F_{69} = -H_5 P_4 + H_6 P_4 + H_4 P_5 - H_6 P_5 - H_4 P_6 + H_5 P_6 \quad (\text{B.69})$$

$$F_{70} = G_5 R_4 - G_6 R_4 - G_4 R_5 + G_6 R_5 + G_4 R_6 - G_5 R_6 \quad (\text{B.70})$$

$$F_{71} = G_5 P_4 - G_6 P_4 - G_4 P_5 + G_6 P_5 + G_4 P_6 - G_5 P_6 \quad (\text{B.71})$$

$$F_{72} = -G_6 H_5 Q_4 + G_5 H_6 Q_4 + G_6 H_4 Q_5 - G_4 H_6 Q_5 - G_5 H_4 Q_6 + G_4 H_5 Q_6 \quad (\text{B.72})$$

$$F_{73} = -H_5 Q_4 + H_6 Q_4 + H_4 Q_5 - H_6 Q_5 - H_4 Q_6 + H_5 Q_6 \quad (\text{B.73})$$

$$F_{74} = G_5 Q_4 - G_6 Q_4 - G_4 Q_5 + G_6 Q_5 + G_4 Q_6 - G_5 Q_6 \quad (\text{B.74})$$

$$F_{75} = -G_6 H_5 N_4 + G_5 H_6 N_4 + G_6 H_4 N_5 - G_4 H_6 N_5 - G_5 H_4 N_6 + G_4 H_5 N_6 \quad (\text{B.75})$$

$$F_{76} = -H_5 N_4 + H_6 N_4 + H_4 N_5 - H_6 N_5 - H_4 N_6 + H_5 N_6 \quad (\text{B.76})$$

$$F_{77} = -G_6 H_5 L_4 + G_5 H_6 L_4 + G_6 H_4 L_5 - G_4 H_6 L_5 - G_5 H_4 L_6 + G_4 H_5 L_6 + G_5 N_4 - G_6 N_4 - G_4 N_5 + G_6 N_5 + G_4 N_6 - G_5 N_6 \quad (\text{B.77})$$

$$F_{78} = -H_5 L_4 + H_6 L_4 + H_4 L_5 - H_6 L_5 - H_4 L_6 + H_5 L_6 \quad (\text{B.78})$$

$$F_{79} = G_5 L_4 - G_6 L_4 - G_4 L_5 + G_6 L_5 + G_4 L_6 - G_5 L_6 \quad (\text{B.79})$$

$$F_{80} = -G_6 H_5 M_4 + G_5 H_6 M_4 + G_6 H_4 M_5 - G_4 H_6 M_5 - G_5 H_4 M_6 + G_4 H_5 M_6 \quad (\text{B.80})$$

$$F_{81} = -H_5 M_4 + H_6 M_4 + H_4 M_5 - H_6 M_5 - H_4 M_6 + H_5 M_6 \quad (\text{B.81})$$

$$F_{82} = G_5 M_4 - G_6 M_4 - G_4 M_5 + G_6 M_5 + G_4 M_6 - G_5 M_6 \quad (\text{B.82})$$

$$F_{83} = -G_6 H_5 K_4 + G_5 H_6 K_4 + G_6 H_4 K_5 - G_4 H_6 K_5 - G_5 H_4 K_6 + G_4 H_5 K_6 \quad (\text{B.83})$$

$$F_{84} = -H_5 K_4 + H_6 K_4 + H_4 K_5 - H_6 K_5 - H_4 K_6 + H_5 K_6 \quad (\text{B.84})$$

$$F_{85} = G_5 K_4 - G_6 K_4 - G_4 K_5 + G_6 K_5 + G_4 K_6 - G_5 K_6 \quad (\text{B.85})$$

$$F_{86} = -G_5 H_4 + G_6 H_4 + G_4 H_5 - G_6 H_5 - G_4 H_6 + G_5 H_6 \quad (\text{B.86})$$

$$F_{87} = -G_6 H_5 U_4 + G_5 H_6 U_4 + G_6 H_4 U_5 - G_4 H_6 U_5 - G_5 H_4 U_6 + G_4 H_5 U_6 \quad (\text{B.87})$$

$$F_{88} = -G_6 H_5 S_4 + G_5 H_6 S_4 + G_6 H_4 S_5 - G_4 H_6 S_5 - G_5 H_4 S_6 + G_4 H_5 S_6 - H_5 U_4 + H_6 U_4 + H_4 U_5 - H_6 U_5 - H_4 U_6 + H_5 U_6 \quad (\text{B.88})$$

$$F_{89} = -H_5 S_4 + H_6 S_4 + H_4 S_5 - H_6 S_5 - H_4 S_6 + H_5 S_6 \quad (\text{B.89})$$

$$F_{90} = -G_6 H_5 T_4 + G_5 H_6 T_4 + G_6 H_4 T_5 - G_4 H_6 T_5 - G_5 H_4 T_6 + G_4 H_5 T_6 + G_5 U_4 - G_6 U_4 - G_4 U_5 + G_6 U_5 + G_4 U_6 - G_5 U_6 \quad (\text{B.90})$$

$$F_{91} = G_5 S_4 - G_6 S_4 - G_4 S_5 + G_6 S_5 + G_4 S_6 - G_5 S_6 - H_5 T_4 + H_6 T_4 + H_4 T_5 - H_6 T_5 - H_4 T_6 + H_5 T_6 \quad (\text{B.91})$$

$$F_{92} = G_5 T_4 - G_6 T_4 - G_4 T_5 + G_6 T_5 + G_4 T_6 - G_5 T_6 \quad (\text{B.92})$$

$$F_{93} = -G_6 K_5 U_4 + G_5 K_6 U_4 + G_6 K_4 U_5 - G_4 K_6 U_5 - G_5 K_4 U_6 + G_4 K_5 U_6 \quad (\text{B.93})$$

$$F_{94} = -G_6 K_5 S_4 + G_5 K_6 S_4 + G_6 K_4 S_5 - G_4 K_6 S_5 - G_5 K_4 S_6 + G_4 K_5 S_6 - K_5 U_4 + K_6 U_4 + K_4 U_5 - K_6 U_5 - K_4 U_6 + K_5 U_6 \quad (\text{B.94})$$

$$F_{95} = -K_5 S_4 + K_6 S_4 + K_4 S_5 - K_6 S_5 - K_4 S_6 + K_5 S_6 \quad (\text{B.95})$$

$$F_{96} = -G_6 K_5 T_4 + G_5 K_6 T_4 + G_6 K_4 T_5 - G_4 K_6 T_5 - G_5 K_4 T_6 + G_4 K_5 T_6 \quad (\text{B.96})$$

$$F_{97} = -K_5 T_4 + K_6 T_4 + K_4 T_5 - K_6 T_5 - K_4 T_6 + K_5 T_6 \quad (\text{B.97})$$

$$F_{98} = G_5 U_4 - G_6 U_4 - G_4 U_5 + G_6 U_5 + G_4 U_6 - G_5 U_6 \quad (\text{B.98})$$

$$F_{99} = G_5 S_4 - G_6 S_4 - G_4 S_5 + G_6 S_5 + G_4 S_6 - G_5 S_6 \quad (\text{B.99})$$

$$F_{100} = G_5 T_4 - G_6 T_4 - G_4 T_5 + G_6 T_5 + G_4 T_6 - G_5 T_6 \quad (\text{B.100})$$

$$F_{101} = -G_6 N_5 U_4 + G_5 N_6 U_4 + G_6 N_4 U_5 - G_4 N_6 U_5 - G_5 N_4 U_6 + G_4 N_5 U_6 \quad (\text{B.101})$$

$$F_{102} = -G_6 N_5 S_4 + G_5 N_6 S_4 + G_6 N_4 S_5 - G_4 N_6 S_5 - G_5 N_4 S_6 + G_4 N_5 S_6 - N_5 U_4 + N_6 U_4 + N_4 U_5 - N_6 U_5 - N_4 U_6 + N_5 U_6 \quad (\text{B.102})$$

$$F_{103} = -N_5 S_4 + N_6 S_4 + N_4 S_5 - N_6 S_5 - N_4 S_6 + N_5 S_6 \quad (\text{B.103})$$

$$F_{104} = -G_6 N_5 T_4 + G_5 N_6 T_4 + G_6 N_4 T_5 - G_4 N_6 T_5 - G_5 N_4 T_6 + G_4 N_5 T_6 - G_6 L_5 U_4 + G_5 L_6 U_4 + G_6 L_4 U_5 - G_4 L_6 U_5 - G_5 L_4 U_6 + G_4 L_5 U_6 \quad (\text{B.104})$$

$$F_{105} = -G_6 L_5 S_4 + G_5 L_6 S_4 + G_6 L_4 S_5 - G_4 L_6 S_5 - G_5 L_4 S_6 + G_4 L_5 S_6 - N_5 T_4 + N_6 T_4 + N_4 T_5 - N_6 T_5 - N_4 T_6 + N_5 T_6 - L_5 U_4 + L_6 U_4 + L_4 U_5 - L_6 U_5 - L_4 U_6 + L_5 U_6 \quad (\text{B.105})$$

$$F_{106} = -L_5 S_4 + L_6 S_4 + L_4 S_5 - L_6 S_5 - L_4 S_6 + L_5 S_6 \quad (\text{B.106})$$

$$F_{107} = -G_6 L_5 T_4 + G_5 L_6 T_4 + G_6 L_4 T_5 - G_4 L_6 T_5 - G_5 L_4 T_6 + G_4 L_5 T_6 \quad (\text{B.107})$$

$$F_{108} = -L_5 T_4 + L_6 T_4 + L_4 T_5 - L_6 T_5 - L_4 T_6 + L_5 T_6 \quad (\text{B.108})$$

$$F_{109} = -G_6 M_5 U_4 + G_5 M_6 U_4 + G_6 M_4 U_5 - G_4 M_6 U_5 - G_5 M_4 U_6 + G_4 M_5 U_6 \quad (\text{B.109})$$

$$F_{110} = -G_6 M_5 S_4 + G_5 M_6 S_4 + G_6 M_4 S_5 - G_4 M_6 S_5 - G_5 M_4 S_6 + G_4 M_5 S_6 - M_5 U_4 + M_6 U_4 + M_4 U_5 - M_6 U_5 - M_4 U_6 + M_5 U_6 \quad (\text{B.110})$$

$$F_{111} = -M_5 S_4 + M_6 S_4 + M_4 S_5 - M_6 S_5 - M_4 S_6 + M_5 S_6 \quad (\text{B.111})$$

$$F_{112} = -G_6 M_5 T_4 + G_5 M_6 T_4 + G_6 M_4 T_5 - G_4 M_6 T_5 - G_5 M_4 T_6 + G_4 M_5 T_6 \quad (\text{B.112})$$

$$F_{113} = -M_5 T_4 + M_6 T_4 + M_4 T_5 - M_6 T_5 - M_4 T_6 + M_5 T_6 \quad (\text{B.113})$$

$$F_{114} = -G_6 R_5 U_4 + G_5 R_6 U_4 + G_6 R_4 U_5 - G_4 R_6 U_5 - G_5 R_4 U_6 + G_4 R_5 U_6 \quad (\text{B.114})$$

$$F_{115} = -G_6 R_5 S_4 + G_5 R_6 S_4 + G_6 R_4 S_5 - G_4 R_6 S_5 - G_5 R_4 S_6 + G_4 R_5 S_6 - G_6 P_5 U_4 + G_5 P_6 U_4 - R_5 U_4 + R_6 U_4 + G_6 P_4 U_5 - G_4 P_6 U_5 + R_4 U_5 - R_6 U_5 - G_5 P_4 U_6 + G_4 P_5 U_6 - R_4 U_6 + R_5 U_6 \quad (\text{B.115})$$

$$F_{116} = -G_6 P_5 S_4 + G_5 P_6 S_4 - R_5 S_4 + R_6 S_4 + G_6 P_4 S_5 - G_4 P_6 S_5 + R_4 S_5 - R_6 S_5 - G_5 P_4 S_6 + G_4 P_5 S_6 - R_4 S_6 + R_5 S_6 - P_5 U_4 + P_6 U_4 + P_4 U_5 - P_6 U_5 - P_4 U_6 + P_5 U_6 \quad (\text{B.116})$$

$$F_{117} = -P_5 S_4 + P_6 S_4 + P_4 S_5 - P_6 S_5 - P_4 S_6 + P_5 S_6 \quad (\text{B.117})$$

$$F_{118} = -G_6 R_5 T_4 + G_5 R_6 T_4 + G_6 R_4 T_5 - G_4 R_6 T_5 - G_5 R_4 T_6 + G_4 R_5 T_6 \quad (\text{B.118})$$

$$F_{119} = -G_6 P_5 T_4 + G_5 P_6 T_4 - R_5 T_4 + R_6 T_4 + G_6 P_4 T_5 - G_4 P_6 T_5 + R_4 T_5 - R_6 T_5 - G_5 P_4 T_6 + G_4 P_5 T_6 - R_4 T_6 + R_5 T_6 \quad (\text{B.119})$$

$$F_{120} = -P_5 T_4 + P_6 T_4 + P_4 T_5 - P_6 T_5 - P_4 T_6 + P_5 T_6 \quad (\text{B.120})$$

$$F_{121} = -G_6 Q_5 U_4 + G_5 Q_6 U_4 + G_6 Q_4 U_5 - G_4 Q_6 U_5 - G_5 Q_4 U_6 + G_4 Q_5 U_6 \quad (\text{B.121})$$

$$F_{122} = -G_6 Q_5 S_4 + G_5 Q_6 S_4 + G_6 Q_4 S_5 - G_4 Q_6 S_5 - G_5 Q_4 S_6 + G_4 Q_5 S_6 - Q_5 U_4 + Q_6 U_4 + Q_4 U_5 - Q_6 U_5 - Q_4 U_6 + Q_5 U_6 \quad (\text{B.122})$$

$$F_{123} = -Q_5 S_4 + Q_6 S_4 + Q_4 S_5 - Q_6 S_5 - Q_4 S_6 + Q_5 S_6 \quad (\text{B.123})$$

$$F_{124} = -G_6 Q_5 T_4 + G_5 Q_6 T_4 + G_6 Q_4 T_5 - G_4 Q_6 T_5 - G_5 Q_4 T_6 + G_4 Q_5 T_6 \quad (\text{B.124})$$

$$F_{125} = -Q_5 T_4 + Q_6 T_4 + Q_4 T_5 - Q_6 T_5 - Q_4 T_6 + Q_5 T_6 \quad (\text{B.125})$$

$$F_{126} = -H_6 K_5 U_4 + H_5 K_6 U_4 + H_6 K_4 U_5 - H_4 K_6 U_5 - H_5 K_4 U_6 + H_4 K_5 U_6 \quad (\text{B.126})$$

$$F_{127} = -H_6 K_5 S_4 + H_5 K_6 S_4 + H_6 K_4 S_5 - H_4 K_6 S_5 - H_5 K_4 S_6 + H_4 K_5 S_6 \quad (\text{B.127})$$

$$F_{128} = -H_6 K_5 T_4 + H_5 K_6 T_4 + H_6 K_4 T_5 - H_4 K_6 T_5 - H_5 K_4 T_6 + H_4 K_5 T_6 - K_5 U_4 + K_6 U_4 + K_4 U_5 - K_6 U_5 - K_4 U_6 + K_5 U_6 \quad (\text{B.128})$$

$$F_{129} = -K_5 S_4 + K_6 S_4 + K_4 S_5 - K_6 S_5 - K_4 S_6 + K_5 S_6 \quad (\text{B.129})$$

$$F_{130} = -K_5 T_4 + K_6 T_4 + K_4 T_5 - K_6 T_5 - K_4 T_6 + K_5 T_6 \quad (\text{B.130})$$

$$F_{131} = H_5 U_4 - H_6 U_4 - H_4 U_5 + H_6 U_5 + H_4 U_6 - H_5 U_6 \quad (\text{B.131})$$

$$F_{132} = H_5 S_4 - H_6 S_4 - H_4 S_5 + H_6 S_5 + H_4 S_6 - H_5 S_6 \quad (\text{B.132})$$

$$F_{133} = H_5 T_4 - H_6 T_4 - H_4 T_5 + H_6 T_5 + H_4 T_6 - H_5 T_6 \quad (\text{B.133})$$

$$F_{134} = -H_6 N_5 U_4 + H_5 N_6 U_4 + H_6 N_4 U_5 - H_4 N_6 U_5 - H_5 N_4 U_6 + H_4 N_5 U_6 \quad (\text{B.134})$$

$$F_{135} = -H_6 N_5 S_4 + H_5 N_6 S_4 + H_6 N_4 S_5 - H_4 N_6 S_5 - H_5 N_4 S_6 + H_4 N_5 S_6 \quad (\text{B.135})$$

$$F_{136} = -H_6 N_5 T_4 + H_5 N_6 T_4 + H_6 N_4 T_5 - H_4 N_6 T_5 - H_5 N_4 T_6 + H_4 N_5 T_6 - H_6 L_5 U_4 + H_5 L_6 U_4 - N_5 U_4 + N_6 U_4 + H_6 L_4 U_5 - H_4 L_6 U_5 + N_4 U_5 - N_6 U_5 - H_5 L_4 U_6 + H_4 L_5 U_6 - N_4 U_6 + N_5 U_6 \quad (\text{B.136})$$

$$F_{137} = -H_6 L_5 S_4 + H_5 L_6 S_4 - N_5 S_4 + N_6 S_4 + H_6 L_4 S_5 - H_4 L_6 S_5 + N_4 S_5 - N_6 S_5 - H_5 L_4 S_6 + H_4 L_5 S_6 - N_4 S_6 + N_5 S_6 \quad (\text{B.137})$$

$$F_{138} = -H_6 L_5 T_4 + H_5 L_6 T_4 - N_5 T_4 + N_6 T_4 + H_6 L_4 T_5 - H_4 L_6 T_5 + N_4 T_5 - N_6 T_5 - H_5 L_4 T_6 + H_4 L_5 T_6 - N_4 T_6 + N_5 T_6 - L_5 U_4 + L_6 U_4 + L_4 U_5 - L_6 U_5 - L_4 U_6 + L_5 U_6 \quad (\text{B.138})$$

$$F_{139} = -L_5 S_4 + L_6 S_4 + L_4 S_5 - L_6 S_5 - L_4 S_6 + L_5 S_6 \quad (\text{B.139})$$

$$F_{140} = -L_5 T_4 + L_6 T_4 + L_4 T_5 - L_6 T_5 - L_4 T_6 + L_5 T_6 \quad (\text{B.140})$$

$$F_{141} = -H_6 M_5 U_4 + H_5 M_6 U_4 + H_6 M_4 U_5 - H_4 M_6 U_5 - H_5 M_4 U_6 + H_4 M_5 U_6 \quad (\text{B.141})$$

$$F_{142} = -H_6 M_5 S_4 + H_5 M_6 S_4 + H_6 M_4 S_5 - H_4 M_6 S_5 - H_5 M_4 S_6 + H_4 M_5 S_6 \quad (\text{B.142})$$

$$F_{143} = -H_6 M_5 T_4 + H_5 M_6 T_4 + H_6 M_4 T_5 - H_4 M_6 T_5 - H_5 M_4 T_6 + H_4 M_5 T_6 - M_5 U_4 + M_6 U_4 + M_4 U_5 - M_6 U_5 - M_4 U_6 + M_5 U_6 \quad (\text{B.143})$$

$$F_{144} = -M_5 S_4 + M_6 S_4 + M_4 S_5 - M_6 S_5 - M_4 S_6 + M_5 S_6 \quad (\text{B.144})$$

$$F_{145} = -M_5 T_4 + M_6 T_4 + M_4 T_5 - M_6 T_5 - M_4 T_6 + M_5 T_6 \quad (\text{B.145})$$

$$F_{146} = -H_6 R_5 U_4 + H_5 R_6 U_4 + H_6 R_4 U_5 - H_4 R_6 U_5 - H_5 R_4 U_6 + H_4 R_5 U_6 \quad (\text{B.146})$$

$$F_{147} = -H_6 R_5 S_4 + H_5 R_6 S_4 + H_6 R_4 S_5 - H_4 R_6 S_5 - H_5 R_4 S_6 + H_4 R_5 S_6 - H_6 P_5 U_4 + H_5 P_6 U_4 + H_6 P_4 U_5 - H_4 P_6 U_5 - H_5 P_4 U_6 + H_4 P_5 U_6 \quad (\text{B.147})$$

$$F_{148} = -H_6 P_5 S_4 + H_5 P_6 S_4 + H_6 P_4 S_5 - H_4 P_6 S_5 - H_5 P_4 S_6 + H_4 P_5 S_6 \quad (\text{B.148})$$

$$F_{149} = -H_6 R_5 T_4 + H_5 R_6 T_4 + H_6 R_4 T_5 - H_4 R_6 T_5 - H_5 R_4 T_6 + H_4 R_5 T_6 - R_5 U_4 + R_6 U_4 + R_4 U_5 - R_6 U_5 - R_4 U_6 + R_5 U_6 \quad (\text{B.149})$$

$$F_{150} = -R_5 S_4 + R_6 S_4 + R_4 S_5 - R_6 S_5 - R_4 S_6 + R_5 S_6 - H_6 P_5 T_4 + H_5 P_6 T_4 + H_6 P_4 T_5 - H_4 P_6 T_5 - H_5 P_4 T_6 + H_4 P_5 T_6 - P_5 U_4 + P_6 U_4 + P_4 U_5 - P_6 U_5 - P_4 U_6 + P_5 U_6 \quad (\text{B.150})$$

$$F_{151} = -P_5 S_4 + P_6 S_4 + P_4 S_5 - P_6 S_5 - P_4 S_6 + P_5 S_6 \quad (\text{B.151})$$

$$F_{152} = -R_5 T_4 + R_6 T_4 + R_4 T_5 - R_6 T_5 - R_4 T_6 + R_5 T_6 \quad (\text{B.152})$$

$$F_{153} = -P_5 T_4 + P_6 T_4 + P_4 T_5 - P_6 T_5 - P_4 T_6 + P_5 T_6 \quad (\text{B.153})$$

$$F_{154} = -H_6 Q_5 U_4 + H_5 Q_6 U_4 + H_6 Q_4 U_5 - H_4 Q_6 U_5 - H_5 Q_4 U_6 + H_4 Q_5 U_6 \quad (\text{B.154})$$

$$F_{155} = -H_6 Q_5 S_4 + H_5 Q_6 S_4 + H_6 Q_4 S_5 - H_4 Q_6 S_5 - H_5 Q_4 S_6 + H_4 Q_5 S_6 \quad (\text{B.155})$$

$$F_{156} = -H_6 Q_5 T_4 + H_5 Q_6 T_4 + H_6 Q_4 T_5 - H_4 Q_6 T_5 - H_5 Q_4 T_6 + H_4 Q_5 T_6 - Q_5 U_4 + Q_6 U_4 + Q_4 U_5 - Q_6 U_5 - Q_4 U_6 + Q_5 U_6 \quad (\text{B.156})$$

$$F_{157} = -Q_5 S_4 + Q_6 S_4 + Q_4 S_5 - Q_6 S_5 - Q_4 S_6 + Q_5 S_6 \quad (\text{B.157})$$

$$F_{158} = -Q_5 T_4 + Q_6 T_4 + Q_4 T_5 - Q_6 T_5 - Q_4 T_6 + Q_5 T_6 \quad (\text{B.158})$$

$$F_{159} = -K_6 N_5 U_4 + K_5 N_6 U_4 + K_6 N_4 U_5 - K_4 N_6 U_5 - K_5 N_4 U_6 + K_4 N_5 U_6 \quad (\text{B.159})$$

$$F_{160} = -K_6 N_5 S_4 + K_5 N_6 S_4 + K_6 N_4 S_5 - K_4 N_6 S_5 - K_5 N_4 S_6 + K_4 N_5 S_6 \quad (\text{B.160})$$

$$F_{161} = -K_6 N_5 T_4 + K_5 N_6 T_4 + K_6 N_4 T_5 - K_4 N_6 T_5 - K_5 N_4 T_6 + K_4 N_5 T_6 - K_6 L_5 U_4 + K_5 L_6 U_4 + K_6 L_4 U_5 - K_4 L_6 U_5 - K_5 L_4 U_6 + K_4 L_5 U_6 \quad (\text{B.161})$$

$$F_{162} = -K_6 L_5 S_4 + K_5 L_6 S_4 + K_6 L_4 S_5 - K_4 L_6 S_5 - K_5 L_4 S_6 + K_4 L_5 S_6 \quad (\text{B.162})$$

$$F_{163} = -K_6 L_5 T_4 + K_5 L_6 T_4 + K_6 L_4 T_5 - K_4 L_6 T_5 - K_5 L_4 T_6 + K_4 L_5 T_6 \quad (\text{B.163})$$

$$F_{164} = -K_6 M_5 U_4 + K_5 M_6 U_4 - N_5 U_4 + N_6 U_4 + K_6 M_4 U_5 - K_4 M_6 U_5 + N_4 U_5 - N_6 U_5 - K_5 M_4 U_6 + K_4 M_5 U_6 - N_4 U_6 + N_5 U_6 \quad (\text{B.164})$$

$$F_{165} = -K_6 M_5 S_4 + K_5 M_6 S_4 - N_5 S_4 + N_6 S_4 + K_6 M_4 S_5 - K_4 M_6 S_5 + N_4 S_5 - N_6 S_5 - K_5 M_4 S_6 + K_4 M_5 S_6 - N_4 S_6 + N_5 S_6 \quad (\text{B.165})$$

$$F_{166} = -K_6 M_5 T_4 + K_5 M_6 T_4 - N_5 T_4 + N_6 T_4 + K_6 M_4 T_5 - K_4 M_6 T_5 + N_4 T_5 - N_6 T_5 - K_5 M_4 T_6 + K_4 M_5 T_6 - N_4 T_6 + N_5 T_6 - L_5 U_4 + L_6 U_4 + L_4 U_5 - L_6 U_5 - L_4 U_6 + L_5 U_6 \quad (\text{B.166})$$

$$F_{167} = -L_5 S_4 + L_6 S_4 + L_4 S_5 - L_6 S_5 - L_4 S_6 + L_5 S_6 \quad (\text{B.167})$$

$$F_{168} = -L_5 T_4 + L_6 T_4 + L_4 T_5 - L_6 T_5 - L_4 T_6 + L_5 T_6 \quad (\text{B.168})$$

$$F_{169} = -M_5 U_4 + M_6 U_4 + M_4 U_5 - M_6 U_5 - M_4 U_6 + M_5 U_6 \quad (\text{B.169})$$

$$F_{170} = -M_5 S_4 + M_6 S_4 + M_4 S_5 - M_6 S_5 - M_4 S_6 + M_5 S_6 \quad (\text{B.170})$$

$$F_{171} = -M_5 T_4 + M_6 T_4 + M_4 T_5 - M_6 T_5 - M_4 T_6 + M_5 T_6 \quad (\text{B.171})$$

$$F_{172} = -K_6 R_5 U_4 + K_5 R_6 U_4 + K_6 R_4 U_5 - K_4 R_6 U_5 - K_5 R_4 U_6 + K_4 R_5 U_6 \quad (\text{B.172})$$

$$F_{173} = -K_6 R_5 S_4 + K_5 R_6 S_4 + K_6 R_4 S_5 - K_4 R_6 S_5 - K_5 R_4 S_6 + K_4 R_5 S_6 - K_6 P_5 U_4 + K_5 P_6 U_4 + K_6 P_4 U_5 - K_4 P_6 U_5 - K_5 P_4 U_6 + K_4 P_5 U_6 \quad (\text{B.173})$$

$$F_{174} = -K_6 P_5 S_4 + K_5 P_6 S_4 + K_6 P_4 S_5 - K_4 P_6 S_5 - K_5 P_4 S_6 + K_4 P_5 S_6 \quad (\text{B.174})$$

$$F_{175} = -K_6 R_5 T_4 + K_5 R_6 T_4 + K_6 R_4 T_5 - K_4 R_6 T_5 - K_5 R_4 T_6 + K_4 R_5 T_6 \quad (\text{B.175})$$

$$F_{176} = -K_6 P_5 T_4 + K_5 P_6 T_4 + K_6 P_4 T_5 - K_4 P_6 T_5 - K_5 P_4 T_6 + K_4 P_5 T_6 \quad (\text{B.176})$$

$$F_{177} = -K_6 Q_5 U_4 + K_5 Q_6 U_4 - R_5 U_4 + R_6 U_4 + K_6 Q_4 U_5 - K_4 Q_6 U_5 + R_4 U_5 - R_6 U_5 - K_5 Q_4 U_6 + K_4 Q_5 U_6 - R_4 U_6 + R_5 U_6 \quad (\text{B.177})$$

$$F_{178} = -K_6 Q_5 S_4 + K_5 Q_6 S_4 - R_5 S_4 + R_6 S_4 + K_6 Q_4 S_5 - K_4 Q_6 S_5 + R_4 S_5 - R_6 S_5 - K_5 Q_4 S_6 + K_4 Q_5 S_6 - R_4 S_6 + R_5 S_6 - P_5 U_4 + P_6 U_4 + P_4 U_5 - P_6 U_5 - P_4 U_6 + P_5 U_6 \quad (\text{B.178})$$

$$F_{179} = -P_5 S_4 + P_6 S_4 + P_4 S_5 - P_6 S_5 - P_4 S_6 + P_5 S_6 \quad (\text{B.179})$$

$$F_{180} = -K_6 Q_5 T_4 + K_5 Q_6 T_4 - R_5 T_4 + R_6 T_4 + K_6 Q_4 T_5 - K_4 Q_6 T_5 + R_4 T_5 - R_6 T_5 - K_5 Q_4 T_6 + K_4 Q_5 T_6 - R_4 T_6 + R_5 T_6 \quad (\text{B.180})$$

$$R_5 T_6 \tag{B.180}$$

$$F_{181} = -P_5 T_4 + P_6 T_4 + P_4 T_5 - P_6 T_5 - P_4 T_6 + P_5 T_6 \tag{B.181}$$

$$F_{182} = -Q_5 U_4 + Q_6 U_4 + Q_4 U_5 - Q_6 U_5 - Q_4 U_6 + Q_5 U_6 \tag{B.182}$$

$$F_{183} = -Q_5 S_4 + Q_6 S_4 + Q_4 S_5 - Q_6 S_5 - Q_4 S_6 + Q_5 S_6 \tag{B.183}$$

$$F_{184} = -Q_5 T_4 + Q_6 T_4 + Q_4 T_5 - Q_6 T_5 - Q_4 T_6 + Q_5 T_6 \tag{B.184}$$

$$F_{185} = -N_6 R_5 U_4 + N_5 R_6 U_4 + N_6 R_4 U_5 - N_4 R_6 U_5 - N_5 R_4 U_6 + N_4 R_5 U_6 \tag{B.185}$$

$$F_{186} = -N_6 R_5 S_4 + N_5 R_6 S_4 + N_6 R_4 S_5 - N_4 R_6 S_5 - N_5 R_4 S_6 + N_4 R_5 S_6 - N_6 P_5 U_4 + N_5 P_6 U_4 + N_6 P_4 U_5 - N_4 P_6 U_5 - N_5 P_4 U_6 + N_4 P_5 U_6 \tag{B.186}$$

$$F_{187} = -N_6 P_5 S_4 + N_5 P_6 S_4 + N_6 P_4 S_5 - N_4 P_6 S_5 - N_5 P_4 S_6 + N_4 P_5 S_6 \tag{B.187}$$

$$F_{188} = -N_6 R_5 T_4 + N_5 R_6 T_4 + N_6 R_4 T_5 - N_4 R_6 T_5 - N_5 R_4 T_6 + N_4 R_5 T_6 - L_6 R_5 U_4 + L_5 R_6 U_4 + L_6 R_4 U_5 - L_4 R_6 U_5 - L_5 R_4 U_6 + L_4 R_5 U_6 \tag{B.188}$$

$$F_{189} = -L_6 R_5 S_4 + L_5 R_6 S_4 + L_6 R_4 S_5 - L_4 R_6 S_5 - L_5 R_4 S_6 + L_4 R_5 S_6 - N_6 P_5 T_4 + N_5 P_6 T_4 + N_6 P_4 T_5 - N_4 P_6 T_5 - N_5 P_4 T_6 + N_4 P_5 T_6 - L_6 P_5 U_4 + L_5 P_6 U_4 + L_6 P_4 U_5 - L_4 P_6 U_5 - L_5 P_4 U_6 + L_4 P_5 U_6 \tag{B.189}$$

$$F_{190} = -L_6 P_5 S_4 + L_5 P_6 S_4 + L_6 P_4 S_5 - L_4 P_6 S_5 - L_5 P_4 S_6 + L_4 P_5 S_6 \tag{B.190}$$

$$F_{191} = -L_6 R_5 T_4 + L_5 R_6 T_4 + L_6 R_4 T_5 - L_4 R_6 T_5 - L_5 R_4 T_6 + L_4 R_5 T_6 \tag{B.191}$$

$$F_{192} = -L_6 P_5 T_4 + L_5 P_6 T_4 + L_6 P_4 T_5 - L_4 P_6 T_5 - L_5 P_4 T_6 + L_4 P_5 T_6 \tag{B.192}$$

$$F_{193} = -N_6 Q_5 U_4 + N_5 Q_6 U_4 - M_6 R_5 U_4 + M_5 R_6 U_4 + N_6 Q_4 U_5 - N_4 Q_6 U_5 + M_6 R_4 U_5 - M_4 R_6 U_5 - N_5 Q_4 U_6 + N_4 Q_5 U_6 - M_5 R_4 U_6 + M_4 R_5 U_6 \tag{B.193}$$

$$F_{194} = -N_6 Q_5 S_4 + N_5 Q_6 S_4 - M_6 R_5 S_4 + M_5 R_6 S_4 + N_6 Q_4 S_5 - N_4 Q_6 S_5 + M_6 R_4 S_5 - M_4 R_6 S_5 - N_5 Q_4 S_6 + N_4 Q_5 S_6 - M_5 R_4 S_6 + M_4 R_5 S_6 - M_6 P_5 U_4 + M_5 P_6 U_4 + M_6 P_4 U_5 - M_4 P_6 U_5 - M_5 P_4 U_6 + M_4 P_5 U_6 \tag{B.194}$$

$$F_{195} = -M_6 P_5 S_4 + M_5 P_6 S_4 + M_6 P_4 S_5 - M_4 P_6 S_5 - M_5 P_4 S_6 + M_4 P_5 S_6 \tag{B.195}$$

$$F_{196} = -N_6 Q_5 T_4 + N_5 Q_6 T_4 - M_6 R_5 T_4 + M_5 R_6 T_4 + N_6 Q_4 T_5 - N_4 Q_6 T_5 + M_6 R_4 T_5 - M_4 R_6 T_5 - N_5 Q_4 T_6 + N_4 Q_5 T_6 - M_5 R_4 T_6 + M_4 R_5 T_6 - L_6 Q_5 U_4 + L_5 Q_6 U_4 + L_6 Q_4 U_5 - L_4 Q_6 U_5 - L_5 Q_4 U_6 + L_4 Q_5 U_6 \tag{B.196}$$

$$F_{197} = -L_6 Q_5 S_4 + L_5 Q_6 S_4 + L_6 Q_4 S_5 - L_4 Q_6 S_5 - L_5 Q_4 S_6 + L_4 Q_5 S_6 - M_6 P_5 T_4 + M_5 P_6 T_4 + M_6 P_4 T_5 - M_4 P_6 T_5 - M_5 P_4 T_6 + M_4 P_5 T_6 \tag{B.197}$$

$$F_{198} = -L_6 Q_5 T_4 + L_5 Q_6 T_4 + L_6 Q_4 T_5 - L_4 Q_6 T_5 - L_5 Q_4 T_6 + L_4 Q_5 T_6 \tag{B.198}$$

$$F_{199} = -M_6 Q_5 U_4 + M_5 Q_6 U_4 + M_6 Q_4 U_5 - M_4 Q_6 U_5 - M_5 Q_4 U_6 + M_4 Q_5 U_6 \tag{B.199}$$

$$F_{200} = -M_6 Q_5 S_4 + M_5 Q_6 S_4 + M_6 Q_4 S_5 - M_4 Q_6 S_5 - M_5 Q_4 S_6 + M_4 Q_5 S_6 \tag{B.200}$$

$$F_{201} = -M_6 Q_5 T_4 + M_5 Q_6 T_4 + M_6 Q_4 T_5 - M_4 Q_6 T_5 - M_5 Q_4 T_6 + M_4 Q_5 T_6 \tag{B.201}$$

# Annexe C

## Coefficients $E_i$

Voici les coefficients  $E_i, i = 1, 2, \dots, 243$ .

$$E_1 = F_1 H_3 - F_{13} K_3 + F_{26} N_3 - F_{34} R_3 \quad (\text{C.1})$$

$$E_2 = F_2 H_3 - F_{14} K_3 + F_{27} N_3 - F_{34} P_3 \quad (\text{C.2})$$

$$E_3 = F_1 + F_3 H_3 - F_{15} K_3 + F_{26} L_3 + F_{28} N_3 - F_{35} R_3 \quad (\text{C.3})$$

$$E_4 = F_2 + F_4 H_3 - F_{16} K_3 + F_{27} L_3 + F_{29} N_3 - F_{35} P_3 \quad (\text{C.4})$$

$$E_5 = F_3 - F_{17} K_3 + F_{28} L_3 - F_{36} R_3 \quad (\text{C.5})$$

$$E_6 = F_4 - F_{18} K_3 + F_{29} L_3 - F_{36} P_3 \quad (\text{C.6})$$

$$E_7 = -F_{13} + F_5 H_3 - F_{19} K_3 + F_{26} M_3 + F_{30} N_3 - F_{34} Q_3 - F_{37} R_3 \quad (\text{C.7})$$

$$E_8 = -F_{14} + F_6 H_3 - F_{20} K_3 + F_{27} M_3 + F_{31} N_3 - F_{37} P_3 \quad (\text{C.8})$$

$$E_9 = -F_{15} + F_5 + F_7 H_3 - F_{21} K_3 + F_{30} L_3 + F_{28} M_3 + F_{32} N_3 - F_{35} Q_3 - F_{38} R_3 \quad (\text{C.9})$$

$$E_{10} = -F_{16} + F_6 + F_8 H_3 - F_{22} K_3 + F_{31} L_3 + F_{29} M_3 - F_{38} P_3 \quad (\text{C.10})$$

$$E_{11} = -F_{17} + F_7 - F_{23} K_3 + F_{32} L_3 - F_{36} Q_3 \quad (\text{C.11})$$

$$E_{12} = -F_{19} + F_9 H_3 - F_{24} K_3 + F_{30} M_3 + F_{33} N_3 - F_{37} Q_3 - F_{39} R_3 \quad (\text{C.12})$$

$$E_{13} = -F_{20} + F_{10} H_3 + F_{31} M_3 - F_{39} P_3 \quad (\text{C.13})$$

$$E_{14} = -F_{21} + F_9 + F_{11} H_3 - F_{25} K_3 + F_{33} L_3 + F_{32} M_3 - F_{38} Q_3 \quad (\text{C.14})$$

$$E_{15} = -F_{24} + F_{12} H_3 + F_{33} M_3 - F_{39} Q_3 \quad (\text{C.15})$$

$$E_{16} = F_1 G_3 - F_{40} K_3 + F_{53} N_3 - F_{59} R_3 \quad (\text{C.16})$$

$$E_{17} = F_1 + F_2 G_3 - F_{41} K_3 + F_{54} N_3 - F_{59} P_3 - F_{60} R_3 \quad (\text{C.17})$$

$$E_{18} = F_2 - F_{42} K_3 + F_{55} N_3 - F_{60} P_3 \quad (\text{C.18})$$

$$E_{19} = F_3 G_3 - F_{43} K_3 + F_{53} L_3 - F_{61} R_3 \quad (\text{C.19})$$

$$E_{20} = F_3 + F_4 G_3 - F_{44} K_3 + F_{54} L_3 - F_{61} P_3 - F_{62} R_3 \quad (\text{C.20})$$

$$E_{21} = F_4 - F_{45} K_3 + F_{55} L_3 - F_{62} P_3 \quad (\text{C.21})$$

$$E_{22} = -F_{40} + F_5 G_3 - F_{46} K_3 + F_{53} M_3 + F_{56} N_3 - F_{59} Q_3 - F_{63} R_3 \quad (\text{C.22})$$

$$E_{23} = -F_{41} + F_5 + F_6 G_3 - F_{47} K_3 + F_{54} M_3 + F_{57} N_3 - F_{63} P_3 - F_{60} Q_3 - F_{64} R_3 \quad (\text{C.23})$$

$$E_{24} = -F_{42} + F_6 - F_{48} K_3 + F_{55} M_3 - F_{64} P_3 \quad (\text{C.24})$$

$$E_{25} = -F_{43} + F_7 G_3 - F_{49} K_3 + F_{56} L_3 - F_{61} Q_3 - F_{65} R_3 \quad (\text{C.25})$$

$$E_{26} = -F_{44} + F_7 + F_8 G_3 - F_{50} K_3 + F_{57} L_3 - F_{65} P_3 - F_{62} Q_3 \quad (\text{C.26})$$

$$E_{27} = -F_{46} + F_9 G_3 - F_{51} K_3 + F_{56} M_3 + F_{58} N_3 - F_{63} Q_3 - F_{66} R_3 \quad (\text{C.27})$$

$$E_{28} = -F_{47} + F_9 + F_{10} G_3 - F_{52} K_3 + F_{57} M_3 - F_{66} P_3 - F_{64} Q_3 \quad (\text{C.28})$$

$$E_{29} = -F_{49} + F_{11} G_3 + F_{58} L_3 - F_{65} Q_3 \quad (\text{C.29})$$

$$E_{30} = -F_{51} + F_{12} G_3 + F_{58} M_3 - F_{66} Q_3 \quad (\text{C.30})$$

$$E_{31} = F_{13} G_3 - F_{40} H_3 + F_{67} N_3 - F_{75} R_3 \quad (\text{C.31})$$

$$E_{32} = F_{13} + F_{14} G_3 - F_{41} H_3 + F_{68} N_3 - F_{75} P_3 - F_{76} R_3 \quad (\text{C.32})$$

$$E_{33} = F_{14} - F_{42} H_3 + F_{69} N_3 - F_{76} P_3 \quad (\text{C.33})$$

$$E_{34} = -F_{40} + F_{15} G_3 - F_{43} H_3 + F_{67} L_3 + F_{70} N_3 - F_{77} R_3 \quad (\text{C.34})$$

$$E_{35} = F_{15} - F_{41} + F_{16} G_3 - F_{44} H_3 + F_{68} L_3 + F_{71} N_3 - F_{77} P_3 - F_{78} R_3 \quad (\text{C.35})$$

$$E_{36} = F_{16} - F_{42} - F_{45} H_3 + F_{69} L_3 - F_{78} P_3 \quad (\text{C.36})$$

$$E_{37} = -F_{43} + F_{17} G_3 + F_{70} L_3 - F_{79} R_3 \quad (\text{C.37})$$

$$E_{38} = F_{17} - F_{44} + F_{18} G_3 + F_{71} L_3 - F_{79} P_3 \quad (\text{C.38})$$

$$E_{39} = F_{19} G_3 - F_{46} H_3 + F_{67} M_3 + F_{72} N_3 - F_{75} Q_3 - F_{80} R_3 \quad (\text{C.39})$$

$$E_{40} = F_{19} + F_{20} G_3 - F_{47} H_3 + F_{68} M_3 + F_{73} N_3 - F_{80} P_3 - F_{76} Q_3 - F_{81} R_3 \quad (\text{C.40})$$

$$E_{41} = F_{20} - F_{48} H_3 + F_{69} M_3 - F_{81} P_3 \quad (\text{C.41})$$

$$E_{42} = -F_{46} + F_{21} G_3 - F_{49} H_3 + F_{72} L_3 + F_{70} M_3 + F_{74} N_3 - F_{77} Q_3 - F_{82} R_3 \quad (\text{C.42})$$

$$E_{43} = F_{21} - F_{47} + F_{22} G_3 - F_{50} H_3 + F_{73} L_3 + F_{71} M_3 - F_{82} P_3 - F_{78} Q_3 \quad (\text{C.43})$$

$$E_{44} = -F_{49} + F_{23} G_3 + F_{74} L_3 - F_{79} Q_3 \quad (\text{C.44})$$

$$E_{45} = F_{24} G_3 - F_{51} H_3 + F_{72} M_3 - F_{80} Q_3 \quad (\text{C.45})$$

$$E_{46} = F_{24} - F_{52} H_3 + F_{73} M_3 - F_{81} Q_3 \quad (\text{C.46})$$

$$E_{47} = -F_{51} + F_{25} G_3 + F_{74} M_3 - F_{82} Q_3 \quad (\text{C.47})$$

$$E_{48} = F_{26} G_3 - F_{53} H_3 + F_{67} K_3 - F_{83} R_3 \quad (\text{C.48})$$

$$E_{49} = F_{26} + F_{27} G_3 - F_{54} H_3 + F_{68} K_3 - F_{83} P_3 - F_{84} R_3 \quad (\text{C.49})$$

$$E_{50} = F_{27} - F_{55} H_3 + F_{69} K_3 - F_{84} P_3 \quad (\text{C.50})$$

$$E_{51} = -F_{53} + F_{28} G_3 + F_{70} K_3 - F_{85} R_3 \quad (\text{C.51})$$

$$E_{52} = F_{28} - F_{54} + F_{29} G_3 + F_{71} K_3 - F_{85} P_3 \quad (\text{C.52})$$

$$E_{53} = F_{67} + F_{30} G_3 - F_{56} H_3 + F_{72} K_3 - F_{83} Q_3 - F_{86} R_3 \quad (\text{C.53})$$

$$E_{54} = F_{30} + F_{68} + F_{31} G_3 - F_{57} H_3 + F_{73} K_3 - F_{86} P_3 - F_{84} Q_3 \quad (\text{C.54})$$

$$E_{55} = -F_{56} + F_{70} + F_{32} G_3 + F_{74} K_3 - F_{85} Q_3 \quad (\text{C.55})$$

$$E_{56} = F_{72} + F_{33} G_3 - F_{58} H_3 - F_{86} Q_3 \quad (\text{C.56})$$

$$E_{57} = F_{34} G_3 - F_{59} H_3 + F_{75} K_3 - F_{83} N_3 \quad (\text{C.57})$$

$$E_{58} = F_{34} - F_{60} H_3 + F_{76} K_3 - F_{84} N_3 \quad (\text{C.58})$$

$$E_{59} = -F_{59} + F_{35} G_3 - F_{61} H_3 + F_{77} K_3 - F_{83} L_3 - F_{85} N_3 \quad (\text{C.59})$$

$$E_{60} = F_{35} - F_{60} - F_{62} H_3 + F_{78} K_3 - F_{84} L_3 \quad (\text{C.60})$$

$$E_{61} = -F_{61} + F_{36} G_3 + F_{79} K_3 - F_{85} L_3 \quad (\text{C.61})$$

$$E_{62} = F_{75} + F_{37} G_3 - F_{63} H_3 + F_{80} K_3 - F_{83} M_3 - F_{86} N_3 \quad (\text{C.62})$$

$$E_{63} = F_{37} + F_{76} - F_{64} H_3 + F_{81} K_3 - F_{84} M_3 \quad (\text{C.63})$$

$$E_{64} = -F_{63} + F_{77} + F_{38} G_3 - F_{65} H_3 + F_{82} K_3 - F_{86} L_3 - F_{85} M_3 \quad (\text{C.64})$$

$$E_{65} = F_{80} + F_{39} G_3 - F_{66} H_3 - F_{86} M_3 \quad (\text{C.65})$$

$$E_{66} = F_{126} G_3 - F_{93} H_3 + F_{87} K_3 - F_{83} U_3 \quad (\text{C.66})$$

$$E_{67} = F_{126} + F_{127} G_3 - F_{94} H_3 + F_{88} K_3 - F_{83} S_3 - F_{84} U_3 \quad (\text{C.67})$$

$$E_{68} = F_{127} - F_{95} H_3 + F_{89} K_3 - F_{84} S_3 \quad (\text{C.68})$$

$$E_{69} = -F_{93} + F_{128} G_3 - F_{96} H_3 + F_{90} K_3 - F_{83} T_3 - F_{85} U_3 \quad (\text{C.69})$$

$$E_{70} = F_{128} - F_{94} + F_{129} G_3 - F_{97} H_3 + F_{91} K_3 - F_{85} S_3 - F_{84} T_3 \quad (\text{C.70})$$

$$\begin{aligned}
E_{71} &= -F_{96} + F_{130}G_3 + F_{92}K_3 - F_{85}T_3 & (C.71) \\
E_{72} &= F_{87} + F_{131}G_3 - F_{98}H_3 - F_{86}U_3 & (C.72) \\
E_{73} &= F_{131} + F_{88} + F_{132}G_3 - F_{99}H_3 - F_{86}S_3 & (C.73) \\
E_{74} &= F_{90} - F_{98} + F_{133}G_3 - F_{100}H_3 - F_{86}T_3 & (C.74) \\
E_{75} &= F_{134}G_3 - F_{101}H_3 + F_{87}N_3 - F_{75}U_3 & (C.75) \\
E_{76} &= F_{134} + F_{135}G_3 - F_{102}H_3 + F_{88}N_3 - F_{75}S_3 - F_{76}U_3 & (C.76) \\
E_{77} &= F_{135} - F_{103}H_3 + F_{89}N_3 - F_{76}S_3 & (C.77) \\
E_{78} &= -F_{101} + F_{136}G_3 - F_{104}H_3 + F_{87}L_3 + F_{90}N_3 - F_{75}T_3 - F_{77}U_3 & (C.78) \\
E_{79} &= -F_{102} + F_{136} + F_{137}G_3 - F_{105}H_3 + F_{88}L_3 + F_{91}N_3 - F_{77}T_3 - F_{76}T_3 - F_{78}U_3 & (C.79) \\
E_{80} &= -F_{103} + F_{137} - F_{106}H_3 + F_{89}L_3 - F_{78}S_3 & (C.80) \\
E_{81} &= -F_{104} + F_{138}G_3 - F_{107}H_3 + F_{90}L_3 + F_{92}N_3 - F_{77}T_3 - F_{79}U_3 & (C.81) \\
E_{82} &= -F_{105} + F_{138} + F_{139}G_3 - F_{108}H_3 + F_{91}L_3 - F_{79}S_3 - F_{78}T_3 & (C.82) \\
E_{83} &= -F_{107} + F_{140}G_3 + F_{92}L_3 - F_{79}T_3 & (C.83) \\
E_{84} &= F_{141}G_3 - F_{109}H_3 + F_{87}M_3 - F_{80}U_3 & (C.84) \\
E_{85} &= F_{141} + F_{142}G_3 - F_{110}H_3 + F_{88}M_3 - F_{80}S_3 - F_{81}U_3 & (C.85) \\
E_{86} &= F_{142} - F_{111}H_3 + F_{89}M_3 - F_{81}S_3 & (C.86) \\
E_{87} &= -F_{109} + F_{143}G_3 - F_{112}H_3 + F_{90}M_3 - F_{80}T_3 - F_{82}U_3 & (C.87) \\
E_{88} &= -F_{110} + F_{143} + F_{144}G_3 - F_{113}H_3 + F_{91}M_3 - F_{82}S_3 - F_{81}T_3 & (C.88) \\
E_{89} &= -F_{112} + F_{145}G_3 + F_{92}M_3 - F_{82}T_3 & (C.89) \\
E_{90} &= F_{146}G_3 - F_{114}H_3 + F_{87}R_3 - F_{67}U_3 & (C.90) \\
E_{91} &= F_{146} + F_{147}G_3 - F_{115}H_3 + F_{87}P_3 + F_{88}R_3 - F_{67}S_3 - F_{68}U_3 & (C.91) \\
E_{92} &= F_{147} + F_{148}G_3 - F_{116}H_3 + F_{88}P_3 + F_{89}R_3 - F_{68}S_3 - F_{69}U_3 & (C.92) \\
E_{93} &= F_{148} - F_{117}H_3 + F_{89}P_3 - F_{69}S_3 & (C.93) \\
E_{94} &= -F_{114} + F_{149}G_3 - F_{118}H_3 + F_{90}R_3 - F_{67}T_3 - F_{70}U_3 & (C.94) \\
E_{95} &= -F_{115} + F_{149} + F_{150}G_3 - F_{119}H_3 + F_{90}P_3 + F_{91}R_3 - F_{70}S_3 - F_{68}T_3 - F_{71}U_3 & (C.95) \\
E_{96} &= -F_{116} + F_{150} + F_{151}G_3 - F_{120}H_3 + F_{91}P_3 - F_{71}S_3 - F_{69}T_3 & (C.96) \\
E_{97} &= -F_{118} + F_{152}G_3 + F_{92}R_3 - F_{70}T_3 & (C.97) \\
E_{98} &= -F_{119} + F_{152} + F_{153}G_3 + F_{92}P_3 - F_{71}T_3 & (C.98) \\
E_{99} &= F_{154}G_3 - F_{121}H_3 + F_{87}Q_3 - F_{72}U_3 & (C.99) \\
E_{100} &= F_{154} + F_{155}G_3 - F_{122}H_3 + F_{88}Q_3 - F_{72}S_3 - F_{73}U_3 & (C.100) \\
E_{101} &= F_{155} - F_{123}H_3 + F_{89}Q_3 - F_{73}S_3 & (C.101) \\
E_{102} &= -F_{121} + F_{156}G_3 - F_{124}H_3 + F_{90}Q_3 - F_{72}T_3 - F_{74}U_3 & (C.102) \\
E_{103} &= -F_{122} + F_{156} + F_{157}G_3 - F_{125}H_3 + F_{91}Q_3 - F_{74}S_3 - F_{73}T_3 & (C.103) \\
E_{104} &= -F_{124} + F_{158}G_3 + F_{92}Q_3 - F_{74}T_3 & (C.104) \\
E_{105} &= F_{159}H_3 - F_{134}K_3 + F_{126}N_3 - F_{34}U_3 & (C.105) \\
E_{106} &= F_{160}H_3 - F_{135}K_3 + F_{127}N_3 - F_{34}S_3 & (C.106) \\
E_{107} &= F_{159} + F_{161}H_3 - F_{136}K_3 + F_{126}L_3 + F_{128}N_3 - F_{34}T_3 - F_{35}U_3 & (C.107) \\
E_{108} &= F_{160} + F_{162}H_3 - F_{137}K_3 + F_{127}L_3 + F_{129}N_3 - F_{35}S_3 & (C.108) \\
E_{109} &= F_{161} + F_{163}H_3 - F_{138}K_3 + F_{128}L_3 + F_{130}N_3 - F_{35}T_3 - F_{36}U_3 & (C.109) \\
E_{110} &= F_{162} - F_{139}K_3 + F_{129}L_3 - F_{36}S_3 & (C.110) \\
E_{111} &= F_{163} - F_{140}K_3 + F_{130}L_3 - F_{36}T_3 & (C.111) \\
E_{112} &= -F_{134} + F_{164}H_3 - F_{141}K_3 + F_{126}M_3 + F_{131}N_3 - F_{37}U_3 & (C.112) \\
E_{113} &= -F_{135} + F_{165}H_3 - F_{142}K_3 + F_{127}M_3 + F_{132}N_3 - F_{37}S_3 & (C.113) \\
E_{114} &= -F_{136} + F_{164} + F_{166}H_3 - F_{143}K_3 + F_{131}L_3 + F_{128}M_3 + F_{133}N_3 - F_{37}T_3 - F_{38}U_3 & (C.114) \\
E_{115} &= -F_{137} + F_{165} + F_{167}H_3 - F_{144}K_3 + F_{132}L_3 + F_{129}M_3 - F_{38}S_3 & (C.115) \\
E_{116} &= -F_{138} + F_{166} + F_{168}H_3 - F_{145}K_3 + F_{133}L_3 + F_{130}M_3 - F_{38}T_3 & (C.116) \\
E_{117} &= -F_{141} + F_{169}H_3 + F_{131}M_3 - F_{39}U_3 & (C.117) \\
E_{118} &= -F_{142} + F_{170}H_3 + F_{132}M_3 - F_{39}S_3 & (C.118) \\
E_{119} &= -F_{143} + F_{169} + F_{171}H_3 + F_{133}M_3 - F_{39}T_3 & (C.119) \\
E_{120} &= F_{172}H_3 - F_{146}K_3 + F_{126}R_3 - F_{26}U_3 & (C.120) \\
E_{121} &= F_{173}H_3 - F_{147}K_3 + F_{126}P_3 + F_{127}R_3 - F_{26}S_3 - F_{27}U_3 & (C.121) \\
E_{122} &= F_{174}H_3 - F_{148}K_3 + F_{127}P_3 - F_{27}S_3 & (C.122)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
E_{123} &= F_{172} + F_{175}H_3 - F_{149}K_3 + F_{128}R_3 - F_{26}T_3 - F_{28}U_3 & (C.123) \\
E_{124} &= F_{173} + F_{176}H_3 - F_{150}K_3 + F_{128}P_3 + F_{129}R_3 - F_{28}S_3 - F_{27}T_3 - F_{29}U_3 & (C.124) \\
E_{125} &= F_{174} - F_{151}K_3 + F_{129}P_3 - F_{29}S_3 & (C.125) \\
E_{126} &= F_{175} - F_{152}K_3 + F_{130}R_3 - F_{28}T_3 & (C.126) \\
E_{127} &= F_{176} - F_{153}K_3 + F_{130}P_3 - F_{29}T_3 & (C.127) \\
E_{128} &= -F_{146} + F_{177}H_3 - F_{154}K_3 + F_{126}Q_3 + F_{131}R_3 - F_{30}U_3 & (C.128) \\
E_{129} &= -F_{147} + F_{178}H_3 - F_{155}K_3 + F_{131}P_3 + F_{127}Q_3 + F_{132}R_3 - F_{30}S_3 - F_{31}U_3 & (C.129) \\
E_{130} &= -F_{148} + F_{179}H_3 + F_{132}P_3 - F_{31}S_3 & (C.130) \\
E_{131} &= -F_{149} + F_{177} + F_{180}H_3 - F_{156}K_3 + F_{128}Q_3 + F_{133}R_3 - F_{30}T_3 - F_{32}U_3 & (C.131) \\
E_{132} &= -F_{150} + F_{178} + F_{181}H_3 - F_{157}K_3 + F_{133}P_3 + F_{129}Q_3 - F_{32}S_3 - F_{31}T_3 & (C.132) \\
E_{133} &= -F_{152} + F_{180} - F_{158}K_3 + F_{130}Q_3 - F_{32}T_3 & (C.133) \\
E_{134} &= -F_{154} + F_{182}H_3 + F_{131}Q_3 - F_{33}U_3 & (C.134) \\
E_{135} &= -F_{155} + F_{183}H_3 + F_{132}Q_3 - F_{33}S_3 & (C.135) \\
E_{136} &= -F_{156} + F_{182} + F_{184}H_3 + F_{133}Q_3 - F_{33}T_3 & (C.136) \\
E_{137} &= F_{185}H_3 - F_{146}N_3 + F_{134}R_3 - F_{13}U_3 & (C.137) \\
E_{138} &= F_{186}H_3 - F_{147}N_3 + F_{134}P_3 + F_{135}R_3 - F_{13}S_3 - F_{14}U_3 & (C.138) \\
E_{139} &= F_{187}H_3 - F_{148}N_3 + F_{135}P_3 - F_{14}S_3 & (C.139) \\
E_{140} &= F_{185} + F_{188}H_3 - F_{146}L_3 - F_{149}N_3 + F_{136}R_3 - F_{13}T_3 - F_{15}U_3 & (C.140) \\
E_{141} &= F_{186} + F_{189}H_3 - F_{147}L_3 - F_{150}N_3 + F_{136}P_3 + F_{137}R_3 - F_{15}S_3 - F_{14}T_3 - F_{16}U_3 & (C.141) \\
E_{142} &= F_{187} + F_{190}H_3 - F_{148}L_3 - F_{151}N_3 + F_{137}P_3 - F_{16}S_3 & (C.142) \\
E_{143} &= F_{188} + F_{191}H_3 - F_{149}L_3 - F_{152}N_3 + F_{138}R_3 - F_{15}T_3 - F_{17}U_3 & (C.143) \\
E_{144} &= F_{189} + F_{192}H_3 - F_{150}L_3 - F_{153}N_3 + F_{138}P_3 + F_{139}R_3 - F_{17}S_3 - F_{16}T_3 - F_{18}U_3 & (C.144) \\
E_{145} &= F_{190} - F_{151}L_3 + F_{139}P_3 - F_{18}S_3 & (C.145) \\
E_{146} &= F_{191} - F_{152}L_3 + F_{140}R_3 - F_{17}T_3 & (C.146) \\
E_{147} &= F_{192} - F_{153}L_3 + F_{140}P_3 - F_{18}T_3 & (C.147) \\
E_{148} &= F_{193}H_3 - F_{146}M_3 - F_{154}N_3 + F_{134}Q_3 + F_{141}R_3 - F_{19}U_3 & (C.148) \\
E_{149} &= F_{194}H_3 - F_{147}M_3 - F_{155}N_3 + F_{141}P_3 + F_{135}Q_3 + F_{142}R_3 - F_{19}S_3 - F_{20}U_3 & (C.149) \\
E_{150} &= F_{195}H_3 - F_{148}M_3 + F_{142}P_3 - F_{20}S_3 & (C.150) \\
E_{151} &= F_{193} + F_{196}H_3 - F_{154}L_3 - F_{149}M_3 - F_{156}N_3 + F_{136}Q_3 + F_{143}R_3 - F_{19}T_3 - F_{21}U_3 & (C.151) \\
E_{152} &= F_{194} + F_{197}H_3 - F_{155}L_3 - F_{150}M_3 - F_{157}N_3 + F_{143}P_3 + F_{137}Q_3 + F_{144}R_3 - F_{21}S_3 - F_{20}T_3 - F_{22}U_3 & (C.152) \\
E_{153} &= F_{195} - F_{151}M_3 + F_{144}P_3 - F_{22}S_3 & (C.153) \\
E_{154} &= F_{196} + F_{198}H_3 - F_{156}L_3 - F_{152}M_3 - F_{158}N_3 + F_{138}Q_3 + F_{145}R_3 - F_{21}T_3 - F_{23}U_3 & (C.154) \\
E_{155} &= F_{197} - F_{157}L_3 - F_{153}M_3 + F_{145}P_3 + F_{139}Q_3 - F_{23}S_3 - F_{22}T_3 & (C.155) \\
E_{156} &= F_{198} - F_{158}L_3 + F_{140}Q_3 - F_{23}T_3 & (C.156) \\
E_{157} &= F_{199}H_3 - F_{154}M_3 + F_{141}Q_3 - F_{24}U_3 & (C.157) \\
E_{158} &= F_{200}H_3 - F_{155}M_3 + F_{142}Q_3 - F_{24}S_3 & (C.158) \\
E_{159} &= F_{199} + F_{201}H_3 - F_{156}M_3 + F_{143}Q_3 - F_{24}T_3 - F_{25}U_3 & (C.159) \\
E_{160} &= F_{200} - F_{157}M_3 + F_{144}Q_3 - F_{25}S_3 & (C.160) \\
E_{161} &= F_{201} - F_{158}M_3 + F_{145}Q_3 - F_{25}T_3 & (C.161) \\
E_{162} &= F_{159}G_3 - F_{101}K_3 + F_{93}N_3 - F_{59}U_3 & (C.162) \\
E_{163} &= F_{159} + F_{160}G_3 - F_{102}K_3 + F_{94}N_3 - F_{59}S_3 - F_{60}U_3 & (C.163) \\
E_{164} &= F_{160} - F_{103}K_3 + F_{95}N_3 - F_{60}S_3 & (C.164) \\
E_{165} &= F_{161}G_3 - F_{104}K_3 + F_{93}L_3 + F_{96}N_3 - F_{59}T_3 - F_{61}U_3 & (C.165) \\
E_{166} &= F_{161} + F_{162}G_3 - F_{105}K_3 + F_{94}L_3 + F_{97}N_3 - F_{61}S_3 - F_{60}T_3 - F_{62}U_3 & (C.166) \\
E_{167} &= F_{162} - F_{106}K_3 + F_{95}L_3 - F_{62}S_3 & (C.167) \\
E_{168} &= F_{163}G_3 - F_{107}K_3 + F_{96}L_3 - F_{61}T_3 & (C.168) \\
E_{169} &= F_{163} - F_{108}K_3 + F_{97}L_3 - F_{62}T_3 & (C.169) \\
E_{170} &= -F_{101} + F_{164}G_3 - F_{109}K_3 + F_{93}M_3 + F_{98}N_3 - F_{63}U_3 & (C.170) \\
E_{171} &= -F_{102} + F_{164} + F_{165}G_3 - F_{110}K_3 + F_{94}M_3 + F_{99}N_3 - F_{63}S_3 - F_{64}U_3 & (C.171) \\
E_{172} &= -F_{103} + F_{165} - F_{111}K_3 + F_{95}M_3 - F_{64}S_3 & (C.172) \\
E_{173} &= -F_{104} + F_{166}G_3 - F_{112}K_3 + F_{98}L_3 + F_{96}M_3 + F_{100}N_3 - F_{63}T_3 - F_{65}U_3 & (C.173) \\
E_{174} &= -F_{105} + F_{166} + F_{167}G_3 - F_{113}K_3 + F_{99}L_3 + F_{97}M_3 - F_{65}S_3 - F_{64}T_3 & (C.174)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{175} &= -F_{107} + F_{168}G_3 + F_{100}L_3 - F_{65}T_3 & (C.175) \\
E_{176} &= -F_{109} + F_{169}G_3 + F_{98}M_3 - F_{66}U_3 & (C.176) \\
E_{177} &= -F_{110} + F_{169} + F_{170}G_3 + F_{99}M_3 - F_{66}S_3 & (C.177) \\
E_{178} &= -F_{112} + F_{171}G_3 + F_{100}M_3 - F_{66}T_3 & (C.178) \\
E_{179} &= F_{172}G_3 - F_{114}K_3 + F_{93}R_3 - F_{53}U_3 & (C.179) \\
E_{180} &= F_{172} + F_{173}G_3 - F_{115}K_3 + F_{93}P_3 + F_{94}R_3 - F_{53}S_3 - F_{54}U_3 & (C.180) \\
E_{181} &= F_{173} + F_{174}G_3 - F_{116}K_3 + F_{94}P_3 + F_{95}R_3 - F_{54}S_3 - F_{55}U_3 & (C.181) \\
E_{182} &= F_{174} - F_{117}K_3 + F_{95}P_3 - F_{55}S_3 & (C.182) \\
E_{183} &= F_{175}G_3 - F_{118}K_3 + F_{96}R_3 - F_{53}T_3 & (C.183) \\
E_{184} &= F_{175} + F_{176}G_3 - F_{119}K_3 + F_{96}P_3 + F_{97}R_3 - F_{54}T_3 & (C.184) \\
E_{185} &= F_{176} - F_{120}K_3 + F_{97}P_3 - F_{55}T_3 & (C.185) \\
E_{186} &= -F_{114} + F_{177}G_3 - F_{121}K_3 + F_{93}Q_3 + F_{98}R_3 - F_{56}U_3 & (C.186) \\
E_{187} &= -F_{115} + F_{177} + F_{178}G_3 - F_{122}K_3 + F_{98}P_3 + F_{94}Q_3 + F_{99}R_3 - F_{56}S_3 - F_{57}U_3 & (C.187) \\
E_{188} &= -F_{116} + F_{178} + F_{179}G_3 - F_{123}K_3 + F_{99}P_3 + F_{95}Q_3 - F_{57}S_3 & (C.188) \\
E_{189} &= -F_{118} + F_{180}G_3 - F_{124}K_3 + F_{96}Q_3 + F_{100}R_3 - F_{56}T_3 & (C.189) \\
E_{190} &= -F_{119} + F_{180} + F_{181}G_3 - F_{125}K_3 + F_{100}P_3 + F_{97}Q_3 - F_{57}T_3 & (C.190) \\
E_{191} &= -F_{121} + F_{182}G_3 + F_{98}Q_3 - F_{58}U_3 & (C.191) \\
E_{192} &= -F_{122} + F_{182} + F_{183}G_3 + F_{99}Q_3 - F_{58}S_3 & (C.192) \\
E_{193} &= -F_{124} + F_{184}G_3 + F_{100}Q_3 - F_{58}T_3 & (C.193) \\
E_{194} &= F_{185}G_3 - F_{114}N_3 + F_{101}R_3 - F_{40}U_3 & (C.194) \\
E_{195} &= F_{185} + F_{186}G_3 - F_{115}N_3 + F_{101}P_3 + F_{102}R_3 - F_{40}S_3 - F_{41}U_3 & (C.195) \\
E_{196} &= F_{186} + F_{187}G_3 - F_{116}N_3 + F_{102}P_3 + F_{103}R_3 - F_{41}S_3 - F_{42}U_3 & (C.196) \\
E_{197} &= F_{187} - F_{117}N_3 + F_{103}P_3 - F_{42}S_3 & (C.197) \\
E_{198} &= F_{188}G_3 - F_{114}L_3 - F_{118}N_3 + F_{104}R_3 - F_{40}T_3 - F_{43}U_3 & (C.198) \\
E_{199} &= F_{188} + F_{189}G_3 - F_{115}L_3 - F_{119}N_3 + F_{104}P_3 + F_{105}R_3 - F_{43}S_3 - F_{41}T_3 - F_{44}U_3 & (C.199) \\
E_{200} &= F_{189} + F_{190}G_3 - F_{116}L_3 - F_{120}N_3 + F_{105}P_3 + F_{106}R_3 - F_{44}S_3 - F_{42}T_3 - F_{45}U_3 & (C.200) \\
E_{201} &= F_{190} - F_{117}L_3 + F_{106}P_3 - F_{45}S_3 & (C.201) \\
E_{202} &= F_{191}G_3 - F_{118}L_3 + F_{107}R_3 - F_{43}T_3 & (C.202) \\
E_{203} &= F_{191} + F_{192}G_3 - F_{119}L_3 + F_{107}P_3 + F_{108}R_3 - F_{44}T_3 & (C.203) \\
E_{204} &= F_{192} - F_{120}L_3 + F_{108}P_3 - F_{45}T_3 & (C.204) \\
E_{205} &= F_{193}G_3 - F_{114}M_3 - F_{121}N_3 + F_{101}Q_3 + F_{109}R_3 - F_{46}U_3 & (C.205) \\
E_{206} &= F_{193} + F_{194}G_3 - F_{115}M_3 - F_{122}N_3 + F_{109}P_3 + F_{102}Q_3 + F_{110}R_3 - F_{46}S_3 - F_{47}U_3 & (C.206) \\
E_{207} &= F_{194} + F_{195}G_3 - F_{116}M_3 - F_{123}N_3 + F_{110}P_3 + F_{103}Q_3 + F_{111}R_3 - F_{47}S_3 - F_{48}U_3 & (C.207) \\
E_{208} &= F_{195} - F_{117}M_3 + F_{111}P_3 - F_{48}S_3 & (C.208) \\
E_{209} &= F_{196}G_3 - F_{121}L_3 - F_{118}M_3 - F_{124}N_3 + F_{104}Q_3 + F_{112}R_3 - F_{46}T_3 - F_{49}U_3 & (C.209) \\
E_{210} &= F_{196} + F_{197}G_3 - F_{122}L_3 - F_{119}M_3 - F_{125}N_3 + F_{112}P_3 + F_{105}Q_3 + F_{113}R_3 - F_{49}S_3 - F_{47}T_3 - F_{50}U_3 & (C.210) \\
E_{211} &= F_{197} - F_{123}L_3 - F_{120}M_3 + F_{113}P_3 + F_{106}Q_3 - F_{50}S_3 - F_{48}T_3 & (C.211) \\
E_{212} &= F_{198}G_3 - F_{124}L_3 + F_{107}Q_3 - F_{49}T_3 & (C.212) \\
E_{213} &= F_{198} - F_{125}L_3 + F_{108}Q_3 - F_{50}T_3 & (C.213) \\
E_{214} &= F_{199}G_3 - F_{121}M_3 + F_{109}Q_3 - F_{51}U_3 & (C.214) \\
E_{215} &= F_{199} + F_{200}G_3 - F_{122}M_3 + F_{110}Q_3 - F_{51}S_3 - F_{52}U_3 & (C.215) \\
E_{216} &= F_{200} - F_{123}M_3 + F_{111}Q_3 - F_{52}S_3 & (C.216) \\
E_{217} &= F_{201}G_3 - F_{124}M_3 + F_{112}Q_3 - F_{51}T_3 & (C.217) \\
E_{218} &= F_{201} - F_{125}M_3 + F_{113}Q_3 - F_{52}T_3 & (C.218) \\
E_{219} &= F_{185}K_3 - F_{172}N_3 + F_{159}R_3 - F_1U_3 & (C.219) \\
E_{220} &= F_{186}K_3 - F_{173}N_3 + F_{159}P_3 + F_{160}R_3 - F_1S_3 - F_2U_3 & (C.220) \\
E_{221} &= F_{187}K_3 - F_{174}N_3 + F_{160}P_3 - F_2S_3 & (C.221) \\
E_{222} &= F_{188}K_3 - F_{172}L_3 - F_{175}N_3 + F_{161}R_3 - F_1T_3 - F_3U_3 & (C.222) \\
E_{223} &= F_{189}K_3 - F_{173}L_3 - F_{176}N_3 + F_{161}P_3 + F_{162}R_3 - F_3S_3 - F_2T_3 - F_4U_3 & (C.223) \\
E_{224} &= F_{190}K_3 - F_{174}L_3 + F_{162}P_3 - F_4S_3 & (C.224) \\
E_{225} &= F_{191}K_3 - F_{175}L_3 + F_{163}R_3 - F_3T_3 & (C.225) \\
E_{226} &= F_{192}K_3 - F_{176}L_3 + F_{163}P_3 - F_4T_3 & (C.226)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{227} &= F_{185} + F_{193}K_3 - F_{172}M_3 - F_{177}N_3 + F_{159}Q_3 + F_{164}R_3 - F_5U_3 & (C.227) \\
E_{228} &= F_{186} + F_{194}K_3 - F_{173}M_3 - F_{178}N_3 + F_{164}P_3 + F_{160}Q_3 + F_{165}R_3 - F_5S_3 - F_6U_3 & (C.228) \\
E_{229} &= F_{187} + F_{195}K_3 - F_{174}M_3 - F_{179}N_3 + F_{165}P_3 - F_6S_3 & (C.229) \\
E_{230} &= F_{188} + F_{196}K_3 - F_{177}L_3 - F_{175}M_3 - F_{180}N_3 + F_{161}Q_3 + F_{166}R_3 - F_5T_3 - F_7U_3 & (C.230) \\
E_{231} &= F_{189} + F_{197}K_3 - F_{178}L_3 - F_{176}M_3 - F_{181}N_3 + F_{166}P_3 + F_{162}Q_3 + F_{167}R_3 - F_7S_3 - F_6T_3 - F_8U_3 & (C.231) \\
E_{232} &= F_{190} - F_{179}L_3 + F_{167}P_3 - F_8S_3 & (C.232) \\
E_{233} &= F_{191} + F_{198}K_3 - F_{180}L_3 + F_{163}Q_3 + F_{168}R_3 - F_7T_3 & (C.233) \\
E_{234} &= F_{192} - F_{181}L_3 + F_{168}P_3 - F_8T_3 & (C.234) \\
E_{235} &= F_{193} + F_{199}K_3 - F_{177}M_3 - F_{182}N_3 + F_{164}Q_3 + F_{169}R_3 - F_9U_3 & (C.235) \\
E_{236} &= F_{194} + F_{200}K_3 - F_{178}M_3 - F_{183}N_3 + F_{169}P_3 + F_{165}Q_3 + F_{170}R_3 - F_9S_3 - F_{10}U_3 & (C.236) \\
E_{237} &= F_{195} - F_{179}M_3 + F_{170}P_3 - F_{10}S_3 & (C.237) \\
E_{238} &= F_{196} + F_{201}K_3 - F_{182}L_3 - F_{180}M_3 - F_{184}N_3 + F_{166}Q_3 + F_{171}R_3 - F_9T_3 - F_{11}U_3 & (C.238) \\
E_{239} &= F_{197} - F_{183}L_3 - F_{181}M_3 + F_{171}P_3 + F_{167}Q_3 - F_{11}S_3 - F_{10}T_3 & (C.239) \\
E_{240} &= F_{198} - F_{184}L_3 + F_{168}Q_3 - F_{11}T_3 & (C.240) \\
E_{241} &= F_{199} - F_{182}M_3 + F_{169}Q_3 - F_{12}U_3 & (C.241) \\
E_{242} &= F_{200} - F_{183}M_3 + F_{170}Q_3 - F_{12}S_3 & (C.242) \\
E_{243} &= F_{201} - F_{184}M_3 + F_{171}Q_3 - F_{12}T_3 & (C.243)
\end{aligned}$$

# Annexe D

## Coefficients $D_i$

Voici les coefficients  $D_i, i = 1, 2, \dots, 141$ .

$$D_1 = E_{270}H_2 - E_{180}K_2 + E_{159}N_2 - E_{140}R_2 + E_1U_2 \quad (\text{D.1})$$

$$D_2 = E_{271}H_2 - E_{181}K_2 + E_{160}N_2 - E_{140}P_2 - E_{141}R_2 + E_1S_2 + E_2U_2 \quad (\text{D.2})$$

$$D_3 = E_{272}H_2 - E_{182}K_2 + E_{161}N_2 - E_{141}P_2 + E_2S_2 \quad (\text{D.3})$$

$$D_4 = E_{270} + E_{273}H_2 - E_{183}K_2 + E_{159}L_2 + E_{162}N_2 - E_{142}R_2 + E_1T_2 + E_3U_2 \quad (\text{D.4})$$

$$D_5 = E_{271} + E_{274}H_2 - E_{184}K_2 + E_{160}L_2 + E_{163}N_2 - E_{142}P_2 - E_{143}R_2 + E_3S_2 + E_2T_2 + E_4U_2 \quad (\text{D.5})$$

$$D_6 = E_{272} + E_{275}H_2 - E_{185}K_2 + E_{161}L_2 + E_{164}N_2 - E_{143}P_2 + E_4S_2 \quad (\text{D.6})$$

$$D_7 = E_{273} + E_{276}H_2 - E_{186}K_2 + E_{162}L_2 + E_{165}N_2 - E_{144}R_2 + E_3T_2 + E_5U_2 \quad (\text{D.7})$$

$$D_8 = E_{274} + E_{277}H_2 - E_{187}K_2 + E_{163}L_2 + E_{166}N_2 - E_{144}P_2 - E_{145}R_2 + E_5S_2 + E_4T_2 + E_6U_2 \quad (\text{D.8})$$

$$D_9 = E_{275} - E_{188}K_2 + E_{164}L_2 - E_{145}P_2 + E_6S_2 \quad (\text{D.9})$$

$$D_{10} = E_{276} - E_{189}K_2 + E_{165}L_2 - E_{146}R_2 + E_5T_2 \quad (\text{D.10})$$

$$D_{11} = E_{277} - E_{190}K_2 + E_{166}L_2 - E_{146}P_2 + E_6T_2 \quad (\text{D.11})$$

$$D_{12} = -E_{180} + E_{278}H_2 - E_{191}K_2 + E_{159}M_2 + E_{167}N_2 - E_{140}Q_2 - E_{147}R_2 + E_7U_2 \quad (\text{D.12})$$

$$D_{13} = -E_{181} + E_{279}H_2 - E_{192}K_2 + E_{160}M_2 + E_{168}N_2 - E_{147}P_2 - E_{141}Q_2 - E_{148}R_2 + E_7S_2 + E_8U_2 \quad (\text{D.13})$$

$$D_{14} = -E_{182} + E_{280}H_2 - E_{193}K_2 + E_{161}M_2 + E_{169}N_2 - E_{148}P_2 + E_8S_2 \quad (\text{D.14})$$

$$D_{15} = -E_{183} + E_{278} + E_{281}H_2 - E_{194}K_2 + E_{167}L_2 + E_{162}M_2 + E_{170}N_2 - E_{142}Q_2 - E_{149}R_2 + E_7T_2 + E_9U_2 \quad (\text{D.15})$$

$$D_{16} = -E_{184} + E_{279} + E_{282}H_2 - E_{195}K_2 + E_{168}L_2 + E_{163}M_2 + E_{171}N_2 - E_{149}P_2 - E_{143}Q_2 - E_{150}R_2 + E_9S_2 + E_8T_2 + E_{10}U_2 \quad (\text{D.16})$$

$$D_{17} = -E_{185} + E_{280} + E_{283}H_2 - E_{196}K_2 + E_{169}L_2 + E_{164}M_2 + E_{172}N_2 - E_{150}P_2 + E_{10}S_2 \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned}
D_{18} &= -E_{186} + E_{281} + E_{284} H_2 - E_{197} K_2 + E_{170} L_2 + E_{165} M_2 + E_{173} N_2 - E_{144} Q_2 - E_{151} R_2 + E_9 T_2 + E_{11} U_2 & (D.18) \\
D_{19} &= -E_{186} + E_{281} + E_{284} H_2 - E_{197} K_2 + E_{170} L_2 + E_{165} M_2 + E_{173} N_2 - E_{144} Q_2 - E_{151} R_2 + E_9 T_2 + E_{11} U_2 & (D.19) \\
D_{20} &= -E_{189} + E_{284} - E_{199} K_2 + E_{173} L_2 - E_{146} Q_2 - E_{153} R_2 + E_{11} T_2 & (D.20) \\
D_{21} &= -E_{191} + E_{286} H_2 - E_{200} K_2 + E_{167} M_2 + E_{175} N_2 - E_{147} Q_2 - E_{154} R_2 + E_{13} U_2 & (D.21) \\
D_{22} &= -E_{192} + E_{287} H_2 - E_{201} K_2 + E_{168} M_2 + E_{176} N_2 - E_{154} P_2 - E_{148} Q_2 - E_{155} R_2 + E_{13} S_2 + E_{14} U_2 & (D.22) \\
D_{23} &= -E_{193} + E_{288} H_2 + E_{169} M_2 - E_{155} P_2 + E_{14} S_2 & (D.23) \\
D_{24} &= -E_{194} + E_{286} + E_{289} H_2 - E_{202} K_2 + E_{175} L_2 + E_{170} M_2 + E_{177} N_2 - E_{149} Q_2 - E_{156} R_2 + E_{13} T_2 + E_{15} U_2 & (D.24) \\
D_{25} &= -E_{195} + E_{287} + E_{290} H_2 - E_{203} K_2 + E_{176} L_2 + E_{171} M_2 + E_{178} N_2 - E_{156} P_2 - E_{150} Q_2 - E_{157} R_2 + \\
& E_{15} S_2 + E_{14} T_2 + E_{16} U_2 & (D.25) \\
D_{26} &= -E_{197} + E_{289} + E_{291} H_2 - E_{204} K_2 + E_{177} L_2 + E_{173} M_2 + E_{179} N_2 - E_{151} Q_2 - E_{158} R_2 + E_{15} T_2 + E_{17} U_2 & (D.26) \\
D_{27} &= -E_{200} + E_{292} H_2 + E_{175} M_2 - E_{154} Q_2 + E_{18} U_2 & (D.27) \\
D_{28} &= -E_{201} + E_{293} H_2 + E_{176} M_2 - E_{155} Q_2 + E_{18} S_2 & (D.28) \\
D_{29} &= -E_{202} + E_{292} + E_{294} H_2 + E_{177} M_2 - E_{156} Q_2 + E_{18} T_2 + E_{19} U_2 & (D.29) \\
D_{30} &= E_{270} G_2 - E_{245} K_2 + E_{226} N_2 - E_{205} R_2 + E_{20} U_2 & (D.30) \\
D_{31} &= E_{270} + E_{271} G_2 - E_{246} K_2 + E_{227} N_2 - E_{205} P_2 - E_{206} R_2 + E_{20} S_2 + E_{21} U_2 & (D.31) \\
D_{32} &= E_{271} + E_{272} G_2 - E_{247} K_2 + E_{228} N_2 - E_{206} P_2 - E_{207} R_2 + E_{21} S_2 + E_{22} U_2 & (D.32) \\
D_{33} &= E_{272} - E_{248} K_2 + E_{229} N_2 - E_{207} P_2 + E_{22} S_2 & (D.33) \\
D_{34} &= E_{273} G_2 - E_{249} K_2 + E_{226} L_2 + E_{230} N_2 - E_{208} R_2 + E_{20} T_2 + E_{23} U_2 & (D.34) \\
D_{35} &= E_{273} + E_{274} G_2 - E_{250} K_2 + E_{227} L_2 + E_{231} N_2 - E_{208} P_2 - E_{209} R_2 + E_{23} S_2 + E_{21} T_2 + E_{24} U_2 & (D.35) \\
D_{36} &= E_{274} + E_{275} G_2 - E_{251} K_2 + E_{228} L_2 + E_{232} N_2 - E_{209} P_2 - E_{210} R_2 + E_{24} S_2 + E_{22} T_2 + E_{25} U_2 & (D.36) \\
D_{37} &= E_{275} - E_{252} K_2 + E_{229} L_2 - E_{210} P_2 + E_{25} S_2 & (D.37) \\
D_{38} &= E_{276} G_2 - E_{253} K_2 + E_{230} L_2 - E_{211} R_2 + E_{23} T_2 & (D.38) \\
D_{39} &= E_{276} + E_{277} G_2 - E_{254} K_2 + E_{231} L_2 - E_{211} P_2 - E_{212} R_2 + E_{24} T_2 & (D.39) \\
D_{40} &= E_{277} - E_{255} K_2 + E_{232} L_2 - E_{212} P_2 + E_{25} T_2 & (D.40) \\
D_{41} &= -E_{245} + E_{278} G_2 - E_{256} K_2 + E_{226} M_2 + E_{233} N_2 - E_{205} Q_2 - E_{213} R_2 + E_{26} U_2 & (D.41) \\
D_{42} &= -E_{246} + E_{278} + E_{279} G_2 - E_{257} K_2 + E_{227} M_2 + E_{234} N_2 - E_{213} P_2 - E_{206} Q_2 - E_{214} R_2 + E_{26} S_2 + E_{27} U_2 & (D.42) \\
D_{43} &= -E_{247} + E_{279} + E_{280} G_2 - E_{258} K_2 + E_{228} M_2 + E_{235} N_2 - E_{214} P_2 - E_{207} Q_2 - E_{215} R_2 + E_{27} S_2 + E_{28} U_2 & (D.43) \\
D_{44} &= -E_{248} + E_{280} - E_{259} K_2 + E_{229} M_2 + E_{236} N_2 - E_{215} P_2 + E_{28} S_2 & (D.44) \\
D_{45} &= -E_{249} + E_{281} G_2 - E_{260} K_2 + E_{233} L_2 + E_{230} M_2 + E_{237} N_2 - E_{208} Q_2 - E_{216} R_2 + E_{26} T_2 + E_{29} U_2 & (D.45) \\
D_{46} &= -E_{250} + E_{281} + E_{282} G_2 - E_{261} K_2 + E_{234} L_2 + E_{231} M_2 + E_{238} N_2 - E_{216} P_2 - E_{209} Q_2 - E_{217} R_2 + \\
& E_{29} S_2 + E_{27} T_2 + E_{30} U_2 & (D.46) \\
D_{47} &= -E_{251} + E_{282} + E_{283} G_2 - E_{262} K_2 + E_{235} L_2 + E_{232} M_2 + E_{239} N_2 - E_{217} P_2 - E_{210} Q_2 - E_{218} R_2 + \\
& E_{30} S_2 + E_{28} T_2 + E_{31} U_2 & (D.47) \\
D_{48} &= -E_{253} + E_{284} G_2 - E_{263} K_2 + E_{237} L_2 - E_{211} Q_2 - E_{219} R_2 + E_{29} T_2 & (D.48) \\
D_{49} &= -E_{254} + E_{284} + E_{285} G_2 - E_{264} K_2 + E_{238} L_2 - E_{219} P_2 - E_{212} Q_2 - E_{220} R_2 + E_{30} T_2 & (D.49) \\
D_{50} &= -E_{256} + E_{286} G_2 - E_{265} K_2 + E_{233} M_2 + E_{240} N_2 - E_{213} Q_2 - E_{221} R_2 + E_{32} U_2 & (D.50) \\
D_{51} &= -E_{257} + E_{286} + E_{287} G_2 - E_{266} K_2 + E_{234} M_2 + E_{241} N_2 - E_{221} P_2 - E_{214} Q_2 - E_{222} R_2 + E_{32} S_2 + E_{33} U_2 & (D.51) \\
D_{52} &= -E_{258} + E_{287} + E_{288} G_2 - E_{267} K_2 + E_{235} M_2 + E_{242} N_2 - E_{222} P_2 - E_{215} Q_2 - E_{223} R_2 + E_{33} S_2 + E_{34} U_2 & (D.52) \\
D_{53} &= -E_{260} + E_{289} G_2 - E_{268} K_2 + E_{240} L_2 + E_{237} M_2 + E_{243} N_2 - E_{216} Q_2 - E_{224} R_2 + E_{32} T_2 + E_{35} U_2 & (D.53) \\
D_{54} &= -E_{261} + E_{289} + E_{290} G_2 - E_{269} K_2 + E_{241} L_2 + E_{238} M_2 + E_{244} N_2 - E_{224} P_2 - E_{217} Q_2 - E_{225} R_2 + E_{35} S_2 + \\
& E_{33} T_2 + E_{36} U_2 & (D.54) \\
D_{55} &= -E_{263} + E_{291} G_2 + E_{243} L_2 - E_{219} Q_2 + E_{35} T_2 & (D.55) \\
D_{56} &= -E_{265} + E_{292} G_2 + E_{240} M_2 - E_{221} Q_2 + E_{37} U_2 & (D.56) \\
D_{57} &= -E_{266} + E_{292} + E_{293} G_2 + E_{241} M_2 - E_{222} Q_2 + E_{37} S_2 + E_{38} U_2 & (D.57) \\
D_{58} &= -E_{268} + E_{294} G_2 + E_{243} M_2 - E_{224} Q_2 + E_{37} T_2 & (D.58) \\
D_{59} &= E_{180} G_2 - E_{245} H_2 + E_{121} N_2 - E_{102} R_2 + E_{39} U_2 & (D.59) \\
D_{60} &= E_{180} + E_{181} G_2 - E_{246} H_2 + E_{122} N_2 - E_{102} P_2 - E_{103} R_2 + E_{39} S_2 + E_{40} U_2 & (D.60) \\
D_{61} &= E_{181} + E_{182} G_2 - E_{247} H_2 + E_{123} N_2 - E_{103} P_2 - E_{104} R_2 + E_{40} S_2 + E_{41} U_2 & (D.61) \\
D_{62} &= E_{182} - E_{248} H_2 + E_{124} N_2 - E_{104} P_2 + E_{41} S_2 & (D.62) \\
D_{63} &= -E_{245} + E_{183} G_2 - E_{249} H_2 + E_{121} L_2 + E_{125} N_2 - E_{105} R_2 + E_{39} T_2 + E_{42} U_2 & (D.63) \\
D_{64} &= E_{183} - E_{246} + E_{184} G_2 - E_{250} H_2 + E_{122} L_2 + E_{126} N_2 - E_{105} P_2 - E_{106} R_2 + E_{42} S_2 + E_{40} T_2 + E_{43} U_2 & (D.64) \\
D_{65} &= E_{184} - E_{247} + E_{185} G_2 - E_{251} H_2 + E_{123} L_2 + E_{127} N_2 - E_{106} P_2 - E_{107} R_2 + E_{43} S_2 + E_{41} T_2 + E_{44} U_2 & (D.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{66} &= E_{185} - E_{248} - E_{252}H_2 + E_{124}L_2 + E_{128}N_2 - E_{107}P_2 + E_{44}S_2 & (D.66) \\
D_{67} &= -E_{249} + E_{186}G_2 - E_{253}H_2 + E_{125}L_2 + E_{129}N_2 - E_{108}R_2 + E_{42}T_2 + E_{45}U_2 & (D.67) \\
D_{68} &= E_{186} - E_{250} + E_{187}G_2 - E_{254}H_2 + E_{126}L_2 + E_{130}N_2 - E_{108}P_2 - E_{109}R_2 + E_{45}S_2 + E_{43}T_2 + E_{46}U_2 & (D.68) \\
D_{69} &= E_{187} - E_{251} + E_{188}G_2 - E_{255}H_2 + E_{127}L_2 + E_{131}N_2 - E_{109}P_2 - E_{110}R_2 + E_{46}S_2 + E_{44}T_2 + E_{47}U_2 & (D.69) \\
D_{70} &= -E_{253} + E_{189}G_2 + E_{129}L_2 - E_{111}R_2 + E_{45}T_2 & (D.70) \\
D_{71} &= E_{189} - E_{254} + E_{190}G_2 + E_{130}L_2 - E_{111}P_2 - E_{112}R_2 + E_{46}T_2 & (D.71) \\
D_{72} &= E_{191}G_2 - E_{256}H_2 + E_{121}M_2 + E_{132}N_2 - E_{102}Q_2 - E_{113}R_2 + E_{48}U_2 & (D.72) \\
D_{73} &= E_{191} + E_{192}G_2 - E_{257}H_2 + E_{122}M_2 + E_{133}N_2 - E_{113}P_2 - E_{103}Q_2 - E_{114}R_2 + E_{48}S_2 + E_{49}U_2 & (D.73) \\
D_{74} &= E_{192} + E_{193}G_2 - E_{258}H_2 + E_{123}M_2 + E_{134}N_2 - E_{114}P_2 - E_{104}Q_2 - E_{115}R_2 + E_{49}S_2 + E_{50}U_2 & (D.74) \\
D_{75} &= E_{193} - E_{259}H_2 + E_{124}M_2 - E_{115}P_2 + E_{50}S_2 & (D.75) \\
D_{76} &= -E_{256} + E_{194}G_2 - E_{260}H_2 + E_{132}L_2 + E_{125}M_2 + E_{135}N_2 - E_{105}Q_2 - E_{116}R_2 + E_{48}T_2 + E_{51}U_2 & (D.76) \\
D_{77} &= E_{194} - E_{257} + E_{195}G_2 - E_{261}H_2 + E_{133}L_2 + E_{126}M_2 + E_{136}N_2 - E_{116}P_2 - E_{106}Q_2 - E_{117}R_2 + \\
&E_{51}S_2 + E_{49}T_2 + E_{52}U_2 & (D.77) \\
D_{78} &= E_{195} - E_{258} + E_{196}G_2 - E_{262}H_2 + E_{134}L_2 + E_{127}M_2 + E_{137}N_2 - E_{117}P_2 - E_{107}Q_2 - E_{118}R_2 + \\
&E_{52}S_2 + E_{50}T_2 + E_{53}U_2 & (D.78) \\
D_{79} &= -E_{260} + E_{197}G_2 - E_{263}H_2 + E_{135}L_2 + E_{129}M_2 + E_{138}N_2 - E_{108}Q_2 - E_{119}R_2 + E_{51}T_2 + E_{54}U_2 & (D.79) \\
D_{80} &= E_{197} - E_{261} + E_{198}G_2 - E_{264}H_2 + E_{136}L_2 + E_{130}M_2 + E_{139}N_2 - E_{119}P_2 - E_{109}Q_2 - E_{120}R_2 + \\
&E_{54}S_2 + E_{52}T_2 + E_{55}U_2 & (D.80) \\
D_{81} &= -E_{263} + E_{199}G_2 + E_{138}L_2 - E_{111}Q_2 + E_{54}T_2 & (D.81) \\
D_{82} &= E_{200}G_2 - E_{265}H_2 + E_{132}M_2 - E_{113}Q_2 + E_{56}U_2 & (D.82) \\
D_{83} &= E_{200} + E_{201}G_2 - E_{266}H_2 + E_{133}M_2 - E_{114}Q_2 + E_{56}S_2 + E_{57}U_2 & (D.83) \\
D_{84} &= E_{201} - E_{267}H_2 + E_{134}M_2 - E_{115}Q_2 + E_{57}S_2 & (D.84) \\
D_{85} &= -E_{265} + E_{202}G_2 - E_{268}H_2 + E_{135}M_2 - E_{116}Q_2 + E_{56}T_2 + E_{58}U_2 & (D.85) \\
D_{86} &= E_{202} - E_{266} + E_{203}G_2 - E_{269}H_2 + E_{136}M_2 - E_{117}Q_2 + E_{58}S_2 + E_{57}T_2 + E_{59}U_2 & (D.86) \\
D_{87} &= -E_{268} + E_{204}G_2 + E_{138}M_2 - E_{119}Q_2 + E_{58}T_2 & (D.87) \\
D_{88} &= E_{159}G_2 - E_{226}H_2 + E_{121}K_2 - E_{88}R_2 + E_{60}U_2 & (D.88) \\
D_{89} &= E_{159} + E_{160}G_2 - E_{227}H_2 + E_{122}K_2 - E_{88}P_2 - E_{89}R_2 + E_{60}S_2 + E_{61}U_2 & (D.89) \\
D_{90} &= E_{160} + E_{161}G_2 - E_{228}H_2 + E_{123}K_2 - E_{89}P_2 - E_{90}R_2 + E_{61}S_2 + E_{62}U_2 & (D.90) \\
D_{91} &= E_{161} - E_{229}H_2 + E_{124}K_2 - E_{90}P_2 + E_{62}S_2 & (D.91) \\
D_{92} &= -E_{226} + E_{162}G_2 - E_{230}H_2 + E_{125}K_2 - E_{91}R_2 + E_{60}T_2 + E_{63}U_2 & (D.92) \\
D_{93} &= E_{162} - E_{227} + E_{163}G_2 - E_{231}H_2 + E_{126}K_2 - E_{91}P_2 - E_{92}R_2 + E_{63}S_2 + E_{61}T_2 + E_{64}U_2 & (D.93) \\
D_{94} &= E_{163} - E_{228} + E_{164}G_2 - E_{232}H_2 + E_{127}K_2 - E_{92}P_2 - E_{93}R_2 + E_{64}S_2 + E_{62}T_2 + E_{65}U_2 & (D.94) \\
D_{95} &= -E_{230} + E_{165}G_2 + E_{129}K_2 - E_{94}R_2 + E_{63}T_2 & (D.95) \\
D_{96} &= E_{165} - E_{231} + E_{166}G_2 + E_{130}K_2 - E_{94}P_2 - E_{95}R_2 + E_{64}T_2 & (D.96) \\
D_{97} &= E_{121} + E_{167}G_2 - E_{233}H_2 + E_{132}K_2 - E_{88}Q_2 - E_{96}R_2 + E_{66}U_2 & (D.97) \\
D_{98} &= E_{122} + E_{167} + E_{168}G_2 - E_{234}H_2 + E_{133}K_2 - E_{96}P_2 - E_{89}Q_2 - E_{97}R_2 + E_{66}S_2 + E_{67}U_2 & (D.98) \\
D_{99} &= E_{123} + E_{168} + E_{169}G_2 - E_{235}H_2 + E_{134}K_2 - E_{97}P_2 - E_{90}Q_2 - E_{98}R_2 + E_{67}S_2 + E_{68}U_2 & (D.99) \\
D_{100} &= E_{125} - E_{233} + E_{170}G_2 - E_{237}H_2 + E_{135}K_2 - E_{91}Q_2 - E_{99}R_2 + E_{66}T_2 + E_{69}U_2 & (D.100) \\
D_{101} &= E_{126} + E_{170} - E_{234} + E_{171}G_2 - E_{238}H_2 + E_{136}K_2 - E_{99}P_2 - E_{92}Q_2 - E_{100}R_2 + E_{69}S_2 + \\
&E_{67}T_2 + E_{70}U_2 & (D.101) \\
D_{102} &= E_{129} - E_{237} + E_{173}G_2 + E_{138}K_2 - E_{94}Q_2 - E_{101}R_2 + E_{69}T_2 & (D.102) \\
D_{103} &= E_{132} + E_{175}G_2 - E_{240}H_2 - E_{96}Q_2 + E_{71}U_2 & (D.103) \\
D_{104} &= E_{133} + E_{175} + E_{176}G_2 - E_{241}H_2 - E_{97}Q_2 + E_{71}S_2 + E_{72}U_2 & (D.104) \\
D_{105} &= E_{135} - E_{240} + E_{177}G_2 - E_{243}H_2 - E_{99}Q_2 + E_{71}T_2 + E_{73}U_2 & (D.105) \\
D_{106} &= E_{140}G_2 - E_{205}H_2 + E_{102}K_2 - E_{88}N_2 + E_{74}U_2 & (D.106) \\
D_{107} &= E_{140} + E_{141}G_2 - E_{206}H_2 + E_{103}K_2 - E_{89}N_2 + E_{74}S_2 + E_{75}U_2 & (D.107) \\
D_{108} &= E_{141} - E_{207}H_2 + E_{104}K_2 - E_{90}N_2 + E_{75}S_2 & (D.108) \\
D_{109} &= -E_{205} + E_{142}G_2 - E_{208}H_2 + E_{105}K_2 - E_{88}L_2 - E_{91}N_2 + E_{74}T_2 + E_{76}U_2 & (D.109) \\
D_{110} &= E_{142} - E_{206} + E_{143}G_2 - E_{209}H_2 + E_{106}K_2 - E_{89}L_2 - E_{92}N_2 + E_{76}S_2 + E_{75}T_2 + E_{77}U_2 & (D.110) \\
D_{111} &= E_{143} - E_{207} - E_{210}H_2 + E_{107}K_2 - E_{90}L_2 - E_{93}N_2 + E_{77}S_2 & (D.111) \\
D_{112} &= -E_{208} + E_{144}G_2 - E_{211}H_2 + E_{108}K_2 - E_{91}L_2 - E_{94}N_2 + E_{76}T_2 + E_{78}U_2 & (D.112) \\
D_{113} &= E_{144} - E_{209} + E_{145}G_2 - E_{212}H_2 + E_{109}K_2 - E_{92}L_2 - E_{95}N_2 + E_{78}S_2 + E_{77}T_2 + E_{79}U_2 & (D.113)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{114} &= -E_{211} + E_{146}G_2 + E_{111}K_2 - E_{94}L_2 + E_{78}T_2 & (D.114) \\
D_{115} &= E_{102} + E_{147}G_2 - E_{213}H_2 + E_{113}K_2 - E_{88}M_2 - E_{96}N_2 + E_{80}U_2 & (D.115) \\
D_{116} &= E_{103} + E_{147} + E_{148}G_2 - E_{214}H_2 + E_{114}K_2 - E_{89}M_2 - E_{97}N_2 + E_{80}S_2 + E_{81}U_2 & (D.116) \\
D_{117} &= E_{104} + E_{148} - E_{215}H_2 + E_{115}K_2 - E_{90}M_2 - E_{98}N_2 + E_{81}S_2 & (D.117) \\
D_{118} &= E_{105} - E_{213} + E_{149}G_2 - E_{216}H_2 + E_{116}K_2 - E_{96}L_2 - E_{91}M_2 - E_{99}N_2 + E_{80}T_2 + E_{82}U_2 & (D.118) \\
D_{119} &= E_{106} + E_{149} - E_{214} + E_{150}G_2 - E_{217}H_2 + E_{117}K_2 - E_{97}L_2 - E_{92}M_2 - E_{100}N_2 + E_{82}S_2 + \\
&\quad E_{81}T_2 + E_{83}U_2 & (D.119) \\
D_{120} &= E_{108} - E_{216} + E_{151}G_2 - E_{219}H_2 + E_{119}K_2 - E_{99}L_2 - E_{94}M_2 - E_{101}N_2 + E_{82}T_2 + E_{84}U_2 & (D.120) \\
D_{121} &= E_{113} + E_{154}G_2 - E_{221}H_2 - E_{96}M_2 + E_{85}U_2 & (D.121) \\
D_{122} &= E_{114} + E_{154} + E_{155}G_2 - E_{222}H_2 - E_{97}M_2 + E_{85}S_2 + E_{86}U_2 & (D.122) \\
D_{123} &= E_{116} - E_{221} + E_{156}G_2 - E_{224}H_2 - E_{99}M_2 + E_{85}T_2 + E_{87}U_2 & (D.123) \\
D_{124} &= E_1G_2 - E_{20}H_2 + E_{39}K_2 - E_{60}N_2 + E_{74}R_2 & (D.124) \\
D_{125} &= E_1 + E_2G_2 - E_{21}H_2 + E_{40}K_2 - E_{61}N_2 + E_{74}P_2 + E_{75}R_2 & (D.125) \\
D_{126} &= E_2 - E_{22}H_2 + E_{41}K_2 - E_{62}N_2 + E_{75}P_2 & (D.126) \\
D_{127} &= -E_{20} + E_3G_2 - E_{23}H_2 + E_{42}K_2 - E_{60}L_2 - E_{63}N_2 + E_{76}R_2 & (D.127) \\
D_{128} &= -E_{21} + E_3 + E_4G_2 - E_{24}H_2 + E_{43}K_2 - E_{61}L_2 - E_{64}N_2 + E_{76}P_2 + E_{77}R_2 & (D.128) \\
D_{129} &= -E_{22} + E_4 - E_{25}H_2 + E_{44}K_2 - E_{62}L_2 - E_{65}N_2 + E_{77}P_2 & (D.129) \\
D_{130} &= -E_{23} + E_5G_2 + E_{45}K_2 - E_{63}L_2 + E_{78}R_2 & (D.130) \\
D_{131} &= -E_{24} + E_5 + E_6G_2 + E_{46}K_2 - E_{64}L_2 + E_{78}P_2 + E_{79}R_2 & (D.131) \\
D_{132} &= E_{39} + E_7G_2 - E_{26}H_2 + E_{48}K_2 - E_{60}M_2 - E_{66}N_2 + E_{74}Q_2 + E_{80}R_2 & (D.132) \\
D_{133} &= E_{40} + E_7 + E_8G_2 - E_{27}H_2 + E_{49}K_2 - E_{61}M_2 - E_{67}N_2 + E_{80}P_2 + E_{75}Q_2 + E_{81}R_2 & (D.133) \\
D_{134} &= E_{41} + E_8 - E_{28}H_2 + E_{50}K_2 - E_{62}M_2 - E_{68}N_2 + E_{81}P_2 & (D.134) \\
D_{135} &= -E_{26} + E_{42} + E_9G_2 - E_{29}H_2 + E_{51}K_2 - E_{66}L_2 - E_{63}M_2 - E_{69}N_2 + E_{76}Q_2 + E_{82}R_2 & (D.135) \\
D_{136} &= -E_{27} + E_{43} + E_9 + E_{10}G_2 - E_{30}H_2 + E_{52}K_2 - E_{67}L_2 - E_{64}M_2 - E_{70}N_2 + E_{82}P_2 + E_{77}Q_2 + E_{83}R_2 & (D.136) \\
D_{137} &= -E_{29} + E_{45} + E_{11}G_2 + E_{54}K_2 - E_{69}L_2 + E_{78}Q_2 + E_{84}R_2 & (D.137) \\
D_{138} &= E_{48} + E_{13}G_2 - E_{32}H_2 + E_{56}K_2 - E_{66}M_2 - E_{71}N_2 + E_{80}Q_2 + E_{85}R_2 & (D.138) \\
D_{139} &= E_{13} + E_{49} + E_{14}G_2 - E_{33}H_2 + E_{57}K_2 - E_{67}M_2 - E_{72}N_2 + E_{85}P_2 + E_{81}Q_2 + E_{86}R_2 & (D.139) \\
D_{140} &= -E_{32} + E_{51} + E_{15}G_2 - E_{35}H_2 + E_{58}K_2 - E_{71}L_2 - E_{69}M_2 - E_{73}N_2 + E_{82}Q_2 + E_{87}R_2 & (D.140) \\
D_{141} &= E_{56} + E_{18}G_2 - E_{37}H_2 - E_{71}M_2 + E_{85}Q_2 & (D.141)
\end{aligned}$$

# Annexe E

## Coefficients $C_i$

Voici l'expression des coefficients  $C_i, i = 1, 2, \dots, 32$ .

$$C_1 = -D_{40} + D_6 - D_{44}H_1 + D_{80}K_1 - D_{112}L_1 - D_{116}N_1 + D_{144}P_1 - D_{174}S_1 \quad (\text{E.1})$$

$$C_2 = D_{14} + D_{76} - D_{51}H_1 + D_{91}K_1 - D_{112}M_1 - D_{123}N_1 + D_{152}P_1 - D_{180}S_1 \quad (\text{E.2})$$

$$C_3 = D_3 - D_{40}H_1 + D_{76}K_1 - D_{112}N_1 + D_{141}P_1 - D_{171}S_1 \quad (\text{E.3})$$

$$C_4 = -D_{43} + D_8 + D_9G_1 - D_{47}H_1 + D_{83}K_1 - D_{115}L_1 - D_{119}N_1 + D_{146}P_1 + D_{147}R_1 - D_{176}S_1 - D_{174}T_1 - D_{177}U_1 \quad (\text{E.4})$$

$$C_5 = D_{16} - D_{50} + D_{79} + D_{17}G_1 - D_{54}H_1 + D_{94}K_1 - D_{122}L_1 - D_{115}M_1 - D_{126}N_1 + D_{154}P_1 + D_{144}Q_1 + D_{155}R_1 - D_{182}S_1 - D_{180}T_1 - D_{183}U_1 \quad (\text{E.5})$$

$$C_6 = -D_{39} + D_5 + D_6G_1 - D_{43}H_1 + D_{79}K_1 - D_{111}L_1 - D_{115}N_1 + D_{143}P_1 + D_{144}R_1 - D_{173}S_1 - D_{171}T_1 - D_{174}U_1 \quad (\text{E.6})$$

$$C_7 = D_{24} + D_{90} + D_{25}G_1 - D_{61}H_1 + D_{103}K_1 - D_{122}M_1 - D_{133}N_1 + D_{162}P_1 + D_{152}Q_1 + D_{163}R_1 - D_{188}S_1 - D_{189}U_1 \quad (\text{E.7})$$

$$C_8 = D_{13} + D_{75} + D_{14}G_1 - D_{50}H_1 + D_{90}K_1 - D_{111}M_1 - D_{122}N_1 + D_{151}P_1 + D_{141}Q_1 + D_{152}R_1 - D_{179}S_1 - D_{180}U_1 \quad (\text{E.8})$$

$$C_9 = D_2 + D_3G_1 - D_{39}H_1 + D_{75}K_1 - D_{111}N_1 + D_{140}P_1 + D_{141}R_1 - D_{170}S_1 - D_{171}U_1 \quad (\text{E.9})$$

$$C_{10} = D_{10} - D_{46} + D_{11}G_1 + D_{86}K_1 - D_{118}L_1 + D_{148}P_1 + D_{149}R_1 - D_{176}T_1 \quad (\text{E.10})$$

$$C_{11} = D_{18} - D_{53} + D_{82} + D_{19}G_1 - D_{57}H_1 + D_{97}K_1 - D_{125}L_1 - D_{118}M_1 - D_{129}N_1 + D_{156}P_1 + D_{146}Q_1 + D_{157}R_1 - D_{184}S_1 - D_{182}T_1 - D_{185}U_1 \quad (\text{E.11})$$

$$C_{12} = -D_{42} + D_7 + D_8G_1 - D_{46}H_1 + D_{82}K_1 - D_{114}L_1 - D_{118}N_1 + D_{145}P_1 + D_{146}R_1 - D_{175}S_1 -$$



$$D_{173}T_1 - D_{176}U_1 \quad (\text{E.12})$$

$$C_{13} = D_{26} - D_{60} + D_{93} + D_{27}G_1 - D_{64}H_1 + D_{105}K_1 - D_{132}L_1 - D_{125}M_1 - D_{135}N_1 + D_{164}P_1 + D_{154}Q_1 + D_{165}R_1 - D_{190}S_1 - D_{188}T_1 - D_{191}U_1 \quad (\text{E.13})$$

$$C_{14} = D_{15} - D_{49} + D_{78} + D_{16}G_1 - D_{53}H_1 + D_{93}K_1 - D_{121}L_1 - D_{114}M_1 - D_{125}N_1 + D_{153}P_1 + D_{143}Q_1 + D_{154}R_1 - D_{181}S_1 - D_{179}T_1 - D_{182}U_1 \quad (\text{E.14})$$

$$C_{15} = -D_{38} + D_4 + D_5G_1 - D_{42}H_1 + D_{78}K_1 - D_{110}L_1 - D_{114}N_1 + D_{142}P_1 + D_{143}R_1 - D_{172}S_1 - D_{170}T_1 - D_{173}U_1 \quad (\text{E.15})$$

$$C_{16} = D_{102} + D_{32} + D_{33}G_1 - D_{69}H_1 - D_{132}M_1 + D_{162}Q_1 - D_{195}S_1 - D_{196}U_1 \quad (\text{E.16})$$

$$C_{17} = D_{23} + D_{89} + D_{24}G_1 - D_{60}H_1 + D_{102}K_1 - D_{121}M_1 - D_{132}N_1 + D_{161}P_1 + D_{151}Q_1 + D_{162}R_1 - D_{187}S_1 - D_{188}U_1 \quad (\text{E.17})$$

$$C_{18} = D_{12} + D_{74} + D_{13}G_1 - D_{49}H_1 + D_{89}K_1 - D_{110}M_1 - D_{121}N_1 + D_{150}P_1 + D_{140}Q_1 + D_{151}R_1 - D_{178}S_1 - D_{179}U_1 \quad (\text{E.18})$$

$$C_{19} = D_1 + D_2G_1 - D_{38}H_1 + D_{74}K_1 - D_{110}N_1 + D_{139}P_1 + D_{140}R_1 - D_{169}S_1 - D_{170}U_1 \quad (\text{E.19})$$

$$C_{20} = -D_{56} + D_{85} + D_{21}G_1 + D_{99}K_1 - D_{128}L_1 + D_{148}Q_1 + D_{159}R_1 - D_{184}T_1 \quad (\text{E.20})$$

$$C_{21} = -D_{45} + D_{10}G_1 + D_{85}K_1 - D_{117}L_1 + D_{148}R_1 - D_{175}T_1 \quad (\text{E.21})$$

$$C_{22} = -D_{63} + D_{96} + D_{29}G_1 - D_{66}H_1 + D_{107}K_1 - D_{134}L_1 - D_{128}M_1 - D_{137}N_1 + D_{156}Q_1 + D_{167}R_1 - D_{190}T_1 - D_{193}U_1 \quad (\text{E.22})$$

$$C_{23} = -D_{52} + D_{81} + D_{18}G_1 - D_{56}H_1 + D_{96}K_1 - D_{124}L_1 - D_{117}M_1 - D_{128}N_1 + D_{145}Q_1 + D_{156}R_1 - D_{181}T_1 - D_{184}U_1 \quad (\text{E.23})$$

$$C_{24} = -D_{41} + D_7G_1 - D_{45}H_1 + D_{81}K_1 - D_{113}L_1 - D_{117}N_1 + D_{145}R_1 - D_{172}T_1 - D_{175}U_1 \quad (\text{E.24})$$

$$C_{25} = D_{104} - D_{68} + D_{34}G_1 - D_{71}H_1 - D_{134}M_1 + D_{164}Q_1 - D_{195}T_1 - D_{197}U_1 \quad (\text{E.25})$$

$$C_{26} = -D_{59} + D_{92} + D_{26}G_1 - D_{63}H_1 + D_{104}K_1 - D_{131}L_1 - D_{124}M_1 - D_{134}N_1 + D_{153}Q_1 + D_{164}R_1 - D_{187}T_1 - D_{190}U_1 \quad (\text{E.26})$$

$$C_{27} = -D_{48} + D_{77} + D_{15}G_1 - D_{52}H_1 + D_{92}K_1 - D_{120}L_1 - D_{113}M_1 - D_{124}N_1 + D_{142}Q_1 + D_{153}R_1 - D_{178}T_1 - D_{181}U_1 \quad (\text{E.27})$$

$$C_{28} = -D_{37} + D_4G_1 - D_{41}H_1 + D_{77}K_1 - D_{109}L_1 - D_{113}N_1 + D_{142}R_1 - D_{169}T_1 - D_{172}U_1 \quad (\text{E.28})$$

$$C_{29} = D_{101} + D_{32}G_1 - D_{68}H_1 - D_{131}M_1 + D_{161}Q_1 - D_{195}U_1 \quad (\text{E.29})$$

$$C_{30} = D_{88} + D_{23}G_1 - D_{59}H_1 + D_{101}K_1 - D_{120}M_1 - D_{131}N_1 + D_{150}Q_1 + D_{161}R_1 - D_{187}U_1 \quad (\text{E.30})$$

$$C_{31} = D_{73} + D_{12}G_1 - D_{48}H_1 + D_{88}K_1 - D_{109}M_1 - D_{120}N_1 + D_{139}Q_1 + D_{150}R_1 - D_{178}U_1 \quad (\text{E.31})$$

$$C_{32} = D_1G_1 - D_{37}H_1 + D_{73}K_1 - D_{109}N_1 + D_{139}R_1 - D_{169}U_1 \quad (\text{E.32})$$

# Annexe F

## Liste des coefficients nuls pour différents types d'architecture

### F.1 Plate-forme de Gough-Stewart

Voici la liste des 105 coefficients présentés aux Annexes B à E qui sont nuls pour l'architecture générale de la plate-forme de Gough-Stewart.

Coefficients  $F_i$   $\rightarrow$   $F_4, F_8, F_{18}, F_{45}, F_{111}, F_{124}, F_{125}, F_{142}$   
 $F_{144}, F_{158}, F_{170}, F_{184}, F_{190}, F_{192}, F_{195}, F_{197}, F_{198}, F_{200}, F_{201}$

Coefficients  $E_i$   $\rightarrow$   $E_6, E_{21}, E_{36}, E_{38}, E_{86}, E_{104}, E_{118}, E_{136}$   
 $E_{145}, E_{147}, E_{150}, E_{153}, E_{155}, E_{156}, E_{158}, E_{160}, E_{161}, E_{172}, E_{177}, E_{193}$

$$\begin{aligned}
& E_{201}, E_{204}, E_{208}, E_{211}, E_{212}, E_{213}, E_{216}, E_{217}, E_{218}, E_{224}, E_{226}, E_{232} \\
& E_{234}, E_{237}, E_{239}, E_{240}, E_{242}, E_{243} \\
\text{Coefficients } D_i & \rightarrow D_9, D_{11}, D_{17}, D_{19}, D_{20}, D_{23}, D_{25}, D_{26}, D_{28} \\
& D_{29}, D_{37}, D_{40}, D_{44}, D_{47}, D_{49}, D_{52}, D_{54}, D_{55}, D_{57}, D_{58}, D_{66}, D_{69}, D_{71} \\
& D_{75}, D_{78}, D_{80}, D_{81}, D_{84}, D_{86}, D_{87}, D_{102}, D_{105}, D_{117}, D_{122}, D_{129}, D_{131} \\
\text{Coefficients } C_i & \rightarrow C_1, C_2, C_4, C_5, C_7, C_{10}, C_{11}, C_{13}, C_{16}, C_{20}, C_{22}, C_{25}
\end{aligned}$$

## F.2 Base coplanaire

Voici la liste des 152 coefficients présentés aux Annexes B à E qui sont nuls pour l'architecture dont les points sur la base sont coplanaires.

$$\begin{aligned}
\text{Coefficients } F_i & \rightarrow F_4, F_8, F_{18}, F_{29}, F_{36}, F_{45}, F_{55}, F_{62}, F_{111}, F_{124} \\
& F_{125}, F_{142}, F_{144}, F_{158}, F_{170}, F_{184}, F_{190}, F_{192}, F_{195}, F_{197}, F_{198}, F_{200}, F_{201} \\
\text{Coefficients } E_i & \rightarrow E_4, E_5, E_6, E_{10}, E_{11}, E_{18}, E_{20}, E_{21}, E_{24}, E_{26} \\
& E_{36}, E_{38}, E_{50}, E_{52}, E_{60}, E_{61}, E_{86}, E_{104}, E_{110}, E_{111}, E_{118}, E_{125}, E_{127} \\
& E_{133}, E_{136}, E_{145}, E_{147}, E_{150}, E_{153}, E_{155}, E_{156}, E_{158}, E_{160}, E_{161}, E_{167} \\
& E_{169}, E_{172}, E_{177}, E_{182}, E_{185}, E_{193}, E_{201}, E_{204}, E_{208}, E_{211}, E_{212}, E_{213} \\
& E_{216}, E_{217}, E_{218}, E_{224}, E_{226}, E_{232}, E_{234}, E_{237}, E_{239}, E_{240}, E_{242}, E_{243} \\
\text{Coefficients } D_i & \rightarrow D_6, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{17}, D_{19}, D_{20}, D_{23}, D_{25} \\
& D_{26}, D_{28}, D_{29}, D_{33}, D_{36}, D_{37}, D_{39}, D_{40}, D_{44}, D_{47}, D_{49}, D_{52}, D_{54}, D_{55}, D_{57} \\
& D_{58}, D_{66}, D_{69}, D_{71}, D_{75}, D_{78}, D_{80}, D_{81}, D_{84}, D_{86}, D_{87}, D_{91}, D_{94}, D_{96} \\
& D_{102}, D_{105}, D_{111}, D_{113}, D_{114}, D_{117}, D_{122}, D_{126}, D_{128}, D_{129}, D_{130}, D_{131} \\
& D_{134}, D_{136}, D_{137} \\
\text{Coefficients } C_i & \rightarrow C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_{10}, C_{11}, C_{12} \\
& C_{13}, C_{16}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{25}
\end{aligned}$$

### F.3 Architecture du type SSM

Voici la liste des 170 coefficients présentés aux Annexes B à E qui sont nuls pour l'architecture du type SSM.

$$\text{Coefficients } F_i \rightarrow F_4, F_8, F_{18}, F_{29}, F_{36}, F_{45}, F_{55}, F_{62}, F_{111}, F_{124} \\ F_{125}, F_{142}, F_{144}, F_{158}, F_{170}, F_{184}, F_{190}, F_{192}, F_{195}, F_{197}, F_{198}, F_{200}, F_{201}$$

$$\text{Coefficients } E_i \rightarrow E_4, E_5, E_6, E_{10}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{18}, E_{20} \\ E_{21}, E_{24}, E_{26}, E_{36}, E_{38}, E_{41}, E_{46}, E_{50}, E_{52}, E_{60}, E_{61}, E_{63}, E_{68}, E_{80}, E_{86} \\ E_{88}, E_{93}, E_{101}, E_{104}, E_{110}, E_{111}, E_{115}, E_{116}, E_{118}, E_{119}, E_{122}, E_{125} \\ E_{127}, E_{130}, E_{132}, E_{133}, E_{135}, E_{136}, E_{145}, E_{147}, E_{150}, E_{153}, E_{155}, E_{156} \\ E_{158}, E_{160}, E_{161}, E_{167}, E_{169}, E_{172}, E_{177}, E_{182}, E_{185}, E_{193}, E_{201}, E_{204} \\ E_{208}, E_{211}, E_{212}, E_{213}, E_{216}, E_{217}, E_{218}, E_{224}, E_{226}, E_{232}, E_{234}, E_{237} \\ E_{239}, E_{240}, E_{242}, E_{243}$$

$$\text{Coefficients } D_i \rightarrow D_6, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{17}, D_{19}, D_{20}, D_{23}, D_{25} \\ D_{26}, D_{28}, D_{29}, D_{33}, D_{36}, D_{37}, D_{39}, D_{40}, D_{44}, D_{47}, D_{49}, D_{52}, D_{54}, D_{55}, D_{57} \\ D_{58}, D_{66}, D_{69}, D_{71}, D_{75}, D_{78}, D_{80}, D_{81}, D_{84}, D_{86}, D_{87}, D_{91}, D_{94}, D_{96} \\ D_{102}, D_{105}, D_{111}, D_{113}, D_{114}, D_{117}, D_{122}, D_{126}, D_{128}, D_{129}, D_{130}, D_{131} \\ D_{134}, D_{136}, D_{137}$$

$$\text{Coefficients } C_i \rightarrow C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_{10}, C_{11}, C_{12} \\ C_{13}, C_{16}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{25}$$

### F.4 Architecture du type TSSM

Voici la liste des 263 coefficients présentés aux Annexes B à E qui sont nuls pour l'architecture du type TSSM.

$$\text{Coefficients } F_i \rightarrow F_4, F_8, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{18}, F_{22}, F_{23}, F_{25}, F_{29}$$

$F_{32}, F_{36}, F_{45}, F_{48}, F_{50}, F_{52}, F_{55}, F_{62}, F_{64}, F_{95}, F_{97}, F_{106}, F_{108}, F_{111}$   
 $F_{113}, F_{117}, F_{120}, F_{123}, F_{124}, F_{125}, F_{129}, F_{130}, F_{139}, F_{140}, F_{142}, F_{144}$   
 $F_{145}, F_{151}, F_{153}, F_{157}, F_{158}, F_{162}, F_{163}, F_{167}, F_{168}, F_{170}, F_{171}, F_{174}$   
 $F_{176}, F_{179}, F_{181}, F_{183}, F_{184}, F_{190}, F_{192}, F_{195}, F_{197}, F_{198}, F_{200}, F_{201}$

Coefficients  $E_i \rightarrow E_4, E_5, E_6, E_{10}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{18}, E_{20}$

$E_{21}, E_{24}, E_{26}, E_{28}, E_{29}, E_{30}, E_{35}, E_{36}, E_{38}, E_{41}, E_{43}, E_{44}, E_{46}, E_{47}, E_{50}$   
 $E_{52}, E_{55}, E_{60}, E_{61}, E_{63}, E_{68}, E_{70}, E_{71}, E_{79}, E_{80}, E_{82}, E_{83}, E_{86}, E_{88}$   
 $E_{89}, E_{93}, E_{95}, E_{96}, E_{98}, E_{101}, E_{103}, E_{104}, E_{108}, E_{109}, E_{110}, E_{111}$   
 $E_{115}, E_{116}, E_{118}, E_{119}, E_{122}, E_{124}, E_{125}, E_{126}, E_{127}, E_{130}, E_{132}, E_{133}$   
 $E_{135}, E_{136}, E_{141}, E_{142}, E_{144}, E_{145}, E_{146}, E_{147}, E_{150}, E_{152}, E_{153}, E_{154}$   
 $E_{155}, E_{156}, E_{158}, E_{159}, E_{160}, E_{161}, E_{164}, E_{166}, E_{167}, E_{168}, E_{169}, E_{172}$   
 $E_{174}, E_{175}, E_{177}, E_{178}, E_{181}, E_{182}, E_{184}, E_{185}, E_{188}, E_{190}, E_{192}, E_{193}$   
 $E_{197}, E_{199}, E_{200}, E_{201}, E_{203}, E_{204}, E_{207}, E_{208}, E_{210}, E_{211}, E_{212}, E_{213}$   
 $E_{215}, E_{216}, E_{217}, E_{218}, E_{221}, E_{223}, E_{224}, E_{225}, E_{226}, E_{229}, E_{231}, E_{232}$   
 $E_{233}, E_{234}, E_{236}, E_{237}, E_{238}, E_{239}, E_{240}, E_{241}, E_{242}, E_{243}$

Coefficients  $D_i \rightarrow D_6, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{17}, D_{19}, D_{20}, D_{23}, D_{25}$

$D_{26}, D_{28}, D_{29}, D_{33}, D_{36}, D_{37}, D_{39}, D_{40}, D_{44}, D_{47}, D_{49}, D_{52}, D_{54}, D_{56}, D_{57}$   
 $D_{58}, D_{66}, D_{69}, D_{71}, D_{75}, D_{78}, D_{80}, D_{81}, D_{84}, D_{86}, D_{87}, D_{91}, D_{94}, D_{96}$   
 $D_{102}, D_{105}, D_{111}, D_{113}, D_{114}, D_{117}, D_{122}, D_{126}, D_{128}, D_{129}, D_{130}, D_{131}$   
 $D_{134}, D_{136}, D_{137}$

Coefficients  $C_i \rightarrow C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_{10}, C_{11}, C_{12}$

$C_{13}, C_{16}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{25}$

## F.5 Architecture du type MSSM

Voici la liste des 259 coefficients présentés aux Annexes B à E qui sont nuls pour l'architecture du type MSSM.

Coefficients  $F_i \rightarrow F_4, F_8, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{18}, F_{22}, F_{23}, F_{25}, F_{29}$

$F_{32}, F_{36}, F_{45}, F_{48}, F_{50}, F_{52}, F_{55}, F_{62}, F_{64}, F_{95}, F_{97}, F_{106}, F_{108}, F_{111}$   
 $F_{113}, F_{117}, F_{120}, F_{123}, F_{124}, F_{125}, F_{129}, F_{130}, F_{139}, F_{140}, F_{142}, F_{144}$   
 $F_{145}, F_{151}, F_{153}, F_{157}, F_{158}, F_{162}, F_{163}, F_{167}, F_{168}, F_{170}, F_{171}, F_{174}$   
 $F_{176}, F_{179}, F_{181}, F_{183}, F_{184}, F_{190}, F_{192}, F_{195}, F_{197}, F_{198}, F_{200}, F_{201}$

Coefficients  $E_i \rightarrow E_4, E_5, E_6, E_{10}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{18}, E_{20}$

$E_{21}, E_{24}, E_{26}, E_{28}, E_{29}, E_{30}, E_{35}, E_{36}, E_{38}, E_{41}, E_{43}, E_{44}, E_{46}, E_{47}, E_{50}$   
 $E_{52}, E_{55}, E_{60}, E_{61}, E_{63}, E_{68}, E_{70}, E_{71}, E_{80}, E_{82}, E_{83}, E_{86}, E_{88}, E_{89}$   
 $E_{93}, E_{96}, E_{98}, E_{101}, E_{103}, E_{104}, E_{108}, E_{109}, E_{110}, E_{111}, E_{115}, E_{116}$   
 $E_{118}, E_{119}, E_{122}, E_{124}, E_{125}, E_{126}, E_{127}, E_{130}, E_{132}, E_{133}, E_{135}, E_{136}$   
 $E_{142}, E_{144}, E_{145}, E_{146}, E_{147}, E_{150}, E_{152}, E_{153}, E_{154}, E_{155}, E_{156}, E_{158}$   
 $E_{159}, E_{160}, E_{161}, E_{164}, E_{166}, E_{167}, E_{168}, E_{169}, E_{172}, E_{174}, E_{175}, E_{177}$   
 $E_{178}, E_{181}, E_{182}, E_{184}, E_{185}, E_{188}, E_{190}, E_{192}, E_{193}, E_{197}, E_{200}, E_{201}$   
 $E_{203}, E_{204}, E_{207}, E_{208}, E_{210}, E_{211}, E_{212}, E_{213}, E_{215}, E_{216}, E_{217}, E_{218}$   
 $E_{221}, E_{223}, E_{224}, E_{225}, E_{226}, E_{229}, E_{231}, E_{232}, E_{233}, E_{234}, E_{236}, E_{237}$   
 $E_{238}, E_{239}, E_{240}, E_{241}, E_{242}, E_{243}$

Coefficients  $D_i \rightarrow D_6, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{17}, D_{19}, D_{20}, D_{23}, D_{25}$

$D_{26}, D_{28}, D_{29}, D_{33}, D_{36}, D_{37}, D_{39}, D_{40}, D_{44}, D_{47}, D_{49}, D_{52}, D_{54}, D_{55}, D_{57}$   
 $D_{58}, D_{66}, D_{69}, D_{71}, D_{75}, D_{78}, D_{80}, D_{81}, D_{84}, D_{86}, D_{87}, D_{91}, D_{94}, D_{96}$   
 $D_{102}, D_{105}, D_{111}, D_{113}, D_{114}, D_{117}, D_{122}, D_{126}, D_{128}, D_{129}, D_{130}, D_{131}$   
 $D_{134}, D_{136}, D_{137}$

Coefficients  $C_i \rightarrow C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_{10}, C_{11}, C_{12}$

$C_{13}, C_{16}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{25}$

# Annexe G

## Géométrie de Grassmann

Cette annexe présente la suite des calculs et résultats introduits aux sections 7.1.1.1 à 7.1.1.5. Il s'agit de la dérivation des équations mathématiques représentant les différentes conditions géométriques.

### G.1 Condition 3d, cas général

Cette condition correspond géométriquement à la situation dans laquelle quatre vérins sont dans le même plan. Trois quadruplets de droites peuvent satisfaire cette condition, soit les droites associées aux vérins 1-2-3-6, 1-4-5-6 et 2-3-4-5. Les équations du quadruplet 1-2-3-6 ont été dérivées à la section 7.1.1.1. Voici celles des deux autres.

### Droites 1-4-5-6 coplanaires

Pour vérifier que les vérins 1, 4, 5 et 6 sont coplanaires, on résout le système d'équations suivant

$$(\mathbf{l}_5 \times \mathbf{l}_6) \cdot \mathbf{l}_1 = 0 \quad (\text{G.1})$$

$$(\mathbf{l}_5 \times \mathbf{l}_6) \cdot \mathbf{l}_4 = 0 \quad (\text{G.2})$$

La solution de ce système d'équations nous donne donc l'équation représentant les configurations singulières lorsque les jambes 1, 4, 5 et 6 sont coplanaires. Cette situation s'écrit

$$y = \frac{b_{4y}(b_{1x} - x) + p'_{3x}[(b_{1x} \cos \psi - b_{4y} \sin \psi) \cos \theta \sin \phi + (b_{1x} \sin \psi + b_{4y} \cos \psi) \cos \phi]}{b_{1x}} \quad (\text{G.3})$$

$$z = p'_{3x} \sin \phi \sin \theta \quad (\text{G.4})$$

### Droites 2-3-4-5 coplanaires

Pour vérifier que les vérins 2, 3, 4 et 5 sont coplanaires, on résout le système d'équations suivant

$$(\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{l}_2 = 0 \quad (\text{G.5})$$

$$(\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{l}_5 = 0 \quad (\text{G.6})$$

La solution de ce système d'équations nous donne donc l'équation représentant les configurations singulières lorsque les jambes 2, 3, 4 et 5 sont coplanaires. Cette situation s'écrit

$$y = \frac{b_{4y}(b_{1x} + x) - p'_{3x}[(b_{1x} \cos \psi + b_{4y} \sin \psi) \cos \theta \sin \phi + (b_{1x} \sin \psi - b_{4y} \cos \psi) \cos \phi]}{b_{1x}} \quad (\text{G.7})$$

$$z = -p'_{3x} \sin \phi \sin \theta \quad (\text{G.8})$$

## G.2 Condition 3d, cas particulier

Cette condition géométrique correspond aussi à l'alignement de quatre vérins dans le même plan, mais se réfère au cas particulier, c'est-à-dire lorsque la résolution du système d'équations est singulière. Les équations du quadruplet 1-2-3-6 ont été dérivées à la section 7.1.1.2. Voici celles des deux autres.



### Droites 1-4-5-6 coplanaires

La résolution du système d'équations (G.1) et (G.2) selon  $y$  et  $z$  est singulière lorsque

$$b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}(b_{4y} \cos \psi + b_{1x} \sin \psi) \sin \theta = 0 \quad (\text{G.9})$$

On est donc dans le cas particulier lorsque  $\sin \theta = 0$  ou bien  $b_{4y} \cos \psi + b_{1x} \sin \psi = 0$ , soit  $\theta = 0, \pi$  ou  $\cos \psi = \frac{-b_{1x}}{b_{4y}} \sin \psi$ . Avec  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , on a

$$z = 0 \quad (\text{G.10})$$

Avec  $\cos \psi = \frac{-b_{1x}}{b_{4y}} \sin \psi$  et en se servant de

$$\sin^2 \psi = \frac{b_{4y}^2}{b_{1x}^2 + b_{4y}^2} \quad (\text{G.11})$$

on obtient

$$z = \frac{(b_{1x}b_{4y} - b_{4y}x - b_{1x}y) \sin \psi \tan \theta}{b_{4y}} \quad (\text{G.12})$$

Les équations (G.10) et (G.12) avec les valeurs correspondantes de  $\cos \psi$  et  $\theta$  représentent donc les équations mathématiques représentant cette condition géométrique.

### Droites 2-3-4-5 coplanaires

La résolution du système d'équations (G.5) et (G.6) selon  $y$  et  $z$  est singulière lorsque

$$b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}(-b_{4y} \cos \psi + b_{1x} \sin \psi) \sin \theta = 0 \quad (\text{G.13})$$

On est donc dans le cas particulier lorsque  $\sin \theta = 0$  ou bien  $-b_{4y} \cos \psi + b_{1x} \sin \psi = 0$ , soit  $\theta = 0, \pi$  ou  $\cos \psi = \frac{b_{1x}}{b_{4y}} \sin \psi$ . Avec  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , on a

$$z = 0 \quad (\text{G.14})$$

Avec  $\cos \psi = \frac{b_{1x}}{b_{4y}} \sin \psi$  et en se servant de

$$\sin^2 \psi = \frac{b_{4y}^2}{b_{1x}^2 + b_{4y}^2} \quad (\text{G.15})$$

on obtient

$$z = \frac{(-b_{1x}b_{4y} - b_{4y}x + b_{1x}y) \sin \psi \tan \theta}{b_{4y}} \quad (\text{G.16})$$

Les équations (G.14) et (G.16) avec les valeurs correspondantes de  $\cos \psi$  et  $\theta$  représentent donc les équations mathématiques représentant cette condition géométrique.

### G.3 Condition 5a

Cette condition géométrique se produit lorsque dans chacun des trois plans formés par les vérins 1-6, 2-3 et 4-5, il y a une droite  $D_i$  qui est coplanaire avec le plan de base tel que les trois droites  $D_i$  s'intersectent en un point commun. L'équation représentant les lieux de singularité pour cette condition géométrique a été obtenue à la section 7.1.1.3. Il s'agit d'un polynôme de degré 3, avec un degré maximal de 3 en  $z$  et de 2 en  $x$  et  $y$ . Elle peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
& C_1 x^2 z + C_2 x^2 + C_3 x y z + \\
& C_4 x y + C_5 x z^2 + C_6 x z + C_7 x + \\
& C_8 y^2 z + C_9 y^2 + C_{10} y z^2 + C_{11} y z + \\
& C_{12} y + C_{13} z^3 + C_{14} z^2 + C_{15} z + C_{16} = 0
\end{aligned} \tag{G.17}$$

avec

$$C_1 = -b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta \tag{G.18}$$

$$C_2 = -b_{4y} p'^2_{1y} p'^2_{3x} \cos \phi \sin \phi \sin \psi \sin^3 \theta \tag{G.19}$$

$$C_3 = b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \cos \psi \sin \phi \sin^2 \theta - b_{1x} p'^2_{1y} p'_{3x} \cos \phi \sin \psi \sin^2 \theta \tag{G.20}$$

$$C_4 = b_{4y} p'^2_{1y} p'^2_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \phi \sin^3 \theta - b_{1x} p'_{1y} p'^3_{3x} \sin^2 \phi \sin \psi \sin^3 \theta \tag{G.21}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & -b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \cos \theta \sin \phi \sin \theta + b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \psi \sin \theta + \\
& b_{1x} p'^2_{1y} p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \psi \sin \theta - b_{1x} p'^2_{1y} p'_{3x} \sin \phi \sin^2 \psi \sin \theta - \\
& b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \cos \theta \sin \phi \sin^2 \psi \sin \theta
\end{aligned} \tag{G.22}$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & -b_{4y} p'^2_{1y} p'^2_{3x} \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin^2 \theta + b_{4y} p'^2_{1y} p'^2_{3x} \cos \psi \sin \psi \sin^2 \theta - \\
& b_{4y} p'^2_{1y} p'^2_{3x} \cos \psi \sin^2 \phi \sin \psi \sin^2 \theta + b_{1x} p'_{1y} p'^3_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi \sin^2 \theta + \\
& b_{1x} p'_{1y} p'^3_{3x} \cos \phi \sin \phi \sin^2 \psi \sin^2 \theta - \\
& b_{4y} p'^2_{1y} p'^2_{3x} \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin^2 \psi \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{G.23}$$

$$C_7 = b_{1x} p'^2_{1y} p'^3_{3x} \sin \phi \sin^2 \psi \sin^3 \theta \tag{G.24}$$

$$C_8 = b_{1x} p'^2_{1y} p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin^2 \theta \tag{G.25}$$

$$C_9 = b_{1x} p'_{1y} p'^3_{3x} \cos \psi \sin^2 \phi \sin^3 \theta \tag{G.26}$$

$$\begin{aligned}
C_{10} = & -b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \cos \phi \sin \theta - 2b_{1x} p'^2_{1y} p'_{3x} \cos \phi \cos \theta \sin \theta + \\
& b_{1x} p'^2_{1y} p'_{3x} \cos \psi \sin \phi \sin \psi \sin \theta + b_{4y} p'_{1y} p'^2_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin \phi \sin \psi \sin \theta +
\end{aligned}$$

$$b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin^2 \psi \sin \theta + b_{1x}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \phi \cos \theta \sin^2 \psi \sin \theta \quad (\text{G.27})$$

$$\begin{aligned} C_{11} = & -b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \sin^2 \theta - b_{1x}b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin^2 \theta + \\ & b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - 2b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \theta \sin^2 \phi \sin^2 \theta - \\ & b_{1x}^2 p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta - b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \phi \cos \psi \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta + \\ & b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta + b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta - \\ & b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi \sin^2 \theta + b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \theta \sin^2 \phi \sin^2 \psi \sin^2 \theta \quad (\text{G.28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = & -b_{1x}b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \psi \sin^2 \phi \sin^3 \theta - b_{1x}^2 p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi \sin^3 \theta - \\ & b_{1x}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^3 \cos \psi \sin \phi \sin \psi \sin^3 \theta \quad (\text{G.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{13} = & b_{1x}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \phi \cos \psi + b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \cos \phi \cos \psi \cos \theta - \\ & b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \sin \phi \sin \psi - b_{1x}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \theta \sin \phi \sin \psi - \\ & b_{1x}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin^2 \theta + b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta \quad (\text{G.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{14} = & b_{1x}b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \phi \cos \theta \sin \theta + b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \psi \cos \theta \sin \theta + \\ & b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \psi \sin^2 \phi \sin \theta - b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi \sin \theta - \\ & b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi \sin \theta - b_{1x}b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \psi \sin \phi \sin \psi \sin \theta + \\ & b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin \psi \sin \theta + b_{1x}^2 p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \cos \psi \cos \theta \sin \phi \sin \psi \sin \theta + \\ & b_{1x}^2 p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin^2 \psi \sin \theta - b_{1x}b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x} \cos \phi \cos \theta \sin^2 \psi \sin \theta - \\ & b_{1x}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \psi \sin^2 \phi \sin^3 \theta + b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi \sin^3 \theta \quad (\text{G.31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{15} = & b_{1x}b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \theta \sin^2 \phi \sin^2 \theta + b_{1x}^2 b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^2 \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta + \\ & b_{1x}b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \phi \cos \psi \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta + b_{1x}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^3 \cos \theta \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta + \\ & b_{1x}^2 p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi \sin \psi \sin^2 \theta + b_{1x}^2 p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta - \\ & b_{1x}^2 p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi \sin^2 \theta - b_{1x}b_{4y}p'_{1y}p'_{3x}{}^3 \cos \theta \sin^2 \phi \sin^2 \psi \sin^2 \theta \quad (\text{G.32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{16} = & b_{1x}^2 b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi \sin^3 \theta + \\ & b_{1x}b_{4y}p'_{1y}{}^2 p'_{3x}{}^3 \cos \psi \sin \phi \sin \psi \sin^3 \theta \quad (\text{G.33}) \end{aligned}$$

## G.4 Condition 5b, cas général

Cette condition correspond géométriquement à l'intersection de toutes les jambes avec une droite de l'espace. Trois cas sont possibles. Le premier a été présenté à la section 7.1.1.4. Voici les deux autres.

### Droites 2-3-4 coplanaires

Le premier cas est celui où les droites 2, 3 et 4 sont coplanaires. La droite D passe alors par les articulations  $B_4$  et  $P_2$  et touche ainsi aux segments 1,2,3,4 et 5. Il s'agit de trouver les conditions pour que les droites 2-3-4 soient coplanaires ainsi que les conditions pour l'intersection de la droite  $\mathbf{l}_6$  et de la droite D. Le système d'équations est alors

$$(\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3) \cdot \mathbf{l}_4 = 0 \quad (\text{G.34})$$

$$(\mathbf{b}_6 - \mathbf{b}_4) \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{l}_6) = 0 \quad (\text{G.35})$$

où

$$\mathbf{d} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{b}_4 \quad (\text{G.36})$$

Sa résolution donne les expressions

$$y = \frac{E_{12}x + E_{13}}{E_{14}} \quad (\text{G.37})$$

$$z = \frac{E_{15}x + E_{16}}{E_{17}} \quad (\text{G.38})$$

avec

$$\begin{aligned} E_{12} = & b_{4y}^2 p'_{1y} p'_{3x} \cos \psi + b_{1x} b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \psi \cos \theta - b_{1x} b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi - \\ & b_{1x} b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi - b_{1x} b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi - \\ & b_{1x} b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \phi \sin \phi \sin \psi \end{aligned} \quad (\text{G.39})$$

$$\begin{aligned} E_{13} = & b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \sin \phi - b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi - b_{1x} b_{4y}^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi + \\ & b_{1x} b_{4y} p_{1y}' p_{3x}'^2 \cos \theta \sin \phi + b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}' p_{3x}' \sin \psi - b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 \cos \theta \sin \psi - \\ & b_{1x}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \psi - b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \psi + \\ & b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi + b_{1x} b_{4y}^2 p_{3x}'^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi + \\ & b_{1x}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \sin \phi \sin^2 \psi + b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \sin \phi \sin^2 \psi \end{aligned} \quad (\text{G.40})$$

$$\begin{aligned} E_{14} = & b_{1x} (-b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi - b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi + b_{1x} p_{1y}' p_{3x}' \sin \psi - \\ & b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \theta \sin \psi + b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi + b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi) \end{aligned} \quad (\text{G.41})$$

$$E_{15} = -b_{4y} p_{1y}'^2 \sin \theta + b_{4y} p_{1y}'^2 \sin^2 \phi \sin \theta + b_{4y} p_{3x}'^2 \sin^2 \phi \sin \theta \quad (\text{G.42})$$

$$E_{16} = b_{4y} p_{1y}' p_{3x}'^2 \cos \psi \sin \phi \sin \theta + b_{1x} p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi \sin \theta \quad (\text{G.43})$$

$$\begin{aligned} E_{17} = & b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi + b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi - b_{1x} p_{1y}' p_{3x}' \sin \psi + \\ & b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \theta \sin \psi - b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi - b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi \end{aligned} \quad (\text{G.44})$$

Les équations (G.37) à (G.44) représentent donc les équations mathématiques représentant cette condition géométrique.

### Droites 3-4-5 coplanaires

Le deuxième cas est celui où les droites 3, 4 et 5 sont coplanaires. La droite D passe alors par les articulations  $B_2$  et  $P_5$  et touche ainsi aux segments 2,3,4,5 et 6. Il s'agit de trouver les conditions qui assurent que les droites 3-4-5 sont coplanaires et que la droite  $I_1$  intersecte la droite D. Le système d'équations est alors

$$(\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_4) \cdot \mathbf{l}_5 = 0 \quad (\text{G.45})$$

$$(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3) \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{l}_1) = 0 \quad (\text{G.46})$$

où

$$\mathbf{d} = \mathbf{p}_5 - \mathbf{b}_3 \quad (\text{G.47})$$

Sa résolution donne les expressions

$$y = \frac{E_{18}x + E_{19}}{E_{20}} \quad (\text{G.48})$$

$$z = \frac{E_{21}x + E_{22}}{E_{20}} \quad (\text{G.49})$$

avec

$$E_{18} = b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi - b_{4y}p'_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi - b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \sin \phi \sin \psi + b_{4y}p'_{1y} \sin^2 \phi \sin \psi \quad (\text{G.50})$$

$$E_{19} = -b_{1x}b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi - b_{1x}b_{4y}p'_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin^2 \phi - b_{4y}p'_{1y}p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \psi - b_{1x}b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \sin \phi \sin \psi + b_{1x}p'_{1y}p'_{3x} \cos \psi \cos \theta \sin \phi \sin \psi + b_{1x}b_{4y}p'_{1y} \sin^2 \phi \sin \psi + b_{1x}p'_{1y}p'_{3x} \cos \phi \sin^2 \psi + b_{4y}p'_{1y}p'_{3x} \cos \theta \sin \phi \sin^2 \psi \quad (\text{G.51})$$

$$E_{20} = -b_{4y}p'_{1y} \cos \psi - b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \phi + b_{4y}p'_{1y} \cos \psi \sin^2 \phi + b_{1x}p'_{1y} \sin \psi + b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin \psi + b_{4y}p'_{3x} \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi \quad (\text{G.52})$$

$$E_{21} = b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \sin \phi \sin \theta - b_{4y}p'_{3x} \sin^2 \phi \sin \theta \quad (\text{G.53})$$

$$E_{22} = -b_{1x}b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \sin \phi \sin \theta - b_{1x}b_{4y}p'_{3x} \sin^2 \phi \sin \theta + b_{1x}p'_{1y}p'_{3x} \sin \phi \sin \psi \sin \theta \quad (\text{G.54})$$

Les équations (G.48) à (G.54) représentent donc les équations mathématiques représentant cette condition géométrique.

## G.5 Condition 5b, cas particulier

Cette condition géométrique correspond aussi à l'intersection de toutes les pattes avec une droite de l'espace, mais se réfère au cas particulier, c'est-à-dire lorsque la résolution du système d'équations est singulière. Trois cas sont possibles.

### Droites 1-2-3 coplanaires

Les équations de ce premier cas ont été dérivées à la section 7.1.1.5, à l'exception de l'expression des coefficients  $E_i$  avec  $i = 6, 7, \dots, 11$ . La résolution du système d'équations était écrite sous la forme

$$x = \frac{E_6 y + E_7}{E_8} \quad (\text{G.55})$$

$$z = \frac{E_9 y + E_{10}}{E_{11}} \quad (\text{G.56})$$

avec les coefficients suivants

$$E_6 = F_{10} + F_{11} \sin \phi + F_{12} \sin^2 \phi + F_{13} \sin^3 \phi + F_{14} \sin^4 \phi + F_{15} \sin^5 \phi + F_{16} \sin^6 \phi \quad (\text{G.57})$$

$$E_7 = F_{20} + F_{21} \sin \phi + F_{22} \sin^2 \phi + F_{23} \sin^3 \phi + F_{24} \sin^4 \phi + F_{25} \sin^5 \phi + F_{26} \sin^6 \phi \quad (\text{G.58})$$

$$E_8 = F_{30} + F_{31} \sin \phi + F_{32} \sin^2 \phi + F_{33} \sin^3 \phi + F_{34} \sin^4 \phi + F_{35} \sin^5 \phi + F_{36} \sin^6 \phi \quad (\text{G.59})$$

$$E_9 = F_{40} + F_{41} \sin \phi + F_{42} \sin^2 \phi + F_{43} \sin^3 \phi \quad (\text{G.60})$$

$$E_{10} = F_{50} + F_{51} \sin \phi + F_{52} \sin^2 \phi \quad (\text{G.61})$$

$$E_{11} = F_{60} + F_{61} \sin \phi + F_{62} \sin^2 \phi + F_{63} \sin^3 \phi \quad (\text{G.62})$$

et

$$F_{10} = b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 - b_{1x}^3 p_{1y}'^3 \quad (\text{G.63})$$

$$F_{11} = -2b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi + 3b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta - b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta \quad (\text{G.64})$$

$$F_{12} = -5b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 + b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 - 3b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta + 3b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta + \quad (\text{G.65})$$

$$3b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 \sin^2 \theta \quad (\text{G.66})$$

$$F_{13} = 8b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi + 3b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta - 3b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta - \quad (\text{G.67})$$

$$6b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \sin^2 \theta - b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta \sin^2 \theta \quad (\text{G.68})$$

$$F_{14} = 4b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 - 4b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 - 9b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta + b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \theta - \quad (\text{G.69})$$

$$3b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 \sin^2 \theta + 3b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin^2 \theta + 3b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta \sin^2 \theta \quad (\text{G.70})$$

$$F_{15} = -2b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta + 6b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta + b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta \sin^2 \theta - \quad (\text{G.71})$$

$$3b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta \sin^2 \theta \quad (\text{G.72})$$

$$F_{16} = 6b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta - 2b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \theta - 3b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta \sin^2 \theta + b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad (\text{G.73})$$

$$F_{20} = -b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi + b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi \quad (\text{G.74})$$

$$F_{21} = b_{1x}^3 b_{4y} p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi + b_{1x}^2 b_{4y}^2 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta - b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin \psi + \quad (\text{G.75})$$

$$4b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi - b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi \quad (\text{G.76})$$

$$F_{22} = b_{1x}^3 b_{4y} p_{1y}'^3 - b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^3 - 4b_{1x}^2 b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta - 5b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi - \quad (G.77)$$

$$3b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \cos \theta \sin \psi + 2b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \quad (G.78)$$

$$b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + 4b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi \sin^2 \theta \quad (G.79)$$

$$F_{23} = 4b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi - 3b_{1x}^2 b_{4y}^2 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta + 3b_{1x}^2 b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta + \quad (G.80)$$

$$7b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin \psi - 3b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi + 3b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi - \quad (G.81)$$

$$b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi - 4b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \sin^2 \theta - 6b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin \psi \sin^2 \theta - \quad (G.82)$$

$$b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi \sin^2 \theta \quad (G.83)$$

$$F_{24} = 3b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^4 \phi - 5b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 + 6b_{1x}^2 b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta + \quad (G.84)$$

$$2b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi - 2b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^3 \cos \phi \sin \psi - 4b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta \sin \psi - \quad (G.85)$$

$$3b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^2 \theta + 5b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin^2 \theta - 2b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \phi \sin \psi \sin^2 \theta + \quad (G.86)$$

$$2b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^3 \cos \phi \sin \psi \sin^2 \theta + 2b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta \sin \psi \sin^2 \theta \quad (G.87)$$

$$F_{25} = -6b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi + 2b_{1x} b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \phi - 4b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin \psi - \quad (G.88)$$

$$2b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi + 2b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi + 6b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \sin^2 \theta - \quad (G.89)$$

$$2b_{1x} b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \phi \sin^2 \theta + 4b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin \psi \sin^2 \theta + b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi \sin^2 \theta - \quad (G.90)$$

$$b_{4y}^3 p_{1y}'^3 p_{3x}' \cos \theta \sin \psi \sin^2 \theta \quad (G.91)$$

$$F_{26} = -2b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^3 + 6b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 + 2b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^2 \theta - 6b_{1x} b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin^2 \theta \quad (G.92)$$

$$F_{30} = 0 \quad (G.93)$$

$$F_{31} = b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi + b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta \quad (G.94)$$

$$F_{32} = b_{1x}^2 b_{4y} p_{1y}'^3 - b_{4y}^3 p_{1y}'^3 - 4b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta + b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^2 \theta \quad (G.95)$$

$$F_{33} = 4b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi - 3b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^3 \cos \phi \cos \theta + 3b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta - \quad (G.96)$$

$$4b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \sin^2 \theta \quad (G.97)$$

$$F_{34} = 3b_{4y}^3 p_{1y}'^3 - 5b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 + 6b_{1x} b_{4y}^2 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \theta - 3b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^2 \theta + 5b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin^2 \theta \quad (G.98)$$

$$F_{35} = -6b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi + 2b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \phi + 6b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \sin^2 \theta - 2b_{4y}^3 p_{3x}'^3 \cos \phi \sin^2 \theta \quad (G.99)$$

$$F_{36} = -2b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^6 \phi + 6b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin^6 \phi + 2b_{4y}^3 p_{1y}'^3 \sin^6 \phi \sin^2 \theta - 6b_{4y}^3 p_{1y}'^2 p_{3x}'^2 \sin^6 \phi \sin^2 \theta \quad (G.100)$$

$$F_{40} = -b_{1x} p_{1y}'^2 \cos \phi \sin \theta \quad (G.101)$$

$$F_{41} = b_{1x} p_{1y}' p_{3x}' \sin \theta + b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \theta \sin \theta \quad (G.102)$$

$$F_{42} = -2b_{4y} p_{1y}' p_{3x}' \cos \phi \cos \theta \sin \theta \quad (G.103)$$

$$F_{43} = -b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \theta \sin \theta + b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \theta \sin \theta \quad (G.104)$$

$$F_{50} = -b_{1x} p_{1y}'^2 p_{3x}' \sin \psi \sin \theta \quad (G.105)$$

$$F_{51} = b_{4y} p_{1y}'^2 p_{3x}' \cos \phi \cos \theta \sin \psi \sin \theta \quad (G.106)$$

$$F_{52} = -b_{4y} p_{1y}' p_{3x}'^2 \cos \theta \sin \psi \sin \theta \quad (G.107)$$

$$F_{60} = b_{1x} p_{1y}' p_{3x}' \cos \phi \sin \psi + b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \phi \cos \theta \sin \psi \quad (G.108)$$

$$F_{61} = b_{1x} p_{1y}'^2 \sin \psi - 3b_{4y} p_{1y}' p_{3x}' \cos \theta \sin \psi \quad (G.109)$$

$$F_{62} = -2b_{4y} p_{1y}'^2 \cos \phi \cos \theta \sin \psi + 2b_{4y} p_{3x}'^2 \cos \phi \cos \theta \sin \psi \quad (G.110)$$

$$F_{63} = 4b_{4y} p_{1y}' p_{3x}' \cos \theta \sin^3 \phi \sin \psi \quad (G.111)$$

### Droites 2-3-4 coplanaires

La résolution du système d'équations (G.34) et (G.35) selon  $y$  et  $z$  est singulière lorsque

$$-b_{4y}p'_{1y}{}^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi - b_{4y}p'_{3x}{}^2 \cos \phi \cos \psi \sin \phi + b_{1x}p'_{1y}p'_{3x} \sin \psi - b_{4y}p'_{1y}{}^2 \cos \theta \sin \psi + b_{4y}p'_{1y}{}^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi + b_{4y}p'_{3x}{}^2 \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi = 0 \quad (G.112)$$

On remplace alors la valeur de  $\cos \psi$  par

$$\cos \psi = \frac{b_{1x}p'_{1y}p'_{3x} - b_{4y}p'_{1y}{}^2 \cos \theta + b_{4y} \cos \theta \sin^2 \phi (p'_{1y}{}^2 + p'_{3x}{}^2)}{b_{4y}p'_{1y}{}^2 \cos \phi \sin \phi + b_{4y}p'_{3x}{}^2 \cos \phi \sin \phi} \sin \psi \quad (G.113)$$

Les expressions des variables  $x$  et  $z$  ne seront pas retranscrites ici puisqu'elles sont encore plus complexes que celles décrites précédemment.

### Droites 3-4-5 coplanaires

La résolution du système d'équations (G.45) et (G.46) selon  $y$  et  $z$  est singulière lorsque

$$b_{4y}p'_{1y} \cos \psi + b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \cos \psi \sin \phi - b_{4y}p'_{1y} \cos \psi \sin^2 \phi - b_{1x}p'_{1y} \sin \psi - b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \theta \sin \phi \sin \psi - b_{4y}p'_{3x} \cos \theta \sin^2 \phi \sin \psi = 0 \quad (G.114)$$

On remplace alors la valeur de  $\cos \psi$  par

$$\cos \psi = \frac{b_{1x}p'_{1y} + b_{4y}p'_{1y} \cos \phi \cos \theta \sin \phi + b_{4y}p'_{3x} \cos \theta \sin^2 \phi}{b_{4y}p'_{1y} + b_{4y}p'_{3x} \cos \phi \sin \phi - b_{4y}p'_{1y} \sin^2 \phi} \sin \psi \quad (G.115)$$

Les expressions des variables  $x$  et  $z$  ne seront pas retranscrites ici puisqu'elles sont encore plus complexes que celles décrites précédemment.