

BRUNO MONSARRAT

**OPTIMISATION, ANALYSE DES SINGULARITÉS ET COMMANDE
NON LINÉAIRE ADAPTATIVE D'UN MANIPULATEUR PARALLÈLE
À 6 DEGRÉS DE LIBERTÉ ÉQUILIBRÉ STATIQUEMENT**

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

AVRIL 2001

Résumé

La présente recherche vise la dérivation des modèles théoriques ainsi que le développement d'outils d'analyse dédiés à l'étude et à l'optimisation d'une classe de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté pouvant être équilibrés statiquement, dont les pattes sont constituées de mécanismes à 5 barres. En premier lieu, les modèles géométriques ainsi que la matrice jacobienne du manipulateur sont déterminés. Par suite, deux algorithmes d'optimisation, basés sur la maximisation des volumes respectifs de l'espace à orientation constante et d'un nouvel espace atteignable avec degrés de liberté en rotation et en translation couplés, sont développés. Une étude complète des singularités est ensuite présentée en considérant deux cas différents d'actionnement. Deux approches, l'une basée sur la géométrie des droites de Grassmann et l'autre sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne, permettent la détermination exhaustive des équations des lieux de singularités du mécanisme. Finalement, le modèle dynamique inverse complet est dérivé sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques et une structure de commande non linéaire adaptative avec compensation désirée est proposée pour la réalisation simultanée de la tâche de contrôle et de la calibration dynamique du manipulateur.

Bruno Monsarrat

Clément Gosselin

Avant-propos

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, le Professeur Clément Gosselin, pour son aide, son support et sa grande disponibilité tout au long des différentes étapes de mes travaux. Ses nombreuses contributions au domaine de la robotique parallèle ainsi que la qualité de son enseignement ont constitué pour moi une base théorique et une source d'inspiration inestimables. De sincères remerciements également à tous les membres du Laboratoire de robotique pour leur aide et leur amitié. Ils ont tous contribué à faire de ces années de recherche une expérience formidable, extrêmement enrichissante tant sur le plan technique et scientifique que sur le plan humain. Je veux finalement remercier ma tendre Hélène, sans les encouragements et l'amour inconditionnel de laquelle les travaux présentés dans ce mémoire n'auraient pas été réalisables.

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
1 Introduction	1
1.1 Introduction	1
1.2 Équilibrage statique de mécanismes parallèles	4
1.3 Notations utilisées pour le mécanisme	10
1.4 Organisation du mémoire	13
2 Problèmes Géométriques Direct et Inverse et Matrice Jacobienne	15
2.1 Problème géométrique inverse (PGI)	16
2.1.1 Détermination de l'angle θ_{i1}	17
2.1.2 Détermination de l'angle $\Delta\theta_{i3}$	18
2.1.3 Détermination des angles θ_{i2} et θ_{i3}	19
2.2 Dérivation de la matrice jacobienne du manipulateur	20
2.3 Problème géométrique direct (PGD)	23
2.3.1 Résolution du PGD en utilisant une procédure numérique itérative	25
2.3.2 Unicité de la solution du PGD en utilisant trois capteurs externes	26
2.4 Conclusion	28

3	Optimisation du Design de l'Architecture	30
3.1	Introduction	31
3.1.1	Optimisation du design de l'architecture via deux méthodes de discrétisation	31
3.1.2	Méthodes de discrétisation dédiées à la détermination de sous-espaces atteignables tridimensionnels	32
3.2	Problématiques liées au design existant du prototype	33
3.2.1	Analyse d'un mécanisme ne possédant que 3 pattes actives	33
3.2.2	Problématiques existantes et choix du sous-ensemble des paramètres d'optimisation	34
3.3	Optimisation basée sur la maximisation du volume de l'espace à orientation constante	36
3.3.1	Contraintes mécaniques	36
3.3.1.1	Longueurs limitées des pattes du mécanisme	37
3.3.1.2	Débattements angulaires associés aux articulations sphériques	37
3.3.1.3	Interférences mécaniques entre les pattes	38
3.3.1.4	Contrainte additionnelle	38
3.3.2	Étude des singularités et contraintes résultantes	39
3.3.3	Algorithme utilisé pour l'optimisation de l'espace atteignable à orientation constante	40
3.3.3.1	Dérivations préliminaires	40
3.3.3.2	Algorithme utilisé pour la première optimisation	42
3.3.3.3	Résultats	43
3.4	Espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés	46
3.4.1	Choix de la convention des angles d'Euler	46
3.4.2	Modification du sous-ensemble des contraintes à considérer	48
3.4.3	Optimisation basée sur la maximisation du volume du nouvel espace atteignable	48
3.4.3.1	Algorithme de détermination de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés	49
3.4.3.2	Algorithme utilisé pour la seconde optimisation	51
3.4.4	Résultats	52

3.5	Cartographie de la dextérité et discussion des résultats	53
3.6	Conclusion	56
4	Analyse des Singularités	58
4.1	Introduction	59
4.2	Étude géométrique des singularités du manipulateur pour le premier cas d'actionnement	61
4.2.1	Reformulation des équations cinématiques du manipulateur	62
4.2.2	Singularités de types I et II	63
4.2.3	Coordonnées de Plücker d'une droite dans l'espace	64
4.2.4	Dépendances linéaires du sous-ensemble de droites correspondantes	65
4.2.4.1	Sous-ensembles de deux droites (Condition 1)	67
4.2.4.2	Sous-ensembles de trois droites (Condition 2)	67
4.2.4.3	Sous-ensembles de quatre droites (Conditions 3a, 3b, 3c et 3d)	68
4.2.4.4	Sous-ensembles de cinq droites (Conditions 4b, 4c et 4d)	70
4.2.4.5	Sous-ensembles de six droites (Conditions 5a et 5b)	71
4.2.4.6	Récapitulatif des conditions géométriques correspondant à des singularités de type II	72
4.2.5	Équations des lieux de singularités du mécanisme sous forme analytique	73
4.2.6	Lieu des points singuliers pour le cas 5a	74
4.2.6.1	Cas général : orientation arbitraire de plate-forme mobile	74
4.2.6.2	Cas particulier : la plate-forme mobile est parallèle à la base	76
4.2.7	Configurations singulières additionnelles	76
4.2.8	Représentations graphiques des surfaces de singularités	79
4.3	Analyse des singularités du mécanisme équivalent de type 3- <i>RRRS</i>	84
4.3.1	Reformulation des équations cinématiques du manipulateur	85
4.3.2	Caractérisation des lieux de singularités de type I	86
4.3.3	Caractérisation des lieux de singularités de type II	87
4.3.3.1	Cas général : orientation arbitraire de plate-forme mobile	88
4.3.3.2	Cas particulier : la plate-forme mobile est parallèle à la base	89
4.3.4	Configurations singulières additionnelles	91
4.3.5	Représentations graphiques des lieux de singularités	92
4.4	Conclusion	95

5	Commande Non Linéaire Adaptative	97
5.1	Les lois de commande adaptatives	98
5.2	Modèle dynamique inverse sous forme linéarisée	100
5.2.1	Modèle dynamique inverse de l'architecture	101
5.2.1.1	Notations additionnelles	101
5.2.1.2	Forces et moments agissant sur le mécanisme	102
5.2.2	Formulation du modèle dynamique inverse	104
5.2.3	Linéarisation du modèle dynamique inverse	105
5.2.3.1	Détermination de la matrice d'observation partielle $\Psi_{1.6}^M$	105
5.2.3.2	Détermination de la matrice d'observation partielle Ψ_7^{PF}	106
5.2.3.3	Détermination de la matrice d'observation partielle $\Psi_{1.3}^L$	107
5.3	Commande non linéaire adaptative du manipulateur	109
5.3.1	Loi de commande adaptative avec compensation désirée	110
5.3.2	Choix des trajectoires d'identification	112
5.4	Conclusion	113
6	Conclusion et Travaux Futurs	115
	Références	119
A	Équations des Lieux de Singularités Satisfaisant la Condition 5a	129
A.1	Développements préliminaires	130
A.2	Équations analytiques des droites (d_i) , $i = 1, 2, 3$	131
A.3	Équations des lieux de singularités dans l'espace cartésien	131
A.4	Équations des lieux de singularités dans l'espace articulaire	133

Liste des tableaux

3.1	Géométrie initiale du prototype (toutes les unités sont données en $[mm]$). De plus, $\beta_i = 35^\circ$, $\ell_{i1} = \ell_{i2} = 180$ mm, $\ell_{i5} = 360$ mm, pour $i = 1, 2, 3$, $\alpha_1 = 0^\circ^*$, $\alpha_2 = 45^\circ^*$, $r = 280$ mm* et $b = 207$ mm.	36
3.2	Données géométriques obtenues suite à l'utilisation des procédures d'optimisation basées sur (1) l'espace atteignable à orientation constante et (2) l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés. La notation Δq_i décrit le débattement maximal possible obtenu pour la coordonnée généralisée q_i	56

Liste des figures

1.1	Architectures robotiques sérielles et parallèles.	2
1.2	Manipulateurs pleinement parallèles à 6 degrés de liberté de type (a) 6- (RR) <u>PS</u> et (b) 6- <u>R</u> (RR)S (Modèles CAO réalisés par G. Côté).	3
1.3	Manipulateurs parallèles plans à 3 degrés de liberté équilibrés statiquement en utilisant : (a) des contrepoids, (b) des contrepoids et des ressorts, (c) une structure en parallélogramme pour chaque patte et des contrepoids et (d) une structure en parallélogramme pour chaque patte aux extrémités desquelles sont attachés des ressorts (Modèles CAO réalisés par T. Laliberté et G. Côté).	5
1.4	Manipulateurs parallèles spatiaux à 4 degrés de liberté équilibrés statique- ment en utilisant : (a) des ressorts et (b) des contrepoids (Modèles CAO réalisés par G. Côté).	6
1.5	Manipulateurs parallèles spatiaux de type 6- <u>R</u> (RR)S équilibrés statique- ment en utilisant : (a) des ressorts et (b) des contrepoids (Modèles CAO réalisés par G. Côté).	7
1.6	Manipulateur parallèle spatial à 6 degrés de liberté équilibré statiquement. Chacune des 3 pattes est constituée d'un mécanisme à 5 barres (Modèle CAO réalisé par J. Wang).	8

1.7	Manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté équilibré statiquement. Ce prototype a été développé au Laboratoire de robotique de l'Université Laval.	9
1.8	Notations utilisées pour le mécanisme.	12
2.1	Chaîne vectorielle associée à la i -ème patte du manipulateur.	17
2.2	Mécanismes équivalents au manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pour les deux cas d'actionnement : (a) mécanisme de type 3- <i>RS</i> et (b) mécanisme plan de type 3- <i>RR</i>	24
2.3	Interface de simulation du comportement du manipulateur réalisée via la <i>Graphic User Interface</i> (GUI) de MATLAB.	28
3.1	Paramètres d'optimisation associés à la i -ème chaîne cinématique du manipulateur.	35
3.2	Vue de dessus de la i -ème patte du mécanisme, $(x, y) = (0 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$, $(\theta, \psi) = (0^\circ, 0^\circ)$ et $\phi = \phi_{av}$	41
3.3	Volume de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur en fonction des paramètres d'optimisation α_1 et r ($\alpha_2 = 0^\circ$).	43
3.4	(a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur ayant un volume maximal, $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (45^\circ, 0^\circ, 504 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (28^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	44
3.5	Représentation de l'orientation de la plate-forme mobile du manipulateur basée sur les angles d'Euler modifiés (Bonev et Ryu [66]).	47
3.6	Secteur défini par quatre noeuds adjacents de l'espace atteignable à x , y et ψ constants.	51
3.7	Volume de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés en fonction des paramètres α_1 et r ($\alpha_2 = 50^\circ$).	53

3.8	(a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés dont le volume est maximal $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (8^\circ, 50^\circ, 260 \text{ mm})$, $(x, y, \psi) = (0 \text{ mm}, 0 \text{ mm}, 1.5^\circ)$	54
3.9	Cartographies de la dextérité du manipulateur dans le plan (x, y) calculées respectivement pour (a) $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (45^\circ, 0^\circ, 504 \text{ mm})$ et (b) $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (8^\circ, 50^\circ, 260 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (15^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	55
4.1	Droites de Grassmann (d_{i2}) et (d_{i3}) associées aux positions angulaires θ_{i2} et θ_{i3} des articulations rotoïdes actionnées de la i -ème patte.	66
4.2	Vue de dessus du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté dans une configuration telle que la condition géométrique 5a est satisfaite, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$	78
4.3	(a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur du lieu des points singuliers satisfaisant la condition 5a, $\delta = 2.382$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$	79
4.4	(a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur du lieu des points singuliers satisfaisant la condition 5a, $\delta = -0.048$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 400 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 0^\circ, 50^\circ)$	80
4.5	(a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur du lieu des points singuliers satisfaisant la condition 5a, $\delta = 1.000$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	81
4.6	Frontière de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté superposée au lieu des points singuliers satisfaisant la condition 5a situés dans des plans parallèles au plan (x, y) . Ces représentations bidimensionnelles sont fournies pour différentes orientations \mathbf{Q} de la plate-forme mobile et valeurs du paramètre géométrique r , $(b = 207 \text{ mm})$	82

4.7	Mécanisme équivalent de type $3\text{-}\underline{RRRS}$ du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pour le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont actionnés.	84
4.8	Vues en perspective des lieux de singularités de type II du manipulateur parallèle de type $3\text{-}\underline{RRRS}$, pour les cas (a) $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 10^\circ, 10^\circ)$, et (b) $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$	94
4.9	Frontière de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur parallèle de type $3\text{-}\underline{RRRS}$ superposée au lieu des singularités de type II situés dans des plans parallèles au plan (x, y) . Ces représentations bidimensionnelles sont fournies pour différentes orientations \mathbf{Q} de la plate-forme mobile et valeurs du paramètre géométrique r , ($b = 207 \text{ mm}$).	96
5.1	Représentation schématique éclatée du mécanisme à 5 barres constituant la i -ème patte du manipulateur.	102
5.2	Schéma-bloc de la loi de commande adaptative avec compensation désirée (Sadegh et Horowitz [94]).	110

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

LES architectures parallèles ont suscité l'intérêt de nombreux chercheurs et industriels de part le monde durant ces dernières décennies. En effet, les limitations inhérentes à l'utilisation des architectures classiques dites sérielles, construites sur la base d'une chaîne cinématique ouverte, ont conduit les chercheurs à développer des architectures alternatives parallèles ou hybrides. Les architectures sérielles sont les plus répandues dans les milieux industriels et on les caractérise par le fait que chacun de leurs membres mobiles sont reliés un à la suite de l'autre. Cette chaîne unique est alors terminée par l'effecteur que l'on cherche à positionner et à orienter afin d'accomplir une tâche donnée. Bien que possédant habituellement un grand espace atteignable, le principal inconvénient des mécanismes sériels est leur faible rigidité.

Les *manipulateurs parallèles* constituent une classe de mécanismes structurellement très différents des robots sériels. La figure 1.1 schématise les deux types d'architectures. Les

manipulateurs parallèles sont constitués d'un corps rigide, la *plate-forme mobile*, connectée à un autre corps rigide, la *base*, par au minimum deux chaînes cinématiques indépendantes travaillant en collaboration. Outre la rigidité accrue de ce type de structures, qui augmente sensiblement le rapport charge utile sur masse propre du robot, un des principaux avantages des manipulateurs parallèles est bien évidemment le niveau de précision élevé lors du positionnement de l'effecteur. Cette caractéristique s'explique par le fait que, contrairement aux architectures sérielles, les erreurs de positionnement relatives à chaque actionneur ne sont pas cumulées. De plus, de nombreux manipulateurs parallèles sont conçus de telle

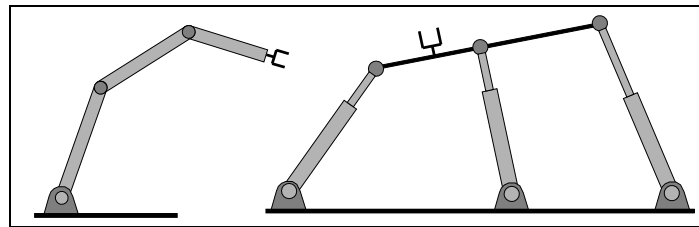


Fig. 1.1: Architectures robotiques sérielles et parallèles.

sorte que tous les actionneurs sont directement reliés à la base. Ceci a pour conséquence de réduire les effets inertiels sur la structure lorsque celle-ci est sollicitée dynamiquement et permet donc d'atteindre des vitesses de fonctionnement très élevées. Il est cependant important de noter que ce type de structures possède un espace de travail restreint et une dextérité relativement faible comparativement aux mécanismes sériels. La nature couplée des degrés de liberté en translation et en rotation des manipulateurs parallèles a également un impact sur la complexité du contrôle en position et en force de ces structures.

Diverses architectures de manipulateurs parallèles ont été proposées dans la littérature (cf. Merlet [1]). Ces architectures sont généralement classifiées en référence à la structure des chaînes cinématiques constituant chacune des pattes du mécanisme. Pour la plupart des mécanismes parallèles, ces chaînes sérielles sont soit de type $(RR)\underline{P}S$, $\underline{R}(RR)S$ ou $\underline{P}(RR)S$, où, d'après la convention utilisée, les lettres R , P et S désignent respectivement une articulation rotoïde, une articulation prismatique et une articulation sphérique. La structure de type (RR) désigne un joint de cardan (deux articulations de type rotoïde dont les axes de rotation s'intersectent). Une lettre soulignée signifie que l'articulation correspondante est actionnée. Les architectures à 6 degrés de liberté conçues via 6 chaînes de type $(RR)\underline{P}S$, que l'on notera $6-(RR)\underline{P}S$, sont les plus populaires et ont fait l'objet de nombreux travaux de part le monde.

La première architecture parallèle, développée en 1949 par Gough [2], était intégrée à un banc d'essai de pneus. Stewart [3] a suggéré quelques années plus tard que ce type d'architecture pourrait être utilisé comme simulateur de mouvement, et notamment comme structure de base pour les simulateurs de vol (cf. Baret [4], Watson [5]). Ceci constitue encore aujourd'hui le domaine d'application principal de ce type de structures mécaniques.

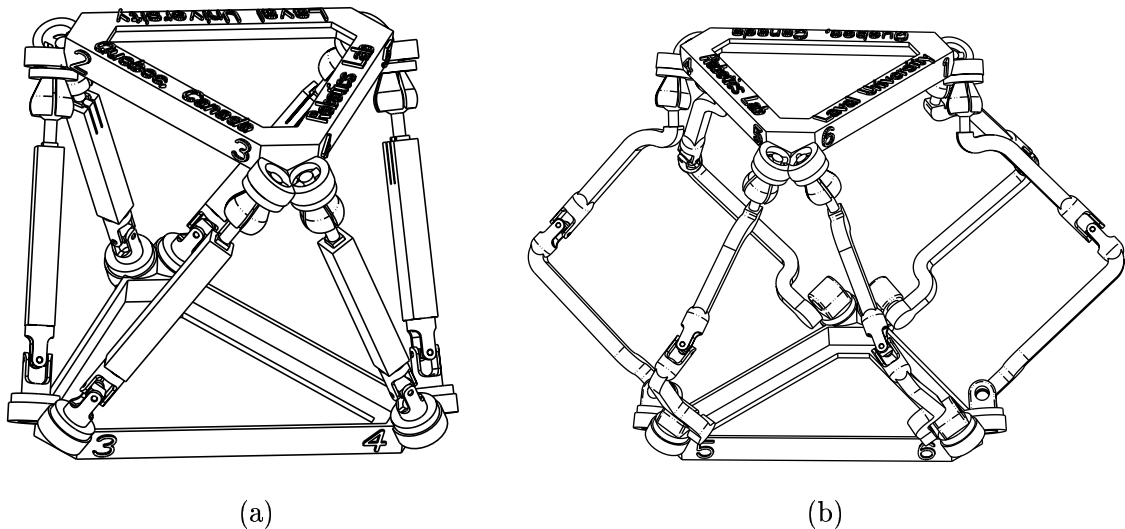


Fig. 1.2: Manipulateurs pleinement parallèles à 6 degrés de liberté de type (a) $6-(RR)\underline{P}S$ et (b) $6-\underline{R}(RR)S$ (Modèles CAO réalisés par G. Côté).

L'utilisation de mécanismes parallèles dans le domaine de la robotique est postérieure de plusieurs années aux travaux de Stewart et se situe à la fin des années 70. Ainsi, MacCallion et Pham [6] et, quelques années plus tard, Hunt [7] sont parmi les premiers chercheurs à avoir introduit le concept de *manipulateur parallèle* et à avoir étudié certaines architectures parallèles à 6 degrés de liberté lorsque utilisées pour réaliser des opérations mécaniques spécifiques à la robotique. Les architectures parallèles ont par la suite constitué la base des travaux de nombreux chercheurs. Ainsi, durant les années 80, Zamanov et Sotirov [8], Mohamed et Duffy [9], Reboulet et Robert [10], Inoue [11], Fichter [12] et Merlet [13, 14, 15] ont développé des prototypes de robots parallèles à 6 degrés de liberté pleinement parallèles pour des applications générales de la robotique. Une architecture *pleinement parallèle* à 6 degrés de liberté, également associée au terme *hexapode* dans la littérature, désigne une architecture parallèle possédant exactement 6 chaînes cinématiques sérielles dont, pour chacune d'entre elles, une articulation est actionnée. Deux des topologies les plus rencontrées dans la littérature sont illustrées sur la figure 1.2.

Le développement et l'étude de nombreuses architectures alternatives de robots parallèles à 6 degrés de liberté, possédant des caractéristiques mécaniques diverses, ont contribué à étendre de manière substantielle les domaines d'application de telles structures. Ainsi, durant les années 90, les robots parallèles ont commencé à être également utilisés pour des applications beaucoup plus variées telles que, entre autres, la mesure de coordonnées [16], le fraisage [17], le positionnement de précision [18] et l'assistanat chirurgical [19, 20]. De nombreuses compagnies ont développé puis commercialisé des robots parallèles à 6 degrés de liberté [21]. On retiendra, entre autres, les compagnies CAE Electronics, FRASCA International Inc., Servos & Simulation et ETC-PZL Aerospace Industries, dans le domaine de la construction de simulateurs de vol, ainsi que les sociétés Toyoda Machine Works, Physik Instrumente, Hexel Corporation, Geodetic and NEOS Robotics, dans la construction de systèmes de positionnement et de machines-outils dédiées au fraisage.

1.2 Équilibrage statique de mécanismes parallèles

En dépit de leur propriétés très intéressantes en terme de rigidité et de précision de positionnement à grande vitesse, le poids élevé des membrures des architectures parallèles impose l'utilisation d'actionneurs puissants et encombrants. Dans le cas des simulateurs de vol par exemple, le simple fait de maintenir la plate-forme, sur laquelle est fixée la cabine de pilotage, dans des conditions d'équilibre statique exige que la pression élevée dans les vérins hydrauliques soit maintenue constante. Les coûts inhérents au fonctionnement d'un simulateur de mouvement sont donc souvent très élevés. Il en est de même pour toutes les applications industrielles de tels mécanismes où les charges à déplacer par l'effecteur sont importantes. De ce fait, l'élimination partielle ou totale des forces statiques agissant sur les actionneurs est une problématique importante car elle permettrait d'aboutir à des conceptions plus efficaces nécessitant des actionneurs moins puissants et donc de taille réduite. Il va sans dire que les implications industrielles possibles de tels développements sont considérables.

De nombreux chercheurs se sont par conséquent intéressés à l'*équilibrage statique*, désigné également dans la littérature par le terme *compensation de la gravité*, de manipulateurs parallèles plans et spatiaux. Un mécanisme est équilibré statiquement si son énergie potentielle totale est constante quelle que soit sa configuration. En d'autres termes,

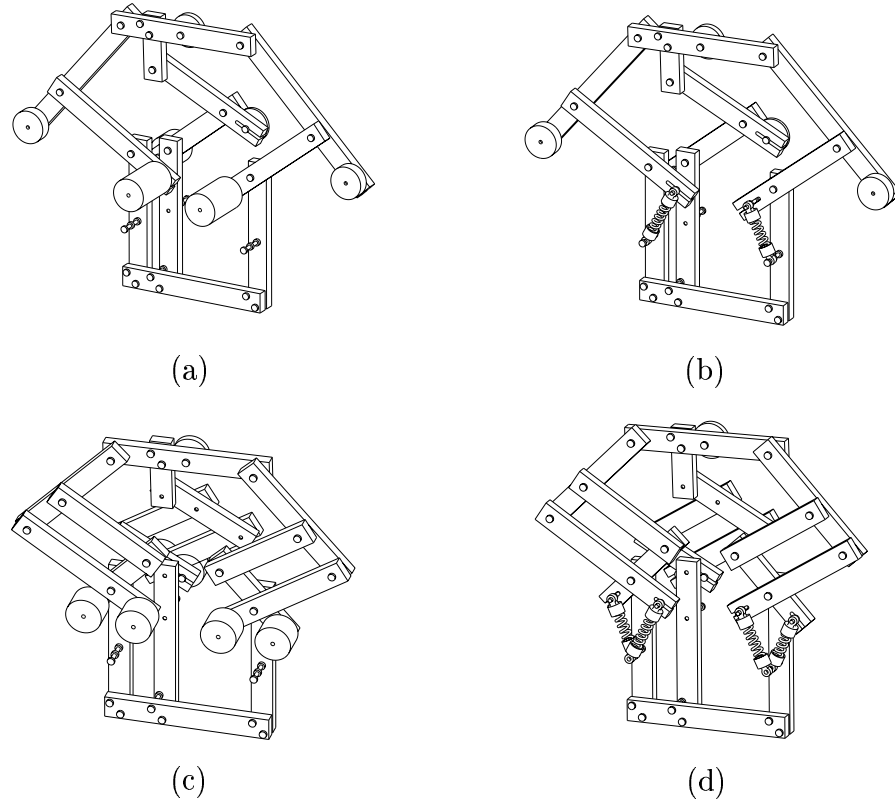


Fig. 1.3: Manipulateurs parallèles plans à 3 degrés de liberté équilibrés statiquement en utilisant : (a) des contrepoids, (b) des contrepoids et des ressorts, (c) une structure en parallélogramme pour chaque patte et des contrepoids et (d) une structure en parallélogramme pour chaque patte aux extrémités desquelles sont attachés des ressorts (Modèles CAO réalisés par T. Laliberté et G. Côté).

aucun(e) couple (ou force) n'est requis(e) au niveau des actionneurs lorsque le mécanisme est en régime statique, quelles que soient la position et l'orientation de la plate-forme mobile. L'actionnement ne sert qu'à générer les mouvements de la structure et à contrer les effets inertiels. À la connaissance de l'auteur, les premiers travaux dans ce domaine remontent à la fin des années 60 avec les travaux de Berkof et Lowen [22, 23]. Ces derniers ont investigué l'équilibrage statique de mécanismes plans en utilisant des contrepoids afin de diminuer les forces de réaction sur la base de la structure. Des recherches similaires considérant des mécanismes plans et spatiaux ont été menées par Kochev [24, 25] et par Yu [27, 26]. Streit et Gilmore [29] ont étudié l'équilibrage statique d'un corps rigide en rotation autour d'un point fixe en utilisant des ressorts. L'approche utilisant des ressorts a également été considérée par Nathan [28], Streit et Shin [30], Shin et Streit [31] et Walsh

et al. [32] pour équilibrer diverses architectures planes. Certains de ces travaux ont traité de l'équilibrage de mécanismes à 4 barres.

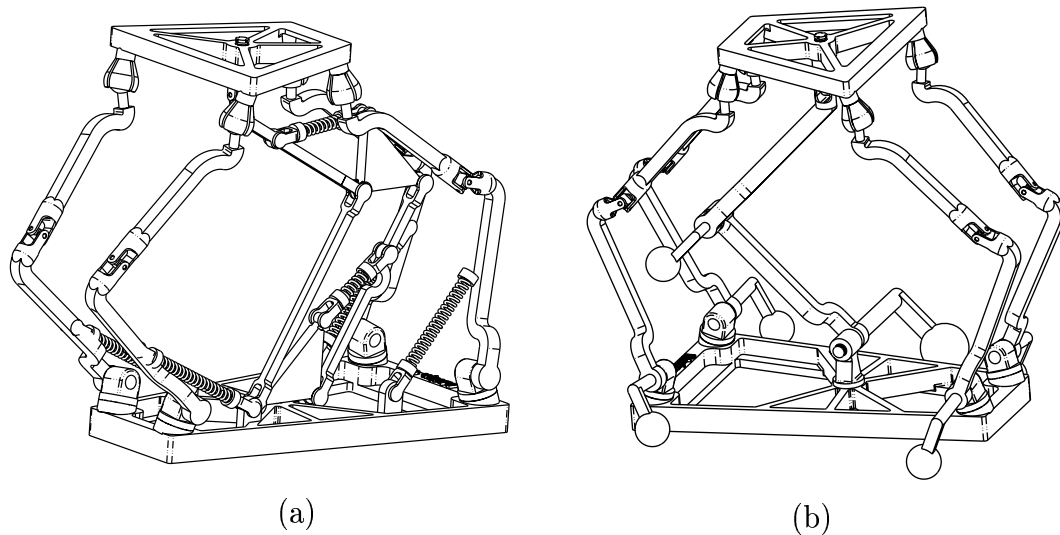


Fig. 1.4: Manipulateurs parallèles spatiaux à 4 degrés de liberté équilibrés statiquement en utilisant : (a) des ressorts et (b) des contrepoids (Modèles CAO réalisés par G. Côté).

L'étude de l'équilibrage statique pour la conception de mécanismes dédiés à des applications en robotique est cependant beaucoup plus récente. En effet, les premiers travaux dans ce domaine ont traité de l'équilibrage *en force* de robots sériels (cf. Bagci [33] et Lowen *et al.* [34]). Un mécanisme est équilibré en force si le centre de masse global de la structure reste fixe quelle que soit la configuration de la structure. Par la suite, des prototypes de manipulateurs sériels équilibrés statiquement ont été réalisés par Hervé [35] et Ulrich et Kumar [36] en utilisant des systèmes de cames, de poulies et/ou de ressorts. Depuis le milieu des années 90, de nombreux travaux traitant de l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles ont été publiés. L'équilibrage statique de mécanismes plans possédant 1, 2, et 3 degrés de liberté a été étudié par Jean et Gosselin [37]. Les conditions sur les paramètres géométriques et inertiels permettant d'équilibrer des architectures parallèles planes à 3 degrés de liberté ainsi que deux prototypes de telles architectures ont été développés par Laliberté *et al.* [38]. La figure 1.3 montre les modèles CAO de 4 conceptions mécaniques possibles utilisant des systèmes de masses et/ou de ressorts. L'équilibrage statique de mécanismes sphériques spatiaux à 3 degrés de liberté a été traité par Gosselin [39] et par Wang et Gosselin [40]. Wang et Gosselin [41] ont également étudié l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles à 4 degrés de liberté. La figure 1.4 illustre

l'équilibrage statique de tels mécanismes.

Au meilleur de la connaissance de l'auteur, les premiers travaux traitant de l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles possédant 6 degrés de liberté ont été présentés par Streit [42], Leblond et Gosselin [43], Wang [44], Gosselin et Wang [45], Ebert-Uphoff *et al.* [47] et Herder and Tuijthof [48]. La référence [43] traite de l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles de type $6-(RR)\underline{P}S$ (plate-forme de Gough-Stewart) via l'ajout de deux structures spatiales en forme de parallélogramme, contenant deux ressorts chacune, liées à la base et connectées à la plate-forme mobile. Les architectures de type $6-(RR)\underline{P}S$, du fait qu'elles sont utilisées comme structures de base pour les simulateurs de mouvement et notamment pour les simulateurs de vol, ont été intensivement étudiées et sont très bien connues. Par suite, la référence [45] présente l'équilibrage statique via ressorts ou contrepoids de mécanismes parallèles de type $6-\underline{R}(RR)S$. Les modèles CAO de telles architectures sont montrés à la figure 1.5. Les architectures faisant partie de la classe $6-\underline{R}(RR)S$ ont notamment été étudiées par Benea [46].

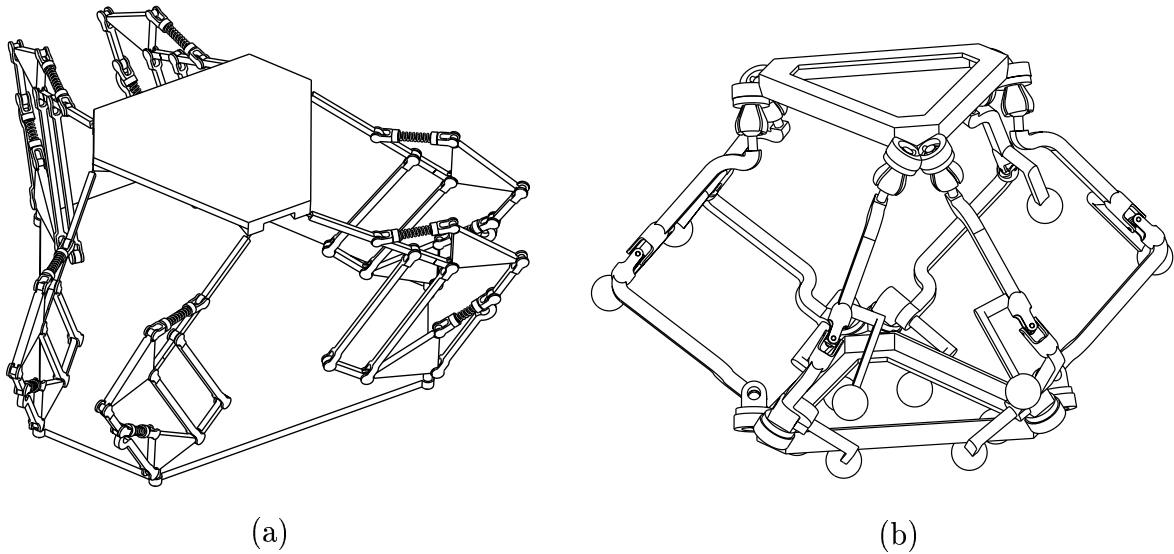


Fig. 1.5: Manipulateurs parallèles spatiaux de type $6-\underline{R}(RR)S$ équilibrés statiquement en utilisant : (a) des ressorts et (b) des contrepoids (Modèles CAO réalisés par G. Côté).

Finalement, des travaux récents ont permis de développer une nouvelle classe de manipulateurs parallèles spatiaux à 6 degrés de liberté pouvant être équilibrés statiquement [47]. Les deux méthodes, utilisant des ressorts ou des contrepoids sont également

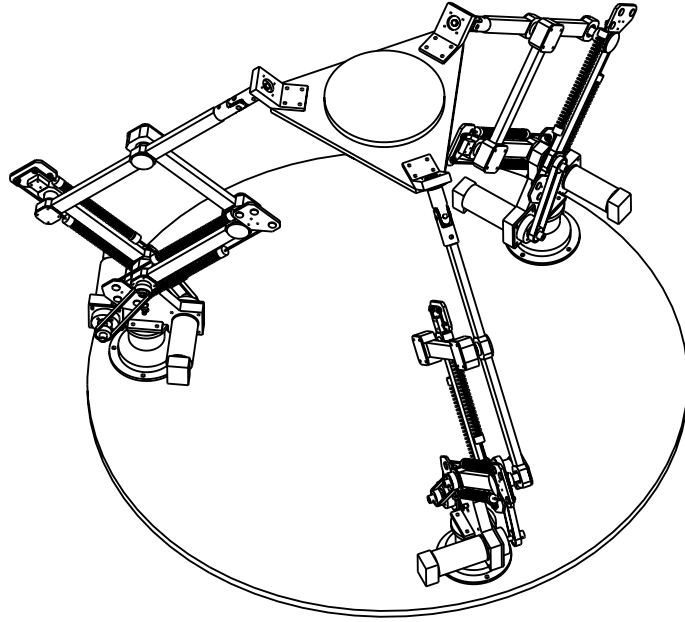


Fig. 1.6: Manipulateur parallèle spatial à 6 degrés de liberté équilibré statiquement. Chacune des 3 pattes est constituée d'un mécanisme à 5 barres (Modèle CAO réalisé par J. Wang).

utilisées. Néanmoins, du fait que les applications industrielles requièrent souvent d'importantes accélérations de la plate-forme mobile, l'utilisation de contrepoids n'est pas très adaptée car ceux-ci augmentent considérablement l'inertie totale de la structure. Pour cette raison, les investigations courantes visent plus particulièrement l'étude et le développement d'architectures parallèles à 6 degrés de liberté équilibrées statiquement en utilisant des ressorts. Ebert-Uphoff *et al.* [49] présentent une architecture de ce type pour laquelle la plate-forme peut être reliée à la base par 3 à 6 pattes constituées chacune d'un mécanisme à 5 barres. Le modèle CAO d'un tel mécanisme spatial possédant 3 pattes est montré à la figure 1.6. Un prototype de cette architecture a été réalisé au Laboratoire de robotique de l'Université Laval en mettant en oeuvre les conditions d'équilibrage présentées par Gosselin *et al.* [50]. Ce prototype est montré à la figure 1.7.

Un deuxième prototype d'un tel mécanisme équilibré statiquement a été développé par Johnson et Ebert-Uphoff [51] au Georgia Institute of Technology. Celui-ci, conçu en utilisant des conditions d'équilibrage identiques, possède 3 pattes actives, c'est-à-dire dont une au moins des articulations est actionnée, ainsi qu'une patte passive. L'utilisation d'une quatrième patte passive permet de se libérer de la contrainte imposant que le centre de



Fig. 1.7: Manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté équilibré statiquement. Ce prototype a été développé au Laboratoire de robotique de l'Université Laval.

masse de la plate-forme mobile doit être situé dans le plan contenant les 3 centres des articulations sphériques reliant les 3 pattes à la plate-forme. La méthodologie utilisée pour le dimensionnement des éléments des pattes et des ressorts est disponible dans la référence Johnson [52].

Une étude cinématique présentée par Ebert-Uphoff et Gosselin [53] a permis de dériver les équations du problème géométrique inverse (PGI) pour cette classe de mécanismes. Une expression générale de la matrice jacobienne (6×6) pour ce type de manipulateurs parallèles a été obtenue dans cette référence en utilisant la méthode classique de dérivation par rapport au temps de la relation vectorielle décrivant la fermeture de la chaîne cinématique associée à la i -ème patte du mécanisme. Néanmoins, les expressions obtenues pour les éléments de la matrice jacobienne sont très complexes et leur implémentation logicielle est relativement laborieuse. Cette dernière référence a également permis de dériver le lieu des singularités de cette classe de mécanisme sous forme analytique dans le cas où (i) pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$, $i = 1, 2$ et 3 (voir la figure 1.8) et (ii) la plate-forme mobile est parallèle à la base. La détermination du lieu des singularités de ce type de mécanisme pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile n'a pas été traité et reste donc une problématique ouverte.

Cette nouvelle classe de manipulateurs parallèles pouvant être équilibrés statiquement est finalement mal connue et relativement peu documentée dans la littérature. La

dérivation des modèles théoriques ainsi que le développement et l'utilisation d'outils dédiés à l'analyse et à l'optimisation de ce type d'architectures parallèles feront donc l'objet de la présente recherche.

1.3 Notations utilisées pour le mécanisme

Le type de mécanisme considéré est montré à la figure 1.6. La figure 1.8 contient également un glossaire des notations utilisées afin de décrire le mécanisme et sa configuration. L'architecture consiste en une plate-forme mobile reliée à la base par l'intermédiaire de 3 pattes constituée chacune d'un mécanisme à 5 barres. La i -ème patte est reliée à la base au point P_{i0} et à la plate-forme mobile au point P_{i5} . La base ainsi que la plate-forme mobile sont deux structures triangulaires équilatérales. Ainsi, la position des points P_{i0} est décrite en utilisant le paramètre géométrique r , ayant fait l'hypothèse que les 3 points d'attache des 3 pattes à la base sont uniformément répartis sur un cercle de rayon r et dont le centre est situé au point O , c'est-à-dire $r = \|\mathbf{p}_{i0}\|$.

Pour chaque patte i , les deux membrures proximales du parallélogramme sont montées sur la structure en utilisant des articulations de type rotoïde. Ceci procure deux degrés de liberté associés aux angles θ_{i2} et θ_{i3} . De plus, la i -ème patte possède un mouvement de rotation autour d'un axe vertical passant par le point P_{i0} , ce qui procure un troisième degré de liberté pour la patte, associé à l'angle θ_{i1} . Cette dernière rotation inclut également les points d'attache des ressorts à la base de telle sorte que, quelle que soit la configuration de la plate-forme mobile, les ressorts sont toujours situés dans le plan du i -ème parallélogramme. La membrure distale de chaque patte est reliée à la plate-forme mobile au point P_{i5} par l'intermédiaire d'une articulation sphérique. En pratique, cette articulation est réalisée en combinant un joint de cardan et une articulation rotoïde (cf. figure 1.7). Étant donné que six des articulations rotoïdes du mécanisme sont actionnées, généralement deux articulations par patte, le mécanisme possède 6 degrés de liberté. Par suite, l'ensemble des six angles θ_{ij} actionnés forme les *coordonnées articulaires* du manipulateur parallèle.

Nous définissons également le *repère de référence* $R = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, dont l'origine est choisie au point O et dont les axes sont x , y , et z , de telle sorte que l'axe fixe z coïncide avec l'axe de symétrie du mécanisme. Un *repère mobile* $R_p = (C, (\mathbf{i}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{k}_p))$, choisi fixe par rapport à la plate-forme mobile, a pour origine le point C . Les axes x_p , y_p et z_p de ce repère

sont choisis de telle sorte que l'axe mobile z_p coïncide avec l'axe de symétrie de la plate-forme mobile. Pour chaque patte i du manipulateur, un repère local $R' = (P_{i0}, (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'))$, dont les axes sont x' , y' , et z' , est également défini (cf. figure 1.8).

La position de la plate-forme mobile est décrite par le vecteur $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$ contenant les coordonnées du point C exprimées dans le repère de référence R . Lorsque la plate-forme mobile est dans une configuration correspondant à l'*orientation de référence*, l'orientation du repère de référence R est la même que celle du repère mobile R_p . Cette orientation sera représentée, dans la majeure partie du présent mémoire, en utilisant les *angles d'Euler standards*. Ainsi, une rotation arbitraire de la plate-forme mobile sera décomposée ici en une première rotation de celle-ci autour de l'axe fixe z d'un angle ϕ , puis une rotation autour de l'axe mobile x_p d'un angle θ et finalement une rotation d'un angle ψ autour de l'axe y_p . Pour cette convention particulière des angles d'Euler, la matrice de rotation \mathbf{Q} est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_z(\phi) \mathbf{Q}_x(\theta) \mathbf{Q}_y(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi) & -\sin \phi \cos \theta & (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi) \\ (\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) & \cos \phi \cos \theta & (\sin \phi \sin \psi - \cos \phi \sin \theta \cos \psi) \\ -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1.1) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsqu'il sera fait référence dans la suite du présent mémoire à la matrice de rotation \mathbf{Q} , le lecteur se référera par défaut à l'expression de la matrice de rotation donnée à l'équation (1.1). Lorsque qu'une convention différente que celle utilisant les angles d'Euler standards sera utilisée, celle-ci sera spécifiée par l'auteur. Finalement, nous définissons le vecteur des *coordonnées généralisées* $\mathbf{q} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$ de la plate-forme mobile comme le vecteur dont les composantes permettent de décrire la *posture* de celle-ci, c'est-à-dire sa position \mathbf{p} et son orientation \mathbf{Q} .

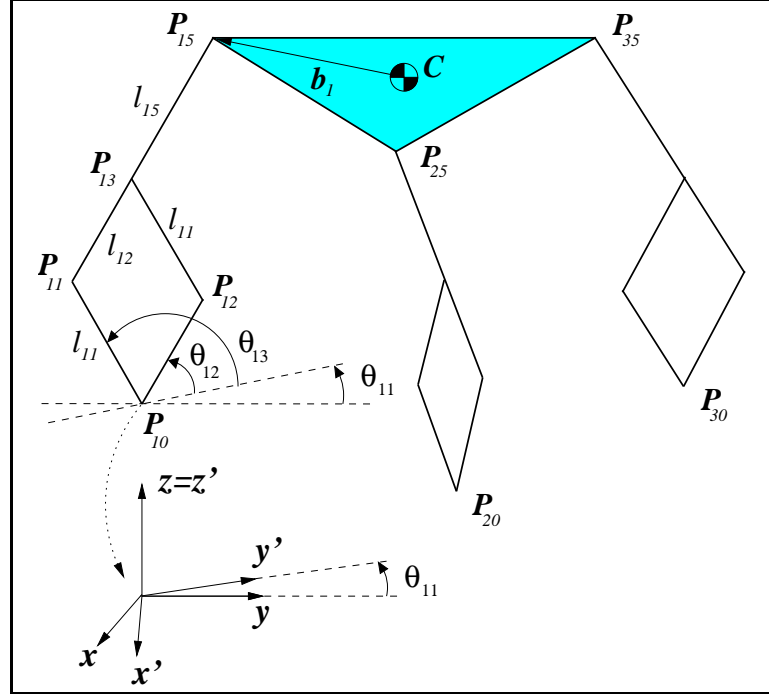


Fig. 1.8: Notations utilisées pour le mécanisme.

- θ_{ij} : angles décrivant la configuration de la i -ème patte, ($j = 1, 2, 3$),
- O : origine du repère fixe R , appelé également repère de référence, située à égale distance des 3 points P_{i0} , pour $i = 1, 2, 3$,
- C : centre de masse de la plate-forme mobile,
- \mathbf{p} : vecteur reliant l'origine du repère fixe O au point C (ce vecteur décrit la translation de la plate-forme mobile),
- \mathbf{Q} : matrice de rotation décrivant l'orientation de la plate-forme mobile et définie par les angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) ,
- \mathbf{p}_{i0} : vecteur reliant l'origine O du repère fixe au point d'attache P_{i0} de la i -ème patte à la base,
- \mathbf{p}_{i5} : vecteur reliant l'origine O du repère fixe au point d'attache P_{i5} de la i -ème patte à la plate-forme mobile,
- \mathbf{b}_i : vecteur reliant le centre de masse C de la plate-forme mobile au point d'attache P_{i5} de la i -ème patte et exprimé dans le repère mobile lié à la plate-forme,
- l_{ir} : longueur de la r -ième membrure de la i -ème patte,
- b : distance entre le point C et les points d'attache P_{i5} , de la i -ème patte à la plate-forme mobile, $i = 1, 2, 3$.

1.4 Organisation du mémoire

Bien que les équations permettant de résoudre le problème géométrique inverse du manipulateur ont été dérivées par Ebert-Uphoff et Gosselin [53], celles-ci seront revues dans la première section du chapitre 2. Cette dérivation constitue un préalable indispensable à toute étude approfondie de manipulateurs parallèles plans ou spatiaux. Nous verrons également que l'expression de la matrice jacobienne peut être grandement simplifiée en utilisant une méthode alternative de dérivation, en l'occurrence en utilisant le *principe du travail virtuel*. Finalement, deux procédures de résolution du problème géométrique direct (PGD) menant à une unicité de sa solution seront développées. La première, bien connue, met en oeuvre une procédure numérique itérative de type descente de gradient. La seconde est basée sur l'utilisation de trois encodeurs optiques externes, dont la disposition dépend du type d'actionnement choisi.

Au chapitre 3, nous traiteront d'une problématique rencontrée durant la phase de conception de mécanismes parallèles, c'est-à-dire l'optimisation du design du mécanisme. Ainsi, nous utiliserons plusieurs algorithmes de discrétisation qui nous permettront de déterminer les valeurs optimales de certains paramètres géométriques de l'architecture, et ce, de telle sorte que le volume de différents sous-espaces tridimensionnels de l'*espace atteignable complet* du mécanisme soit maximal. On entend ici par espace atteignable complet l'espace associé aux six coordonnées généralisées du manipulateur. Le premier sous-espace atteignable considéré est l'*espace à orientation constante*. Bien qu'une méthode de discrétisation permettant sa détermination pour les architectures de type 6-(RR)PS a été présentée dans la littérature, celle-ci sera adaptée à la nouvelle architecture étudiée ici. Par suite, un algorithme permettant la détermination d'un nouvel espace atteignable, où degrés de liberté en rotation et en translation sont couplés, sera développé et utilisé pour réaliser une seconde optimisation. Pour ces deux optimisations, le volume maximisé sera celui contenu dans la zone de l'espace associé ne contenant aucune singularité. Les implémentations logicielles des divers algorithmes seront réalisées en code MATLAB.

Une étude complète des singularités du mécanisme sera ensuite présentée au chapitre 4. Les singularités du mécanisme seront tout d'abord étudiées pour le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Pour ce premier cas d'actionnement, une approche basée sur la géométrie des droites de Grassmann nous permettra de déterminer

les équations sous forme analytique des lieux de singularités du mécanisme. Il sera montré que la plupart des configurations singulières se réduisent à la génération d'un complexe général, le lieu des singularités correspondant au complexe général étant constitué, pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, par une surface quadratique, c'est-à-dire soit un cylindre hyperbolique, elliptique ou parabolique, orienté suivant l'axe z . Les singularités correspondant au cas où, pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$, seront ensuite étudiées. Dans ce cas-ci, nous utiliserons la méthode classique basée sur le développement symbolique du déterminant de la matrice jacobienne, réalisée via le logiciel Maple. Il sera montré que l'équation du lieu correspondant aux singularités de type II pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile est un polynôme dont le degré maximal des termes en x et y est 4, et dont le degré maximal des termes en z est 3. Les équations obtenues seront implémentées sous MATLAB et diverses représentations graphiques de ces lieux de singularités, superposées à l'espace à orientation constante du manipulateur, seront également fournies.

Finalement, dans le chapitre 5, nous aborderons la problématique de la commande d'un tel mécanisme. Les méthodes de contrôle linéaires sont variées et très bien documentées dans la littérature. Celles-ci requièrent l'implémentation du modèle dynamique du mécanisme. Le modèle dynamique du manipulateur étudié ici a été dérivé par Ebert-Uphoff et Gosselin [54]. Cependant, depuis la fin des années 80, on note l'émergence de nouvelles structures de commande non linéaires très performantes, notamment la commande adaptative, qui sont beaucoup plus robustes aux perturbations et permettent de réduire substantiellement le temps de réponse du système. Les lois de commande adaptative nécessitent la linéarisation du modèle dynamique complet en fonction des paramètres dynamiques du manipulateur, tels que les frottements statiques et visqueux, ainsi que les masses et inerties des pattes et de la plate-forme mobile. Le modèle dynamique linéarisé du manipulateur sera donc développé dans ce dernier chapitre. La problématique de l'implémentation d'une structure de commande adaptative mettant en oeuvre une calibration en ligne des paramètres dynamiques du manipulateur sera finalement abordée.

Chapitre 2

Problèmes Géométriques Direct et Inverse et Matrice Jacobienne

Les équations permettant la résolution du problème géométrique inverse (PGI) du manipulateur, c'est-à-dire la détermination des coordonnées articulaires lorsque les coordonnées généralisées de la plate-forme mobile sont spécifiées, seront tout d'abord revues dans la première section de ce chapitre. Par suite, une expression générale de la matrice jacobienne pour un manipulateur de cette classe possédant 3 à 6 pattes sera déterminée en utilisant le principe du travail virtuel. Cette expression est valable quel que soit le sous-ensemble des articulations rotoïdes actionnées pour chaque patte. Finalement, deux procédures de résolution du problème géométrique direct (PGD) menant à une unicité de sa solution seront développées. Le PGD consiste en la détermination de la posture de la plate-forme mobile lorsque les coordonnées articulaires sont connues. La première procédure met en oeuvre une procédure numérique itérative de type descente de gradient. La seconde est basée sur l'utilisation de trois encodeurs optiques externes, dont la disposition dépend du type d'actionnement choisi.

2.1 Problème géométrique inverse (PGI)

LE problème géométrique inverse consiste à déterminer les coordonnées articulaires du manipulateur parallèle lorsque la posture de la plate-forme mobile est prescrite. Le solutionnement du problème géométrique inverse des manipulateurs parallèles constitue généralement une analyse théorique relativement directe. Ceci s'explique par le fait que la résolution du problème géométrique inverse des manipulateurs parallèles revient à résoudre indépendamment le PGI pour chaque chaîne cinématique associée à chaque patte. De plus, lorsque chaque chaîne cinématique ouverte ne contient qu'un actionneur, rotoïde ou prismatique, ce qui est le cas pour les architectures de type $6-(RR)\underline{P}S$, $6-\underline{R}(RR)S$ ou $6-\underline{P}(RR)S$, cette dérivation est grandement facilitée (voir par exemple les références [1], [7] et [62]). Par contre, dans le cas où plus d'une articulation par patte est actionnée et où les structures de chaque patte contiennent des sous-chaînes fermées, la complexité du PGI est augmentée sensiblement. Dans le cas du manipulateur étudié, tel que représenté à la figure 1.8, chacune des pattes est constituée d'une sous-chaîne cinématique fermée formée d'un mécanisme à 5 barres dont deux des articulations sont actionnées. Ainsi, le PGI requiert d'effectuer une dérivation mathématique contenant plusieurs étapes successives. Le PGI sera par la suite implémenté dans les divers algorithmes, mettant en oeuvre des méthodes de discrétisation, qui seront développés dans la suite du présent mémoire.

Dans cette partie, nous partons donc de l'hypothèse que la posture de la plate-forme mobile est prescrite, c'est-à-dire que le vecteur position \mathbf{p} ainsi que la matrice de rotation \mathbf{Q} sont connus. De ce fait, pour chaque patte i , le vecteur $\mathbf{s}_i = [s_{ix} \ s_{iy} \ s_{iz}]^T$, reliant le point d'attache P_{i0} de cette patte à la base au point P_{i5} situé à l'extrémité de la membrure distale, est également connu et donné par la relation, dans le repère de référence R :

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{p}_{i5} - \mathbf{p}_{i0} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_{i0} \quad (2.1)$$

Cette dernière relation décrit la fermeture de la chaîne vectorielle associée à la i -ème patte du manipulateur, telle que représentée à la figure 2.1. En premier lieu, nous définissons les vecteurs auxiliaires $\mathbf{g}_{ir} = [0 \ \ell_{ir} \ 0]^T = \ell_{ir}\mathbf{j}$, ainsi que les matrices de rotation auxiliaires :

$$\mathbf{Q}_{i1} = Rot_z(\theta_{i1}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} & -\sin \theta_{i1} & 0 \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

et, pour $j = 2, 3$:

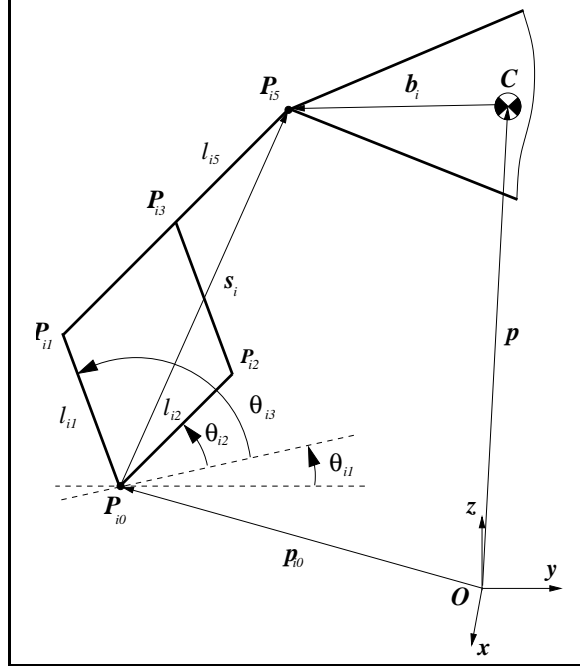


Fig. 2.1: Chaîne vectorielle associée à la i -ème patte du manipulateur.

$$\mathbf{Q}_{ij} = Rot_{x'}(\theta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{ij} & -\sin \theta_{ij} \\ 0 & \sin \theta_{ij} & \cos \theta_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Les axes z et x' sont montrés sur la figure 1.8. Par suite, la relation (2.1) peut être réécrite directement en fonction des coordonnées articulaires θ_{i1} , θ_{i2} et θ_{i3} sous la forme :

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{Q}_{i1}(\mathbf{Q}_{i3}\mathbf{g}_{i1} + \mathbf{Q}_{i2}\mathbf{g}_{i5}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} & -\sin \theta_{i1} & 0 \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(l_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i3} \\ \sin \theta_{i3} \end{bmatrix} + l_{i5} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \right) \quad (2.4)$$

2.1.1 Détermination de l'angle θ_{i1}

L'angle θ_{i1} est l'angle de rotation de la i -ème patte autour de l'axe $z \equiv z'$. En considérant l'équation (2.4), il apparaît clairement que le vecteur $(\mathbf{Q}_{i1}^{-1}\mathbf{s}_i)$ est, quelle que soit la configuration de la plate-forme mobile, toujours situé dans le plan (y, z) . Nous utilisons donc cette propriété afin de déterminer l'angle de rotation θ_{i1} , pour lequel deux solutions sont possibles : θ_{i1} et $\theta_{i1} + \pi$. Des investigations révèlent que ces deux solutions sont situées, de manière symétrique, de part et d'autre d'une configuration singulière inhérente à la structure même de la patte, en l'occurrence de part et d'autre de la configuration où le point

P_{i5} est exactement au-dessus du point P_{i0} , c'est-à-dire lorsque ($\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2} = 0$) ou encore ($s_{ix} = s_{iy} = 0$). Dans ce cas, l'angle θ_{i1} n'est pas défini et la i -ème patte perd un degré de liberté. En d'autres termes, si l'on choisit de rester dans des configurations de la plate-forme mobile permettant de rester toujours du même côté de cette configuration singulière, on évite par la même un changement de branche de solution pour l'angle θ_{i1} qui sera toujours défini de manière unique. Ainsi, nous choisissons d'imposer la restriction suivante :

$$\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2} > 0 \quad (2.5)$$

L'angle θ_{i1} est de ce fait déterminé par les deux équations suivantes :

$$\sin \theta_{i1} = -\frac{s_{ix}}{\sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2}} \quad (2.6)$$

$$\cos \theta_{i1} = \frac{s_{iy}}{\sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2}} \quad (2.7)$$

Remarque : la restriction fournie par l'équation (2.5) garantit que le dénominateur des équations (2.6) et (2.7), c'est-à-dire le terme $\sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2}$, reste toujours positif.

2.1.2 Détermination de l'angle $\Delta\theta_{i3}$

Par suite, il s'agit de déterminer l'angle $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$ entre les deux membrures proximales du parallélogramme. Nous exprimons tout d'abord la longueur $M_i = \|\mathbf{s}_i\|$ de la i -ème patte sous la forme suivante :

$$M_i^2 = \ell_{i5}^2 + \ell_{i1}^2 + 2\ell_{i5}\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3} \quad (2.8)$$

Ceci nous permet de déterminer directement une expression pour le cosinus de l'angle $\Delta\theta_{i3}$:

$$\cos \Delta\theta_{i3} = -\left(\frac{\ell_{i5}^2 + \ell_{i1}^2 - M_i^2}{2\ell_{i5}\ell_{i1}}\right) = \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2 - \ell_{i5}^2 - \ell_{i1}^2}{2\ell_{i5}\ell_{i1}} \quad (2.9)$$

Cette équation admet deux solutions pour l'angle $\Delta\theta_{i3}$, du fait que l'on peut encore choisir son signe. En pratique, la structure de type parallélogramme, montrée à la figure 1.8, impose qu'une seule de ces solutions est possible. Il découle la restriction $\Delta\theta_{i3} \in (0, \pi)$. Par conséquent, l'angle $\Delta\theta_{i3}$ est uniquement défini par l'équation (2.9) et on obtient la relation :

$$\sin \Delta\theta_{i3} = +\sqrt{1 - \cos^2 \Delta\theta_{i3}} \quad (2.10)$$

2.1.3 Détermination des angles θ_{i2} et θ_{i3}

Soit \mathbf{s}'_i le vecteur défini par la relation :

$$\mathbf{s}'_i = \mathbf{Q}_{i1}^{-1} \mathbf{s}_i = \mathbf{Q}_{i1}^T \mathbf{s}_i \quad (2.11)$$

où la matrice auxiliaire \mathbf{Q}_{i1} est définie à l'équation (2.2). Le vecteur \mathbf{s}'_i peut être déterminé aisément puisque l'angle θ_{i1} est connu à ce stade de la procédure. Par suite, en utilisant l'équation (2.4), nous obtenons une expression de ce vecteur en fonction des angles cherchés θ_{i2} et θ_{i3} :

$$\mathbf{s}'_i = \ell_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i3} \\ \sin \theta_{i3} \end{bmatrix} + \ell_{i5} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Le vecteur \mathbf{s}'_i est situé dans le plan (y, z) . En utilisant la relation $\theta_{i3} = \theta_{i2} + \Delta\theta_{i3}$, il est possible ensuite d'éliminer la variable θ_{i3} dans l'équation (2.12). On obtient donc la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} s'_{iy} \\ s'_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3} + \ell_{i5}) & (-\ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3}) \\ (\ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3}) & (\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3} + \ell_{i5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

En inversant le système d'équation (2.13) et en remarquant que le déterminant de ce système est égal à $(\|\mathbf{s}_i\|^2)$, il vient :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{s}_i\|^2} \begin{bmatrix} (\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3} + \ell_{i5}) & (\ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3}) \\ (-\ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3}) & (\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3} + \ell_{i5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_{iy} \\ s'_{iz} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Remarque : le système d'équations (2.13) est non inversible localement lorsque l'égalité $\|\mathbf{s}_i\|^2 = \ell_{i5}^2 + \ell_{i1}^2 + 2\ell_{i5}\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3} = 0$ est satisfaite. La géométrie de la i -ème patte du mécanisme impose que cette configuration ne peut se produire que lorsque l'on a : $\ell_{i5} = \ell_{i1}$ et $\Delta\theta_{i3} = \pi$. Or, nous verrons au chapitre 4 que lorsque $\Delta\theta_{i3} = \pi$, l'effecteur est situé sur la frontière de l'espace à orientation constante du manipulateur. Ce lieu correspond aux singularités de type I du mécanisme. Néanmoins, lorsque l'effecteur est situé à l'intérieur de cet espace atteignable, l'inéquation $\|\mathbf{s}_i\| > 0$ est toujours vérifiée et la relation (2.14) est donc bien définie pour toutes valeurs des paramètres géométriques ℓ_{i5} et ℓ_{i1} .

L'angle θ_{i2} est par conséquent complètement déterminé. Étant donné que l'angle $\Delta\theta_{i3}$ est également connu, il est donc possible de calculer l'angle θ_{i3} en effectuant : $\theta_{i3} = \theta_{i2} + \Delta\theta_{i3}$. Ceci conclut le problème géométrique inverse pour la i -ème patte du manipulateur.

Finalement, le problème géométrique inverse du manipulateur peut aisément être résolu en utilisant les résultats du problème géométrique inverse pour chaque patte i . Lorsque l'orientation \mathbf{Q} et la position \mathbf{p} sont prescrits, le vecteur \mathbf{s}_i peut être calculé pour chaque patte. Les équations (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) et (2.14) sont ensuite employées afin de déterminer les valeurs de tous les angles définissant les configurations intrinsèques de toutes les pattes actives. Cet ensemble d'angles inclut les six angles actionnés du manipulateur, ou coordonnées articulaires.

2.2 Dérivation de la matrice jacobienne du manipulateur

Dans cette section, une expression générale de la *matrice jacobienne* pour un manipulateur appartenant à la classe de celui montré à la figure 1.8, possédant D pattes, ($D = 3$ à 6), est obtenue en utilisant le *principe du travail virtuel* lorsque le manipulateur est dans un état d'équilibre statique. L'étude suivante va de ce fait permettre la détermination de la matrice jacobienne \mathbf{J} quel que soit le sous-ensemble des articulations, associées aux angles θ_{i1} , θ_{i2} , θ_{i3} et $\Delta\theta_{i3}$, actionnées pour chaque patte i . Nous verrons également dans le chapitre 4, dédié à l'étude des singularités du mécanisme, que cette formulation particulière de la matrice jacobienne permettra la détermination des vecteurs de Plücker associés aux articulations actionnées du manipulateur.

La matrice jacobienne telle que dérivée ici permet d'exprimer les vitesses des articulations actionnées en fonction des vitesses généralisées de la plate-forme mobile, sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

où le vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ contient les vitesses des angles actionnés, $\dot{\mathbf{p}}$ est le vecteur vitesse du centre de masse C de la plate-forme mobile et le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ contient les vitesses angulaires associées à la matrice anti-symétrique $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$, ou encore $\boldsymbol{\omega} = \text{vect}(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)$.

On définit C_{ij} comme le couple articulaire associé à l'angle θ_{ij} et $\boldsymbol{\tau}$ comme le vecteur des couples articulaires correspondant, de dimension (6×1) . On définit également le vecteur \mathbf{F} comme étant le vecteur contenant l'ensemble des forces externes appliquées sur la plate-forme mobile et \mathbf{M} le vecteur contenant les moments appliqués au centre de masse C de la plate-forme mobile. Par conséquent, le vecteur des efforts généralisés est donné par :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Nous définissons également le vecteur $\mathbf{f}'_{i5} = [f'_{i5x} \ f'_{i5y} \ f'_{i5z}]^T$ décrivant la force que la plateforme mobile exerce sur la membrure distale de la i -ème patte au point P_{i5} , exprimé dans le repère local R' . Par suite, le travail virtuel δW_i de la i -ème patte du manipulateur peut être exprimé sous la forme :

$$\delta W_i = C_{i1}\delta\theta_{i1} + C_{i2}\delta\theta_{i2} + C_{i3}\delta\theta_{i3} + \mathbf{f}'_{i5} \cdot \delta\mathbf{s}'_{i5} \quad (2.17)$$

où le déplacement virtuel $\delta\mathbf{s}'_{i5} = \mathbf{Q}_{i1}^T \delta\mathbf{s}_i$ du point P_{i5} , exprimé dans le repère local R' , est donné par la relation :

$$\delta\mathbf{s}'_{i5} = \mathbf{Q}_{i1}^T \frac{d\mathbf{Q}_{i1}}{d\theta_{i1}} (\mathbf{Q}_{i3}\mathbf{g}_{i1} + \mathbf{Q}_{i2}\mathbf{g}_{i5}) \delta\theta_{i1} + \mathbf{Q}_{i1}^T \mathbf{Q}_{i1} \left(\frac{d\mathbf{Q}_{i3}}{d\theta_{i3}} \mathbf{g}_{i1} \delta\theta_{i3} + \frac{d\mathbf{Q}_{i2}}{d\theta_{i2}} \mathbf{g}_{i5} \delta\theta_{i2} \right) \quad (2.18)$$

Étant donné que la matrice $\mathbf{Q}_{i1}^T \mathbf{Q}_{i1}$ est la matrice identité de dimension (3×3) , l'expression du vecteur $\delta\mathbf{s}'_{i5}$ peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{s}'_{i5} = & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\ell_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i3} \\ \sin \theta_{i3} \end{bmatrix} + \ell_{i5} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \right) \delta\theta_{i1} \\ & + \left(\ell_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta_{i3} \\ \cos \theta_{i3} \end{bmatrix} \delta\theta_{i3} + \ell_{i5} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta_{i2} \\ \cos \theta_{i2} \end{bmatrix} \delta\theta_{i2} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

D'après le *principe du travail virtuel*, le travail virtuel total du système doit être égal à zéro, c'est-à-dire $\delta W_i = 0$. Ceci permet de réécrire l'équation (2.17) sous la forme compacte :

$$\begin{bmatrix} -(\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2}) f'_{i5x} + C_{i1} \\ -\ell_{i5} \sin \theta_{i2} f'_{i5y} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2} f'_{i5z} + C_{i2} \\ -\ell_{i1} \sin \theta_{i3} f'_{i5y} + \ell_{i1} \cos \theta_{i3} f'_{i5z} + C_{i3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta\theta_{i1} \\ \delta\theta_{i2} \\ \delta\theta_{i3} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

Les 3 équations (2.20) permettent ensuite d'exprimer, dans le repère local R' , les composantes f'_{i5x} , f'_{i5y} et f'_{i5z} en fonction des couples articulaires C_{i1} , C_{i2} et C_{i3} , sous la forme :

$$\mathbf{f}'_{i5} = \frac{1}{\ell_{i1}\ell_{i5} \sin \Delta\theta_{i3}} \left(-\ell_{i1} C_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i3} \\ \sin \theta_{i3} \end{bmatrix} + \ell_{i5} C_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \right)$$

$$+ \frac{1}{\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2}} C_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Soit \mathbf{f}_{i5} l'expression correspondante du vecteur \mathbf{f}'_{i5} dans le repère de référence R , nous obtenons :

$$\mathbf{f}_{i5} = \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{f}'_{i5} = C_{i1} \mathbf{v}_{i1} + C_{i2} \mathbf{v}_{i2} + C_{i3} \mathbf{v}_{i3} \quad (2.22)$$

En utilisant les équations (2.21) et (2.4), nous obtenons les expressions des vecteurs \mathbf{v}_{i1} , \mathbf{v}_{i2} et \mathbf{v}_{i3} sous la forme compacte :

$$\mathbf{v}_{i1} = \frac{1}{\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2}} \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} \\ \sin \theta_{i1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i \quad (2.23)$$

$$\mathbf{v}_{i2} = \frac{1}{\ell_{i5} \sin \Delta \theta_{i3}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{i1} \cos \theta_{i3} \\ \cos \theta_{i1} \cos \theta_{i3} \\ \sin \theta_{i3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell_{i1} \ell_{i5} \sin \Delta \theta_{i3}} \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{Q}_{i3} \mathbf{g}_{i1} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{v}_{i3} = \frac{-1}{\ell_{i1} \sin \Delta \theta_{i3}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{i1} \cos \theta_{i2} \\ \cos \theta_{i1} \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\ell_{i1} \ell_{i5} \sin \Delta \theta_{i3}} \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{Q}_{i2} \mathbf{g}_{i5} \quad (2.25)$$

où $\mathbf{u}_i = [s_{iy} \ -s_{ix} \ 0]^T$ est un vecteur normal au plan (y', z') , c'est-à-dire colinéaire au vecteur unitaire (\mathbf{i}') . Par suite, nous pouvons exprimer le vecteur des efforts généralisés en fonction des couples articulaires C_{ij} :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^D \mathbf{f}_{i5} = \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^3 C_{ij} \mathbf{v}_{ij} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^D (\mathbf{Q} \mathbf{b}_i) \times \mathbf{f}_{i5} = \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^3 C_{ij} ((\mathbf{Q} \mathbf{b}_i) \times \mathbf{v}_{ij}) \quad (2.27)$$

En utilisant le principe de dualité cinématique/statique, nous pouvons également écrire la relation matricielle :

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \quad (2.28)$$

où \mathbf{J} est la matrice jacobienne du manipulateur parallèle.

Ainsi, en utilisant les équations (2.26), (2.27) et (2.28), on déduit qu'une ligne de la matrice jacobienne \mathbf{J} est associée à chaque angle actionné θ_{ij} . Ce vecteur \mathbf{J}_{ij} , de dimension (6×1) ,

constituant une ligne de la matrice jacobienne est donc donné sous la forme suivante :

$$\mathbf{J}_{ij} = [\mathbf{v}_{ij}^T \quad ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{v}_{ij})^T] \quad (2.29)$$

et le vecteur \mathbf{v}_{ij} est donné soit par l'équation (2.23), (2.24) ou (2.25), selon l'actionnement de la i -ème patte du manipulateur. Pour le cas où l'angle $\Delta\theta_{i3}$ est actionné, le vecteur correspondant est simplement donné par la relation $\mathbf{v}_{i\Delta 3} = \mathbf{v}_{i3} - \mathbf{v}_{i2}$, ou encore, en utilisant les équations (2.24) et (2.25) :

$$\mathbf{v}_{i\Delta 3} = \frac{-1}{\ell_{i1}\ell_{i5}\sin\Delta\theta_{i3}} (\mathbf{Q}_{i1}\mathbf{Q}_{i2}\mathbf{g}_{i5} + \mathbf{Q}_{i1}\mathbf{Q}_{i3}\mathbf{g}_{i1}) \quad (2.30)$$

que nous pouvons réécrire sous la forme, en utilisant l'équation (2.4) :

$$\mathbf{v}_{i\Delta 3} = \frac{-1}{\ell_{i1}\ell_{i5}\sin\Delta\theta_{i3}} \mathbf{s}_i \quad (2.31)$$

Finalement, la matrice jacobienne \mathbf{J} du manipulateur, de dimension (6×6) , sera constituée des six vecteurs lignes \mathbf{J}_{ij} tels que déterminés précédemment. L'observation des équations obtenues nous permet de remarquer que, quel que soit le cas d'actionnement, les composantes de la matrice jacobienne ne dépendent pas du paramètre géométrique ℓ_{i2} .

2.3 Problème géométrique direct (PGD)

Tel que mentionné préalablement, le problème géométrique direct, ou PGD, consiste en la détermination de la posture de la plate-forme mobile lorsque les six coordonnées articulaires du manipulateur sont connues. Contrairement au cas des architectures sérielles pour lesquelles cette dérivation est directe, la résolution du PGD des manipulateurs parallèles est complexe et a fait l'objet de nombreux travaux durant la dernière décennie. Ces recherches ont traité de la résolution délicate de systèmes d'équations algébriques couplées, dont les variables décrivent la posture de la plate-forme mobile. Ces systèmes d'équations possèdent un nombre élevé de solutions, correspondant chacune à un *mode d'assemblage* particulier de la structure parallèle. Ainsi, il a notamment été montré par Wampler [55] et Husty [56] que, pour une plate-forme parallèle complètement générale à 6 degrés de liberté de type Gough-Stewart, le PGD peut se ramener à la résolution d'un polynôme mono-variable de degré 40. Il a également été montré que, pour de grandes classes de mécanismes parallèles à 6 degrés de liberté possédant des géométries particulières, il est possible de se ramener à l'étude de *mécanismes équivalents*, pour lesquels

le nombre de modes d'assemblage est majoré et le PGD se ramène à la résolution d'un polynôme mono-variable de degré inférieur (cf. Merlet [1]).

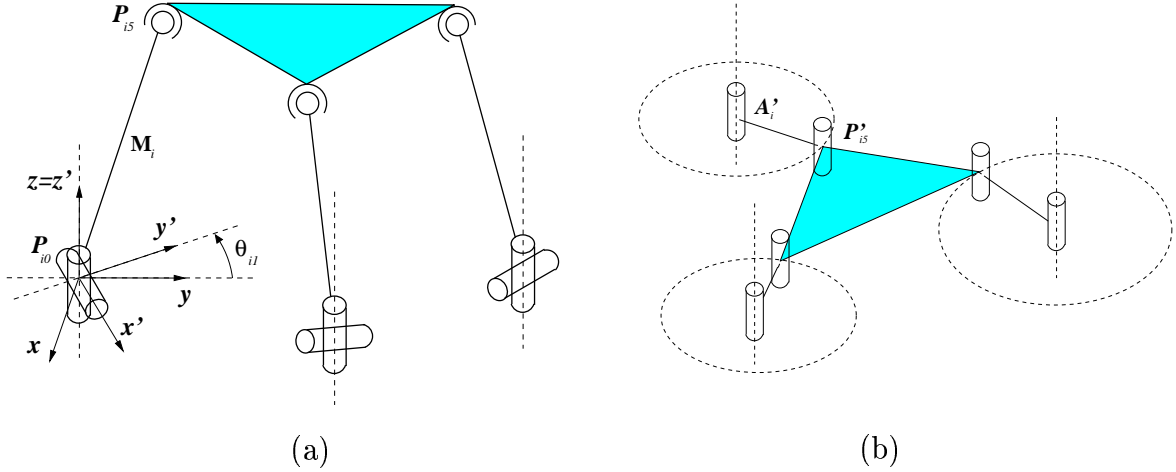


Fig. 2.2: Mécanismes équivalents au manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pour les deux cas d'actionnement : (a) mécanisme de type 3-*RS* et (b) mécanisme plan de type 3-*RR*.

Dans le cas du manipulateur tel que représenté à la figure 1.8, le PGD peut être résolu en considérant deux types de mécanismes équivalents, selon le cas d'actionnement pour la i -ème patte du manipulateur, pour $i = 1, 2, 3$.

Cas 1 : Les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont actionnés

Les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont prescrits et donc considérés fixes. Dans ce cas, l'angle $\Delta\theta_{i3}$ détermine la longueur $M_i = \|\mathbf{s}_i\|$ de chacune des 3 pattes et l'angle θ_{i1} impose par suite que le point P_{i5} peut décrire un cercle, de centre P_{i0} et de rayon M_i , contenu dans le plan (y', z') . Le manipulateur équivalent est de type 3-*RS*, où la rotation, de type *R*, est passive et décrite autour de l'axe x' (voir figure 2.2 (a)). Le PGD de ce mécanisme, également équivalent à l'architecture référée *MSSM*, a été traité par Hunt [7], Nanua *et al.* [57] et Merlet [15, 58]. Ces travaux ont permis de montrer que le PGD de cette structure peut être solutionné en trouvant les racines d'un polynôme mono-variable de degré 16.¹

¹Une implantation de cet algorithme est disponible via ftp anonyme dans le répertoire 'saga/FK/3RS' à l'adresse 'zenon.inria.fr'.

Cas 2 : Les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés

Lorsque les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont spécifiés, la longueur $M_i = \|\mathbf{s}_i\|$ ainsi que l'orientation des membrures proximales du parallélogramme, par rapport à l'axe y' , sont prescrites pour chaque patte. Étant donné que l'articulation rotoïde associée à l'angle θ_{i1} est passive, le point P_{i5} peut décrire un cercle autour de l'axe z' , de rayon $(\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2})$ et dont la position du centre A_i est donnée, dans le repère local R' , par $\mathbf{a}_i = [0 \ 0 \ s'_{iz}]^T$. Un raisonnement basé sur la projection des points A_i et P_{i5} , notés A'_i et P'_{i5} , pour $i = 1, 2, 3$, dans un plan parallèle au plan (x, y) , permet de ramener le PGD à une étude bi-dimensionnelle. Ce manipulateur possède donc le même mécanisme équivalent que la plate-forme de Stewart [3]. Le mécanisme équivalent, montré à la figure 2.2 (b), est par conséquent un mécanisme plan de type 3-RR. Le lecteur peut se référer à la procédure décrite par Merlet [1] pour la démonstration géométrique complète. Finalement, le PGD du manipulateur pour ce cas d'actionnement se ramène à la résolution de deux polynômes mono-variables de degré 6.² Le manipulateur possède donc jusqu'à 12 modes d'assemblage.

Nous venons de voir que le problème géométrique direct du manipulateur admet au maximum 12 ou 16 modes d'assemblage suivant le type d'actionnement choisi. Cependant, lors d'une planification de trajectoire, il est utile de connaître uniquement la solution correspondant à la posture *réelle* de la plate-forme mobile du manipulateur, celle-ci correspondant au mode d'assemblage courant. Deux approches peuvent être utilisées afin de déterminer cette solution réelle. La première met en oeuvre une procédure numérique itérative basée sur un algorithme de descente de gradient. La seconde est basée sur l'utilisation d'un ensemble de capteurs externes fournissant des données redondantes sur la configuration du manipulateur.

2.3.1 Résolution du PGD en utilisant une procédure numérique itérative

Nous présentons dans cette section la procédure numérique, généralement utilisée lors de l'implantation contrôleur du PGD, et permettant de calculer la posture réelle de la plate-forme mobile du manipulateur étudié. Ainsi, le manipulateur se trouve dans une configuration courante, pour laquelle le vecteur des coordonnées articulaires, de dimension

²Une implantation de cet algorithme est disponible via ftp anonyme dans le répertoire 'saga/FK/stewart' à l'adresse 'zenon.inria.fr'.

(6×1) , est connu et noté θ_c . Dans cette configuration, la procédure exige la connaissance d'un estimé initial de la posture du manipulateur, noté \mathbf{q}_c , et dont les composantes sont les coordonnées généralisées de la plate-forme mobile. Par suite, il est prescrit à l'effecteur de se rendre à une position articulaire désirée, notée θ_f . La procédure décrite ci-après vise donc la détermination du nouveau vecteur des coordonnées généralisées \mathbf{q}_f , en un maximum de N_0 itérations et en prescrivant une erreur de positionnement articulaire maximale ε_a .

Algorithme de type descente de gradient :

- S1.** Définir les conditions initiales $\mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{q}_c$, $\theta^{(0)} = \theta_c$ et $\Delta\theta^{(0)} = \theta_f - \theta_c$.
- S2.** Poser $k = 0$.
- S3.** Tant que $k \leq N_0$, faire
- S4.** Évaluer $\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}^{(k)}, \theta^{(k)})\Delta\theta^{(k)} + \mathbf{q}^{(k)}$,
où la matrice jacobienne \mathbf{J} est donnée à l'équation (2.29).
- S5.** En utilisant les équations du PGI de la section 2.1, calculer $\theta^{(k+1)} = f(\mathbf{q}^{(k+1)})$.
- S6.** Calculer $\Delta\theta^{(k+1)} = \theta_f - \theta^{(k+1)}$. Si la condition mathématique suivante

$$\frac{1}{2} (\Delta\theta^{(k+1)})^T (\Delta\theta^{(k+1)}) \leq \varepsilon_a$$
 est satisfaite, alors quitter la procédure. On obtient alors $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}^{(k+1)}$.
Sinon, passer à l'étape 7.
- S7.** Poser $k = k + 1$ et retourner à l'étape 4.

Dans le cas où l'estimé initial \mathbf{q}_c est suffisamment précis, la convergence de cet algorithme est réalisée en seulement quelques itérations ($k = 2$ ou 3). Lors d'une planification réelle de trajectoire, il est à noter que la solution du PGD, déterminée au temps t , sera utilisée comme estimé initial au temps $t + \Delta t$, c'est-à-dire : $\mathbf{q}^{(0)}(t + \Delta t) = \mathbf{q}_f(t)$.

2.3.2 Unicité de la solution du PGD en utilisant trois capteurs externes

De nombreux dispositifs mettant en oeuvre un ensemble de capteurs externes, permettant de simplifier grandement la résolution du PGD de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté, ont été proposés dans la littérature (voir par exemple Stoughton et Arai [59], Merlet [60] et Bonev et Ryu [61]). Ces capteurs, qui peuvent être de type linéaire ou rotoïde,

permettent de mesurer des paramètres fournissant des informations supplémentaires sur la configuration de la structure. Outre le fait que la redondance de capteurs peut être utilisée pour l'auto-calibration du manipulateur parallèle, cette redondance permet également d'assurer la fiabilité du contrôle de l'architecture dans le cas d'un dysfonctionnement d'un des capteurs pré-existants, utilisés pour mesurer les valeurs des coordonnées articulaires (Bonev [62]). L'ajout de capteurs externes peut néanmoins créer des problèmes d'interférences mécaniques entre les éléments de la structure.

Dans le cas du manipulateur parallèle étudié, nous considérons les deux cas d'actionnement déjà mentionnés et nous discutons donc de la problématique de l'ajout de ces capteurs externes.

1. Si les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont actionnés, on choisit d'ajouter, sur chaque patte i , $i = 1, 2, 3$, un encodeur optique mesurant l'angle θ_{i2} . La mise en oeuvre de ces 3 capteurs sur la structure est très aisée et ne crée pas d'interférences mécaniques avec les pattes.
2. Si les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés, on choisit d'ajouter, sur chaque patte, un encodeur optique mesurant l'angle θ_{i1} . Dans ce cas, les 3 capteurs sont montés directement sur la base et l'arrangement mécanique est grandement facilité.

Pour chacun de ces deux cas d'actionnement, l'ajout de 3 encodeurs optiques permet, lors d'une planification de trajectoire, de mesurer directement, pour chaque patte, les positions angulaires de l'ensemble $(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3})$. On peut donc calculer le vecteur \mathbf{s}_i en effectuant :

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} - \sin \theta_{i1} & 0 \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\ell_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i3} \\ \sin \theta_{i3} \end{bmatrix} + \ell_{i5} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \right) \quad (2.32)$$

Par suite, la position réelle \mathbf{p}_{i5} du point P_{i5} se détermine en utilisant la relation $\mathbf{p}_{i5} = \mathbf{p}_{i0} + \mathbf{s}_i$, pour $i = 1, 2, 3$. La connaissance des positions réelles des points P_{i5} , $i = 1, 2, 3$, permet finalement de déterminer, de manière unique, la position \mathbf{p} et l'orientation \mathbf{Q} de la plate-forme mobile du manipulateur.

Comparativement à l'ajout de capteurs externes dans le cas de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté possédant une géométrie plus générale et pour lesquels la mise en équation est complexe, le manipulateur étudié permet par conséquent, lorsque ces capteurs sont utilisés, une résolution triviale du problème géométrique direct.

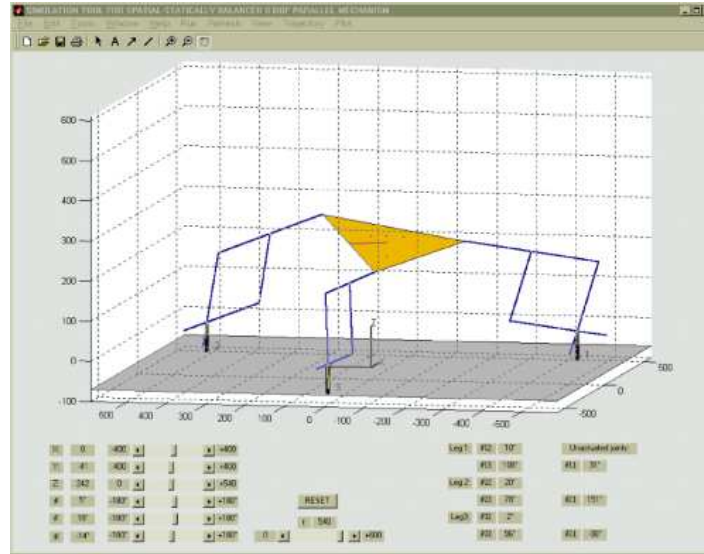


Fig. 2.3: Interface de simulation du comportement du manipulateur réalisée via la *Graphic User Interface* (GUI) de MATLAB.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations permettant la résolution du problème géométrique inverse (PGI) du manipulateur ont tout d'abord été revues. Par suite, une expression générale de la matrice jacobienne pour un manipulateur de cette classe possédant 3 à 6 pattes a été déterminée en utilisant le principe du travail virtuel. Cette expression, valable quel que soit le sous-ensemble des articulations rotoïdes actionnées pour chaque patte, a été obtenue sous une forme vectorielle compacte. Cette formulation nous permettra de déterminer les vecteurs de Plücker, associés aux articulations rotoïdes actionnées du manipulateur, qui constitueront la base théorique pour l'étude géométrique des singularités.

Par suite, deux procédures de résolution du problème géométrique direct (PGD) menant à une unicité de sa solution ont été développées. Une procédure numérique itérative de type descente de gradient a été présentée. La convergence de l'algorithme est réalisée en seulement quelques itérations. Cependant, lors d'une planification de trajectoire, cette méthode requiert de connaître un bon estimé initial de la posture de la plate-forme mobile à la position courante. Elle nécessite également que l'incrémentatation soit réalisée avec un pas de temps très faible, ce qui impose l'utilisation d'un matériel informatique performant. Finalement, il a été montré que l'utilisation de trois capteurs de type rotoïde, montés sur la base de la structure parallèle, permet une résolution triviale du problème

géométrique direct du manipulateur.

Une interface de simulation du comportement du manipulateur a été réalisée en utilisant les objets graphiques haut-niveau de la *Graphic User Interface* (GUI) de MATLAB (voir figure 2.3). Les équations permettant la résolution du PGI du mécanisme ainsi que la procédure numérique utilisée pour la résolution du PGD ont été implantées. Un dispositif de plusieurs curseurs permettent à l'utilisateur de modifier interactivement la posture de la plate-forme mobile du manipulateur et de visualiser les valeurs correspondantes des coordonnées articulaires. De plus, un ensemble de trajectoires pré-programmées sont disponibles et peuvent être sélectionnées à partir de menus déroulants. L'utilisateur peut également visualiser certaines caractéristiques du manipulateur comme, par exemple, les surfaces cartographiant la dextérité dans le plan (x, y) , calculées pour la configuration courante.

Chapitre 3

Optimisation du Design de l'Architecture

Dans ce chapitre, nous traitons d'une problématique rencontrée durant la phase de conception de mécanismes parallèles, c'est-à-dire l'optimisation du design du mécanisme. Les algorithmes de discrétisation développés visent la maximisation du volume de différents sous-espaces tridimensionnels de l'*espace atteignable complet* du mécanisme sous la contrainte que la zone de l'espace associé ne doit contenir aucune singularité. Ces algorithmes sont utilisés afin d'optimiser certains paramètres géométriques de l'architecture. Le raisonnement permettant d'aboutir au choix du sous-ensemble de ces paramètres à considérer pour l'optimisation sera tout d'abord présenté dans la première partie de ce chapitre. Une première méthode d'optimisation basée sur la maximisation du volume de l'*espace à orientation constante*, c'est-à-dire l'espace cartésien tridimensionnel des points atteignables par l'effecteur pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, sera développée et nous permettra d'aboutir à un premier design optimal du manipulateur parallèle étudié. Par suite, un algorithme de discrétisation permettant la détermination d'un nouvel espace atteignable, où degrés de liberté en rotation et en translation sont couplés, sera développé en utilisant une convention angulaire basée sur les *angles d'Euler modifiés*. Cet espace peut être défini comme l'espace tridimensionnel atteignable lorsque la position (x, y) de l'effecteur ainsi que la position angulaire en lacet ψ sont considérés constants. La maximisation du volume de ce nouvel espace atteignable nous permettra d'aboutir à un second sous-ensemble de paramètres géométriques optimaux. Finalement, les résultats de ces deux optimisations seront comparés en analysant des courbes cartographiant la dextérité du manipulateur.

3.1 Introduction

LE dimensionnement des paramètres géométriques est une étape complexe du design des mécanismes parallèles. En effet, le fait que ce type de manipulateurs soit constitué de plusieurs chaînes cinématiques fermées a pour conséquence que leur espace atteignable est généralement relativement réduit. De plus, la présence de singularités¹ à l'intérieur de cet espace imposerait idéalement de maximiser le volume de l'espace atteignable complet du mécanisme ne contenant aucune singularité. En effet, il est indispensable de se prémunir, déjà lors de l'étape de conception, de toute dégénérescence du contrôle lors d'une planification de trajectoire future. Étant donné qu'il est impossible de déterminer et de représenter l'espace complet de tels mécanismes possédant 6 degrés de liberté, une approche couramment utilisée dans la littérature consiste en la représentation de sous-espaces atteignables tridimensionnels de cet espace.

3.1.1 Optimisation du design de l'architecture via deux méthodes de discrétisation

Dans ce chapitre, nous considérons le manipulateur parallèle tel que montré à la figure 1.6, et nous nous fixons deux cahiers des charges menant chacun à une procédure d'optimisation particulière du design.

1. Ce type d'architecture pouvant être équilibrée statiquement pourrait trouver des applications industrielles intéressantes en tant que dispositif dédié au positionnement et à l'orientation d'objets ayant une masse importante. Dans ce contexte, il est nécessaire de maximiser en priorité les débattements de l'effecteur en translation. Ainsi, le design doit être optimisé en déterminant l'espace à orientation constante du manipulateur dont le volume est maximal. Une telle optimisation sera présentée dans la section 3.3.
2. Dans le cas où ce type de mécanisme serait utilisé comme structure de base pour un simulateur de vol, ce qui constitue le domaine d'application principal des manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté, il est bien connu que les mouvements de

¹Configurations de la plate-forme mobile pour lesquelles le mécanisme gagne ou perd un ou plusieurs degrés de liberté. Les équations analytiques des lieux de singularités du mécanisme sont développées au chapitre 4.

l'habitacle ne requièrent que des translations de faible amplitude dans le plan (x, y) ainsi que des débattements angulaires en *lacet* réduits autour de l'axe vertical z . Par contre, les débattements angulaires en *roulis* et en *tangage* ainsi que le débattement vertical selon l'axe z doivent être maximisés. Par suite, le design doit être optimisé en maximisant le volume de l'espace atteignable tridimensionnel lorsque la position (x, y) de l'effecteur ainsi que la position angulaire en lacet ψ sont considérés constants. L'optimisation de cet espace atteignable sera présentée à la section 3.4. De plus, il est important de remarquer que ce nouvel espace atteignable est particulièrement bien adapté pour l'étude et le design de simulateurs de mouvements ne possédant que 3 ou 4 degrés de liberté, et développés actuellement pour leur coûts de fabrication et de fonctionnement réduits.

3.1.2 Méthodes de discrétisation dédiées à la détermination de sous-espaces atteignables tridimensionnels

Les travaux réalisés par Johnson [52] au Georgia Institute of Technology ont déjà traité de l'optimisation du design de ce type de mécanisme via une étude géométrique de l'espace à orientation constante, en mettant en oeuvre les algorithmes introduits par Gosselin [63] et Gosselin *et al.* [64]. Cette analyse a été utilisée pour la réalisation d'un prototype à 6 degrés de liberté équilibré statiquement possédant 3 pattes actives et une patte passive. Seules les contraintes mécaniques liées aux longueurs limitées des pattes actives du mécanisme ont été prises en compte dans les procédures géométriques mises en oeuvre.

Cependant, une telle description analytique de l'espace atteignable de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté ne permet généralement pas de prendre en compte toutes les contraintes mécaniques limitant en pratique les débattements de l'effecteur, en particulier celles associées aux limites angulaires des joints sphériques passifs reliant les pattes à la plate-forme mobile. Afin de garantir que toutes les contraintes cinématiques sont prises en compte pendant le calcul de la frontière de l'espace atteignable, plusieurs méthodes de discrétisation ont été présentées par Merlet [15], Masory et Wang [68] et Conti *et al.* [65]. Les méthodes développées dans les deux premières références sont basées sur la création d'un maillage cubique de l'espace cartésien. Pour chaque noeud de ce maillage, le PGI est résolu et les contraintes permettant la détection de la frontière de l'espace sont testées. Une méthode de discrétisation plus performante a été présentée dans

la référence [65] afin de représenter l'espace à orientation constante d'une machine-outil dont la structure est celle d'une plate-forme parallèle de type 6- $(RR)\underline{P}S$. Cette méthode de discrétisation, quoique sophistiquée, permet la détermination de la frontière de l'espace atteignable dans un système de coordonnées sphériques. Une méthode numérique permettant de calculer le volume de l'espace à orientation constante est également présentée. Une méthode générale de discrétisation a également été utilisée par Benea [46] pour la détermination de l'*espace en orientation* de manipulateurs parallèles appartenant à la classe 6- \underline{RRRS} . L'espace en orientation est l'espace tridimensionnel des débattements angulaires possibles de la plate-forme mobile lorsque la position cartésienne de l'effecteur est prescrite. De plus, une nouvelle méthode de discrétisation permettant la détermination de l'espace en orientation de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté a été proposée récemment par Bonev et Ryu [66]. Cette méthode est basée sur l'utilisation des *angles d'Euler modifiés* et permet une représentation particulière de l'orientation de la plate-forme mobile dans un système de coordonnées cylindriques. Cette nouvelle convention des angles d'Euler a également été utilisée par Huang *et al.* [67] afin de réaliser des représentations graphiques bi-dimensionnelles de sections de l'espace en orientation de manipulateurs parallèles de type Gough-Stewart.

Ayant pour objectif la mise en oeuvre d'une approche prenant en compte toutes les contraintes mécaniques limitant l'espace atteignable du manipulateur, il est donc hautement désirable d'utiliser des algorithmes numériques basés sur de telles méthodes de discrétisations. Celles-ci seront développées dans les sections ci-après.

3.2 Problématiques liées au design existant du prototype

Dans cette partie, nous délimitons le champ de la présente recherche. Nous introduisons la problématique liée au design existant du prototype tel que montré à la figure 1.7 et déduisons l'ensemble de paramètres géométriques à utiliser lors des deux optimisations.

3.2.1 Analyse d'un mécanisme ne possédant que 3 pattes actives

Nous nous limitons dans ce chapitre à l'optimisation des paramètres géométriques d'un manipulateur parallèle possédant 3 pattes pour deux raisons principales :

1. Trois pattes actives sont suffisantes pour la réalisation de l'équilibrage statique de l'architecture sous la contrainte que le centre de masse C de la plate-forme mobile est situé dans le plan contenant les 3 points d'attaches des pattes à la plate-forme mobile (Ebert-Uphoff et Gosselin [53]).
2. Lorsque le centre de masse C de la plate-forme mobile ne satisfait pas la condition précédemment énoncée, alors une quatrième patte doit être utilisée afin de satisfaire les conditions de l'équilibrage statique (Johnson et Ebert-Uphoff [51]). Dans ce cas, il est suffisant d'ajouter une quatrième patte passive à un mécanisme possédant déjà 3 pattes actionnées. Ni les problèmes géométriques direct et inverse, ni les singularités architecturales liées à la configuration de la plate-forme mobile ne seront affectés par une telle modification du design. De plus, il sera toujours possible de concevoir cette patte passive de telle sorte que l'espace atteignable du manipulateur n'en soit pas affecté. Par exemple, le point d'attache de la patte passive sur la base pourrait être situé sur le même cercle que les points P_{i0} , $i = 1, 2, 3$, à égale distance de deux de ces points.

Une fois l'optimisation du design réalisée pour un mécanisme ne possédant que 3 pattes, les résultats peuvent facilement être ajustés pour le cas d'un mécanisme possédant 3 pattes actives et une patte passive.

3.2.2 Problématiques existantes et choix du sous-ensemble des paramètres d'optimisation

Tel que mentionné préalablement, un prototype possédant 3 pattes actives a été développé au Laboratoire de robotique de l'Université Laval en ne considérant que les contraintes associées à l'équilibrage statique du mécanisme (Gosselin *et al.* [50]). Les paramètres géométriques utilisés pour la réalisation de ce prototype sont présentés dans le tableau 3.1. Ces paramètres ont conduit à une architecture équilibrée statiquement mais dont le design n'est pas optimal d'un point de vue cinématique. En effet, la géométrie correspondante conduit à un espace à orientation constante de faible volume contenant des lieux critiques de singularités.

Ainsi, nous sommes intéressés à maximiser le volume de différents sous-ensembles tridimensionnels de l'*espace atteignable complet* du manipulateur tout en garantissant que l'espace associé ne contient pas de lieux de singularités. Il va sans dire que nous devons choisir

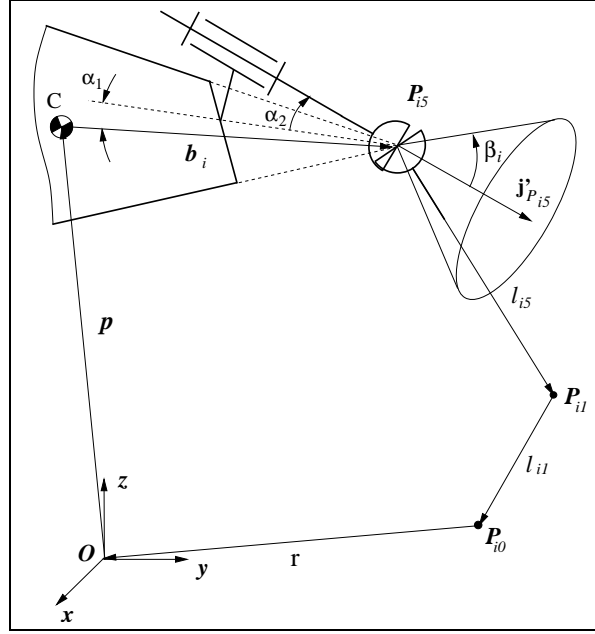


Fig. 3.1: Paramètres d'optimisation associés à la i -ème chaîne cinématique du manipulateur.

un sous-ensemble de paramètres d'optimisation qui n'affecte pas l'énergie potentielle totale du système qui doit rester constante afin de préserver les conditions d'équilibre. Il a été montré par Ebert-Uphoff et Gosselin [53] que la raideur ainsi que l'élongation des ressorts utilisés pour réaliser la compensation de la gravité du mécanisme dépendent de la masse de la plate-forme mobile et des paramètres cinématiques des pattes. Les paramètres restants, c'est-à-dire les dimensions de la plate-forme mobile et de la base peuvent par conséquent être utilisés comme paramètres d'optimisation. Définissons le vecteur $\mathbf{j}'_{P_{i5}}$ comme le vecteur directeur de l'axe correspondant au centre du cône de mobilité associé à l'articulation sphérique passive reliant la i -ème patte à la plate-forme mobile, et ce par rapport au repère mobile R_p (voir la figure 3.1). Plus précisément, il a été décidé de considérer comme paramètres d'optimisation les angles α_1 et α_2 . L'angle α_2 est l'angle entre le vecteur $(-\mathbf{j}'_{P_{i5}})$ et la projection de ce vecteur sur le plan mobile (x_p, y_p) . La projection du vecteur $(-\mathbf{j}'_{P_{i5}})$ fait par suite un angle α_1 avec le vecteur $(-\mathbf{b}_i)$. Finalement, nous considérons un troisième paramètre d'optimisation r qui est utilisé pour la description de la position des points P_{i0} , ayant fait l'hypothèse que les points d'attache P_{i0} , $i = 1, 2, 3$ des 3 pattes à la base sont répartis uniformément sur un cercle de rayon r et dont le centre est le point O , c'est-à-dire $r = \|\mathbf{p}_{i0}\|$. Le sous-ensemble de paramètres d'optimisation utilisé est finalement décrit par le vecteur (α_1, α_2, r) .

Tab. 3.1: Géométrie initiale du prototype (toutes les unités sont données en [mm]). De plus, $\beta_i = 35^\circ$, $l_{i1} = l_{i2} = 180$ mm, $l_{i5} = 360$ mm, pour $i = 1, 2, 3$, $\alpha_1 = 0^\circ$ *, $\alpha_2 = 45^\circ$ *, $r = 280$ mm* et $b = 207$ mm.

i	\mathbf{p}_{i0} *	\mathbf{b}_i	$\mathbf{j}'_{P_{i5}}$ *
1	$\begin{bmatrix} 140.000 \\ -242.487 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 103.923 \\ -180.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.354 \\ -0.612 \\ -0.707 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 140.000 \\ 242.487 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 103.923 \\ 180.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.354 \\ 0.612 \\ -0.707 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -280.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -207.846 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.000 \\ -0.707 \end{bmatrix}$

* Ces valeurs correspondent à la géométrie initiale du prototype. Une valeur différente leur sera attribuée en fonction des résultats des deux optimisations.

3.3 Optimisation basée sur la maximisation du volume de l'espace à orientation constante

Nous présentons dans cette section la procédure d'optimisation basée sur la maximisation du volume de l'espace à orientation constante du manipulateur montré à la figure 1.6. Précisons que cette méthodologie peut être utilisée pour des manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté présentant une topologie quelconque.

3.3.1 Contraintes mécaniques

La présente section résume les contraintes mécaniques limitant l'espace à orientation constante du manipulateur. Nous utilisons ici la convention angulaire basée sur les *angles d'Euler standards* dont la matrice de rotation est définie par :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_z(\phi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_y(\psi). \quad (3.1)$$

L'expression développée de cette matrice de rotation est donnée par l'équation (1.1) de la section 1.3. Par suite, il existe quatre principaux sous-ensembles de contraintes mécaniques limitant l'espace à orientation constante du mécanisme, en l'occurrence : (i) les longueurs limitées des pattes, (ii) les débattements angulaires limités des articulations sphériques, (iii) les interférences mécaniques entre les pattes et (iv) certaines contraintes additionnelles reliées au design du prototype.

3.3.1.1 Longueurs limitées des pattes du mécanisme

Pour une orientation \mathbf{Q} et une position \mathbf{p} prescrites de la plate-forme, nous déterminons la longueur de la i -ème patte, notée M_i , en utilisant la relation suivante, pour $i = 1, 2, 3$:

$$M_i = \|\mathbf{p}_{i5} - \mathbf{p}_{i0}\| = \|\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_{i0}\|. \quad (3.2)$$

Par suite, la structure du mécanisme à 5 barres impose une contrainte sur la longueur de cette patte sous la forme :

$$l_{i5} - l_{i2} + \xi_{i1} \leq M_i \leq l_{i5} + l_{i1} - \xi_{i2}, \quad (3.3)$$

où l_{i1} , l_{i2} et l_{i5} sont les longueurs des membrures de la i -ème patte (voir la figure 1.8), ξ_{i1} et ξ_{i2} sont des termes constants utilisés afin de prendre en compte les débattements permis en pratique pour chaque structure en forme de parallélogramme.

3.3.1.2 Débattements angulaires associés aux articulations sphériques

Soit $\mathbf{j}'_{P_{i5}}$ le vecteur unitaire exprimé dans le repère mobile R_p définissant l'orientation du centre du cône de mobilité associé à la i -ème articulation sphérique. Soit $\mathbf{j}_{P_{i5}}$ le vecteur opposé au vecteur $\mathbf{j}'_{P_{i5}}$ et exprimé par rapport au repère fixe R , c'est-à-dire $\mathbf{j}_{P_{i5}} = -\mathbf{Q}\mathbf{j}'_{P_{i5}}$. Nous définissons également la déviation angulaire maximale permise β_i de la i -ème articulation sphérique. Cet angle, spécifié par le constructeur, est l'angle au sommet du cône de mobilité associé à cette articulation. Par conséquent, la limite angulaire résultante impose une contrainte mécanique, de telle sorte que, pour $i = 1, 2, 3$:

$$\cos^{-1} \left((\mathbf{j}_{P_{i5}})^T \mathbf{n}_i \right) \leq \beta_i, \quad (3.4)$$

où le vecteur unitaire $\mathbf{n}_i = (\mathbf{p}_{i5} - \mathbf{p}_{i1})/l_{i5}$ est donné par (les angles θ_{i1} et θ_{i2} sont calculés via les équations du PGI fournies à la section 2.1) :

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} & -\sin \theta_{i1} & 0 \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_{i2} \\ \sin \theta_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

et les vecteurs unitaires \mathbf{j}'_{P_i5} , $i = 1, 2, 3$ ont pour expression, dans le repère mobile R_p :

$$[\mathbf{j}'_{P_15}, \mathbf{j}'_{P_25}, \mathbf{j}'_{P_35}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos(\alpha_1 + \pi/3) & \cos \alpha_2 \sin(\alpha_2 + \pi/6) & -\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \\ -\cos \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \pi/3) & \cos \alpha_2 \cos(\alpha_2 + \pi/6) & -\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \\ -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.3.1.3 Interférences mécaniques entre les pattes

Afin d'être en mesure de modéliser les interférences mécaniques entre les trois pattes du manipulateur, nous faisons l'hypothèse que les membrures des 3 pattes peuvent être approximées par des cylindres de diamètre D . Par suite, une étude rapide du mécanisme permet d'établir que, pour la plupart des configurations de la plate-forme mobile, seules les collisions entre les segments $P_{i2}P_{i3}$ et $P_{i3}P_{i5}$ de la patte i avec les segments $P_{j1}P_{j5}$ de la patte j , $i \neq j$, peuvent se produire. Ainsi, la structure du mécanisme à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté impose la série de contraintes mécaniques suivantes :

$$\begin{cases} \text{distance}(P_{i2}P_{i3}, P_{j1}P_{j5}) \geq D \\ \text{distance}(P_{i3}P_{i5}, P_{j1}P_{j5}) \geq D \\ i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \end{cases} \quad (3.7)$$

La distance minimale entre deux droites dans l'espace doit être obtenue par l'intermédiaire d'un algorithme complexe comprenant plusieurs étapes successives. Nous référons le lecteur à la procédure détaillée présentée par Masory et Wang [68]. Cet algorithme a été utilisé pour tester la violation des contraintes données dans l'équation (3.7).

3.3.1.4 Contrainte supplémentaire

Le design spécifique de la base fixe du prototype impose de considérer une contrainte supplémentaire, telle que la coordonnée en z du centre de masse C de la plate-forme mobile reste toujours supérieure à zéro :

$$z > 0 \quad (3.8)$$

Cette contrainte permet de se prémunir d'une collision entre la plate-forme mobile et la base du manipulateur et donc de spécifier le demi-espace cartésien dans lequel les mouvements de l'effecteur sont effectués en pratique.

3.3.2 Étude des singularités et contraintes résultantes

Cette section présente les différents lieux de singularités à considérer lors de l'optimisation du volume de l'espace atteignable à orientation constante du mécanisme. Dans notre algorithme de discrétisation, nous considérons le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Nous limitons ici l'étude des singularités au cas où la plate-forme mobile est parallèle à la base, ce qui est suffisant pour la détermination de l'ensemble (α_1, α_2, r) des paramètres d'optimisation. Ainsi, nous faisons l'hypothèse préliminaire que les angles θ et ψ sont égaux à zéro. Pour ce cas particulier, nous avons identifié deux types de configurations singulières devant être prises en compte dans l'algorithme de détermination de la frontière de l'espace à orientation constante du mécanisme² :

1. L'angle de rotation de la plate-forme mobile autour de l'axe z est égal à zéro, c'est-à-dire $\phi = 0$.
2. Soit le paramètre géométrique constant b exprimant la distance entre le centre de masse C et les points d'attache P_{i5} des pattes à la plate-forme mobile, $b = \|\mathbf{p}_{i5} - \mathbf{p}\|$, un second lieu de singularité est un cylindre régulier, orienté suivant l'axe z , dont l'équation analytique est donnée par :

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (3.9)$$

où $R = \sqrt{(b^2 + r^2 - 2br \cos \phi)}$.

Si l'on considérait le cas où les articulations rotoïdes associées aux angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$ sont actionnées, ce lieu de singularité serait également obtenu mais serait dû à des propriétés cinématiques différentes. Ainsi, une posture de la plate-forme mobile correspondant à un ensemble de coordonnées généralisées satisfaisant l'équation (3.9) conduirait à une expression différente du noyau de la matrice jacobienne \mathbf{J} du manipulateur. Les singularités pour ce dernier cas d'actionnement ont été présentées par Ebert-Uphoff et Gosselin [53].

²L'étude et la détermination des lieux de singularités du manipulateur pour ce cas particulier sont présentées à la section 4.2.6.2 du présent mémoire.

Une analyse exhaustive des singularités imposerait de considérer deux types de contraintes additionnelles : (1) L'extrémité de la membrure distale de la patte i , P_{i5} , se trouve exactement au-dessus du point d'attache P_{i0} de cette patte à la base. Le lieu singulier correspondant est une droite verticale passant par le point de coordonnées $(\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{Q}\mathbf{b}_i)$. En pratique, ces droites peuvent facilement être contournées durant une planification de trajectoire et la présence de ces lieux de singularités ne justifie pas de les considérer comme limites de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur. Il sera seulement nécessaire de les prendre en compte dans l'architecture du contrôleur en position du mécanisme. (2) Les deux membrures du parallélogramme de la i -ème patte sont alignées, c'est-à-dire $\sin \Delta\theta_{i3} = 0$. La contrainte donnée à l'équation (3.3) tient déjà compte de cette limitation. Ces deux contraintes seront de ce fait négligées dans l'algorithmique développée ci-après.

Finalement, la région cartésienne qui ne contient aucun lieu de singularités peut être caractérisée par l'ensemble de contraintes suivant :

$$\phi > 0 \tag{3.10}$$

$$x^2 + y^2 < R^2 \tag{3.11}$$

3.3.3 Algorithme utilisé pour l'optimisation de l'espace atteignable à orientation constante

3.3.3.1 Dérivations préliminaires

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, il est suffisant pour réaliser l'optimisation des paramètres (α_1, α_2, r) de se placer dans des conditions où les angles θ et ψ sont égaux à zéro. Néanmoins, afin de garantir la cohérence du processus d'optimisation, il est nécessaire d'imposer également que l'angle entre la membrure distale de la i -ème patte et l'axe de symétrie du cône de mobilité de l'articulation sphérique correspondante, projeté dans le plan (x_p, y_p) , soit égal à zéro lorsque la plate-forme mobile est dans la configuration $(x, y) = (0 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$ et $(\theta, \psi) = (0^\circ, 0^\circ)$. Une vue de dessus du manipulateur dans une telle configuration est fournie à la figure 3.2. Ainsi, une valeur donnée du paramètre d'optimisation α_1 correspond à une valeur moyenne de l'angle ϕ .

Soit u la distance, projetée dans le plan (x, y) , entre les deux points d'attache P_{i0} et

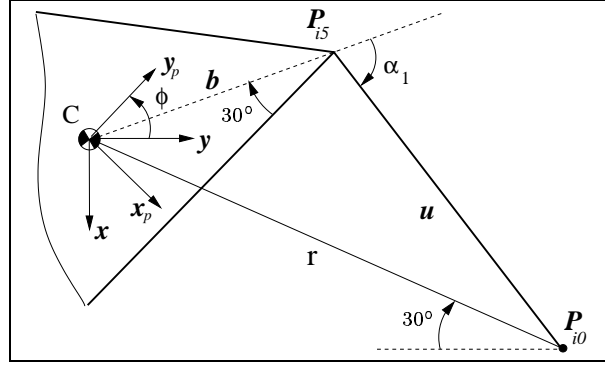


Fig. 3.2: Vue de dessus de la i -ème patte du mécanisme, $(x, y) = (0 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$, $(\theta, \psi) = (0^\circ, 0^\circ)$
et $\phi = \phi_{av}$.

P_{i5} de la i -ème patte à la base et à la plate-forme mobile. Pour une valeur prescrite de l'angle α_1 , la valeur moyenne de l'angle ϕ , notée ϕ_{av} , est solution du système d'équations suivant :

$$r^2 = b^2 + u^2 + 2ru \cos \alpha_1 \quad (3.12)$$

$$u^2 = r^2 + b^2 - 2br \cos \phi_{av} \quad (3.13)$$

ce qui conduit à l'équation quadratique suivante en fonction de la variable $\cos \phi_{av}$:

$$A \cos^2 \phi_{av} + B \cos \phi_{av} + C = 0, \quad (3.14)$$

où

$$\begin{cases} A = r^2 \\ B = 2br(\cos^2 \alpha_1 - 1) \\ C = b^2(1 - \cos^2 \alpha_1) - r^2 \cos^2 \alpha_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Étant donné que nous ne devons évidemment considérer que les valeurs positives de l'angle ϕ_{av} , l'équation (3.14) admet deux solutions. Par suite, la structure du mécanisme à 3 pattes impose que seule la plus petite des deux solutions restantes doit être prise en compte. Finalement, ceci détermine une solution unique pour l'angle ϕ_{av} lorsque la valeur du paramètre α_1 est donnée.

Nous présentons maintenant l'algorithme d'optimisation tel qu'il a été implémenté afin de déterminer l'ensemble des paramètres (α_1, α_2, r) correspondant à un volume maximal de l'espace à orientation constante ne contenant aucun lieu de singularités. Cet algorithme est basé sur la méthode de discrétisation telle que présentée initialement par Conti *et al.* [65]. L'approche a été adaptée pour la génération et le calcul du volume de l'espace à orientation constante du manipulateur parallèle à 3 pattes étudié.

3.3.3.2 Algorithme utilisé pour la première optimisation

- S1.** Initialiser le tableau tridimensionnel \mathbf{V}_1 , ayant pour dimension $(n_{\alpha_1} \times n_{\alpha_2} \times n_r)$, où n_{α_1} , n_{α_2} et n_r sont respectivement les nombres d'incrémentations correspondants aux paramètres d'optimisation α_1 , α_2 et r .
- S2.** Initialiser les paramètres d'optimisation $\alpha_1 = \alpha_{1,min}$, $\alpha_2 = \alpha_{2,min}$ et $r = r_{min}$ dont l'indexation commence à 1 dans le tableau \mathbf{V}_1 .
- S3.** Définir un maillage spatial de forme parallélépipédique dont les noeuds, répartis uniformément, décrivent la position du centre de masse C de la plate-forme mobile à l'intérieur de l'espace de travail du mécanisme. Par suite, le PGI est résolu et les équations (3.3), (3.4), (3.7) et (3.8) sont employées afin de détecter les violations de contraintes mécaniques pour chaque noeud du maillage. En utilisant les résultats obtenus en testant chacune de ces positions, un de ces points, noté O_c , peut être choisi comme étant le centre approximatif de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur. Ce point est utilisé comme origine d'un système de coordonnées sphériques $(\rho_c, \theta_c, \phi_c)$.
- S4.** Initialiser la matrice \mathbf{W}_ρ de dimension $(n_{\theta_c} \times n_{\phi_c})$, où n_{ϕ_c} et n_{θ_c} définissent le nombre de pas incrémentaux constituant le maillage sphérique pour $\phi_c = 0^\circ, \dots, 180^\circ$ et $\theta_c = 0^\circ, \dots, 360^\circ$.
- S5.** Pour les valeurs courantes des paramètres (α_1, α_2, r) , résoudre l'équation (3.14) afin de déterminer la valeur angulaire moyenne $\phi = \phi_{av}$ correspondante.
- S6.** Utiliser les deux algorithmes, référencés "*Spherical Search Algorithm*" et "*Workspace Boundary Algorithm*", tels que présentés par Conti *et al.* [65], afin de déterminer les frontières de l'espace à orientation constante du manipulateur dans le système de coordonnées sphériques $(\rho_c, \theta_c, \phi_c)$, pour l'orientation $(\phi, \theta, \psi) = (\phi_{av}, 0^\circ, 0^\circ)$ de la plate-forme mobile. Le PGI est d'abord résolu et les équations (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), (3.10) et (3.11) sont ensuite employées afin de détecter les violations de contraintes. Les valeurs correspondantes du rayon ρ aux points de violation de contrainte sont stockées dans la matrice \mathbf{W}_ρ .
- S7.** Chaque secteur de l'espace de travail résultant pouvant être approximé par une pyramide définie par quatre points adjacents $\mathbf{W}_\rho[i, j]$ dont le sommet est au point O_c , déterminer le volume de l'espace atteignable à orientation constante en sommant

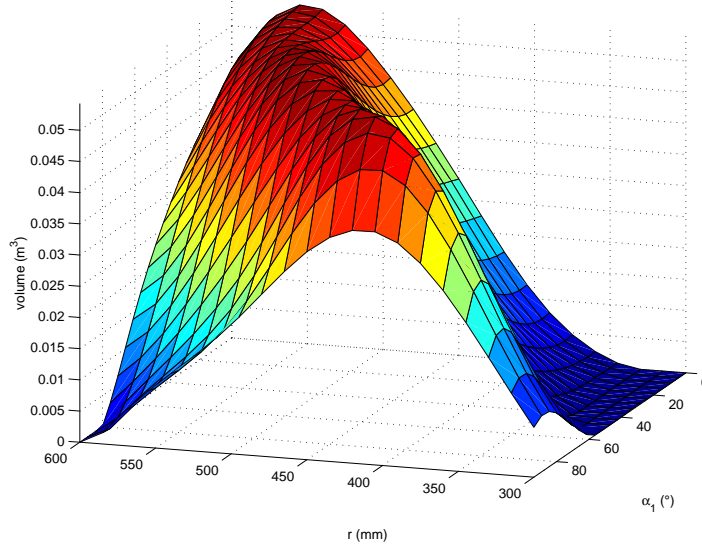


Fig. 3.3: Volume de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur en fonction des paramètres d'optimisation α_1 et r ($\alpha_2 = 0^\circ$).

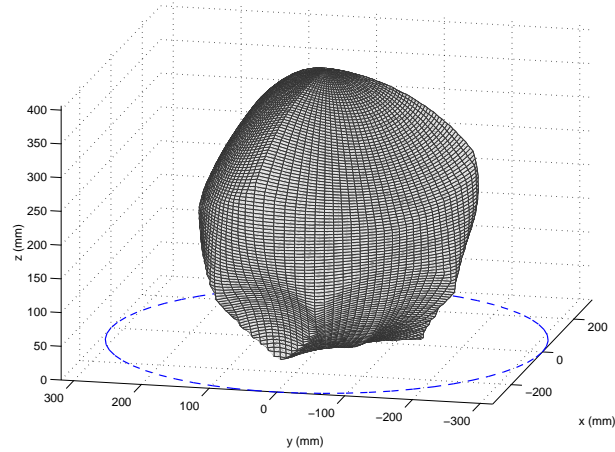
les volumes de tous les secteurs élémentaires. La valeur résultante du volume est par la suite stockée dans le tableau tridimensionnel \mathbf{V}_1 .

- S8.** Répéter les étapes 3 à 7 pour toutes les combinaisons possibles des paramètres d'optimisation (α_1, α_2, r) .
- S9.** Représenter graphiquement les données obtenues afin de déterminer le sous-ensemble des paramètres (α_1, α_2, r) pour lequel le volume de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur étudié est maximal.

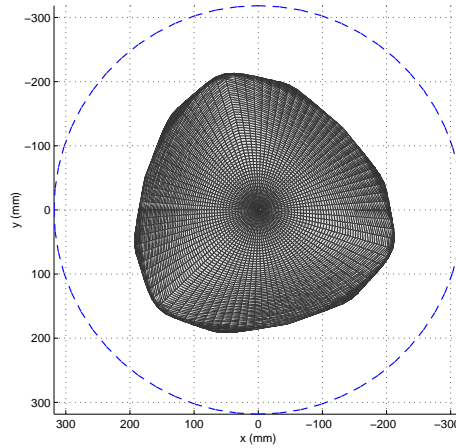
3.3.3.3 Résultats

L'algorithme décrit dans le paragraphe précédent a été implémenté en code MATLAB, permettant la manipulation de tableaux multi-dimensionnels et possédant une large palette d'outils dédiés à la visualisation des données. Pour cette implémentation, nous avons utilisé les données fournies dans le tableau 3.1 ainsi que les pas incrémentaux $n_{\phi_c} = 91$ et $n_{\theta_c} = 61$. Afin de faciliter l'optimisation qui requiert un temps de calcul important, il a été décidé d'exécuter l'algorithme décrit ci-haut pour des valeurs croissantes de deux des paramètres d'optimisation, considérant le troisième constant. Par conséquent, nous avons représenté graphiquement les surfaces définies par

$$V_1 = f_{\alpha_2}(\alpha_1, r), \quad \alpha_2 \in [\alpha_{2,min}, \alpha_{2,max}]. \quad (3.16)$$



(a)



(b)

Fig. 3.4: (a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur ayant un volume maximal, $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (45^\circ, 0^\circ, 504 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (28^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$.

Une telle approche nous a permis de faire les deux observations suivantes :

1. Les surfaces résultantes, similaires à celle représentée sur la figure 3.3, contiennent toutes une plage continue d'extrema locaux. Le fait de faire varier la valeur de l'angle α_2 n'affecte pas la nature globale de la surface mais a un impact sur la localisation de cette plage d'extrema.
2. Pour $\alpha_2 = 0^\circ$, nous remarquons que la plage d'extrema correspondante contient toutes les valeurs maximales possibles du volume V_1 de l'espace atteignable à orientation constante, $(\forall \{\alpha_1, r\})$.

Pour le manipulateur étudié, ces propriétés permettent de choisir une valeur arbitraire du paramètre α_1 , telle que $\alpha_1 \in]0^\circ, 80^\circ]$, pour laquelle il sera toujours possible de trouver une valeur correspondante du paramètre r conduisant à une valeur du volume de l'espace atteignable à orientation constante représentant au moins 97% de la valeur maximale possible (voir la figure 3.3). En considérant que les mouvements du mécanisme sont limités au demi *espace complet* défini par $\phi > 0$, l'axe de symétrie du cône de mobilité de l'articulation sphérique reliée à la i -ème patte doit être conçu de telle sorte que l'on ait $\alpha_1 > \beta_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Ceci permet de maximiser les débattements angulaires de la plate-forme mobile autour de l'axe z . Étant donné que $\beta_i = 35^\circ$, un compromis pertinent consiste en le choix $\alpha_1 = 45^\circ$. Finalement, nous aboutissons à un sous-ensemble des paramètres d'optimisation tel que $r = 504 \text{ mm}$ ($r = 2.4 b$), $\alpha_1 = 45^\circ$ ($\phi_{av} = 28^\circ$) and $\alpha_2 = 0^\circ$ (voir la figure 3.3).

Le volume maximal de l'espace atteignable à orientation constante correspondant est égal à 0.055 m^3 . Le volume de cet espace est 3 fois plus important que celui correspondant à la géométrie initiale du prototype montré à la figure 1.7. L'espace atteignable à orientation constante résultant, sur lequel est superposé une section dans le plan (x, y) du cylindre de singularités (cercle en pointillés) est représenté à la figure 3.4. Il a été remarqué, lors de la génération de cet espace, que la violation de contrainte décrite par l'équation (3.9) ne s'est jamais produite. Dans ce cas, la contrainte due aux débattements angulaires limités des articulations sphériques est la contrainte limitant le plus le volume de l'espace de travail.

Par suite, il est important de mettre en avant que, pour ce type de mécanisme possédant 3 pattes, le fait de négliger, lors de la détermination numérique des frontières de l'espace atteignable à orientation constante, la contrainte due aux débattements angulaires limités des articulations sphériques aurait conduit à un volume maximal de 0.085 m^3 pour un sous-ensemble des paramètres d'optimisation tel que $\alpha_1 = 58^\circ$ and $r = 2.2 b$. Dans ce cas, le volume serait donc beaucoup plus important et correspondrait à une approximation relativement grossière de l'ensemble des points atteignables en pratique par l'effecteur. Ainsi le fait de négliger ces contraintes mécaniques lors de la détermination de l'espace atteignable à orientation constante peut introduire des erreurs significatives et conduire par conséquent à un design réalisable en pratique mais néanmoins non-optimal du mécanisme.

3.4 Espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés

Dans cette section, nous considérons un domaine d'application différent du mécanisme, c'est-à-dire dans une optique où celui-ci serait utilisé comme structure de base pour un simulateur de vol. Dans ce cas, il est bien connu que, parmi les 6 degrés de liberté de la plate-forme mobile, les débattements angulaires en *roulis* et en *tangage* ainsi que le débattement vertical selon l'axe z doivent être maximisés. Dans ce contexte, nous présentons un algorithme permettant la génération puis la visualisation d'un espace atteignable tridimensionnel lorsque la position (x, y) de l'effecteur ainsi que la position angulaire en lacet ψ sont considérés constantes. Par suite, un deuxième algorithme d'optimisation permettant la maximisation du volume d'un tel espace de travail sera développé. Il est à noter que cette procédure, présentée ici pour un manipulateur à 3 pattes pouvant être équilibré statiquement, peut être intégrée dans le processus de conception de mécanismes parallèles présentant une topologie plus générale, par exemple les architectures de type $6-(RR)\underline{P}S$ et $6-\underline{R}(RR)S$ (figure 1.2), dont les structures sont plus populaires et le plus couramment utilisées dans les domaines respectifs des simulateurs de mouvement et des machines-outils.

3.4.1 Choix de la convention des angles d'Euler

Une des problématiques majeures pour la représentation et le calcul du volume d'un tel espace où degrés de libertés en translation et en rotation sont couplés est le choix des coordonnées décrivant l'orientation de la plate-forme mobile. Le fait d'utiliser la représentation basée sur les *angles d'Euler standards* telle que décrite par l'équation (1.1) conduirait à une représentation complexe de cet espace, ceci étant dû à la nature couplée des angles ϕ et ψ . Néanmoins, il a été montré par Bonev et Ryu [66] qu'il est possible de résoudre ce problème en introduisant une représentation basée sur les *angles d'Euler modifiés*. Pour cette nouvelle représentation de l'orientation, une rotation arbitraire de la plate-forme mobile sera décomposée ici en une première rotation de celle-ci autour de l'axe fixe z d'un angle $(-\phi)$, puis une rotation autour de l'axe fixe y d'un angle θ , ensuite une rotation autour de l'axe z d'un angle ϕ et finalement une rotation d'un angle ψ autour de l'axe mobile z_p . Pour cette convention particulière des angles d'Euler, la matrice de rotation \mathbf{Q}

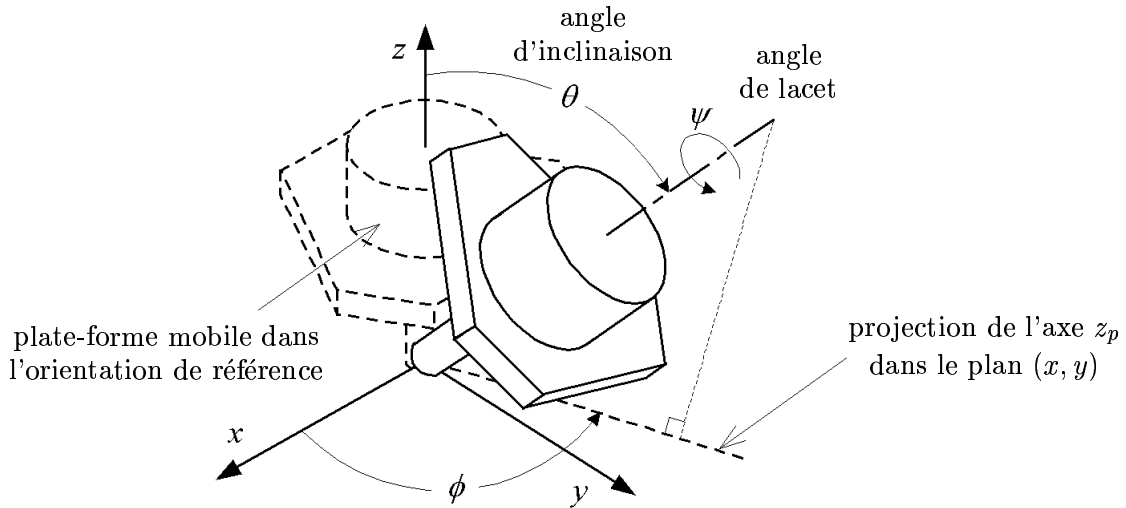


Fig. 3.5: Représentation de l'orientation de la plate-forme mobile du manipulateur basée sur les angles d'Euler modifiés (Bonev et Ryu [66]).

est définie par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_z(\phi) \mathbf{Q}_y(\theta) \mathbf{Q}_z(-\phi) \mathbf{Q}_{z_p}(\psi) = \mathbf{Q}_z(\phi) \mathbf{Q}_y(\theta) \mathbf{Q}_z(\psi - \phi) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos(\psi - \phi) & -\cos \phi \cos \theta \sin(\psi - \phi) & \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \sin(\psi - \phi) & -\sin \phi \cos(\psi - \phi) & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos(\psi - \phi) & -\sin \phi \cos \theta \sin(\psi - \phi) & \sin \phi \sin \theta \\ +\cos \phi \sin(\psi - \phi) & +\cos \phi \cos(\psi - \phi) & \cos \theta \\ -\sin \theta \cos(\psi - \phi) & \sin \theta \sin(\psi - \phi) & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Cette convention particulière des angles d'Euler possède une singularité de formulation pour $\theta = 0^\circ$. Cette représentation, illustrée à la figure 3.5, permet également d'associer à chacune des trois rotations élémentaires une signification physique claire. Ainsi, l'angle de lacet ψ décrit toujours, quelle que soit la valeur des angles ϕ et θ , la rotation de la plate-forme mobile autour de son axe propre de symétrie z_p . C'est donc exactement cette rotation qui n'est pas prépondérante dans le cas des simulateurs de vol et que nous pouvons considérer constante lors de l'optimisation.

Par suite, lorsque la plate-forme mobile est dans une orientation (ϕ, θ, ψ) , l'orientation équivalente décrite en utilisant les angles d'Euler standards sera simplement décrite par $(\phi, \theta, \psi - \phi)$ et la correspondance entre les deux conventions est donc relativement directe. Comme nous le verrons dans la suite du présent chapitre, l'utilisation des angles d'Euler modifiés nous permettra de représenter l'espace atteignable à x, y et ψ constants comme

un volume ayant une forme simple et compacte.

3.4.2 Modification du sous-ensemble des contraintes à considérer

Dans la méthode de discrétisation permettant la génération de l'espace atteignable à x , y et ψ constants, toutes les contraintes mécaniques décrites par les équations (3.3), (3.4), (3.7) et (3.8) sont toujours considérées. Nous devons également prendre en compte la contrainte cinématique donnée par l'équation (3.10), qui, pour la convention basée sur les angles d'Euler modifiés, est réécrite sous la forme :

$$\psi - \phi > 0 \quad (3.18)$$

Néanmoins, étant donné la forme complexe du déterminant de la matrice jacobienne $\det(\mathbf{J}) = P_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile, c'est-à-dire pour une matrice quelconque \mathbf{Q} , il est très difficile d'obtenir une expression analytique des lieux de singularités pour le cas où les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés (cf. Ebert-Uphoff et Gosselin [53]). Par conséquent, une approche différente est envisagée : au lieu de calculer explicitement les points pour lesquels $P_{\mathbf{Q}}(x, y, z) = 0$, nous identifions numériquement la région de l'espace pour laquelle il est garanti que $P_{\mathbf{Q}}(x, y, z) \neq 0$. Plus spécifiquement, ceci est accompli en incluant la contrainte cinématique suivante dans l'algorithme de discrétisation :

$$\det(\mathbf{J}) > 0 \quad (3.19)$$

où la matrice jacobienne \mathbf{J} a été déterminée à la section 2.2. En effet, il a été trouvé numériquement que le déterminant $P_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ est strictement positif à l'intérieur de la région de l'*espace complet* du manipulateur ne contenant aucune singularité.

3.4.3 Optimisation basée sur la maximisation du volume du nouvel espace atteignable

Nous présentons maintenant l'algorithme de discrétisation permettant la détermination et la visualisation de l'espace atteignable à x , y et ψ constants. Cet algorithme est une version modifiée de celui introduit par Bonev et Ryu [66], permettant la détermination de l'*espace en orientation* de manipulateurs parallèles de type 6- $\underline{P}(RR)S$, pour lequel l'angle ψ est substitué à la coordonnée z . L'espace atteignable sera par conséquent représenté dans

un système de coordonnées cylindriques, où les angles ϕ et θ représentent les coordonnées polaires et l'altitude correspond exactement à la coordonnée z . Soient x_c , y_c et ψ_c les valeurs constantes des coordonnées généralisées x , y et ψ . Finalement, soit z_f la coordonnée en z d'un point dont nous savons que l'altitude est telle qu'il est situé au-dessus de l'espace à x , y et ψ constants. Nous pouvons, dans le cas de l'architecture parallèle à 3 pattes étudiée, considérer par exemple

$$z_f = \max_i(\ell_{i1} + \ell_{i5}) , i = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

Par suite, l'algorithme est tel que décrit ci-après.

3.4.3.1 Algorithme de détermination de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés

(Phase I) Détermination de la partie supérieure de l'espace atteignable :

- S1.** Poser $\psi = \psi_c$, $x = x_c$, $y = y_c$. Définir un maillage linéaire le long de l'axe z dont l'origine a pour coordonnée $z = 0$. Les noeuds du maillage, uniformément répartis, décrivent la position de la plate-forme mobile à l'intérieur de l'espace de travail du mécanisme. Par suite, le PGI est résolu et les équations (3.3), (3.4), (3.7) et (3.8) sont employées afin de détecter les violations de contraintes mécaniques pour chaque noeud du maillage. En utilisant les résultats obtenus en testant chacune de ces positions, la coordonnée $z = z_c$ correspondant approximativement à l'altitude du centre O_c de l'espace atteignable à x , y et ψ constants est déterminée.
- S2.** Initialiser les matrices $\mathbf{W}_{\phi,u}$ et $\mathbf{W}_{\theta,u}$, de dimensions $(n_z/2 + 1) \times n_\phi$, où (i) $n_z + 1$ décrit le nombre de plans équidistants, définis par $z = const$ entre les altitudes $z = 0$ et $z = z_f$, pour lesquels l'espace atteignable est déterminé et (ii) n_ϕ décrit le nombre de points devant être déterminés dans chaque plan $z = const$. Ces matrices contiennent respectivement les valeurs des angles ϕ and θ décrivant les points de la frontière de la partie supérieure de l'espace atteignable dans un système de coordonnées polaires à altitude constante.
- S3.** Poser $z = z_c$. Considérer que le point de coordonnées $(\phi_c, \theta_c) = (0^\circ, 0^\circ)$ est le centre de la section horizontale de l'espace atteignable pour l'altitude $z = z_c$.
- S4.** Pour l'altitude courante z , construire un système de coordonnées polaires ayant pour origine le point (ϕ_c, θ_c) . Ce système permet de créer un maillage polaire de chaque

plan à altitude constante. Pour chacune des n_ϕ positions angulaires uniformément réparties, incrémenter le rayon suivant une ligne radiale du maillage, résoudre le PGI et employer les équations de vérification des contraintes mécaniques (3.3), (3.4), (3.7), (3.8) et (4.25) jusqu'à détection d'une violation de contrainte. Les valeurs des angles ϕ et θ aux points de violations de contraintes sont ensuite stockées dans les matrices $\mathbf{W}_{\phi,u}$ et $\mathbf{W}_{\theta,u}$.

- S5.** Déterminer le centre de la section horizontale résultante de l'espace atteignable, de coordonnées (ϕ_c, θ_c) . Ce point est utilisé comme le centre approximatif de la prochaine section à altitude constante. Si $z = 0$, enregistrer la position géométrique du centre de la section, répéter seulement une fois l'étape 4 en utilisant la position du nouveau centre et aller ensuite à l'étape 6.
- S6.** Poser $z = z + z_f/n_z$.
- S7.** Répéter les étapes 4 à 6 jusqu'à ce que la section horizontale de l'espace atteignable dégénère en un point unique (le sommet supérieur d'altitude z_{\max} est atteint).

(Phase II) Détermination de la partie inférieure de l'espace atteignable :

- S8.** Initialiser les matrices $\mathbf{W}_{\phi,l}$ et $\mathbf{W}_{\theta,l}$, de dimensions $(n_z/2) \times n_\phi$.
- S9.** Poser $z = z_c - z_f/n_z$. Assigner aux angles (ϕ_c, θ_c) les valeurs qui ont été enregistrées à l'étape 5 pour $z = z_c$.
- S10.** Exécuter la séquence telle que décrite à l'étape 4. Les valeurs des angles ϕ et θ aux points de violations de contraintes sont stockés dans les matrices $\mathbf{W}_{\phi,l}$ et $\mathbf{W}_{\theta,l}$.
- S11.** Déterminer le centre de la section horizontale résultante de l'espace atteignable, de coordonnées (ϕ_c, θ_c) . Ce point est utilisé comme le centre approximatif de la prochaine section à altitude constante.
- S12.** Poser $z = z - z_f/n_z$.
- S13.** Répéter les étapes 10 à 12 jusqu'à ce que (i) l'altitude z devienne négative ou (ii) la dernière section de l'espace dégénère en un point unique (le sommet inférieur d'altitude z_{\min} est atteint).

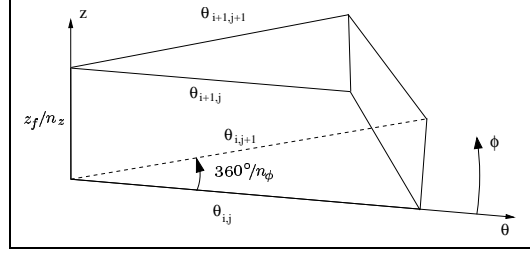


Fig. 3.6: Secteur defini par quatre noeuds adjacents de l'espace atteignable à x , y et ψ constants.

(Phase III) Traitement matriciel des données et visualisation :

- S14.** Transférer les valeurs contenues dans les matrices $\mathbf{W}_{\phi,u}$ et $\mathbf{W}_{\phi,l}$ dans la matrice \mathbf{W}_{ϕ} , et celles contenues dans les matrices $\mathbf{W}_{\theta,u}$ et $\mathbf{W}_{\theta,l}$ dans la matrice \mathbf{W}_{θ} , de dimensions $N_z \times n_{\phi}$, où $N_z = (z_{\max} - z_{\min}) / (z_f / n_z) + 1$.
- S15.** Transférer les valeurs contenues dans les deux matrices \mathbf{W}_{ϕ} et \mathbf{W}_{θ} dans les matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} , et \mathbf{Z} , de telle sorte que $\mathbf{X}[i, j] = \mathbf{W}_{\theta}[i, j] \cos(\mathbf{W}_{\phi}[i, j])$, $\mathbf{Y}[i, j] = \mathbf{W}_{\theta}[i, j] \sin(\mathbf{W}_{\phi}[i, j])$, et $\mathbf{Z}[i, j] = z_{\max} - (i - 1)(z_f / n_z)$, où $i = 1, \dots, N_z$ et $j = 1, \dots, n_{\phi}$, et $\mathbf{X}[i, j] = \mathbf{X}[i, 1]$, $\mathbf{Y}[i, j] = \mathbf{Y}[i, 1]$, et $\mathbf{Z}[i, j] = \mathbf{Z}[i, 1]$, où $i = 1, \dots, N_z$ et $j = n_{\phi} + 1$.
- S16.** Représenter graphiquement la surface fermée dont les noeuds sont définis dans l'espace cartésien par les matrices \mathbf{X} , \mathbf{Y} , et \mathbf{Z} .

Par suite, nous utilisons l'algorithme développé ci-après afin de maximiser le volume V_2 de l'espace atteignable à x , y et ψ constants. Pour cette optimisation, nous considérons toujours le sous-ensemble de paramètres géométriques (α_1, α_2, r) .

3.4.3.2 Algorithme utilisé pour la seconde optimisation

- S1.** Initialiser le tableau tridimensionnel \mathbf{V}_2 , ayant pour dimension $(n_{\alpha_1} \times n_{\alpha_2} \times n_r)$, où n_{α_1} , n_{α_2} et n_r sont respectivement les nombres d'incrémentes correspondants aux paramètres d'optimisation α_1 , α_2 et r .
- S2.** Initialiser les paramètres d'optimisation $\alpha_1 = \alpha_{1,min}$, $\alpha_2 = \alpha_{2,min}$ et $r = r_{min}$ dont l'indexation commence à 1 dans le tableau \mathbf{V}_2 .
- S3.** Pour le sous-ensemble courant de paramètres (α_1, α_2, r) , résoudre l'équation (3.14) afin de déterminer la valeur angulaire moyenne $\psi = \psi_{av}$ (cette valeur doit également

satisfaire l'équation (3.18)). En effet, la convention angulaire basée sur les angles d'Euler modifiés impose que l'angle ϕ est remplacé par l'angle $(\psi - \phi)$. Par suite, la génération de l'espace atteignable se fait autour de l'orientation de référence pour laquelle on a $\phi_{av} = 0$.

S4. Utiliser l'Algorithme de calcul de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés (étapes 1 à 14) présenté préalablement afin de déterminer l'espace atteignable à x , y et ψ constants pour le sous-ensemble de paramètres géométriques courant (α_1, α_2, r) et le triplet de coordonnées généralisées $(x, y, \psi) = (0, 0, \psi_{av})$.

S5. Calculer le volume $V_{i,j}$ de chaque secteur défini par les quatre noeuds adjacents de l'espace atteignable $\mathbf{W}_\theta[i, j] = \theta_{i,j}$ (voir la figure 3.6), approximé sous la forme :

$$V_{i,j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_f \\ n_z \end{pmatrix} \theta_j \theta_{j+1} \sin\left(\frac{2\pi}{n_\phi}\right), \quad (3.21)$$

où $\theta_j = (\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j})/2$ et $\theta_{j+1} = (\theta_{i,j+1} + \theta_{i+1,j+1})/2$. Déterminer ensuite le volume V_2 de l'espace atteignable tridimensionnel complet en sommant les volumes élémentaires de tous les secteurs. La valeur correspondante du volume de l'espace atteignable est stockée dans le tableau tridimensionnel \mathbf{V}_2 .

S6. Répéter les étapes 3 à 5 pour toutes les combinaisons possibles des paramètres d'optimisation (α_1, α_2, r) .

S7. Représenter graphiquement les données obtenues afin de déterminer le sous-ensemble optimal des paramètres (α_1, α_2, r) pour lequel le volume de l'espace atteignable à x , y et ψ constants du manipulateur étudié est maximal.

3.4.4 Résultats

Ce second algorithme d'optimisation a également été implémenté en code MATLAB en considérant les données fournies dans le tableau 3.1 ainsi que les pas incrémentaux $n_\phi = 61$, $n_\theta = 60$ et $n_z = 150$. Par suite, nous avons utilisé une procédure similaire à celle que nous avons décrite dans le paragraphe 3.3.3.3. Nous avons remarqué que la valeur maximale du volume V_2 de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés est obtenue lorsque $\alpha_2 = 50^\circ$, ($\forall \{\alpha_1, r\}$).

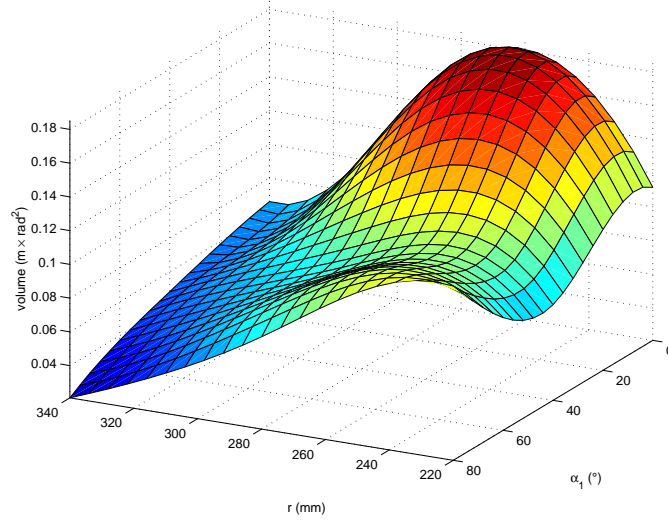


Fig. 3.7: Volume de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés en fonction des paramètres α_1 et r ($\alpha_2 = 50^\circ$).

Ainsi, en considérant la surface définie par l'équation $V_2 = f_{\alpha_2}(\alpha_1, r)$, $\alpha_2 = 50^\circ$, nous avons remarqué que cette courbe contient un extremum local unique au point de coordonnées $r = 260$ mm, c'est-à-dire $r = 1.26 b$ et $\alpha_1 = 8^\circ$ (voir la figure 3.7). Le volume maximal de l'espace atteignable correspondant est égal à 0.190 mrad^2 . L'espace atteignable à x , y et ψ constants correspondant est représenté à la figure 3.8. Cette représentation particulière de l'orientation basée sur la convention des angles d'Euler modifiés combinée à l'algorithmique développée dans cette section permet par conséquent de représenter cet espace comme un volume ayant une forme simple et compacte. De plus, les intersections entre les différents *espaces de sommets* élémentaires sont très bien définies et faciles à visualiser. La représentation dans un système de coordonnées cylindriques permet finalement une lecture rapide des débattements couplés en rotation et en translation possibles en pratique, et ce lors d'une phase préliminaire du processus de design de ce type d'architectures parallèles.

3.5 Cartographie de la dextérité et discussion des résultats

Les caractéristiques des géométries du mécanisme résultantes des deux optimisations sont résumées dans le tableau 3.2. Prenant ces résultats en considération, nous remarquons que le fait de maximiser le volume V_1 de l'espace atteignable à orientation constante conduit à

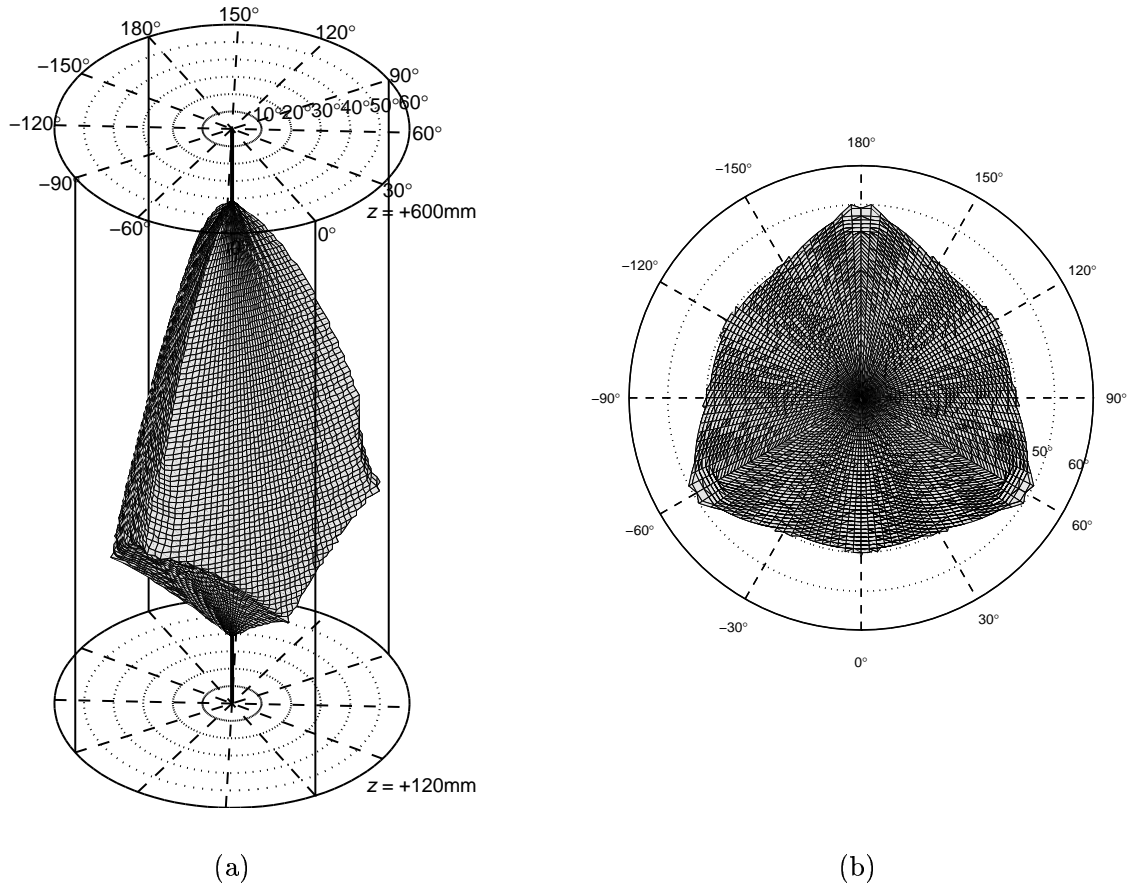
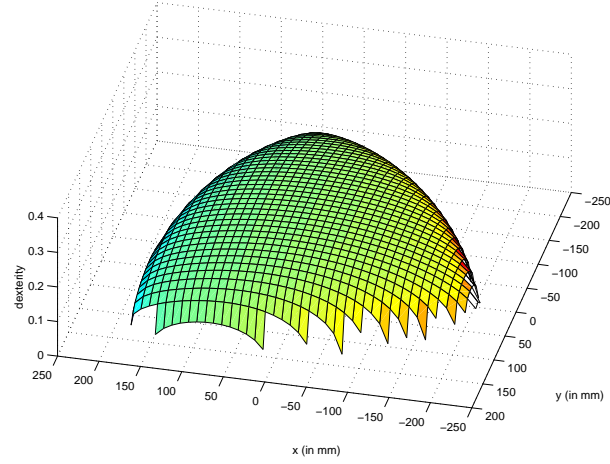
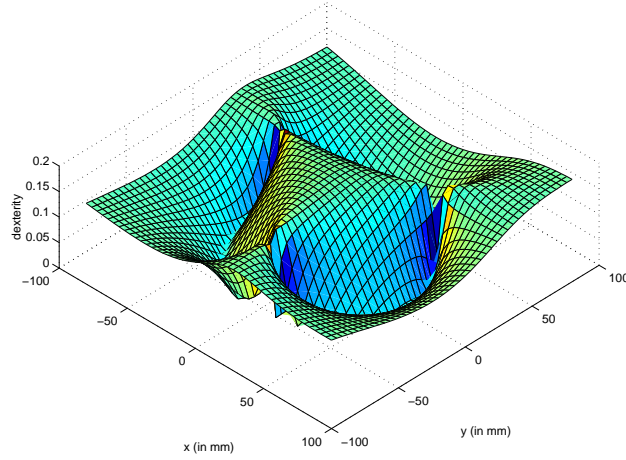


Fig. 3.8: (a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés dont le volume est maximal $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (8^\circ, 50^\circ, 260 \text{ mm})$, $(x, y, \psi) = (0 \text{ mm}, 0 \text{ mm}, 1.5^\circ)$.

des valeurs de l'ensemble des paramètres géométriques (α_1, α_2, r) sensiblement différents de ceux obtenus suite à la maximisation du volume de l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés. De plus, si l'on considère les surfaces permettant de cartographier la dextérité du manipulateur dans le plan (x, y) , avec $z = 200 \text{ mm}$, $(\phi, \theta, \psi) = (15^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$, telles que montrées à la figure 3.9, nous remarquons que la première optimisation conduit à une dextérité homogène sur l'espace atteignable dans le plan (x, y) à altitude constante, dont la valeur moyenne est approximativement égale à 0.25. Cette valeur moyenne de la dextérité est très satisfaisante pour toute application pratique du mécanisme en tant que système de positionnement. Par contre, le fait de réaliser une optimisation basée sur la maximisation du volume de l'espace atteignable à x, y et ψ constants, a pour conséquence que les débattements de l'effecteur dans le plan (x, y) sont réduits de façon substantielle, ceci étant dû à une dégénérescence locale



(a)



(b)

Fig. 3.9: Cartographies de la dextérité du manipulateur dans le plan (x, y) calculées respectivement pour (a) $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (45^\circ, 0^\circ, 504 \text{ mm})$ et (b) $(\alpha_1, \alpha_2, r) = (8^\circ, 50^\circ, 260 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (15^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$.

de la dextérité du mécanisme autour de la surface cylindrique de singularités définie par l'équation (3.9). Une telle observation, malgré qu'elle soit très limitative et impose de considérer ces configurations singulières lors de futures planifications de trajectoires, ne remet pas en question les propriétés intéressantes de la géométrie obtenue en vue d'une application comme structure de base pour un simulateur de vol. Finalement, à la lumière des résultats de l'optimisation, il a été choisi que le design du prototype initial serait modifié en correspondance avec les résultats de la première optimisation. En effet, nous voulons être en mesure de valider l'équilibrage statique du manipulateur en effectuant des mouvements de translation de grange amplitude. Ce choix s'explique également par

le fait que les singularités du manipulateur pour le cas d'actionnement considéré ont été obtenues sous une forme très compacte lorsque l'orientation de la plate-forme mobile est prescrite³. Le mécanisme sera donc utilisé et validé comme système de positionnement d'objets possédant une masse importante.

Données géométriques	Prototype initial	Première optimisation	Deuxième optimisation
r en [mm]	280.000	504.000	260.000
α_2 en [°]	45.000	0.000	50.000
α_1 en [°]	0.000	45.000	8.000
V_1 en [m ³]	0.017	0.055	0.007
V_2 en [m · rad ²]	0.185	0.103	0.190
Δx en [mm]	±60.000	±180.000	±48.000
Δy en [mm]	±60.000	±180.000	±48.000
Δz en [mm]	±180.000	±190.000	±180.000
$\Delta\phi$ en [°]	±42.000	±25.000	±45.000
$\Delta\theta$ en [°]	±42.000	±25.000	±45.000
$\Delta\psi$ en [°]	±15.000	±30.000	±16.000

Tab. 3.2: Données géométriques obtenues suite à l'utilisation des procédures d'optimisation basées sur (1) l'espace atteignable à orientation constante et (2) l'espace atteignable tridimensionnel avec degrés de liberté en translation et en rotation couplés. La notation Δq_i décrit le débattement maximal possible obtenu pour la coordonnée généralisée q_i .

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, deux algorithmes de discrétisation ont été développés visant la maximisation du volume de différents sous-espaces tridimensionnels de l'espace atteignable complet du mécanisme sous la contrainte que la zone de l'espace associé ne doit contenir aucune singularité. Ces algorithmes sont utilisés afin d'optimiser certains paramètres géométriques de l'architecture. Une première méthode d'optimisation basée sur la maximisation du volume de l'espace à orientation constante, c'est-à-dire l'espace cartésien tridimensionnel des points atteignables par l'effecteur pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile,

³voir section 4.2.5 du présent mémoire.

a été développée et nous a permis d'aboutir à un premier design optimal du manipulateur parallèle étudié. Cette optimisation a été réalisée dans la perspective que le manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté équilibré statiquement serait utilisé comme système de positionnement d'objets ayant une masse importante. Les points définissant la frontière de l'espace ont été déterminés en utilisant une méthode de détection de la violation des contraintes mécaniques dans un système de coordonnées sphériques.

Par suite, un algorithme de discrétisation permettant la détermination d'un nouvel espace atteignable, où degrés de liberté en rotation et en translation sont couplés, a été développé en utilisant une convention angulaire basée sur les *angles d'Euler modifiés*. La représentation particulière de l'orientation utilisée combinée à l'algorithmique développée dans cette section a permis la représentation de cet espace comme un volume de forme simple et compacte. Par suite, la maximisation du volume de ce nouvel espace atteignable a conduit à la détermination d'un second sous-ensemble de paramètres géométriques optimaux. Il est apparu que les deux méthodes d'optimisation ont conduit à des géométries particulières de l'architecture présentant des propriétés cinématiques très différentes en terme de dextérité sur leurs espaces de travail respectifs. Finalement, il a été choisi que le design du prototype initial serait modifié en correspondance avec les résultats de la première optimisation.

Ainsi, le fait d'inclure de tels algorithmes très tôt dans le processus de design d'une telle architecture permet de corroborer ou d'invalider les choix de conception, minimisant le besoin de réaliser de nombreux prototypes dont la réalisation est très onéreuse. Ainsi, une telle approche permet de maximiser les performances du système en fonction d'un cahier des charges déterminé. De plus, cette approche inclut la prédiction des configurations singulières et, de ce fait, permet de se prémunir de dégénérescences du contrôle de l'architecture lors de planifications de trajectoires futures.

Finalement, les différents algorithmes développés dans ce chapitre ainsi que les résultats obtenus suite à l'implémentation des deux méthodes d'optimisation ont été présentés dans la référence Monsarrat et Gosselin [69].

Chapitre 4

Analyse des Singularités

Une étude complète des singularités du mécanisme pour différents cas d'actionnement est présentée dans ce chapitre. Les singularités du mécanisme sont tout d'abord étudiées pour le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Pour ce premier cas d'actionnement, une approche basée sur la géométrie des droites de Grassmann nous permettra de déterminer les équations sous forme symbolique des lieux de singularités du mécanisme. Il sera montré que la plupart des configurations singulières se réduisent à la génération d'un complexe général, le lieu des singularités correspondant au complexe général étant constitué, pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, par une surface quadratique, c'est-à-dire soit un cylindre hyperbolique, elliptique ou parabolique, orienté suivant l'axe z . Les configurations singulières correspondant au cas où, pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$, seront ensuite déterminées. Pour ce deuxième cas d'actionnement, le mécanisme est cinématiquement équivalent à une structure parallèle de type 3-RRRS. Pour cette seconde étude, nous utiliserons la méthode classique basée sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne, réalisée via le logiciel Maple. Il sera montré que l'équation du lieu correspondant aux singularités de type II pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile est un polynôme dont le degré maximal des termes en x et y est 4, et dont le degré maximal des termes en z est 3. Les équations obtenues seront implémentées sous MATLAB et diverses représentations graphiques de ces lieux de singularités, superposées à l'espace à orientation constante du manipulateur, seront également fournies.

4.1 Introduction

LA détermination des lieux de singularités du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pouvant être équilibré statiquement a déjà fait l'objet d'une étude présentée par Ebert-Uphoff et Gosselin [53]. Néanmoins, cette référence a permis de dériver le lieu des singularités de cette classe de mécanisme sous forme analytique uniquement dans le cas où (i) pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$, $i = 1, 2$ et 3 (voir la figure 1.8) et (ii) la plate-forme mobile est parallèle à la base. La détermination du lieu des singularités de ce type de mécanisme pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile n'a donc pas encore été traité pour cette classe de mécanismes parallèles.

Le présent développement poursuit donc avec la caractérisation géométrique et analytique complète des lieux de singularités de ce mécanisme possédant 3 chaînes cinématiques fermées. Comme nous l'avons déjà montré dans le chapitre précédent, la détermination de telles configurations est une problématique cruciale devant être prise en compte lors du processus de design afin de maximiser les performances cinématiques du système. En pratique, de telles dégénérescences instantanées de la cinématique conduisent à un changement du nombre de degrés de liberté du manipulateur ainsi qu'à une dégradation des propriétés de rigidité pouvant induire une augmentation incontrôlable des couples et/ou des forces générés au niveau des actionneurs. Dans les deux cas, la précision du contrôle du mécanisme sera affectée de manière critique.

Comme il a été montré à travers les recherches présentées par Gosselin et Angeles [71], Gosselin et Sefrioui [72], Gosselin et Wang [73] et Mayer St-Onge et Gosselin [74], une première approche consiste en la détermination des lieux de singularités de manipulateurs parallèles en utilisant les expressions analytiques du déterminant de la matrice jacobienne. Les configurations singulières ont été classifiées en trois catégories principales : (i) Type I : la posture de la plate-forme mobile est telle qu'une dégénérescence de la matrice jacobienne de la chaîne cinématique ouverte, constituant l'une des pattes de l'architecture, se produit. Cette famille de singularités contient donc les configurations dans lesquelles l'effecteur du manipulateur parallèle se trouve sur la frontière de son espace de travail, (ii) Type II : le degré de mobilité de la plate-forme mobile augmente d'un ou plusieurs degrés de liberté, c'est-à-dire que l'effecteur peut effectuer un mouvement infinitésimal

lorsque toutes les articulations actionnées sont immobiles, (iii) Type III : une ou plusieurs des chaînes cinématiques constituant les pattes du mécanisme peuvent effectuer un mouvement d'amplitude finie lorsque toutes les articulations actionnées sont immobiles ou un mouvement d'amplitude finie au niveau des actionneurs ne produit aucun mouvement au niveau de l'effecteur. Cette classification a été généralisée récemment par Zlatanov *et al.* [75, 76]. Dans ces dernières références, un cadre théorique général permettant l'analyse des singularités de mécanismes non-redondants a été développé. Six types de configurations singulières, reflétant les différentes possibilités de dégénérescences des cinématiques directe et inverse, ont été définies. Par suite, l'approche basée sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne a été illustrée par Gosselin et Sefrioui [72] et par Collins et McCarthy [77] avec l'analyse de manipulateurs parallèles plans de type 3- $R\underline{P}R$. Cette approche a également été utilisée par Gosselin and Wang [73] et Bonev et Gosselin [78] afin de déterminer sous forme analytique les lieux de singularités de mécanismes parallèles plans de type 3- $R\underline{R}R$. De plus, une procédure identique a été implémentée par Mayer St-Onge et Gosselin [74] et Wang [79] afin d'obtenir les équations des lieux de singularités de la plate-forme de Gough-Stewart, c'est-à-dire de type 6- $(RR)\underline{P}S$.

Néanmoins, les topologies particulières de certaines architectures parallèles peuvent, dans certains cas, imposer que l'expression symbolique du déterminant de la matrice jacobienne est obtenue sous une forme inexploitable en pratique du fait de la quasi-impossibilité de découpler coordonnées articulaires et cartésiennes dans ces équations. Ainsi, après substitution des coordonnées des articulations rotoïdes actives et passives par les coordonnées cartésiennes en utilisant les équations du problème géométrique inverse dérivées à la section 2.1, l'expression symbolique du déterminant de la matrice jacobienne du manipulateur étudié est très complexe. De ce fait, la méthode basée sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne n'est pas adaptée à l'analyse des singularités de l'architecture parallèle dont les 3 pattes sont constituées de mécanisme à 5 barres, pour le cas où les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés pour chaque patte.

Dans ce contexte, l'approche développée dans la partie 4.2 du présent chapitre pour l'analyse des singularités pour ce cas d'actionnement, c'est-à-dire pour l'architecture parallèle dont le modèle CAO est montré à la figure 1.6, est basée sur la méthodologie présentée initialement par Merlet [15, 80] et Mouly et Merlet [81]. Dans ces références, les singularités de manipulateurs parallèles de type 6- $(RR)\underline{P}S$ et 6- $\underline{P}(RR)S$ ont été étudiées en

utilisant la géométrie des droites de Grassmann. Cette procédure conduit à une liste exhaustive des conditions géométriques pour lesquelles des configurations singulières sont rencontrées. Une telle analyse permet la caractérisation des dégénérescences de la matrice jacobienne de manipulateurs parallèles correspondant à des singularités de type II, en référence à la classification développée par Gosselin et Angeles [71]. Les travaux récents de Hao et McCarthy [82] ont également permis la spécification des caractéristiques du design des manipulateurs parallèles garantissant que seules existent, pour un mécanisme donné, des singularités dues à des configurations particulières des lignes de Grassmann associées. En d'autres termes, l'étude des singularités peut être menée en ne considérant que des visseurs de pas nul, c'est-à-dire uniquement des droites de l'espace cartésien. Une classification complète des sous-ensembles de droites linéairement dépendantes, référés également par *variétés de Grassmann*, est également fournie en utilisant les notations introduites par Merlet dans la référence [15].

Néanmoins, il a été montré dans la référence Zlatanov *et al.* [75] que l'existence d'une matrice jacobienne inversible n'est pas une condition suffisante garantissant la non-existence de singularités, à moins que les équations reliant les vitesses des articulations actionnées et passives ne soient définies. Par conséquent, nous présenterons également une analyse permettant la détermination de lieux de singularités additionnels correspondant à une posture de la plate-forme mobile pour laquelle la matrice de dimension (3×6) reliant les vitesses des articulations actionnées et celles des articulations passives n'est pas définie.

4.2 Étude géométrique des singularités du manipulateur pour le premier cas d'actionnement

La présente section présente donc une analyse des singularités de l'architecture parallèle à 3 pattes pour laquelle les articulations rotoïdes correspondant aux angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnées, c'est-à-dire possédant une structure identique à celle du prototype tel que montré à la figure 1.7. L'architecture considérée est donc constituée de trois chaînes cinématiques, reliant la base à la plate-forme mobile, contenant chacune deux actionneurs, dont les axes de rotation sont perpendiculaires au plan de chacune des pattes. Les axes des six articulations rotoïdes actionnées du manipulateur restent de ce fait toujours parallèles au plan (x, y) de la base.

La présente section est organisée comme suit. Nous reformulerons tout d'abord les équations cinématiques déterminées à la section 2.2 et les vecteurs de Plücker associés aux six articulations actionnées seront dérivés. Par suite, les dépendances linéaires entre les droites de Grassmann correspondantes seront étudiées et les configurations singulières seront décrites en utilisant des conditions géométriques simples. Ces conditions nous permettront d'obtenir les équations symboliques des lieux de singularités. Il sera montré que la plupart des configurations singulières se réduisent à la génération d'un complexe général, le lieu des singularités correspondant au complexe général étant constitué, pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, par une surface quadratique, c'est-à-dire soit un cylindre hyperbolique, elliptique ou parabolique, orienté suivant l'axe z . Finalement, des configurations singulières additionnelles, associées à la non-existence de la matrice (3×6) définie préalablement, seront obtenues. Afin d'illustrer clairement les résultats, plusieurs représentations graphiques planes et spatiales de ces lieux de singularités, superposées à l'espace à orientation constante du manipulateur, seront fournies.

4.2.1 Reformulation des équations cinématiques du manipulateur

Dans cette partie, nous considérons donc les équations cinématiques générales obtenues à la section 2.2 que nous adaptons pour l'analyse des singularités d'un mécanisme à 3 pattes dont l'actionnement est tel que les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés pour chaque patte. Soit $\dot{\mathbf{x}}$ le vecteur contenant les vitesses généralisées du mécanisme, c'est-à-dire $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{\mathbf{p}}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T$. En utilisant les équations (2.15), (2.24), (2.25) et (2.29), nous pouvons obtenir directement une expression de la relation vectorielle entre les vitesses des articulations rotoïdes actionnées $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ et les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{x}}$ du mécanisme dans le cas particulier où, pour chaque patte i , $i = 1, 2, 3$, les angles actionnés sont θ_{i2} et θ_{i3} . Cette relation vectorielle est obtenue sous une forme particulière ne contenant aucun terme au dénominateur, c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \left[\dot{\theta}_{12} \ \dot{\theta}_{22} \ \dot{\theta}_{32} \ \dot{\theta}_{13} \ \dot{\theta}_{23} \ \dot{\theta}_{33} \right]^T \quad (4.2)$$

Nous définissons les deux vecteurs auxiliaires unitaires \mathbf{n}_{i2} et \mathbf{n}_{i3} tels que :

$$\mathbf{n}_{i2} = (\ell_{i5} \sin \Delta\theta_{i3}) \mathbf{v}_{i2} = \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{Q}_{i3} \mathbf{j} \quad (4.3)$$

et,

$$\mathbf{n}_{i3} = (-\ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3}) \mathbf{v}_{i3} = \mathbf{Q}_{i1} \mathbf{Q}_{i2} \mathbf{j} \quad (4.4)$$

avec $\mathbf{j} = [0 \ 1 \ 0]^T$. Les vecteurs \mathbf{n}_{i2} et \mathbf{n}_{i3} sont colinéaires aux vecteurs \mathbf{v}_{i2} et \mathbf{v}_{i3} tels qu'obtenus respectivement aux équations (2.24) et (2.25). L'introduction des vecteurs \mathbf{n}_{i2} et \mathbf{n}_{i3} nous permet d'obtenir chacune des lignes de la matrice jacobienne \mathbf{A}_1 sous une forme *normalisée*. En référence à la terminologie introduite initialement dans la référence Gosselin et Angeles [71], les matrices \mathbf{A}_1 et \mathbf{B}_1 sont les matrices jacobiennes de dimension (6×6) qui, pour le mécanisme étudié, sont données par les expressions suivantes :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{12}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \mathbf{n}_{12})^T \\ \mathbf{n}_{22}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \mathbf{n}_{22})^T \\ \mathbf{n}_{32}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \mathbf{n}_{32})^T \\ \mathbf{n}_{13}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \mathbf{n}_{13})^T \\ \mathbf{n}_{23}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \mathbf{n}_{23})^T \\ \mathbf{n}_{33}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \mathbf{n}_{33})^T \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}_1 = \text{diag}(b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{13}, b_{23}, b_{33}) \quad (4.6)$$

où les coefficients b_{i2} et b_{i3} sont donnés par, pour $i = 1, 2, 3$:

$$b_{i2} = -\ell_{i5} \sin \Delta\theta_{i3} \quad \text{et} \quad b_{i3} = \ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3} \quad (4.7)$$

4.2.2 Singularités de types I et II

Type I : Les configurations singulières correspondant à des singularités de type I sont celles se produisant lorsque :

$$\det(\mathbf{B}_1) = \prod_{i=1}^3 (-\ell_{i5} \sin \Delta\theta_{i3}) \prod_{i=1}^3 (\ell_{i1} \sin \Delta\theta_{i3}) = 0 \quad (4.8)$$

Mathématiquement, cette condition conduit à :

$$\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.9)$$

Cette condition définit en fait, pour chaque patte i , les sphères minimale et maximale dont les rayons sont respectivement $(\ell_{i5} - \ell_{i2})$ et $(\ell_{i5} + \ell_{i1})$, et dont la position commune des

centres est donnée, dans le repère fixe R , par le vecteur $(\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{Q}\mathbf{b}_i)$. L'intersection de ces sphères minimales et maximales constitue la frontière de l'espace à orientation constante du manipulateur.

Type II : Les singularités appartenant au type II se produisent lorsque la matrice jacobienne \mathbf{A}_1 est singulière, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$\det(\mathbf{A}_1) = 0 \quad (4.10)$$

Les équations du problème géométrique inverse dérivées à la section 2.1 sont ensuite employées afin de réécrire l'équation (4.10) en fonction uniquement des six coordonnées généralisées du manipulateur. Néanmoins, ceci conduit à une expression symbolique du déterminant très complexe. Pour cette raison, les dégénérescences de la matrice \mathbf{A}_1 seront étudiées ici à l'aide d'une procédure géométrique développée dans la suite du présent chapitre.

4.2.3 Coordonnées de Plücker d'une droite dans l'espace

Comme préalable à ce développement, nous rappelons qu'une droite (D) peut être définie dans l'espace cartésien par un vecteur de Plücker. Soient deux points M_1 et M_2 appartenant à cette droite et soit un point O choisi comme origine d'un repère fixe. Soit \mathbf{p}_{12} le vecteur reliant le point M_1 au point M_2 et soit \mathbf{p}_1 le vecteur reliant l'origine O au point M_1 . Par suite, le vecteur de Plücker \mathbf{P}_D associé à la droite (D), de dimension (6×1) , est donné par :

$$\mathbf{P}_D = [\mathbf{p}_{12}^T \quad (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_{12})^T]^T \quad (4.11)$$

Soit \mathbf{U}_{ij} le vecteur de Plücker associé à la j -ème articulation rotoïde actionnée de la i -ème patte du manipulateur étudié. Par conséquent, en considérant l'équation (4.5), nous pouvons directement obtenir une expression pour le vecteur \mathbf{U}_{ij} sous la forme :

$$\mathbf{U}_{ij} = [\mathbf{n}_{ij}^T \quad ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{n}_{ij})^T]^T \quad (4.12)$$

Ceci nous permet de réécrire une expression de la matrice jacobienne \mathbf{A}_1 sous la forme :

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{U}_{12} \quad \mathbf{U}_{22} \quad \mathbf{U}_{32} \quad \mathbf{U}_{13} \quad \mathbf{U}_{23} \quad \mathbf{U}_{33}]^T \quad (4.13)$$

Ainsi, chaque vecteur \mathbf{U}_{ij} de la matrice jacobienne \mathbf{A}_1 peut être associé à une droite donnée qui est complètement caractérisée dans l'espace cartésien. De ce fait, les dégénérescences de

la matrice jacobienne \mathbf{A}_1 sont obtenues lorsque l'un des vecteurs de Plücker associé à une des articulations actionnées est une combinaison linéaire des vecteurs de Plücker restants. Par conséquent, le manipulateur parallèle étudié possédant 3 chaînes cinématiques sera dans une configuration singulière de type II, si, et seulement si, un sous-ensemble généré par n des droites associées à son type d'actionnement possède un rang inférieur à n (Merlet [80]).

Dans le développement présenté ci-après, nous utilisons donc une approche basée sur la géométrie des droites de Grassmann afin de déterminer les coordonnées généralisées de la plate-forme mobile pour lesquelles de telles dépendances linéaires existent entre les six vecteurs de Plücker définis préalablement.

4.2.4 Dépendances linéaires du sous-ensemble de droites correspondantes

Les variétés de n droites dont le rang est inférieur à n ont été étudiées par H. Grassmann et la caractérisation géométrique de chaque variété a également été établie (Dandurand [83]). De plus, les contraintes géométriques correspondant aux divers sous-ensembles de n droites ont été présentées par Merlet [15, 80]. De ce fait, l'analyse des singularités du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté sera conduite en déterminant de manière exhaustive les configurations de la plate-forme mobile pour lesquelles les contraintes sur les variétés de droites de Grassmann sont réalisées. Comme nous l'avons mentionné préalablement, nous faisons ici l'étude du mécanisme pour lequel les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. La figure 4.1 représente, pour la i -ème patte du manipulateur, les deux droites définies par les vecteurs de Plücker \mathbf{U}_{i2} et \mathbf{U}_{i3} .

Soient (d_{i2}) et (d_{i3}) les deux droites définies respectivement par les vecteurs de Plücker \mathbf{U}_{i2} et \mathbf{U}_{i3} . Ces droites ont donc pour vecteurs directeurs les vecteurs \mathbf{n}_{i2} et \mathbf{n}_{i3} tels que définis aux équations (4.3) et (4.4). Soient (d_{i23}) , pour $i = 1, 2, 3$, les droites passant par les points P_{i2} et P_{i3} . En considérant les expressions des vecteurs \mathbf{n}_{i2} et \mathbf{n}_{i3} , nous déduisons que (i) la droite (d_{i2}) est parallèle à la membrure $P_{i2}P_{i3}$, et (ii) la droite (d_{i3}) est parallèle à la membrure $P_{i1}P_{i5}$. De plus, nous déduisons de l'équation (4.12), avec $j = 2$ et 3 , que les droites (d_{i2}) et (d_{i3}) passent toutes deux par le point P_{i5} , \mathbf{Qb}_i étant le vecteur reliant le centre de masse C de la plate-forme mobile au point P_{i5} , exprimé dans le repère fixe R . De ce fait, la droite (d_{i2}) passe par le point P_{i5} et est parallèle à la droite (d_{i23}) . La droite

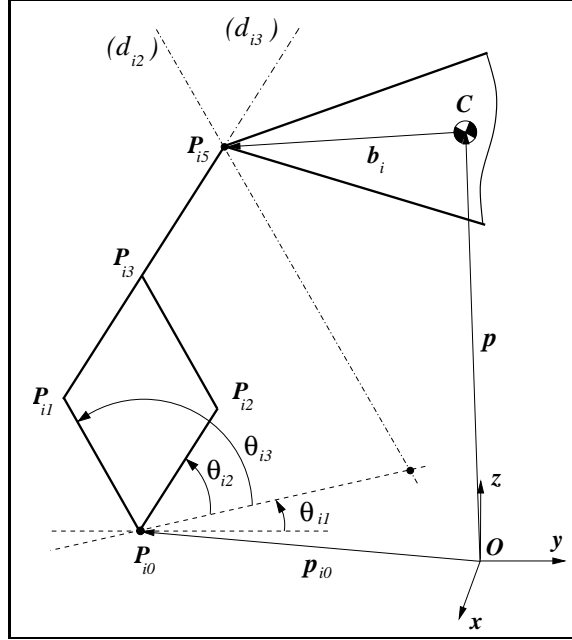


Fig. 4.1: Droites de Grassmann (d_{i2}) et (d_{i3}) associées aux positions angulaires θ_{i2} et θ_{i3} des articulations rotoïdes actionnées de la i -ème patte.

(d_{i3}) passe par les points P_{i5} et P_{i1} (voir la figure 4.1).

Soit (Δ_i) le plan généré par les deux droites de Grassmann (d_{i2}) et (d_{i3}) . La topologie particulière des pattes utilisant des mécanismes à 5 barres impose que, pour une configuration arbitraire de la plate-forme mobile, le plan (Δ_i) contient toutes les membrures de la i -ème patte et reste toujours normal au plan de la base, c'est-à-dire au plan contenant les trois points fixes P_{i0} , $i = 1, 2, 3$.

Par suite, nous implémentons ici une méthodologie similaire à celle ayant été utilisée initialement par Merlet [80] et ayant permis la détermination des configurations singulières de manipulateurs parallèles de type 6- $(RR)\underline{PS}$. Nous référons également le lecteur à l'ouvrage Merlet [1] car celui-ci contient une classification détaillée des différentes variétés de droites de Grassmann. Les notations utilisées dans ces deux dernières références seront également utilisées dans les sections suivantes. Par suite, afin d'étudier les singularités du mécanisme parallèle possédant 3 pattes, nous devons considérer les variétés de droites de rang 1 à 5. Les dépendances linéaires résultantes entre les six droites de Grassmann correspondant à des singularités de type II seront décrites ci-après par des conditions géométriques simples dont l'interprétation physique est relativement directe.

4.2.4.1 Sous-ensembles de deux droites (Condition 1)

Condition 1 : Commençons par l'étude de la variété de droites de rang 1. Dans ce cas, nous obtenons une configuration singulière lorsque deux droites (d_{ij}) sont confondues et forment une droite unique dans l'espace cartésien. Pour le manipulateur étudié, les sous-ensembles constitués de deux droites peuvent être de deux types.

1. Dans le premier cas, les deux droites sont associées à deux articulations rotoïdes actionnées appartenant à la même patte i . Une configuration singulière se produit lorsque deux membrures opposées du parallélogramme de la i -ème patte sont alignées, c'est-à-dire lorsque $(d_{i2}) \equiv (d_{i3})$. Dans de telles configurations, un changement de mode d'assemblage se produit et la patte correspondante perd un degré de liberté. De telles singularités sont typiquement obtenues pour des mécanismes à 4 barres dont la topologie est similaire. Il est intéressant de remarquer que le lieu de singularités correspondant est identique à celui des singularités de type I, lesquelles constituent la frontière de l'espace à orientation constante du manipulateur.
2. Dans le second cas, les deux droites sont associées à deux articulations rotoïdes actionnées appartenant à deux pattes différentes du manipulateur, c'est-à-dire sont contenues dans deux plans (Δ_i) différents. Une configuration singulière ne peut alors être obtenue que lorsque ces deux plans sont confondus. Considérons les trois droites (d_{12}) , (d_{13}) et (d_{2j}) , $j = 2$ ou 3 . Par suite, une configuration singulière peut se produire lorsque $(d_{12}) \equiv (d_{2j})$ ou $(d_{13}) \equiv (d_{2j})$.

4.2.4.2 Sous-ensembles de trois droites (Condition 2)

Condition 2 : Les trois droites forment un faisceau plan de droites, c'est-à-dire que les trois droites sont contenues dans un plan et intersectent toutes un même point. Par suite, les sous-ensembles de trois droites (d_{ij}) peuvent être divisés en deux familles différentes.

1. En premier lieu, nous analysons le cas où deux des trois droites appartiennent à un même plan (Δ_i) (par exemple (d_{12}) , (d_{13}) et (d_{2j}) , $j = 2$ ou 3). Une configuration singulière est alors obtenue lorsque la droite (d_{2j}) est contenue dans le plan (Δ_1) et passe également par le point P_{15} . Par conséquent, la droite (d_{2j}) doit être colinéaire à l'arête (P_{15}, P_{25}) de la plate-forme mobile. Une telle configuration peut se produire uniquement lorsque les deux plans (Δ_1) et (Δ_2) sont coïncidents.

2. Pour la seconde famille de droites, chacune des trois droites (d_{ij}) est associée à une des articulations rotoïdes actionnées appartenant à une patte i du manipulateur. Pour une configuration arbitraire de la plate-forme mobile, chacune des trois droites est donc contenue dans un plan (Δ_i) différent. Nous considérons donc les droites (d_{1j}) , (d_{2j}) et (d_{3j}) , pour $j = 2$ ou 3 . Par suite, une configuration singulière ne peut se produire que lorsque les trois droites (d_{ij}) sont contenues dans le plan (x_p, y_p) de la plate-forme mobile et sont concourantes. Dans le cas contraire, les trois plans (Δ_i) , $i = 1, 2, 3$ doivent être coplanaires, ce qui est clairement impossible.

4.2.4.3 Sous-ensembles de quatre droites (Conditions 3a, 3b, 3c et 3d)

Condition 3a : Un sous-ensemble de quatre droites (d_{ij}) appartient à un *regulus*. Considérons trois droites gauches de l'espace, c'est-à-dire n'étant pas parallèles et n'ayant aucun point d'intersection. La famille de droites qui intersectent ces trois droites génère un *hyperboloïde* et est appelée un *regulus* (Mouly et Merlet [81]). Parmi un sous-ensemble de quatre droites (d_{ij}) , au moins deux d'entre elles sont contenues dans le même plan (Δ_i) et s'intersectent par conséquent en un même point P_{i5} . De ce fait, il n'est pas possible de trouver un sous-ensemble de quatre droites (d_{ij}) qui appartient au même *regulus*.

Condition 3b : Un sous-ensemble de quatre droites (d_{ij}) appartient à deux faisceaux plans de droites ayant une droite en commun mais étant situés dans deux plans distincts et dont les centres sont également distincts. Nous devons également considérer deux familles différentes constituées de quatre droites.

1. Tout d'abord, nous considérons le cas où les quatre droites (d_{ij}) peuvent être regroupées en deux paires respectives de droites ayant un point en commun, leur point d'intersection P_{i5} sur la plate-forme mobile. Sans perte de généralité, considérons le quadruplet (d_{12}) , (d_{13}) , (d_{22}) et (d_{23}) . Les deux faisceaux de droites sont donc contenus respectivement dans les plans (Δ_1) et (Δ_2) . La droite (d) commune aux deux faisceaux de droites est celle passant par les points P_{15} et P_{25} . Si les plans (Δ_1) et (Δ_2) sont coïncidents, il n'est pas possible d'obtenir une configuration satisfaisant la condition 3b. Par-contre, si ces deux plans ne sont pas confondus, une configuration singulière est obtenue lorsque la droite (d) est la droite d'intersection des plans (Δ_1) et (Δ_2) , la droite (d) étant perpendiculaire au plan de la base, c'est-à-dire $(d) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$. Ainsi, en utilisant une modification appropriée du repère de

base ainsi que du repère mobile, une telle configuration singulière peut être décrite mathématiquement pour chacun des quadruplets cités précédemment par l'équation :

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) est valide pour la convention particulière des angles d'Euler définie à la section 1.3.

2. En second lieu, nous considérons le cas où, parmi les quatre droites (d_{ij}) , seule une paire est formée de droites ayant un point d'intersection (par exemple le quadruplet (d_{12}) , (d_{13}) , (d_{2j}) et (d_{3j})). La condition 3b impose que les droites (d_{2j}) et (d_{3j}) doivent être coplanaires. Soit I_{23} le point d'intersection de ces deux droites. La droite commune aux deux faisceaux de droites est donc la droite passant par les points P_{15} et I_{23} . Dans ce cas, une configuration singulière est obtenue lorsque le point I_{23} appartient au plan (Δ_1) et le point P_{15} appartient au plan généré par les deux droites (d_{2j}) et (d_{3j}) . Finalement, il apparaît qu'une telle configuration de la plate-forme mobile ne peut se produire que lorsque les trois plans (Δ_i) , pour $i = 1, 2, 3$, intersectent tous trois une même droite perpendiculaire au plan (x, y) de la base du mécanisme.

Condition 3c : Les quatre droites passent toutes par un point d'intersection commun mais ne sont pas coplanaires. Examinons les différents cas possibles :

1. Premièrement, les quatre droites (d_{ij}) appartiennent à deux paires respectives de droites ayant un point en commun, leur point d'intersection P_{i5} sur la plate-forme mobile. Considérons le quadruplet (d_{12}) , (d_{13}) , (d_{22}) et (d_{23}) . Le point P_{15} est le point d'intersection des droites (d_{12}) et (d_{13}) . Le point P_{25} est le point d'intersection des droites (d_{22}) et (d_{23}) . Par conséquent, d'après la condition 3c, les points P_{15} et P_{25} doivent être coïncidents, ce qui est clairement impossible.
2. Le second sous-cas est obtenu lorsque une seule paire de droites (d_{ij}) est formée de droites ayant un point d'intersection (par exemple le quadruplet (d_{12}) , (d_{13}) , (d_{2j}) et (d_{3j})). Le point d'intersection des deux droites est donc le point P_{15} . Par conséquent, nous obtenons une configuration singulière lorsque les droites (d_{2j}) et (d_{3j}) passent par le point P_{15} .

Condition 3d : Les quatre droites (d_{ij}) appartiennent à un même plan mais ne constituent pas un faisceau plan de droites. Dans ce cas, nous devons considérer un sous-ensemble de

quatre droites tel que celles-ci peuvent être regroupées en deux paires de droites contenues respectivement dans deux des plans (Δ_i) (par exemple $(d_{12}), (d_{13}), (d_{22})$ et (d_{23})). Une configuration satisfaisant la condition 3d est obtenue lorsque les plans (Δ_1) et (Δ_2) sont coïncidents.

4.2.4.4 Sous-ensembles de cinq droites (Conditions 4b, 4c et 4d)

Étant donné que la topologie particulière de l'architecture considérée impose qu'il est possible d'obtenir au plus trois droites gauches (d_{ij}) dans l'espace cartésien, nous n'avons pas à considérer dans cette analyse les dégénérescences des sous-ensembles de cinq droites pour le cas 4a (*congruence elliptique*).

Condition 4b : Les cinq droites (d_{ij}) sont concourantes avec deux lignes gauches de l'espace cartésien (*congruence hyperbolique*). Sans perte de généralité, considérons les droites $(d_{12}), (d_{13}), (d_{22}), (d_{23})$ et $(d_{3j}), j = 2$ ou 3 . Nous déterminons tout d'abord un sous-ensemble de deux lignes gauches (d') et (d'') qui intersectent quatre droites (d_{ij}) . Ceci impose d'analyser les deux sous-cas suivants.

1. Premièrement, $(d') \in (\Delta_1)$ et passe par le point P_{25} . $(d'') \in (\Delta_2)$ et passe par le point P_{15} . Ces conditions imposent que $P_{25} \in (\Delta_1)$ et $P_{15} \in (\Delta_2)$. Ainsi, les deux plans (Δ_1) et (Δ_2) doivent être coïncidents. Ceci implique que les droites (d') et (d'') ne sont plus disjointes dans l'espace cartésien. De ce fait, il n'est pas possible d'obtenir une telle configuration singulière.
2. Dans le second cas, nous étudions les configurations de la plate-forme mobile pour lesquelles (i) $(d') \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ et (ii) la droite (d'') passe par les points P_{15} et P_{25} . La droite (d') est de ce fait perpendiculaire au plan de la base contenant les trois points $P_{i0}, i = 1, 2, 3$. Par suite, la droite (d_{3j}) intersecte simultanément les droites (d') et (d'') si, et seulement si, la droite (d_{3j}) est contenue dans le plan (x_p, y_p) de la plate-forme mobile et $(d'') \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$. Par conséquent, un lieu de singularités correspond à cette configuration particulière.

Condition 4c : Les cinq droites (d_{ij}) définissent trois faisceaux plans de droites dont les centres sont distincts, tous situés dans des plans différents et ayant une droite en commun (*congruence parabolique*). Considérons la première configuration singulière obtenue pour la condition 3b. Dans une telle configuration, les droites $(d_{12}), (d_{22}), (d_{22})$ et (d_{23}) génèrent

deux faisceaux plans de droites, ayant pour droite commune la droite $(d) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ et pour centres respectifs les points P_{15} et P_{25} . Nous considérons de ce fait le quintuplet de droites $(d_{12}), (d_{22}), (d_{23})$ et $(d_{3j}), j = 2$ ou 3 . Par suite, une variété linéaire de type 4c est obtenue si, et seulement si, la droite (d_{3j}) intersecte la droite (d) . Dans une telle configuration, les trois plans $(\Delta_i), i = 1, 2, 3$, intersectent la droite (d) , laquelle est perpendiculaire au plan de la base.

Condition 4d : Toutes les droites appartiennent à un même plan ou passent par un point contenu dans ce plan (*congruence dégénérée*). Nous considérons les deux sous-cas suivants.

1. Trois droites, par exemple les droites $(d_{13}), (d_{23})$ et (d_{33}) , appartiennent au plan (x_p, y_p) de la plate-forme mobile. Néanmoins, les deux droites restantes (d_{12}) et (d_{22}) ne s'intersectent pas en un point commun se trouvant dans ce plan. De ce fait, nous ne pouvons pas trouver une telle configuration qui satisfasse la condition 4d.
2. Trois droites appartiennent à un même plan (Δ_i) (par exemple $(d_{12}), (d_{13})$ et (d_{2j}) , avec $j = 2$ ou 3). Une configuration satisfaisant la condition 4d se produit si, et seulement si, les deux plans (Δ_1) et $(\Delta_i), i = 2$ ou 3 sont coïncidents. Par suite, le point d'intersection P_{35} des deux droites restantes (d_{32}) et (d_{33}) doit être situé dans ce plan commun.

4.2.4.5 Sous-ensembles de six droites (Conditions 5a et 5b)

Condition 5a : Une variété de rang 5, dite *complexe*, générée par les six droites (d_{ij}) , est *non singulière* (appelée encore *complexe générale*). Dans une telle configuration, toutes les droites coplanaires d'un tel complexe ont un point commun, c'est-à-dire que toutes les droites coplanaires constituent un faisceau plan de droites. Nous considérons donc les trois droites, notées $(d_i), i = 1, 2, 3$, appartenant respectivement aux trois faisceaux plans de droites $(d_{i2}) - (d_{i3})$, pour $i = 1, 2, 3$, et appartenant également au plan (x, y) de la base. Les droites $(d_i), i = 1, 2, 3$, sont donc les droites d'intersection entre les trois plans (Δ_i) et le plan (x, y) . Si les six droites (d_{ij}) appartiennent à un complexe non singulier, alors les droites (d_i) , appartenant à des faisceaux de droites générés par des droites du complexe, appartiennent elles aussi au complexe. Donc les droites $(d_i), i = 1, 2, 3$, doivent être concourantes. Une telle configuration se produit si, et seulement si, la condition géométrique $(d_\Delta) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$ est satisfaite, (d_Δ) étant la droite commune aux trois plans $(\Delta_i), i = 1, 2, 3$.

Condition 5b : Les six droites (d_{ij}) intersectent toutes une même droite (d_{Δ}) de l'espace cartésien (variété *complexe singulière*). Une telle configuration se produit si, et seulement si, la condition géométrique $(d_{\Delta}) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$ est satisfaite. Comme nous l'avons mentionné préalablement, les trois plans (Δ_i) , $i = 1, 2, 3$, sont, quelle que soit la posture de la plate-forme mobile, perpendiculaires au plan (x, y) de la base contenant les trois points P_{i0} , $i = 1, 2, 3$ et la droite (d_{Δ}) est par conséquent également perpendiculaire à ce plan.

Ainsi, il apparaît clairement que le complexe singulier (condition 5b) est un cas particulier du complexe général (condition 5a). Cependant, pour le mécanisme considéré, il est intéressant de noter que le lieu de singularités correspondant au complexe singulier est confondu avec celui correspondant au complexe général. Notons que le degré de liberté associé à une variété complexe est un mouvement de vissage (Ball [84]).

Par suite, une propriété intéressante du lieu des points singuliers satisfaisant les conditions 5a et 5b est que son équation analytique peut être déterminée via une analyse bidimensionnelle effectuée dans le plan (x, y) , contenant la base du manipulateur parallèle. Une fois que l'équation analytique de la courbe décrivant la section correspondante du lieu de singularités est déterminée, sous la forme $F_{\mathbf{Q}}(x, y) = 0$, l'équation décrivant le lieu de singularités complet dans l'espace cartésien sera donnée directement par le système d'équations :

$$\begin{cases} F_{\mathbf{Q}}(x, y) = 0 \\ z = z \end{cases} \quad (4.15)$$

4.2.4.6 Récapitulatif des conditions géométriques correspondant à des singularités de type II

L'analyse théorique des singularités du mécanisme telle que présentée dans les sections précédentes nous permet finalement de faire les observations suivantes :

- i. Le cas 1-2, décrivant le cas 2 satisfaisant la condition 1, les cas 2-1 et 4d-2 sont des sous-cas du cas plus général 3d pour lequel deux des plans (Δ_i) doivent être coïncidents.
- ii. Les cas 2-2, 3b-2, 3c-2, 4b-2, 4c et 5b correspondent également à des sous-cas du cas 5a impliquant une configuration de la plate-forme mobile du manipulateur telle que

$$(d_{\Delta}) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \cap (\Delta_3).$$

- iii. Dans la configuration pour laquelle deux des plans (Δ_i) sont coplanaires, considérons par exemple les plans (Δ_1) et (Δ_2) , le troisième plan, c'est-à-dire (Δ_3) intersecte nécessairement les deux premiers suivant une droite perpendiculaire au plan (x, y) de la base. Ceci est vrai sous l'hypothèse non restrictive que les géométries de la base et de la plate-forme mobile sont telles que $b \neq r$. Ceci implique que les six droites (d_{ij}) intersectent également toutes une droite commune dans la configuration pour laquelle deux des plans (Δ_i) sont coplanaires, cette droite étant contenue dans le plan résultant. Par conséquent, le cas 3d est un sous-cas du cas 5a et nous déduisons finalement que tous les cas de singularités 1-2, 2-1, 2-2, 3b-2, 3c-2, 3d, 4b-2, 4c, 4d-2 et 5b sont des sous-cas du complexe général (cas 5a).

Ainsi, à l'exception du cas 3b-1, tous les cas de singularités du manipulateur, lorsque les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnées pour la i -ème patte, se réduisent à la génération d'un complexe. En pratique, nous devons déterminer les équations sous forme symbolique du lieu de singularités correspondant au cas du complexe général 5a en fonction des coordonnées généralisées $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ de la plate-forme mobile. Par suite, les courbes correspondant aux différents sous-cas seront prises en compte de manière implicite par les équations résultantes.

4.2.5 Équations des lieux de singularités du mécanisme sous forme analytique

Nous développons dans cette section les expressions analytiques générales des différents lieux de singularités du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté, tels que décrits géométriquement dans la section précédente. Étant donné que les équations analytiques correspondant aux configurations singulières de type I ainsi que celles correspondant aux cas de singularités 1-1 et 3b-1 ont déjà été obtenues à ce stade du développement (cf. sections 4.2.2 et 4.2.4.3), nous devons encore déterminer, en fonction de la position \mathbf{p} et de l'orientation \mathbf{Q} de la plate-forme mobile, les équations du lieu de singularités correspondant à la condition 5a.

4.2.6 Lieu des points singuliers pour le cas 5a

Commençons par la détermination du lieu tridimensionnel défini comme l'ensemble des points de l'espace cartésien satisfaisant la condition 5a. Tel que mentionné préalablement, il suffit de déterminer les équations de la section de ce lieu dans le plan (x, y) , en fonction des coordonnées généralisées $(x, y, \phi, \theta, \psi)$. Par suite, le lieu de singularités tridimensionnel complet est obtenu par extrusion dans la direction $(+z)$ de cette courbe plane.

4.2.6.1 Cas général : orientation arbitraire de plate-forme mobile

Soient (d_i) , pour $i = 1, 2, 3$, les droites d'intersection entre les trois plans (Δ_i) et le plan (x, y) de la base du manipulateur. Nous définissons le point P_Δ d'après la condition géométrique suivante : $P_\Delta \in (d_1) \cap (d_2) \cap (d_3)$. Nous définissons également les points P'_{i5} et C' comme les projections respectives des points P_{i5} et C dans le plan (x, y) . Les positions des points $P'_{i5} = [p_{i5x} \ p_{i5y} \ 0]^T$ dépendent de la position \mathbf{p} et de l'orientation \mathbf{Q} de la plate-forme mobile et peuvent donc être exprimées en fonction des coordonnées généralisées du manipulateur parallèle étudié.

Ensuite, nous déterminons sous forme analytique les équations des trois droites (d_i) passant par les deux points P_{i0} et P'_{i5} et nous exprimons mathématiquement le fait que ces trois droites sont concourantes au point P_Δ . Le développement mathématique complet est fourni en annexe A. Nous obtenons de cette manière une équation dont le degré maximal des termes en x et y est 2. Après factorisation, cette équation peut être réduite sous la forme suivante :

$$E_1x^2 + E_2y^2 + E_3xy + E_4x + E_5y + E_6 = 0 \quad (4.16)$$

où les coefficients E_i , pour $i = 1, \dots, 6$, sont explicités par les relations (A.13) fournies dans l'annexe A. Par conséquent, les lieux de singularités correspondant à la condition 5a sont représentés, dans l'espace cartésien, par l'ensemble d'équations :

$$\begin{cases} E_1x^2 + E_2y^2 + E_3xy + E_4x + E_5y + E_6 = 0 \\ z = z \end{cases} \quad (4.17)$$

Le système d'équations (4.17) correspond à une surface quadratique, orientée suivant l'axe z , dont les coefficients dépendent des paramètres géométriques b et r ainsi que de l'orientation de la plate-forme mobile du manipulateur. À l'exception du cas de singularité 3b-1,

toutes les configurations singulières de type II du manipulateur pour le cas d'actionnement considéré sont donc incluses dans ce lieu de singularités correspondant au cas du complexe général.

Par suite, nous étudions la surface quadratique définie par l'équation (4.17). Il est bien connu que la nature de cette surface dépend de la quantité suivante :

$$\delta = E_1 E_2 - \frac{E_3^2}{4} \quad (4.18)$$

- si $\delta = 1$: la surface est un cylindre droit ;
- si $\delta > 0$: la surface est un cylindre elliptique ;
- si $\delta = 0$: la surface est un cylindre parabolique ;
- si $\delta < 0$: la surface est un cylindre hyperbolique.

Une fois que les paramètres b et r sont choisis, la nature de la surface de singularités dépend de ce fait des trois angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) . Comme on pouvait s'y attendre de manière intuitive, les équations obtenues ci-haut pour chaque section de la surface de singularités sont similaires à celles obtenues par Sefrioui et Gosselin [85] et plus récemment par Collins et McCarthy [77] pour l'analyse de manipulateurs parallèles plans de type $3-RPR$.

Du fait que le développement mathématique permettant la détermination des équations analytiques de ce type de surfaces quadratiques dans leurs systèmes d'axes principaux est bien connu et documenté dans la littérature, nous référons le lecteur à la référence Hilbert et Cohn-Vossen [86]. Celle-ci présente différentes procédures détaillées permettant la détermination des caractéristiques des surfaces générales de degrés 2 (centre, demi-axes,...etc).

Finalement, il est intéressant de mentionner que le lieu de singularités correspondant à la condition 5a peut être exprimé sous la forme d'une équation très compacte dans l'espace articulaire. Ainsi, il a été montré dans la section A.4 de l'annexe A que l'équation (4.16) est équivalente à l'équation :

$$\begin{aligned} & 3 \cos \theta_{11} \sin \theta_{21} \cos \theta_{31} + \cos \theta_{11} \sin \theta_{31} \sin \theta_{21} \sqrt{3} - 3 \sin \theta_{11} \cos \theta_{21} \cos \theta_{31} \\ & - 2 \sin \theta_{11} \cos \theta_{31} \sin \theta_{21} \sqrt{3} + \sin \theta_{11} \sqrt{3} \sin \theta_{31} \cos \theta_{21} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Cette équation dépend uniquement des angles θ_{i1} , $i = 1, 2, 3$, décrivant les positions angulaires des articulations rotoïdes passives du manipulateur.

4.2.6.2 Cas particulier : la plate-forme mobile est parallèle à la base

Dans le cas particulier où les angles d'Euler θ et ψ sont égaux à zéro, c'est-à-dire que la plate-forme mobile est parallèle à la base, l'expression polynomiale correspondant à la configuration $P_\Delta \in (d_1) \cap (d_2) \cap (d_3)$ peut être réduite à la forme simplifiée :

$$br \sin \phi [x^2 + y^2 - (b^2 + r^2 - 2br \cos \phi)] = 0 \quad (4.20)$$

Ceci permet d'identifier deux types de configurations singulières

1. $\phi = 0$ ou π : dans ce cas, les trois droites (d_i) , pour $i = 1, 2, 3$, sont concourantes au point P_Δ quelle que soit la position de la plate-forme mobile. Lorsque la plate-forme mobile est dans une orientation donnée par $(\phi, \theta, \psi) = (0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ ou $(\phi, \theta, \psi) = (180^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$, tous les points de l'espace cartésien satisfont la condition 5a et tout l'espace tridimensionnel est donc singulier.
2. $[x^2 + y^2 - (b^2 + r^2 - 2br \cos \phi)] = 0$: il s'agit dans ce cas de l'équation d'un cylindre droit dont les sections transversales parallèles au plan (x, y) sont des cercles de rayon $R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \phi}$ dont le centre a pour coordonnées $(x, y) = (0, 0)$. Ceci correspond bien à un cas particulier du lieu de singularités général tel que décrit par l'équation (4.17).

Il est important de rappeler le fait que ces résultats obtenus sous une forme très compacte sont valables uniquement lorsque la géométrie du manipulateur est telle que la plate-forme mobile ainsi que la base sont des triangles équilatéraux. Ces résultats ne peuvent pas être généralisés à l'étude de manipulateurs parallèles de ce type présentant une géométrie plus générale. Néanmoins, les architectures parallèles à 6 degrés de liberté possédant un design pleinement symétrique sont de loin les plus utilisées pour la plupart des applications industrielles courantes.

4.2.7 Configurations singulières additionnelles

Il a été montré par Zlatanov *et al.* [75] que l'existence d'une matrice jacobienne inversible n'est pas une condition suffisante garantissant la non-existence de singularités, à moins que les équations reliant les vitesses des articulations rotoïdes actionnées et passives ne soient définies. Nous faisons donc l'hypothèse préalable que les matrices jacobiennes \mathbf{A}_1 et \mathbf{B}_1 sont définies et inversibles et nous discutons l'existence de configurations singulières

additionnelles. Celles-ci sont obtenues à travers une analyse des configurations de la plateforme mobile du manipulateur pour lesquelles la matrice de dimension (3×6) reliant les vitesses des articulations actives à celles des articulations passives n'est pas définie. D'après la formulation générale de la matrice jacobienne obtenue à la section 2.2, nous pouvons directement écrire la relation cinématique :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1p} = \mathbf{J}_{1p} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1p} = [\dot{\theta}_{11} \ \dot{\theta}_{21} \ \dot{\theta}_{31}]^T$ contient les vitesses des articulations rotoïdes passives. La matrice jacobienne \mathbf{J}_{1p} , de dimension (3×6) , est donnée sous la forme vectorielle compacte :

$$\mathbf{J}_{1p} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \mathbf{v}_{11})^T \\ \mathbf{v}_{21}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \mathbf{v}_{21})^T \\ \mathbf{v}_{31}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \mathbf{v}_{31})^T \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Les vecteurs \mathbf{v}_{i1} correspondants, pour $i = 1, 2, 3$, sont donnés par l'équation (2.23). Par suite, étant donné que la matrice jacobienne $\mathbf{J}_1 = -\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}_1$ est inversible, nous utilisons l'équation (2.15) afin d'éliminer le vecteur des vitesses généralisées dans l'équation (4.21) et nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1p} = \mathbf{J}_{1p} \mathbf{J}_1^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (4.23)$$

Par conséquent, l'équation reliant les vitesses des articulations actives et passives n'est pas définie lorsque les vecteurs de Plücker $\mathbf{U}_{i1} = [\mathbf{v}_{i1}^T \ ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{v}_{i1})^T]^T$, associés aux angles θ_{i1} , $i = 1, 2, 3$, des articulations rotoïdes passives, ne sont pas définis. Ceci implique que la droite de Grassmann associées à la i -ème articulation passive n'est également pas définie. Ainsi, en considérant l'équation (2.23), il apparaît clairement qu'une configuration singulière additionnelle se produit lorsque le dénominateur commun des composantes du vecteur \mathbf{v}_{i1} est égal à zéro, c'est-à-dire, pour $i = 1, 2, 3$:

$$\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2} = 0 \quad (4.24)$$

Dans une telle configuration, l'extrémité P_{i5} de la membrure distale de la i -ème patte est exactement au-dessus du point d'attache P_{i0} de cette patte à la base. Dans ce cas, la structure du mécanisme à 5 barres de la patte i peut être animée d'un mouvement de rotation d'amplitude finie autour de l'axe (z') lorsque les six articulations rotoïdes actionnées sont bloquées et les vitesses généralisées de la plateforme mobile sont nulles. Une

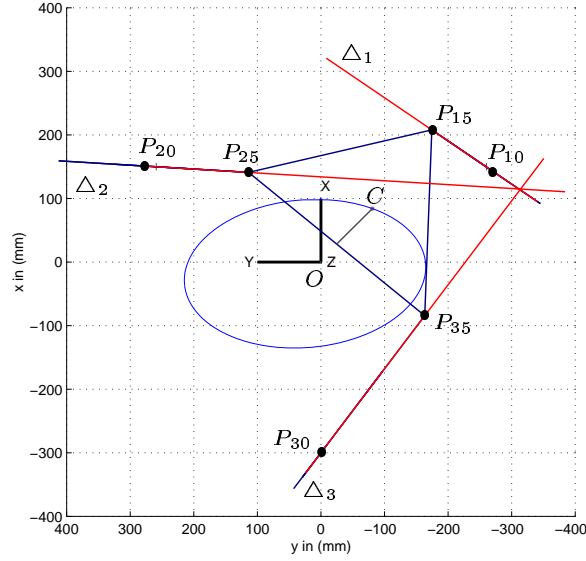
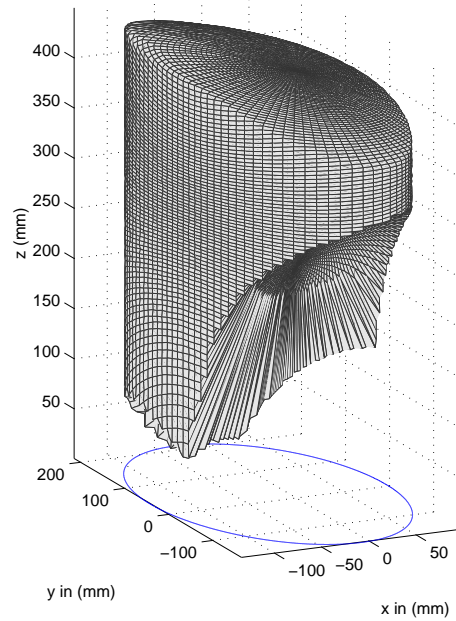
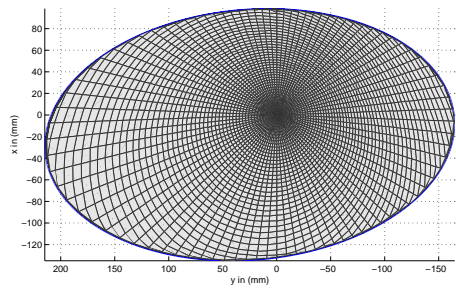


Fig. 4.2: Vue de dessus du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté dans une configuration telle que la condition géométrique 5a est satisfaite, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$.

telle configuration singulière a été référée par le terme *mouvement passif redondant* par Zlatanov *et al.* [75], du fait que la patte concernée gagne un degré de liberté associé à une articulation passive. Par suite, pour une orientation donnée de la plate-forme mobile, le lieu de singularités correspondant est constitué de trois droites verticales passant respectivement par les centres des sphères constituant la frontière de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur, dont les coordonnées respectives sont $(\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{Q}\mathbf{b}_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 3.3.2, ces droites sont très localisées dans l'espace cartésien et peuvent être facilement évitées durant une planification de trajectoire du manipulateur. Une procédure de contournement de ces lieux devra donc être intégrée lors de l'implantation contrôleur si ceux-ci sont localisés à l'intérieur de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur. Précisons ici que ces singularités additionnelles ne dépendent pas de la géométrie de la base et de la plate-forme mobile, elles dépendent uniquement de la topologie particulière de chacune des chaînes cinématiques constituant les pattes du manipulateur. En l'occurrence, ces configurations singulières traduisent des dégénérescences de la cinématique intrinsèque aux mécanismes à 5 barres utilisés. Finalement, la détermination de ces lieux de singularités additionnels nous permet de conclure l'analyse et l'obtention exhaustive des équations analytiques



(a)



(b)

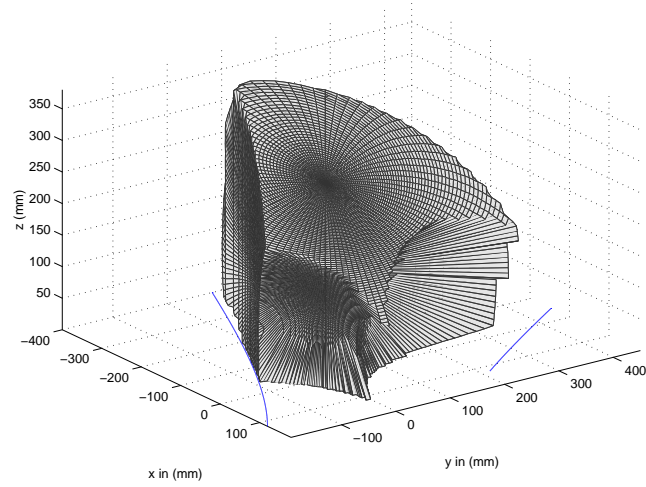
Fig. 4.3: (a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur du lieu des points singuliers satisfaisant la condition

$$5a, \delta = 2.382, (b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm}), (\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ).$$

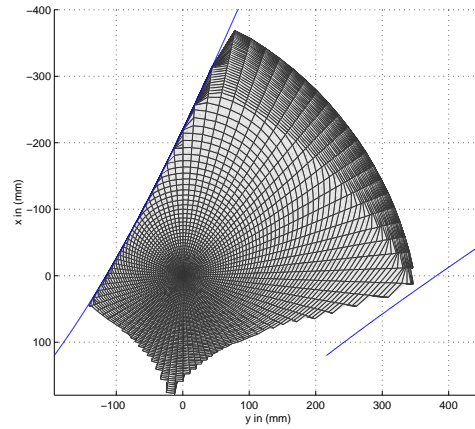
des lieux de singularités du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pour ce premier cas d'actionnement. Une procédure numérique de vérification de ces résultats, basée sur un algorithme de discrétisation, est présentée dans la section ci-après.

4.2.8 Représentations graphiques des surfaces de singularités

L'acuité des résultats obtenus précédemment est corroborée dans cette section par une méthode de discrétisation implémentée en code MATLAB, dont l'algorithmique est similaire à celle développée initialement par Conti *et al.* [65]. Ainsi, cette procédure numérique



(a)



(b)

Fig. 4.4: (a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur du lieu des points singuliers satisfaisant la condition 5a, $\delta = -0.048$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 400 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 0^\circ, 50^\circ)$.

nous a permis de déterminer, dans un système de coordonnées sphériques, la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur de la surface critique de singularités donnée par l'équation (4.17), c'est-à-dire l'ensemble des positions cartésiennes de l'effecteur satisfaisant la condition 5a. La procédure est basée sur le calcul numérique du déterminant de la matrice jacobienne $\det(\mathbf{J}_1) = P_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$. Comme il a été observé numériquement que le déterminant $P_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ est strictement positif à l'intérieur de la région de l'espace de travail du manipulateur ne contenant aucune singularité, nous avons identifié numériquement la région de l'espace pour laquelle la condition $P_{\mathbf{Q}}(x, y, z) \neq 0$ est

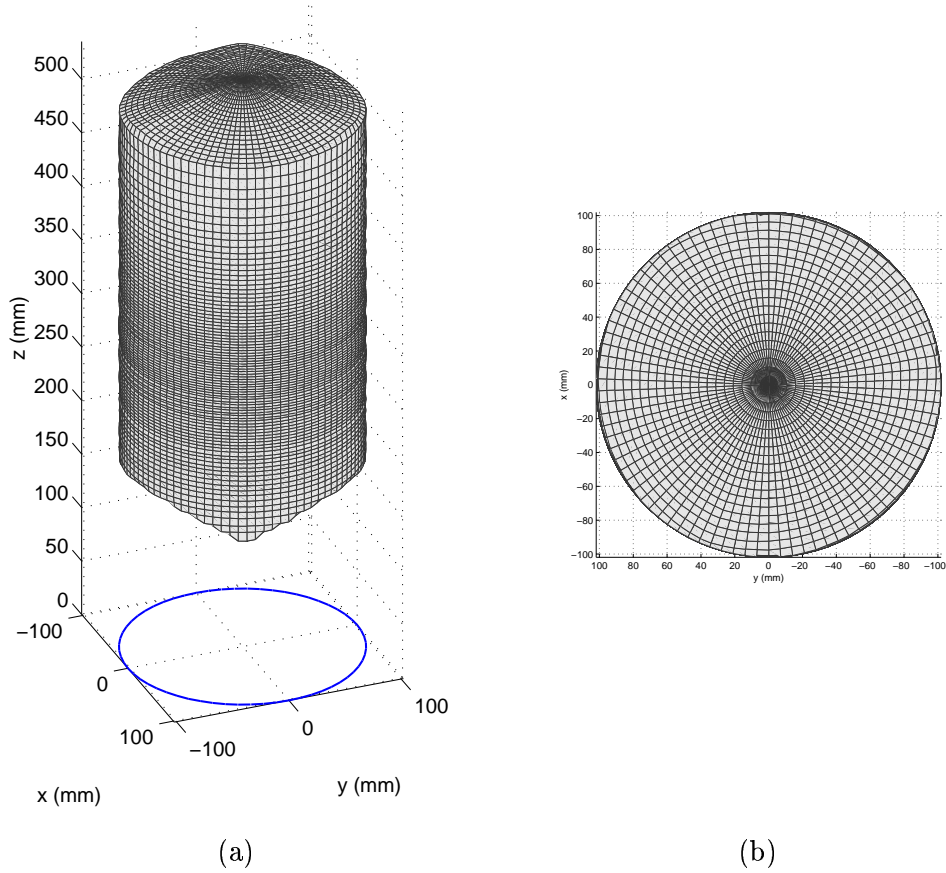


Fig. 4.5: (a) Vue en perspective et (b) vue de dessus de la région de l'espace atteignable à orientation constante localisée à l'intérieur du lieu des points singuliers satisfaisant la condition $5a$, $\delta = 1.000$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$, $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$.

satisfaite. Plus spécifiquement, nous avons incli les deux contraintes cinématiques suivantes dans l'algorithme de discrétisation utilisé :

$$\det(\mathbf{J}_1) > 0 \quad (4.25)$$

$$\ell_{i5} - \ell_{i2} \leq M_i \leq \ell_{i5} + \ell_{i1} \quad (4.26)$$

où la matrice jacobienne $\mathbf{J}_1 = -\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}_1$ est telle que déterminée à la section 4.2.1 et les longueurs requises des pattes sont calculées par la relation, pour $i = 1, 2$ et 3 :

$$M_i = \|\mathbf{p}_{i5} - \mathbf{p}_{i0}\| = \|\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_{i0}\|. \quad (4.27)$$

Les régions de l'espace à orientation constante situées à l'intérieur des surfaces critiques de singularités, obtenues via la procédure numérique décrite ci-haut, sont représentées sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5, pour différentes orientations (ϕ, θ, ψ) de la plate-forme mobile et pour des valeurs différentes du paramètre r . De plus, la courbe de singularités

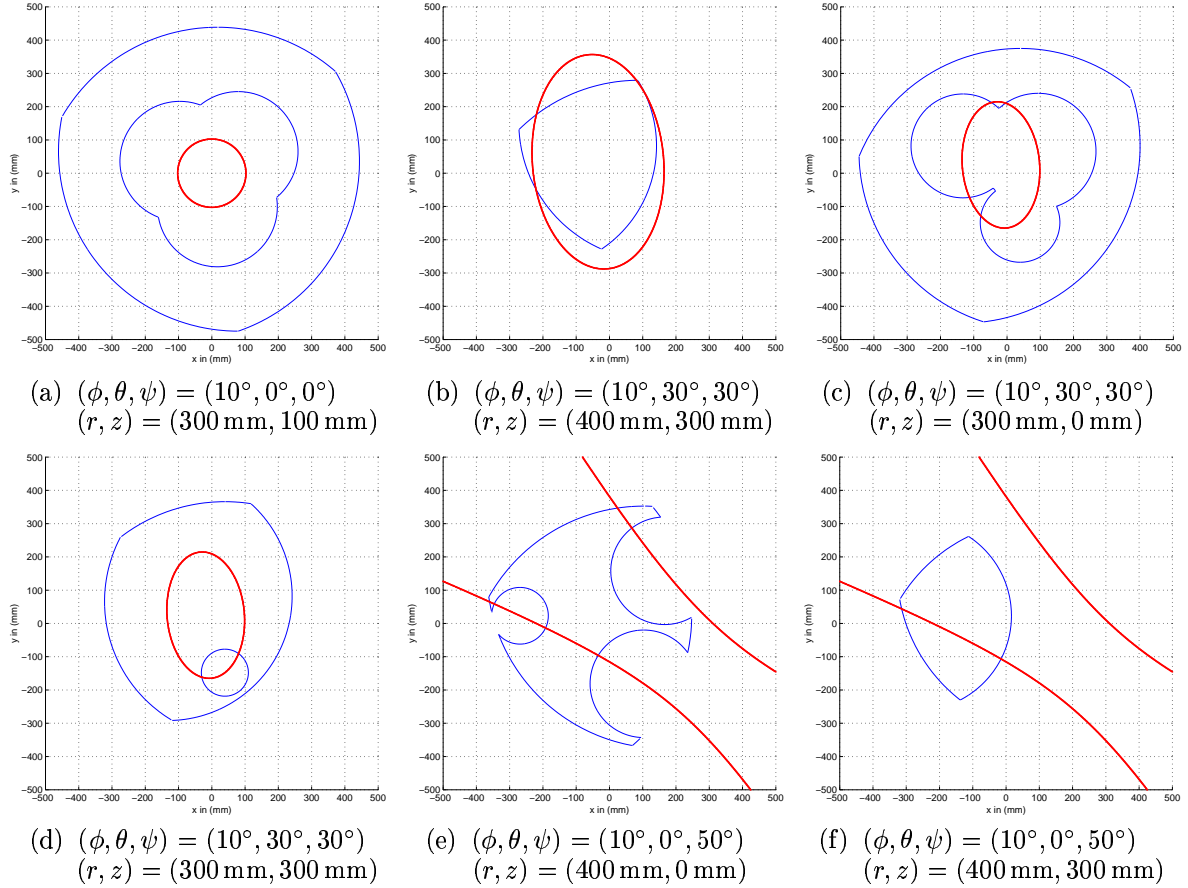


Fig. 4.6: Frontière de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté superposée au lieu des points singuliers satisfaisant la condition 5a situés dans des plans parallèles au plan (x, y) . Ces représentations bidimensionnelles sont fournies pour différentes orientations \mathbf{Q} de la plate-forme mobile et valeurs du paramètre géométrique r , ($b = 207 \text{ mm}$).

décrite par l'équation (4.16) a été rajoutée sur chacune de ces figures. Par souci de lisibilité, seules les sections des surfaces situées dans le plan (x, y) ont été représentées. Par conséquent, nous observons une corrélation totale entre les résultats obtenus par la méthode géométrique basée sur les variétés de droites de Grassmann et ceux obtenus par l'algorithme de discrétisation.

La figure 4.2 représente également une vue de dessus du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté dans une configuration telle que la condition géométrique 5a est satisfaite et la surface décrite par l'équation (4.17) est un cylindre elliptique. Finalement, plusieurs sections de l'espace atteignable à orientation constante sur lesquelles

sont superposés les lieux de singularités correspondant à la condition 5a sont fournies à la figure 4.6 pour différentes valeurs de la coordonnée généralisée z . Les sections de l'espace atteignable, situées dans des plans parallèles au plan (x, y) de la base, ont été obtenues géométriquement en utilisant une procédure similaire à celle présentée initialement par Gosselin [63]. L'algorithme implémenté en code MATLAB est basé sur la description géométrique de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté, résultant de l'intersection de trois régions de l'espace cartésien, chacune étant représentée par la différence entre deux sphères concentriques. Les représentations graphiques sont fournies pour différentes orientations \mathbf{Q} de la plate-forme mobile et valeurs du paramètre géométrique r . Celles-ci nous permettent finalement de visualiser à quel point les surfaces de singularités correspondantes ont un impact critique sur l'ensemble des points de l'espace cartésien atteignables en pratique par l'effecteur.

Dans le contexte de l'étude des singularités de cette nouvelle classe de mécanismes parallèles à 6 degrés de liberté, l'approche géométrique basée sur les variétés de droites de Grassmann s'est révélée très efficace, permettant simultanément (i) la caractérisation géométrique exhaustive des singularités de type II et (ii) la détermination des équations sous forme symbolique des lieux de singularités correspondants sous une forme très compacte. Les différentes équations analytiques obtenues ainsi que les moyens de visualisation développés constituent un outil efficace de prédiction de telles configurations singulières pouvant être utilisés très en amont durant le processus de design de mécanismes parallèles présentant une topologie équivalente à celle considérée lors de cette étude.

Finalement, la méthode de dérivation des matrices jacobiennes \mathbf{A}_1 et \mathbf{B}_1 utilisant le principe du travail virtuel (sections 2.2 et 4.2.1) ainsi que l'analyse complète des lieux de singularité du manipulateur basée sur la géométrie des droites de Grassmann ont été présentées dans la référence Monsarrat et Gosselin [87].

4.3 Analyse des singularités du mécanisme équivalent de type 3-RRRS

La présente section présente une analyse des singularités de l'architecture parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté (figure 1.8), mais pour un deuxième cas d'actionnement. En effet, nous considérons toujours le manipulateur parallèle pour lequel chacune des trois chaînes cinématiques, reliant la base à la plate-forme mobile, est constituée d'un mécanisme à 5 barres, mais nous étudions le cas où, pour la i -ème patte du manipulateur, les deux articulations actionnées sont : (i) la première articulation rotoïde dont la position angulaire autour de l'axe vertical z' est donnée par l'angle θ_{i1} , et (ii) la position angulaire $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$ mesurée, autour de l'axe x' , entre les deux membrures proximales du parallélogramme. Le fait d'actionner l'angle $\Delta\theta_{i3}$ de la patte i revient à faire varier la distance $M_i = \|\mathbf{s}_i\| = \sqrt{\ell_{i5}^2 + \ell_{i1}^2 + 2\ell_{i5}\ell_{i1} \cos \Delta\theta_{i3}}$. Ainsi, pour ce cas d'actionnement, le manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté étudié est équivalent à un mécanisme de type 3-RRRS, pour lequel l'axe de la première articulation rotoïde actionnée z' est vertical et les axes des deuxième et troisième articulations rotoïdes, respectivement passive et active, sont parallèles à l'axe x' situé dans le plan de la base. Le mécanisme parallèle équivalent de type 3-RRRS est montré à la figure 4.7.

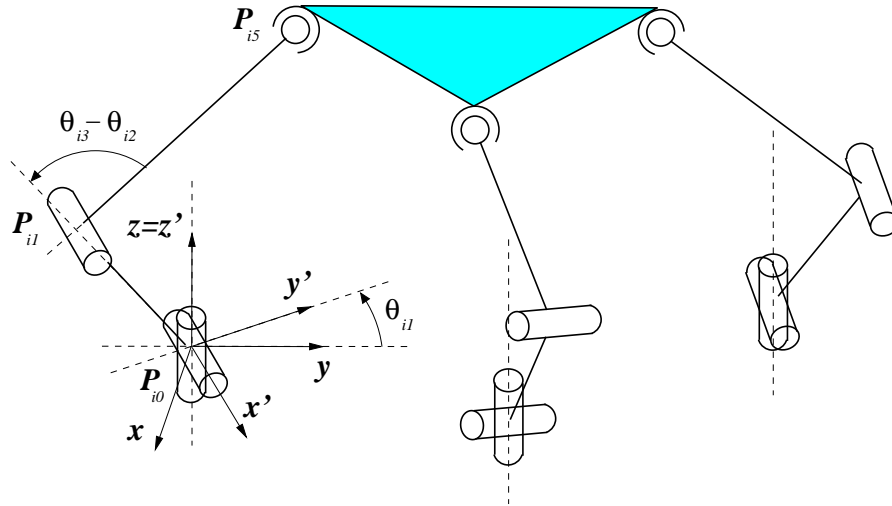


Fig. 4.7: Mécanisme équivalent de type 3-RRRS du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pour le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont actionnés.

Cette section est donc organisée comme suit. Nous reformulerons tout d'abord les

équations cinématiques déterminées à la section 2.2 pour le cas d'actionnement considéré. Par suite, nous analyserons les singularités du manipulateur de type 3-RRRS en utilisant la méthode classique basée sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne, réalisé via le logiciel de calcul symbolique Maple. Il sera montré que, pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile, l'équation du lieu correspondant aux singularités de type II est un polynôme dont le degré maximal des termes en x et y est 4, et dont le degré maximal des termes en z est 3. Finalement, les équations des lieux de singularités obtenues sous forme analytique seront illustrées par plusieurs représentations graphiques planes et spatiales superposées à l'espace à orientation constante du manipulateur parallèle.

4.3.1 Reformulation des équations cinématiques du manipulateur

Dans cette partie, nous considérons donc les équations cinématiques générales obtenues à la section 2.2 que nous adaptons pour l'analyse des singularités d'un mécanisme à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté dont l'actionnement est tel que les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont actionnés pour la i -ème patte. En utilisant les équations (2.15), (2.23), (2.29) et (2.31), nous pouvons obtenir directement une expression de la relation vectorielle entre les vitesses des articulations rotoïdes actionnées $\dot{\boldsymbol{\theta}}_2$ et les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{x}}$ du mécanisme pour le cas d'actionnement considéré. Cette relation vectorielle est obtenue sous une forme particulière ne contenant aucun dénominateur, c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

où le vecteur des vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\theta}}_2$ est donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 = \left[\dot{\theta}_{11} \ \dot{\theta}_{21} \ \dot{\theta}_{31} \ \Delta\dot{\theta}_{13} \ \Delta\dot{\theta}_{23} \ \Delta\dot{\theta}_{33} \right]^T \quad (4.29)$$

et, en utilisant une terminologie identique à celle de la section 4.2.1, les matrices \mathbf{A}_2 et \mathbf{B}_2 sont les matrices jacobienes de dimension (6×6) qui, pour le mécanisme étudié, sont directement données par les expressions suivantes :

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \mathbf{u}_1)^T \\ \mathbf{u}_2^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \mathbf{u}_2)^T \\ \mathbf{u}_3^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \mathbf{u}_3)^T \\ \mathbf{s}_1^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \mathbf{s}_2)^T \\ \mathbf{s}_3^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \mathbf{s}_3)^T \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{B}_2 = \text{diag}(b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{1\Delta 3}, b_{2\Delta 3}, b_{3\Delta 3}) \quad (4.31)$$

où les composantes des vecteurs $\mathbf{u}_i = [s_{iy} \ -s_{ix} \ 0]^T$ et $\mathbf{s}_i = [s_{ix} \ s_{iy} \ s_{iz}]^T$, $i = 1, 2, 3$, sont déterminées par l'équation (2.1) en fonction uniquement de la position \mathbf{p} et de l'orientation \mathbf{Q} de la plate-forme mobile, et les coefficients b_{i1} and $b_{i\Delta 3}$ ont pour expressions respectives, pour $i = 1, 2, 3$:

$$b_{i1} = -\|\mathbf{u}_i\|^2 = -(\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2}) \quad (4.32)$$

$$b_{i\Delta 3} = \ell_{i5} \ell_{i1} \sin \Delta \theta_{i3} \quad (4.33)$$

Cette formulation vectorielle particulière des équations cinématiques permet d'obtenir une expression de la matrice jacobienne \mathbf{A}_2 dont les éléments dépendent uniquement des coordonnées généralisées $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ et des paramètres géométriques b et r de l'architecture. De plus, en considérant l'équation (4.28), nous remarquons que les coordonnées articulaires et généralisées y sont découplées, du fait que les éléments de la matrice jacobienne \mathbf{B}_2 ne dépendent que des positions angulaires des articulations rotoïdes actives et passives des chaînes cinématiques constituant les pattes du mécanisme. Cette propriété permet d'étudier les dégénérescences de la matrice jacobienne \mathbf{A}_2 ainsi que les lieux de singularités associés dans l'espace cartésien en réalisant un développement symbolique direct de son déterminant, sans avoir à effectuer des substitutions symboliques complexes mettant en oeuvre les équations du PGI de la section 2.1.

4.3.2 Caractérisation des lieux de singularités de type I

Les configurations singulières correspondant à des singularités de type I sont celles se produisant lorsque le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{B}_2 est égal à zéro, c'est-à-dire :

$$\det(\mathbf{B}_2) = 0 \quad (4.34)$$

Mathématiquement, cette condition conduit à :

$$\det(\mathbf{B}_2) = - \prod_{i=1}^3 (\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2}) \prod_{i=1}^3 (\ell_{i5} \ell_{i1} \sin \Delta \theta_{i3}) = 0 \quad (4.35)$$

L'expression du déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{B}_2 donnée par l'équation (4.35) nous permet d'identifier les deux configurations singulières suivantes :

1. $\sin \Delta\theta_{i3} = 0$: Une singularité de type I se produit donc lorsque les deux membrures proximales du parallélogramme de la i -ème patte sont alignées, c'est-à-dire :

$$\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (4.36)$$

Cette condition définit en fait, pour chaque patte i , les sphères minimale et maximale dont les rayons sont respectivement $(\ell_{i5} - \ell_{i2})$ et $(\ell_{i5} + \ell_{i1})$, et dont la position commune des centres est donnée, dans le repère fixe R , par le vecteur $(\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{Q}\mathbf{b}_i)$. L'intersection des zones définies par ces sphères minimales et maximales constitue la frontière de l'espace à orientation constante du manipulateur.

2. $\ell_{i1} \cos \theta_{i3} + \ell_{i5} \cos \theta_{i2} = 0$: Dans une telle configuration, l'extrémité P_{i5} de la membrure distale de la i -ème patte est exactement au-dessus du point d'attache P_{i0} de cette patte à la base. Dans ce cas, un mouvement d'amplitude finie de l'articulation rotoïde actionnée associée à l'angle θ_{i1} ne produit aucun mouvement au niveau de l'effecteur, la plate-forme mobile restant donc immobile. La chaîne cinématique de la i -ème patte, cinématiquement équivalente à une structure sérielle de type RRRS, peut dans ce cas être animée d'un mouvement de rotation d'amplitude finie autour de l'axe (z') et les vitesses généralisées de la plate-forme mobile resteront nulles. Le lieu de singularités correspondant est constitué de trois droites verticales passant respectivement par les centres des sphères constituant la frontière de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur, dont les coordonnées respectives sont $(\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{Q}\mathbf{b}_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. Précisons que les problématiques inhérentes au contournement de ces lieux de singularités lors d'une planification de trajectoire ont été discutées dans la section 4.2.7.

4.3.3 Caractérisation des lieux de singularités de type II

Les singularités appartenant au type II se produisent lorsque la matrice jacobienne \mathbf{A}_2 est singulière, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$\det(\mathbf{A}_2) = 0 \quad (4.37)$$

L'expression de la matrice \mathbf{A}_2 est donnée par l'équation (4.30). Étant donné que les éléments de la matrice \mathbf{A}_2 ne dépendent que des coordonnées généralisées du manipulateur, les dégénérescences de la matrice \mathbf{A}_2 , c'est-à-dire les singularités de type II seront étudiées ici à l'aide d'un développement symbolique de son déterminant.

4.3.3.1 Cas général : orientation arbitraire de plate-forme mobile

Dans cette section, nous considérons le déterminant de la matrice \mathbf{A}_2 , de dimension (6×6) , telle que déterminée à l'équation (4.30), que nous réécrivons sous la forme :

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} s_{1y} & -s_{1x} & 0 & \left((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \begin{bmatrix} s_{1y} & -s_{1x} & 0 \end{bmatrix}^T \right)^T \\ s_{2y} & -s_{2x} & 0 & \left((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \begin{bmatrix} s_{2y} & -s_{2x} & 0 \end{bmatrix}^T \right)^T \\ s_{3y} & -s_{3x} & 0 & \left((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \begin{bmatrix} s_{3y} & -s_{3x} & 0 \end{bmatrix}^T \right)^T \\ s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} & \left((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \begin{bmatrix} s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} \end{bmatrix}^T \right)^T \\ s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} & \left((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \begin{bmatrix} s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} \end{bmatrix}^T \right)^T \\ s_{3x} & s_{3y} & s_{3z} & \left((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \begin{bmatrix} s_{3x} & s_{3y} & s_{3z} \end{bmatrix}^T \right)^T \end{vmatrix} \quad (4.38)$$

Après substitution des composantes des vecteurs \mathbf{u}_i et \mathbf{s}_i , pour $i = 1, 2, 3$, des vecteurs \mathbf{b}_i et de la matrice de rotation \mathbf{Q} , dans l'expression du déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{A}_2 de l'équation (4.38), l'équation du lieu de singularité de type II a été obtenue par développement symbolique via le logiciel Maple, sous la forme matricielle compacte :

$$\mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \quad (4.39)$$

où les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} sont donnés respectivement par :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{bmatrix}^T \quad (4.40)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \end{bmatrix}^T \quad (4.41)$$

La matrice \mathbf{C} , de dimension (5×5) , est donnée par :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^3 c_{(0,0,k)} z^k & \sum_{k=0}^3 c_{(0,1,k)} z^k & \sum_{k=0}^3 c_{(0,2,k)} z^k & \sum_{k=0}^2 c_{(0,3,k)} z^k & \sum_{k=0}^1 c_{(0,4,k)} z^k \\ \sum_{k=0}^3 c_{(1,0,k)} z^k & \sum_{k=0}^3 c_{(1,1,k)} z^k & \sum_{k=0}^2 c_{(1,2,k)} z^k & \sum_{k=0}^1 c_{(1,3,k)} z^k & 0 \\ \sum_{k=0}^3 c_{(2,0,k)} z^k & \sum_{k=0}^2 c_{(2,1,k)} z^k & \sum_{k=0}^1 c_{(2,2,k)} z^k & 0 & 0 \\ \sum_{k=0}^2 c_{(3,0,k)} z^k & \sum_{k=0}^1 c_{(3,1,k)} z^k & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{k=0}^1 c_{(4,0,k)} z^k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Les éléments de la matrice triangulaire \mathbf{C} sont des polynômes monovariabiles en z , dont les coefficients $c_{(n,m,k)}$, $0 \leq n, m, n + m \leq 4$, dépendent des angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) et des paramètres géométriques b et r du manipulateur parallèle étudié. Le polynôme en x, y, z , ainsi obtenu à l'équation (4.39), que nous notons $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z) = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$, contient par conséquent 46 coefficients $c_{(n,m,k)}$. Par suite, lors du développement symbolique de ce polynôme via Maple, nous avons obtenu, au total, une somme contenant plus de 1000 termes. En raison du nombre et de la complexité de ces termes, les coefficients $c_{(n,m,k)}$ ne sont pas explicités ici sous leur forme symbolique, c'est-à-dire en fonction des angles (ϕ, θ, ψ) et des paramètres b et r . Ces coefficients peuvent néanmoins être obtenus aisément en calculant le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{A}_2 , donné à l'équation (4.38), via un logiciel de traitement symbolique.

Finalement, nous déduisons des équations vectorielles (4.39), (4.40), (4.41) et (4.42) que l'équation analytique du lieu correspondant aux singularités de type II, pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, est un polynôme dont le degré maximal des termes en x et y est 4, et dont le degré maximal des termes en z est 3. De plus, le degré maximal cumulé de ce polynôme est tel que $0 \leq n + m + k \leq 5$. Par suite, la formulation vectorielle particulière utilisée à l'équation (4.38) permet de grandement faciliter l'implantation numérique du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ pour la représentation graphique des lieux de singularités correspondants. L'algorithmique utilisée pour la représentation des lieux de singularités de type II du mécanisme parallèle de type 3-RRRS sera présentée à la section 4.3.5 du présent mémoire.

4.3.3.2 Cas particulier : la plate-forme mobile est parallèle à la base

Dans le cas particulier où les angles d'Euler θ et ψ sont égaux à zéro, c'est-à-dire que la plate-forme mobile est parallèle à la base, l'expression symbolique du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ obtenue à l'équation (4.39) peut être réduite sous la forme simplifiée :

$$S_{\mathbf{Q}}(x, y, z) = \frac{27}{4} z^3 b^3 (b - r \cos \phi) [x^2 + y^2 - (b^2 + r^2 - 2br \cos \phi)] = 0 \quad (4.43)$$

Ceci permet d'identifier trois types de configurations singulières de type II :

1. $z = 0$: la coordonnée en z du centre de masse C de la plate-forme mobile est égale à zéro. Le lieu de singularités est par conséquent le plan (x, y) de la base du manipulateur.

2. $(b - r \cos \phi) = 0$: une singularité se produit donc lorsque $\cos \phi = b/r$, ce qui limite les débattements angulaires possibles de la plate-forme mobile autour de l'axe z . Par exemple, si $r = 2b$, l'angle de rotation ϕ sera limité tel que : $|\phi| < 60^\circ$.
3. $[x^2 + y^2 - (b^2 + r^2 - 2br \cos \phi)] = 0$: il s'agit dans ce cas de l'équation d'un cylindre droit dont les sections parallèles au plan (x, y) sont des cercles de rayon $R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \phi}$ dont le centre a pour coordonnées $(x, y) = (0, 0)$.

Nous remarquons que ce troisième lieu de singularités est identique à celui obtenu à la section 4.2.6.2 pour le cas où la plate-forme mobile est parallèle à la base et, pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i2} et θ_{i3} . Pour ce premier cas d'actionnement, cette singularité de type II correspondait à une configuration telle que la condition 5a était satisfaite (variété complexe générale de rang 5). Or, dans le cas où les angles θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3}$ sont actionnés, chaque droite de Grassmann associée à un angle actionné θ_{i1} , que nous notons (d_{i1}) , passe par le point P_{i5} et a pour vecteur directeur \mathbf{u}_i . En effet, au vu de l'équation (4.30), la droite (d_{i1}) sera caractérisée dans l'espace cartésien par le vecteur de Plücker :

$$\mathbf{U}_{i1} = [\mathbf{u}_i^T \quad ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{u}_i)^T]^T \quad (4.44)$$

Cette singularité de type II correspond dans ce cas à une configuration de la plate-forme mobile telle que les trois droites (d_{i1}) , $i = 1, 2, 3$, forment un faisceau plan de droites, c'est-à-dire que les droites (d_{i1}) sont situées dans le plan de la plate-forme, et intersectent toutes un même point (variété de droites de rang 2). Ainsi, pour deux cas d'actionnement distincts, le même lieu de singularités est obtenu pour le cas parallèle mais celui-ci correspond à des dégénérescences différentes de la cinématique du manipulateur.

Remarque : Nous pouvons également introduire les droites de Grassmann $(d_{i\Delta 3})$ associées aux angles actionnés $\Delta\theta_{i3}$, passant chacune par le point P_{i5} et ayant pour vecteur directeur \mathbf{s}_i . En effet, la droite $(d_{i\Delta 3})$ sera caractérisée dans l'espace cartésien par le vecteur de Plücker :

$$\mathbf{U}_{i\Delta 3} = [\mathbf{s}_i^T \quad ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{s}_i)^T]^T \quad (4.45)$$

Ainsi, nous pouvons également interpréter physiquement les deux premières configurations singulières du mécanisme de type 3-RRRS obtenues pour le cas parallèle.

1. $z = 0$: dans ce cas, les trois droites (d_{i1}) ainsi que les trois droites $(d_{i\Delta 3})$, $i = 1, 2, 3$, sont toutes situées dans le plan (x, y) de la base. De ce fait, elles intersectent donc toutes une droite commune située dans ce plan. Ainsi, le manipulateur est dans

une configuration telle que les conditions 3d et 5b, définie à la section 4.2.4, sont satisfaites simultanément (variétés de rangs 3 et 5). Dans une telle configuration, la plate-forme mobile peut être animée d'un mouvement infinitésimal dans la direction $(\pm z)$ lorsque tous les actionneurs sont bloqués.

2. $(b - r \cos \phi) = 0$: cette singularité de type II correspond à une configuration de la plate-forme mobile telle que, quelle que soit la position $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$ du point C , les trois droites (d_{i1}) , $i = 1, 2, 3$, forment un faisceau plan de droites, situé dans le plan de la plate-forme (variété de droites de rang 2).

Résultat pour le cas parallèle :

Pour le cas particulier où (i) la plate-forme mobile est parallèle à la base, et (ii) la plate-forme mobile est orientée autour de l'axe z d'un angle ϕ tel que $\cos \phi < b/r$, alors la région de l'espace cartésien ne contenant aucune singularité de type II est exactement la région située à l'intérieur du cylindre droit :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < R^2 \\ z > 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

où le rayon R est donné par : $R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \phi}$.

Pour le cas parallèle, nous observons finalement une corrélation complète avec les résultats déjà obtenus dans la référence Ebert-Uphoff et Gosselin [53].

4.3.4 Configurations singulières additionnelles

Dans cette section, nous utilisons une procédure identique à celle de la section 4.2.7 afin de déterminer si des configurations singulières additionnelles existent pour le mécanisme de type 3-RRRS. Nous faisons donc l'hypothèse préalable que les matrices jacobiennes \mathbf{A}_2 et \mathbf{B}_2 sont définies et inversibles et nous discutons l'existence de configurations singulières additionnelles. Ces singularités sont obtenues à travers une analyse des configurations de la plate-forme mobile du manipulateur pour lesquelles la matrice de dimension (3×6) reliant les vitesses des articulations actives à celles des articulations passives n'est pas définie. D'après la formulation générale de la matrice jacobienne obtenue à la section 2.2, nous pouvons directement écrire la relation cinématique :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2p} = \mathbf{J}_{2p} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2p} = [\dot{\theta}_{13} \ \dot{\theta}_{23} \ \dot{\theta}_{33}]^T$ contient les vitesses des articulations rotoïdes passives. La matrice jacobienne \mathbf{J}_{2p} , de dimension (3×6) , est donnée sous la forme vectorielle compacte :

$$\mathbf{J}_{2p} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{13}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_1) \times \mathbf{v}_{13})^T \\ \mathbf{v}_{23}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_2) \times \mathbf{v}_{23})^T \\ \mathbf{v}_{33}^T & ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_3) \times \mathbf{v}_{33})^T \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Les vecteurs \mathbf{v}_{i3} correspondants, pour $i = 1, 2, 3$, sont donnés par l'équation (2.25). Par suite, étant donné que la matrice jacobienne $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}_2$ est inversible, nous utilisons l'équation (2.15) afin d'éliminer le vecteur des vitesses généralisées dans l'équation (4.21) et nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{2p} = \mathbf{J}_{2p} \mathbf{J}_2^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (4.49)$$

Par conséquent, l'équation reliant les vitesses des articulations actives et passives n'est pas définie lorsque les vecteurs de Plücker $\mathbf{U}_{i3} = [\mathbf{v}_{i3}^T \ ((\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{v}_{i3})^T]^T$, associés aux angles θ_{i3} , $i = 1, 2, 3$, des articulations rotoïdes passives, ne sont pas définis. Ceci implique que la droite de Grassmann associées à la i -ème articulation passive n'est également pas définie. Ainsi, en considérant l'équation (2.25), il apparaît clairement qu'une configuration singulière additionnelle se produit lorsque le dénominateur commun des composantes du vecteur \mathbf{v}_{i3} est égal à zéro, c'est-à-dire, pour $i = 1, 2, 3$:

$$\ell_{i1}\ell_{i5} \sin \Delta\theta_{i3} = 0 \quad (4.50)$$

Néanmoins, ayant fait l'hypothèse que la matrice jacobienne \mathbf{B}_2 est définie et inversible, nous avons par la même restreint l'étude des configurations singulières additionnelles à l'intervalle $\Delta\theta_{i3} \in]0, \pi[$ (première singularité de type I). La relation (4.50) ne sera donc jamais satisfaite à l'intérieur de l'espace de travail du manipulateur. Par conséquent, la relation cinématique (4.49) entre vitesses actives et passives est parfaitement définie. Finalement, cette étude ne conduit à aucune singularité supplémentaire et toutes les configurations singulières du manipulateur parallèle de type 3-RRRS ont été déterminées, via l'analyse de dégénérescences des matrices jacobienes \mathbf{A}_2 et \mathbf{B}_2 , aux sections 4.3.2 et 4.3.3.

4.3.5 Représentations graphiques des lieux de singularités

Nous considérons ici les résultats caractérisant les configurations singulières de type II et nous présentons l'algorithme optimisé suivant afin de représenter graphiquement les lieux de singularités correspondants. Cet algorithme est basé sur la formulation vectorielle

particulière utilisée pour représenter le polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z) = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ déterminé par les équations (4.39), (4.40), (4.41) et (4.42). La représentation graphique des lieux de singularités est obtenue pour une orientation constante \mathbf{Q} de la plate-forme mobile du manipulateur et pour une succession de plans à altitude constante. Par souci de lisibilité les sections transversales et longitudinales du lieu de singularités sont déterminées pour chacun des plans à z constant. Ceci permet d'obtenir une densité satisfaisante et une répartition uniforme de points lors de l'affichage des racines du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$.

Algorithme permettant la visualisation des lieux de singularités de type II :

- S1.** Définir un maillage parallélépipédique dont les $(n_x \times n_y \times n_z)$ noeuds décrivent les positions \mathbf{p} du centre de masse C de la plate-forme mobile, où (i) n_z décrit le nombre de plans équidistants, définis par $z = const$ entre les altitudes $z = z_{min}$ et $z = z_{max}$, pour lesquels les sections du lieu de singularités de type II sont déterminées, et (ii) n_x et n_y décrivent, pour chaque plan $z = const$, le nombre de pas incrémentaux constituant le maillage rectangulaire pour respectivement $x = x_{min}, \dots, x_{max}$ et $y = y_{min}, \dots, y_{max}$.
- S2.** Pour l'orientation \mathbf{Q} prescrite, calculer les 46 coefficients $c_{(n,m,k)}$, $0 \leq n + m + k \leq 5$.
- S3.** Poser $z = z_{min}$.
- S4.** Pour l'altitude courante z , faire
- S5.** Calculer les 15 éléments polynômiaux $\sum_k c_{(n,m,k)} z^k$ de la matrice triangulaire \mathbf{C} donnée par l'équation (4.42). Les coefficients $c_{(n,m,k)}$ ont été déterminés à l'étape 2.
- S6.** Pour chacune des n_x sections transversales équidistantes du maillage rectangulaire, c'est-à-dire les sections à x constant, calculer le vecteur \mathbf{x} donné par l'équation (4.40) et calculer le vecteur $\mathbf{C}\mathbf{x}$. Le vecteur $\mathbf{C}\mathbf{x}$ étant déterminé, les 4 racines (y_1, y_2, y_3, y_4) du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z) = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ sont calculées numériquement puis affichées.
- S7.** Ensuite, pour chacune des n_y sections longitudinales équidistantes du maillage rectangulaire, c'est-à-dire les sections à y constant, calculer le vecteur \mathbf{y} donné par l'équation (4.41) et calculer le vecteur $\mathbf{y}^T \mathbf{C}$. Le vecteur $\mathbf{y}^T \mathbf{C}$ étant déterminé, les 4 racines (x_1, x_2, x_3, x_4) du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z) = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ sont calculées et affichées.
- S8.** Poser $z = z + (z_{max} - z_{min})/n_z$.
- S9.** Répéter les étapes 4 à 8 jusqu'à ce que la dernière section du lieu de singularité ait été affichée dans le plan $z = z_{max}$.

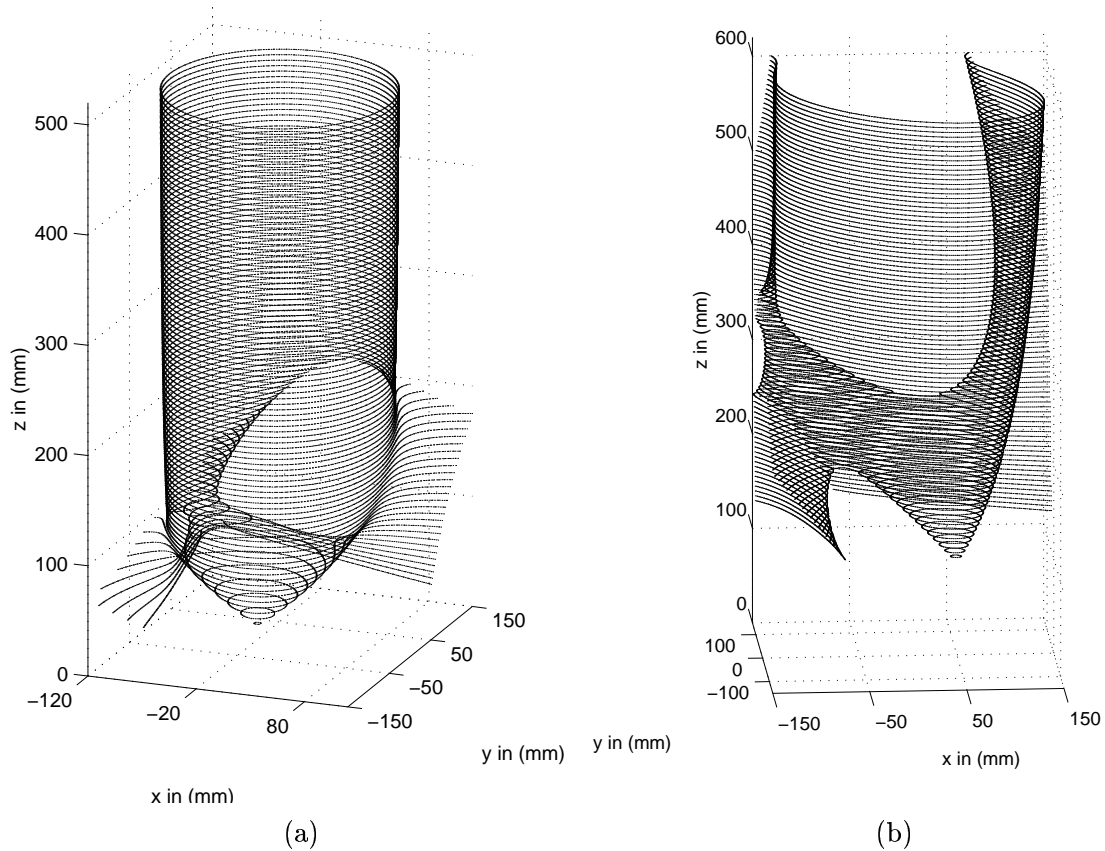


Fig. 4.8: Vues en perspective des lieux de singularités de type II du manipulateur parallèle de type 3-RRRS, pour les cas (a) $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 10^\circ, 10^\circ)$, et (b) $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, $(b, r) = (207 \text{ mm}, 300 \text{ mm})$.

Par suite, l'algorithme décrit précédemment a été implémenté en code MATLAB. Cet algorithme a tout d'abord été utilisé afin d'obtenir les représentations graphiques spatiales du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ telles que montrées à la figure 4.8. La figure 4.8-(a) représente le lieu de singularité de type II du manipulateur pour l'orientation $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 10^\circ, 10^\circ)$, déterminé dans un maillage cubique de l'espace cartésien avec $n_x = 160$, $n_y = 200$ et $n_z = 100$. Par suite, la figure 4.8-(b) représente le lieu de singularité de type II pour l'orientation $(\phi, \theta, \psi) = (10^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$, déterminé dans un maillage cubique de l'espace cartésien avec $n_x = 200$, $n_y = 160$ et $n_z = 100$. Le calcul et l'affichage de chacune de ces surfaces a nécessité environ 1 min 50 s sur un système de type Pentium II 450 MHz, avec 128 Mb de RAM. Il apparaît sur ces deux figures que les surfaces obtenues limitent les translations de l'effecteur à l'intérieur d'un volume fermé dans quasiment toutes les directions de l'espace cartésien. Plusieurs sections de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur, sur lesquelles sont superposées les représentations graphiques

planes du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ sont également fournies à la figure 4.9 pour différentes valeurs de la coordonnée généralisée z et du paramètre géométrique r .

Ces différentes représentations graphiques planes et spatiales nous permettent finalement de visualiser à quel point les lieux de singularités de type II du mécanisme de type 3-RRRS, du fait qu'ils intersectent son espace atteignable, limitent les débattements de l'effecteur. La connaissance sous forme analytique du polynôme $S_{\mathbf{Q}}(x, y, z)$ constitue donc un pré-requis intéressant à toute optimisation des paramètres géométriques ou planification de trajectoire pour ce type de manipulateur.

4.4 Conclusion

Une étude complète des singularités du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté a été présentée dans ce chapitre pour différents cas d'actionnement. Les singularités du mécanisme ont tout d'abord été étudiées pour le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Une approche basée sur la géométrie des droites de Grassmann nous a permis de déterminer les équations sous forme analytique des lieux de singularités du mécanisme. Il a été montré que la plupart des cas de singularités de ce manipulateur se réduisent à la génération d'un complexe général correspondant à une variété de droites de type 5a, le lieu des singularités correspondant au complexe général étant constitué, pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, par une surface quadratique, c'est-à-dire soit un cylindre hyperbolique, elliptique ou parabolique, orienté suivant l'axe z .

Les singularités correspondant au cas où, pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$, ont ensuite été étudiées. Dans ce cas, le mécanisme est cinématiquement équivalent à une structure parallèle de type 3-RRRS. Pour cette seconde étude, une procédure basée sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne a permis de montrer que l'équation du lieu correspondant aux singularités de type II, pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile, est un polynôme dont le degré maximal des termes en x et y est 4, et dont le degré maximal des termes en z est 3. Finalement, pour les deux cas d'actionnement, diverses représentations graphiques planes et spatiales des lieux de singularités correspondants ont été fournies afin d'illustrer les résultats théoriques obtenus.

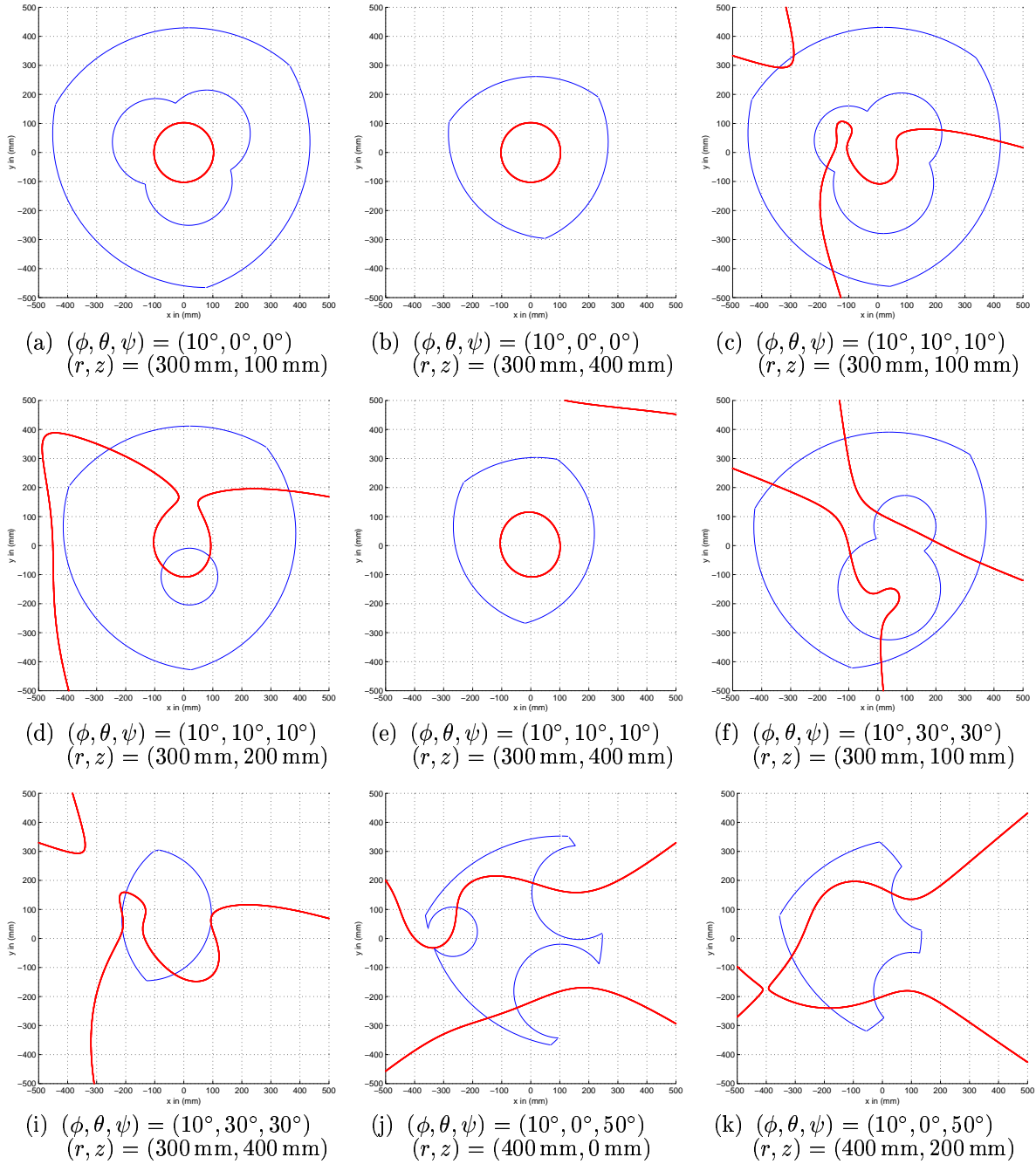


Fig. 4.9: Frontière de l'espace atteignable à orientation constante du manipulateur parallèle de type 3-RRR superposée au lieu des singularités de type II situés dans des plans parallèles au plan (x, y) . Ces représentations bidimensionnelles sont fournies pour différentes orientations \mathbf{Q} de la plate-forme mobile et valeurs du paramètre géométrique r , ($b = 207 \text{ mm}$).

Chapitre 5

Commande Non Linéaire Adaptative

Dans ce chapitre, nous abordons la problématique de la commande du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté. Les méthodes de contrôle linéaires sont variées et très bien documentées dans la littérature. Cependant, depuis la fin des années 80, on note l'émergence de nouvelles structures de commande non linéaires très performantes, notamment la commande adaptative, qui sont beaucoup plus robustes aux perturbations et permettent de réduire substantiellement le temps de réponse du système. Les lois de commande adaptatives nécessitent la linéarisation du modèle dynamique complet en fonction des paramètres dynamiques du manipulateur, tels que les frottements statiques et visqueux, ainsi que les masses et inerties des pattes et de la plate-forme mobile. L'obtention du modèle dynamique linéarisé est également un prérequis indispensable à l'identification des paramètres dynamiques d'une telle architecture. Le modèle dynamique linéarisé du manipulateur sera donc développé dans ce dernier chapitre à partir d'une formulation du modèle dynamique inverse obtenue via le principe du travail virtuel. La problématique de l'implémentation d'une structure de commande adaptative mettant en oeuvre une calibration en ligne des paramètres dynamiques du manipulateur sera finalement abordée.

5.1 Les lois de commande adaptatives

LE modèle dynamique d'un robot manipulateur ne pouvant être parfait, il était naturel que les chercheurs appliquent les théories de la commande adaptative pour estimer ou ajuster en ligne les valeurs de paramètres dynamiques utilisés dans la structure de commande. Les nombreuses méthodes publiées sur le sujet montrent que la commande adaptative de manipulateurs rigides a atteint une bonne maturité (Khalil et Dombre [88]). Ces structures de commande non linéaires sont beaucoup plus robustes aux perturbations et aux bruits de mesure et permettent de réduire substantiellement le temps de réponse du système mécanique asservi.

La première version d'une commande dynamique adaptative permettant une calibration en ligne des paramètres dynamiques a été formulée par Craig [89]. La méthode, basée sur la proposition d'une commande adaptative non linéaire asymptotiquement stable résultant du choix d'une fonction de Lyapunov appropriée, comporte deux hypothèses restrictives. La première est que l'on doit connaître les accélérations articulaires et la seconde est que l'inverse de la matrice d'inertie estimée doit rester bornée. Craig *et al.* [90] ont suggéré de projeter les paramètres estimés dans une région connue de l'espace des paramètres contenant les paramètres réels et dans laquelle l'inverse de la matrice d'inertie du manipulateur existe. Néanmoins, la connaissance et le calcul de telles régions restent complexes (Khalil et Dombre [88]). Par suite, Ortega et Spong [91] ont proposé une nouvelle version de la loi de commande adaptative proposée par Craig dans laquelle la restriction sur l'inverse de la matrice d'inertie estimée est levée, mais celle-ci requiert toujours la connaissance des accélérations articulaires. L'implémentation de telles méthodes est complexe et requiert d'obtenir le signal d'accélération via une différentiation numérique du signal de vitesse.

Afin de développer un algorithme adaptatif permettant une calibration dynamique et fondé sur le modèle dynamique complet, Slotine et Li [92] ont utilisé les propriétés liées à la passivité des robots afin de développer une loi de commande adaptative non linéaire asymptotiquement stable. On parle, dans la littérature, de *commande adaptative passive*. L'algorithme de contrôle proposé par Slotine et Li [92] consiste en un contrôleur dérivatif auquel on ajoute un terme permettant la compensation des couples dus aux effets inertiels, aux forces de Coriolis, à la gravité et aux accélérations centripètes. La tâche de contrôle

est effectuée via une boucle de retour interne en vitesse et une boucle de retour externe en position. La boucle de retour en vitesse contient la loi d'adaptation et la boucle de retour externe représente un simple gain proportionnel sur la position. Cet algorithme de contrôle est désigné par *loi de contrôle avec compensation exacte* (ECCL). Landau et Horowitz [93] ont proposé de rajouter à cette loi de commande un terme proportionnel donnant plus de latitude sur le réglage des paramètres du contrôleur.

Afin de contourner le problème du calcul de la loi adaptative passive, Sadegh et Horowitz [94] ont proposé de calculer les lois de commande et d'adaptation en fonction des positions, des vitesses et des accélérations désirées. Un terme de retour non linéaire auxiliaire avec un gain constant est ajouté à la loi de commande adaptative originale afin de compenser les effets d'erreurs introduits par cette modification. Cette méthode présente donc l'avantage considérable de ne pas nécessiter un calcul temps-réel de la matrice d'observation. Le choix d'une fonction de Lyapunov appropriée permet de démontrer que cette nouvelle loi de commande est asymptotiquement stable. On parle dans ce cas de *loi de contrôle avec compensation désirée* (DCCL). Il a été montré dans la référence [94] que cette nouvelle loi d'adaptation est encore plus robuste aux bruits stochastiques, du fait que la matrice d'observation n'est pas contaminée par les bruits de mesure des vitesses et des positions articulaires. Comparativement aux structures de commande linéaires, cette loi de commande adaptative passive (i) est beaucoup plus robuste aux bruits de mesure et aux perturbations, (ii) permet d'obtenir des temps de réponse beaucoup plus courts et (iii) permet d'atteindre des accélérations de l'effecteur beaucoup plus importantes, et ce tout en permettant la calibration en ligne des paramètres dynamiques.

Finalement, les différentes lois de commande non linéaires adaptatives proposées dans la littérature réalisant une calibration dynamique en ligne nécessitent toutes la connaissance des équations dynamiques du manipulateur sous une forme linéarisée par rapport à ses paramètres dynamiques (cf. [89], [90], [91], [92], [93] et [94]). Ainsi, dans le présent chapitre, nous allons tout d'abord présenter les équations dynamiques du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté telles qu'obtenues dans la référence Ebert-Uphoff et Gosselin [95] en utilisant une formulation basée sur le principe du travail virtuel. Par suite, cette formulation particulière nous permettra de développer le modèle dynamique inverse complet du manipulateur sous une forme linéarisée. La problématique de l'implémentation de la structure de commande adaptative proposée par Sadegh et Horowitz [94] mettant en

oeuvre une calibration en ligne des paramètres dynamiques sera finalement abordée pour le cas du manipulateur parallèle étudié dans le présent mémoire.

5.2 Modèle dynamique inverse sous forme linéarisée

Il a été montré dans la littérature que les équations dynamiques de robots manipulateurs sont linéaires par rapport à leur paramètres dynamiques (Khalil et Kleinfinger [96], Khosla [97]). De nombreuses solutions ont été proposées pour la détermination du modèle dynamique sous forme linéarisée de robots sériels (Gautier et Khalil [98], Khosla [97]), et de robots à structure arborescente (Khalil *et al.* [99]).

Pour des manipulateurs possédant des chaînes cinématiques fermées, le modèle dynamique est souvent de forme très complexe (Merlet [1]). Par conséquent, il est difficile d'en obtenir une forme linéarisée en fonction des paramètres dynamiques. Plusieurs méthodologies ont été proposées pour palier à cette problématique (Walker [100], Goldenberg *et al.* [101], Khalil et Bennis [102]). Celles-ci sont basées sur l'ouverture des chaînes cinématiques afin d'obtenir un robot composé d'une structure arborescente. Par suite, les équations dynamiques sont dérivées en utilisant les techniques classiques dédiées aux architectures sérielles (Khalil *et al.* [99]) et les équations de contrainte décrivant la fermeture des boucles sont ensuite employées afin d'éliminer les variables associées aux articulations passives dans le modèle dynamique. Cette méthode a été appliquée au cas des robots parallèles plans mais devient très complexe lorsqu'utilisée pour des manipulateurs parallèles spatiaux. Bhattacharya *et al.* [103] ont proposé une méthode basée sur un modèle énergétique permettant la parallélisation des équations dynamiques, pouvant être distribué sur plusieurs processeurs. Cette méthode requiert néanmoins des temps de calcul élevés.

Finalement, une méthode permettant la détermination du modèle dynamique inverse sous une forme linéaire explicite en fonction des paramètres dynamiques a été proposée par Codourey et Burdet [105]. Celle-ci est basée sur le principe du travail virtuel et a été appliquée à l'*Hexaglide*, un manipulateur parallèle de type $6\text{-}\underline{P}(RR)S$ développé à l'ETH de Zurich. Néanmoins, la méthodologie présentée dans cette dernière référence est très simplifiée car la dynamique des chaînes cinématiques reliant la base à la plateforme mobile n'y est pas prise en compte. Dans le cas du manipulateur de type $6\text{-}\underline{P}(RR)S$ considéré, la masse de la plateforme mobile est effectivement largement supérieure à celles

des chaînes cinématiques constituant les pattes dont les masses peuvent être distribuées sur les actionneurs et la plate-forme. Par-contre, dans le cas du manipulateur parallèle dont les pattes sont constituées de mécanisme à 5 barres, la contribution dynamique dues aux inerties des pattes n'est pas négligeable par rapport à celle de la plate-forme. Le développement présenté ci-après poursuit donc avec l'obtention sous forme linéarisée du modèle dynamique inverse complet.

5.2.1 Modèle dynamique inverse de l'architecture

Nous présentons dans cette section le modèle dynamique inverse du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté représenté à la figure 1.8, dans le cas où, pour la i -ème patte, les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Les équations régissant la dynamique de cette architecture a été obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. Nous référons le lecteur à la référence Ebert-Uphoff et Gossselin [95] pour toutes les étapes de la dérivation des équations. Cette référence présente également le modèle dynamique de l'architecture tel qu'obtenu en utilisant le formalisme de Newton-Euler.

5.2.1.1 Notations additionnelles

Nous considérons toujours les notations introduites à la section 1.3 du présent mémoire et nous introduisons les notations additionnelles suivantes nécessaires à la formulation du modèle dynamique inverse de l'architecture (cf. figure 5.1) :

\mathbf{I}_{PF} : tenseur d'inertie de la plate-forme mobile,

m_{PF} : masse de la plate-forme mobile,

\mathbf{Q}_{ir} : matrice de rotation décrivant l'orientation du repère local de la r -ième membrure de la i -ème patte,

$\boldsymbol{\omega}_{ir}$: vitesse angulaire de la r -ième membrure de la i -ème patte, exprimée dans le repère de référence R , c'est-à-dire $\boldsymbol{\omega}_{ir} = \text{vect}(\dot{\mathbf{Q}}_{ir} \mathbf{Q}_{ir}^T)$,

\mathbf{c}_{ir} : vecteur décrivant la position du centre de gravité de la r -ième membrure de la i -ème patte exprimé dans le repère local de cette membrure,

\mathbf{r}_{ir}^c : vecteur décrivant la position du centre de gravité de la r -ième membrure de la i -ème patte exprimé dans le repère de référence R ,

m_{ir} : masse de la r -ième membrure de la i -ème patte,

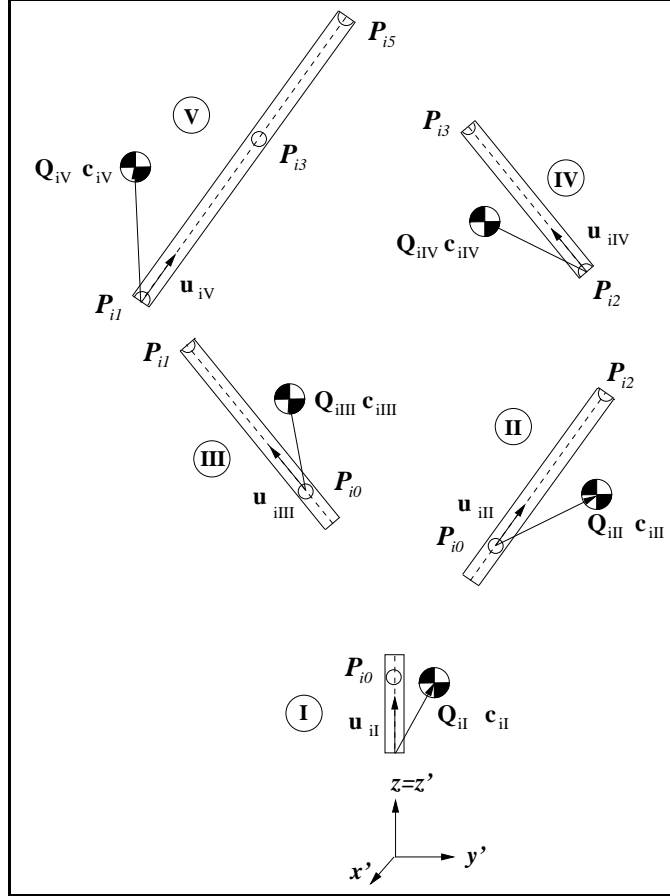


Fig. 5.1: Représentation schématique éclatée du mécanisme à 5 barres constituant la i -ème patte du manipulateur.

\mathbf{r}_{ir} : vecteur décrivant la position de l'origine du repère attaché à la r -ième membrure de la i -ème patte exprimé dans le repère de référence R ,

\mathbf{I}_{ir} : tenseur d'inertie de la r -ième membrure de la i -ème patte.

5.2.1.2 Forces et moments agissant sur le mécanisme

Nous déterminons dans la présente section les forces et moments agissant sur la plate-forme mobile. Soient \mathbf{F}_{PF}^G , \mathbf{F}_{PF}^{IN} et \mathbf{M}_{PF}^{IN} les forces de gravité et d'inertie ainsi que le moment d'inertie agissant au centre de gravité C de la plate-forme mobile, il vient :

$$\mathbf{F}_{PF}^G = -m_{PF}g \mathbf{k} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{F}_{PF}^{IN} = -m_{PF}\ddot{\mathbf{p}} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{M}_{PF}^{IN} = -(\mathbf{I}_{PF}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{PF}\boldsymbol{\omega})) \quad (5.3)$$

Nous regroupons ensuite ces forces et moments agissant sur la plate-forme dans une force \mathbf{F} et un moment \mathbf{M} agissant au centre de masse C :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{PF}^G + \mathbf{F}_{PF}^{IN} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{PF}^{IN} \quad (5.5)$$

Nous déterminons ensuite les forces et moments exercés par les différentes membrures des mécanismes à 5 barres reliant la base à la plate-forme mobile. Soient \mathbf{F}_{ir}^G , \mathbf{F}_{ir}^{IN} et \mathbf{M}_{ir}^{IN} les forces de gravité et d'inertie ainsi que le moment d'inertie agissant au centre de gravité de la r -ième membrure de la i -ème patte, nous avons :

$$\mathbf{F}_{ir}^G = -m_{ir} g \mathbf{k} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F}_{ir}^{IN} = -m_{ir} \ddot{\mathbf{r}}_{ir}^c \quad (5.7)$$

$$\mathbf{M}_{ir}^{IN} = -(\mathbf{I}_{ir} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ir} + \boldsymbol{\omega}_{ir} \times (\mathbf{I}_{ir} \boldsymbol{\omega}_{ir})) \quad (5.8)$$

Nous regroupons ensuite ces forces et moments agissant sur la la r -ième membrure de la i -ème patte dans une force \mathbf{F}_{ir} et un moment \mathbf{M}_{ir} :

$$\mathbf{F}_{ir} = \mathbf{F}_{ir}^G + \mathbf{F}_{ir}^{IN} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{M}_{ir} = \mathbf{M}_{ir}^{IN} \quad (5.10)$$

Nous prenons également en compte le couple provoqué au niveau de chaque actionneur par les frottements secs et visqueux ainsi que par l'inertie du rotor. Le couple résistant correspondant τ_{ij}^R autour de l'axe de la j -ième articulation rotoïde de la patte i peut s'écrire :

$$\tau_{ij}^R = f_{ij}^s \text{sign}(\dot{\theta}_{ij}) + f_{ij}^v \dot{\theta}_{ij} + N_{ij}^2 I_{ij} \ddot{\theta}_{ij} \quad (5.11)$$

où f_{ij}^s et f_{ij}^v désignent respectivement les paramètres de frottement sec et visqueux, I_{ij} est le moment d'inertie du rotor et N_{ij} est le rapport de réduction de l'actionneur. Les couples τ_{ij}^R sont ensuite collectés dans le vecteur de dimension (6×1) suivant :

$$\boldsymbol{\tau}^R = [\tau_{12}^R \quad \tau_{22}^R \quad \tau_{32}^R \quad \tau_{13}^R \quad \tau_{23}^R \quad \tau_{33}^R]^T \quad (5.12)$$

Par suite, les deux ressorts attachés aux extrémités proximales des parallélogrammes de chaque patte i , utilisés afin de réaliser l'équilibrage statique de l'architecture, exercent les efforts $\mathbf{F}_{ij}^{S-stiff}$ et \mathbf{F}_{ij}^{S-IN} , désignant respectivement la force élastique et la force d'inertie exercées par les deux ressorts de la i -ème patte ($j = 2, 3$). La détermination des efforts associés aux éléments élastiques est présentée dans la référence [95].

Finalement, étant donné que le mécanisme est équilibré statiquement, nous éliminons les efforts \mathbf{F}_{PF}^G , \mathbf{F}_{ir}^G et $\mathbf{F}_{ij}^{S-stiff}$ du modèle dynamique. De plus, étant donné que les masses des ressorts utilisés pour réaliser la compensation statique sont négligeables par rapport à la masse de la plate-forme mobile et des pattes du manipulateur, la contribution inertielle des éléments élastiques est négligée et nous éliminons également les efforts \mathbf{F}_{ij}^{S-IN} dans les équations dynamiques.

5.2.2 Formulation du modèle dynamique inverse

En considérant ces différentes hypothèses, le modèle dynamique inverse du manipulateur est obtenu, en utilisant le principe du travail virtuel, sous la forme compacte (Ebert-Uphoff et Gosselin [95]) :

$$\boldsymbol{\tau} = -(\mathbf{J}^{-1})^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 \sigma_{ij} \mathbf{L}_{ij} \right) + \boldsymbol{\tau}^R \quad (5.13)$$

où le vecteur des couples articulaires $\boldsymbol{\tau}$ de dimension (6×1) est donné, pour le cas d'actionnement considéré, par :

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_{12} \quad \tau_{22} \quad \tau_{23} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23} \quad \tau_{33}]^T \quad (5.14)$$

et la matrice jacobienne \mathbf{J} a été déterminée à la section 2.2 du présent mémoire.

Le vecteur \mathbf{L}_{ij} , de dimension (6×1) , a pour expression :

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ij} \\ (\mathbf{Q}\mathbf{b}_i) \times \mathbf{v}_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

et les vecteurs \mathbf{v}_{ij} , $j = 2, 3$, ont été déterminés respectivement aux équations (2.24) et (2.25). Le moment scalaire σ_{ij} , exercé par les membrures de la i -ème patte autour de l'axe de l'articulation rotoïde associée à l'angle θ_{ij} , $j = 2, 3$, est donné par :

$$\sigma_{ij} = \sum_{r=I}^V \left[\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ir} \\ \mathbf{M}_{ir} \end{bmatrix} \right]^T \mathbf{b}_{ijr} \quad (5.16)$$

et le vecteur \mathbf{b}_{ijr} , représentant la dérivée du torseur cinématique de la r -ième membrure de la i -ème patte divisé par la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{ij}$, a pour expression :

$$\mathbf{b}_{ijr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{ir}}{\partial \theta_{ij}} \\ \text{vect} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_{ir}}{\partial \theta_{ij}} \mathbf{Q}_{ir}^T \right) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Ce modèle dynamique obtenu en utilisant le principe du travail virtuel présente l'avantage que tous les termes intermédiaires intervenant dans le calcul du vecteur des couples articulaires $\boldsymbol{\tau}$ ont une signification physique. Il est important de préciser que le modèle dynamique inverse de toute architecture parallèle déterminé via le principe du travail virtuel peut être obtenu sous une forme équivalente à celle de l'équation (5.13) (Wang et Gosselin [106]).

5.2.3 Linéarisation du modèle dynamique inverse

Sur la base de la formulation des équations dynamiques obtenues dans la section précédente, nous développons ici le modèle dynamique inverse de l'architecture sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\Theta} \quad (5.18)$$

où la matrice $\boldsymbol{\Psi}$, appelée *matrice d'observation*, contient les équations non linéaires et les états du robot et le vecteur $\boldsymbol{\Theta}$ contient les paramètres dynamiques à estimer. Par suite, le modèle du robot parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté est schématiquement constitué de 22 corps rigides : les six moteurs, les 3 pattes dont chacune est constituée de 5 membrures référencées I à V et la plate-forme mobile. Une simplification peut être effectuée en calculant les équations dynamiques des moteurs directement dans l'espace articulaire et celles de la plate-forme mobile dans l'espace cartésien. Ainsi, l'équation (5.18) peut être réécrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{1..6}^M & \boldsymbol{\Psi}_7^{PF} & \boldsymbol{\Psi}_{1..3}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{1..6}^M \\ \boldsymbol{\Theta}_7^{PF} \\ \boldsymbol{\Theta}_{1..3}^L \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

où le vecteur $\boldsymbol{\Theta}_{1..6}^M$ contient les paramètres dynamiques des 6 moteurs considérés tous identiques, le vecteur $\boldsymbol{\Theta}_{1..3}^L$ contient les paramètres dynamiques des 3 pattes, et le vecteur $\boldsymbol{\Theta}_7^{PF}$ contient les paramètres dynamiques de la plate-forme mobile. Le calcul des matrices d'observation partielles $\boldsymbol{\Psi}_{1..6}^M$, $\boldsymbol{\Psi}_7^{PF}$ et $\boldsymbol{\Psi}_{1..3}^L$ est présenté dans les sections ci-après.

5.2.3.1 Détermination de la matrice d'observation partielle $\boldsymbol{\Psi}_{1..6}^M$

Pour le calcul de la matrice $\boldsymbol{\Psi}_{1..6}^M$ permettant l'observation partielle des paramètres dynamiques des actionneurs du mécanisme, nous faisons l'hypothèse que les inerties des

rotors ainsi que les rapports de réduction sont identiques pour les six actionneurs. Il suit que nous pouvons collecter les inerties des rotors des actionneurs dans un terme unique I_M et les rapports de réduction dans un terme unique N_M . Par suite, la matrice $\Psi_{1..6}^M$ est directement donnée par :

$$\Psi_{1..6}^M = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{12} N_M^2 & \text{sign}(\dot{\theta}_{12}) & \cdots & 0 & \dot{\theta}_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{\theta}_{33} N_M^2 & 0 & \cdots & \text{sign}(\dot{\theta}_{33}) & 0 & \cdots & \dot{\theta}_{33} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

et le vecteur $\Theta_{1..6}^M$ contenant les 13 paramètres dynamiques à identifier pour les actionneurs s'écrit :

$$\Theta_{1..6}^M = \left[I_M \quad f_{12}^s \quad \cdots \quad f_{33}^s \quad f_{12}^v \quad \cdots \quad f_{33}^v \right]^T \quad (5.21)$$

5.2.3.2 Détermination de la matrice d'observation partielle Ψ_7^{PF}

Nous cherchons ensuite à déterminer la matrice Ψ_7^{PF} permettant l'observation partielle des paramètres dynamiques de la plate-forme mobile du manipulateur. En se référant à l'équation (5.13), nous pouvons directement écrire la relation :

$$\Psi_7^{PF} \Theta_7^{PF} = -(\mathbf{J}^{-1})^T \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

En faisant l'hypothèse que le tenseur d'inertie \mathbf{I}_{PF} est exprimé dans le repère principal d'inertie de la plate-forme mobile, celui-ci s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{I}_{PF} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Par suite, en utilisant les équations (5.4) et (5.5), nous réécrivons l'équation (5.22) sous la forme :

$$\Psi_7^{PF} \Theta_7^{PF} = -(\mathbf{J}^{-1})^T \begin{bmatrix} -m_{PF} \ddot{\mathbf{p}} \\ -(\mathbf{I}_{PF} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{PF} \boldsymbol{\omega})) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

avec, pour la convention angulaire utilisée basée sur les angles d'Euler standards dont la matrice de rotation \mathbf{Q} est explicitée à l'équation (1.1) :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \mathbf{t} \quad (5.25)$$

La matrice \mathbf{R} , reliant la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ de la plate-forme mobile au vecteur des dérivées des angles d'Euler $\mathbf{t} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ par rapport au temps, a pour expression :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ 1 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Finalement, en définissant la matrice \mathbf{W}_{PF} :

$$\mathbf{W}_{PF} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x & -\omega_y \omega_z & \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z & \dot{\omega}_y & -\omega_x \omega_z \\ -\omega_x \omega_y & \omega_x \omega_y & \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

nous obtenons une expression pour la matrice d'observation partielle Ψ_7^{PF} , c'est-à-dire :

$$\Psi_7^{PF} = (\mathbf{J}^{-1})^T \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{W}_{PF} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

et le vecteur Θ_7^{PF} contenant les quatre paramètres dynamiques à identifier pour la plate-forme mobile s'écrit :

$$\Theta_7^{PF} = \begin{bmatrix} m_{PF} & I_{xx} & I_{yy} & I_{zz} \end{bmatrix}^T \quad (5.29)$$

5.2.3.3 Détermination de la matrice d'observation partielle $\Psi_{1..3}^L$

Nous cherchons finalement à déterminer la matrice $\Psi_{1..3}^L$ permettant l'observation partielle des paramètres dynamiques des différentes membrures constituant les pattes du manipulateur. En utilisant l'équation (5.13), nous obtenons directement la relation :

$$\Psi_{1..3}^L \Theta_{1..3}^L = -(\mathbf{J}^{-1})^T \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 \sigma_{ij} \mathbf{L}_{ij} \right) \quad (5.30)$$

Par suite, le tenseur d'inertie \mathbf{I}_{ir} de la r -ième membrure de la i -ème patte du mécanisme a pour expression, dans le repère local lié à cette membrure :

$$\mathbf{I}_{ir} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{ir} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{ir} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{ir} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

En utilisant les équations (5.9) et (5.10), nous faisons le même raisonnement que pour la plate-forme afin de linéariser le torseur des efforts en fonction des paramètres dynamiques de la r -ième membrure de la patte i , sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ir} \\ \mathbf{M}_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\mathbf{r}}_{ir}^c & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mathbf{W}_{ir} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{ir} \\ I_{xx}^{ir} \\ I_{yy}^{ir} \\ I_{zz}^{ir} \end{bmatrix} = \Psi_{ir}^L \Theta_{ir}^L \quad (5.32)$$

où la matrice \mathbf{W}_{ir} , formée des composantes de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{ir} = [\omega_x^{ir} \ \omega_y^{ir} \ \omega_z^{ir}]^T$ et de leurs dérivées par rapport au temps, est donnée par :

$$\mathbf{W}_{ir} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x^{ir} & -\omega_y^{ir} \omega_z^{ir} & \omega_y^{ir} \dot{\omega}_z^{ir} \\ \omega_x^{ir} \dot{\omega}_z^{ir} & \dot{\omega}_y^{ir} & -\omega_x^{ir} \dot{\omega}_z^{ir} \\ -\omega_x^{ir} \dot{\omega}_y^{ir} & \omega_x^{ir} \dot{\omega}_y^{ir} & \dot{\omega}_z^{ir} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

La matrice Ψ_{ir}^L est la matrice d'observation des paramètres dynamiques de la r -ième membrure de la i -ème patte, les paramètres dynamiques de cette membrure étant contenus dans le vecteur Θ_{ir}^L . Par suite, en substituant l'expression du torseur des efforts déterminé à l'équation (5.32) dans la relation vectorielle (5.16), nous obtenons l'expression suivante pour le moment scalaire σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \sum_{r=I}^V \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ir} \\ \mathbf{M}_{ir} \end{bmatrix}^T \mathbf{b}_{ijr} = \sum_{r=I}^V (\Psi_{ir}^L \Theta_{ir}^L)^T \mathbf{b}_{ijr} = \sum_{r=I}^V (\mathbf{b}_{ijr})^T \Psi_{ir}^L \Theta_{ir}^L \quad (5.34)$$

De plus, étant donné que les paramètres dynamiques des membrures sont identiques pour les 3 chaînes cinématiques du manipulateur, nous pouvons directement écrire :

$$\Theta_{1..3}^L = \begin{bmatrix} \Theta_{iI}^L & \cdots & \Theta_{iV}^L \end{bmatrix}^T \quad (5.35)$$

Le vecteur $\Theta_{1..3}^L$ contenant les paramètres dynamiques des pattes du manipulateur est donc de dimension (20×1) . Ceci signifie qu'il n'est requis, en pratique, de n'identifier uniquement que les paramètres dynamiques d'une des chaînes cinématiques. Cette propriété inhérente à l'utilisation de géométries identiques pour les 3 pattes, permet de linéariser le moment scalaire σ_{ij} par rapport au vecteur des paramètres dynamiques $\Theta_{1..3}^L$:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_{ijI})^T \Psi_{iI}^L & \cdots & (\mathbf{b}_{ijV})^T \Psi_{iV}^L \end{bmatrix} \Theta_{1..3}^L \quad (5.36)$$

Nous introduisons la matrice Ψ_i^L , de dimension (1×20) , permettant l'observation partielle des paramètres dynamiques du mécanisme à 5 barres complet constituant la i -ème chaîne cinématique du manipulateur, sous la forme :

$$\Psi_i^L = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_{ijI})^T \Psi_{iI}^L & \cdots & (\mathbf{b}_{ijV})^T \Psi_{iV}^L \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Ensuite, l'expression du moment scalaire σ_{ij} est substituée dans l'équation (5.30), il vient :

$$\Psi_{1..3}^L \Theta_{1..3}^L = -(\mathbf{J}^{-1})^T \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 \Psi_i^L \Theta_{1..3}^L \mathbf{L}_{ij} \right) \quad (5.38)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\Psi_{1..3}^L \Theta_{1..3}^L = -(\mathbf{J}^{-1})^T \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 \mathbf{L}_{ij} \Psi_i^L \right) \Theta_{1..3}^L \quad (5.39)$$

ce qui permet finalement de dériver une expression compacte pour la matrice d'observation partielle $\Psi_{1..3}^L$:

$$\Psi_{1..3}^L = -(\mathbf{J}^{-1})^T \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=2}^3 \mathbf{L}_{ij} \right) \Psi_i^L \quad (5.40)$$

qui est donc constituée de la somme de matrices de dimension (6×20) , et le vecteur contenant les 20 paramètres dynamiques des pattes du manipulateur est donné par :

$$\Theta_{1..3}^L = \left[m_I \quad I_{xx}^I \quad I_{yy}^I \quad I_{zz}^I \quad \cdots \quad m_V \quad I_{xx}^V \quad I_{yy}^V \quad I_{zz}^V \right] \quad (5.41)$$

Ceci conclut la détermination du modèle dynamique complet sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques du manipulateur. La méthodologie présentée dans cette section peut être appliquée pour déterminer le modèle dynamique inverse linéarisé de tout manipulateur parallèle plan ou spatial à partir de la formulation des équations dynamiques basée sur le principe du travail virtuel proposée dans la référence Wang et Gosselin [106]. Par suite, nous discutons, dans la section ci-après, l'utilisation de ce modèle dynamique linéarisé dans une structure de commande non linéaire adaptative.

5.3 Commande non linéaire adaptative du manipulateur

Les algorithmes basés sur les théories de la commande non linéaire adaptative permettent la réalisation simultanée en ligne de l'asservissement en position et de la calibration dynamique. Dans la présente section, nous proposons l'implantation de la loi de commande non linéaire proposée par Sadegh et Horowitz [94] comme structure de contrôle du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté. En effet, cette loi de commande est plus robuste aux bruits de mesure et conduit à des performances temps-réel supérieures aux autres lois de commande adaptatives présentées dans la littérature (Whitcomb *et al.* [107]).

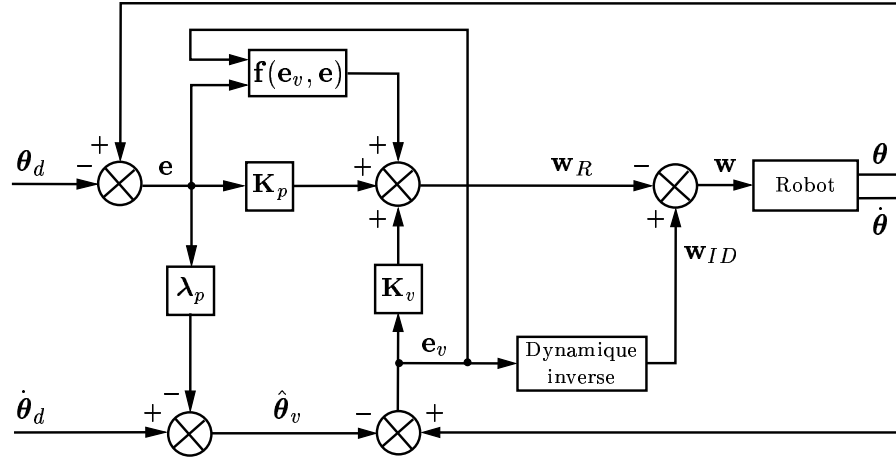


Fig. 5.2: Schéma-bloc de la loi de commande adaptative avec compensation désirée (Sadegh et Horowitz [94]).

5.3.1 Loi de commande adaptative avec compensation désirée

Nous présentons maintenant la structure de commande adaptative avec compensation désirée. Le schéma-bloc de cette commande est fourni à la figure 5.2. Soit $\mathbf{e}(t)$ le vecteur des erreurs articulaires instantanées en position :

$$\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\theta}_d(t) \quad (5.42)$$

où $\boldsymbol{\theta}_d$ représente le vecteur des positions articulaires désirées et le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ contient les positions articulaires mesurées par les encodeurs optiques. Par suite, la vitesse articulaire de référence estimée du modèle $\hat{\boldsymbol{\theta}}_v$ pour la boucle de retour externe est obtenue d'après les équations linéaires suivantes¹ :

$$\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}_v(t) = \mathbf{u}(t) \quad (5.43)$$

$$\mathbf{u}(t) = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d(t) - \boldsymbol{\lambda}_p \dot{\mathbf{e}}(t) \quad (5.44)$$

où $\boldsymbol{\lambda}_p$ est une matrice diagonale positive. Nous définissons ensuite l'erreur entre la vitesse articulaire mesurée $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ et la vitesse de référence estimée :

$$\mathbf{e}_v(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_v(t) \quad (5.45)$$

Pour le manipulateur parallèle statiquement équilibré possédant 6 degrés de liberté dont les 3 pattes sont constituées de mécanismes à 5 barres, la loi de commande $\mathbf{w}(t)$ avec

¹La notation \hat{x} indique que cette variable est une estimation de la variable réelle x .

compensation désirée est donnée par :

$$\mathbf{w}(t) = \Psi(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) \hat{\boldsymbol{\Theta}}(t) - \mathbf{K}_v \mathbf{e}_v(t) - \mathbf{K}_p \mathbf{e}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{e}_v(t), \mathbf{e}(t)) \quad (5.46)$$

que nous réécrivons sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_{ID}(t) - \mathbf{w}_R(t) \\ \mathbf{w}_{ID}(t) = \Psi(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) \hat{\boldsymbol{\Theta}}(t) \\ \mathbf{w}_R(t) = \mathbf{K}_v \mathbf{e}_v(t) + \mathbf{K}_p \mathbf{e}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{e}_v(t), \mathbf{e}(t)) \end{cases} \quad (5.47)$$

Le terme \mathbf{w}_{ID} contient donc le modèle dynamique inverse du manipulateur et le terme \mathbf{w}_R est constitué des retours linéaires et non linéaires. La matrice d'observation Ψ est constituée des matrices d'observation partielles $\Psi_{1..6}^M$, Ψ_7^{PF} et $\Psi_{1..3}^L$, dont les expressions respectives sont déterminées par les équations (5.20), (5.28) et (5.40). Le vecteur $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ est un estimé du vecteur $\boldsymbol{\Theta}$, contenant les paramètres dynamiques à estimer pour le manipulateur, et constitué des vecteurs $\boldsymbol{\Theta}_{1..6}^M$, $\boldsymbol{\Theta}_7^{PF}$ et $\boldsymbol{\Theta}_{1..3}^L$, donnés respectivement aux équations (5.21), (5.29) et (5.41). De plus, $\mathbf{K}_p = \sigma_p \mathbf{I}_6$ et $\mathbf{K}_v = \sigma_v \mathbf{I}_6$ sont des matrices diagonales constantes définies positives ($\sigma_p, \sigma_v > 0$), \mathbf{I}_6 étant la matrice identité de dimension (6×6). Le terme σ_p représente un gain proportionnel constant sur la boucle de retour externe en position et le terme σ_v représente un gain constant sur la boucle de retour interne en vitesse.

Finalement, la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{e}_v, \mathbf{e})$ est un terme de retour auxiliaire non linéaire avec un gain constant. Le rôle de ce terme est de compenser l'erreur additionnelle introduite par la modification du contrôleur adaptatif à compensation exacte. D'après Sadegh et Horowitz [94], le système décrivant l'évolution de l'erreur $\mathbf{e}(t)$ en boucle fermée non-perturbé (lorsque $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$) est globalement exponentiellement stable, c'est-à-dire que les erreurs en vitesse $\mathbf{e}_v(t)$ et en position $\mathbf{e}(t)$ convergent exponentiellement vers zéro à partir d'une condition initiale donnée si, et seulement si :

(i.) la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{e}_v, \mathbf{e})$ est donnée par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_v, \mathbf{e}) = \sigma_n \|\mathbf{e}\|^2 \mathbf{e}_v, \quad \sigma_n > 0 \quad (5.48)$$

(ii.) et les gains constants σ_p , σ_v et σ_n sont choisis suffisamment grands.

Par suite, afin d'estimer le vecteur $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$, la loi d'adaptation suivante est utilisée :

$$\frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\Theta}}(t) = -\mathbf{K} \Psi^T(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d) \mathbf{e}_v(t) \quad (5.49)$$

où \mathbf{K} est une matrice diagonale définie positive dont les éléments diagonaux sont appelés *facteurs d'adaptation*. On peut remarquer que dans l'algorithme d'adaptation des paramètres (PAA) décrit par l'équation (5.49), le signal d'adaptation ne contient que des paramètres désirés. Ainsi, le calcul de la matrice d'observation $\Psi(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \boldsymbol{\theta}_d, \dot{\boldsymbol{\theta}}_d, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d)$ n'a pas besoin d'être effectué en temps-réel. Ceci permet donc la réalisation simultanée de la tâche de contrôle en position et de la calibration dynamique sans nécessiter des temps de calcul importants, permettant finalement à l'algorithme de commande adaptative de présenter des performances très intéressantes en terme de temps de réponse et de robustesse.

Si le vecteur des paramètres à estimer est complètement inconnu, alors la valeur $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{0}$ lui sera attribuée comme estimé initial. Ceci implique que le manipulateur sera initialement pleinement contrôlé par la partie de la loi de commande (5.46) composée des retours linéaires externe et interne ($-\mathbf{K}_v \mathbf{e}_v - \mathbf{K}_p \mathbf{e}$) et du retour auxiliaire non linéaire ($-\mathbf{f}(\mathbf{e}_v, \mathbf{e})$). Par suite, l'apprentissage du vecteur des paramètres dynamiques $\boldsymbol{\Theta}$ est réalisé lors d'une succession de planifications de trajectoires. Ces trajectoires doivent être réalisées de telle sorte que les divers sous-ensembles de paramètres dynamiques soient excités séparément. Le choix de ces trajectoires d'identification est discuté dans la section 5.3.2. Le vecteur $\boldsymbol{\Theta}$ étant connu après adaptation, les retours linéaires externe et interne et le retour non linéaire auxiliaire sont utilisés uniquement afin de corriger les imperfections dans la modélisation de la dynamique inverse.

5.3.2 Choix des trajectoires d'identification

L'utilisation de mouvements séquentiels semble la plus adaptée pour ce type de manipulateur parallèle car le nombre de paramètres à identifier est élevé et l'ordre de grandeur des paramètres est relativement homogène (Khalil et Dombre [88]). On procède à priori en utilisant trois types de mouvements différents afin d'exciter les divers sous-ensembles de paramètres dynamiques composant le vecteur $\boldsymbol{\Theta}$:

- 1) Les paramètres de frottement sec et visqueux ainsi que les paramètres d'inertie des moteurs sont évalués en effectuant des mouvements de rotation purs dans l'espace articulaire. Les masses et inerties des membrures I à V des mécanismes à 5 barres constituant les 3 pattes du manipulateur peuvent vraisemblablement être également évaluées lors de tels mouvements, mais ceci occasionnera des erreurs dues à la nature

couplée de ces paramètres. Si ces erreurs sont trop importantes, il s'agira d'effectuer l'identification des paramètres des membrures séparément en effectuant des mouvements maximisant le conditionnement de la matrice d'observation Ψ .

- 2) Les moments d'inertie de la plate-forme mobile sont déterminés en effectuant des rotations pures dans l'espace cartésien. Chacun des moments d'inertie est évalué indépendamment lors de la rotation autour de l'axe correspondant.
- 3) La masse de la plate-forme mobile est finalement évaluée par le biais d'un mouvement de translation pur dans l'espace cartésien.

L'utilisation de telles trajectoires d'identification a été validée par les résultats présentés dans la référence Honegger [104]. Cette dernière présente l'implémentation d'une loi de commande adaptative similaire à celle de l'équation (5.46) permettant la calibration en ligne des paramètres dynamiques d'un manipulateur parallèle de type $6\text{-}\underline{P}(RR)S$.

Finalement, le modèle dynamique linéarisé ainsi que la structure de commande non linéaire adaptative présentée dans ce chapitre constituent la base théorique préalable à une implantation contrôleur devant permettre l'asservissement en position et la calibration dynamique du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté. Néanmoins, une telle implantation au niveau d'une structure de commande temps-réel dépasse le cadre des travaux présentés dans ce mémoire et fera l'objet de travaux ultérieurs. Le modèle dynamique linéarisé complet et la loi de commande adaptative avec compensation désirée seront donc implantés au niveau d'un contrôleur temps-réel et programmés sous environnement QNX. Une telle implantation devra permettre la commande en position et la calibration dynamique en ligne du prototype physique du manipulateur tel que montré à la figure 1.7. L'équilibrage statique ainsi que les performances mécaniques de la structure seront donc testés lorsque celle-ci sera sollicitée dynamiquement.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord revu le modèle dynamique inverse du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté, tel qu'obtenu en utilisant le principe du travail virtuel. L'obtention des équations dynamiques sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques du manipulateur étant un pré-requis à l'implantation d'une

loi de commande non linéaire adaptative, le modèle dynamique inverse complet de l'architecture a été dérivé sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques des actionneurs, des membrures des chaînes cinématiques constituant les pattes et de la plate-forme mobile. Sur la base de la formulation des équations dynamiques obtenues via le principe du travail virtuel, les matrices d'observation partielles ont été déterminées sous une forme compacte.

Finalement, nous avons proposé une méthode de commande permettant l'asservissement en position et la calibration dynamique du manipulateur. Cette loi de commande non linéaire adaptative avec compensation désirée présente des performances en terme de stabilité et de temps de réponse de loin supérieures aux autres structures de commande proposées dans la littérature, et permet également un contrôle précis pour des accélérations importantes de l'effecteur. L'implantation contrôleur d'une telle structure de commande sera réalisée dans le cadre de travaux futurs.

Chapitre 6

Conclusion et Travaux Futurs

Les travaux présentés dans ce mémoire ont visé la dérivation des modèles théoriques ainsi que le développement d'outils d'analyse dédiés à l'étude et l'optimisation d'une classe de manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté pouvant être équilibrés statiquement, pour lesquels la plate-forme mobile est reliée à la base par l'intermédiaire de 3 chaînes cinématiques constituée chacune d'un mécanisme à 5 barres.

Au chapitre 2, les équations permettant la résolution du problème géométrique inverse pour ce type de manipulateurs ont tout d'abord été revues. Par suite, une expression générale de la matrice jacobienne pour un manipulateur de cette classe possédant 3 à 6 pattes a été déterminée en utilisant le principe du travail virtuel. Cette expression, valable quel que soit le sous-ensemble des articulations rotoïdes actionnées pour chaque patte, a été obtenue sous une forme vectorielle compacte. Deux procédures de résolution du problème géométrique direct menant à une unicité de sa solution ont également été développées. Une procédure numérique itérative de type descente de gradient a tout d'abord été présentée. Nous avons par la suite montré que l'utilisation de trois capteurs externes de type rotoïdes,

montés sur la base de la structure parallèle, permet une résolution triviale du problème géométrique direct du manipulateur. La mise en oeuvre de tels capteurs externes est directe et ne crée pas d'interférences mécaniques additionnelles.

Au chapitre 3, deux algorithmes de discrétisation ont été développés visant la maximisation du volume de différents sous-espaces tridimensionnels de l'espace atteignable complet du mécanisme sous la contrainte que la zone de l'espace associé ne doit contenir aucune singularité. Une première méthode d'optimisation basée sur la maximisation du volume de l'espace à orientation constante, c'est-à-dire l'espace cartésien tridimensionnel des points atteignables par l'effecteur pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, a été développée et nous a permis d'aboutir à un premier design optimal du manipulateur parallèle étudié. Cette optimisation a été réalisée dans la perspective que le manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté équilibré statiquement serait utilisé comme système de positionnement d'objets ayant une masse importante. Les points définissant la frontière de l'espace ont été déterminés en utilisant une méthode de détection de la violation des contraintes mécaniques dans un système de coordonnées sphériques.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, un algorithme de discrétisation permettant le calcul et la visualisation d'un nouvel espace atteignable, où degrés de liberté en rotation et en translation sont couplés, a été développé en utilisant une convention angulaire basée sur les angles d'Euler modifiés. La représentation particulière de l'orientation utilisée combinée à l'algorithmique développée dans cette section a permis la représentation de cet espace comme un volume de forme simple et compacte. Par suite, la maximisation du volume de ce nouvel espace atteignable a conduit à la détermination d'un second sous-ensemble de paramètres géométriques optimaux. Il est apparu que les deux méthodes d'optimisation ont conduit à des géométries particulières de l'architecture présentant des propriétés cinématiques très différentes en terme de dextérité sur leurs espaces de travail respectifs. Il a été montré que le fait d'inclure de tels algorithmes en amont dans le processus de design d'une telle architecture permet de corroborer ou d'invalider très tôt les choix de conception, minimisant le besoin de réaliser de nombreux prototypes dont la réalisation est très onéreuse. Finalement, il a été décidé que le design du prototype initial serait modifié en correspondance avec les résultats de la première optimisation.

Au chapitre 4, une étude complète des singularités du manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté a été présentée en considérant différents cas d'actionnement.

Les singularités du mécanisme ont tout d'abord été étudiées pour le cas où, pour chaque patte i , les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Une approche basée sur la géométrie des droites de Grassmann nous a permis de déterminer les équations sous forme analytique des lieux de singularités du mécanisme. Il a été montré que la plupart des cas de singularités de ce manipulateur se réduisent à la génération d'un complexe général correspondant à une variété de droites de type 5a, le lieu des singularités correspondant au complexe général étant constitué, pour une orientation prescrite de la plate-forme mobile, par une surface quadratique, c'est-à-dire soit un cylindre hyperbolique, elliptique ou parabolique, orienté suivant l'axe z . Dans le contexte de l'étude des singularités du manipulateur parallèle pour ce premier cas d'actionnement, l'approche géométrique basée sur les variétés de droites de Grassmann s'est révélée très efficace, permettant simultanément (i) la caractérisation géométrique exhaustive des singularités de type II et (ii) la détermination des équations sous forme symbolique des lieux de singularités correspondants sous une forme très compacte permettant une implantation logicielle grandement facilitée.

Les singularités correspondant au cas où, pour chaque patte i , les angles actionnés sont θ_{i1} et $\Delta\theta_{i3} = \theta_{i3} - \theta_{i2}$, ont ensuite été étudiées. Dans ce cas, il a été montré que le manipulateur est cinématiquement équivalent à une structure parallèle de type 3-RRRS. Pour cette seconde étude, une procédure basée sur le développement du déterminant de la matrice jacobienne a permis de montrer que, pour une orientation arbitraire de la plate-forme mobile, l'équation du lieu des singularités de type II est un polynôme dont le degré maximal des termes en x et y est 4, et dont le degré maximal des termes en z est 3. Ayant déterminé ce polynôme en utilisant une formulation vectorielle particulière, un algorithme optimisé permettant de représenter graphiquement les lieux de singularités correspondants a pu être développé. Finalement, pour les deux cas d'actionnement, diverses représentations graphiques planes et spatiales des lieux de singularités respectifs ont été fournies. Celles-ci nous ont permis de visualiser à quel point les surfaces de singularités correspondantes ont un impact critique sur l'ensemble des points de l'espace cartésien atteignables en pratique par l'effecteur. Ainsi, les différentes équations analytiques obtenues pour les deux cas d'actionnement ainsi que les moyens de visualisation développés constituent un outil efficace de prédiction de telles configurations singulières pouvant être utilisés très en amont durant le processus de design de mécanismes parallèles présentant une topologie équivalente à celle considérée lors de cette étude.

Finalement, au chapitre 5, nous avons revu les équations du modèle dynamique inverse du manipulateur à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté, telles qu'obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. L'obtention des équations dynamiques sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques du manipulateur étant un pré-requis à l'implantation d'une loi de commande non linéaire adaptative, le modèle dynamique inverse complet de l'architecture a été dérivé sous une forme linéarisée par rapport aux paramètres dynamiques des actionneurs, des chaînes cinématiques constituant les pattes et de la plate-forme mobile. Sur la base de la formulation des équations dynamiques obtenues via le principe du travail virtuel, les matrices d'observation partielles ont été déterminées sous une forme compacte. Une méthode de contrôle mettant en oeuvre ce modèle dynamique linéarisé et permettant l'asservissement en position et la calibration dynamique du manipulateur a ensuite été proposée. Cette loi de commande non linéaire adaptative avec compensation désirée présente des performances en terme de stabilité et de temps de réponse de loin supérieures aux autres structures de commande proposées dans la littérature, et permet également un contrôle précis pour des accélérations importantes de l'effecteur.

Le modèle dynamique linéarisé complet et la loi de commande adaptative avec compensation désirée seront implantés au niveau d'un contrôleur temps-réel et programmés sous environnement QNX. Une telle implantation devra permettre le contrôle en position et la calibration dynamique en ligne du prototype physique du manipulateur. Ceci devra nous permettre finalement de tester les performances mécaniques du manipulateur équilibré statiquement lors de la réalisation des trajectoires impliquant des accélérations importantes de l'effecteur.

Références

- [1] Merlet, J-P., "Les Robots Parallèles," 2^{eme} Édition, Hermès, Paris, 1997.
- [2] Gough, V. E., Whitehall, S. G., "Universal Tire Test Machine," *Proceedings of the 9th Technical Congress F.I.S.I.T.A*, Vol. 117, pp. 117-135, 1962.
- [3] Stewart, D., "A Platform with 6 Degrees of Freedom," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1965-66*, 180 (Part 1), No. 15, pp. 371-386, 1965.
- [4] Baret, M., "Six Degrees of Freedom Large Motion System for Flight simulators," *Proceedings of the AGARD Conference 279, Piloted Aircraft Environment Simulation Techniques*, Bruxelles, pp. 22.1-22.8, 1978.
- [5] Watson, P., "Flight Simulators - The Grand Illusion," *Electron*, Vol. 46(4), pp. 12-17, 1984.
- [6] MacCallion, H., Pham, D. T., "The Analysis of a Six Degree of Freedom Work Station for Mechanized Assembly," *Proceedings of the 5th World Congress on theory on Machines and mechanisms*, Montreal, July, 1979.
- [7] Hunt, K. H., "Structural Kinematics in Parallel Actuated Robot Arms," *Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 105, pp. 705-712, 1983.
- [8] Zamanov, V. B., Sotirov, Z. M., "Structures and Kinematics of Parallel Topology Manipulating Systems," *Proceedings of the International Symposium on Design and Synthesis*, Tokyo, July, pp. 453-458, 1984.

- [9] Mohamed, M. G., Duffy, J., "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators," *Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 107, pp. 226-229, 1985.
- [10] Reboulet, C., Robert, A., "Hybrid Control of a Manipulator with an Active Compliant Wrist," *Proceedings of the 3rd ISRR Conference*, Gouvieux, France, pp. 76-80, 1985.
- [11] Inoue, H., Tsusaka, Y., Fukuisimi, T., "Parallel Manipulator," *Proceedings of the 3rd ISRR Conference*, Gouvieux, France, 1985.
- [12] Fichter, E. F., "A Stewart Platform Based Manipulator : General Theory and Practical Construction," *International Journal of Robotics Research*, Vol. 5(2), pp. 157-181, 1986.
- [13] Merlet, J-P., "Contribution à la Formalisation de la Commande par Retour d'Effort. Application à la Commande de Robots Parallèles," Ph.D. Thesis, Paris VI University, 1986.
- [14] Merlet, J-P., 1987, "Parallel Manipulator, Part 1 : Theory, Design, Kinematics and Control," INRIA Research Report No. 646, March.
- [15] Merlet, J-P., 1988, "Parallel Manipulator, Part 2 : Singular Configurations and Grassmann Geometry," INRIA Research Report No.791, February, 1987.
- [16] "HEXAPODS - The Russians are coming," *Machinery and Production Engineering*, Vol. 153, No. 3897, pp. 19-25, 1995.
- [17] "Machines for The 21st Century," *Machinery and Production Engineering*, Vol. 153, No. 3886, pp. 20-25, 1995.
- [18] Physik Instrumente, "HEXAPOD 6 axis Micropositioning System," *Supplement to the Catalog No. 111/112*, pp. 36-37, February, 1997.
- [19] Grace, K. W., "Kinematic Design of an Ophthalmologic Surgery Robot and Feature Extracting Bilateral Manipulation," Doctorate Dissertation, Northwestern University, Evanston (IL), 1995.
- [20] Lazarevic, G., "Feasibility of a Stewart Platform with Fixed Actuators as a Platform for CABG Surgery Device," Master Thesis, Columbia University, New-York (NY), 1997.
- [21] Aranson, R. B., "Hexapods : Hot or Ho Hum," *Manufacturing Engineering*, pp. 60-67, 1997.

- [22] Berkof, R. S., Lowen, G. G., "A New Method for Computing Force balancing Simple Linkages," *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 91(B)(1), pp. 21-26, 1969
- [23] Berkof, R. S., Lowen, G. G., "Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages," *Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 93(B), pp. 53-60, 1971.
- [24] Kochev, I., "General Method for Full Force Balancing of Spatial and Planar Linkages by Internal Mass Redistribution," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 22, No. 4, pp. 333-341, 1987.
- [25] Kochev, I., "Qualitative Theory of the Reactions and Stresses in High Speed Planar Linkages," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 27, No. 1, pp. 59-68, 1992.
- [26] Yu, Y.-Q., "Research on Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Spatial Linkages," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 22, No. 1, pp. 27-37, 1987.
- [27] Yu, Y.-Q., "Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Spatial Irregular Force Transmission Mechanisms Using Additional Links," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 23, No. 4, pp. 279-285, 1988.
- [28] Nathan, R., "A Constant Force Generation Mechanism," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 107, pp. 508-512, 1985.
- [29] Streit, D. A. and Gilmore, B. J., "Perfect Spring Equilibrators for Rotatable Bodies," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 111, No. 4, pp. 451-458, 1989.
- [30] Streit, D. A. and Shin, E., "Equilibration for Planar Linkages," *Proceedings of the ASME Mechanisms Conference*, Vol. DE-25, pp. 21-28, 1990.
- [31] Shin, E. and Streit, D. A., "Spring Equilibrator Theory for Static Balancing of Planar Pantograph Linkages," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 26, No. 7, pp. 645-657, 1991.
- [32] Walsh, G., Streit, D. A. and Gilmore, B. J., "Spatial Spring Equilibrator Theory," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 26, No. 2, pp. 155-170, 1991.
- [33] Bagci, C., "Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Link Mechanism Using balancing Idler Loops," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 104, No. 1, pp. 482-493, 1982.

- [34] Lowen, G. G., Tepper, F. R., Berkof, R. S., "Balancing of Linkages - An Update," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 18, No. 3, pp. 213-220, 1983.
- [35] Hervé, J. M., "Device for Counter-Balancing the Forces Due to Gravity in a Robot Arm," United States Patent 4,620,829, May, 1986.
- [36] Ulrich, N., Kumar, V., "Passive Mechanical Gravity Compensation for Robot Manipulator," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, USA, pp. 1536-1541, 1991.
- [37] Jean, M., Gosselin, C. M., "Static Balancing of Planar Parallel Manipulators," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, Minnesota, Vol. 4, pp. 3732-3737, 1996.
- [38] Laliberté, T., Gosselin, C. M., Jean, M., "Static Balancing of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 4, No. 4, pp. 363-377, 1999.
- [39] Gosselin, C. M., "Static Balancing of Spherical 3-DOF Parallel Mechanisms and Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 8, pp. 819-829, 1999.
- [40] Wang, J., Gosselin, C. M., "Static Balancing of Spatial Three-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 34, No. 3, pp. 437-452, 1999.
- [41] Wang, J., Gosselin, C. M., "Static Balancing of Spatial Four-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 35, No. 4, pp. 563-592, 2000.
- [42] Streit, D., "Spatial Manipulator and Six Degree of Freedom Platform Spring Equilibrator Theory," in *Proceedings of the Second National Conference on Applied Mechanisms and Robotics*, Vol. VIII.B, pp. 1-1-1-6, 1991.
- [43] Leblond, M., Gosselin, C. M., "Static Balancing of Spatial and Planar Parallel Manipulators with Prismatic Actuators," in *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgia, DETC98/MECH-5963, 1998.
- [44] Wang, J., "Kinematic Analysis, Dynamic Analysis and Static Balancing of Planar and Spatial Parallel Mechanisms or Manipulators with Revolute Actuators," PhD Thesis, Laval University, Québec, Canada, 1998.
- [45] Gosselin, C. M., Wang, J., 2000, "Static Balancing of Spatial Six-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms with Revolute Actuators," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 17, No. 3, pp. 159-170, 2000.

- [46] Benea, R., “Contribution à l’Étude des Robots Pleinement Parallèles de type 6-RRRS,” Ph.D. Thesis, Université de Savoie, Annecy, France, 1996.
- [47] Ebert-Uphoff, I., Gosselin, C. M., Laliberté, T., 2000, “Static balancing of spatial parallel platform mechanisms – revisited,” *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, No. 1, pp. 43-51, 2000.
- [48] Herder J. L., Tuijthof G. J. M., “Two Spatial Gravity Equilibrators,” *Proceedings of the ASME 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Baltimore, Maryland, DETC2000/MECH-14120, 2000.
- [49] Ebert-Uphoff, I., Gosselin, C. M., T. Laliberté, “Static Balancing of a Class of Spatial Parallel platform Mechanism,” *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgia, DETC98/MECH-5964, 1998.
- [50] Gosselin, C. M., Wang, J., Laliberté, T., Ebert-Uphoff, I., “On the Design of a Statically Balanced 6-dof Parallel Manipulator,” in *Proceedings of The IFToMM Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Oulu, Finland, pp. 1045–1050, 1999.
- [51] Johnson, K., Ebert-Uphoff, I., “Development of a Statically-Balanced Parallel Platform Manipulator with 6 Degrees-of-Freedom,” *Proceedings of the Parallel Kinematic Machines Conference*, 2000.
- [52] Johnson, K., “Development of a Statically-Balanced Parallel Platform Manipulator,” MS. Thesis, Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2000.
- [53] Ebert-Uphoff, I., Gosselin, C. M., “Kinematic Study of a New Type of Spatial Parallel Platform Mechanism,” *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgia, DETC98/MECH-5962, 1998.
- [54] Ebert-Uphoff I., Gosselin C. M., “Two models for the Dynamics of a Class of Statically Balanced Spatial Parallel Platform Mechanism,” Technical Report, ROBO-98-EG1, 1998.
- [55] Wampler, C. W., “Forward Displacement Analysis of General Six-In-Parallel SPS (Stewart) Platforms,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 3, pp. 331-337, 1996.

- [56] Husty, M. L., "An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, pp. 365-380, 1996.
- [57] Nanua, P., Waldron, K. J., Murthy, V., "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 4, pp. 438-444, 1990.
- [58] Merlet, J-P., "Direct Kinematics and Assembly Modes of Parallel manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 150-162, 1992.
- [59] Stoughton, R., Arai, T., "Optimal Sensor Placement for Forward Kinematics Evaluation of a 6-DOF Parallel Link Manipulator," *Proceedings of the IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 785-790, 1991.
- [60] Merlet, J. P., "Closed-Form Resolution of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators Using Extra Sensor Data," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 200-204, 1993.
- [61] Bonev, I. A., and Ryu, J., "A New Method for Solving the Direct Kinematics of General 6-6 Stewart Platforms Using Three Linear Extra Sensors," *Mechanism and Machine Theory*, pp. 423-436, Vol. 35, No. 3, 1999.
- [62] Bonev, I. A., "Analysis and Design of 6-DOF 6-*PRRS* Parallel Manipulators," MS. Thesis, Department of Mechatronics, Kwangju Institute of Science & Technology, South-Corea, 1998.
- [63] Gosselin, C. M., "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators," *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 331-337, 1990.
- [64] Gosselin, C. M., Lavoie, E., Toutant, P., "An Efficient Algorithm for the Graphical Representation of the Three-Dimensional Workspace of Parallel Manipulators," *Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems, ASME*, DE-Vol. 45, pp. 323-328, 1992.
- [65] Conti, J. P., Clinton, C. M., Zhang, G. and Wavering, A. J., "Workspace Variation of a Hexapod Machine Tool," Technical Report, Department of Mechanical Engineering, University of Maryland, 1996.
- [66] Bonev, I. A., and Ryu, J., "Orientation Workspace Analysis of 6-DOF Parallel

- Manipulators,” *Proceedings of the ASME Design Automation Conference*, Las Vegas, Nevada, DETC99/DAC-8646, 1999.
- [67] Huang, T., Wang, J., Gosselin, C. M., “Determination of Closed Form Solution for the 2D Orientation Workspace of Gough-Stewart Parallel Manipulators,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 6, pp. 1121-1125, 1999.
- [68] Masory, O., and Wang, J., “Workspace Evaluation of Stewart Platforms,” *Proceedings of the ASME 22nd Biennial Mechanisms Conference*, Scottsdale, Arizona, Vol. 45, pp. 337-346, 1992.
- [69] Monsarrat, B., Gosselin, C. M., “Optimization of the Design of a 3-Leg Statically Balanced 6-DOF Parallel Mechanism,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, August 2000 (in submission).
- [70] Shi, X., and Fenton, R. G., *Structural Instabilities in Platform-Type Parallel Manipulators due to Singular Configurations, Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems*, ASME, DE-Vol. 45, pp. 347-352, 1992.
- [71] Gosselin, C. M., Angeles, J., “Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 281-290, 1990.
- [72] Gosselin, C. M., Sefrioui, J., “Determination of the Singularity Loci of Spherical Three- Degree-of-Freedom Parallel Manipulators,” *Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems*, ASME, DE-Vol. 45, pp. 329-336, 1992.
- [73] Gosselin, C. M., Wang, J., “Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators,” *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 21, pp. 377-398, 1997.
- [74] Mayer St-Onge, B. and Gosselin, C. M., “Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform,” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 19, No. 3, pp. 271-288, 2000.
- [75] Zlatanov, D., Fenton, R. G., Benhabib, B., “A Unifying Framework for Classification and Interpretation of Mechanism Singularities,” *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, pp. 566-572, 1995.
- [76] Zlatanov, D., Fenton, R. G., Benhabib, B., “Identification and Classification of the Singular Configurations of Mechanisms,” *Mech. Mach. Theory*, Vol. 33, No. 6, pp. 743-760, 1998.

- [77] Collins, C. L., McCarthy, J. M., "The Quartic Singularity Surfaces of Planar Platforms in the Clifford Algebra of the Projective Plane," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 33, No. 7, pp. 931-944, 1998.
- [78] Bonev, I.A., and Gosselin, C.M., "Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Joints," *2nd Workshop on Computational Kinematics*, Seoul, South Korea, May 20-22, 2001.
- [79] Wang, G., "Singularity Analysis of a Class of the 6-6 Stewart Platforms," in *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgia, DETC98/MECH-5954, 1998.
- [80] Merlet, J-P., "Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 8, No. 5, pp. 45-56, 1989.
- [81] Mouly, N. and Merlet, J-P., "Singular Configurations and Direct Kinematics of a New Parallel Manipulator," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, France, 1992.
- [82] Hao, F., McCarthy, J. M., "Conditions for Line Based Singularities in Spatial Platform Manipulators," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 15(1), pp. 43-55, 1998.
- [83] Dandurand, A., "The Rigidity of Compound Spatial Grid," *Structural Topology*, Vol. 10, pp. 41-55, 1984.
- [84] Ball, R. S., "The Theory of Screws," Hodges Foster and Co., Dublin, 1876.
- [85] Sefrioui, J. and Gosselin, C. M., "On the Quadratic Nature of the Singularity Curves of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 30, No. 4, pp. 533-551, 1995.
- [86] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., "Geometry and the Imagination," New-York : Chelsea, pp. 7-30, 1952.
- [87] Monsarrat, B., Gosselin, C. M., "Singularity Analysis of a Three-Leg Six-Degree-of-Freedom Parallel Platform Mechanism Based on Grassmann Line Geometry," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 20, No. 4, April 2001.
- [88] Khalil W., Dombre E., "Modélisation, identification et commande de robots," Collection robotique, 2ème édition revue et augmentée, Hermès, Paris, 1999.
- [89] Craig J.J., "Introduction to Robotics : Mechanics and Control," Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1986.

- [90] Craig J.J., Hsu P., Sastry S., "Adaptative Control of Mechanical Manipulators," In *Proceedings of the IEEE Internatinal Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, pp. 190-195, 1986.
- [91] Ortega, R, Spong, M. W., "Adaptative Motion Control of Rigid Robots : a Tutorial," *Automatica*, Vol. 25, No. 6, pp. 877-888, 1989.
- [92] Slotine J.-J.E., Li W., "Adaptative Manipulator Control : a Case Study," In *Proceedings of the IEEE Internatinal Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, pp. 1312-1400, 1987.
- [93] Landau, I. D., Horowitz, R., "Synthesis of Adaptative Controller for Robot Manipulators Using a Passive Feedback System Approach," In *Proceedings of the IEEE Internatinal Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, pp. 1028-1033, 1988.
- [94] Sadegh N., Horowitz R., "Stability and Robustness Analysis of a Class of Adaptative Controllers for Robotic Manipulators," *The Int. J. of Robotics Research*, Vol. 9, No. 3, pp. 74-92, 1990.
- [95] Ebert-Uphoff, I., Gosselin, C. M., "Dynamic Modeling of a Class of Spatial Statically-Balanced Parallel Platform Mechanisms," In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Detroit, Usa, Vol. 2, 10-15 mai, pp. 881-888, 1999.
- [96] Khalil, W., Kleinfinger, J. F., "Minimum Operations and Minimum Parameters of the Dynamic Model of Tree Structure Robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 3, No. 6, pp. 517-526, 1987.
- [97] Khosla, P. K., "Real-Time Control and Identification of Direct-Drive Manipulators," PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1986.
- [98] Gautier, M, Khalil, W., "Direct Calculation of Minimum Set of Inertial Parameters of Serial Robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 368-373, 1990.
- [99] Khalil, W., Bennis, F., Gautier, M., "Calculation of the Minimum Inertial Parameters of Tree Structure Robots," In *3rd ICAR Conference*, pp. 189-201, 1989.
- [100] Walker, M. W., "Adaptative Control of Manipulators Containing Closed Kinematic Loops," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 1, pp. 10-19, 1990.

- [101] Goldenberg, A. A., He, X., Ananthanarayanan, S. P., "Identification of Inertial Parameters of a Manipulator with Closed Kinematic Chains," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 22, No. 4, pp. 799-805, 1992.
- [102] Khalil, W., Bennis, F., "Symbolic Calculation of the Base Inertial Parameters of Closed-Loop Robots," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 14, No. 2, pp. 112-118, 1995.
- [103] Bhattacharya, S., Hatwal, H., Ghosh, A., "An On-line Parameter Estimation Scheme for Generalized Stewart Platform Type Parallel Manipulators," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 32, No. 1, pp. 79-89, 1997.
- [104] Honegger M., "Nonlinear Adaptive Control of a 6-DOF Parallel Manipulator," *MOVIC 98*, Zurich, Switzerland, August 25-28, Vol. 3, pp. 961-966, 1998.
- [105] Codourey, A., Burdet, E., "A Body-Oriented Method for Finding a Linear Form of the Dynamic Equation of Fully Parallel Robots," In *Proceedings of the ICRA*, 1997.
- [106] Wang J., Gosselin, C. M., "A New Approach for the Dynamic Analysis of Parallel Manipulators," *Multibody System Dynamics*, Vol. 2, pp. 317-334, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [107] Whicomb, L. L., Rizzi, A. A., Koditschek, D. E., "Comparative Experiments with a New Adaptive Controller for Robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 1, pp. 59-70, 1993.

Annexe A

Équations des Lieux de Singularités Satisfaisant la Condition 5a

Nous considérons ici le manipulateur parallèle à 3 pattes possédant 6 degrés de liberté pour le cas où, pour chacune des chaînes cinématiques reliant la base à la plate-forme mobile, les angles θ_{i2} et θ_{i3} sont actionnés. Nous développons la procédure utilisée afin d'obtenir les équations sous forme analytique des lieux de singularités pour le cas du complexe général (cas 5a), et ce dans le cas d'une rotation arbitraire de la plate-forme mobile. La totalité des développements symboliques présentés ci-après ont été obtenus en utilisant les fonctions dédiées au calcul matriciel du logiciel de traitement symbolique Maple.

A.1 Développements préliminaires

Afin de garantir la représentation compacte des expressions symboliques obtenues via le logiciel Maple, nous réécrivons la matrice de rotation \mathbf{Q} de l'équation (1.1) sous la forme :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi) & -s_\phi c_\theta & (c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi) \\ (s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi) & c_\phi c_\theta & (s_\phi s_\psi - c_\phi s_\theta c_\psi) \\ -c_\theta s_\psi & s_\theta & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où $c_\phi = \cos \phi$, $s_\phi = \sin \phi$, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $c_\psi = \cos \psi$ et $s_\psi = \sin \psi$.

Les vecteurs \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, 3$ reliant le centre de masse C de la plate-forme mobile aux points d'attache P_{i5} , $i = 1, 2, 3$, de chacune des pattes du mécanisme, sont connus dans le repère mobile R' , et donnés par :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}b\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Les vecteurs $\mathbf{p}_{i0} = [p_{i0x} \ p_{i0y} \ p_{i0z}]^T$, $i = 1, 2, 3$, décrivant les positions des points P_{i0} , $i = 1, 2, 3$, dans le repère de référence R , sont également connus et donnés par :

$$\mathbf{p}_{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{2}r\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{20} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{30} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Les paramètres géométriques b et r ont été définis dans la section 1.3.

Par suite, considérant le fait que $\mathbf{p}_{i5} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_i$, pour $i = 1, 2, 3$, avec $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$, nous utilisons les expressions fournies aux équations (A.1), (A.2) et (A.3) afin de déterminer, dans le repère fixe R , les positions des points P_{i5} , $i = 1, 2, 3$, en fonction des paramètres géométriques b et r ainsi que de la posture de la plate-forme mobile. Ces positions sont donc décrites par les vecteurs $\mathbf{p}_{i5} = [p_{i5x} \ p_{i5y} \ p_{i5z}]^T$, donnés par :

$$\mathbf{p}_{15} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}(c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi)b + \frac{1}{2}s_\phi c_\theta b\sqrt{3} \\ y + \frac{1}{2}(s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi)b - \frac{1}{2}c_\phi c_\theta b\sqrt{3} \\ z - \frac{1}{2}c_\theta s_\psi b - \frac{1}{2}s_\theta b\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{p}_{25} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}(c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi)b - \frac{1}{2}s_\phi c_\theta b\sqrt{3} \\ y + \frac{1}{2}(s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi)b + \frac{1}{2}c_\phi c_\theta b\sqrt{3} \\ z - \frac{1}{2}c_\theta s_\psi b + \frac{1}{2}s_\theta b\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{p}_{35} = \begin{bmatrix} x - (c_\phi c_\psi - s_\phi s_\theta s_\psi) b \\ y - (s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi) b \\ z + c_\theta s_\psi b \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Équations analytiques des droites (d_i) , $i = 1, 2, 3$

Tel que mentionné à la section 4.2.6.2, les droites (d_i) , pour $i = 1, 2, 3$, sont les droites d'intersection entre les trois plans (Δ_i) et le plan (x, y) de la base du manipulateur. Rappelons également que les points P'_{i5} , $i = 1, 2, 3$, ont été définis comme les projections respectives des points P_{i5} dans le plan (x, y) . Nous définissons le vecteur $\mathbf{p}'_{i5} = [p_{i5x} \ p_{i5y} \ 0]^T$ comme le vecteur tridimensionnel décrivant la position des points P'_{i5} . En utilisant le fait que la droite (d_i) passe par les points P_{i0} et P'_{i5} appartenant au plan (x, y) , nous pouvons écrire l'équation de la droite (d_i) sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{w} = \mathbf{p}_{i0} + \lambda (\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{p}'_{i5}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{A.7})$$

où le vecteur $\mathbf{w} = [u \ v \ 0]^T$ décrit la position dans le plan (x, y) d'un point quelconque appartenant à la droite (d_i) . En ne considérant que les composantes en x et y de cette équation vectorielle, celle-ci peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{i0x} \\ p_{i0y} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_{i0x} - p_{i5x} \\ p_{i0y} - p_{i5y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Après élimination du paramètre λ dans l'équation (A.8), nous obtenons l'équation caractérisant entièrement chacune des trois droites (d_i) dans le plan (x, y) :

$$(p_{i0y} - p_{i5y}) u + (p_{i5x} - p_{i0x}) v + (p_{i0x} p_{i5y} - p_{i0y} p_{i5x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.9})$$

A.3 Équations des lieux de singularités dans l'espace cartésien

Ayant déterminé les expressions des droites (d_i) , $i = 1, 2, 3$, en fonction des coordonnées des points P_{i0} et P'_{i5} , nous pouvons exprimer mathématiquement le fait que ces trois droites sont concourantes au point P_Δ . L'occurrence d'une telle configuration peut être exprimée de manière compacte en écrivant que le déterminant suivant, formé par les coefficients

respectifs des équations affines (A.9), est égal à zéro :

$$\begin{vmatrix} p_{10y} - p_{15y} & p_{20y} - p_{25y} & p_{30y} - p_{35y} \\ p_{15x} - p_{10x} & p_{25x} - p_{20x} & p_{35x} - p_{30x} \\ p_{10x}p_{15y} - p_{10y}p_{15x} & p_{20x}p_{25y} - p_{20y}p_{25x} & p_{30x}p_{35y} - p_{30y}p_{35x} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cette équation décrit les lieux des points de l'espace de travail du manipulateur parallèle tels que la condition 5a est satisfaite. En substituant dans l'équation (A.10) les composantes des vecteurs \mathbf{p}_{i0} et \mathbf{p}_{i5} donnés par les équations (A.3), (A.4), (A.5) et (A.6), puis en développant symboliquement l'expression résultante du déterminant, nous obtenons l'équation suivante pour le lieu des singularités situé dans le plan (x, y) :

$$\begin{aligned} & (-r^2 b s_\phi s_\theta s_\psi - r b^2 c_\phi^2 c_\psi^2 + r^2 b c_\phi c_\psi - b^2 s_\phi^2 c_\psi r c_\theta + 2 r b^2 s_\phi c_\psi c_\phi s_\theta s_\psi + r b^2 s_\phi^2 c_\theta^2 \\ & - r b^2 s_\phi^2 s_\theta^2 s_\psi^2 + r b^2 c_\phi^2 c_\psi c_\theta - r^2 b c_\phi c_\theta - 2 b^2 c_\phi s_\theta s_\psi r s_\phi c_\theta) y + 2 r b s_\phi c_\theta y^2 \\ & + (2 r b c_\phi s_\theta s_\psi + 2 r b s_\phi c_\psi) x^2 + (2 r b c_\phi c_\theta - 2 r b c_\phi c_\psi + 2 r b s_\phi s_\theta s_\psi) x y - r b^3 s_\phi^3 c_\psi^2 c_\theta \\ & - r b^3 s_\phi^2 c_\psi c_\theta c_\phi s_\theta s_\psi - r^3 b s_\phi c_\theta - r^3 b s_\phi c_\psi + r^2 b^2 s_\phi c_\theta^2 c_\phi + r^2 b^2 c_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\psi + r^2 b^2 c_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\theta \\ & - r^2 b^2 s_\phi^2 c_\theta s_\theta s_\psi - r^2 b^2 s_\phi^2 c_\psi s_\theta s_\psi - r b^3 s_\phi c_\psi^2 c_\phi^2 c_\theta + 2 r^2 b^2 s_\phi c_\theta c_\phi c_\psi + r^2 b^2 s_\phi c_\psi^2 c_\phi \\ & - r^2 b^2 c_\phi s_\theta^2 s_\psi^2 s_\phi - r b^3 c_\phi^3 s_\theta s_\psi c_\psi c_\theta - r^3 b c_\phi s_\theta s_\psi - r b^3 s_\phi c_\theta^2 c_\phi^2 c_\psi - r b^3 s_\phi^3 c_\theta^2 c_\psi \\ & + (-r b^2 s_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\psi - 2 r b^2 c_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\theta + r b^2 c_\phi c_\psi^2 s_\phi - 2 b^2 c_\phi c_\psi r s_\phi c_\theta + r^2 b c_\phi s_\theta s_\psi \\ & + r b^2 c_\phi^2 c_\psi s_\theta s_\psi + r^2 b s_\phi c_\psi - r b^2 s_\phi s_\theta^2 s_\psi^2 c_\phi - r^2 s_\phi c_\theta b + r b^2 c_\phi c_\theta^2 s_\phi) x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Note : Les droites (d_i) , $i=1, 2, 3$, existent sous la condition nécessaire $\|\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{p}'_{i5}\| \neq 0$, c'est-à-dire que les points P_{i0} et P'_{i5} associés à chacune des trois chaînes cinématiques doivent être distincts. Cette condition géométrique apparaît dans l'équation (A.10). En effet, si pour la i -ème patte, les points P_{i0} et P'_{i5} sont confondus, alors la i -ème colonne du déterminant de l'équation (A.10) sera constituée de termes nuls. Ce déterminant sera donc nul et l'équation résultante (A.11) sera équivalente à l'égalité $0 = 0$.

Par suite, si la condition $\|\mathbf{p}_{i0} - \mathbf{p}'_{i5}\| \neq 0$, $i=1, 2, 3$, est satisfaite, alors l'équation (A.11) obtenue est celle d'un polynôme de degré 3 en x et de degré 2 en y . Après factorisation et simplification, ce polynôme peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$E_1 x^2 + E_2 y^2 + E_3 x y + E_4 x + E_5 y + E_6 = 0 \quad (\text{A.12})$$

où les coefficients E_i , pour $i = 1, \dots, 6$, sont donnés par :

$$E_1 = 2 r b c_\phi s_\theta s_\psi + 2 r b s_\phi c_\psi$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= 2 r b s_\phi c_\theta \\
E_3 &= 2 r b c_\phi c_\theta - 2 r b c_\phi c_\psi + 2 r b s_\phi s_\theta s_\psi \\
E_4 &= -r b^2 s_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\psi - 2 r b^2 c_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\theta + r b^2 c_\phi c_\psi^2 s_\phi - 2 b^2 c_\phi c_\psi r s_\phi c_\theta + r^2 b c_\phi s_\theta s_\psi \\
&\quad + r b^2 c_\phi^2 c_\psi s_\theta s_\psi + r^2 b s_\phi c_\psi - r b^2 s_\phi s_\theta^2 s_\psi^2 c_\phi - r^2 s_\phi c_\theta b + r b^2 c_\phi c_\theta^2 s_\phi \\
E_5 &= -r^2 b s_\phi s_\theta s_\psi - r b^2 c_\phi^2 c_\psi^2 + r^2 b c_\phi c_\psi - b^2 s_\phi^2 c_\psi r c_\theta + 2 r b^2 s_\phi c_\psi c_\phi s_\theta s_\psi \\
&\quad + r b^2 s_\phi^2 c_\theta^2 - r b^2 s_\phi^2 s_\theta^2 s_\psi^2 + r b^2 c_\phi^2 c_\psi c_\theta - r^2 b c_\phi c_\theta - 2 b^2 c_\phi s_\theta s_\psi r s_\phi c_\theta \\
E_6 &= -r b^3 s_\phi^3 c_\psi^2 c_\theta - r b^3 s_\phi^2 c_\psi c_\theta c_\phi s_\theta s_\psi - r^3 b s_\phi c_\theta - r^3 b s_\phi c_\psi + r^2 b^2 s_\phi c_\theta^2 c_\phi \\
&\quad + r^2 b^2 c_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\psi + r^2 b^2 c_\phi^2 s_\theta s_\psi c_\theta - r^2 b^2 s_\phi^2 c_\theta s_\theta s_\psi - r^2 b^2 s_\phi^2 c_\psi s_\theta s_\psi \\
&\quad - r b^3 s_\phi c_\psi^2 c_\phi^2 c_\theta + 2 r^2 b^2 s_\phi c_\theta c_\phi c_\psi + r^2 b^2 s_\phi c_\psi^2 c_\phi - r^2 b^2 c_\phi s_\theta^2 s_\psi^2 s_\phi \\
&\quad - r b^3 c_\phi^3 s_\theta s_\psi c_\psi c_\theta - r^3 b c_\phi s_\theta s_\psi - r b^3 s_\phi c_\theta^2 c_\phi^2 c_\psi - r b^3 s_\phi^3 c_\theta^2 c_\psi
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Les coefficients E_i , $i = 1, \dots, 6$, dépendent des paramètres géométriques b et r , ainsi que de l'orientation \mathbf{Q} de la plate-forme mobile du manipulateur parallèle, pour le cas d'actionnement considéré.

A.4 Équations des lieux de singularités dans l'espace articulaire

L'équation du lieu de singularités de type II, correspondant à la configuration de la plate-forme mobile telle que $P_\Delta \in (d_1) \cap (d_2) \cap (d_3)$, peut être exprimée sous une forme très compacte dans l'espace des coordonnées articulaires. En effet, chaque droite (d_i) peut être réécrite sous la forme suivante, en fonction de l'angle θ_{i1} :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{i0x} \\ p_{i0y} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\sin \theta_{i1} \\ \cos \theta_{i1} \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

et, après élimination du paramètre λ dans l'équation (A.14), nous obtenons l'équation :

$$\cos \theta_{i1} u + \sin \theta_{i1} v - \cos \theta_{i1} p_{i0x} - \sin \theta_{i1} p_{i0y} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{A.15}$$

Par suite, le fait que les trois droites (d_i) , $i = 1, 2, 3$, sont concourantes peut être exprimé de manière compacte en écrivant que le déterminant suivant est égal à zéro :

$$\begin{vmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{21} & \cos \theta_{31} \\ \sin \theta_{11} & \sin \theta_{21} & \sin \theta_{31} \\ -\cos \theta_{11} p_{10x} - \sin \theta_{11} p_{10y} & -\cos \theta_{21} p_{20x} - \sin \theta_{21} p_{20y} & -\cos \theta_{31} p_{30x} - \sin \theta_{31} p_{30y} \end{vmatrix} = 0 \tag{A.16}$$

En substituant dans l'équation (A.16) les composantes des vecteurs \mathbf{p}_{i0} , $i = 1, 2, 3$ donnés par l'équation (A.3), et en développant ensuite symboliquement l'expression résultante du déterminant, nous obtenons l'équation suivante pour le lieu des singularités de type II :

$$\begin{aligned} & 3 \cos \theta_{11} \sin \theta_{21} \cos \theta_{31} + \cos \theta_{11} \sin \theta_{31} \sin \theta_{21} \sqrt{3} - 3 \sin \theta_{11} \cos \theta_{21} \cos \theta_{31} \\ & - 2 \sin \theta_{11} \cos \theta_{31} \sin \theta_{21} \sqrt{3} + \sin \theta_{11} \sqrt{3} \sin \theta_{31} \cos \theta_{21} = 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Cette équation dépend uniquement des angles θ_{i1} , $i = 1, 2, 3$, associés aux articulations rotoïdes passives du manipulateur.