

DANY GAGNON-LACHANCE

**POLYÈDRES DÉPLOYABLES À 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ
ET DÉTERMINATION DU NOMBRE DE DEGRÉS DE
LIBERTÉ DE POLYÈDRES ARTICULÉS**

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

MARS 2005

Résumé

Ce mémoire traite de deux sujets principaux. Le premier sujet traité est un nouveau type de mécanisme déployable à 1 degré de liberté, composé de groupes plans à 1 degré de liberté, assemblés sur les faces de différents polyèdres. Le résultat est un polyèdre déployable avec 1 degré de liberté. Deux prototypes ont été construits dans le but de valider le bon fonctionnement du principe, soit le cube et le dodécaèdre déployables.

Le second sujet est la détermination du nombre de degrés de liberté de polyèdres articulés. Comme ces mécanismes sont surcontraints et sont composés de chaînes cinématiques complexes, l'utilisation des formules de Tchebychev-Grübler-Kutzbach ne peut s'appliquer. La méthode proposée est basée sur l'analyse de la jacobienne du mécanisme et de son noyau. Le nombre de degrés de liberté du mécanisme est la dimension du noyau de la jacobienne. L'analyse est faite sur deux mécanismes, soit le cube et le dodécaèdre articulés. Les résultats indiquent que le cube possède trois degrés de liberté en général, tandis que le dodécaèdre possède 5 degrés de liberté en position droite.

Avant-propos

Avant d’aborder le sujet principal de ce mémoire, j’aimerais d’abord effectuer quelques remerciements.

Premièrement, je désire remercier Clément Gosselin, pour m’avoir dirigé tout au long de mes travaux de recherche et m’avoir guidé vers des solutions intéressantes aux problèmes rencontrés, tout en me laissant assez de latitude pour explorer mes propres idées. Merci aussi pour m’avoir permis de réintégrer le Laboratoire de Robotique après un an et demi d’absence dans le but de terminer mon mémoire, ce fut très apprécié.

Merci aussi à Thierry Laliberté, qui a tout mis en oeuvre pour me permettre de réaliser les prototypes du cube et du dodécaèdre déployable à temps pour le “workshop” de robotique d’octobre 2002 qui avait lieu à l’Université Laval. J’ai aussi eu la chance de discuter avec lui des résultats obtenus pour le nombre de degrés de liberté des polyèdres articulés, ces discussions ont toujours été très constructives.

Merci à Boris Mayer-St-Onge, qui a toujours su maintenir un réseau informatique hors pair et sans faille tout au long de mon passage au laboratoire. Merci aussi pour tous les trucs et astuces quant à l’utilisation des logiciels mis à notre disposition au laboratoire.

Merci aussi à tous les autres membres du laboratoire, avec qui il a toujours été un plaisir de discuter de robotique mais aussi de tout autre sujet sur la pause du midi, ou encore lors de nos sorties du jeudi soir.

Je désire aussi remercier ma famille, sans laquelle je n’aurais pas eu la chance de pousser mes études à ce stade. Merci à ma mère, mon frère, et feu ma grand-mère qui

m'ont permis de ne jamais me soucier de payer un loyer ou de remplir le frigo, pouvant ainsi me consacrer pleinement à mes études, et à feu mon grand-père, pour m'avoir communiqué l'intérêt pour la mécanique.

Finalement, Merci au CRSNG et au Laboratoire de Robotique de l'Université Laval pour avoir financé mes études graduées à l'aide de bourses de recherche. Sans cette contribution généreuse, il m'aurait été difficile d'étudier deux ans sans toucher de salaire.

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vii
Table des figures	viii
1 Introduction	1
1.1 Mécanismes déployables	1
1.2 Détermination du nombre de degrés de liberté des polyèdres articulés	3
2 Polyèdres déployables construits à partir de mécanismes plans à 1 degré de liberté	4
2.1 Faces déployables	5
2.1.1 Principe cinématique	5
2.1.2 Facteur d'expansion	6
2.2 Application à des mécanismes polyédriques déployables basés sur les solides de Platon	11
2.2.1 Description	11
2.2.2 Degré de surcontrainte des mécanismes	11
2.3 Valeurs numériques et prototypes	16
2.4 Extension à d'autres géométries	19

3	Détermination du nombre de degrés de liberté de polyèdres articulés	21
3.1	Description de la méthode utilisée pour la détermination du nombre de degrés de liberté d'une chaîne cinématique complexe	22
3.1.1	Analyse de la mobilité	22
3.1.2	Architecture des polyèdres	25
3.2	Exemple du type de mécanisme étudié	26
3.2.1	Graphe du mécanisme	28
3.2.2	Équations cinématiques des boucles 1 à 4	29
3.2.3	Équations cinématiques des boucles 5 à 7	32
3.2.4	Construction de la matrice jacobienne et détermination du nombre de degrés de liberté du mécanisme	34
4	Application de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté au cube articulé	35
4.1	Détermination du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position droite	36
4.1.1	Description du mécanisme	36
4.1.2	Graphe du mécanisme	37
4.1.3	Équations cinématiques des boucles 1 à 6	39
4.1.4	Équations cinématiques des boucles 7 à 13	41
4.1.5	Construction de la matrice jacobienne du mécanisme et détermination du nombre de degrés de liberté	42
4.1.6	Analyse du noyau de \mathbf{J} et détermination du mouvement possible	43
4.2	Détermination du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position quelconque	46
4.2.1	Géométrie utilisée	47
4.2.2	Équations cinématiques des boucles 1 à 6	50
4.2.3	Équations cinématiques des boucles 7 à 13	51
4.2.4	Construction de la matrice jacobienne du mécanisme et détermination du nombre de degrés de liberté	53
4.2.5	Analyse du noyau de \mathbf{J} et détermination du mouvement possible	53
4.2.6	Quelques configurations singulières	54
5	Application de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté au dodécaèdre articulé en position droite	56
5.1	Description du mécanisme	57
5.2	Graphe du mécanisme	58

5.3	Équations cinématiques des boucles 1 à 12	59
5.4	Équations cinématiques des boucles 13 à 31	62
5.4.1	Définition des vecteurs pour les équations sur les sommets	62
5.4.2	Équations cinématiques	65
5.5	Construction de la matrice jacobienne du mécanisme et détermination du nombre de degrés de liberté	67
6	Conclusion	68
	Bibliographie	70
A	Équations, vecteurs et matrices pour la résolution du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position droite	72
A.1	Équations cinématiques des boucles 2 à 6	73
A.1.1	Boucle i (face j)	73
A.1.2	Matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_6	74
A.2	Équations cinématiques des boucles 8 à 13	74
B	Équations, vecteurs et matrices pour la résolution du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position quelconque	76
B.1	Équations cinématiques des boucles 2 à 6	77
B.1.1	Boucle i (face j)	77
B.1.2	Matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_6	79
B.2	Équations cinématiques des boucles 8 à 13	79
C	Équations, vecteurs et matrices pour la résolution du nombre de degrés de liberté du dodécaèdre articulé en position droite	81
C.1	Équations cinématiques des boucles 2 à 12	82
C.1.1	Boucle i (face j)	82
C.1.2	Matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_{12}	83
C.2	Équations cinématiques des boucles 14 à 31	84
C.2.1	Boucle i (sommet QRS)	84

Liste des tableaux

2.1	Valeurs numériques pour les cinq solides de Platon déployables.	17
4.1	Vitesses articulaires sur les faces pour le vecteur \mathbf{n}_1 du cube en position droite.	44
4.2	Vitesses articulaires sur les faces pour le vecteur \mathbf{n}_2 du cube en position droite.	44
4.3	Vitesses articulaires sur les faces pour le vecteur \mathbf{n}_3 du cube en position droite.	46
A.1	Correspondance des indices i et j pour le cube en position droite.	73
B.1	Correspondance des indices i et j pour le cube articulé en position quelconque.	77
C.1	Correspondance des indices i et j pour le dodécaèdre articulé (boucles 1 à 12).	82
C.2	Correspondance des indices i , Q , R et S pour le dodécaèdre articulé (boucles 14 à 31).	85

Table des figures

1.1	Certains mécanismes déployables existants (a) sphère d’hoberman [1], (b) mécanismes polyédriques réguliers [2], (c) “star transformers” [2], (d) mécanisme à liaisons prismatiques [3].	2
2.1	Les 5 solides de Platon : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre.	5
2.2	Mécanisme plan déployable à 1 DDL.	7
2.3	Description des variables a , b , S et h	8
2.4	Mécanisme plan avec un parallélogramme ($p=1$).	10
2.5	Simulation du tétraèdre déployable.	12
2.6	Simulation du cube déployable.	12
2.7	Simulation de l’octaèdre déployable.	13
2.8	Simulation du dodécaèdre déployable.	14
2.9	Simulation de l’icosaèdre déployable.	15
2.10	Prototype du cube déployable.	17
2.11	Prototype du dodécaèdre déployable.	18
2.12	Exemple de géométrie pouvant être réalisée par assemblage de groupes plans.	20
3.1	Mécanisme plan utilisé pour bâtir les polyèdres déformables.	26
3.2	Principe d’assemblage des polyèdres articulés.	27
3.3	Tétraèdre articulé.	27
3.4	Graphe du tétraèdre articulé.	29
3.5	Identification des boucles sur le graphe.	30
3.6	Géométrie utilisée pour les boucles sur les faces.	31

3.7	Géométrie utilisée pour les boucles sur les sommets	33
4.1	Cube en position droite.	36
4.2	Graphe du cube articulé.	38
4.3	Géométrie utilisée pour les boucles sur les faces du cube en position droite.	40
4.4	Géométrie utilisée pour les boucles sur les sommets du cube en position droite.	41
4.5	Déformation infinitésimale du cube associée au vecteur \mathbf{n}_1	45
4.6	Mécanisme à 3 barres possédant un degré de liberté local (position montrée) mais qui ne peut produire aucun déplacements finis.	46
4.7	Vecteurs directeurs sur les arêtes du cube.	47
4.8	Géométrie utilisée pour les boucles 1 à 6 du cube en position quelconque.	50
4.9	Géométrie utilisée pour les boucles 7 à 13 du cube en position quelconque.	52
4.10	Cube articulé en configuration singulière.	55
5.1	Graphe du dodécaèdre articulé.	58
5.2	Géométrie utilisée pour la face A du dodécaèdre articulé.	60
5.3	Sommet quelconque du dodécaèdre.	62
5.4	Sommet du dodécaèdre pour la boucle 13.	66

Chapitre 1

Introduction

1.1 Mécanismes déployables

Depuis quelques années, les mécanismes déployables ont été beaucoup étudiés. Il existe déjà plusieurs types de mécanismes déployables. D’abord il y a les mécanismes d’Hoberman [1], dont la célèbre sphère déployable. Celle-ci fonctionne à l’aide de mécanismes plans montés sur des grands cercles de la sphère et préservant leur forme (figure 1.1a). On note aussi les mécanismes polyédriques réguliers de Wolhart [2] dans lesquels des groupes plans sont posés sur les faces d’un polyèdre et assemblés à l’aide de sommets à articulations multiples (figure 1.1b). On retrouve également les polyèdres à faces transformables ou “star transformers” [2] dans lesquels des groupes spatiaux sont implantés sur les faces d’un polyèdre (figure 1.1c). Finalement, il y a les polyèdres 1 ddl à liaisons prismatiques [3] qui conservent leur forme grâce à la rigidité des sommets

(figure 1.1d). Il y a aussi beaucoup d'autres types de mécanisme déployables dans la littérature : par exemple [4], [5], [6], [7], [8] et [9].

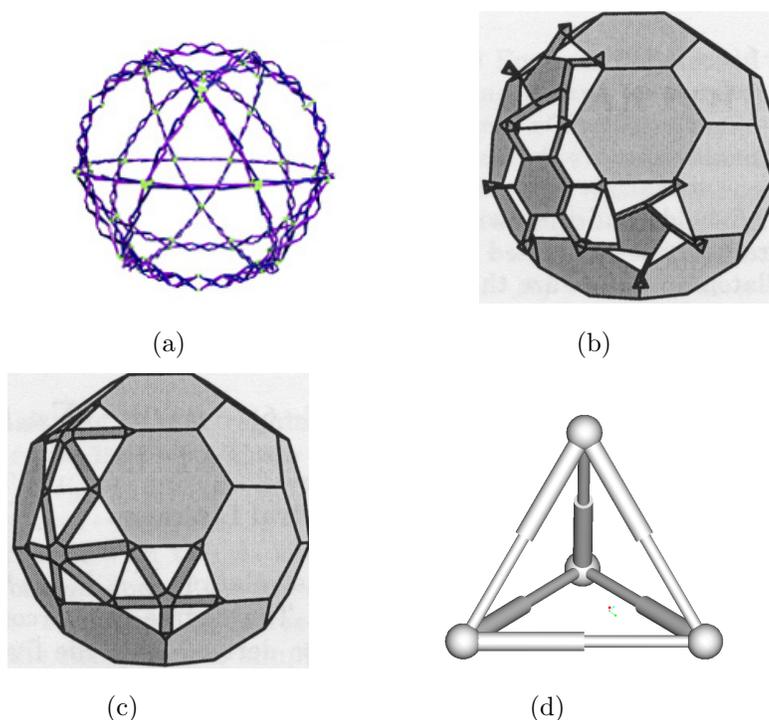


FIG. 1.1 – Certains mécanismes déployables existants (a) sphère d’hoberman [1], (b) mécanismes polyédriques réguliers [2], (c) “star transformers” [2], (d) mécanisme à liaisons prismatiques [3].

Au chapitre 2, un nouveau type de mécanismes déployables à 1 ddl sera présenté. Il s’agit de polyèdres déployables où des groupes plans à 1 ddl sont assemblés sur les faces du polyèdre à l’aide de liaisons sphériques aux sommets. Une explication détaillée du fonctionnement du mécanisme est donnée dans la section 2.1. L’application de ce mécanisme aux solides de Platon est présentée dans la section 2.2. Finalement, dans la section 2.3, quelques caractéristiques propres aux mécanismes proposés sont discutées et deux prototypes sont montrés.

1.2 Détermination du nombre de degrés de liberté des polyèdres articulés

La formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach est généralement utilisée pour déterminer le nombre de degrés de liberté de plusieurs mécanismes en se basant sur leur topologie. Par contre, dans certains cas particuliers, cette formule n'est pas applicable puisqu'elle conduit à des résultats erronés. C'est entre autres le cas pour les mécanismes surcontraints et certains mécanismes comportant plusieurs boucles fermées.

Les polyèdres articulés dont nous désirons connaître le nombre de degrés de liberté font partie de ces cas particuliers, et donc la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach ne peut s'appliquer.

Le chapitre 3 présente une méthode de détermination du nombre de degrés de liberté des chaînes cinématiques tirées de [12]. Cette méthode est basée sur l'analyse de la matrice jacobienne du mécanisme. Elle tient donc compte à la fois de la topologie de la chaîne, mais aussi de sa géométrie. Dans ce chapitre, cette méthode est développée pour le cas particulier de la détermination du nombre de degrés de liberté des polyèdres articulés.

Cette méthode de détermination du nombre de degrés de liberté sera ensuite appliquée à un cube articulé au chapitre 4. Le nombre de degrés de liberté du cube articulé est d'abord calculé pour sa position droite (cube). Le résultat de cette analyse permettra de déterminer le nombre de paramètres à utiliser pour caractériser le cube en position quelconque. Le nombre de degrés de liberté du cube en position quelconque est alors calculé à l'aide de la méthode présentée au chapitre 3.

Finalement, dans le chapitre 5, la méthode développée est appliquée pour déterminer le nombre de degrés de liberté d'un dodécaèdre articulé en position droite.

Chapitre 2

Polyèdres déployables construits à partir de mécanismes plans à 1 degré de liberté

Dans ce chapitre, un nouveau type de mécanisme déployable est présenté. Il s'agit de polyèdres déployables construits à l'aide de groupes plans à 1 degré de liberté. Les limites théoriques du facteur d'expansion sont démontrées, les résultats des simulations sont montrés, et deux prototypes sont présentés pour démontrer le bon fonctionnement du principe.

Dans ce chapitre, un nouveau type de mécanismes déployables construits à l'aide de groupes plans à 1 ddl est introduit. Les groupes plans utilisés ont la forme de

polygones réguliers, déployables mais qui conservent leur forme en tout temps. Ces groupes plans forment les faces du polyèdre. Ils sont assemblés à l'aide de liaisons sphériques aux sommets du polyèdre. Le résultat est un polyèdre déployable à 1 degré de liberté puisqu'il peut se déployer, mais conserve toujours sa forme.

2.1 Faces déployables

2.1.1 Principe cinématique

Un polyèdre convexe est dit régulier si ses faces sont elles-mêmes des polygones convexes réguliers, si ses faces sont identiques et si un nombre égal d'arêtes se joignent à chaque sommet [10]. Il n'existe que 5 polyèdres convexes réguliers, ce sont les 5 solides de Platon : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre (figure 2.1).

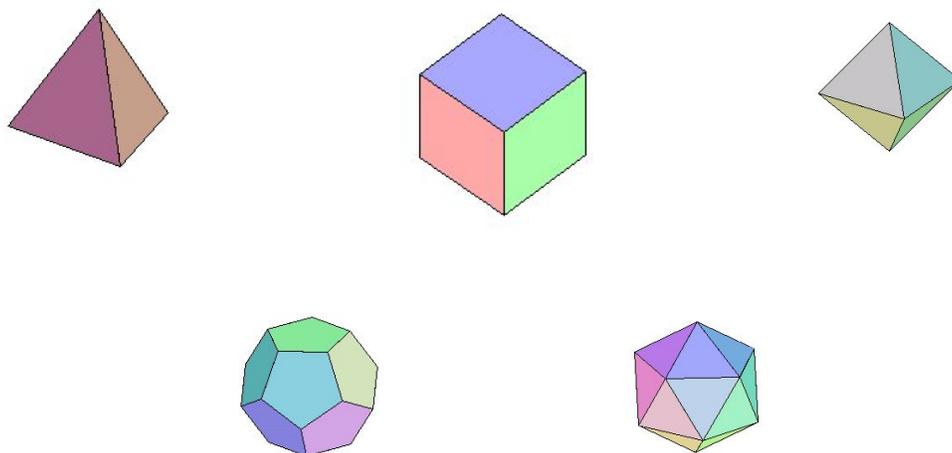


FIG. 2.1 – Les 5 solides de Platon : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre.

Ce type de solide est largement utilisé pour développer des mécanismes déployables puisqu'ils sont composés de plusieurs faces identiques. Pour obtenir un solide déployable, l'une des possibilités consiste à produire un mécanisme plan, en forme de polygone régulier, déployable avec 1 ddl et d'assembler ces mécanismes plans ensemble et ainsi

former le solide désiré.

Le mécanisme plan est un polygone régulier déployable à n cotés et 1 degré de liberté (figure 2.2). Le nombre de cotés est choisi en fonction de la géométrie du polyèdre désiré. Le mécanisme plan est composé (voir figure 2.2) d'un polygone régulier à n cotés fixe (1), d'un autre polygone à n cotés qui lui est mobile (2), de n pattes constituées d'un mécanisme à 4 barres (4, 5, 6) et de n liens (3) entre une des articulations de chaque patte et un sommet du polygone mobile. Le polygone mobile est lié au polygone fixe à l'aide d'une articulation rotoïde placée à leur centroïde O . Les pattes sont composées de trois membrures, les deux premières, les membrures intermédiaires (4) et (5), sont liées à une des arêtes du polygone fixe à l'aide d'articulations rotoïdes à l'une de leurs extrémités, tandis que la troisième, la membrure terminale (6), est liée aux deux membrures intermédiaires par deux liaisons rotoïdes à l'une de ses extrémités tandis que le point P_i est fixé à l'autre extrémité. Chaque patte, avec le polygone fixe, forme un mécanisme à 4 barres à 1 ddl. Finalement, un lien relie une des articulations rotoïdes de la membrure terminale (3) à l'un des sommets du polygone mobile (2). Les n pattes sont toutes identiques et disposées symétriquement tout autour du polygone fixe. Le vecteur qui relie le centroïde O du polygone fixe au point P_i de la patte i est le vecteur \mathbf{p}_i (figure 2.2). La norme du vecteur \mathbf{p}_i est appelé L

$$L = \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i \quad (2.1)$$

Cette longueur sera utilisée pour décrire le facteur d'expansion du polygone.

Le mécanisme résultant est un polygone à n cotés, déployable et qui a 1 ddl. En effet, si l'une des pattes se déplace, elle occasionne la rotation du polygone mobile (2) par rapport au polygone fixe par le biais du lien (3). Cette rotation entraîne un déplacement identique pour toutes les autres pattes, et la forme du polygone défini par les points P_i est conservée.

2.1.2 Facteur d'expansion

Il est possible de caractériser l'expansion du mécanisme en mesurant une longueur caractéristique et en déterminant les valeurs minimale et maximale de cette longueur. Dans certaines applications il peut être important d'avoir un facteur d'expansion le plus

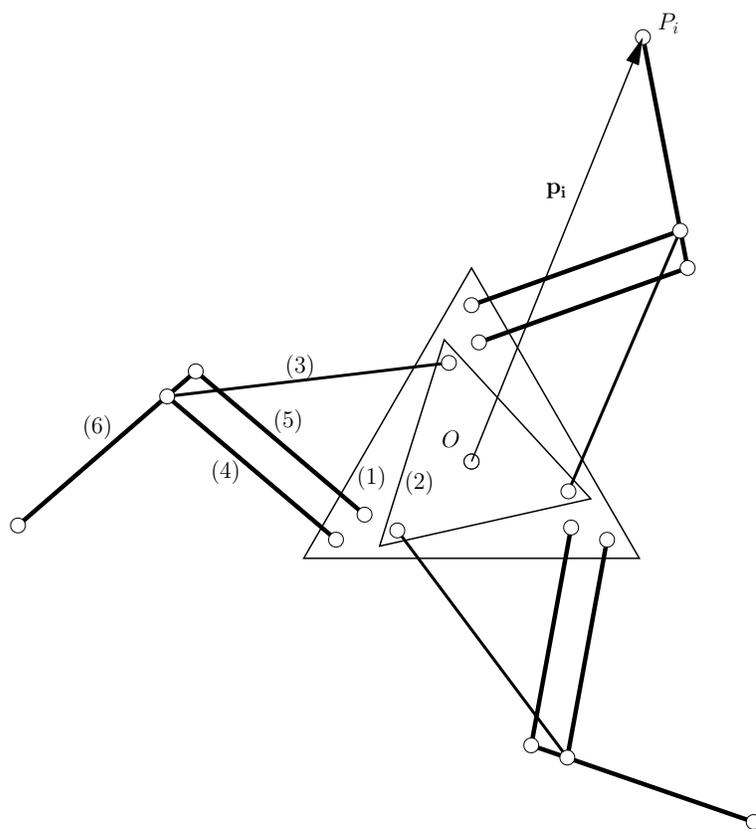


FIG. 2.2 – Mécanisme plan déployable à 1 DDL.

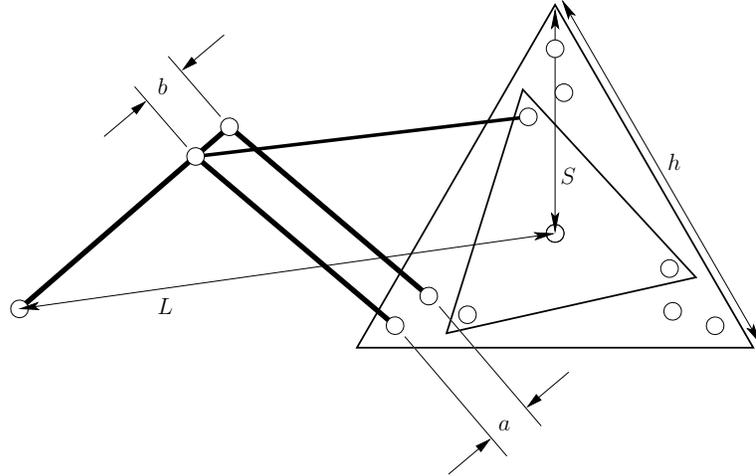


FIG. 2.3 – Description des variables a , b , S et h .

grand possible. Le facteur d'expansion du mécanisme en fonction de divers paramètres géométriques sera donc étudié.

Le facteur d'expansion r est défini comme le rapport suivant

$$r = \frac{L_{max}}{L_{min}} \quad (2.2)$$

où L_{max} est la longueur caractéristique L en configuration déployée, et L_{min} est la longueur caractéristique en configuration rétractée.

Le facteur d'expansion maximal est obtenu lorsque pour un polygone fixe d'une dimension donnée, L_{min} est au minimum, et L_{max} est au maximum géométriquement atteignable. Par exemple, pour le triangle, supposons que les membrures qui composent le mécanisme soient si fines que, en position rétractée, les sommets du polygone coïncident avec les sommets du triangle fixe, alors

$$L_{min} = S \quad (2.3)$$

où S est la distance entre le centroïde du polygone fixe O et l'un de ses sommets (figure 2.3). De plus, supposons que les dimensions a et b peuvent être négligées. Ici, a est la distance entre les deux axes des articulations rotoïdes liant les membrures intermédiaires au polygone fixe et b est la distance entre les axes des deux articulations rotoïdes reliant la membrure terminale aux membrures intermédiaires (figure 2.3). Avec ces suppositions, les membrures des pattes auront la longueur du côté du triangle, soit

$$h = \sqrt{3}S \quad (2.4)$$

où h est la longueur du coté du polygone fixe. La longueur caractéristique en configuration déployée devient

$$L_{max} = 2h + S \quad (2.5)$$

en substituant l'équation (2.4) dans (2.5), on obtient

$$L_{max} = (2\sqrt{3} + 1)S \quad (2.6)$$

et le facteur d'expansion maximal r_m est

$$r_m = \frac{(2\sqrt{3} + 1)S}{S} \quad (2.7)$$

$$r_m = 2\sqrt{3} + 1 \simeq 4.46 \quad (2.8)$$

Ce rapport d'expansion représente le rapport maximal qui peut être obtenu dans un cas idéal. En réalité, les contraintes mécaniques et les interférences possibles sont toujours présents et des facteurs d'expansion plus petits seront obtenus.

Similairement pour un polygone à n cotés, les équations (2.3) et (2.5) demeurent valides. La dimension h dépend du nombre de cotés n du polygone.

$$h = 2S \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (2.9)$$

Le facteur d'expansion maximal peut être écrit en utilisant les équations (2.2), (2.3) et (2.5)

$$r_m = \frac{S + 2h}{S} \quad (2.10)$$

et en substituant l'équation (2.9) dans la précédente, on obtient

$$r_m = \frac{S + 4S \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{S} \quad (2.11)$$

$$r_m = 1 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (2.12)$$

Pour obtenir un facteur d'expansion plus grand que le facteur maximal trouvé plus haut, il est possible de modifier la géométrie du mécanisme en ajoutant p parallélogrammes sur chacune des n pattes. Le mécanisme obtenu est toujours un polygone déployable à 1 ddl qui conserve le même fonctionnement que la version sans parallélogrammes, à l'exception que chacune des pattes pourra atteindre une longueur plus grande.

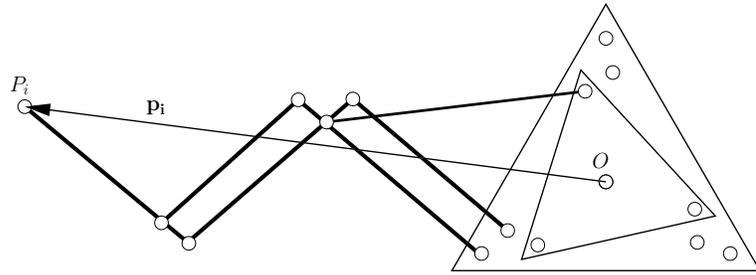


FIG. 2.4 – Mécanisme plan avec un parallélogramme ($p=1$).

Le facteur d'expansion maximal du mécanisme à n cotés et p parallélogrammes r_{mp} peut être calculé. Nous avons :

$$L_{max} = S + (p + 2)h \quad (2.13)$$

$$L_{min} = S \quad (2.14)$$

en substituant ces équations, et aussi l'équation (2.9) dans (2.2), on obtient

$$r_{mp} = \frac{S + (p + 2)2S \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{S} \quad (2.15)$$

$$r_{mp} = 1 + 2(p + 2) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (2.16)$$

Cette version du mécanisme plan peut donc atteindre de très grands facteurs d'expansion en augmentant le nombre de parallélogrammes sur les pattes. Bien-sûr, lorsqu'on insère les contraintes mécaniques dans le design du mécanisme, le facteur d'expansion du mécanisme réel sera plus petit que le facteur d'expansion maximal calculé plus haut, mais il peut s'en approcher si l'on garde les membrures les plus fines possibles et les articulations compactes.

2.2 Application à des mécanismes polyédriques déployables basés sur les solides de Platon

2.2.1 Description

Comme les cinq solides de Platon sont tous composés de faces polygonales régulières, il est facile de construire de tels solides à l'aide des polygones décrits plus haut. Pour construire un polyèdre, il s'agit d'assembler f faces en joignant les sommets par des liaisons sphériques. Par exemple, pour le tétraèdre, il s'agit d'assembler quatre faces triangulaires et de joindre les sommets des triangles ensemble à l'aide de liaisons sphériques. Le résultat est un tétraèdre déployable surcontraint, mais mobile avec 1 degré de liberté (figure 2.5). Il est possible de faire la même chose pour chacun des solides de Platon en assemblant les faces ensemble correctement (figures 2.6, 2.7, 2.8 et 2.9).

Puisque chaque face du polyèdre est composée d'un mécanisme plan à 1 degré de liberté, chacune des faces est contrainte de maintenir sa forme. Le polyèdre doit donc lui aussi, maintenir sa forme.

Par contre, les faces utilisées sont déployables et peuvent changer de dimension. Le polyèdre ainsi formé pourra donc lui aussi changer de dimension, mais tout en conservant sa forme. Ce mécanisme est donc un polyèdre déployable à 1 degré de liberté.

Dans les “regular polyhedral linkages” de Wolhart [2], ce sont les sommets qui, par leur géométrie, prescrivent la forme du mécanisme. Ici, ce ne sont pas les sommets (composés de liaisons sphériques) qui prescrivent la forme du polyèdre, mais bien les faces elles-mêmes puisque ces faces doivent conserver leur forme en tout temps. Les sommets ne servent que de lien entre les différentes faces.

2.2.2 Degré de surcontrainte des mécanismes

Les solides de Platon déployables vus plus haut sont composés d'un nombre très important de corps rigides et de liaisons. Ces mécanismes forment des chaînes cinématiques

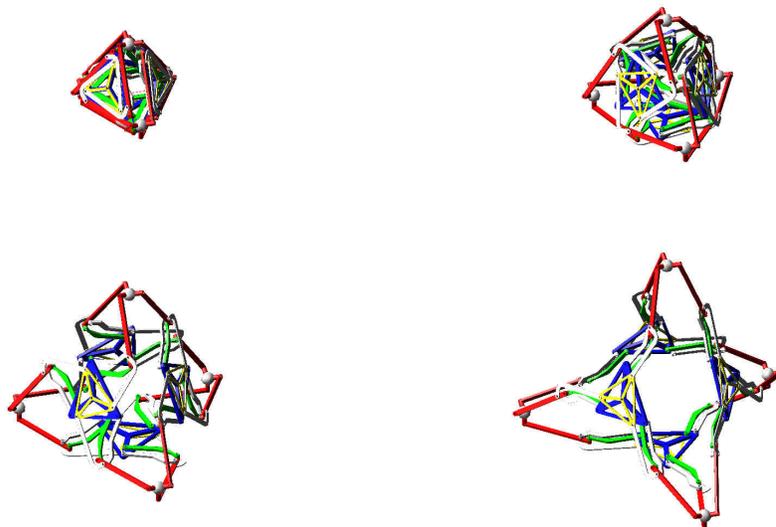


FIG. 2.5 – Simulation du tétraèdre déployable.

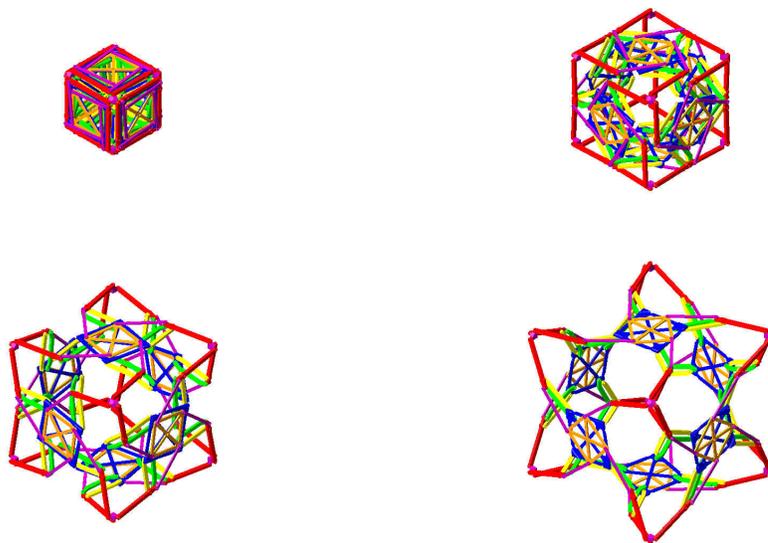


FIG. 2.6 – Simulation du cube déployable.

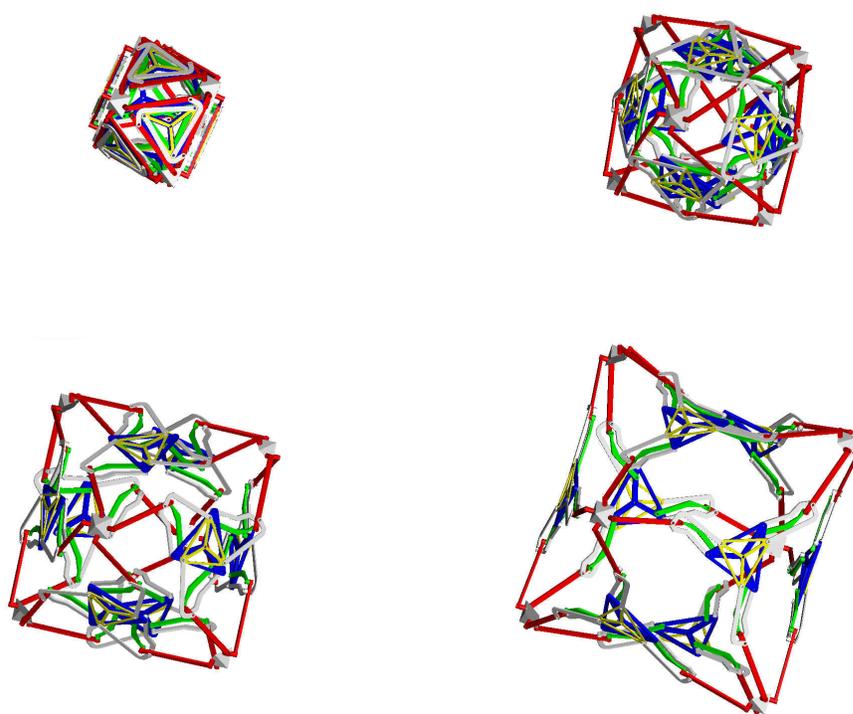


FIG. 2.7 – Simulation de l'octaèdre déployable.

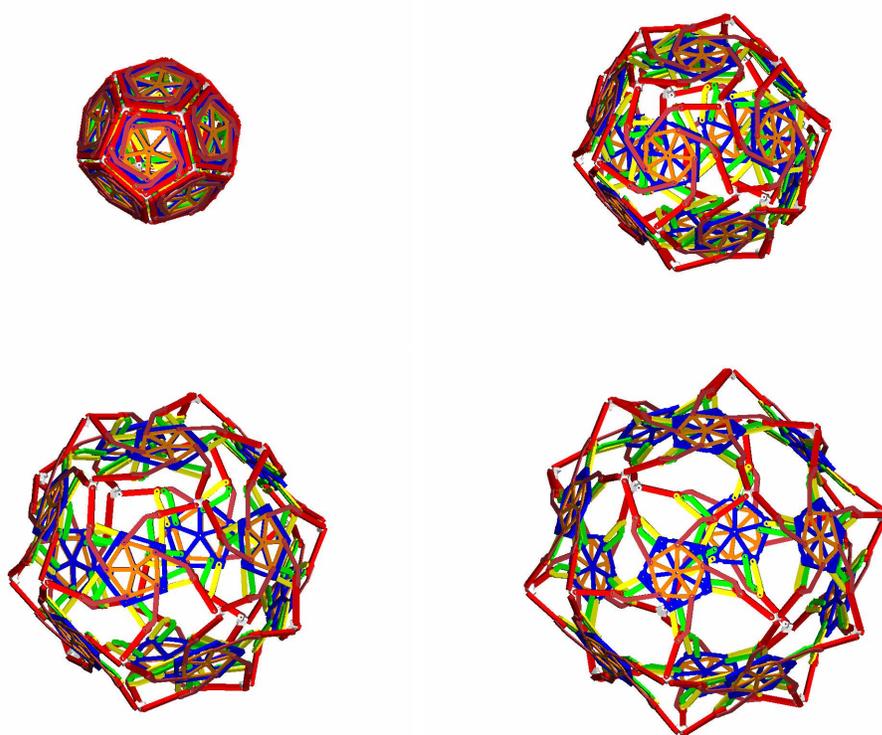


FIG. 2.8 – Simulation du dodécaèdre déployable.

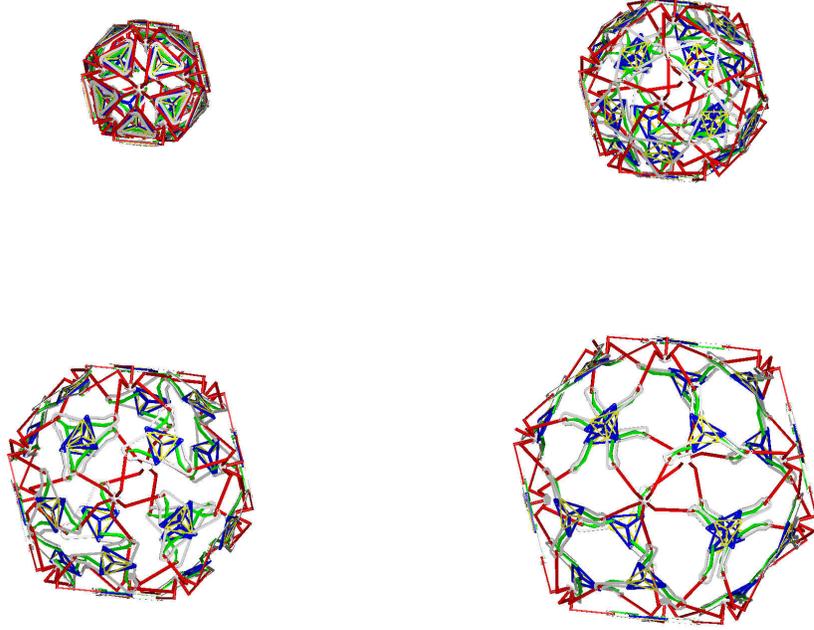


FIG. 2.9 – Simulation de l'icosaèdre déployable.

complexes. Il est intéressant de vérifier le degré de surcontrainte c de ces mécanismes en utilisant la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach, qui s'écrit :

$$l = d(m - g - 1) + \sum_{i=1}^g e_i \quad (2.17)$$

où l est le degré de liberté du mécanisme, d est la dimension du système de mouvement (le degré de liberté d'un corps rigide du mécanisme sans aucune contrainte), m est le nombre de corps rigides, g est le nombre d'articulations et e_i est le nombre de degré de liberté de la i^{eme} articulation. Pour les mécanismes étudiés, il est possible d'exprimer m , g et $\sum_{i=1}^g e_i$ en fonction du nombre de faces f , du nombre de cotés par face n et du nombre de sommets du polyèdre v :

$$m = f(4n + 2) \quad (2.18)$$

$$g = f(6n + 1) + v(q - 1) \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^g e_i = f(6n + 1) + 3(v(q - 1)) \quad (2.20)$$

où q représente le nombre de faces qui se croisent par sommet. Pour les solides de Platon, nous avons toujours :

$$q = \frac{nf}{v} \quad (2.21)$$

Le nombre de degré de liberté du mécanisme l en fonction des paramètres géométriques du mécanisme prédit par la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach avec $d = 6$ est

$$l = -9nf + 7f + 3v - 6 \quad (2.22)$$

par contre, le nombre de degré de liberté réel du mécanisme considéré est de 1. Le degré de surcontrainte c s'écrit $c = 1 - l$. Nous avons donc :

$$c = 1 + 9nf - 7f - 3v + 6 \quad (2.23)$$

Le degré de surcontrainte c donne une indication du nombre de contraintes cinématiques redondantes dans le mécanisme. Son calcul est important dans le design du mécanisme puisqu'il peut affecter le niveau de tolérance des pièces qui composent le mécanisme. Il peut aussi affecter le frottement inhérent au mouvement du mécanisme.

2.3 Valeurs numériques et prototypes

Les solides de Platon déployables vus plus haut sont tous construits en se basant sur le même principe. Ces solides sont construits à l'aide du nombre approprié de faces à trois, quatre ou cinq cotés. Ils sont tous surcontraints à des degrés différents et possèdent leur propre facteur d'expansion maximal. Les valeurs numériques sur le nombre de faces, le nombre de cotés par face, le nombre de sommets, le degré de surcontrainte, le facteur d'expansion maximal pour 0 et 1 parallélogramme et les facteurs d'expansion des prototypes sont présentés dans le tableau 2.1

Dans le but de valider le principe de fonctionnement du mécanisme, deux prototypes ont été construits par prototypage rapide [11] : le cube (figure 2.10) et le dodécaèdre (figure 2.11).

Le cube est construit à partir de six faces carrées et de 8 sommets, tandis que le dodécaèdre est construit de 12 faces en pentagone et de 20 sommets. Dans le but de

polyèdre	f	n	v	c	$r_m (p = 0)$	$r_{mp} (p = 1)$	r proto
tétraèdre	4	3	4	75	4.46	6.20	
cube	6	4	8	157	3.82	5.24	2.8
octaèdre	8	3	6	149	4.46	6.20	
dodécaèdre	12	5	20	403	3.35	4.42	2.5
icosaèdre	20	3	12	371	4.46	6.20	

TAB. 2.1 – Valeurs numériques pour les cinq solides de Platon déployables.

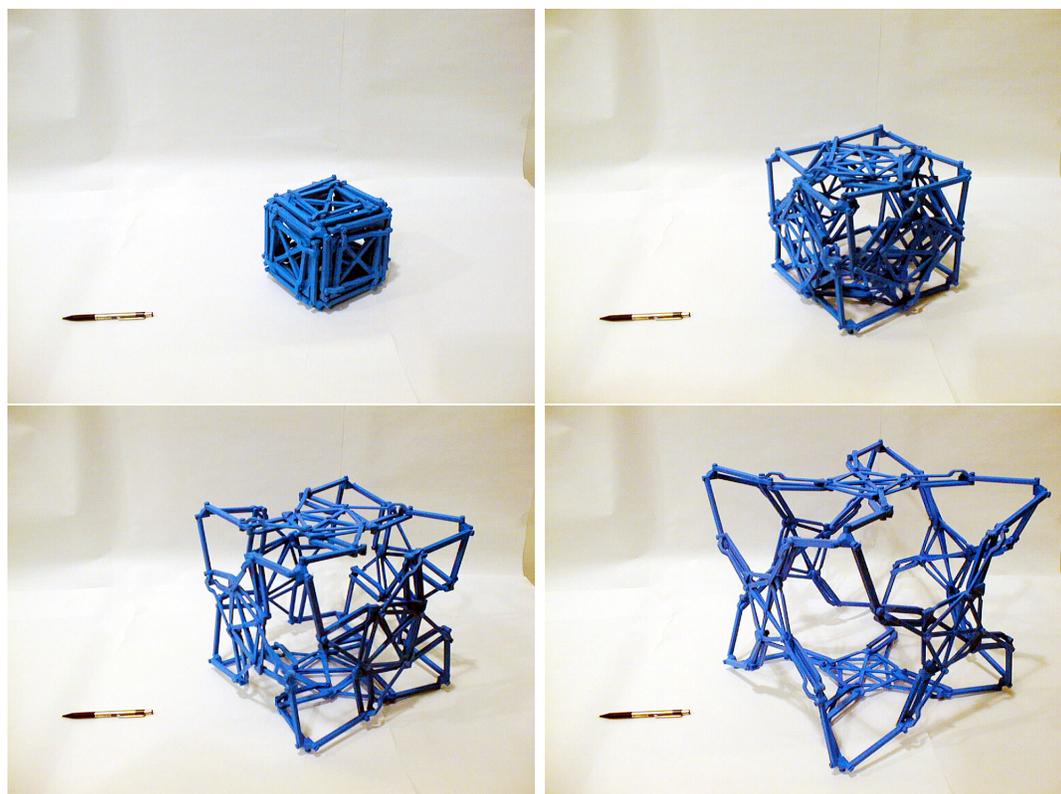


FIG. 2.10 – Prototype du cube déployable.

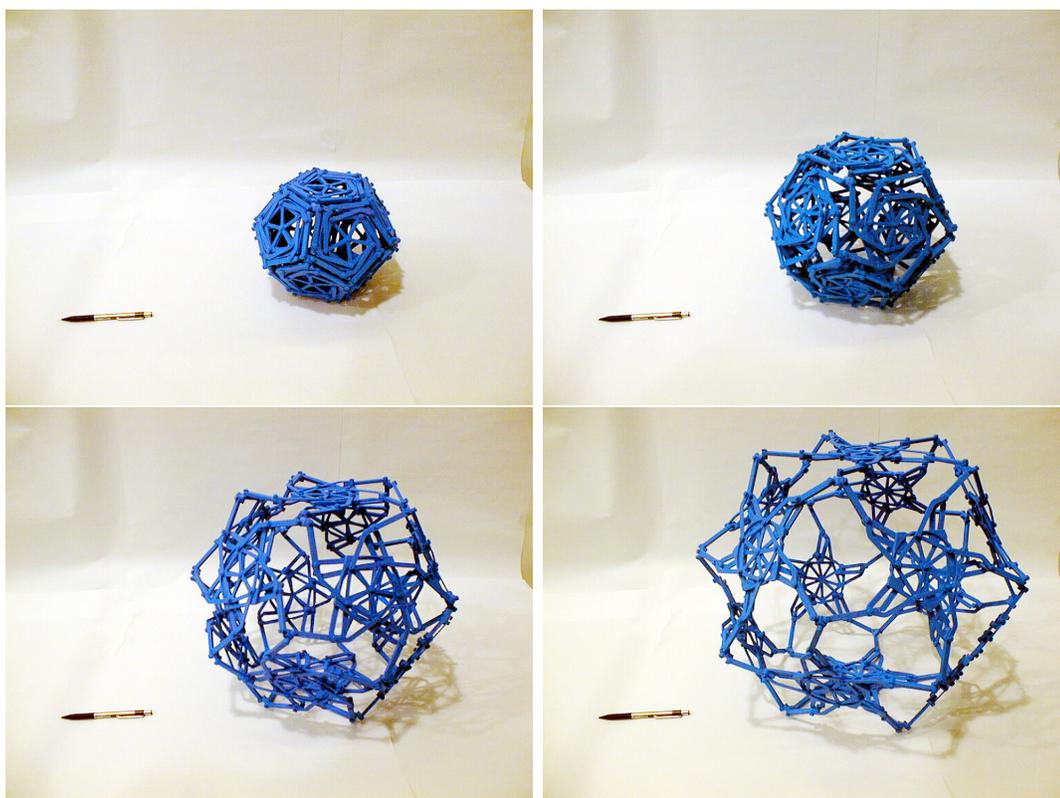


FIG. 2.11 – Prototype du dodécaèdre déployable.

simplifier le design mécanique des deux polyèdres, des articulations rotoïdes plutôt que des articulations sphériques ont été utilisées aux sommets pour joindre les faces, ce qui augmente encore le degré de surcontrainte des modèles. L'assemblage des modèles est assez simple ; il s'agit de monter les faces d'abord, puis d'assembler les faces ensemble à l'aide des sommets.

Une fois assemblés, ces deux mécanismes sont des polyèdres déployables à 1 ddl, comme prévu. Les deux modèles conservent leur forme tout au long du processus de déploiement. Le déploiement et la contraction du mécanisme s'effectuent manuellement en tirant ou poussant sur deux sommets opposés du polyèdre. L'opération s'effectue assez facilement malgré une certaine résistance due au frottement dans les nombreuses liaisons (174 pour le cube et 432 pour le dodécaèdre).

2.4 Extension à d'autres géométries

Les mécanismes basés sur le mécanisme plan déployable vus plus haut font tous partie de la famille des solides de Platon. Par contre, rien n'empêche d'utiliser ces groupes plans pour créer d'autres formes. Il suffit de faire une combinaison de groupes plans à trois, quatre ou cinq cotés (ou à n cotés si désiré) pour obtenir la forme désirée. Les groupes plans sont assemblés à l'aide de liaisons sphériques (pour des mécanismes à 3 dimensions) ou rotoïdes (pour des mécanismes plans et ainsi éviter d'ajouter des degrés de liberté indésirables au mécanisme). Le mécanisme obtenu aura les mêmes propriétés que les solides de Platon déployables vus plus haut, soit : 1- le mécanisme obtenu conservera sa forme, et 2- il sera mobile avec 1 degré de liberté.

Par exemple, si on désire une pyramide à base carrée, il suffit d'utiliser un groupe plan à 4 cotés et quatre groupes plans à 3 cotés et d'assembler le tout avec des liaisons sphériques. Comme les faces gardent leur forme, et que la longueur du côté de la face est communiquée d'une face à l'autre, le résultat est une pyramide à base carrée déployable et non déformable (1 ddl).

Il est possible de faire de même pour tout type de géométrie, en faisant la combinaison appropriée de groupes plans. Un exemple est montré à la figure 2.12.

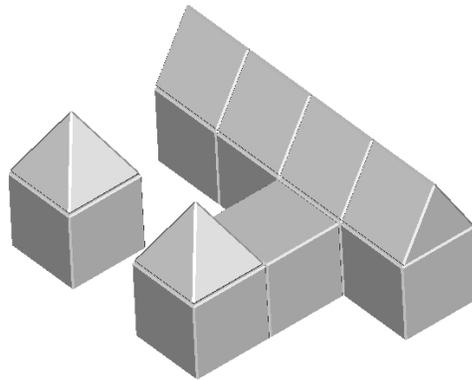


FIG. 2.12 – Exemple de géométrie pouvant être réalisée par assemblage de groupes plans.

Chapitre 3

Détermination du nombre de degrés de liberté de polyèdres articulés

Dans ce chapitre, une méthode pour déterminer le nombre de degrés de liberté de chaînes cinématiques complexes est présentée. Cette méthode est basée sur l'analyse du noyau de la jacobienne \mathbf{J} du mécanisme. Le nombre de degrés de liberté de la chaîne est égal à la dimension du noyau de la matrice jacobienne \mathbf{J} . La méthode est illustrée à l'aide d'un exemple.

3.1 Description de la méthode utilisée pour la détermination du nombre de degrés de liberté d'une chaîne cinématique complexe

3.1.1 Analyse de la mobilité

La formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach permet de déterminer le nombre de degrés de liberté pour les chaînes cinématiques simples ou complexes avec ou sans boucles fermées [12]. Par contre, cette formule ne s'applique pas aux mécanismes surcontraints. Les polyèdres articulés décrits plus loin dans ce chapitre sont des mécanismes surcontraints (chacune des faces est surcontrainte). La formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach ne peut donc pas être utilisée ici pour déterminer le nombre de degrés de liberté du mécanisme considéré.

Pour déterminer la mobilité de tels mécanismes, Angeles et Gosselin [12] proposent une méthode basée sur l'analyse de la matrice jacobienne du mécanisme. Voici un aperçu de la méthode proposée.

D'abord, la chaîne cinématique du mécanisme considéré doit être représentée par un ensemble de corps rigides, attachés entre eux par des articulations (ici rotoïdes) formant un réseau mécanique.

Ensuite, le graphe du mécanisme à l'étude doit être tracé. Le graphe d'un mécanisme est obtenu en représentant chaque corps rigide par un sommet, et chaque articulation par une arête entre deux sommets.

Les définitions suivantes reliées à la théorie des graphes [13] seront nécessaires pour poursuivre.

1- Un chemin sur un graphe est une suite alternée de sommets et d'arêtes commençant et se terminant par des sommets, et dans laquelle chaque arête est reliée aux deux sommets précédant et suivant immédiatement cette arête.

2- Une trajectoire est un chemin dont tous les sommets (et par conséquent toutes

les arêtes) sont distincts.

3- Un graphe est dit connexe si chaque paire de sommets de ce graphe peut être relié par une trajectoire.

4- Un cycle est défini comme une trajectoire commençant et se terminant au même sommet et comprenant au moins trois sommets.

Le nombre de boucles indépendantes de la chaîne cinématique est égal au nombre de cycles indépendants dans un graphe connexe. Le nombre de cycles indépendants k dans un graphe connexe est donné par :

$$k = a - s + 1 \quad (3.1)$$

où a est le nombre d'arêtes et s est le nombre de sommets du graphe.

Maintenant, pour chacune des boucles (représentées par chacun des cycles dans le graphe), nous savons que la matrice jacobienne \mathbf{J} transforme linéairement le vecteur des vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ en vitesses cartésiennes \mathbf{v} , soit

$$\mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{v}_i \quad , \quad i=1,\dots,k \quad (3.2)$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad , \quad i=1,\dots,k \quad (3.3)$$

où n est le nombre de coordonnées articulaires du mécanisme et \mathbf{v}_i est un vecteur regroupant la vitesse cartésienne $\dot{\mathbf{p}}_i$ et la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_i$ de l'organe terminal de la i^{eme} boucle.

Ici, \mathbf{J} peut prendre différentes formes selon le type de la chaîne cinématique. En général, \mathbf{J} prend la forme

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{n_i} \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_1 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{e}_{n_i} \times \mathbf{r}_{n_i} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où le vecteur \mathbf{e}_i est le vecteur unitaire le long de l'axe de la i^{eme} articulation rotoïde, le vecteur \mathbf{r}_i est le vecteur position de l'organe terminal par rapport à l'origine de la i^{eme} articulation, et n_i est le nombre de coordonnées articulaires présentes dans la boucle i . Cette matrice est de dimension $6 \times n_i$.

Dans le type de mécanisme à l'étude, toutes les boucles sont soit de type plan ou de type sphérique. Dans chacun de ces cas, la matrice jacobienne de cette boucle peut être simplifiée.

Dans certains cas, toutes les membrures qui composent la boucle sont dans un même plan, et les axes des articulations reliant ces membrures entre elles sont normaux à ce plan. Ce type de boucle constitue une boucle plane. Dans ce cas, un repère XYZ est défini de façon à ce que le mécanisme soit dans le plan XY , tous les vecteurs \mathbf{e}_i sont égaux au vecteur \mathbf{k} , et les vecteurs \mathbf{r} sont dans le plan XY . Dans ce cas, la matrice jacobienne pour une boucle plane \mathbf{J} prends la forme

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_1 & \mathbf{E}\mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{E}\mathbf{r}_{n_i} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

qui est de dimension $3 \times n_i$ et où \mathbf{E} est une matrice qui effectue le produit vectoriel entre \mathbf{e} et \mathbf{r}_i dans l'espace à 2 dimensions, soit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Pour le cas d'une boucle sphérique, tous les vecteurs \mathbf{r} sont nuls. Dans ce cas, la matrice jacobienne d'une boucle sphérique \mathbf{J}_s prends la forme

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{n_i} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

qui est de dimension $3 \times n_i$.

Dans une chaîne cinématique ouverte, la vitesse \mathbf{v} représente la vitesse de l'organe terminal par rapport à un repère fixé à la base. Dans les mécanismes étudiés, les boucles sont toutes de type fermées. La base et l'organe terminal d'une chaîne cinématique fermée est en fait le même corps rigide, donc la vitesse \mathbf{v}_i de ce corps par rapport à la base est nulle, c'est-à-dire,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

et on obtient pour la boucle i

$$\mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Comme on obtient le même type d'équation pour chacune des boucles, on peut

constituer la matrice \mathbf{J} de la chaîne complète avec :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où k est le nombre de cycles indépendants du graphe du mécanisme (qui est égal au nombre de boucles indépendantes dans le mécanisme).

L'équation des contraintes cinématiques au niveau des vitesses articulaires pour la chaîne complète est :

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Le nombre de degrés de liberté de la chaîne peut maintenant être déterminé grâce à la matrice \mathbf{J} . Le nombre de degrés de liberté est égal à la nullité de \mathbf{J} , c'est-à-dire à la dimension du noyau de \mathbf{J} .

$$l = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) \quad (3.12)$$

où l est le nombre de degrés de liberté du mécanisme, et $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ est le noyau de \mathbf{J} .

Évidemment, puisque le noyau de \mathbf{J} est un ensemble de vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ qui, lorsqu'ils sont transformés linéairement par la matrice jacobienne \mathbf{J} donne comme résultat le vecteur nul, ceci respecte l'équation (3.11).

Plus concrètement, $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ est un ensemble de vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ qui respectent les contraintes géométriques du mécanisme pour la position donnée, et qui peuvent générer le mouvement instantané de la chaîne cinématique. S'il y a l vecteurs dans $\mathcal{N}(\mathbf{J})$, alors il y a l degrés de liberté.

3.1.2 Architecture des polyèdres

La méthode présentée plus haut peut s'appliquer à toutes les formes de mécanismes, y compris les chaînes cinématiques fermées. Les mécanismes auxquels on s'intéresse ici sont des polyèdres articulés dont on désire connaître le nombre de degrés de liberté dans différentes configurations.

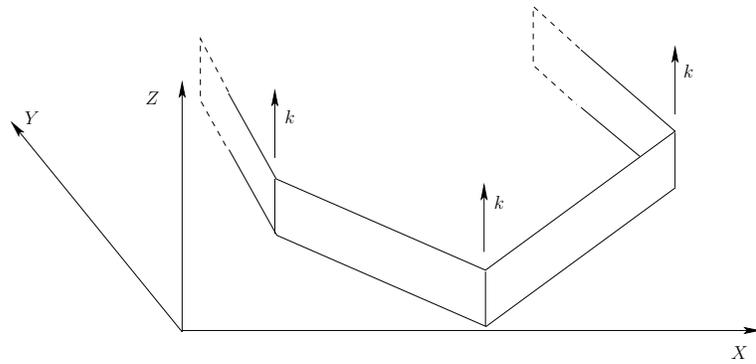


FIG. 3.1 – Mécanisme plan utilisé pour bâtir les polyèdres déformables.

Ces polyèdres sont construits à partir de corps rigides et d'articulations rotoïdes exclusivement. Les corps rigides (tous de la même longueur) sont disposés sur les cotés d'un polygone régulier et assemblés deux à deux à l'aide d'articulations rotoïdes dont l'axe passe par les sommets du polygone. L'axe de l'articulation est normal au plan de la face. Cet assemblage forme un mécanisme plan qui sera utilisé pour construire le polyèdre (voir figure 3.1).

Pour former le polyèdre, il s'agit d'assembler autant de mécanismes plans décrits plus haut qu'il y a de faces sur le polyèdre. Pour relier les mécanismes plans (qui constituent les faces) ensemble, des articulations rotoïdes sont utilisés. Il y a une articulation rotoïde sur chacune des arêtes du polyèdre. Chacune de ces articulations relie un corps rigide de l'une des faces à un corps rigide de la face adjacente. Le mécanisme ainsi obtenu est appelé le polyèdre articulé. Le polyèdre articulé pourra être mobile ou non, selon sa géométrie (voir figure 3.2). Ce type de mécanisme est présentement en instance de brevet [14].

3.2 Exemple du type de mécanisme étudié

Prenons par exemple un tétraèdre articulé tel que décrit dans la section (3.1.2) (voir figure 3.3). Bien-sûr, nous savons qu'un tel mécanisme ne possède aucun degré de liberté (0 ddl), mais l'exemple illustre bien l'application de la méthode au type de mécanisme considéré.

Voici quelques définitions qui seront utiles pour décrire le mécanisme de la figure

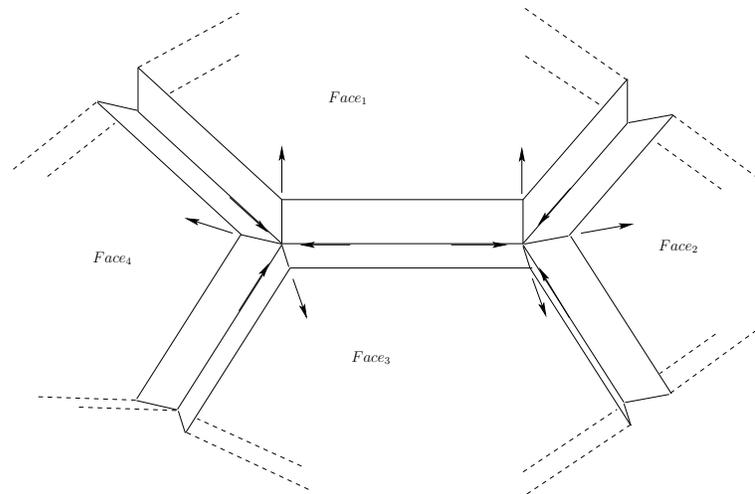


FIG. 3.2 – Principe d'assemblage des polyèdres articulés.

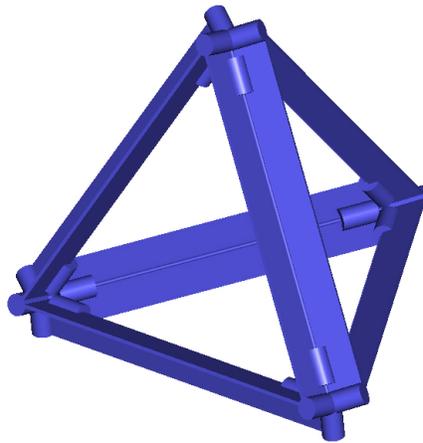


FIG. 3.3 – Tétraèdre articulé.

3.3.

- Les faces sont identifiées par une lettre ; A , B , C ou D .
- Les 3 membrures qui composent une face sont identifiées par la lettre de la face et un chiffre de 1 à 3. Ainsi, les membrures qui composent la face A sont A_1 , A_2 , et A_3 .
- L'angle entre les membrures A_{i-1} et A_i est noté θ_{A_i} . Par exemple, l'angle entre A_2 et A_3 est l'angle θ_{A_3} .
- Les arêtes sont identifiées par 2 lettres, ces 2 lettres sont celles qui désignent les

faces auxquelles l'arête est adjacente. Ainsi, l'arête AB est définie comme l'intersection des faces A et B .

- Les angles des articulations sur les arêtes sont identifiés par le symbole θ suivi des deux lettres désignant cette arête. La valeur de l'angle est l'angle entre les vecteurs normaux aux deux surfaces. Par exemple, l'angle θ_{AB} est l'angle sur l'arête entre les faces A et B , sa valeur est l'angle entre \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_B , où \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_B sont les vecteurs normaux aux faces A et B .

- Les sommets sont identifiés par 3 lettres, ces 3 lettres sont celles qui désignent les faces auxquelles le sommet appartient. Ainsi, le sommet ABC est l'intersection des faces A , B et C .

On cherche ici à définir la matrice \mathbf{J} de l'équation

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

afin d'effectuer l'analyse du noyau de \mathbf{J} . Ici, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ contient toutes les coordonnées articulaires du mécanisme

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{A2} & \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{B1} & \dot{\theta}_{B2} & \dot{\theta}_{B3} & \dot{\theta}_{C1} & \dot{\theta}_{C2} & \dot{\theta}_{C3} & \dot{\theta}_{D1} & \dot{\theta}_{D2} & \dot{\theta}_{D3} \\ \dot{\theta}_{AB} & \dot{\theta}_{AC} & \dot{\theta}_{AD} & \dot{\theta}_{BC} & \dot{\theta}_{BD} & \dot{\theta}_{CD} \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

3.2.1 Graphe du mécanisme

Le graphe de cette chaîne cinématique peut être tracé en représentant chacun des corps $A_1, A_2, A_3, B_1, \dots, D_3$ par un sommet du graphe. Les articulations rotoïdes entre deux corps rigides sont représentées par des arêtes entre deux sommets représentant ces corps.

Le nombre de cycles indépendants k de ce graphe est :

$$k = a - s + 1 \quad (3.15)$$

ici, $a = 18$ et $s = 12$, d'où

$$k = 7 \quad (3.16)$$

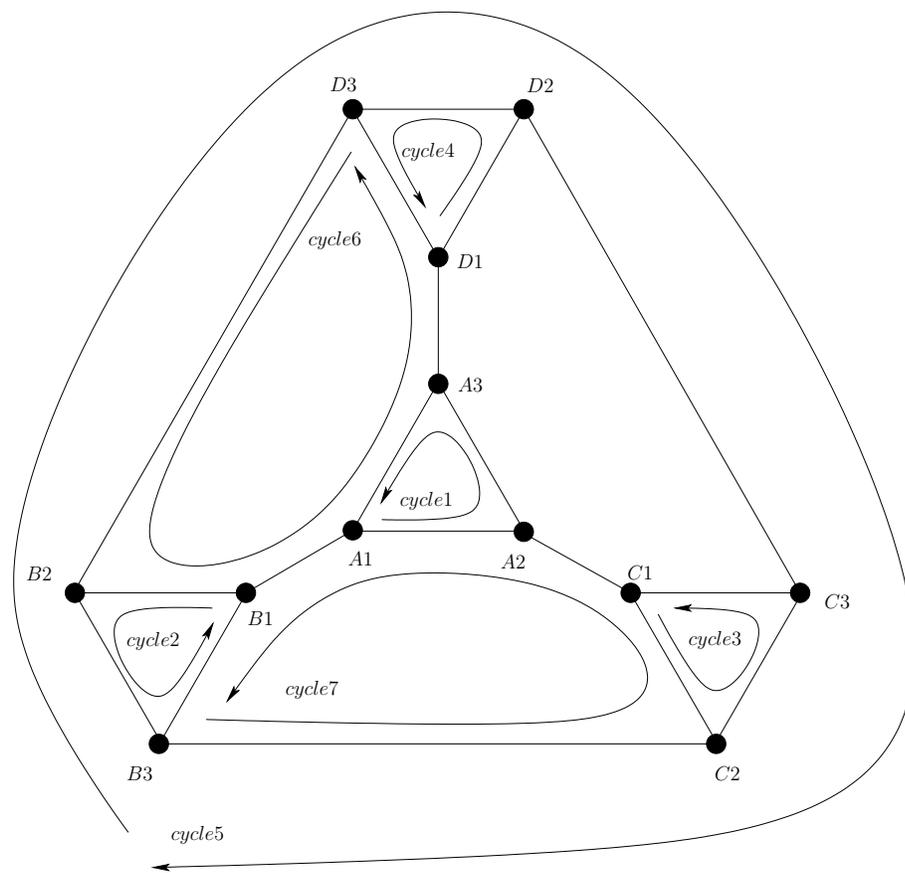


FIG. 3.5 – Identification des boucles sur le graphe.

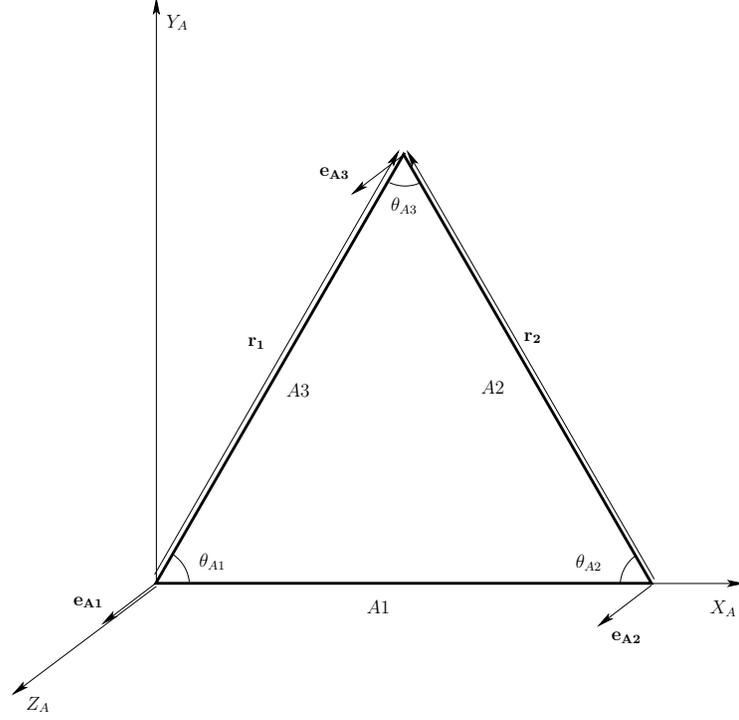


FIG. 3.6 – Géométrie utilisée pour les boucles sur les faces.

$$\mathbf{J}'_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Ici \mathbf{J}'_1 est la matrice jacobienne plane de dimensions $3 \times n_1$ de la boucle 1, où n_1 est le nombre de coordonnées articulaires présentes dans la boucle 1 et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ est le vecteur composé des n_1 coordonnées articulaires.

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{A1} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{A2} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{A3} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} \\ \dot{\theta}_{A2} \\ \dot{\theta}_{A3} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

où la matrice \mathbf{E} est définie à l'équation (3.6).

Pour écrire les vecteurs \mathbf{r} (à deux dimensions) de la boucle 1, un repère $X_A Y_A$ est utilisé. Ce repère est positionné de façon à ce que les trois membrures A_1 , A_2 et A_3 soient toutes dans le plan $X_A Y_A$. De plus, l'axe X_A est placé sur la membrure A_1 . Ce

choix de repère simplifie l'écriture des vecteurs dans la jacobienne. Nous avons alors :

$$\mathbf{r}_{A1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A3} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_1

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Cette matrice est de dimension $3 \times n_1$ où $n_1 = 3$. Ici, la matrice \mathbf{J}'_1 n'a pas la bonne dimension. Pour ramener la matrice \mathbf{J}'_1 à la bonne dimension, il faut rajouter des colonnes de zéros vis-à-vis des coordonnées articulaires qui ne sont pas présentes dans la boucle 1. Cette matrice transformée s'appelle \mathbf{J}_1 .

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

qui est de dimension $3 \times n$, avec $n = 18$.

Cette matrice comprend les équations associées aux contraintes cinématiques reliées à la boucle 1 et qui répond à

$$\mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

où cette fois, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ est le vecteur comprenant toutes les coordonnées articulaires, tel que défini à l'équation (3.14).

On procède de façon similaire pour les boucles 2, 3 et 4 (faces *B*, *C* et *D*).

3.2.3 Équations cinématiques des boucles 5 à 7

Les boucles 5 à 7 sont les boucles sphériques qui constituent les sommets du polyèdre. Prenons le cycle 5 du graphe, qui comprend les sommets *D3*, *B2*, *B3*, *C2*, *C3* et *D2*, ainsi que les arêtes entre ces sommets. Sur le mécanisme, la boucle correspondante est composée des corps rigides *D3*, *B2*, *B3*, *C2*, *C3* et *D2*, ainsi que des articulations rotoïdes joignant ces corps les uns aux autres. Cette boucle fait le tour d'un des sommet du tétraèdre et constitue un mécanisme sphérique.

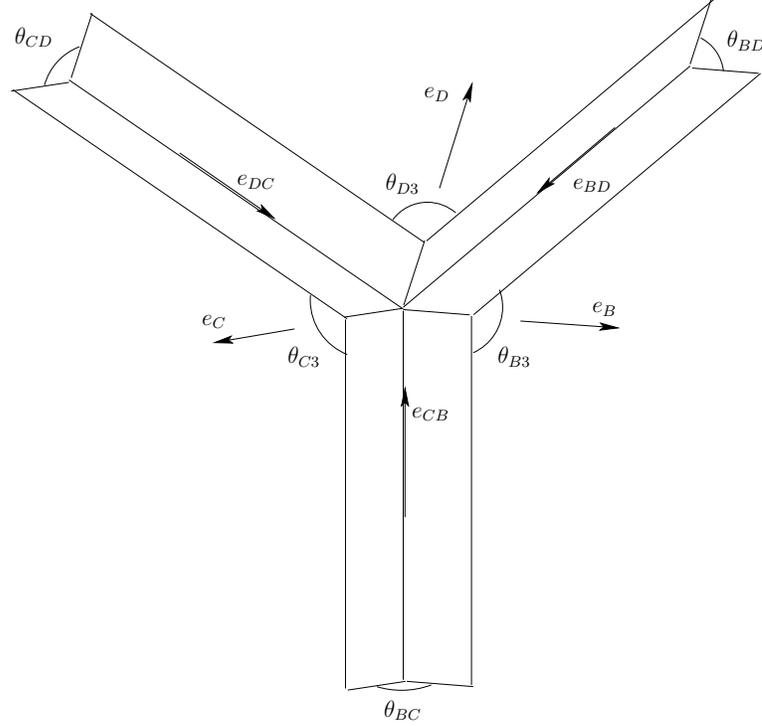


FIG. 3.7 – Géométrie utilisée pour les boucles sur les sommets

Ici, les vecteurs \mathbf{e}_B , \mathbf{e}_C et \mathbf{e}_D sont les vecteurs normaux aux faces B , C et D , tandis que les vecteurs \mathbf{e}_{CB} , \mathbf{e}_{BD} et \mathbf{e}_{DC} sont les vecteurs sur les arêtes du polyèdre.

Pour la boucle 5, \mathbf{J}'_5 est la matrice jacobienne de dimensions $3 \times n_5$, où n_5 est le nombre de coordonnées articulaires présentes dans la boucle 5 (ici $n_5 = 6$) et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_5$ est le vecteur composé des n_5 coordonnées articulaires. Nous avons

$$\mathbf{J}'_5 \dot{\boldsymbol{\theta}}_5 = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

et où

$$\mathbf{J}'_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_{CB} & \mathbf{e}_{BD} & \mathbf{e}_{DC} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_5 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{B3} & \dot{\theta}_{C3} & \dot{\theta}_{D3} & \dot{\theta}_{BC} & \dot{\theta}_{BD} & \dot{\theta}_{CD} \end{bmatrix}^T \quad (3.26)$$

Encore une fois, des colonnes de zéros sont ajoutées vis à vis des coordonnées articulaires qui ne sont pas dans la boucle. \mathbf{J}_5 devient alors :

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_B & 0 & 0 & \mathbf{e}_C & 0 & 0 & \mathbf{e}_D & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_{BC} & \mathbf{e}_{BD} & \mathbf{e}_{CD} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

On procède similairement pour les boucles 6 et 7.

3.2.4 Construction de la matrice jacobienne et détermination du nombre de degrés de liberté du mécanisme

Les matrices $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_7$ sont maintenant connues. Pour construire la matrice \mathbf{J} qui est la matrice jacobienne du mécanisme complet, les matrices \mathbf{J}_1 à \mathbf{J}_7 sont superposées de cette façon :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_5 \\ \mathbf{J}_6 \\ \mathbf{J}_7 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

et \mathbf{J} est ici de dimension 21 par 18.

Pour déterminer le nombre de degrés de liberté du mécanisme, il s'agit de déterminer la dimension du noyau de \mathbf{J} . Ce résultat peut être obtenu avec des méthodes d'analyse numériques, ou bien à l'aide du logiciel MAPLE. Dans l'exemple donné ci-haut, le noyau de la matrice \mathbf{J} est vide et donc le mécanisme n'a aucun degré de liberté et est en fait une structure rigide.

Cette méthode de détermination du nombre de degrés de liberté peut s'appliquer à n'importe quel polyèdre de ce type. Le graphe est d'abord tracé pour déterminer le nombre de boucles indépendantes du mécanisme, ensuite, la matrice jacobienne de chacune des boucles est déterminée, puis ces matrices sont superposées pour obtenir la matrice jacobienne \mathbf{J} de l'ensemble du mécanisme. Le nombre de degrés de liberté est déterminé en trouvant la dimension du noyau de la matrice jacobienne \mathbf{J} . Les chapitres 4 et 5 porteront sur l'analyse de deux autres polyèdres du même type, soit le cube et le dodécaèdre.

Chapitre 4

Application de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté au cube articulé

Dans ce chapitre, la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté présentée au chapitre 3 est utilisée pour déterminer le nombre de degrés de liberté du cube articulé. La mobilité du cube articulé est d'abord déterminée pour la position droite, puis l'analyse est effectuée pour une position quelconque. Le système de mouvement possible est déterminé à l'aide des vecteurs présents dans le noyau de la matrice jacobienne \mathbf{J} du cube articulé.

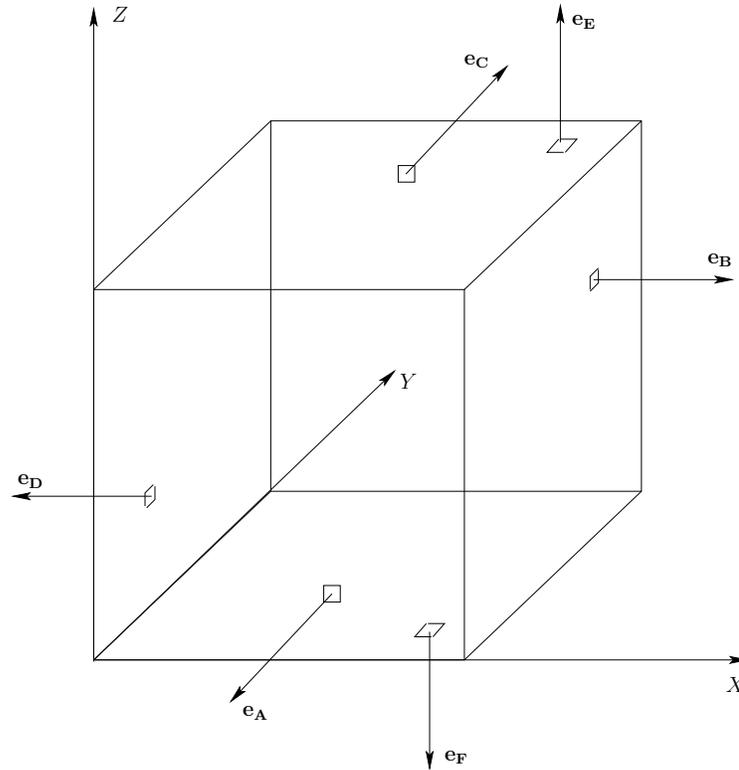


FIG. 4.1 – Cube en position droite.

4.1 Détermination du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position droite

4.1.1 Description du mécanisme

Le premier mécanisme étudié à l'aide de la méthode expliquée au chapitre 3 est un cube articulé dont on désire déterminer le nombre de degrés de liberté dans différentes conditions. Ce mécanisme est similaire au mécanisme proposé dans [15], et est présentement en instance de brevet [14].

Voici quelques définitions qui seront utiles pour décrire le mécanisme étudié, qui est représenté schématiquement à la figure 4.1.

- Les faces sont identifiées par une lettre ; A , B , C , D , E ou F .

- Les 4 membrures qui composent une face sont identifiées par la lettre de la face et un chiffre de 1 à 4. Ainsi, les membrures qui composent la face A sont A_1 , A_2 , A_3 et A_4 .

- L'angle entre les membrures A_{i-1} et A_i est noté θ_{A_i} . Par exemple, l'angle entre A_2 et A_3 est l'angle θ_{A_3} .

- Les arêtes sont identifiées par 2 lettres, ces 2 lettres sont celles qui désignent les faces auxquelles l'arête est adjacente. Ainsi, l'arête AB est définie comme l'intersection des faces A et B .

- Les angles des articulations sur les arêtes sont identifiés par le symbole θ suivi des deux lettres désignant cette arête. La valeur de l'angle θ est l'angle mesuré entre les vecteurs normaux aux deux surfaces. Par exemple, l'angle θ_{AB} est l'angle sur l'arête entre les faces A et B , sa valeur est l'angle entre \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_B , où \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_B sont les vecteurs normaux aux faces A et B .

- Les sommets sont identifiés par 3 lettres, ces 3 lettres sont celles qui désignent les faces auxquelles le sommet appartient. Ainsi, le sommet ABE est l'intersection des faces A , B et E .

4.1.2 Graphe du mécanisme

Le graphe du cube articulé doit être tracé pour déterminer les cycles indépendants et identifier les boucles indépendantes du mécanisme. Le graphe est tracé suivant la méthode décrite dans la section 3.1.1, et est montré à la figure 4.2.

Le graphe du cube articulé comporte k cycles indépendants, où

$$k = a - s + 1 \quad (4.1)$$

Ici, le graphe comporte 36 arêtes ($a = 36$) et 24 sommets ($s = 24$), le nombre de cycles indépendants de ce graphe est donc

$$k = 13 \quad (4.2)$$

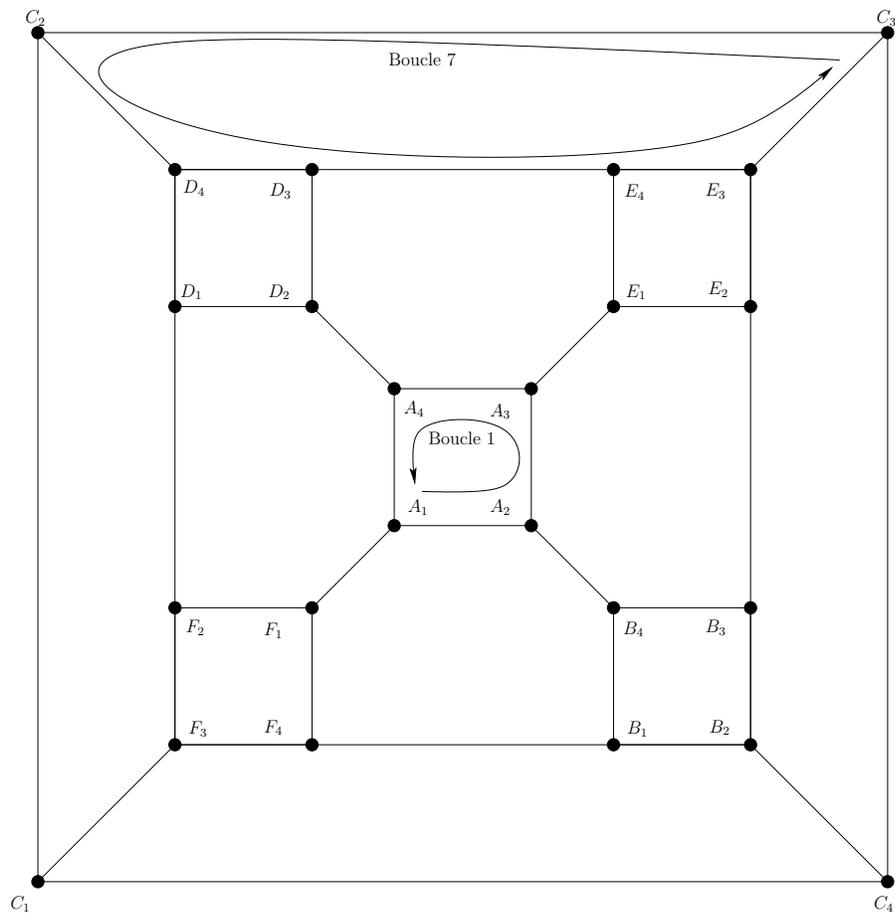


FIG. 4.2 – Graphe du cube articulé.

Il y a donc 13 cycles indépendants dans le graphe, et il y a donc 13 boucles indépendantes dans le mécanisme. Les équations cinématiques sur ces 13 boucles serviront à construire la matrice jacobienne \mathbf{J} du mécanisme. Nous avons

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

où, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ contient toutes les coordonnées articulaires du mécanisme, soit :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{A2} & \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{A4} & \dot{\theta}_{B1} & \dot{\theta}_{B2} & \dot{\theta}_{B3} & \dot{\theta}_{B4} & \dot{\theta}_{C1} & \dot{\theta}_{C2} & \dot{\theta}_{C3} & \dot{\theta}_{C4} \\ \dot{\theta}_{D1} & \dot{\theta}_{D2} & \dot{\theta}_{D3} & \dot{\theta}_{D4} & \dot{\theta}_{E1} & \dot{\theta}_{E2} & \dot{\theta}_{E3} & \dot{\theta}_{E4} & \dot{\theta}_{F1} & \dot{\theta}_{F2} & \dot{\theta}_{F3} & \dot{\theta}_{F4} \\ \dot{\theta}_{AB} & \dot{\theta}_{AD} & \dot{\theta}_{AE} & \dot{\theta}_{AF} & \dot{\theta}_{BC} & \dot{\theta}_{BE} & \dot{\theta}_{BF} & \dot{\theta}_{CD} & \dot{\theta}_{CE} & \dot{\theta}_{CF} & \dot{\theta}_{DE} & \dot{\theta}_{DF} \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

4.1.3 Équations cinématiques des boucles 1 à 6

Le cycle 1 passe par les sommets A_1 , A_2 , A_3 et A_4 du graphe et par les quatre arêtes joignant ces sommets deux à deux. La boucle correspondante sur le mécanisme est donc constituée des quatre corps rigides A_1 , A_2 , A_3 et A_4 ainsi que des quatre articulations rotoïdes reliant ces corps deux à deux. La boucle est donc composée du mécanisme plan posé sur la face A du cube.

Nous avons :

$$\mathbf{J}'_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

où \mathbf{J}'_1 est la matrice jacobienne plane de dimensions $3 \times n_1$ de la boucle 1, n_1 est le nombre de coordonnées articulaires dans la boucle 1 (ici, $n_1 = 4$) et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ est le vecteur contenant les n_1 coordonnées articulaires. Nous avons donc,

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{A1} & \mathbf{Er}_{A2} & \mathbf{Er}_{A3} & \mathbf{Er}_{A4} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{A2} & \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{A4} \end{bmatrix}^T \quad (4.7)$$

Afin d'écrire les vecteurs \mathbf{r}_{Ai} de la boucle 1, un repère local $X_A Y_A$ est utilisé. Ce repère est positionné de façon à ce que le mécanisme plan se situe sur le plan $X_A Y_A$, que l'origine du repère coïncide avec l'axe de θ_{A1} et que la membrure $A1$ soit sur l'axe X_A . Nous avons

$$\mathbf{r}_{A1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A4} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

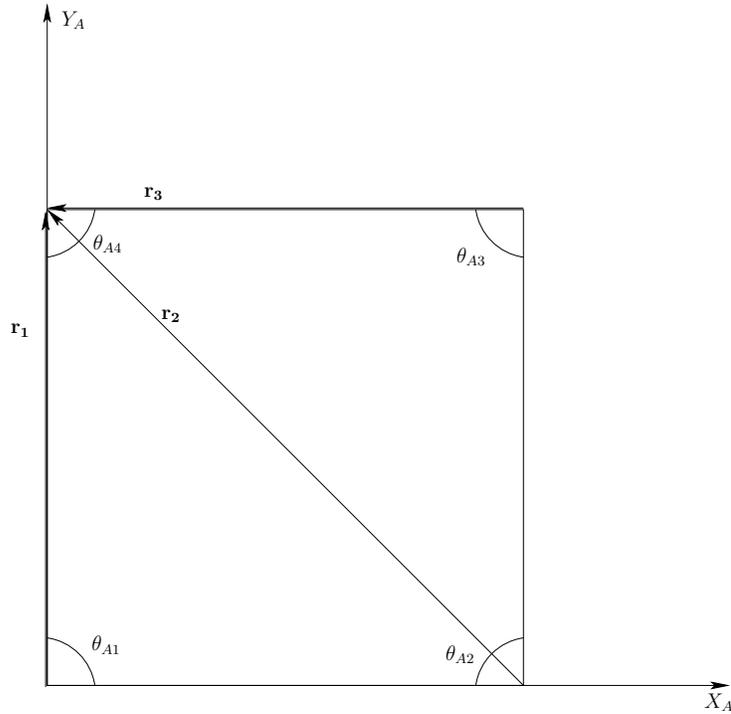


FIG. 4.3 – Géométrie utilisée pour les boucles sur les faces du cube en position droite.

ce qui donne pour \mathbf{J}'_1

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

qui est de dimension $3 \times n_1$

Pour ramener la matrice \mathbf{J}'_1 à la bonne dimension, des colonnes de zéros sont ajoutées vis-à-vis des coordonnées articulaires absentes de la boucle 1 ce qui donne une matrice de dimension $3 \times n$ (ici, $n = 36$). Ceci donne la matrice \mathbf{J}_1

$$\mathbf{J}_1 = \left[\mathbf{J}'_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 32} \right] \quad (4.10)$$

où $\mathbf{0}_{3 \times 32}$ désigne un bloc de zéros de dimension 3×32 .

La procédure est la même pour obtenir les matrices $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \dots, \mathbf{J}_6$. Le détail du calcul de ces matrices est donné dans l'annexe A.

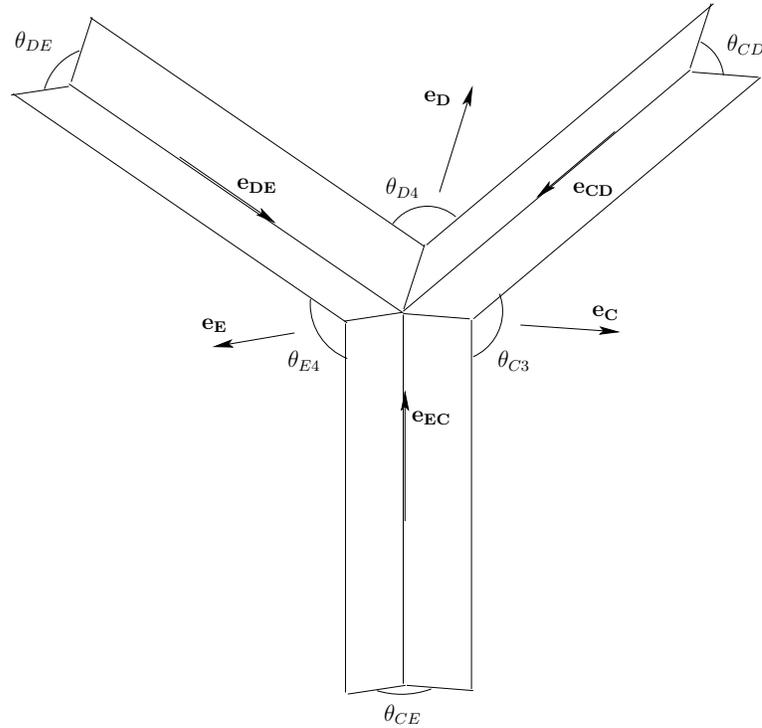


FIG. 4.4 – Géométrie utilisée pour les boucles sur les sommets du cube en position droite.

4.1.4 Équations cinématiques des boucles 7 à 13

Le cycle 7 passe par les sommets C_3 , C_2 , D_4 , D_3 , E_4 et E_3 du graphe et par les arêtes qui joignent ces sommets deux à deux. La boucle correspondante est donc constituée des corps rigides C_3 , C_2 , D_4 , D_3 , E_4 et E_3 ainsi que des articulations rotoïdes liant ces corps deux à deux. Cette boucle est constituée d'un des sommets du cube articulé, tel qu'illustré à la figure 4.4.

Les vecteurs \mathbf{e}_C , \mathbf{e}_D et \mathbf{e}_E sont les vecteurs unitaires normaux aux faces C , D et E (axes de θ_{C3} , θ_{D4} et de θ_{E4}), et les vecteurs \mathbf{e}_{CD} , \mathbf{e}_{DE} et \mathbf{e}_{EC} sont les vecteurs sur les arêtes du cube (axes de θ_{CD} , θ_{DE} et de θ_{CE} , figure 4.4).

Pour cette boucle, la matrice jacobienne \mathbf{J}'_7 est une matrice associée à une chaîne sphérique et de dimension $3 \times n_7$, où n_7 est le nombre de coordonnées articulaires présentes dans la boucle 7 (ici $n_7 = 6$) et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_7$ est le vecteur composé des n_7 coordonnées articulaires.

Nous avons :

$$\mathbf{J}'_7 \dot{\boldsymbol{\theta}}_7 = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

où

$$\mathbf{J}'_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{CD} & \mathbf{e}_{EC} & \mathbf{e}_{DE} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_7 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{C3} & \dot{\theta}_{D4} & \dot{\theta}_{E4} & \dot{\theta}_{CD} & \dot{\theta}_{CE} & \dot{\theta}_{DE} \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

Ici,

$$\mathbf{e}_C = \mathbf{j} \quad \mathbf{e}_D = -\mathbf{i} \quad \mathbf{e}_E = \mathbf{k} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \mathbf{k} \quad \mathbf{e}_{EC} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{e}_{DE} = \mathbf{j} \quad (4.15)$$

Ce qui donne pour \mathbf{J}'_7 :

$$\mathbf{J}'_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{j} & -\mathbf{i} & \mathbf{k} & \mathbf{k} & -\mathbf{i} & \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Des colonnes de zéros sont ajoutées vis-à-vis des coordonnées articulaires absentes de la boucle. Ceci donne la matrice \mathbf{J}_7 :

$$\mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 10} & \mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 11} & \mathbf{k} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La même procédure est appliquée pour obtenir les matrices associées aux boucles 8 à 13. Les détails sont donnés à l'annexe A.

4.1.5 Construction de la matrice jacobienne du mécanisme et détermination du nombre de degrés de liberté

La matrice jacobienne \mathbf{J} est formée en superposant les matrices $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_{13}$, soit

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{13} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

L'analyse de cette matrice est faite à l'aide du logiciel MAPLE. Les résultats de l'analyse de \mathbf{J} indiquent que le noyau de \mathbf{J} contient 3 vecteurs linéairement indépendants \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 .

Comme la dimension du noyau de \mathbf{J} est 3, le mécanisme a donc 3 degrés de liberté dans cette configuration, selon l'équation (3.12).

4.1.6 Analyse du noyau de \mathbf{J} et détermination du mouvement possible

Le noyau de \mathbf{J} contient 3 vecteurs linéairement indépendants \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 qui s'écrivent :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.20)$$

$$\mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.21)$$

Comme \mathbf{n}_1 fait partie du noyau de \mathbf{J} , nous savons que

$$\mathbf{J}\mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Le vecteur \mathbf{n}_1 est donc une combinaison de vitesses articulaires qui respecte les contraintes cinématiques prescrites par \mathbf{J} (donc par le mécanisme). Dans la configuration présentée, le mécanisme devrait pouvoir se déplacer suivant les vitesses articulaires représentées par \mathbf{n}_1 .

Pour visualiser le déplacement possible, analysons \mathbf{n}_1 . Lorsqu'un 0 est présent dans \mathbf{n}_1 , la coordonnée articulaire correspondante est bloquée sur le mécanisme. Lorsqu'un

face	angle 1	angle 2	angle 3	angle 4
face A	-1	1	-1	1
face B	0	0	0	0
face C	1	-1	1	-1
face D	0	0	0	0
face E	0	0	0	0
face F	0	0	0	0

TAB. 4.1 – Vitesses articulaires sur les faces pour le vecteur \mathbf{n}_1 du cube en position droite.

face	angle 1	angle 2	angle 3	angle 4
face A	0	0	0	0
face B	-1	1	-1	1
face C	0	0	0	0
face D	1	-1	1	-1
face E	0	0	0	0
face F	0	0	0	0

TAB. 4.2 – Vitesses articulaires sur les faces pour le vecteur \mathbf{n}_2 du cube en position droite.

1 ou -1 est présent dans \mathbf{n}_1 , la vitesse articulaire correspondante est de 1 ou -1 (voir table 4.1).

On remarque que les faces A et C contiennent des 1 et -1 , tandis que les autres faces ne contiennent que des 0. Ce mouvement représente une déformation des faces A et C sur le cube. Ces deux faces ont des vitesses articulaires telles que les faces carrées tendent à se transformer en parallélogramme. Les 4 autres faces sont bloquées. Si ces vitesses articulaires pouvaient être appliquées pendant un intervalle Δt , le cube se transformerait en prisme à base en parallélogramme, tel qu'illustré à la figure 4.5.

Les vitesses sur les arêtes peuvent être interprétées de la même façon. Dans ce cas, on constate que les seules coordonnées articulaires sur les arêtes dont la vitesse est non nulle sont les coordonnées sur les arêtes BE , BF , DE et DF (les vitesses non nulles sur les arêtes sont : $\dot{\theta}_{BE}$, $\dot{\theta}_{BF}$, $\dot{\theta}_{DE}$ et $\dot{\theta}_{DF}$). Ces vitesses articulaires représentent la variation d'angle entre les faces B , D , E et F liée à la déformation des faces A et C . Le même raisonnement peut être fait avec \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 .

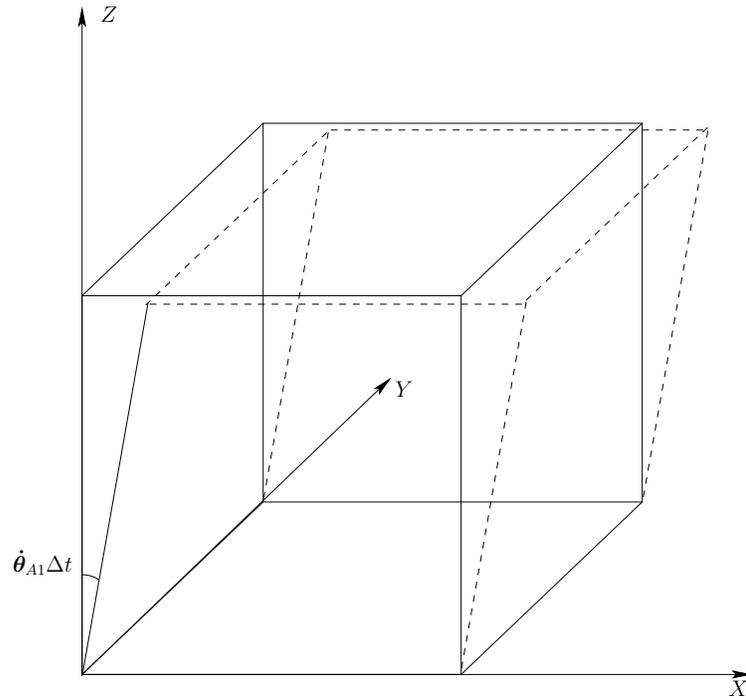


FIG. 4.5 – Déformation infinitésimale du cube associée au vecteur \mathbf{n}_1 .

Pour \mathbf{n}_2 , ce sont les faces B et D qui contiennent des 1 et -1 , tandis que les autres faces ne contiennent que des 0. Ce mouvement représente une déformation des faces B et D sur le cube. Ici encore, ces deux faces ont des vitesses articulaires telles que les faces carrées tendent à se transformer en parallélogramme. Les 4 autres faces sont bloquées. Si ces vitesses articulaires pouvaient être appliquées pendant un intervalle Δt , le cube se transformerait en prisme à base en parallélogramme.

Pour le vecteur \mathbf{n}_2 , on constate que les seules coordonnées articulaires sur les arêtes dont la vitesse est non nulle sont les coordonnées sur les arêtes AE , AF , CE et CF (les vitesses non nulles sur les arêtes sont : $\dot{\theta}_{AE}$, $\dot{\theta}_{AF}$, $\dot{\theta}_{CE}$ et $\dot{\theta}_{CF}$). Ces vitesses articulaires sont cohérentes avec le résultat vu plus haut tiré des vitesses articulaires sur les faces.

Dans le cas de \mathbf{n}_3 , ce sont les faces E et F qui contiennent des 1 et -1 , et ce mouvement représente une déformation des faces E et F en parallélogramme, et les 4 autres faces sont bloquées. Le cube tend à se transformer en prisme à base en parallélogramme.

Pour le vecteur \mathbf{n}_3 , les coordonnées articulaires sur les arêtes dont la vitesse est non nulle sont les coordonnées sur les arêtes AB , AD , BC et CD (les vitesses non nulles sur les arêtes sont : $\dot{\theta}_{AB}$, $\dot{\theta}_{AD}$, $\dot{\theta}_{BC}$ et $\dot{\theta}_{CD}$). Ces vitesses articulaires sont cohérentes

face	angle 1	angle 2	angle 3	angle 4
face <i>A</i>	0	0	0	0
face <i>B</i>	0	0	0	0
face <i>C</i>	0	0	0	0
face <i>D</i>	0	0	0	0
face <i>E</i>	1	-1	1	-1
face <i>F</i>	-1	1	-1	1

TAB. 4.3 – Vitesses articulaires sur les faces pour le vecteur \mathbf{n}_3 du cube en position droite.

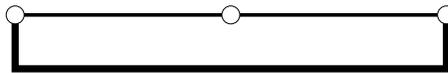


FIG. 4.6 – Mécanisme à 3 barres possédant un degré de liberté local (position montrée) mais qui ne peut produire aucun déplacements finis.

avec le résultat vu plus haut.

Ces trois vecteurs forment une base pour un système de mouvement du cube articulé en position droite. Par contre, ces vecteurs ne permettent pas de conclure que ces mouvements sont possibles pour des déplacements finis. L'analyse du même mécanisme en position quelconque sera utile pour déterminer si les degrés de liberté trouvés ici peuvent générer un mouvement, ou sont valides seulement localement (comme par exemple pour un mécanisme plan à trois barres sur une ligne qui possède un degré de liberté local, mais ne peut produire de déplacements finis, figure 4.6).

4.2 Détermination du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position quelconque

Afin de déterminer si la position droite est la seule position où le mécanisme possède cette mobilité, le mécanisme sera étudié à nouveau, mais cette fois, avec une position quelconque.

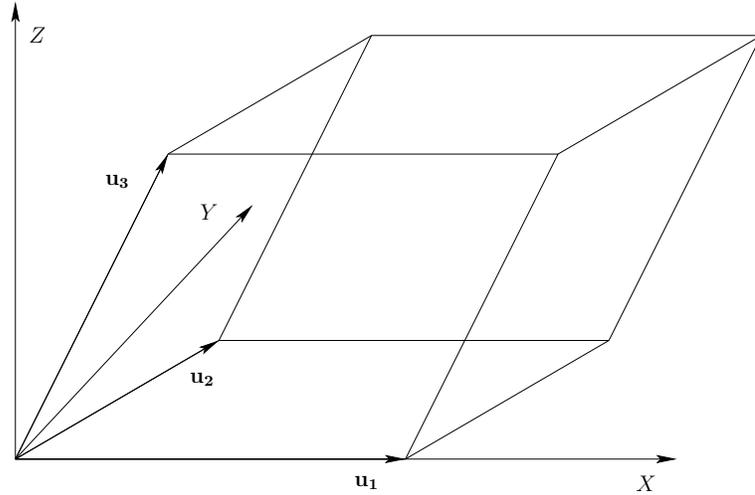


FIG. 4.7 – Vecteurs directeurs sur les arêtes du cube.

4.2.1 Géométrie utilisée

La géométrie du cube est telle que décrite à la section 4.1.1, sauf que les surfaces ne seront pas nécessairement carrées, et les angles entre elles ne seront pas nécessairement droits. Comme il a été déterminé que le mécanisme avait 3 degrés de liberté en position droite, supposons qu'il ait aussi 3 degrés de liberté en position quelconque. Pour définir sa position, nous auront donc besoin de 3 angles. Dans le but de simplifier l'écriture des équations nécessaires à la construction de la matrice jacobienne, les angles θ_{A1} , θ_{F2} et θ_{AF} ont été choisis pour définir la position du mécanisme.

Aussi, trois vecteurs unitaires sont ajoutés à la géométrie, soient \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3 , qui sont sur trois des arêtes du cube, tel qu'illustré à la figure 4.7.

Le premier vecteur \mathbf{u}_1 est fixé à l'arête AF . Comme le repère utilisé est défini tel que l'axe X est sur cette arête, alors \mathbf{u}_1 est

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Le second vecteur \mathbf{u}_2 est le vecteur unitaire sur l'arête DF . Rappelons que le repère est défini tel que le plan F est toujours dans le plan XY du repère.

Pour obtenir ce vecteur, on applique une rotation d'amplitude θ_{F2} sur l'axe \mathbf{k} au vecteur \mathbf{i}

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{Q}_{F2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

où

$$\mathbf{Q}_{F2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{F2} & -\sin \theta_{F2} & 0 \\ \sin \theta_{F2} & \cos \theta_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

ce qui donne pour \mathbf{u}_2

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_{F2} \\ \sin \theta_{F2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Le troisième vecteur \mathbf{u}_3 est le vecteur sur l'arête AD . Ce vecteur est obtenu en appliquant deux rotations successives au vecteur \mathbf{i} . D'abord on applique une rotation d'amplitude θ_{A1} sur l'axe $-\mathbf{j}$ au vecteur \mathbf{i} , puis on applique une seconde rotation d'amplitude $(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})$ sur l'axe $-\mathbf{i}$ au résultat.

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{Q}_{AF} \mathbf{Q}_{A1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ici, \mathbf{Q}_{A1} désigne la rotation sur $-\mathbf{j}$ d'un angle θ_{A1} et \mathbf{Q}_{AF} désigne la rotation sur $-\mathbf{i}$ d'un angle $(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})$, soit

$$\mathbf{Q}_{A1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta_{A1}) & 0 & \sin(-\theta_{A1}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta_{A1}) & 0 & \cos(-\theta_{A1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{A1} & 0 & -\sin \theta_{A1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{A1} & 0 & \cos \theta_{A1} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

et

$$\mathbf{Q}_{AF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[-(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})] & -\sin[-(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})] \\ 0 & \sin[-(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})] & \cos[-(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_{AF} & -\cos \theta_{AF} \\ 0 & \cos \theta_{AF} & \sin \theta_{AF} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Si on remplace les équations (4.28) et (4.29) dans l'équation (4.27), on obtient

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_{A1} \\ -\cos \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \\ \sin \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Les vecteurs normaux aux surfaces peuvent aussi être écrits en fonction des 3 angles θ_{A1} , θ_{F2} et θ_{AF} .

Comme le repère utilisé est défini de façon à ce que la face F soit toujours dans le plan XY du repère, alors

$$\mathbf{e}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Pour la face A , si l'on observe le mécanisme on constate que la face A est sur un plan qui aurait subi une rotation de $(\theta_{AF} - \frac{\pi}{2})$ sur $-\mathbf{i}$ par rapport au plan XZ . Nous avons

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{Q}_{AF} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta_{AF} \\ -\cos \theta_{AF} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Pour la face D , son orientation est le résultat de la position de la face F et de la face A . Il n'y a donc pas de façon directe de calculer le vecteur \mathbf{e}_D . Pour déterminer ce vecteur, le produit vectoriel entre \mathbf{u}_3 et \mathbf{u}_2 (qui sont les arêtes de la face D) est utilisé.

$$\mathbf{e}_D = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2\|} \quad (4.33)$$

ce qui donne

$$\mathbf{e}_D = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2\|} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \sin \theta_{F2} \\ \sin \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \cos \theta_{F2} \\ -\cos \theta_{A1} \sin \theta_{F2} + \cos \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \cos \theta_{F2} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

où

$$\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2\| = \sqrt{\sin^2 \theta_{AF} \sin^2 \theta_{A1} + (\cos \theta_{A1} \sin \theta_{F2} + \cos \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \cos \theta_{F2})^2} \quad (4.35)$$

Les vecteurs normaux aux surfaces B , C et E , \mathbf{e}_B , \mathbf{e}_C et \mathbf{e}_E sont définis comme

$$\mathbf{e}_B = -\mathbf{e}_D \quad \mathbf{e}_C = -\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_E = -\mathbf{e}_F \quad (4.36)$$

puisque les faces du mécanisme sont toujours parallèles deux à deux.

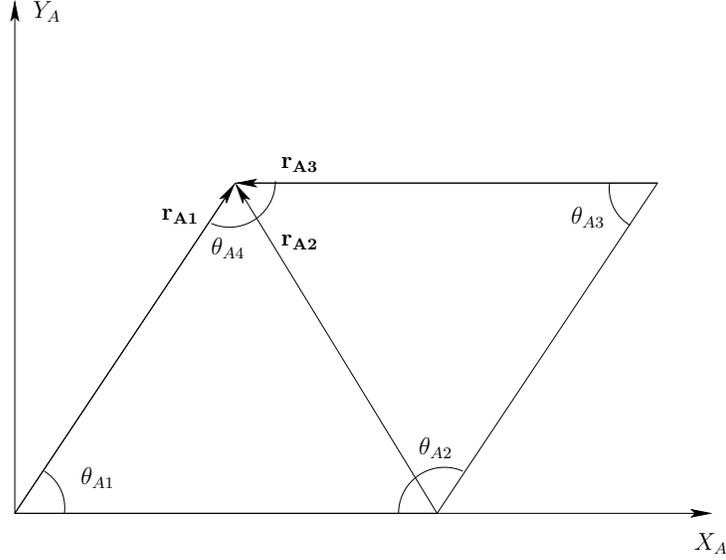


FIG. 4.8 – Géométrie utilisée pour les boucles 1 à 6 du cube en position quelconque.

4.2.2 Équations cinématiques des boucles 1 à 6

Les équations (4.5) et (4.7) de la section 4.1.3 du cube articulé en position quelconque sont les mêmes que pour le cube en position droite. La matrice \mathbf{J}'_1 s'exprime par

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{A1} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{A2} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{A3} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{A4} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

puisque la boucle 1 est plane. Les vecteurs \mathbf{r}_{A1} , \mathbf{r}_{A2} , \mathbf{r}_{A3} et \mathbf{r}_{A4} sont maintenant des fonctions de θ_{A1} (voir figure 4.8), soit

$$\mathbf{r}_{A1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{A1} \\ \sin \theta_{A1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{A1} - 1 \\ \sin \theta_{A1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{A4} = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_1 :

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{A1} & -\sin \theta_{A1} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{A1} & \cos \theta_{A1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

de dimension $3 \times n_1$. La matrice \mathbf{J}'_1 est ramenée à la bonne dimension (tel que décrit dans la section 4.1.3), et la matrice \mathbf{J}_1 de dimension 3×36 est obtenue

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_1 & \mathbf{0}_{3 \times 32} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Les matrices $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \dots, \mathbf{J}_6$ sont trouvées en procédant de la même façon (ces matrices sont explicitées à l'annexe B).

4.2.3 Équations cinématiques des boucles 7 à 13

Les équations (4.11) et (4.13) de la section 4.1.4 pour les boucles 7 à 13 du cube articulé en position droite sont les mêmes que pour le cube en position quelconque. La matrice \mathbf{J}'_7 s'écrit toujours

$$\mathbf{J}'_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{CD} & \mathbf{e}_{EC} & \mathbf{e}_{DE} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Par contre, les vecteurs \mathbf{e}_C , \mathbf{e}_D et \mathbf{e}_E ne sont plus nécessairement sur un des axes du repère XYZ puisque le cube est en position quelconque. Les vecteurs \mathbf{e}_C , \mathbf{e}_D et \mathbf{e}_E sont tels que décrits dans la section 4.2.1

$$\mathbf{e}_C = -\mathbf{e}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_{AF} \\ \cos \theta_{AF} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{e}_D = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2\|} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \sin \theta_{F2} \\ \sin \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \cos \theta_{F2} \\ -\cos \theta_{A1} \sin \theta_{F2} + \cos \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \cos \theta_{F2} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

où

$$\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2\| = \sqrt{\sin^2 \theta_{AF} \sin^2 \theta_{A1} + (\cos \theta_{A1} \sin \theta_{F2} + \cos \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \cos \theta_{F2})^2} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{e}_E = -\mathbf{e}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Les vecteurs \mathbf{e}_{CD} , \mathbf{e}_{EC} et \mathbf{e}_{DE} sont sur les arêtes du cube, tel qu'illustré à la figure 4.9. Pour écrire ces vecteurs, les 3 vecteurs unitaires \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3 sont utilisés (voir section 4.2.1). Nous avons :

$$\mathbf{e}_{CD} = \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_{A1} \\ -\cos \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \\ \sin \theta_{AF} \sin \theta_{A1} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

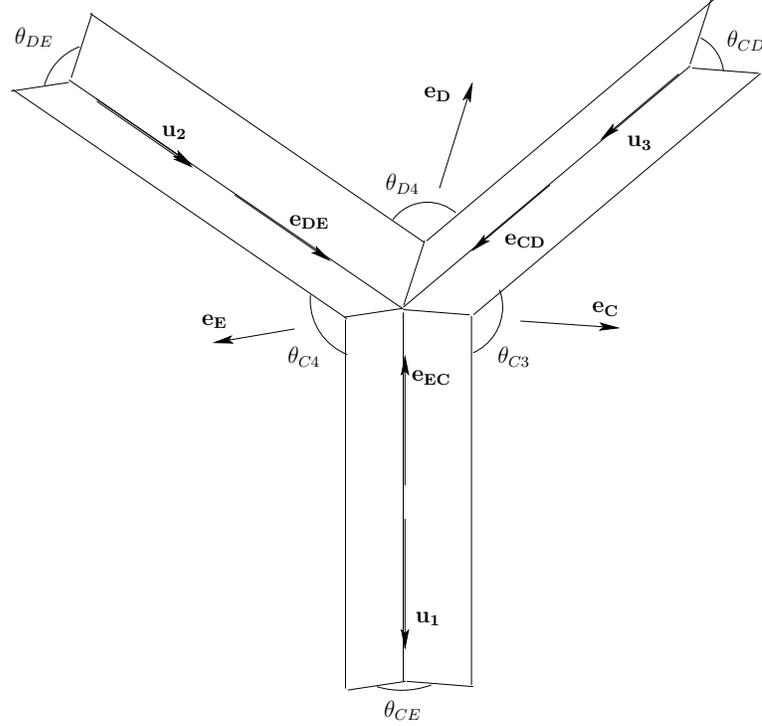


FIG. 4.9 – Géométrie utilisée pour les boucles 7 à 13 du cube en position quelconque.

$$\mathbf{e}_{EC} = -\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{e}_{DE} = \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_{F2} \\ \sin \theta_{F2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

La matrice \mathbf{J}'_7 s'écrit donc

$$\mathbf{J}'_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_E & \mathbf{u}_3 & -\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

La matrice \mathbf{J}'_7 est de dimension $3 \times n_7$ (où $n_7 = 6$). Elle est ramenée à la bonne dimension tel que décrit dans la section 4.1.3. La matrice obtenue est la matrice \mathbf{J}_7 , qui est de dimension 3×36 .

$$\mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 10} & \mathbf{e}_C & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{e}_D & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{e}_E & \mathbf{0}_{3 \times 11} & \mathbf{u}_3 & -\mathbf{u}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Les matrices $\mathbf{J}_8, \mathbf{J}_9, \dots, \mathbf{J}_{13}$ sont trouvées en procédant de la même façon (ces matrices sont explicitées à l'annexe B).

4.2.4 Construction de la matrice jacobienne du mécanisme et détermination du nombre de degrés de liberté

La matrice jacobienne \mathbf{J} est formée en superposant les matrices $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_{13}$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{13} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

L'analyse de la matrice \mathbf{J} est effectuée à l'aide du logiciel MAPLE, et les vecteurs qui composent le noyau de \mathbf{J} sont obtenus sous forme analytique. Encore une fois, le noyau de \mathbf{J} contient 3 vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ et \mathbf{n}_3 . Comme la dimension du noyau de \mathbf{J} est 3, et ce, dans une position tout à fait arbitraire, le mécanisme a donc 3 degrés de liberté en général.

4.2.5 Analyse du noyau de \mathbf{J} et détermination du mouvement possible

Ici encore, \mathbf{n}_i est une combinaison de vitesses articulaires qui respecte les contraintes cinématiques exprimées par \mathbf{J} .

Puisque la position du mécanisme est définie à l'aide de trois angles (θ_{A1}, θ_{F2} et θ_{AF}) les vecteurs du noyau de \mathbf{J} ont comme composantes des fonctions trigonométriques de ces angles. Ceci rend la visualisation du mouvement plus ardue que dans le cas droit.

En observant attentivement les trois vecteurs du noyau de \mathbf{J} , on constate que chacun d'eux permet la déformation deux à deux des faces opposées du cube, en conservant les autres faces fixes. La combinaison de ces trois vecteurs permet de déformer le mécanisme sur les trois paires de faces simultanément (les faces opposées doivent garder la même forme), transformant ainsi le cube en parallélépipède quelconque (où les faces opposées sont de même forme).

Une vérification simple à effectuer consiste à remplacer les angles θ_{A1}, θ_{F2} et θ_{AF}

par leur valeur respective en position droite, et de vérifier si le mouvement possible est le même qu'obtenu précédemment. Nous avons

$$\dot{\theta}_{A1} = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\theta}_{F2} = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\theta}_{AF} = \frac{\pi}{2} \quad (4.52)$$

avec ces angles dans les vecteurs \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n}_3 , on obtient

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.53)$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.54)$$

$$\mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.55)$$

qui sont les mêmes vecteurs que ceux obtenus à la section 4.1.6, c'est à dire une déformation du cube en parallélépipède.

4.2.6 Quelques configurations singulières

Puisque le cube articulé peut se déformer, il est possible qu'il atteigne certaines configurations particulières où son nombre de degrés de liberté changera. Ces configurations sont dites singulières.

Pour déterminer les configurations singulières, il ne suffit pas d'analyser les vecteurs du noyau de \mathbf{J} en position quelconque. En effet, dans certaines positions, la dimension du noyau de \mathbf{J} augmente laissant apparaître de nouveaux vecteurs dans son noyau. Pour voir apparaître ces nouveaux vecteurs, il faut analyser la matrice \mathbf{J} avec les paramètres qui décrivent la configuration (ici, θ_{A1} , θ_{F2} et θ_{AF}) et trouver dans quelles conditions le rang de \mathbf{J} diminue. Le noyau de \mathbf{J} est alors recalculé pour cette position particulière.

Néanmoins, la méthode permet de déterminer le nombre de degrés de liberté en configuration singulière, lorsque les paramètres désignant une telle configuration sont insérés dans la matrice \mathbf{J} .

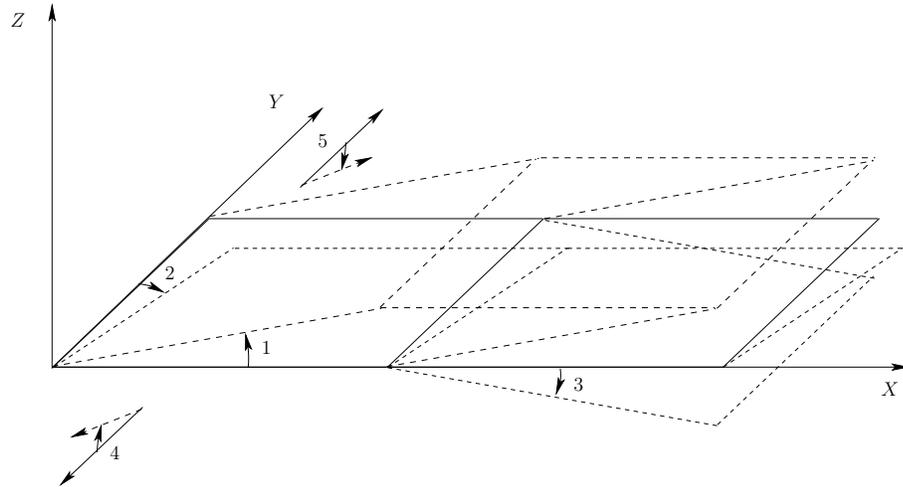


FIG. 4.10 – Cube articulé en configuration singulière.

Prenons par exemple le cas où $\theta_{A1} = 0$, dans ce cas, les faces A et C deviennent des lignes, et le mécanisme se retrouve replié sur lui même, et contenu dans le plan XY . L'analyse du noyau de \mathbf{J} dans cette position indique que le mécanisme a 5 degrés de liberté dans cette configuration (voir figure 4.10). Ces degrés de liberté peuvent être interprétés comme suit :

- 1- Mouvement des faces A et C. Le mécanisme s'ouvre et reprend son aspect 3D.
- 2- Les faces B , D , E et F se déforment en parallélogramme et le mécanisme conserve son aspect plan.
- 3- Le mécanisme plan obtenu se replie encore sur les arêtes DF et BE .
- 4- La face A pivote sur l'axe X indépendamment de la face C . Ce mouvement est rendu possible grâce à la configuration particulière du mécanisme.
- 5- La face C pivote sur l'axe X indépendamment de la face A . Ce mouvement est rendu possible grâce à la configuration particulière du mécanisme.

Les différents degrés de liberté sont illustrés schématiquement à la figure 4.10.

Cette configuration singulière n'est qu'un exemple, puisque le mécanisme en compte beaucoup d'autres.

Chapitre 5

Application de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté au dodécaèdre articulé en position droite

Dans ce chapitre, la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté présentée au chapitre 3 est utilisée pour déterminer le nombre de degrés de liberté du dodécaèdre articulé. La mobilité du dodécaèdre articulé est déterminée pour la position droite.

5.1 Description du mécanisme

Dans ce chapitre, l'analyse d'un nouveau mécanisme à l'aide de la méthode expliquée au chapitre 3 sera effectuée dans le but d'en déterminer le nombre de degrés de liberté. Ce mécanisme est un dodécaèdre articulé dont l'architecture mécanique est décrite dans la section 3.1.2 . Le mécanisme étudié ici est en position droite, c'est à dire, lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers.

Voici quelques définitions qui seront utiles pour décrire le mécanisme étudié.

- Les faces sont identifiées par une lettre; $A, B, C, D, E, F, G, H, L, M, N$ et P .
- Chaque face est composée de 5 membrures. Ces 5 membrures sont identifiées par la lettre de la face et un chiffre de 1 à 5. Par exemple, sur la face A , on retrouve les membrures A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 .
- L'angle entre les membrures A_{i-1} et A_i est noté θ_{A_i} . Par exemple, l'angle entre A_2 et A_3 est l'angle θ_{A_3} .
- Les arêtes sont identifiées par 2 lettres, ces 2 lettres sont celles qui désignent les faces auxquelles l'arête est adjacente. Ainsi, l'arête AB est définie comme l'intersection des faces A et B .
- Les angles des articulations sur les arêtes sont identifiés par le symbole θ suivi des deux lettres qui désignent cette arête. La valeur de l'angle est l'angle entre les vecteurs normaux aux deux surfaces. Par exemple, l'angle θ_{AB} est l'angle sur l'arête entre les faces A et B , sa valeur est l'angle entre \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_B , où \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_B sont les vecteurs normaux aux faces A et B .
- Les sommets sont identifiés par 3 lettres, ces 3 lettres sont celles qui désignent les faces auxquelles le sommet appartient. Ainsi, le sommet AEF est l'intersection des faces A, E et F .

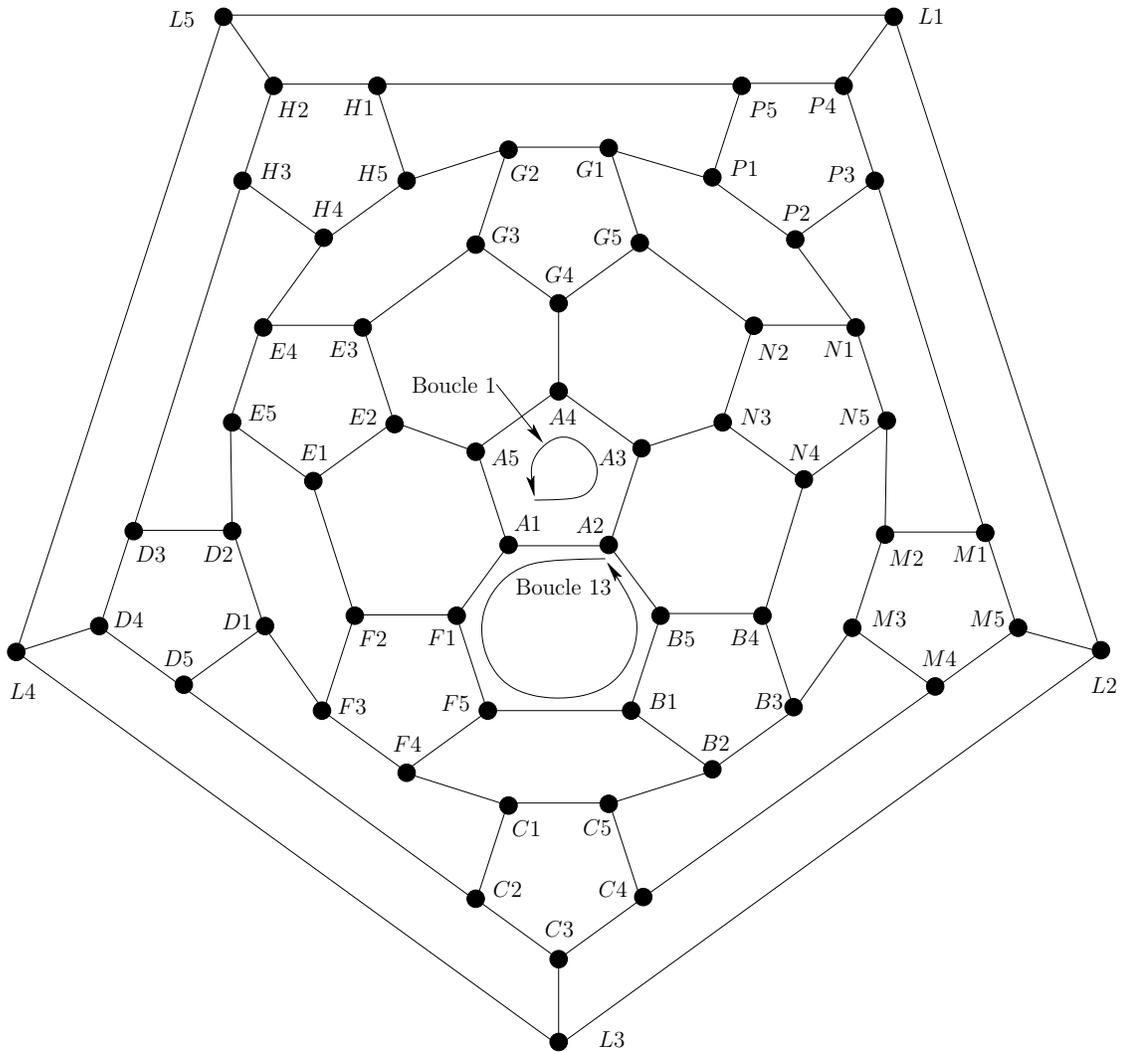


FIG. 5.1 – Graphe du dodécaèdre articulé.

5.2 Graphe du mécanisme

Le graphe du dodécaèdre articulé doit être tracé pour pouvoir en déterminer le nombre de cycles indépendants et donc, identifier les boucles indépendantes du mécanisme. Le graphe est tracé en suivant la méthode décrite dans la section 3.1.1 et est montré à la figure 5.1.

Ce graphe comporte k cycles indépendants. Ici, le graphe comporte 90 arêtes ($a = 90$) et 60 sommets ($s = 60$), le nombre de cycles indépendants k de ce graphe est obtenu grâce à l'équation (3.1)

$$k = 31 \tag{5.1}$$

Il y a 31 cycles indépendants dans le graphe, et donc 31 boucles indépendantes dans le mécanisme. Les équations cinématiques sur ces 31 boucles serviront à construire la matrice jacobienne \mathbf{J} du mécanisme. Nous avons

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Ici, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ contient toutes les coordonnées articulaires du dodécaèdre articulé, soit

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{A2} & \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{A4} & \dot{\theta}_{A5} & \dot{\theta}_{B1} & \dot{\theta}_{B2} & \dot{\theta}_{B3} & \dot{\theta}_{B4} & \dot{\theta}_{B5} & \dot{\theta}_{C1} & \dot{\theta}_{C2} & \dot{\theta}_{C3} \\ \dot{\theta}_{C4} & \dot{\theta}_{C5} & \dot{\theta}_{D1} & \dot{\theta}_{D2} & \dot{\theta}_{D3} & \dot{\theta}_{D4} & \dot{\theta}_{D5} & \dot{\theta}_{E1} & \dot{\theta}_{E2} & \dot{\theta}_{E3} & \dot{\theta}_{E4} & \dot{\theta}_{E5} & \dot{\theta}_{F1} \\ \dot{\theta}_{F2} & \dot{\theta}_{F3} & \dot{\theta}_{F4} & \dot{\theta}_{F5} & \dot{\theta}_{G1} & \dot{\theta}_{G2} & \dot{\theta}_{G3} & \dot{\theta}_{G4} & \dot{\theta}_{G5} & \dot{\theta}_{H1} & \dot{\theta}_{H2} & \dot{\theta}_{H3} & \dot{\theta}_{H4} \\ \dot{\theta}_{H5} & \dot{\theta}_{L1} & \dot{\theta}_{L2} & \dot{\theta}_{L3} & \dot{\theta}_{L4} & \dot{\theta}_{L5} & \dot{\theta}_{M1} & \dot{\theta}_{M2} & \dot{\theta}_{M3} & \dot{\theta}_{M4} & \dot{\theta}_{M5} & \dot{\theta}_{N1} & \dot{\theta}_{N2} \\ \dot{\theta}_{N3} & \dot{\theta}_{N4} & \dot{\theta}_{N5} & \dot{\theta}_{P1} & \dot{\theta}_{P2} & \dot{\theta}_{P3} & \dot{\theta}_{P4} & \dot{\theta}_{P5} & \dot{\theta}_{AB} & \dot{\theta}_{AE} & \dot{\theta}_{AF} & \dot{\theta}_{AG} & \dot{\theta}_{AN} \\ \dot{\theta}_{BC} & \dot{\theta}_{BF} & \dot{\theta}_{BM} & \dot{\theta}_{BN} & \dot{\theta}_{CD} & \dot{\theta}_{CF} & \dot{\theta}_{CL} & \dot{\theta}_{CM} & \dot{\theta}_{DE} & \dot{\theta}_{DF} & \dot{\theta}_{DH} & \dot{\theta}_{DL} & \dot{\theta}_{EF} \\ \dot{\theta}_{EG} & \dot{\theta}_{EH} & \dot{\theta}_{GH} & \dot{\theta}_{GN} & \dot{\theta}_{GP} & \dot{\theta}_{HL} & \dot{\theta}_{HP} & \dot{\theta}_{LM} & \dot{\theta}_{LP} & \dot{\theta}_{MN} & \dot{\theta}_{MP} & \dot{\theta}_{NP} \end{bmatrix}^T \quad (5.3)$$

5.3 Équations cinématiques des boucles 1 à 12

Le cycle 1 passe par les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 du graphe et par les cinq arêtes joignant ces sommets deux à deux. La boucle correspondante sur le mécanisme est donc constituée des cinq corps rigides A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 ainsi que des cinq articulations rotoïdes reliant ces corps deux à deux. L'ensemble de ces corps et articulations constituent le mécanisme plan posé sur la face A du dodécaèdre.

Nous avons :

$$\mathbf{J}'_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Ici \mathbf{J}'_1 est la matrice jacobienne associée à la chaîne plane du mécanisme formé par la boucle 1. \mathbf{J}'_1 est de dimension $3 \times n_1$ où n_1 est le nombre de coordonnées articulaires dans la boucle 1 (ici, $n_1 = 5$) et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ est le vecteur contenant les n_1 coordonnées articulaires.

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{A1} & \mathbf{Er}_{A2} & \mathbf{Er}_{A3} & \mathbf{Er}_{A4} & \mathbf{Er}_{A5} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{A2} & \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{A4} & \dot{\theta}_{A5} \end{bmatrix}^T \quad (5.6)$$

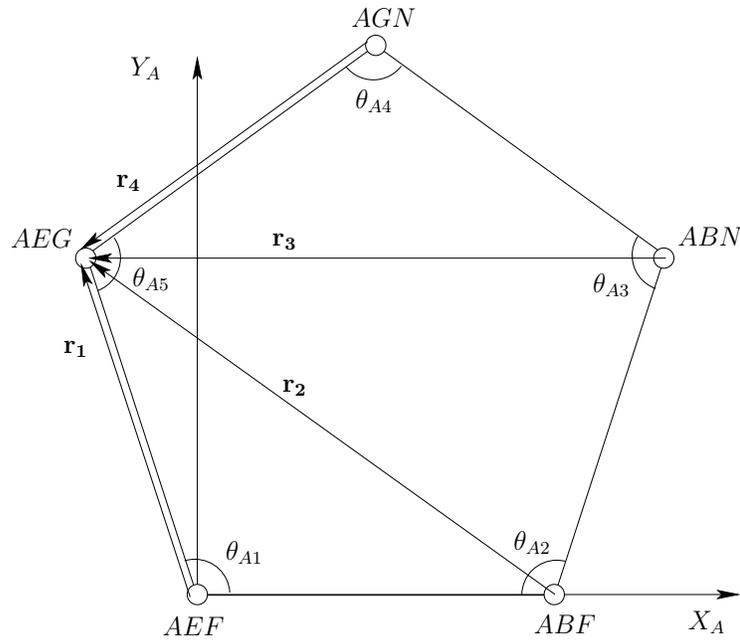


FIG. 5.2 – Géométrie utilisée pour la face A du dodécaèdre articulé.

Pour cette boucle, un repère $X_A Y_A Z_A$ est utilisé pour l'écriture des vecteurs. Le repère est positionné de façon à ce que le mécanisme plan soit situé sur le plan $X_A Y_A$, que l'origine du repère coïncide avec l'axe de θ_{A1} et que la membrure A_1 soit confondue avec X_A .

Ici, le dodécaèdre est étudié en position droite, et par conséquent, toutes les faces auront la forme de pentagones réguliers. Les angles θ_{A1} , θ_{A2} , θ_{A3} , θ_{A4} et θ_{A5} sont donc égaux. Comme la somme des angles internes d'un pentagone est de 3π , chacun de ces angles est alors

$$\theta_{A1} = \theta_{A2} = \theta_{A3} = \theta_{A4} = \theta_{A5} = \frac{3\pi}{5} \quad (5.7)$$

La position des sommets du pentagone peut être trouvée par rapport au repère $X_A Y_A$

$$AEF = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$ABF = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$ABN = ABF + \begin{bmatrix} \cos(\pi - \theta_{A2}) \\ \sin(\pi - \theta_{A2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$AGN = ABN + \begin{bmatrix} \cos((\pi - \theta_{A2}) + (\pi - \theta_{A3})) \\ \sin((\pi - \theta_{A2}) + (\pi - \theta_{A3})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$AEG = \begin{bmatrix} \cos \frac{3\pi}{5} \\ \sin \frac{3\pi}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Les vecteurs \mathbf{r}_{Ai} sont trouvés à partir de la position des sommets

$$\mathbf{r}_{A1} = AEG - AEF = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{r}_{A2} = AEG - ABF = \begin{bmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{r}_{A3} = AEG - ABN = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{r}_{A4} = AEG - AGN = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{r}_{A5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

En substituant les équations (5.13), (5.14), (5.15), (5.16) et (5.17) dans (5.5), on obtient

$$\mathbf{J}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} & -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{-3-\sqrt{5}}{4} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

qui est de dimension $3 \times n_1$

Pour ramener la matrice \mathbf{J}'_1 à la bonne dimension, des colonnes de zéros sont ajoutées vis-à-vis des coordonnées articulaires absentes de la boucle 1, ce qui donne la matrice \mathbf{J}_1 de dimension $3 \times n$ où n est le nombre de coordonnées articulaires du mécanisme (ici, $n = 90$).

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_1 & \mathbf{0}_{3 \times 85} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

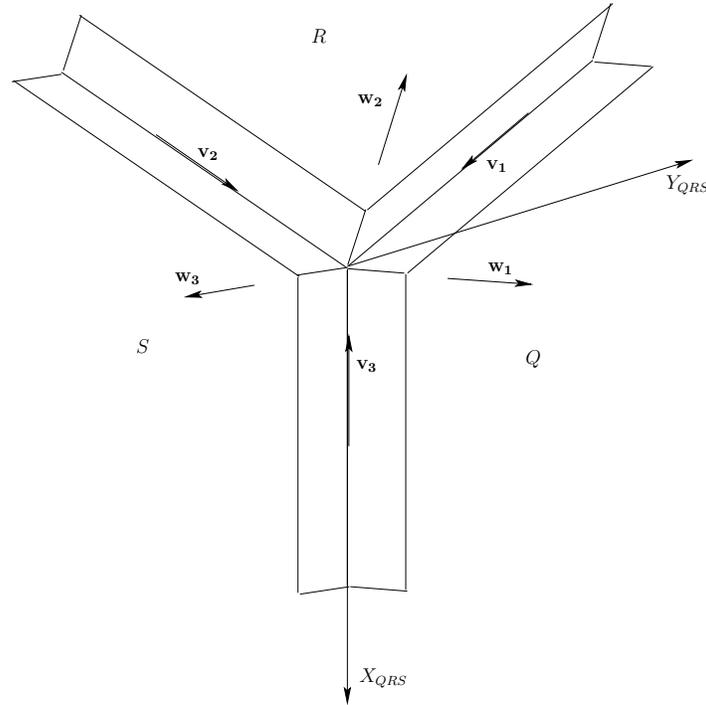


FIG. 5.3 – Sommet quelconque du dodécaèdre.

Les matrices $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \dots, \mathbf{J}_{12}$ sont obtenues de la même façon. Le détail du calcul de ces matrices est donné dans l'annexe C.

5.4 Équations cinématiques des boucles 13 à 31

5.4.1 Définition des vecteurs pour les équations sur les sommets

Pour écrire les équations de contraintes cinématiques sur les boucles autour des sommets, les vecteurs normaux aux surfaces ainsi que les vecteurs sur les arêtes doivent être connus.

Prenons un sommet quelconque QRS du dodécaèdre. Le repère $X_{QRS}Y_{QRS}Z_{QRS}$ est défini de façon à ce que le plan $X_{QRS}Y_{QRS}$ soit sur la face Q du dodécaèdre, que l'origine du repère coïncide avec le sommet QRS et que l'axe X_{QRS} soit confondu à l'arête QS .

Les vecteurs \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 et \mathbf{w}_3 sont les vecteurs unitaires normaux aux faces Q , R et S , tandis que les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 sont des vecteurs unitaires sur les arêtes QR , RS et QS .

Avec ce repère, nous avons

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Le vecteur \mathbf{v}_1 est trouvé facilement puisqu'il appartient à la face Q , et donc au plan $X_{QRS}Y_{QRS}$. L'angle entre les arêtes d'une même face est de $\frac{3\pi}{5}$, puisque chaque face est un pentagone régulier.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \frac{3\pi}{5} \\ -\sin \frac{3\pi}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Le vecteur \mathbf{v}_2 fait partie à la fois du plan R et S . Le produit scalaire entre \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sur le plan R donne

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \frac{3\pi}{5} \quad (5.22)$$

puisque l'angle entre \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 est $\frac{3\pi}{5}$. Si on substitue l'équation (5.21) dans la précédente, on obtient

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{4} \mathbf{v}_2[1] + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \mathbf{v}_2[2] = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad (5.23)$$

où $\mathbf{v}_i[j]$ désigne la j^{eme} composante du vecteur \mathbf{v}_i .

Le produit scalaire entre \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 sur le plan S donne

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \|\mathbf{v}_2\| \|\mathbf{v}_3\| \cos \frac{3\pi}{5} \quad (5.24)$$

Ici encore, l'angle entre \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 est $\frac{3\pi}{5}$. Si on substitue l'équation (5.20) dans la précédente, on obtient

$$-1 \mathbf{v}_2[1] = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad (5.25)$$

d'où

$$\mathbf{v}_2[1] = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad (5.26)$$

et en substituant ce résultat dans l'équation (5.23), on obtient

$$\mathbf{v}_2[2] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad (5.27)$$

La troisième composante du vecteur \mathbf{v}_2 est obtenue de l'équation

$$\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = 1 \quad (5.28)$$

ce qui donne pour $\mathbf{v}_2[3]$

$$\mathbf{v}_2[3] = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad (5.29)$$

En réunissant les 3 termes de \mathbf{v}_2 des équations (5.26), (5.27) et (5.29), on tire

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Maintenant, les vecteurs normaux \mathbf{w}_2 et \mathbf{w}_3 sont obtenus à l'aide des équations de produits vectoriels sur les arêtes

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10} \\ \frac{2}{5+\sqrt{5}} \\ -\frac{(1-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{2(5+\sqrt{5})} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Ces six vecteurs portent les six coordonnées articulaires pour la boucle autour du sommet QRS . Comme tous les sommets sont semblables, les vecteurs sur chacun des sommets pourront être tirés de ceux-ci, en choisissant un repère approprié pour chacune des boucles.

5.4.2 Équations cinématiques

Le cycle 13 passe par les sommets A_2, A_1, F_1, F_5, B_1 et B_5 du graphe et par les arêtes qui joignent ces sommets deux à deux. La boucle correspondante est donc constituée des corps rigides A_2, A_1, F_1, F_5, B_1 et B_5 ainsi que des articulations rotoïdes liant ces corps deux à deux. Cette boucle est constituée du sommet ABF du dodécaèdre articulé.

Les vecteurs $\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B$ et \mathbf{e}_F sont les vecteurs normaux aux faces A, B et F , et les vecteurs $\mathbf{e}_{AF}, \mathbf{e}_{FB}$ et \mathbf{e}_{BA} sont les vecteurs sur les arêtes du dodécaèdre.

Pour la boucle 13, la matrice jacobienne \mathbf{J}'_{13} est la matrice associée à la chaîne sphérique contenant les contraintes cinématiques provenant du sommet ABF du mécanisme. Cette matrice est de dimension $3 \times n_{13}$, où n_{13} est le nombre de coordonnées articulaires présentes dans la boucle 13 (ici $n_{13} = 6$) et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{13}$ est le vecteur composé des n_{13} coordonnées articulaires.

Nous avons :

$$\mathbf{J}'_{13} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{13} = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

où

$$\mathbf{J}'_{13} = \left[\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_F \quad \mathbf{e}_{BA} \quad \mathbf{e}_{AF} \quad \mathbf{e}_{FB} \right] \quad (5.34)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{13} = \left[\dot{\theta}_{A_2} \quad \dot{\theta}_{B_1} \quad \dot{\theta}_{F_1} \quad \dot{\theta}_{AB} \quad \dot{\theta}_{AF} \quad \dot{\theta}_{BF} \right]^T \quad (5.35)$$

Pour écrire les vecteurs $\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_F, \mathbf{e}_{BA}, \mathbf{e}_{AF}$ et \mathbf{e}_{FB} , un repère $X_{ABF}Y_{ABF}Z_{ABF}$ sera utilisé. Ce repère est défini comme dans la section 5.4.1 et les paramètres sont définis à la figure 5.4.

Ici, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_A &= \mathbf{w}_1 & \mathbf{e}_B &= \mathbf{w}_3 & \mathbf{e}_F &= \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{e}_{BA} &= \mathbf{v}_3 & \mathbf{e}_{AF} &= \mathbf{v}_1 & \mathbf{e}_{FB} &= \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_{13} :

$$\mathbf{J}'_{13} = \left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_3 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \right] \quad (5.37)$$

5.5 Construction de la matrice jacobienne du mécanisme et détermination du nombre de degrés de liberté

La matrice jacobienne \mathbf{J} est formée en superposant les matrices $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_{31}$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{31} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Cette matrice est de dimension considérable (93×90). Le calcul du noyau de cette matrice est effectué à l'aide du logiciel MAPLE. Le noyau de \mathbf{J} contient 5 vecteurs. Les vecteurs qui composent le noyau de \mathbf{J} sont obtenus sous forme analytique. Comme la dimension du noyau de \mathbf{J} est égal au nombre de degrés de liberté du mécanisme, on peut conclure que le mécanisme possède 5 degrés de liberté dans cette configuration.

Par contre, l'étude de la mobilité du dodécaèdre est réalisée pour une position droite seulement, et non pour une position générale. Il n'est pas possible de conclure que ces degrés de liberté locaux permettent un mouvement fini du mécanisme (à l'image du mécanisme à 3 barres décrit à la section 4.1.6).

Chapitre 6

Conclusion

Le chapitre 2 de ce mémoire présente un nouveau type de mécanismes déployables à un degré de liberté. Ces mécanismes utilisent des groupes plans en forme de polygones réguliers, déployables à un ddl assemblés sur les faces de différents polyèdres. Ces groupes plans sont joints ensemble à l'aide de liaisons sphériques aux sommets. Le résultat est un polyèdre déployable à un ddl. Lorsqu'il est actionné, le mécanisme se déploie et conserve sa forme en tout temps.

Le facteur d'expansion de ces mécanismes est très grand, ce qui peut être intéressant pour plusieurs applications. Le facteur d'expansion peut être augmenté en ajoutant un ou plusieurs parallélogrammes supplémentaires dans les pattes du groupe plan.

Deux prototypes ont été construits dans le but de vérifier le bon fonctionnement du principe, soit le cube et le dodécaèdre. Les deux mécanismes viennent valider le

principe de fonctionnement puisqu'ils peuvent se déployer tout en conservant leur forme extérieure. De plus, l'intérieur des polyèdres demeure creux en tout temps, ce qui peut être utile dans certains cas.

Les mécanismes déployables peuvent être utilisés dans plusieurs applications, par exemple : des antennes de systèmes spatiaux, des structures en forme de dôme, des abris temporaires portables, des présentoirs d'exposition et bien d'autres...

Les chapitres 3, 4 et 5, pour leur part, traitent de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté pour différents polyèdres articulés. La méthode de détermination du nombre de degrés de liberté est ici appliquée aux polyèdres articulés, mais peut aussi être appliquée à tout mécanisme constitué de chaînes cinématiques fermées. Le nombre de degrés de liberté du mécanisme étudié est égal à la dimension du noyau de la matrice jacobienne du mécanisme.

L'application de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté a permis de déterminer que le cube articulé présenté dans la section (4.1.1) possède 3 degrés de liberté dans sa configuration droite. La paramétrisation du cube à l'aide de trois angles a ensuite permis de répéter l'analyse cette fois pour une position quelconque. Cette analyse démontre que le cube articulé possède trois degrés de liberté dans une position quelconque. Ces observations ont permis de conclure que le cube est mobile, avec trois degrés de liberté en général. Ces trois degrés de liberté permettent la déformation du cube en parallélépipède, en autant que les faces opposées conservent la même forme. De plus, certaines configurations singulières sont montrées et le nombre de degrés de liberté spécifique à ces configurations est donné.

Finalement, l'application de la méthode de détermination du nombre de degrés de liberté au dodécaèdre articulé a permis de déterminer que ce mécanisme possède 5 degrés de liberté en configuration droite. Par contre, rien ne permet de dire que le dodécaèdre peut effectuer des déplacements finis autour de cette position. En effet, les 5 degrés de liberté trouvés peuvent être des degrés de liberté locaux du mécanisme. Une étude du dodécaèdre en position quelconque permettrait de déterminer si ces 5 degrés de liberté sont locaux ou s'appliquent au mécanisme dans une configuration plus générale.

Bibliographie

- [1] Hoberman, C., 1991 'Radial expansion/retraction truss structures', US Patent 5,024,031
- [2] Wolhart, K., 2001, 'Regular polyhedral linkages', Proceedings of the *2nd Workshop on Computational Kinematics*, May 19-22, Seoul, Korea, pp.239-248.
- [3] Agrawal, S.K. and Kumar, S., 2001, 'Polyhedral single degree of freedom expanding structures', Proceedings of the 2001 *IEEE International conference on Robotics and Automation*, May 21-26, Seoul, Korea.
- [4] Calladine, C.R. and Pellegrino, S., 1991, 'First order infinitesimal mechanisms', *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 4, pp. 505-515.
- [5] Duffy, J., Rooney, J., Knight, B. and Crane III, C.D., 2000, 'A review of a family of self-deploying tensegrity structures with elastic ties', *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 2, pp. 100-106.
- [6] Hackowski, M.R. and Peterson, L.D., 1995, 'A comparative study of the precision of deployable spacecraft structures', Technical Report CU-CAS-95-22, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, CO, USA.
- [7] Miura, K., 1993, 'Concepts of deployable space structures', *International Journal of Space Structures*, Vol. 8, No. 1, pp. 3-16.
- [8] You, Z. and Pellegrino, S., 1997, 'Cable stiffened pantographic deployable structures Part 2 : mesh reflector', *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 8, pp. 1348-1355.

- [9] Rimrott, F.P.J. and Fritsche, G., 1998, 'Fundamentals of STEM mechanics', in *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures : Theory and Applications* (Cambridge, UK, 6-9 September 1998) S. Pellegrino and S.D. Guest, Eds., Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 2000, pp. 321-333.
- [10] Cromwell, P.R., 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 451 p.
- [11] Laliberté, T., Gosselin, C., Côté, G., 2001, 'A rapid prototyping framework for fast and cost effective design of robotic mechanism prototypes', *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 8, No. 3, pp.43-52.
- [12] Angeles, J., et Gosselin, C., 1989, 'Détermination du degré de liberté des chaînes cinématiques', *Transactions de la Société Canadienne de Génie Mécanique*, Vol. 12, No. 4, pp. 219-226.
- [13] Harary, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1969.
- [14] Laliberté, T. and Gosselin, C., 'Construction members for 3 dimensional assemblies', US patent application no 20040002278.
- [15] Wu, Y. and Gosselin, C., 2004, 'Design of Reactionless 3-DOF and 6-DOF Parallel Manipulators Using Parallelepiped Mechanisms', to appear in the *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.

Annexe A

Équations, vecteurs et matrices pour la résolution du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position droite

Cette section contient les équations, les vecteurs et les matrices nécessaires au calcul du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position droite.

i	j
1	A
2	B
3	C
4	D
5	E
6	F

TAB. A.1 – Correspondance des indices i et j pour le cube en position droite.

A.1 Équations cinématiques des boucles 2 à 6

Pour les boucles 2 à 6, toutes les équations sont similaires d'une boucle à l'autre. Ici, i est un indice qui représente le numéro de la boucle.

$$i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.1})$$

et j est un indice qui représente la face du cube correspondante à la i^{eme} boucle. La correspondance entre les indices est donnée au tableau A.1.

A.1.1 Boucle i (face j)

La boucle i est composée des corps et articulations de la face j du cube. La matrice jacobienne \mathbf{J}'_i est une matrice associée à une chaîne plane et est de dimension 3×4 .

$$\mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{j1} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{j2} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{j3} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{j4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{j1} & \dot{\theta}_{j2} & \dot{\theta}_{j3} & \dot{\theta}_{j4} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.3})$$

Pour cette boucle, un repère $X_j Y_j$ (tel que défini dans la section 4.1.3) est utilisé. Les vecteurs \mathbf{r}_{ji} sont

$$\mathbf{r}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{j2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{j3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{j4} = \mathbf{0} \quad (\text{A.4})$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_i

$$\mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

qui est de dimension 3×4 . Avec les repères locaux choisis, les matrices $\mathbf{J}'_2, \mathbf{J}'_3, \dots, \mathbf{J}'_6$ sont identiques, il n'y a que le vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$ qui diffère d'une boucle à l'autre.

A.1.2 Matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_6

Les matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_6 sont obtenues à l'aide de l'équation (A.5), dans laquelle des colonnes de 0 sont ajoutées vis-à-vis des coordonnées articulaires absentes de la boucle i . On a

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 28} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 8} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 24} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 20} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 16} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 16} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 20} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Équations cinématiques des boucles 8 à 13

Les boucles 8 à 13 sont toutes des boucles autour des sommets du cube articulé.

Pour chacune de ces boucles, la matrice jacobienne \mathbf{J}'_i est une matrice associée à une chaîne sphérique et est de dimension 3×6 . On a

$$\mathbf{J}'_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_F & \mathbf{e}_{AD} & \mathbf{e}_{FA} & \mathbf{e}_{DF} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{J}'_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_F & \mathbf{e}_{BA} & \mathbf{e}_{AF} & \mathbf{e}_{FB} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{J}'_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{AB} & \mathbf{e}_{EA} & \mathbf{e}_{BE} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{J}'_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_F & \mathbf{e}_{DC} & \mathbf{e}_{CF} & \mathbf{e}_{FD} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{J}'_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{DA} & \mathbf{e}_{AE} & \mathbf{e}_{ED} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{J}'_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{BC} & \mathbf{e}_{EB} & \mathbf{e}_{CE} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Les vecteurs $\dot{\theta}_i$ pour ces boucles sont

$$\dot{\theta}_8 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{D2} & \dot{\theta}_{F2} & \dot{\theta}_{AD} & \dot{\theta}_{AF} & \dot{\theta}_{DF} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.17})$$

$$\dot{\theta}_9 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A2} & \dot{\theta}_{B1} & \dot{\theta}_{F1} & \dot{\theta}_{AB} & \dot{\theta}_{AF} & \dot{\theta}_{BF} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{\theta}_{10} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{B4} & \dot{\theta}_{E2} & \dot{\theta}_{AB} & \dot{\theta}_{AE} & \dot{\theta}_{BE} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{\theta}_{11} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{C2} & \dot{\theta}_{D1} & \dot{\theta}_{F3} & \dot{\theta}_{CD} & \dot{\theta}_{CF} & \dot{\theta}_{DF} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{\theta}_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A4} & \dot{\theta}_{D3} & \dot{\theta}_{E1} & \dot{\theta}_{AD} & \dot{\theta}_{AE} & \dot{\theta}_{DE} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{\theta}_{13} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{B3} & \dot{\theta}_{C4} & \dot{\theta}_{E3} & \dot{\theta}_{BC} & \dot{\theta}_{BE} & \dot{\theta}_{CE} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.22})$$

Les vecteurs sont ici donnés dans le repère XYZ :

$$\mathbf{e}_A = -\mathbf{j} \quad \mathbf{e}_B = \mathbf{i} \quad \mathbf{e}_C = \mathbf{j} \quad \mathbf{e}_D = -\mathbf{i} \quad \mathbf{e}_E = \mathbf{k} \quad \mathbf{e}_F = -\mathbf{k} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{AB} = -\mathbf{e}_{BA} = \mathbf{k} \quad \mathbf{e}_{AD} = -\mathbf{e}_{DA} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{e}_{AE} = -\mathbf{e}_{EA} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{e}_{AF} = -\mathbf{e}_{FA} = \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_{BC} = -\mathbf{e}_{CB} = \mathbf{k} \quad \mathbf{e}_{BE} = -\mathbf{e}_{EB} = -\mathbf{j} \quad \mathbf{e}_{BF} = -\mathbf{e}_{FB} = \mathbf{j} \quad \mathbf{e}_{CD} = -\mathbf{e}_{DC} = \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_{CE} = -\mathbf{e}_{EC} = \mathbf{i} \quad \mathbf{e}_{CF} = -\mathbf{e}_{FC} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{e}_{DE} = -\mathbf{e}_{ED} = \mathbf{j} \quad \mathbf{e}_{DF} = -\mathbf{e}_{FD} = -\mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Ce qui donne pour les matrices $\mathbf{J}_8, \mathbf{J}_9, \dots, \mathbf{J}_{13}$:

$$\mathbf{J}_8 = \begin{bmatrix} -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 7} & -\mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 7} & -\mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{J}_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 15} & -\mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{J}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} & -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 9} & \mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 9} & \mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 9} & -\mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 8} & -\mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 10} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 8} & \mathbf{k} & -\mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 7} & -\mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{J}_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{k} & \mathbf{0}_{3 \times 9} & \mathbf{k} & \mathbf{j} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{i} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Annexe B

Équations, vecteurs et matrices pour la résolution du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position quelconque

Cette section contient les équations, les vecteurs et les matrices nécessaires au calcul du nombre de degrés de liberté du cube articulé en position quelconque.

i	j
1	A
2	B
3	C
4	D
5	E
6	F

TAB. B.1 – Correspondance des indices i et j pour le cube articulé en position quelconque.

B.1 Équations cinématiques des boucles 2 à 6

Pour les boucles 2 à 6, toutes les équations sont similaires d'une boucle à l'autre. Ici, i est un indice qui représente le numéro de la boucle où

$$i = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.1})$$

et j est un indice qui représente la face du cube correspondante à la i^{eme} boucle. La correspondance entre les indices est donnée au tableau B.1.

B.1.1 Boucle i (face j)

La boucle i est composée des corps et articulations de la face j du cube. La matrice jacobienne \mathbf{J}'_i est une matrice associée à une chaîne plane et est de dimension 3×4 .

$$\mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{j1} & \mathbf{Er}_{j2} & \mathbf{Er}_{j3} & \mathbf{Er}_{j4} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \left[\dot{\theta}_{j1} \quad \dot{\theta}_{j2} \quad \dot{\theta}_{j3} \quad \dot{\theta}_{j4} \right]^T \quad (\text{B.3})$$

Pour cette boucle, un repère $X_j Y_j$ (tel que défini dans la section 4.2.2) est utilisé. Les vecteurs \mathbf{r}_{ji} sont

$$\mathbf{r}_{j1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{j1} \\ \sin \theta_{j1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{j2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{j1} - 1 \\ \sin \theta_{j1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{j3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{j4} = \mathbf{0} \quad (\text{B.4})$$

Par contre, les angles utilisés pour paramétrer le cube sont θ_{A1} , θ_{F2} et θ_{AF} . Les angles θ_{j1} dans les vecteurs \mathbf{r}_{j1} et \mathbf{r}_{j2} sont donc remplacés par des fonctions de θ_{A1} , θ_{F2} et θ_{AF} .

On a

$$\theta_{C1} = \pi - \theta_{A1} \quad \theta_{E1} = \theta_{F2} \quad \theta_{F1} = \pi - \theta_{F2} \quad (\text{B.5})$$

L'angle θ_{D2} est trouvé à partir du produit scalaire de \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3

$$\theta_{D2} = \arccos(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3) \quad (\text{B.6})$$

$$\theta_{D2} = \arccos(\cos \theta_{A1} \cos \theta_{F2} - \sin \theta_{A1} \sin \theta_{F2} \cos \theta_{AF}) \quad (\text{B.7})$$

et

$$\theta_{B1} = \theta_{D2} \quad \theta_{D1} = \pi - \theta_{D2} \quad (\text{B.8})$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_2 , \mathbf{J}'_3 , \mathbf{J}'_4 , \mathbf{J}'_5 et \mathbf{J}'_6

$$\mathbf{J}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{B1} & -\sin \theta_{B1} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{B1} & \cos \theta_{B1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{D2} & -\sin \theta_{D2} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{D2} & \cos \theta_{D2} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{J}'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{C1} & -\sin \theta_{C1} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{C1} & \cos \theta_{C1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{A1} & -\sin \theta_{A1} & 0 & 0 \\ -\cos \theta_{A1} & -\cos \theta_{A1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{J}'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{D1} & -\sin \theta_{D1} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{D1} & \cos \theta_{D1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{D2} & -\sin \theta_{D2} & 0 & 0 \\ -\cos \theta_{D2} & -\cos \theta_{D2} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{J}'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{E1} & -\sin \theta_{E1} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{E1} & \cos \theta_{E1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{F2} & -\sin \theta_{F2} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{F2} & \cos \theta_{F2} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{J}'_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{F1} & -\sin \theta_{F1} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{F1} & \cos \theta_{F1} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sin \theta_{F2} & -\sin \theta_{F2} & 0 & 0 \\ -\cos \theta_{F2} & -\cos \theta_{F2} - 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

qui sont de dimension 3×4 .

B.1.2 Matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_6

Les matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_6 sont obtenues à l'aide des équations (B.9), (B.10), (B.11), (B.12) et (B.13) dans lesquelles des colonnes de 0 sont ajoutées vis-à-vis des coordonnées articulaires absentes de la boucle . On a

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{J}'_2 & \mathbf{0}_{3 \times 28} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 8} & \mathbf{J}'_3 & \mathbf{0}_{3 \times 24} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{J}'_4 & \mathbf{0}_{3 \times 20} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 16} & \mathbf{J}'_5 & \mathbf{0}_{3 \times 16} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 20} & \mathbf{J}'_6 & \mathbf{0}_{3 \times 12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

B.2 Équations cinématiques des boucles 8 à 13

Les boucles 8 à 13 sont toutes des boucles autour des sommets du cube articulé.

Pour chacune de ces boucles, la matrice jacobienne \mathbf{J}'_i est une matrice associée à une chaîne sphérique et est de dimension 3×6 . On a

$$\mathbf{J}'_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_F & \mathbf{e}_{AD} & \mathbf{e}_{FA} & \mathbf{e}_{DF} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{J}'_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_F & \mathbf{e}_{BA} & \mathbf{e}_{AF} & \mathbf{e}_{FB} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{J}'_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{AB} & \mathbf{e}_{EA} & \mathbf{e}_{BE} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{J}'_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_F & \mathbf{e}_{DC} & \mathbf{e}_{CF} & \mathbf{e}_{FD} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{J}'_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_A & \mathbf{e}_D & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{DA} & \mathbf{e}_{AE} & \mathbf{e}_{ED} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{J}'_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_B & \mathbf{e}_C & \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_{BC} & \mathbf{e}_{EB} & \mathbf{e}_{CE} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Les vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$ pour ces boucles sont

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_8 = \left[\dot{\theta}_{A1} \quad \dot{\theta}_{D2} \quad \dot{\theta}_{F2} \quad \dot{\theta}_{AD} \quad \dot{\theta}_{AF} \quad \dot{\theta}_{DF} \right]^T \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_9 = \left[\dot{\theta}_{A2} \quad \dot{\theta}_{B1} \quad \dot{\theta}_{F1} \quad \dot{\theta}_{AB} \quad \dot{\theta}_{AF} \quad \dot{\theta}_{BF} \right]^T \quad (\text{B.26})$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{10} = \left[\dot{\theta}_{A3} \quad \dot{\theta}_{B4} \quad \dot{\theta}_{E2} \quad \dot{\theta}_{AB} \quad \dot{\theta}_{AE} \quad \dot{\theta}_{BE} \right]^T \quad (\text{B.27})$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{11} = \left[\dot{\theta}_{C2} \quad \dot{\theta}_{D1} \quad \dot{\theta}_{F3} \quad \dot{\theta}_{CD} \quad \dot{\theta}_{CF} \quad \dot{\theta}_{DF} \right]^T \quad (\text{B.28})$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{12} = \left[\dot{\theta}_{A4} \quad \dot{\theta}_{D3} \quad \dot{\theta}_{E1} \quad \dot{\theta}_{AD} \quad \dot{\theta}_{AE} \quad \dot{\theta}_{DE} \right]^T \quad (\text{B.29})$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{13} = \left[\dot{\theta}_{B3} \quad \dot{\theta}_{C4} \quad \dot{\theta}_{E3} \quad \dot{\theta}_{BC} \quad \dot{\theta}_{BE} \quad \dot{\theta}_{CE} \right]^T \quad (\text{B.30})$$

Ici, les vecteurs sont donnés dans le repère XYZ . Les vecteurs normaux \mathbf{e}_A , \mathbf{e}_B , \mathbf{e}_C , \mathbf{e}_D , \mathbf{e}_E et \mathbf{e}_F sont donnés dans les équations (4.32),(4.34),(4.31) et (4.36). Les vecteurs sur les arêtes sont

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{AB} = -\mathbf{e}_{BA} = \mathbf{u}_3 & \quad \mathbf{e}_{AD} = -\mathbf{e}_{DA} = -\mathbf{u}_3 & \quad \mathbf{e}_{AE} = -\mathbf{e}_{EA} = -\mathbf{u}_1 & \quad \mathbf{e}_{AF} = -\mathbf{e}_{FA} = \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{e}_{BC} = -\mathbf{e}_{CB} = \mathbf{u}_3 & \quad \mathbf{e}_{BE} = -\mathbf{e}_{EB} = -\mathbf{u}_2 & \quad \mathbf{e}_{BF} = -\mathbf{e}_{FB} = \mathbf{u}_2 & \quad \mathbf{e}_{CD} = -\mathbf{e}_{DC} = \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_{CE} = -\mathbf{e}_{EC} = \mathbf{u}_1 & \quad \mathbf{e}_{CF} = -\mathbf{e}_{FC} = -\mathbf{u}_1 & \quad \mathbf{e}_{DE} = -\mathbf{e}_{ED} = \mathbf{u}_2 & \quad \mathbf{e}_{DF} = -\mathbf{e}_{FD} = -\mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Ce qui donne pour les matrices $\mathbf{J}_8, \mathbf{J}_9, \dots, \mathbf{J}_{13}$:

$$\mathbf{J}_8 = \left[\mathbf{e}_A \quad \mathbf{0}_{3 \times 12} \quad \mathbf{e}_D \quad \mathbf{0}_{3 \times 7} \quad \mathbf{e}_F \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad -\mathbf{u}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad -\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 7} \quad -\mathbf{u}_2 \right] \quad (\text{B.32})$$

$$\mathbf{J}_9 = \left[\mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{e}_A \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{0}_{3 \times 15} \quad \mathbf{e}_F \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad -\mathbf{u}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \quad -\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{0}_{3 \times 5} \right] \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{J}_{10} = \left[\mathbf{0}_{3 \times 2} \quad \mathbf{e}_A \quad \mathbf{0}_{3 \times 4} \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{e}_E \quad \mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \quad -\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{0}_{3 \times 6} \right] \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{J}_{11} = \left[\mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{e}_C \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \quad \mathbf{e}_D \quad \mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{e}_F \quad \mathbf{0}_{3 \times 8} \quad -\mathbf{u}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad -\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{u}_2 \right] \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{J}_{12} = \left[\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{e}_A \quad \mathbf{0}_{3 \times 10} \quad \mathbf{e}_D \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{e}_F \quad \mathbf{0}_{3 \times 8} \quad \mathbf{u}_3 \quad -\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 7} \quad -\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1} \right] \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{J}_{13} = \left[\mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{0}_{3 \times 4} \quad \mathbf{e}_C \quad \mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \mathbf{e}_E \quad \mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{0}_{3 \times 2} \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 3} \right] \quad (\text{B.37})$$

Annexe C

Équations, vecteurs et matrices pour la résolution du nombre de degrés de liberté du dodécaèdre articulé en position droite

Cette section contient les équations, les vecteurs et les matrices nécessaires au calcul du nombre de degrés de liberté du dodécaèdre articulé en position droite.

i	j
1	A
2	B
3	C
4	D
5	E
6	F
7	G
8	H
9	L
10	M
11	N
12	P

TAB. C.1 – Correspondance des indices i et j pour le dodécaèdre articulé (boucles 1 à 12).

C.1 Équations cinématiques des boucles 2 à 12

Pour les boucles 2 à 12, toutes les équations sont similaires d'une boucle à l'autre. Ici, i est un indice qui représente le numéro de la boucle.

$$i = 1, \dots, 12 \quad (\text{C.1})$$

et j est un indice qui représente la face du cube correspondante à la i^{eme} boucle. La correspondance entre les indices est donnée au tableau C.1.

C.1.1 Boucle i (face j)

La boucle i est composée des corps et articulations de la face j du dodécaèdre. La matrice jacobienne \mathbf{J}'_i est une matrice associée à une chaîne plane et est de dimension 3×5 .

$$\mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{j1} & \mathbf{Er}_{j2} & \mathbf{Er}_{j3} & \mathbf{Er}_{j4} & \mathbf{Er}_{j5} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{j1} & \dot{\theta}_{j2} & \dot{\theta}_{j3} & \dot{\theta}_{j4} & \dot{\theta}_{j5} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.3})$$

Pour cette boucle, un repère $X_j Y_j$ (tel que défini dans la section 5.3) est utilisé. Les vecteurs \mathbf{r}_{ji} sont

$$\mathbf{r}_{j1} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{r}_{j2} = \begin{bmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{r}_{j3} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{r}_{j4} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{r}_{j5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_i

$$\mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} & -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{-3-\sqrt{5}}{4} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

qui est de dimension 3×5 . Avec les repères locaux choisis, les matrices $\mathbf{J}'_2, \mathbf{J}'_3, \dots, \mathbf{J}'_{12}$ sont identiques, il n'y a que le vecteur $\boldsymbol{\theta}_i$ qui diffère d'une boucle à l'autre.

C.1.2 Matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_{12}

Les matrices \mathbf{J}_2 à \mathbf{J}_{12} sont obtenues à l'aide de l'équation (C.9), dans laquelle des colonnes de 0 sont ajoutées vis à vis des coordonnées articulaires absentes de la boucle i . On a

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 5} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 80} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 10} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 75} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 15} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 70} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 20} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 65} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 25} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 60} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 30} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 55} \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{J}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 35} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 50} \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{J}_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 40} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 45} \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{J}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 45} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 40} \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 50} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 35} \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 55} & \mathbf{J}'_i & \mathbf{0}_{3 \times 30} \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

C.2 Équations cinématiques des boucles 14 à 31

Les boucles 14 à 31 sont toutes des boucles autour des sommets du dodécaèdre articulé. Pour ces boucles, un repère local est utilisé (tel que défini dans la section 5.4.1). L'utilisation de repères locaux simplifie grandement l'écriture des équations. Ici, i est un indice qui représente le numéro de la boucle, et Q , R et S sont des indices qui représentent les faces (table C.2).

C.2.1 Boucle i (sommet QRS)

La boucle i est composée des corps et articulations du sommet QRS du dodécaèdre articulé. La matrice jacobienne \mathbf{J}'_i est une matrice associée à une chaîne sphérique et est de dimension 3×6 . \mathbf{J}'_i prend la forme

$$\mathbf{J}'_{QRS} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_Q & \mathbf{e}_R & \mathbf{e}_S & \mathbf{e}_{QR} & \mathbf{e}_{RS} & \mathbf{e}_{SQ} \end{bmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Par définition, ces vecteurs dans le repère $X_{QRS}Y_{QRS}Z_{QRS}$ sont (voir fig. 5.3)

$$\mathbf{e}_Q = \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{e}_R = \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{e}_S = \mathbf{w}_3 \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{e}_{QR} = \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{e}_{RS} = \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{e}_{SQ} = \mathbf{v}_3 \quad (\text{C.23})$$

ce qui donne pour \mathbf{J}'_i

$$\mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

i	Q	R	S
14	A	B	N
15	A	N	G
16	A	G	E
17	A	E	F
18	B	F	C
19	B	C	M
20	B	M	N
21	C	F	D
22	C	D	L
23	C	L	M
24	D	F	E
25	D	E	H
26	D	H	L
27	E	G	H
28	G	N	P
29	G	P	H
30	H	P	L
31	L	P	M

TAB. C.2 – Correspondance des indices i , Q , R et S pour le dodécaèdre articulé (boucles 14 à 31).

Les vecteurs $\dot{\theta}_i$ pour ces boucles sont

$$\dot{\theta}_{14} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A3} & \dot{\theta}_{B5} & \dot{\theta}_{N4} & \dot{\theta}_{AB} & \dot{\theta}_{BN} & \dot{\theta}_{AN} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.25})$$

$$\dot{\theta}_{15} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A4} & \dot{\theta}_{N3} & \dot{\theta}_{G5} & \dot{\theta}_{AN} & \dot{\theta}_{GN} & \dot{\theta}_{AG} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.26})$$

$$\dot{\theta}_{16} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A5} & \dot{\theta}_{G4} & \dot{\theta}_{E3} & \dot{\theta}_{AG} & \dot{\theta}_{EG} & \dot{\theta}_{AE} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.27})$$

$$\dot{\theta}_{17} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{A1} & \dot{\theta}_{E2} & \dot{\theta}_{F2} & \dot{\theta}_{AE} & \dot{\theta}_{EF} & \dot{\theta}_{AF} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.28})$$

$$\dot{\theta}_{18} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{B2} & \dot{\theta}_{F5} & \dot{\theta}_{C1} & \dot{\theta}_{BF} & \dot{\theta}_{CF} & \dot{\theta}_{BC} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.29})$$

$$\dot{\theta}_{19} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{B3} & \dot{\theta}_{C5} & \dot{\theta}_{M5} & \dot{\theta}_{BC} & \dot{\theta}_{CM} & \dot{\theta}_{BM} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.30})$$

$$\dot{\theta}_{20} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{B4} & \dot{\theta}_{M3} & \dot{\theta}_{N5} & \dot{\theta}_{BM} & \dot{\theta}_{MN} & \dot{\theta}_{BN} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.31})$$

$$\dot{\theta}_{21} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{C2} & \dot{\theta}_{F4} & \dot{\theta}_{D1} & \dot{\theta}_{CF} & \dot{\theta}_{DF} & \dot{\theta}_{CD} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.32})$$

$$\dot{\theta}_{22} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{C3} & \dot{\theta}_{D5} & \dot{\theta}_{L4} & \dot{\theta}_{CD} & \dot{\theta}_{DL} & \dot{\theta}_{CL} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.33})$$

$$\dot{\theta}_{23} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{C4} & \dot{\theta}_{L3} & \dot{\theta}_{M5} & \dot{\theta}_{CL} & \dot{\theta}_{LM} & \dot{\theta}_{CM} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.34})$$

$$\dot{\theta}_{24} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{D2} & \dot{\theta}_{F3} & \dot{\theta}_{E1} & \dot{\theta}_{DF} & \dot{\theta}_{EF} & \dot{\theta}_{DE} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.35})$$

$$\dot{\theta}_{25} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{D3} & \dot{\theta}_{E5} & \dot{\theta}_{H4} & \dot{\theta}_{DE} & \dot{\theta}_{EH} & \dot{\theta}_{DH} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.36})$$

$$\dot{\theta}_{26} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{D4} & \dot{\theta}_{H3} & \dot{\theta}_{L5} & \dot{\theta}_{DH} & \dot{\theta}_{HL} & \dot{\theta}_{DL} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.37})$$

$$\dot{\theta}_{27} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{E4} & \dot{\theta}_{G3} & \dot{\theta}_{H5} & \dot{\theta}_{EG} & \dot{\theta}_{GH} & \dot{\theta}_{EH} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.38})$$

$$\dot{\theta}_{28} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{G1} & \dot{\theta}_{N2} & \dot{\theta}_{P2} & \dot{\theta}_{GN} & \dot{\theta}_{NP} & \dot{\theta}_{GP} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.39})$$

$$\dot{\theta}_{29} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{G2} & \dot{\theta}_{P1} & \dot{\theta}_{H1} & \dot{\theta}_{GP} & \dot{\theta}_{HP} & \dot{\theta}_{GH} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.40})$$

$$\dot{\theta}_{30} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{H2} & \dot{\theta}_{P5} & \dot{\theta}_{L1} & \dot{\theta}_{HP} & \dot{\theta}_{LP} & \dot{\theta}_{HL} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.41})$$

$$\dot{\theta}_{31} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{L2} & \dot{\theta}_{P4} & \dot{\theta}_{M1} & \dot{\theta}_{LP} & \dot{\theta}_{MP} & \dot{\theta}_{LM} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.42})$$

Ce qui donne pour les matrices $\mathbf{J}_{14}, \mathbf{J}_{15}, \dots, \mathbf{J}_{31}$:

$$\mathbf{J}_{14} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 43} & \mathbf{w}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{v}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 21} \end{bmatrix} \quad (\text{C.43})$$

$$\mathbf{J}_{15} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 30} & \mathbf{w}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 17} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 10} & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 16} & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 8} \end{bmatrix} \quad (\text{C.44})$$

$$\mathbf{J}_{16} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 17} & \mathbf{w}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 10} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 17} & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{v}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 14} & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 11} \end{bmatrix} \quad (\text{C.45})$$

$$\mathbf{J}_{17} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 20} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{w}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 34} & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 14} & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 12} \end{bmatrix} \quad (\text{C.46})$$

$$\mathbf{J}_{18} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{w}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 18} & \mathbf{w}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 35} & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 19} \end{bmatrix} \quad (\text{C.47})$$

