



Modélisation, conception mécanique, étude cinématique et dynamique d'un robot hybride redondant à (6+3) degrés de liberté

Mémoire

David Harton

Maîtrise en génie mécanique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© David Harton, 2020

**Modélisation, conception mécanique, étude
cinématique et dynamique d'un robot hybride
redondant à (6+3) degrés de liberté**

Mémoire

David Harton

Sous la direction de:

Clément Gosselin, directeur de recherche

Résumé

Les robots collaboratifs prennent de plus en plus de place sur les lignes de production au sein des entreprises manufacturières. Leur facilité d'installation et d'utilisation ainsi que leur caractère sécuritaire constituent des avantages liés à leur utilisation. Les robots collaboratifs sériels sont les plus populaires dans l'industrie. Le principal avantage de ceux-ci est leur grand espace de travail. Cependant, l'inertie des architectures sérielles est généralement élevée, limitant ainsi les performances dynamiques du robot. Les robots parallèles sont plus avantageux sur ce point. Un principal avantage des robots parallèles collaboratifs est que les actionneurs sont situés près de la base, diminuant ainsi l'inertie, comparativement aux robots sériels. Cependant il existe peu de robots parallèles collaboratifs sur le marché.

Dans ce mémoire est présenté un concept de robot hybride cinématiquement redondant utilisé pour des applications de coopération humain-robot à faible impédance. Ce robot d'architecture 3- $[\underline{R}(\underline{R}\underline{R}-\underline{R}\underline{R}\underline{R})\underline{S}\underline{R}]$ possède $(6+3)$ degrés de liberté (ddl). La redondance du robot permet d'augmenter l'espace de travail notamment en rotation (comparativement à celui d'un robot non redondant d'architecture semblable) en diminuant le nombre de configurations singulières de type II dans l'espace de travail. Le robot est composé de trois jambes d'architecture hybride ayant chacune trois ddl et trois actionneurs ainsi qu'une plateforme composée d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl. Les trois degrés de liberté redondants sont utilisés à la plateforme, afin d'y opérer une pince à partir des actionneurs aux jambes. Ce robot possède de grandes capacités en rotation, soient $\pm 90^\circ$ en inclinaison et en torsion. Ce robot est conçu de manière à ce qu'il soit rétrocommandable et qu'il ait une faible impédance et une faible inertie. Il ne possède aucun réducteur aux actionneurs.

Le concept du robot présenté dans ce document est modulaire. En effet, l'architecture des jambes et de la plateforme peuvent différer légèrement afin d'adapter le robot à une application spécifique. Dans le cas présent, des jambes hybrides et une plateforme plane sont choisies pour des fins de simplicité et de maximisation de l'espace de travail. Dans ce document, les modèles cinématiques et dynamiques du robot, de la plateforme et des jambes sont présentés. Les étapes de conception mécanique ainsi qu'une étude de la sensibilité cinématique du robot sont également détaillés.

Abstract

Collaborative robots become present on production lines in factories. Their easiness of installation and use and their safety features make them more attractive. Serial collaborative robots are the most popular in the industry. Their main advantage is their large workspace. However, the inertia of the members of serial robots is the main limitation of the dynamic performances. Parallel robots are more attractive on this aspect. The main advantage of parallel robots is that their actuators are located near the base, decreasing the inertia compared to serial robots. However, there are few parallel collaborative robots on the market.

In this Master's thesis, a novel concept of a redundant hybrid robot used for low impedance physical human-robot interaction (pHRI) applications is presented. This robot has a 3-[R(RR-RRR)SR] architecture and (6+3) degrees of freedom (dof). Redundancy allows to get a larger workspace especially in rotation (compared to a non-redundant robot with the same architecture) by avoiding some type II singularity configurations in the workspace. The robot has three 3-dof hybrid legs having three actuators, and the platform, which is a 3-dof parallel planar mechanism. The three redundant degrees of freedom are used at the platform to actuate a gripper from the leg actuators. The robot has a large rotational workspace, namely $> \pm 90^\circ$ in tilt and torsion. This robot is designed to be backdrivable, with a low impedance and a low inertia. The actuators have no gearbox.

The robot presented in this document is modular. Indeed, the leg architecture and the platform may differ depending on the application. In the present case, hybrid legs and planar platform are chosen for simplicity and workspace maximisation purposes. In this document, kinematic and dynamic models of the robot are presented. The main mechanical design steps and a study of the kinetic sensitivity are also detailed.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Remerciements	xi
Introduction	1
1 Modèle cinématique général du robot et de la plateforme	6
1.1 Développement des équations de cinématique	6
1.2 Équations de vitesse et matrices jacobienne	10
1.3 Analyse des singularités	13
1.4 Conclusion	14
2 Modèle cinématique des jambes	15
2.1 Description de l'architecture	15
2.2 Développement des équations de cinématique	16
2.3 Analyse des singularités	22
2.4 Modèle cinématique simplifié : le parallélogramme	23
2.5 Conclusion	24
3 Étude de l'espace de travail du robot	25
3.1 Modèle d'analyse	25
3.2 Espace de travail en translation	26
3.3 Espace de travail en rotation	26
3.4 Optimisation de l'espace de travail en rotation	30
3.5 Conclusion	36
4 Conception mécanique du robot	38
4.1 Exigences techniques	38
4.2 Concept mécanique générale du robot	39
4.3 Conception mécanique des jambes	39
4.4 Conception mécanique de la plateforme	45

4.5	Conception mécanique du robot	49
4.6	Conclusion	51
5	Étude de la sensibilité cinématique du robot	52
5.1	Sensibilité du mécanisme d'ouverture des doigts	52
5.2	Sensibilité de la plateforme	53
5.3	Sensibilité d'une jambe	56
5.4	Sensibilité du robot	59
5.5	Conclusion	62
6	Modèle dynamique du robot	68
6.1	Modélisation de la plateforme avec la méthode de Newton	68
6.2	Modélisation dynamique des jambes avec la méthode de Lagrange	72
6.3	Combinaison des modèles dynamiques	81
6.4	Conclusion	85
	Conclusion	86
A	Développement des dérivées partielles pour le PGD de la plateforme	89
B	Algorithme d'évaluation de la distance entre deux membrures	90
B.1	Notions théoriques	90
B.2	Configurations	92
B.3	Résumé	94
C	Spécifications des moteurs utilisés	96
D	Poids, inerties et données géométriques des jambes	99
D.1	Données géométriques et poids	99
D.2	Inerties et positions des centres de masse pour le modèle dynamique des jambes	100
E	Poids et données géométriques de la plateforme	103
F	Définition des coefficients pour la dérivation du modèle dynamique d'une jambe	106
	Bibliographie	110

Liste des tableaux

3.1	Dimensions du robot simulé, pour l'évaluation de l'espace de travail en rotation basée sur le mouvement de l'effecteur en torsion	31
3.2	Dimensions du robot simulé, pour l'évaluation de l'espace de travail en rotation basée sur le mouvement de l'effecteur en inclinaison	33
3.3	Dimensions du robot pour l'évaluation de l'effet des articulations sphériques	35
4.1	Angles β_i selon l'ouverture des doigts	48
D.1	Paramètres géométriques du robot	99
D.2	Masse des composants mobiles du robot	100
D.3	Inerties et positions des centres de masse des composants mobiles du robot	101
E.1	Masse et grandeurs géométriques des parties supportant les doigts des mécanismes à quatre barres	105

Liste des figures

0.1	Illustration schématique de l'architecture du robot.	3
0.2	Illustration d'une application industrielle du robot.	4
1.1	Modélisation cinématique générale du robot.	7
1.2	Exemple de configuration singulière de type II, lorsque les membrures $i4$ sont parallèles.	13
1.3	Exemple de configuration singulière de type II, lorsque la direction des membrures $i4$ s'intersectent en un point.	14
1.4	Exemple de configuration singulière de type II, lorsque les points S_i forment une seule droite.	14
2.1	Schémas sommaire et détaillé d'une jambe du robot.	16
2.2	Solutions possibles pour le PGD du mécanisme plan.	18
2.3	Intersections des cercles pour la résolution du PGI.	20
2.4	Représentation de l'architecture simplifié d'une jambe, avec ses données géométriques et ses coordonnées articulaires.	23
3.1	Représentation graphique simplifiée du robot dans MATLAB pour l'analyse de l'espace de travail.	26
3.2	Représentation d'un point cartésien en coordonnées cylindriques.	27
3.3	Plateforme avec le repère mobile et les angles de rotation.	27
3.4	Représentation schématique d'une articulation sphérique.	29
3.5	Représentation d'un point q_i ainsi que le volume du segment de cylindre associé.	30
3.6	Illustration de l'espace de travail pour le robot #1 présenté au Tableau 3.1, basé sur le mouvement en torsion de l'effecteur. Le volume de l'espace de travail est estimé à $2.026 \times 10^5 \text{ mm}^3$	32
3.7	Volume de l'espace de travail en rotation basé sur le mouvement en torsion de l'effecteur en fonction de R_p et R_b , lorsque les paramètres l_2 et l_3 sont de 100 mm	32
3.8	Illustration de l'espace de travail en rotation pour le cas de simulation # 2, basé sur le mouvement en inclinaison de l'effecteur. Le volume de l'espace de travail est estimé à $3.1259 \times 10^5 \text{ mm}^3$	33
3.9	Volume de l'espace de travail en rotation basé sur le mouvement en inclinaison de l'effecteur en fonction de R_p et R_b , lorsque les paramètres l_2 et l_3 sont de 100 mm	34
3.10	Volume de l'espace de travail en rotation basé sur le mouvement en torsion et en inclinaison de l'effecteur en fonction de R_p et R_b , lorsque les paramètres l_2 et l_3 sont de 100 mm	35

3.11	Volume de l'espace de travail en rotation en fonction de l'angle minimal permis γ_i aux articulations sphériques S_i , basé sur les trajectoires d'inclinaison et de torsion de l'effecteur lorsque les paramètres géométriques sont ceux du Tableau 3.3.	36
4.1	Robot représenté dans le logiciel de CAO.	39
4.2	Prototype du robot.	40
4.3	Vue de la jambe représentée dans le logiciel de CAO.	41
4.4	Interférences mécaniques entre les membrures afin d'éviter le parallélisme des membrures.	42
4.5	Schéma des masses du mécanisme plan.	43
4.6	Équilibrage statique avec une seule masse.	44
4.7	Équilibrage statique avec une seule masse pour le degré de liberté θ_{i2}	45
4.8	Schéma de la plateforme avec les membrures $i4$	46
4.9	Schéma de la plateforme avec les mécanismes à quatre barres afin de remplacer les membrures $i4$ et les articulations R_{i4}	47
4.10	Plateforme représentée dans le logiciel de CAO.	48
4.11	Mécanisme compliant pour la saisie d'objets.	49
4.12	Espace de travail en rotation du robot conçu, le volume de cet espace fait $8.656 \times 10^6 \text{ mm}^3$	50
5.1	Sensibilité σ_{δ_i} en fonction de l'angle β_i	53
5.2	Indices de sensibilité de la position, de l'orientation et des angles β_i selon la variation d'angle β_i , $i = 1, 2$ ou 3 , lorsque les autres angles sont de 90°	56
5.3	Modèle cinématique utilisé pour l'étude de sensibilité des jambes.	57
5.4	Indice de sensibilité de la jambe pour les trajectoires longitudinales et latérales.	58
5.5	Indices de sensibilité du robot pour une trajectoire verticale de l'effecteur le long de l'axe z ($x = y = 0$), à orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ et aux valeurs de $\beta_i = 90^\circ$ ($\delta_1 = \delta_3 = 12.5 \text{ mm}$).	62
5.6	Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et à orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$, pour une variation de δ_1 entre 0 et 25 mm	63
5.7	Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et à orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$, pour une variation de δ_3 entre 0 et 25 mm	64
5.8	Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et des valeurs de δ_i et β_2 constantes, pour un mouvement de torsion de -90 à $+90^\circ$	65
5.9	Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et des valeurs de δ_i et β_2 constantes, pour un mouvement d'inclinaison par rapport à l'axe x de -90 à $+90^\circ$	66
5.10	Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et des valeurs de δ_i et β_2 constantes, pour un mouvement d'inclinaison par rapport à l'axe y de -90 à $+90^\circ$	67
6.1	Corps de la plateforme	69
6.2	DCL des corps de la plateforme	69
6.3	Corps et repères de la jambe.	74
6.4	Configuration à l'étude, soit lorsque $(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}) = (0^\circ, 45^\circ, 135^\circ)$	82

6.5	Couples articulaires dynamique, statique et total maximaux en fonction de la fréquence f d'actionnement selon chaque articulation, pour une oscillation de θ_{i1} .	83
6.6	Couples articulaires dynamique, statique et total maximaux en fonction de la fréquence f d'actionnement selon chaque articulation, pour une oscillation de θ_{i2} .	83
6.7	Couples articulaires dynamique, statique et total maximaux en fonction de la fréquence f d'actionnement selon chaque articulation, pour une oscillation de θ_{i3} .	83
B.1	Segments de droites dans l'espace \mathbb{R}^3 .	90
B.2	Types de parallélisme entre deux segments.	92
B.3	Configurations non-parallèles.	93
B.4	Algorithme d'évaluation de la distance entre deux segments.	95
D.1	Schéma d'une jambe sur le robot avec la base et l'effecteur ainsi que les grandeurs géométriques et les poids	100
E.1	Schéma du centre de masse des coprs de la plateforme	104

Remerciements

Une maîtrise c'est très passionnant et assez facile à réaliser... Jusqu'au moment où l'on doit rédiger ! L'exercice de rédaction constitue une synthèse des informations importantes récoltées durant la réalisation du projet. Plusieurs erreurs et imprécisions y sont décelées et corrigées. Cet exercice permet également de faire une réflexion et une remise en question de plusieurs aspects du projet et de sa vie en général. Ce mémoire est le fruit d'un travail laborieux qui n'aurait pas été achevé sans l'aide de collaborateurs que je tiens à remercier.

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche et également directeur du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval, le professeur Clément Gosselin, qui possède une expertise reconnue mondialement dans le domaine de la robotique et qui a su m'en faire bénéficier en m'apportant l'aide nécessaire et en me guidant avec brio dans les étapes importantes lors de la réalisation du projet. La grande disponibilité de ce dernier et ses conseils judicieux y sont pour beaucoup.

J'aimerais également remercier Thierry Laliberté, professionnel de recherche au Laboratoire dont la contribution fut indispensable. Son expérience, sa rigueur et ses excellentes idées ont été plus qu'utiles lors des étapes de conception mécanique du projet. Sans son apport au projet, la qualité du design du prototype n'aurait pas été celle que l'on peut apprécier à ce jour. Merci à Simon Foucault, également professionnel de recherche au Laboratoire pour son support dans le projet, notamment lors des étapes de contrôle du robot. Merci également à Kefei Wen et Sy NGuyen pour m'avoir aidé à parfaire les équations présentées dans ce document. J'aimerais également remercier le personnel de l'atelier de génie mécanique dont le talent et l'expertise ont assuré la qualité des pièces mécaniques et électroniques du robot. Merci également aux autres membres du laboratoire de robotique pour leur support, vous êtes la meilleure gang !

Je ne passerai pas sous le silence le soutien incommensurable que m'apportent les membres de ma famille. Merci à papa et à maman qui m'ont supporté autant psychologiquement que physiologiquement lors de mes études. Leurs encouragements m'ont donné un sérieux coup de main lors de mes moments de découragement. L'éducation et l'accès aux études est le plus bel héritage que des parents peuvent léguer à leurs enfants. Merci également à ma copine et sa famille qui m'ont épaulé tout au long du projet. Le simple fait d'être là m'a permis de me sentir plus en confiance lors des moments cruciaux.

Introduction

Mise en contexte

Dans un contexte de pénurie de main d'œuvre spécialisée, l'utilisation de robots afin réaliser des tâches simples demeure une avenue prometteuse. Les tâches plus ardues demandant une motricité fine et impliquant une prise de décision complexe seraient confiées aux humains. Ce compromis semble optimal afin d'exploiter le potentiel humain à son maximum, laissant ainsi les tâches répétitives et aliénantes aux robots. Cependant, l'utilisation de robots en présence d'humains implique la mise en place de barrières de sécurité afin d'éviter les collisions potentiellement dangereuses entre les humains et les robots. En effet, les robots conventionnels sont considérés comme étant dangereux et insensibles à leur environnement. La ségrégation entre les humains et les robots ne peut pas nécessairement mener à une productivité optimale.

Afin de pallier ce problème, le concept de collaboration humain robot commence de plus en plus à faire son entrée sur les planchers de production. La collaboration humain robot se définit par l'interaction entre l'humain et les robots dans le même espace de travail. Dans le contexte d'une entreprise manufacturière, de plus en plus de cellules robotisées impliquant des humains et des robots sont mises en place afin d'accroître la productivité [22][14]. Les robots collaboratifs sont sécuritaires et comportent des capteurs détectant les interactions produites par l'environnement sur celui-ci. Ces capteurs peuvent être situés aux articulations ou sur ses membrures. Un exemple de robot collaboratif utilisant des capteurs aux articulations sont les robots de l'entreprise Universal Robots (UR) qui utilisent des capteurs de couples aux actionneurs. Pour d'autres robots, les interactions avec l'environnement sont détectées en mesurant le courant électrique aux actionneurs. Un exemple de robot utilisant des capteurs sur ses membrures est celui présenté par Boucher et al. [3]. Ce dernier utilise des capteurs de position et d'orientation fixés à des coquilles recouvrant les membrures du robot. Un autre exemple de dispositif de détection est une peau appliquée également sur les membrures détectant les contacts avec l'environnement [7].

Puisqu'ils sont en présence d'êtres humains, les robots collaboratifs n'ont pas besoin nécessai-

rement d'actionneurs déployant de grandes puissances. Un exemple de robot comme tel est l'assistant ergonomique pour transporter de lourdes charges, développé par le Laboratoire de Robotique de l'Université Laval en collaboration avec le fabricant automobile General Motors [9]. Dans cette application, la lourde charge est compensée par des contrepoids. Le déplacement de cette charge est effectué par le robot qui nécessite des actionneurs dont la puissance permet seulement de déplacer l'objet avec précision en combattant seulement son inertie. Un autre exemple de robot utilisant une faible puissance est le robot JACO [4] utilisé en réadaptation physique. Ce robot sériel se déplaçant à faible vitesse est utile pour les personnes à mobilité réduite pour effectuer les tâches du quotidien tel que prendre un verre d'eau, ouvrir une porte, etc.

Dans la littérature, la plupart des robots collaboratifs proposés ont des architectures sérielles. Il existe peu de robots parallèles collaboratifs. Le projet sur lequel porte ce mémoire est la conception, le prototypage et l'analyse d'un robot collaboratif ayant une architecture hybride (comportant des chaînes cinématiques ouvertes et d'autres fermées). Ce robot possède plusieurs applications telles que des tâches industrielles, une interface haptique, etc.. Le principal défi qui se pose est en lien avec la présence de nombreuses configurations singulières dans l'espace de travail. Pour contrer ceci, plusieurs auteurs ont développé des interfaces haptiques à 6 ddl utilisant des algorithmes d'actionnement permettant d'éviter ces configurations, [15]. Une autre façon d'éviter les configurations singulières est d'utiliser la redondance dans le mécanisme parallèle, ce qui est le cas dans le présent mémoire. L'intérêt de l'utilisation de la redondance dans les robots parallèles est notamment l'élimination de la plupart des configurations singulières de type II. L'espace de travail en translation et notamment en rotation s'en trouvent ainsi agrandis. Plusieurs travaux de conception de mécanismes parallèles redondants à 3 et 4 ddl existent dans la littérature. Par exemple, Landuré [17] propose un robot parallèle sphérique qui utilise la redondance afin d'effectuer de grandes rotations. Ce mécanisme à $(3+1)$ ddl est actionné par quatre moteurs. Un autre exemple proposé par Gosselin et al. [10] consiste en un mécanisme plan à $(3+1)$ ddl redondant effectuant des déplacements ainsi que des rotations par rapport à un axe perpendiculaire au plan. Dans ce cas, la redondance dans le mécanisme permet de réaliser des mouvements de rotation illimités.

Dans le cas présent, le mécanisme redondant développé est spatial et possède $(6+3)$ ddl. Grâce à la redondance, les espaces de travail en rotation et en translation sont nettement augmentés, comparativement à ceux d'un robot non-redondant à 6 ddl d'architecture semblable, par exemple celui présenté par Monsarrat et al. [21]. Le robot développé dans le présent document possède une base fixe et une plateforme mobile. Cette dernière est liée à la base par trois jambes constituées de robots à 3 ddl actionnés par trois moteurs. La plateforme mobile est un mécanisme à trois degrés de liberté reliée aux jambes avec trois articulations sphériques.

La position et l'orientation de la plateforme sont déterminés par la combinaison des positions de l'extrémité de chacune des jambes. La Fig. 0.1 illustre le robot à l'étude. La plateforme est constituée d'une partie principale, sur laquelle sont fixées trois membrures avec des liaisons rotoïdes. Ces trois membrures constituent les trois degrés de liberté redondants. Plus loin dans ce mémoire, il est expliqué que ceux-ci sont utilisés pour opérer un préhenseur. Ce préhenseur est donc actionné par les moteurs aux jambes. Dans ce mémoire, il est montré que

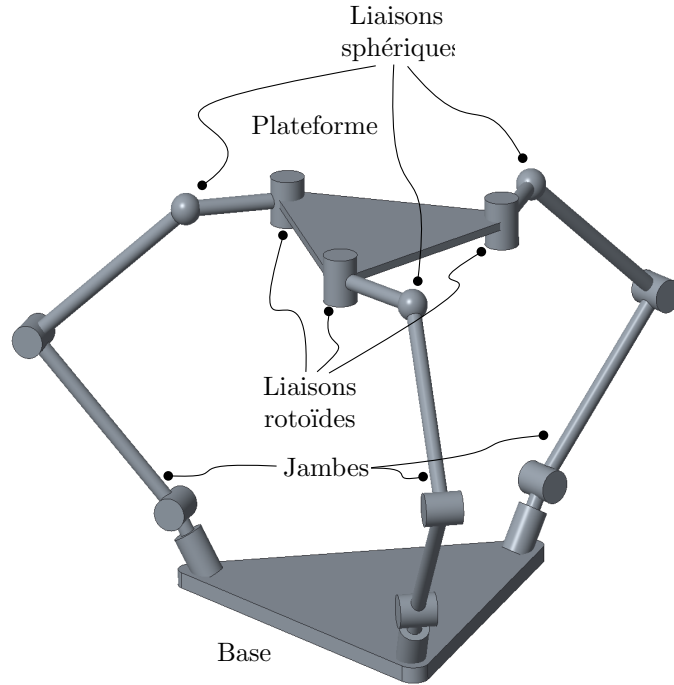


FIGURE 0.1 – Illustration schématique de l'architecture du robot.

les configurations singulières du robot deviennent celles qui sont propres à l'architecture de chacune de ses parties. L'analyse des singularités du robot devient donc plus facile à réaliser. Les singularités de type I sont amenées par celles des jambes tandis que les singularités de type II sont amenées par celles du mécanisme de l'effecteur. Il est possible d'éviter quelques-unes de ces singularités en adaptant la conception mécanique des jambes et de la plateforme en conséquence. Ces étapes sont également développées dans ce document.

Le robot collaboratif étudié ici peut aussi servir d'interface haptique. La fonction première d'une interface haptique est de faire ressentir à l'utilisateur différentes sensations tactiles liées à un environnement virtuel simulé en déployant différentes impédances mécaniques. Les différentes sensations ressenties par l'utilisateur peuvent être des contacts francs avec des objets virtuels (impédance mécanique élevée) ou un déplacement libre de l'effecteur dans l'espace (impédance mécanique faible) [6]. Plusieurs applications dans différents domaines utilisent les interfaces haptiques, par exemple pour de la conception assistée par ordinateur ou pour des

fins de simulation pour l'entraînement médical et militaire [19]. Dans la littérature, l'haptique est principalement implantée avec des mécanismes parallèles non-redondants. Par exemple, Tsumaki et al. [24] proposent une interface parallèle à 6 ddl qui se présente comme étant plus évoluée que l'interface haptique parallèle PHANTOM à 3 ddl [18]. D'autres auteurs proposent des interfaces haptiques développées sur des versions modifiées du robot DELTA [13][8]. Des interfaces haptiques redondantes sont également traitées dans la littérature, par exemple le robot DELTA-4 [1] qui consiste en un robot parallèle à 3 ddl fonctionnant avec 4 actionneurs et qui possède un grand espace de travail ou le ViSHARD10 [25], un robot sériel à 10 ddl. Dans la catégorie des interfaces haptiques parallèles, les mécanismes redondants à plus de 3 ddl sont rares. Il est donc intéressant, dans le cadre du présent projet, d'exploiter la redondance appliquée à une interface haptique parallèle à 6 ddl et plus.

Les applications d'une interface haptique ayant la forme de ce robot sont multiples. Un exemple d'application industrielle est illustré à la Fig. 0.2. L'interface haptique peut être montée sur

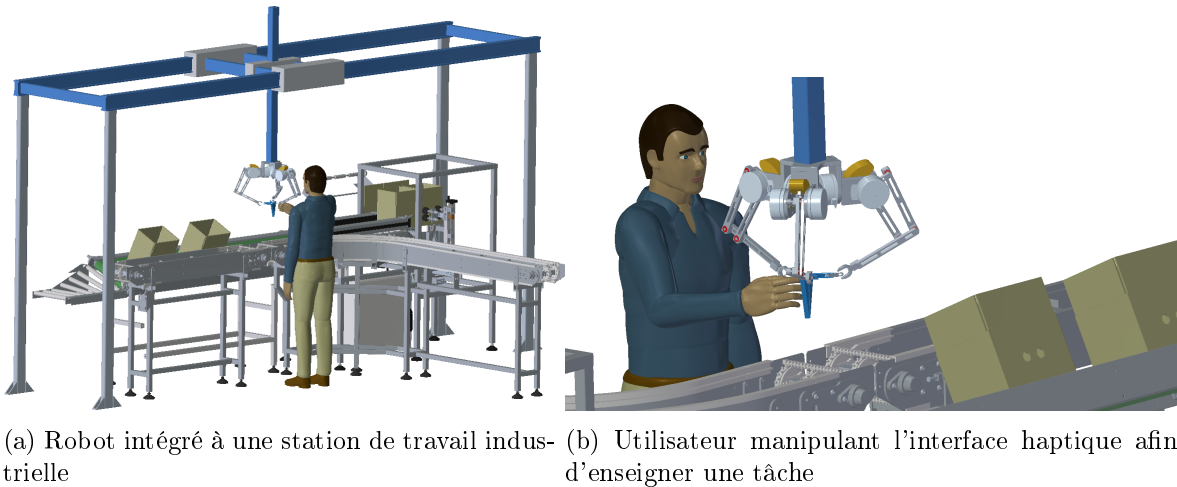


FIGURE 0.2 – Illustration d'une application industrielle du robot.

un robot portique tel qu'illustré à la Fig. 0.2a. Des trajectoires peuvent être enseignées au robot par un utilisateur, tel qu'illustré à la Fig. 0.2b. Le robot présenté dans ce mémoire est collaboratif, et conçu de manière à ce qu'il soit sécuritaire pour les utilisateurs situés dans son espace de travail.

Les principaux objectifs du projet rapporté dans le présent mémoire sont l'analyse cinématique du concept de robot hybride redondant à $(6+3)$ ddl, la conception mécanique et la fabrication d'un prototype, ainsi que la préparation des équations nécessaires en vue des étapes d'élaboration de la stratégie de contrôle en impédance du robot. Pour y en arriver, les équations de cinématique de chacun des composants du robot sont développées. Par la suite, les pro-

blèmes géométriques ainsi que les équations de vitesse sont définis. Les principales équations de dynamique du robot sont également développées.

Organisation du mémoire

Dans un premier lieu, une description générale de l'architecture du robot ainsi que de la plateforme est effectuée au chapitre 1. Dans ce dernier, les équations des problèmes géométriques direct et inverse sont détaillées. De plus, les équations de vitesse sont données et une étude des configurations singulières est effectuée. Au chapitre 2, un modèle cinématique plus spécifique des jambes est détaillé. Les équations des problèmes géométriques direct et inverse sont développées. De plus, les équations de vitesse sont données et une étude des configurations singulières des jambes est effectuée. Par la suite, au chapitre 3, à partir du modèle développé au premier chapitre, une optimisation des dimensions géométriques du robot est effectuée afin de maximiser l'espace de travail du robot en translation et en orientation. Au chapitre 4, un tour d'horizon concernant les principaux aspects de la conception mécanique du robot est effectué. Celle-ci est effectuée de manière à répondre aux exigences techniques d'élaboration d'un robot collaboratif. Par la suite, au chapitre 5, une étude de la sensibilité cinématique des éléments du robot, soient des jambes, de l'effecteur et du robot en général est effectuée. Finalement, les modèles statiques et dynamiques de la plateforme et des jambes sont développés au chapitre 6.

Chapitre 1

Modèle cinématique général du robot et de la plateforme

Dans ce chapitre, la cinématique générale du robot et de la plateforme est présentée. Les équations de contraintes géométriques sont données et dérivées afin d'obtenir les équations des problèmes géométriques direct et inverse. Les équations de vitesse sont également développées et une analyse des configurations singulières est développée.

1.1 Développement des équations de cinématique

Dans cette section, la modélisation cinématique du robot est présentée. Pour des fins d'illustration, une seule jambe ainsi que des parties tronquées de la base et de la plateforme sont illustrées à la Figure 1.1. Le développement mathématique de la cinématique du robot et de la plateforme dans le présent chapitre ne dépend pas directement de l'architecture des jambes. Celle-ci est illustrée à titre indicatif, possédant 3 ddl. L'origine du repère fixe O est défini par rapport au centre de la base. L'origine du repère mobile O' est défini par rapport au centre de l'effecteur, et la position du point O' par rapport au point O est donnée par le vecteur \mathbf{p} . L'indice i réfère à la $i^{\text{ème}}$ jambe ($i = 1, 2, 3$). Le robot possède trois jambes possédant chacune trois actionneurs, totalisant ainsi neuf actionneurs. L'axe de rotation de l'articulation passive R_{i4} est perpendiculaire à la plateforme (effecteur). Ces articulations constituent les degrés de liberté redondants du robot. Les angles β_i décrivent les degrés de liberté redondants. Ceux-ci sont définis comme étant l'orientation des membrures $i4$ (de longueur l_4) par rapport à la plateforme. Les liaisons entre les jambes et la plateforme sont des articulations sphériques S_i .

Afin de modéliser le robot, deux équations de contraintes géométriques sont établies. L'une d'entre elles définit la longueur de la membrure $i4$ et s'écrit comme suit :

$$(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_i)^T(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_i) = l_4^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

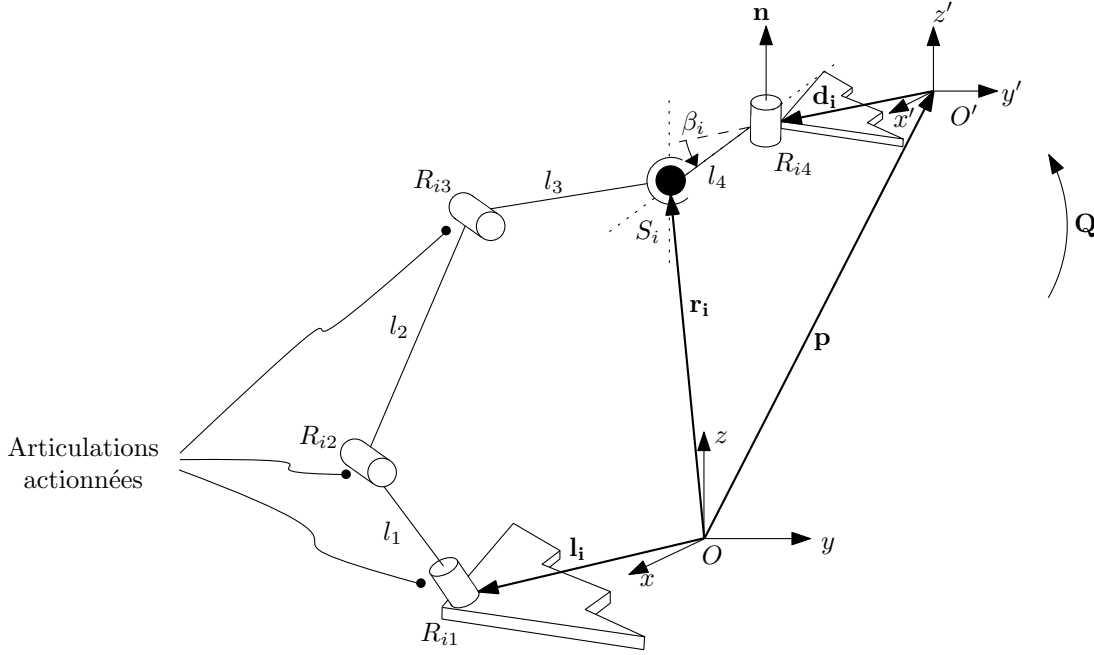


FIGURE 1.1 – Modélisation cinématique générale du robot.

Cette équation prend en considération la position \mathbf{p} et l'orientation \mathbf{Q} de la plateforme par rapport au repère fixe. Les positions des articulations R_{i4} par rapport à l'origine du repère mobile sont exprimées par les vecteurs \mathbf{d}_i . Les angles β_i sont définis par rapport à ces directions. Les vecteurs \mathbf{r}_i définissent les positions des articulations sphériques S_i par rapport au repère fixe. Afin de contraindre les axes de rotation des articulations R_{i4} comme étant normaux à la plateforme, une deuxième équation de contrainte géométrique est exprimée ainsi :

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

où \mathbf{n} est un vecteur directeur unitaire dans la direction de l'axe z' du repère mobile O' . À partir de ces équations, les problèmes géométriques direct et inverse du robot général sont établis.

1.1.1 Problème géométrique inverse

Le problème géométrique inverse (PGI) du robot se résout en connaissant la position et l'orientation de la plateforme. À partir de ces données, il est possible de déterminer les positions des articulations sphériques, par rapport au repère fixe, soient les vecteurs \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, 3$. À partir de ces vecteurs et des dimensions de la base, il est ainsi possible de résoudre le PGI pour chaque jambe.

La position des articulations sphériques dans l'espace dépend des vecteurs \mathbf{d}_i , la longueur des membres $i4$, soit l_4 , la position \mathbf{p} , l'orientation \mathbf{Q} de la plateforme et les degrés de liberté

redondants, soient les angles β_i . La position cartésienne de chaque articulation sphérique S_i , exprimée dans le repère fixe s'écrit comme suit :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} \mathbf{Q}'_{\beta_i} \right) \mathbf{d}_i \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité de dimension 3×3 et \mathbf{Q}'_{β_i} est une matrice de rotation de la membrure $i4$ par rapport à l'axe z' . Cette dernière s'écrit comme suit :

$$\mathbf{Q}'_{\beta_i} = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & -\sin \beta_i & 0 \\ \sin \beta_i & \cos \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Le calcul des vecteurs \mathbf{r}_i est direct et se fait de manière analytique. En connaissant ainsi ces vecteurs position, le PGI de chaque jambe peut être calculé facilement. Le calcul dépend de l'architecture des jambes. Dans le présent mémoire, une architecture de jambe hybride est utilisée. Celle-ci est décrite au Chapitre 2.

1.1.2 Problème géométrique direct

Le problème géométrique direct (PGD) du robot se résout en connaissant le vecteur position \mathbf{r}_i de chaque articulation sphérique S_i . À partir de ces informations, il est possible de déterminer la position \mathbf{p} , l'orientation de la plateforme \mathbf{Q} et les angles β_i . La résolution du PGD de la plateforme s'apparente à celui d'un manipulateur parallèle plan à 3 ddl. Celle-ci peut se faire analytiquement [11], impliquant la résolution d'un polynôme de degré 6. La résolution analytique de ce problème étant laborieuse, une approche numérique dans l'espace tridimensionnel est préconisée.

Afin de définir le problème numérique, considérons l'équation (1.1) fixant la longueur l_4 pour chaque jambe, réécrite comme suit :

$$(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_i) - l_4^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

dans laquelle la matrice de rotation \mathbf{Q} est explicitée comme suit :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Puisque le vecteur \mathbf{q}_z est parallèle au vecteur \mathbf{n} , on a les équations suivantes qui définissent l'orthogonalité entre les axes de rotation des membrures $i4$ et la plateforme :

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{p})^T \mathbf{q}_z = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7)$$

Finalement, les vecteurs \mathbf{q}_x , \mathbf{q}_y et \mathbf{q}_z expriment la direction des axes du repère mobile, par rapport au repère fixe. Ces vecteurs étant orthogonaux, considérons l'équation de contrainte suivante :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

où $\mathbf{0}$ est la matrice nulle de dimension 3×3 . Le système composé des équations (1.5), (1.7) et (1.8) se résout numériquement, avec la méthode de Newton-Raphson. Ce système possède 11 équations scalaires et 9 inconnues à déterminer. Ces dernières sont les composantes des vecteurs \mathbf{p} , \mathbf{q}_x et \mathbf{q}_y . Le vecteur des inconnus est défini comme suit :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & \mathbf{q}_x^T & \mathbf{q}_y^T \end{bmatrix}^T. \quad (1.9)$$

Parmi les 11 équations du système, trois sont issues de l'équation (1.5), trois proviennent de l'équation (1.7) et cinq apparaissent en considérant l'équation (1.8), étant donné que $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ est symétrique et que l'élément (3,3) ne peut être utilisé puisque \mathbf{q}_z est déterminé a priori.

En connaissant les vecteurs \mathbf{r}_i et sachant que les points S_i forment un plan, le vecteur \mathbf{q}_z est facilement calculable et n'est donc pas un inconnu au problème. En développant les équations de contraintes (1.5), (1.7) et (1.8), on obtient le système d'équations écrit sous la forme scalaire comme suit :

$$f_1 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_1 - \mathbf{r}_1)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_1 - \mathbf{r}_1) - l_4^2 \quad (1.10)$$

$$f_2 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_2 - \mathbf{r}_2)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_2 - \mathbf{r}_2) - l_4^2 \quad (1.11)$$

$$f_3 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_3 - \mathbf{r}_3)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}_3 - \mathbf{r}_3) - l_4^2 \quad (1.12)$$

$$f_4 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{p})^T \mathbf{q}_z \quad (1.13)$$

$$f_5 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{p})^T \mathbf{q}_z \quad (1.14)$$

$$f_6 = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{p})^T \mathbf{q}_z \quad (1.15)$$

$$f_7 = \mathbf{q}_x^T \mathbf{q}_x - 1 \quad (1.16)$$

$$f_8 = \mathbf{q}_y^T \mathbf{q}_y - 1 \quad (1.17)$$

$$f_9 = \mathbf{q}_x^T \mathbf{q}_y \quad (1.18)$$

$$f_{10} = \mathbf{q}_x^T \mathbf{q}_z \quad (1.19)$$

$$f_{11} = \mathbf{q}_y^T \mathbf{q}_z \quad (1.20)$$

Ces équations forment le vecteur $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{11} \end{bmatrix}^T$. Le vecteur \mathbf{q}_z est déterminé en considérant deux vecteurs inclus dans le plan de l'effecteur, reliant les points S_i , soient,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1. \quad (1.22)$$

Par le produit vectoriel, le vecteur \mathbf{q}_z se détermine comme suit :

$$\mathbf{q}_z = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{\|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\|}. \quad (1.23)$$

Afin de résoudre le système d'équations, considérons l'expansion de Taylor d'ordre 1 :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (1.24)$$

où la matrice \mathbf{F} est la dérivée de \mathbf{f} par rapport au vecteur \mathbf{x} qui s'exprime comme suit :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_x^T} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_y^T} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}^T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{q}_x^T} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{q}_y^T} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}^T} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{q}_x^T} & \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{q}_y^T} & \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{p}^T} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{q}_x^T} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{q}_y^T} & \frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{p}^T} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Puisque $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, la résolution de l'équation (1.24) mène à l'algorithme de Newton dont un pas de calcul est présenté à l'équation suivante :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_0 - \mathbf{F}^I \mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \quad (1.26)$$

Le terme \mathbf{x}_e représente le vecteur solution estimé. Le terme \mathbf{F}^I est l'inverse généralisée de la matrice \mathbf{F} et \mathbf{x}_0 est le vecteur solution approchée de \mathbf{x} . Le détail des dérivées partielles de l'équation (1.25) est présenté à l'annexe A. Il est à noter que les équations (1.14) et (1.15) issues de l'équation de contrainte de coplanarité (1.7) sont équivalentes à l'équation (1.13). L'ajout de ces dernières mène à un système d'équations surcontraint. Cela favorise la stabilité et la convergence de l'algorithme utilisé. Lorsque le critère de convergence est satisfait, la solution du PGD devient donc celle estimée par la méthode numérique, tel que,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e. \quad (1.27)$$

1.2 Équations de vitesse et matrices jacobiennes

Dans cette section, les équations de vitesse et les matrices jacobiennes du robot et de la plateforme sont développées. Celles-ci sont obtenues en dérivant les équations de contraintes géométriques (1.1) et (1.2) par rapport au temps. L'équation (1.1) est dérivée par rapport au temps, on obtient,

$$\mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{d}_i = \mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.28)$$

où

$$\mathbf{a}_{i4} = \mathbf{p} + \mathbf{Q} \mathbf{d}_i - \mathbf{r}_i. \quad (1.29)$$

Le second terme à gauche de l'égalité de l'équation (1.28) est développé comme suit :

$$\mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{d}_i = \mathbf{a}_{i4}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{d}_i = \mathbf{a}_{i4}^T [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q} \mathbf{d}_i)] = [(\mathbf{Q} \mathbf{d}_i) \times \mathbf{a}_{i4}]^T \boldsymbol{\omega} \quad (1.30)$$

où le terme $\boldsymbol{\omega}$ représente le vecteur de vitesse angulaire de la plateforme par rapport aux coordonnées du repère fixe, et $\boldsymbol{\Omega}$ représente la matrice de vitesse angulaire du mouvement définie tel que,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T. \quad (1.31)$$

De plus, on a que la relation entre les vitesses articulaires et la vitesse cartésienne du point S_i s'écrit comme suit :

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{M}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (1.32)$$

où \mathbf{M}_i est la matrice jacobienne de la $i^{\text{ème}}$ jambe et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$ est le vecteur des vitesses articulaires de la $i^{\text{ème}}$ jambe tel que $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = [\dot{\theta}_{i1} \ \dot{\theta}_{i2} \ \dot{\theta}_{i3}]^T$. Le côté droit de l'égalité (1.28) est réécrit comme suit :

$$\mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{a}_{i4}^T (\mathbf{M}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i) = \mathbf{K}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i. \quad (1.33)$$

Le terme \mathbf{K}_i est défini tel que,

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{a}_{i4}^T \mathbf{M}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.34)$$

Les équations (1.28), (1.30) et (1.33) sont combinées, et le système d'équations linéaires suivant est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{14}^T & [(\mathbf{Qd}_1) \times \mathbf{a}_{14}]^T \\ \mathbf{a}_{24}^T & [(\mathbf{Qd}_2) \times \mathbf{a}_{24}]^T \\ \mathbf{a}_{34}^T & [(\mathbf{Qd}_3) \times \mathbf{a}_{34}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.35)$$

où $\mathbf{0}$ est un vecteur nul tridimensionnel soit $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ est un vecteur contenant toutes les coordonnées articulaires de chacune des trois jambes soit, $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1^T \ \dot{\theta}_2^T \ \dot{\theta}_3^T]^T$.

L'équation de contrainte (1.2) est dérivée par rapport au temps, on obtient,

$$\dot{\mathbf{n}}^T \mathbf{a}_{i4} + \mathbf{n}^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{d}_i - \dot{\mathbf{r}}_i) = 0 \quad (1.36)$$

qui est réécrite sous la forme de l'équation suivante :

$$\mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{d}_i = \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.37)$$

dans laquelle

$$\mathbf{n} = \mathbf{Q}[z']_{O'} \quad (1.38)$$

où le vecteur $[z']_{O'} = [0 \ 0 \ 1]^T$ représente l'axe z' du repère mobile, exprimé dans ce repère. On a donc que,

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{Q}}[z']_{O'} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}. \quad (1.39)$$

Connaissant la relation (1.39) et avec un développement similaire à celui utilisé pour exprimer l'équation (1.30), le premier terme de l'équation (1.37) est réécrit comme suit :

$$\mathbf{a}_{i4}^T \dot{\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \boldsymbol{\omega} \quad (1.40)$$

ainsi que le troisième terme comme suit :

$$\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{d}_i = [(\mathbf{Qd}_i) \times \mathbf{n}]^T \boldsymbol{\omega}. \quad (1.41)$$

En additionnant le premier et le troisième terme de l'équation (1.37), soient les équations (1.40) et (1.41), on obtient l'équation suivante :

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \boldsymbol{\omega} + [(\mathbf{Qd}_i) \times \mathbf{n}]^T \boldsymbol{\omega} = [(\mathbf{Qd}_i - \mathbf{a}_{i4}) \times \mathbf{n}]^T \boldsymbol{\omega}. \quad (1.42)$$

Posons

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{Qd}_i - \mathbf{a}_{i4} \quad (1.43)$$

qui est le vecteur reliant le point O' à l'articulation sphérique S_i , exprimé dans le repère fixe. En combinant les équations (1.42) et (1.43) à l'équation (1.37), on obtient

$$\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{c}_i \times \mathbf{n})^T \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.44)$$

dans laquelle

$$\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{M}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i) = \mathbf{K}_{i+3} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.45)$$

où

$$\mathbf{K}_{i+3} = \mathbf{n}^T \mathbf{M}_i. \quad (1.46)$$

La matrice \mathbf{K}_{i+3} est de dimension 1×3 . L'équation (1.44) est réécrite sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{n})^T \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{n})^T \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{n})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_4 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{K}_5 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{K}_6 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (1.47)$$

Finalement, en combinant les système matriciels (1.35) et (1.47) et en réarrangeant les termes, on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\mathbf{Jt} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.48)$$

où $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}^T & \boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T$ est la matrice des vitesses cartésiennes. Les matrices \mathbf{J} et \mathbf{K} prennent la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{14}^T & [(\mathbf{Qd}_1) \times \mathbf{a}_{14}]^T \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{n})^T \\ \mathbf{a}_{24}^T & [(\mathbf{Qd}_2) \times \mathbf{a}_{24}]^T \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{n})^T \\ \mathbf{a}_{34}^T & [(\mathbf{Qd}_3) \times \mathbf{a}_{34}]^T \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{n})^T \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_6 \end{bmatrix}_{6 \times 9} \quad (1.50)$$

où les variables sont définies plus haut et le vecteur $\mathbf{0}$ est de dimension 1×3 .

1.3 Analyse des singularités

Dans cette section, une analyse des singularités du robot est effectuée. Les singularités de type I surviennent lorsque la matrice \mathbf{K} de l'équation (1.48) est singulière. Cette matrice dépend principalement des jacobiennes des jambes \mathbf{M}_i . Les configurations singulières de type I surviennent donc lorsque l'une des jambes est en configuration singulière. L'architecture des jambes ainsi que l'étude de singularité de celles-ci sont développées au chapitre 2. Les configurations singulières de type II surviennent lorsque la matrice \mathbf{J} est singulière. Cette matrice dépend uniquement de la configuration de la plateforme. Les configurations singulières de celle-ci s'apparentent à celles du mécanisme parallèle plan à 3 ddl. Afin d'analyser les configurations singulières, considérons deux lignes pour chaque membrure $i4$ que l'on peut exprimer avec les coordonnées de Plücker, soit l'une étant parallèle au vecteur \mathbf{a}_{i4} et l'autre qui est parallèle au vecteur \mathbf{n} située au point S_i . Ces lignes sont montrées en pointillé à la Fig. 1.1. La matrice jacobienne \mathbf{J} présentée à l'équation (1.48) est une combinaison de ces lignes pour les trois membrures redondantes $i4$. Afin de déterminer les configurations singulières du robot, une approche détaillée avec la géométrie linéaire de Grassmann est présentée par Wen et al. [26]. Dans cette section, les résultats de cette approche sont présentés.

Les configurations singulières de type II sont divisées en deux catégories. **La première catégorie** regroupe les configurations où la matrice du membre de gauche de l'équation (1.35) est singulière. Ce cas est engendré par deux types de configurations singulières, soit lorsque les vecteurs \mathbf{a}_{i4} sont parallèles, ou que leurs lignes d'action se croisent en un point. Des exemples de ces configurations singulières sont illustrées aux Fig. 1.2 et 1.3.

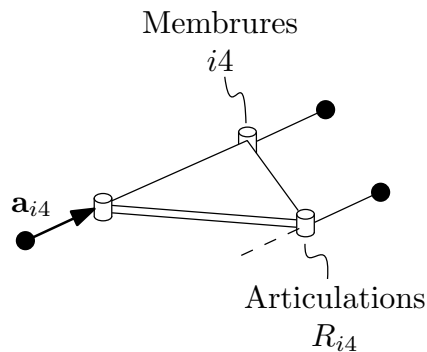


FIGURE 1.2 – Exemple de configuration singulière de type II, lorsque les membrures $i4$ sont parallèles.

La deuxième catégorie est constituée des cas où la matrice du membre de gauche de l'équation (1.47) est singulière. Ces cas sont engendrés par les configurations où les points S_i se situent sur une seule droite. Autrement dit, cette singularité se produit lorsque les trois droites

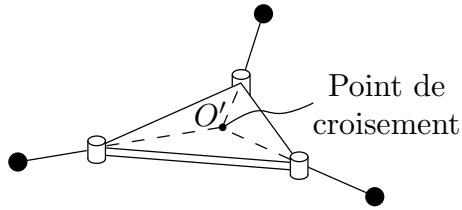


FIGURE 1.3 – Exemple de configuration singulière de type II, lorsque la direction des membrures $i4$ s’intersectent en un point.

exprimées dans cette matrice sont coplanaires. Un exemple de singularité de ce type est illustré à la Fig. 1.4.

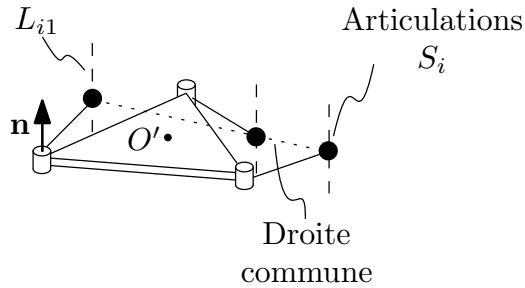


FIGURE 1.4 – Exemple de configuration singulière de type II, lorsque les points S_i forment une seule droite.

Ces exemples de singularité de type II sont principalement pris en compte dans l’étape de conception mécanique de la plateforme, présentée à la section 4.4.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la cinématique générale du robot est développée. Les équations de cinématique, le PGD, le PGI, les équations de vitesses et les matrices jacobiennes sont donnés. Une étude des singularités est également effectuée. Les configurations singulières de type I, soit lorsque la matrice \mathbf{K} est singulière, dépendent seulement des configurations singulières des jambes. Celles-ci sont développées au chapitre suivant. Les singularités de type II, soient lorsque la matrice \mathbf{J} est singulière surviennent lorsque la plateforme est en configuration singulière. Les différents cas sont explicités. Cette étude des singularités est utilisée afin de guider le design mécanique du robot, présenté au chapitre 4. Le développement des matrices jacobiennes est réutilisé pour la définition d’indices pour l’étude de la sensibilité cinématique du robot au Chapitre 5.

Chapitre 2

Modèle cinématique des jambes

Dans le chapitre 1 le modèle cinématique général du robot et de la plateforme sont développés. Dans le présent chapitre, le modèle cinématique des jambes est développé. Les équations de contraintes géométriques et de vitesse ainsi que les matrices jacobiennes sont développées. De plus, une étude des singularités est réalisée afin de déterminer les configurations singulières de type I du robot. Les jambes développées dans ce chapitre ont une architecture hybride. Une architecture hybride combine à la fois une architecture sérielle et parallèle. Les avantages de l'architecture présentée dans le chapitre sont qu'elle possède à la fois le grand espace de travail d'un robot sériel, et la faible inertie de mouvement d'un robot parallèle. Le robot résultant possède une architecture 3- $[\underline{R}(\underline{R}\underline{R}\underline{R})\text{SR}]$ où R signifie les articulations rotoïdes, \underline{R} signifie les articulations rotoïdes actionnées et S représente les articulations sphériques.

2.1 Description de l'architecture

Un schéma sommaire et un schéma détaillé d'une jambe du robot sont montrés à la Fig. 2.1. L'architecture de la jambe s'apparente à un mécanisme plan parallèle à 5 barres possédant deux degrés de liberté, actionnés par les articulations R_{i2} et R_{i3} dont les axes de rotation sont représentés par les vecteurs unitaires \mathbf{e}_{i2} et \mathbf{e}_{i3} . Ce mécanisme plan tourne sur l'axe de l'articulation R_{i1} , dont la direction est représentée par le vecteur unitaire \mathbf{e}_{i1} . Cette articulation est actionnée. Les vecteurs \mathbf{e}_{i2} et \mathbf{e}_{i3} sont parallèles et pointent dans une direction perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_{i1} . Les vecteurs \mathbf{v}_{i2} et \mathbf{v}_{i3} indiquent les positions des articulations R_{i2} et R_{i3} par rapport au repère de la jambe O_i dont l'axe z_i est coïncident avec l'axe de l'articulation R_{i1} . Le repère de la jambe O_i est positionné par rapport au repère fixe avec le vecteur \mathbf{l}_i , à une orientation donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q}_i .

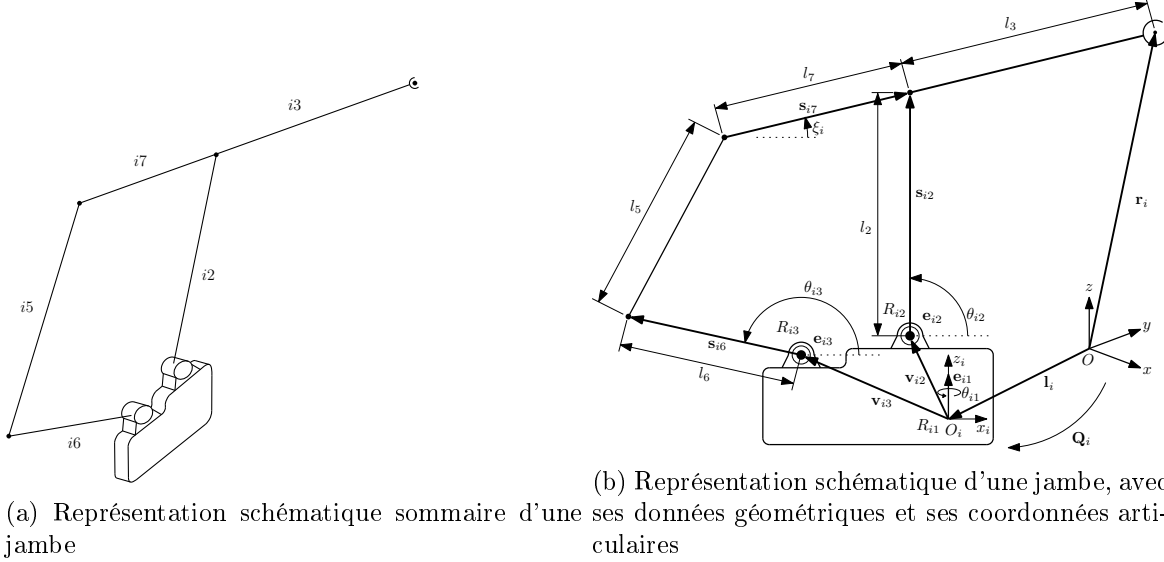


FIGURE 2.1 – Schémas sommaire et détaillé d'une jambe du robot.

2.2 Développement des équations de cinématique

Trois équations de contrainte géométrique sont utilisées afin de modéliser l'architecture hybride de la jambe. La première équation fixe la longueur l_5 comme étant constante. On a,

$$(\mathbf{v}_{i2} + \mathbf{s}_{i2} - \mathbf{v}_{i3} - \mathbf{s}_{i6} - \mathbf{s}_{i7})^T (\mathbf{v}_{i2} + \mathbf{s}_{i2} - \mathbf{v}_{i3} - \mathbf{s}_{i6} - \mathbf{s}_{i7}) = l_5^2. \quad (2.1)$$

La deuxième équation fixe la longueur l_3 comme étant constante, on a donc que

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i - \mathbf{v}_{i2} - \mathbf{s}_{i2})^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i - \mathbf{v}_{i2} - \mathbf{s}_{i2}) = l_3^2. \quad (2.2)$$

La troisième équation exprime l'orthogonalité entre le vecteur \mathbf{e}_{i2} (ou \mathbf{e}_{i3}) et le vecteur reliant le point de l'articulation sphérique S_i et l'origine du repère de la jambe O_i . On a,

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i)^T \mathbf{e}_{i2} = 0. \quad (2.3)$$

Il est à noter que ces équations de contrainte sont exprimées par rapport au repère fixe.

2.2.1 Problème géométrique direct

Le problème géométrique direct de la jambe consiste à déterminer le vecteur position de l'articulation sphérique $\mathbf{r}_i = [x_{S_i} \ y_{S_i} \ z_{S_i}]^T$ en fonction des coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{\theta}_i = [\theta_{i1} \ \theta_{i2} \ \theta_{i3}]^T$. La coordonnée articulaire θ_{i1} est définie à partir du sens positif de l'axe x_i . Le sens de rotation positif est défini par rapport au sens positif de l'axe z_i . Les coordonnées articulaires θ_{i2} et θ_{i3} sont définies à partir du sens positif de l'axe x_i . Le sens de rotation positif est défini par rapport au sens négatif de l'axe y_i .

Le PGD est d'abord traité dans le plan du mécanisme parallèle, soit en considérant les coordonnées articulaires θ_{i2} et θ_{i3} . Pour ce faire, considérons l'équation de contrainte (2.1). Cette équation implique seulement des vecteurs situés dans le plan du mécanisme parallèle de la jambe. Cette équation est exprimée dans un repère plan pour chaque jambe i . L'indice "pi" est ajouté aux termes de cette équation afin d'indiquer qu'ils sont exprimés dans le plan du mécanisme parallèle de la jambe i . On a donc,

$$(\mathbf{m}_i - \mathbf{s}_{i7}^{pi})^T (\mathbf{m}_i - \mathbf{s}_{i7}^{pi}) = l_5^2 \quad (2.4)$$

où

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{v}_{i2}^{pi} + \mathbf{s}_{i2}^{pi} - \mathbf{v}_{i3}^{pi} - \mathbf{s}_{i6}^{pi} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{s}_{i2}^{pi} = l_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_{i2} & 0 & \sin \theta_{i2} \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{s}_{i6}^{pi} = l_6 \begin{bmatrix} \cos \theta_{i3} & 0 & \sin \theta_{i3} \end{bmatrix}^T \quad (2.7)$$

$$\mathbf{s}_{i7}^{pi} = l_7 \begin{bmatrix} \cos \xi_i & 0 & \sin \xi_i \end{bmatrix}^T. \quad (2.8)$$

La variable ξ_i est l'angle que fait le vecteur \mathbf{s}_{i7}^{pi} par rapport à la direction positive de l'axe x_{pi} . L'équation (2.4) est développée et réécrite comme suit :

$$\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i - 2\mathbf{m}_i^T \mathbf{s}_{i7}^{pi} + (\mathbf{s}_{i7}^{pi})^T \mathbf{s}_{i7}^{pi} = l_5^2. \quad (2.9)$$

Ce développement conduit donc à,

$$G_i \cos \xi_i + H_i \sin \xi_i + I_i = 0 \quad (2.10)$$

où

$$G_i = -2l_7 \mathbf{m}_i^T \mathbf{i}_i^{pi} \quad (2.11)$$

$$H_i = -2l_7 \mathbf{m}_i^T \mathbf{k}_i^{pi} \quad (2.12)$$

$$I_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i + l_7^2 - l_5^2 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{i}_i^{pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

$$\mathbf{k}_i^{pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (2.15)$$

Afin de résoudre l'équation (2.10), celle-ci est réécrite sous forme polynomiale de degré 2 en utilisant la substitution trigonométrique suivante :

$$\cos \xi_i = \frac{1 - t_{\xi_i}^2}{1 + t_{\xi_i}^2}, \quad \sin \xi_i = \frac{2t_{\xi_i}}{1 + t_{\xi_i}^2} \quad \text{et} \quad t_{\xi_i} = \tan \left(\frac{\xi_i}{2} \right). \quad (2.16)$$

En insérant les équations (2.16) dans l'équation (2.10), on obtient l'équation suivante :

$$(I_i - G_i)t_{\xi_i}^2 + 2H_it_{\xi_i} + I_i + G_i = 0. \quad (2.17)$$

En résolvant cette équation, on obtient deux solutions pour t_{ξ_i} . À partir de celles-ci, on obtient deux valeurs possibles pour ξ_i avec la fonction atan2. Les deux solutions possibles sont illustrées à la Fig.2.2. La solution illustrée à la Fig. 2.2a montre le mécanisme plan dans une

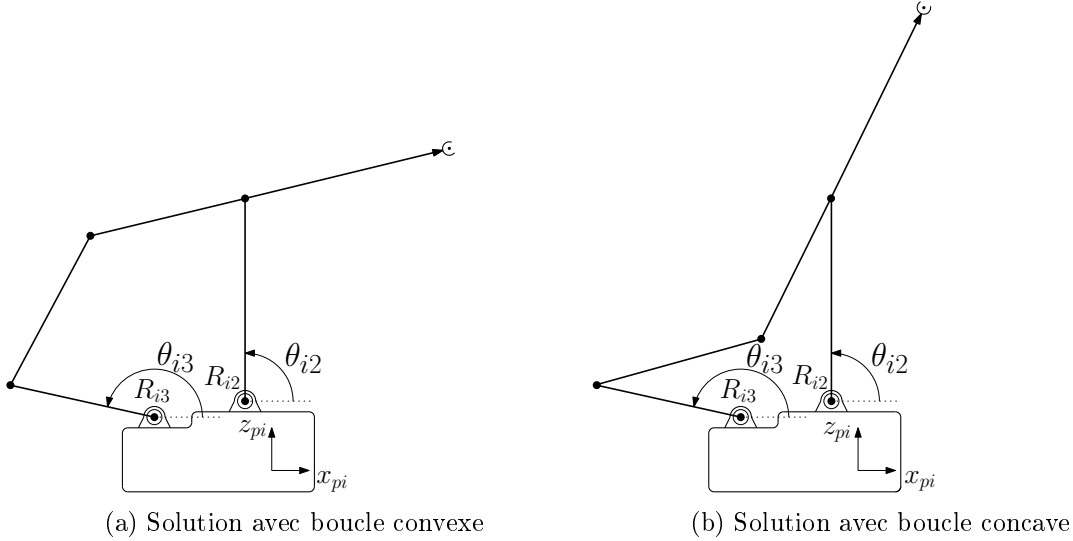


FIGURE 2.2 – Solutions possibles pour le PGD du mécanisme plan.

configuration convexe tandis que celle illustrée à la Fig. 2.2b montre le mécanisme plan dans une configuration concave. La solution choisie est celle faisant en sorte que la boucle soit convexe. À partir de cette solution et de l'équation (2.8), on connaît donc la direction du vecteur \mathbf{s}_{i7} . La position de l'effecteur \mathbf{r}_i en fonction du vecteur \mathbf{s}_{i7} et de la coordonnée θ_{i1} s'exprime comme suit :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_{\theta_{i1}} (\mathbf{v}_{i2} + \mathbf{s}_{i2} + \frac{l_{i3}}{l_{i7}} \mathbf{s}_{i7}) \quad (2.18)$$

où $\mathbf{Q}_{\theta_{i1}}$ est la matrice de rotation définie par rapport à l'axe z_i sortant le point S_i du plan, le positionnant dans l'espace. Cette matrice de rotation est définie comme suit :

$$\mathbf{Q}_{\theta_{i1}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} & -\sin \theta_{i1} & 0 \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

2.2.2 Problème géométrique inverse

Le problème géométrique inverse de la jambe i consiste à déterminer le vecteur des coordonnées articulaires $\boldsymbol{\theta}_i$ en fonction du vecteur position de l'articulation sphérique \mathbf{r}_i . En connaissant la position et l'orientation du repère de la jambe O_i , la position du point S_i par rapport au

repère de la jambe s'exprime avec l'équation suivante :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{Q}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i) \quad (2.20)$$

La coordonnée θ_{i1} se calcule comme suit :

$$\theta_{i1} = \text{atan2}(b_i^x, b_i^y) \quad (2.21)$$

où b_i^x et b_i^y sont respectivement les composantes en x et en y du vecteur \mathbf{b}_i . Afin de déterminer les valeurs de θ_{i2} et θ_{i3} , le problème géométrique inverse est ramené au mécanisme plan $x_i z_i$. Le vecteur \mathbf{b}_i subit une rotation par rapport à l'axe z_i décrite par la matrice $\mathbf{Q}_{\theta_{i1}}^T$ dont l'angle θ_{i1} est déterminé avec l'équation (2.21) :

$$\mathbf{b}_i^{pi} = \mathbf{Q}_{\theta_{i1}}^T \mathbf{b}_i. \quad (2.22)$$

Afin de déterminer la coordonnée θ_{i2} , les points d'intersection des cercles A et B illustrés à la Fig. 2.3 sont considérés. Le cercle A est centré au point \mathbf{b}_i^{pi} et possède un rayon de longueur l_3 . Le cercle B est centré au point R_{i2} et possède un rayon de longueur l_2 . En connaissant les coordonnées des points d'intersection AB_1 et AB_2 , il est ainsi possible de déterminer les deux solutions possibles pour θ_{i2} . Afin de déterminer la coordonnée θ_{i3} , les points d'intersection des cercles C et D de la Fig. 2.3 sont considérés. Le cercle C est centré au point R_{i3} et possède un rayon de longueur l_6 . Le cercle D est centré au point $\mathbf{s}_{i2} - \mathbf{s}_{i7}$ et possède un rayon de longueur l_5 . La position du centre du cercle D dépend de la solution choisie pour θ_{i2} . Le choix de la solution doit se faire de manière à ce que le mécanisme ait une configuration convexe, tel que défini précédemment.

2.2.3 Équations de vitesse

Les équations de vitesse sont déterminées en dérivant les équations (2.1), (2.2) et (2.3) par rapport au temps. Ces dérivations sont effectuées dans le repère fixe. À partir de la première contrainte de fermeture de boucle (soit l'équation (2.1)), on obtient,

$$\mathbf{u}_{i1}^T \dot{\mathbf{u}}_{i1} = 0 \quad (2.23)$$

où

$$\mathbf{u}_{i1} = \mathbf{v}_{i2} + \mathbf{s}_{i2} - \mathbf{v}_{i3} - \mathbf{s}_{i6} - \mathbf{s}_{i7}. \quad (2.24)$$

En effectuant la dérivée de \mathbf{u}_{i1} par rapport au temps, on obtient,

$$\dot{\mathbf{u}}_{i1} = \dot{\mathbf{v}}_{i2} + \dot{\mathbf{s}}_{i2} - \dot{\mathbf{v}}_{i3} - \dot{\mathbf{s}}_{i6} - \dot{\mathbf{s}}_{i7} \quad (2.25)$$

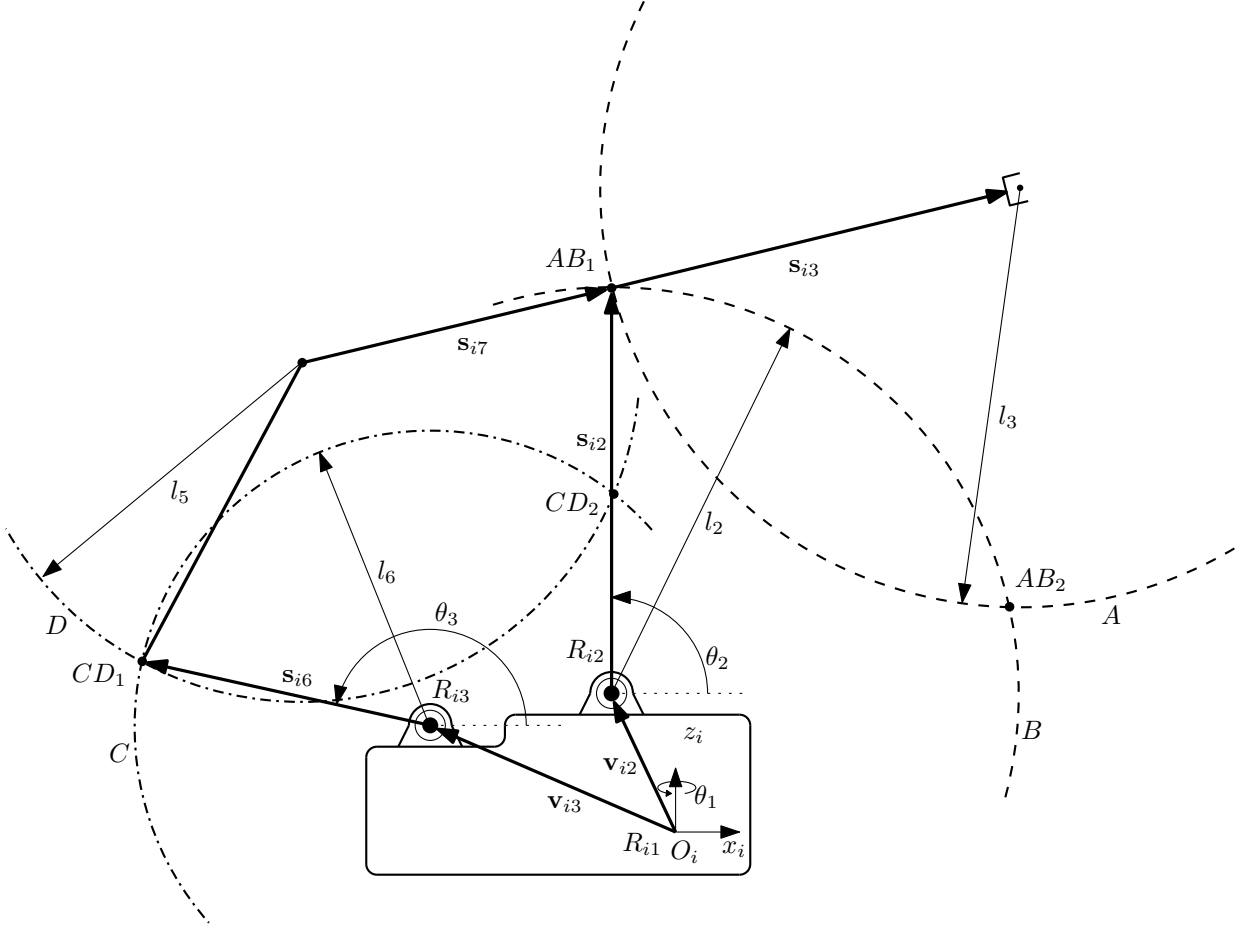


FIGURE 2.3 – Intersections des cercles pour la résolution du PGI.

dont les dérivées temporelles de chaque terme s'écrivent comme suit :

$$\dot{\mathbf{v}}_{i2} = \dot{\theta}_{i1}(\mathbf{e}_{i1} \times \mathbf{v}_{i2}) \quad (2.26)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{i3} = \dot{\theta}_{i1}(\mathbf{e}_{i1} \times \mathbf{v}_{i3}) \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{i2} = \dot{\theta}_{i1}(\mathbf{e}_{i1} \times \mathbf{s}_{i2}) + \dot{\theta}_{i2}(\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{s}_{i2}) \quad (2.28)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{i6} = \dot{\theta}_{i1}(\mathbf{e}_{i1} \times \mathbf{s}_{i6}) + \dot{\theta}_{i3}(\mathbf{e}_{i3} \times \mathbf{s}_{i6}) \quad (2.29)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{i7} = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{v}}_{i2} - \dot{\mathbf{s}}_{i2}. \quad (2.30)$$

En insérant ces dérivées temporelles dans l'équation (2.23) et en effectuant les simplifications, on obtient l'équation de vitesse suivante :

$$\left(1 + \frac{l_7}{l_3}\right) \mathbf{u}_{i1}^T(\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{s}_{i2})\dot{\theta}_{i2} - \mathbf{u}_{i1}^T(\mathbf{e}_{i3} \times \mathbf{s}_{i6})\dot{\theta}_{i3} = \frac{l_7}{l_3} \mathbf{u}_{i1}^T \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.31)$$

En dérivant la deuxième contrainte de fermeture de boucle (soit l'équation (2.2)), par rapport au temps, on obtient,

$$\mathbf{u}_{i2}^T \dot{\mathbf{u}}_{i2} = 0 \quad (2.32)$$

où

$$\mathbf{u}_{i2} = \mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i - \mathbf{v}_{i2} - \mathbf{s}_{i2}. \quad (2.33)$$

En effectuant la dérivée de \mathbf{u}_{i2} par rapport au temps, on obtient,

$$\dot{\mathbf{u}}_{i2} = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{l}}_i - \dot{\mathbf{v}}_{i2} - \dot{\mathbf{s}}_{i2}. \quad (2.34)$$

Sachant que le vecteur \mathbf{l}_i est fixe dans l'espace, on a que

$$\dot{\mathbf{l}}_i = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

En insérant les dérivées temporelles calculées précédemment dans l'équation (2.32) et en effectuant les simplifications, on obtient l'équation de vitesse suivante :

$$\mathbf{u}_{i2}^T (\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{s}_{i2}) \dot{\theta}_{i2} = \mathbf{u}_{i2}^T \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.36)$$

En dérivant la troisième contrainte (soit l'équation (2.3)) par rapport au temps, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{e}_{i2} \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{e}}_{i2}^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i) = 0. \quad (2.37)$$

En effectuant la dérivée de \mathbf{e}_{i2} par rapport au temps, on a que,

$$\dot{\mathbf{e}}_{i2} = \dot{\theta}_{i1} (\mathbf{e}_{i1} \times \mathbf{e}_{i2}). \quad (2.38)$$

En insérant l'équation (2.38) dans l'équation (2.37) et en réorganisant les termes, on obtient :

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i)^T (\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{e}_{i1}) \dot{\theta}_{i1} = \mathbf{e}_{i2}^T \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.39)$$

Le système formé par les équations de vitesse (2.31), (2.36) et (2.39), établissant le lien entre les vitesses articulaires et les vitesses cartésiennes de l'effecteur s'écrit telle que,

$$\mathbf{J}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{W}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i. \quad (2.40)$$

Les matrices jacobiennes \mathbf{J}_i et \mathbf{W}_i sont définies comme suit :

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{i2}^T \\ \mathbf{u}_{i2}^T \\ \frac{l_7}{l_3} \mathbf{u}_{i1}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} w_{i11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{i22} & 0 \\ 0 & w_{i32} & w_{i33} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

où

$$w_{i11} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_i)^T (\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{e}_{i1}) \quad (2.42)$$

$$w_{i22} = \mathbf{u}_{i2}^T (\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{s}_{i2}) \quad (2.43)$$

$$w_{i32} = \left(1 + \frac{l_7}{l_3}\right) \mathbf{u}_{i1}^T (\mathbf{e}_{i2} \times \mathbf{s}_{i2}) \quad (2.44)$$

$$w_{i33} = -\mathbf{u}_{i1}^T (\mathbf{e}_{i3} \times \mathbf{s}_{i6}). \quad (2.45)$$

Finalement, la matrice de la jambe \mathbf{M}_i , tel que définie au chapitre 1, s'écrit comme suit :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{W}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

2.3 Analyse des singularités

Tel qu'expliqué au chapitre 1, les configurations singulières de type I surviennent lorsque les jambes sont en singularité, soit lorsque l'une ou plusieurs des matrices \mathbf{M}_i sont singulières. Dans cette section, une analyse sommaire des configurations singulières des jambes est montrée. Puisque les jambes ont une architecture hybride, pour des fins d'analyse, on considère des singularités de type sériel (lorsque la matrice \mathbf{W}_i est singulière) et des singularités de type parallèle (lorsque la matrice \mathbf{J}_i est singulière).

Les singularités de type sériel surviennent lorsque la matrice \mathbf{W}_i est singulière. Par exemple, dans le cas où $w_{i11} = 0$, l'extrémité de la jambe S_i est située sur l'axe de rotation du premier moteur \mathbf{e}_{i1} . Cette configuration singulière peut être évitée en incluant cet axe de rotation dans le plan xy de la base, de manière à éloigner cet axe de l'espace de travail fonctionnel du robot. Ce point est discuté au chapitre 4. Une autre configuration singulière survient lorsque les vecteurs \mathbf{u}_{i2} , \mathbf{s}_{i2} et \mathbf{e}_{i2} sont coplanaires ($w_{i22} = 0$), soit lorsque les membrures $i2$ et $i3$ sont parallèles. Le même type de singularité survient également lorsque les membrures $i5$ et $i6$ sont parallèles, soit lorsque les vecteurs \mathbf{u}_{i1} , \mathbf{s}_{i6} et \mathbf{e}_{i3} sont coplanaires ($w_{i33} = 0$). Ces configurations singulières peuvent être évitées en imposant des limites mécaniques aux articulations de manière à obtenir des interférences près des configurations singulières. Cet aspect est pris en compte dans la conception mécanique des jambes, expliquée au chapitre 4.

Les singularités de type parallèle surviennent lorsque la matrice \mathbf{J}_i est singulière. Dans cette matrice, la première rangée est toujours orthogonale aux deux autres. Une singularité de type II survient donc lorsque les deux dernières rangées sont linéairement dépendantes, soit lorsque les vecteurs \mathbf{u}_{i1} et \mathbf{u}_{i2} sont parallèles (lorsque les membrures $i5$ et $i7$ sont parallèles). Dans cette configuration, la jambe se situe entre les deux modes d'assemblage illustrés aux Fig. 2.2a et 2.2b. Cette singularité peut également être évitée mécaniquement, tel que montré au chapitre 4.

2.4 Modèle cinématique simplifié : le parallélogramme

À partir du modèle général de la jambe hybride développé ci-haut, un cas simplifié de ce mécanisme est développé dans cette section. Le mécanisme plan prend donc la forme d'un parallélogramme de manière à simplifier les étapes de conception mécanique et du contrôle du robot.

Les articulations actionnées R_{i2} et R_{i3} sont d'abord confondues sur le même axe. En effet, les articulations R_{i2} et R_{i3} ont la même position dans le mécanisme plan, de manière à ce que $\mathbf{v}_{i2} = \mathbf{v}_{i3}$. De plus les actionneurs sont positionnés de manière à ce que les axes de rotation R_{i2} et R_{i3} intersectent l'axe R_{i1} . Les vecteurs \mathbf{v}_{i2} et \mathbf{v}_{i3} sont donc définis comme suit :

$$\mathbf{v}_{i2} = \mathbf{v}_{i3} = l_1 \mathbf{e}_{i1} \quad (2.47)$$

où l_1 est la longueur qui sépare l'articulation R_{i1} située sur la base et les articulations R_{i2} et R_{i3} . Considérant que les actionneurs des articulations R_{i2} et R_{i3} sont situés de part et d'autre de l'axe de l'articulation R_{i1} , le moment résultant du poids de ces actionneurs par rapport à l'articulation R_{i1} est nul.

Également, les longueurs des membrures $i2$ et $i5$ sont posées comme étant égales ($l_2 = l_5$), ainsi que celles des membrures $i6$ et $i7$ également ($l_6 = l_7$). Le modèle simplifié est illustré à la Fig.2.4. L'utilisation de cette architecture simplifiée également les équations du PGD et du

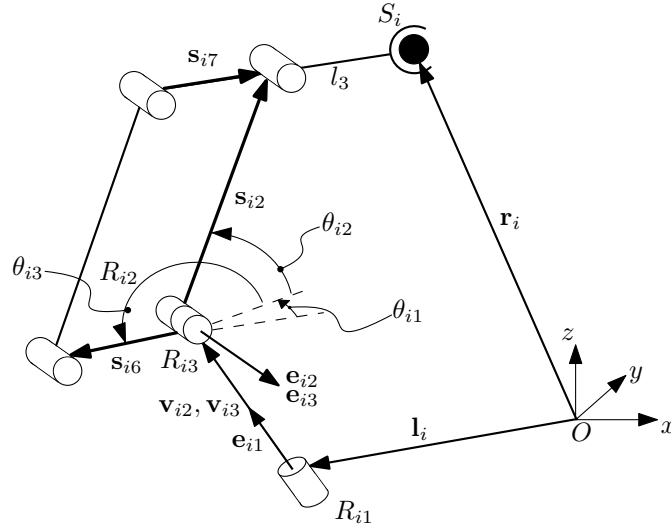


FIGURE 2.4 – Représentation de l'architecture simplifiée d'une jambe, avec ses données géométriques et ses coordonnées articulaires.

PGI de sorte que ξ_i est égal à $\pi - \theta_{i3}$. Cette architecture est prise en compte dans la conception mécanique des jambes, expliquée au chapitre 4.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre est développé le modèle cinématique des jambes. Les équations menant à la résolution des problèmes géométriques direct et inverse ainsi que les équations de vitesse sont établies. Une analyse sommaire des singularités spécifiques à la jambe ainsi qu'un modèle cinématique simplifié sont développés afin de simplifier les étapes de conception mécanique et de contrôle du robot. Le chapitre suivant traite de l'étude de l'espace de travail du robot.

Chapitre 3

Étude de l'espace de travail du robot

Dans ce chapitre, une étude approfondie de l'espace de travail du robot est effectuée. Cette étude est divisée en deux catégories, soit celle de l'espace de travail en translation et celle de l'espace de travail en rotation. Des tendances sur l'espace de travail en rotation du robot en fonction des paramètres géométriques du robot sont observées. Pour ce faire, un modèle d'analyse du robot est implanté dans MATLAB. Les détails de ce modèle et les contraintes considérées sont présentés. À partir des tendances observées, une combinaison des paramètres géométriques optimaux est choisie afin de maximiser le volume de l'espace de travail en rotation.

3.1 Modèle d'analyse

Afin d'évaluer le volume de l'espace de travail en translation et en rotation du robot, un modèle d'analyse est défini. Celui-ci est défini par la base fixe et la plateforme reliées par trois jambes d'architecture URS. Ces jambes sont réparties symétriquement autour de l'axe central du robot. Ce dernier est illustré à la Fig. 3.1. Pour des fins de symétrie et de simplification, les membrures $i4$ ne sont pas représentées dans le modèle d'analyse et la plateforme et la base sont de forme triangulaire équilatérale. La plateforme mobile est donc un triangle reliant les points S_i , $i = 1, 2, 3$. La base du robot inclut également les membrures $i1$, puisqu'elles ne changent pas de direction dans l'espace et ne font que pivoter par rapport aux axes \mathbf{e}_{i1} .

La dimension de la base est caractérisée par le paramètre R_b qui constitue la distance horizontale entre le milieu de la base et les articulations de Cardan U_i . La dimension de l'effecteur est caractérisée par le paramètre R_p qui constitue la distance entre le milieu de la plateforme et les articulations sphériques S_i . Les longueurs des deux membrures des jambes sont caractérisées par les paramètres l_2 et l_3 .

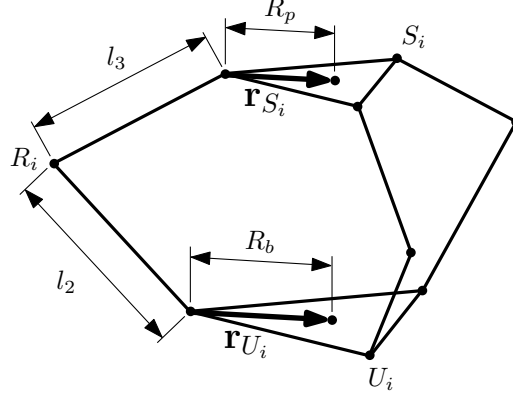


FIGURE 3.1 – Représentation graphique simplifiée du robot dans MATLAB pour l'analyse de l'espace de travail.

3.2 Espace de travail en translation

L'évaluation de l'espace de travail en translation du robot se base sur l'approche présentée par Gosselin et al. [20], [12]. Celui-ci se définit par l'espace atteignable par le point central de la plateforme à une orientation \mathbf{Q} donnée. Afin d'évaluer le volume de cet espace, l'intersection entre les espaces de travail de chaque jambe est considérée. En considérant l'orientation \mathbf{Q} constante, l'espace de travail de chaque jambe est estimé par une sphère ayant pour rayon les longueurs des membrures $i2$ et $i3$, soit $l_2 + l_3$, dont le centre est situé au point \mathbf{f}_i^s , donné par l'équation suivante :

$$\mathbf{f}_i^s = \mathbf{r}_{S_i} - \mathbf{r}_{U_i} \quad (3.1)$$

où \mathbf{r}_{U_i} est le vecteur reliant le centre de l'articulation de Cardan U_i à l'origine du repère fixe O et \mathbf{r}_{S_i} est le vecteur reliant le centre de l'articulation sphérique S_i à l'origine du repère fixe O' . Dans cette approche, les interférences entre les composants mécaniques ne sont pas considérées. La relation entre le volume de l'espace de travail en translation et les paramètres géométriques du robot est directe. Afin d'augmenter l'espace de travail en translation, il suffit d'augmenter le volume d'intersection des sphères, soit en augmentant leur rayon ou en rapprochant les points d'attache des jambes sur la base et la plateforme.

3.3 Espace de travail en rotation

Contrairement à la démarche d'évaluation de l'espace de travail en translation, celle pour l'évaluation de l'espace de travail en rotation du robot proposée dans ce document considère les interférences mécaniques entre les membrures. Une méthode d'évaluation numérique de l'espace de travail en rotation est proposée dans la présente section. Celle-ci fait intervenir les angles d'inclinaison et de torsion de la plateforme similairement à celle proposée par Bonev et al. [2]. Dans le cas présent, l'espace est discrétisé en plusieurs points, sur lesquels des trajectoires d'inclinaison et de torsion de l'effecteur sont effectuées. Lorsque survient une

limite mécanique telle une limite articulaire ou une interférence entre plusieurs membrures, le point évalué n'est pas inclus dans l'espace de travail en rotation.

3.3.1 Discrétisation de l'espace translationnel

Puisque le robot est tri-symétrique par rapport à l'axe vertical du milieu, la discrétisation de l'espace translationnel se fait en coordonnées cylindriques. Pour chaque incrément en z , la discrétisation se fait radialement à partir de l'axe z , vers l'extérieur, le long d'une droite radiale en incrémentant la valeur de r . Cette discrétisation radiale est effectuée pour chaque incrément d'angle θ . Cet angle représente la direction de la droite radiale par rapport au sens positif de x . La représentation de la discrétisation est montrée à la Fig. 3.2. Les trajectoires d'inclinaison et de torsion de l'effecteur sont ainsi exercées sur chaque point discrétisé. Ces trajectoires sont présentées à la sous-section suivante.

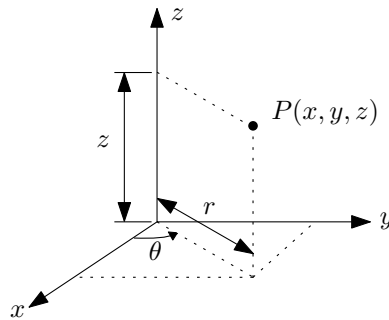


FIGURE 3.2 – Représentation d'un point cartésien en coordonnées cylindriques.

3.3.2 Description des trajectoires

Les trajectoires en inclinaison et en torsion sont présentées dans cette section. **La trajectoire d'inclinaison** de la plateforme se définit par la rotation de la plateforme d'un angle ϕ de $\pm 90^\circ$ par rapport à l'axe de rotation décrit par le vecteur unitaire \mathbf{e} , tel qu'illustré à la Fig. 3.3. Au début de la trajectoire, le robot est en orientation neutre, soit $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$. Le vecteur \mathbf{e}

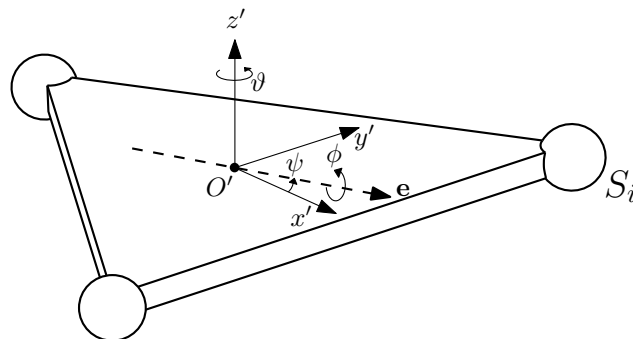


FIGURE 3.3 – Plateforme avec le repère mobile et les angles de rotation.

est défini dans le plan $x'y'$ du repère mobile O' . Sa direction est définie par ψ , qui mesure son angle par rapport à l'axe x' positif. La rotation de ϕ est réalisée pour chaque incrément de l'angle ψ . Ce dernier varie de 0 à 180° . La matrice de rotation exprimée dans le repère fixe O , caractérisant la trajectoire d'inclinaison à chaque point en fonction des angles ψ et ϕ , à partir de l'orientation neutre est la suivante :

$$\mathbf{Q}_{inc}^e(\psi, \phi) = \begin{bmatrix} (\cos^2 \psi + (1 - \cos^2 \psi) \cos \phi) & (\sin \psi \cos \psi (1 - \cos \phi)) & (\sin \psi \sin \psi) \\ (\sin \psi \cos \psi (1 - \cos \phi)) & (\sin^2 \psi + (1 - \sin^2 \psi) \cos \phi) & (-\cos \psi \sin \phi) \\ (-\sin \psi \sin \phi) & (\cos \psi \sin \phi) & (\cos \phi) \end{bmatrix}$$

$$0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ, \quad -90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ. \quad (3.2)$$

La trajectoire de torsion se définit par la rotation de l'effecteur d'un angle ϑ de $\pm 90^\circ$ par rapport à l'axe z' , tel qu'illustré à la Fig. 3.3. Au début de la trajectoire, le robot est en orientation neutre. La matrice de rotation exprimée dans le repère fixe O , caractérisant la trajectoire est la suivante :

$$\mathbf{Q}_{tor}^{z'}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -90^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ. \quad (3.3)$$

Ces deux trajectoires de rotation sont réalisées à chaque point discrétisé. L'espace de travail en rotation est l'ensemble des points où l'effecteur du robot peut réaliser ces deux trajectoires de rotation sans atteindre de limites mécaniques, telles que développées à la section suivante.

3.3.3 Limites mécaniques

Dans cette section, les limites mécaniques considérées dans l'évaluation de l'espace de travail en rotation sont définies. Celles-ci regroupent les limites physiques atteignables des jambes, les limites aux articulations ainsi que les interférences mécaniques entre les membrures. L'évaluation de ces limites se fait pour les trajectoires de rotation du robot à chaque point discrétisé.

Les contraintes mécaniques liées aux limites physiques atteignables des jambes se manifestent lorsqu'il est mécaniquement impossible d'atteindre un point par l'articulation S_i , ce point étant trop loin par rapport à la base de la jambe. Une façon de détecter cette limitation numériquement durant la réalisation des trajectoires est d'évaluer la norme Euclidienne du vecteur reliant l'extrémité de la membrure $i1$ définie par le vecteur \mathbf{r}_{U_i} et le point de l'articulation sphérique S_i correspondant, et de vérifier si la valeur obtenue ne dépasse pas la longueur des membrures $i2$ et $i3$ additionnées. Dans le cas où cette évaluation est vérifiée pour chaque jambe, les limites d'espace atteignable des jambes sont respectées.

Les contraintes liées aux articulations se définissent par les limites propres à chaque articulation. Les articulations limitatives sont les rotoïdes de chaque jambe, mais plus en particulier les articulations sphériques S_i . Afin de détecter si les limites des articulations rotoïdes sont atteintes, les valeurs d'angles à ces articulations sont comparées à des valeurs limites prédéfinies. Afin de déterminer si les limites des articulations sphériques S_i sont dépassées, l'angle entre les membrures $i3$ et $i4$ de chaque jambe est évalué et comparé à une valeur seuil acceptable. Le vecteur \mathbf{l}_{i3} est défini comme étant le vecteur directeur de la membrure $i3$. L'angle γ_i entre les membrures $i3$ et $i4$ se calcule comme suit :

$$\gamma_i = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a}_{i4} \cdot \mathbf{l}_{i3}}{\|\mathbf{a}_{i4}\| \|\mathbf{l}_{i3}\|} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

où le vecteur \mathbf{a}_{i4} est défini au chapitre 1. Dans le modèle d'analyse développé plus tôt dans ce chapitre, les membrures $i4$ sont incluses dans l'effecteur. Pour des fins de symétrie, le terme \mathbf{a}_{i4} de l'équation (3.4) est remplacé par le vecteur \mathbf{r}_{S_i} . On a donc que

$$\gamma_i = \cos^{-1} \left(\frac{-\mathbf{r}_{S_i} \cdot \mathbf{l}_{i3}}{\|\mathbf{r}_{S_i}\| \|\mathbf{l}_{i3}\|} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Le schéma de la Fig. 3.4 illustre une articulation sphérique ainsi que les vecteurs impliqués. Pour chaque articulation sphérique, la valeur de γ_i est comparée à une valeur minimale. Lorsque la condition suivante est respectée :

$$\gamma_i \geq \gamma_i^{min}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

les limites des articulations sont respectées pour la configuration donnée du robot.

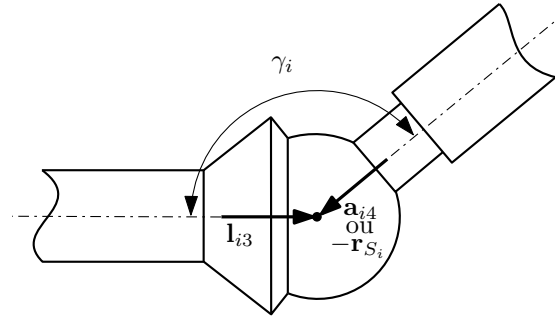


FIGURE 3.4 – Représentation schématique d'une articulation sphérique.

Afin de détecter les interférences entre les membrures, la distance entre chaque segment de droite du modèle d'analyse est évaluée lors de la réalisation des trajectoires de rotation. Lorsque la distance entre deux segments ou plus est sous un certain seuil prédéfini, il y a donc interférences mécaniques entre deux ou plusieurs pièces dans le modèle. Un algorithme d'évaluation de distance entre deux segments de droite est présenté à l'annexe B. Également, la plateforme est considérée comme étant un plan à $z = 0$. Lorsqu'une ou plusieurs articulations sphériques

S_i se trouvent sous ce plan, on considère qu'elles entrent en interférence avec la base.

Lorsque le robot réalise ses trajectoires de rotation à un point discrétisé et qu'il atteint une limitation mécanique, ce point ainsi que les points suivants correspondant aux incréments suivants de la valeur de r sont exclus de l'espace de travail en rotation. Le processus d'incrémentement de r est alors recommencé pour une valeur θ incrémentée. La prochaine section traite de l'optimisation de l'espace de travail en rotation en fonction de la variation de certains paramètres géométriques du robot.

3.4 Optimisation de l'espace de travail en rotation

Dans cette section, l'optimisation de l'espace de travail en rotation est effectuée. Des tendances du volume de l'espace de travail en rotation en fonction des paramètres géométriques R_b et R_p sont observées. Ainsi, une combinaison optimale des dimensions du robot est sélectionnée afin de guider les étapes de conception mécanique du robot.

3.4.1 Évaluation du volume de l'espace de travail

Afin d'estimer le volume de l'espace de travail en rotation, considérons les points formant la surface extérieure de l'espace de travail en rotation. Chacun de ces points (p_k) constitue le centre de la surface extérieure d'un élément de cylindre ayant un rayon r_{p_k} et une hauteur Δz , soit la valeur d'un incrément de z . Le cas est illustré à la Fig. 3.5. L'angle du segment

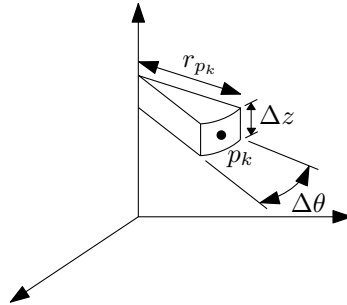


FIGURE 3.5 – Représentation d'un point q_i ainsi que le volume du segment de cylindre associé.

de cylindre correspond à $\Delta\theta$, soit la valeur d'un incrément de θ . Le volume d'un segment de cylindre correspondant à un point p_k est donné par l'équation suivante :

$$V_{p_k} = \int_0^{\Delta z} \int_0^{\Delta \theta} \int_0^{r_{p_k}} r \, dr d\theta dz = \frac{1}{2} \Delta \theta \Delta z r_{p_k}^2. \quad (3.7)$$

Le volume total de l'espace de travail du robot en rotation s'écrit comme la sommation des

volumes des segments de cylindre :

$$V_t = \sum_k V_{pk} = \frac{1}{2} \Delta\theta \Delta z \sum_k r_{pk}^2. \quad (3.8)$$

La quantification du volume de l'espace de travail en rotation permet ainsi d'établir des tendances plus précises en ce qui a trait à l'influence des paramètres géométriques sur ce dernier.

3.4.2 Variation des paramètres géométriques

Les paramètres géométriques R_b et R_p sont les variables d'optimisation. Leurs valeurs sont variées, de manière à observer des tendances du volume de l'espace de travail en rotation. Les longueurs l_2 et l_3 sont considérés comme étant égales ($l_2 = l_3$) afin de maximiser l'espace atteignable des jambes. Pour des fins de simplicité de l'étude, on fixe ces valeurs à 100 mm. L'étude de l'espace de travail en rotation est divisée en trois parties, soient l'étude basée sur la trajectoire en torsion, l'étude basée sur la trajectoire en inclinaison ainsi que l'influence des limitations aux articulations sphériques S_i .

3.4.3 Espace de travail en rotation basé sur la trajectoire en torsion

Dans cette sous-section, l'espace de travail en rotation basé sur la trajectoire en torsion selon différentes valeurs de R_b et R_p est étudiée. La Fig. 3.6 montre l'espace de travail en rotation basée sur le mouvement de l'effecteur en torsion du robot ayant les dimensions géométriques du Tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Dimensions du robot simulé, pour l'évaluation de l'espace de travail en rotation basée sur le mouvement de l'effecteur en torsion

R_b	R_p	$l_2 = l_3$
100 mm	100 mm	100 mm

À la vue de cette figure, l'ordre de grandeur du volume de l'espace de travail basé sur la trajectoire en torsion par rapport à celui du robot est acceptable. On peut également voir que le volume obtenu est trisymétrique. Le graphique de la Fig. 3.7 illustre les tendances du volume de l'espace de travail en rotation pour différentes valeurs de R_p et R_b .

À la vue de cette figure, on peut établir que l'espace de travail en rotation augmente lorsque le rayon de l'effecteur R_p diminue. En effet, en diminuant ce paramètre, l'extrémité des jambes du robot, soient les articulations S_i , deviennent mutuellement plus proches. Le déplacement des points S_i afin de réaliser une rotation en torsion de 90° est moins important. Cela permet ainsi de réaliser des trajectoires de torsion d'une plus grande amplitude sans atteindre les limites d'espace atteignable des jambes. On peut aussi noter que l'espace de travail en rotation basé sur le mouvement en torsion augmente également lorsque le paramètre R_b diminue. Les

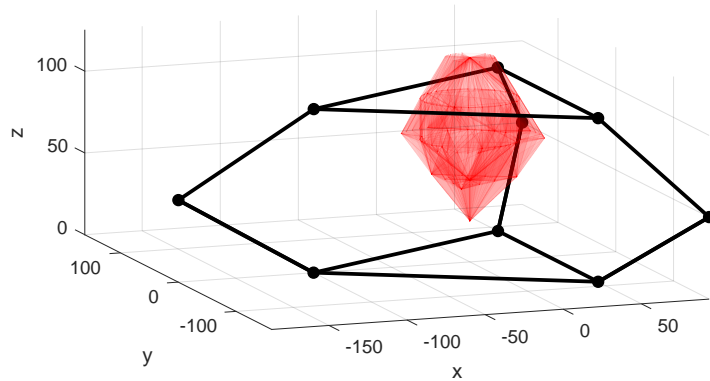


FIGURE 3.6 – Illustration de l'espace de travail pour le robot #1 présenté au Tableau 3.1, basé sur le mouvement en torsion de l'effecteur. Le volume de l'espace de travail est estimé à $2.026 \times 10^5 \text{ mm}^3$.

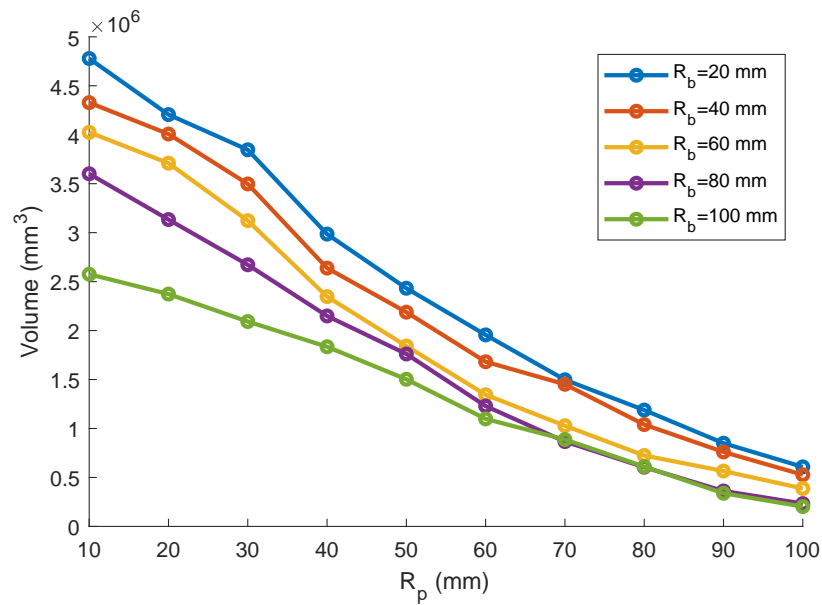


FIGURE 3.7 – Volume de l'espace de travail en rotation basé sur le mouvement en torsion de l'effecteur en fonction de R_p et R_b , lorsque les paramètres l_2 et l_3 sont de 100 mm .

dimensions du robot permettant de maximiser l'espace de travail en torsion de la plateforme sont les valeurs les plus basses possibles de R_p et R_b .

3.4.4 Espace de travail en rotation basé sur la trajectoire en inclinaison

Dans cette sous-section, l'espace de travail en rotation basé sur la trajectoire en inclinaison de la plateforme en fonction des grandeurs géométriques est étudiée. Les paramètres géométriques R_b et R_p sont variés afin d'observer les tendances sur le volume. La Fig. 3.8 montre l'espace de travail en rotation basée sur le mouvement de l'effecteur en inclinaison du robot ayant les dimensions géométriques du Tableau 3.2.

TABLEAU 3.2 – Dimensions du robot simulé, pour l'évaluation de l'espace de travail en rotation basée sur le mouvement de l'effecteur en inclinaison

R_b	R_p	$l_2 = l_3$
100 mm	50 mm	100 mm

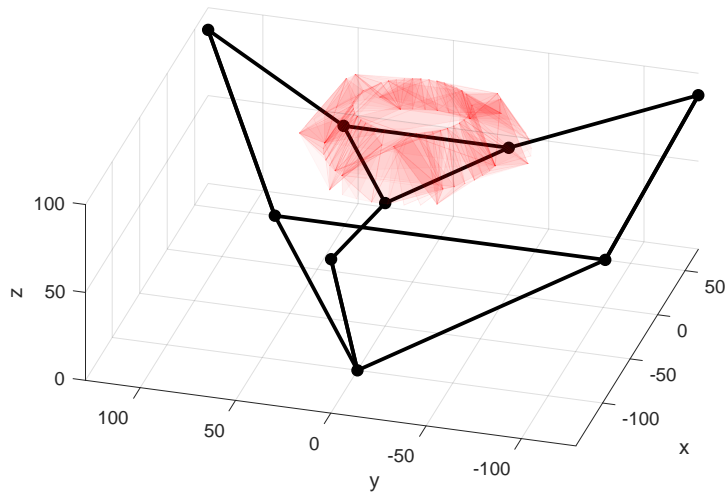


FIGURE 3.8 – Illustration de l'espace de travail en rotation pour le cas de simulation # 2, basé sur le mouvement en inclinaison de l'effecteur. Le volume de l'espace de travail est estimé à $3.1259 \times 10^5 \text{ mm}^3$.

L'espace de travail en rotation basé sur la trajectoire en inclinaison est concentré pour des valeurs de positionnement de la plateforme en z plus élevées. Ceci s'explique par le fait que la coordonnée de position en hauteur z des articulations sphériques S_i est variable durant l'inclinaison de la plateforme. Pour des valeurs de positionnement de la plateforme plus près de la base, il y a plus de risques qu'une des articulations sphériques entre en interférence avec la base (le plan $z = 0$). Le graphique de la Fig. 3.9 illustre les tendances du volume de l'espace de travail en rotation basé sur le mouvement de la plateforme en inclinaison en fonction des longueurs R_p et R_b .

En comparant l'ordre de grandeur des volumes d'espace de travail en rotation obtenus aux graphiques 3.7 et 3.9, la trajectoire de la plateforme en inclinaison est plus restrictive que celle en torsion. Pour des valeurs de R_p plus élevées, les tendances du volume tendent vers

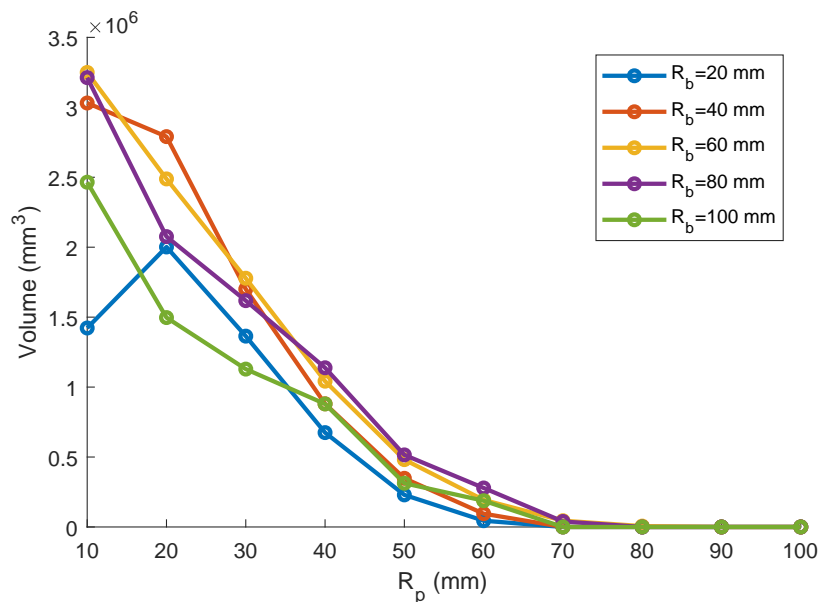


FIGURE 3.9 – Volume de l’espace de travail en rotation basé sur le mouvement en inclinaison de l’effecteur en fonction de R_p et R_b , lorsque les paramètres l_2 et l_3 sont de 100 mm.

une valeur nulle. Le volume de l’espace de travail en orientation basé sur la trajectoire en inclinaison demeure plus sensible à la variation de R_p . Le croisement des courbes montre que les dimensions optimales du robot à opter ne sont pas nécessairement des valeurs basses de R_p et R_b . Le comportement n’est pas seulement influencé par les limites atteignables des jambes, mais également par quelques interférences mécaniques.

3.4.5 Combinaison des deux trajectoires de rotation

Dans la présente section, les trajectoires de torsion et d’inclinaison sont combinées afin d’observer des tendances générales sur le volume de l’espace de travail en rotation du robot. Le graphique de la Fig. 3.10 illustre les tendances du volume de l’espace de travail en rotation basé sur les deux trajectoires en rotation définies plus haut.

L’espace de travail du robot basé sur les deux trajectoires de rotation est l’intersection entre les espaces de travail basé sur les deux trajectoires séparées. La trajectoire en inclinaison étant plus restrictive, les tendances obtenues au graphique de la Fig. 3.10 sont similaires à celles du graphique de la Fig. 3.9. Comme pour les tendances obtenues pour la trajectoire en inclinaison, pour des valeurs basses de R_b , la valeur de R_p optimale n’est pas nécessairement la plus basse. De plus, des valeurs basses de R_b ne génèrent pas nécessairement un volume d’espace de travail en rotation optimal. Selon les courbes illustrées au graphique de la Fig. 3.10, un cas de dimensionnement optimal est lorsque la longueur R_b est de 60% à 80% de la dimension des membrures i_2 et i_3 (considérant qu’elles sont de même longueur). Dans ce cas,

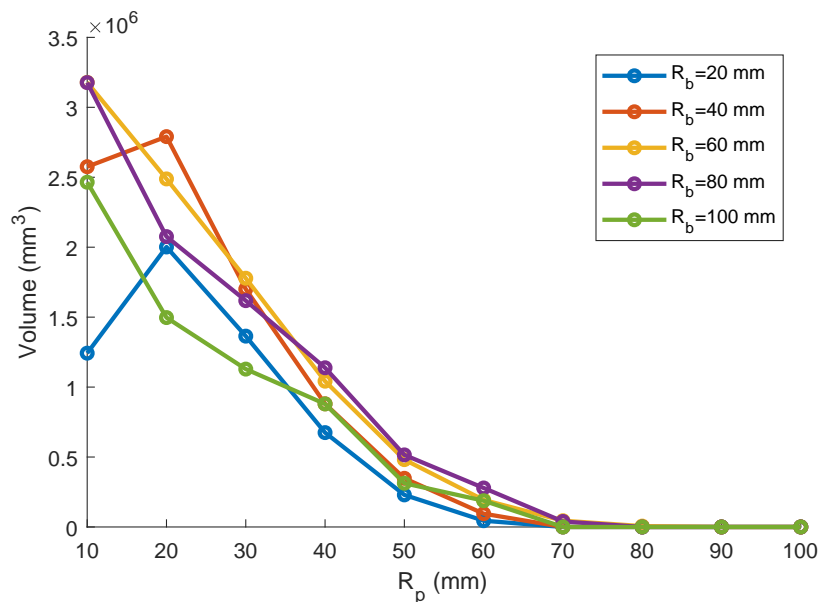


FIGURE 3.10 – Volume de l’espace de travail en rotation basé sur le mouvement en torsion et en inclinaison de l’effecteur en fonction de R_p et R_b , lorsque les paramètres l_2 et l_3 sont de 100 mm .

la plus petite dimension possible de R_p est optimale.

3.4.6 Ajout des limitations des articulations sphériques S_i

Dans l’analyse de l’espace de travail en rotation, les limitations aux articulations doivent également être considérées. Dans le cas présent, les articulations les plus critiques sont les sphériques S_i . Il devient donc intéressant de statuer sur l’effet qu’ont les limitations de ces articulations sur le volume de l’espace de travail en rotation du robot. Pour ce faire, considérons le modèle possédant les paramètres géométriques optimaux du graphique de la Fig. 3.10. Ces derniers sont illustrés au Tableau 3.3. Le graphique illustré à la Fig. 3.11 illustre la tendance du volume, basé sur les trajectoires d’inclinaison et de torsion de l’effecteur, en fonction de l’angle minimal acceptable γ_i^{min} aux articulations sphériques (tel que défini à la section 3.3.3).

À la vue de ce graphique, le débattement des articulations sphériques S_i est directement

TABLEAU 3.3 – Dimensions du robot pour l’évaluation de l’effet des articulations sphériques

R_b	R_p	$l_2 = l_3$
60 mm	10 mm	100 mm

lié aux capacités en rotation de la plateforme. Le volume de l’espace de travail s’en trouve diminué pour des valeurs élevées de γ_i^{min} . Par contre, on observe qu’une diminution de γ_i^{min} en deçà de 30 degrés ne procure pas un gain significatif. L’effet de γ_i^{min} est très important à prendre en compte, et ce, en choisissant des articulations sphériques permettant un grand

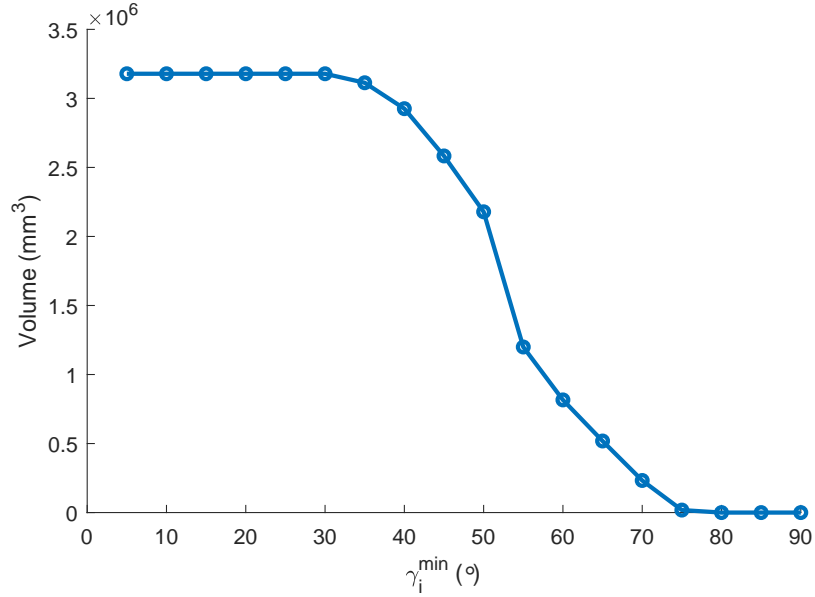


FIGURE 3.11 – Volume de l’espace de travail en rotation en fonction de l’angle minimal permis γ_i aux articulations sphériques S_i , basé sur les trajectoires d’inclinaison et de torsion de l’effecteur lorsque les paramètres géométriques sont ceux du Tableau 3.3.

débattement.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude de l’espace de travail du robot selon différents paramètres géométriques est effectuée. Les concepts d’espaces de travail en translation et en orientation sont approfondis et une méthode d’évaluation de ces espaces est développée. Parmi les étapes de cette méthode, la discrétisation de l’espace, les limitations mécaniques du robot et un algorithme d’évaluation de la distance entre deux segments de droite sont expliqués. Les trajectoires de rotation en inclinaison et en torsion sont effectuées aux points discrétisés. L’espace de travail en orientation se définit par les points dans l’espace auxquels le robot peut réaliser ces trajectoires de rotation sans atteindre une limite mécanique. Des tendances sur le volume de cet espace sont établies en fonction des dimensions du robot.

Avec cette étude, il est conclu que le volume de l’espace de travail en rotation est maximisé lorsque la proportion de la dimension R_b se trouve entre des valeurs de 60% à 80% de la longueur de la membrure $i2$ ou $i3$ (considérant qu’elles sont de la même longueur). Dans ce cas, la plus petite dimension possible de R_p est optimale. Il est également conclu que les articulations sphériques affectent grandement le volume de l’espace de travail en rotation lorsqu’un débattement minimal aux articulations sphériques est imposé. Ces tendances observées sur le volume de l’espace de travail en rotation sont prises en compte dans les étapes de conception

mécanique décrites dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Conception mécanique du robot

Dans le présent chapitre, la conception mécanique du robot est développée en fonction des différents éléments observés dans les chapitres précédents. D'abord, une brève revue des exigences techniques est effectuée. Par la suite, le concept du robot est présenté ainsi que ses différentes parties. Ensuite, une section discute de la conception mécanique des jambes, spécifiquement basée sur le modèle simplifié de la section 2.4. Les configurations singulières des jambes discutées à la section 2.3 sont également prises en compte. Une autre section porte sur la conception mécanique de la plateforme en considérant les configurations singulières discutées à la section 1.3. Une architecture spécifique de la plateforme exploitant les degrés de liberté redondants est également détaillée. Finalement, une section discute de l'intégration des jambes et de l'effecteur afin de composer le robot.

4.1 Exigences techniques

Le robot conçu dans le cadre de ce projet est utilisé dans un contexte de coopération humain-robot. Il peut éventuellement être utilisé pour faire de l'haptique. Ce robot doit donc posséder les caractéristiques d'une interface haptique intuitive qui est facilement rétrocommandable. Pour ce faire, les effets inertiels du robot doivent être minimisés. Aucun réducteur amplifiant l'inertie des rotors des actionneurs n'est utilisé. Les moteurs sont donc tous utilisés en entraînement direct.

La force disponible à l'effecteur ne doit pas être très élevée, de manière à ne pas compromettre la sécurité de l'utilisateur en cas de collision de l'effecteur avec celui-ci. Une force disponible à l'effecteur de 1 *kg* est amplement suffisante afin de réaliser des trajectoires de *pick-and-place* de petits objets pour des fins de démonstration. Les membrures des jambes ainsi que la pince à l'effecteur doivent être conçus de façon à supporter cette charge.

Le robot doit avoir le plus grand espace de travail en rotation possible. Le dimensionnement du robot doit donc être effectué de manière à maximiser son espace de travail. La mobilité du robot ne doit pas non plus être limitée par les configurations singulières établies plus tôt. La conception mécanique fonctionnelle doit être adaptée afin d'éviter ces configurations.

4.2 Concept mécanique générale du robot

Dans cette section, le concept mécanique général du robot est présenté. Ce dernier est illustré conceptuellement en modèle 3D avec ses différentes parties identifiées, à la Fig. 4.1. La plateforme incluant la pince est fabriquée par prototypage rapide, soit en ABS. Les jambes et la base sont composées principalement d'aluminium usiné. Les articulations sphériques faisant le lien entre les jambes et la plateforme sont également fabriquées en aluminium usiné. Les différentes parties identifiées de la Fig. 4.1 sont présentées en détails dans les sections suivantes. Finalement, le prototype du robot est illustré à la Fig. 4.2.

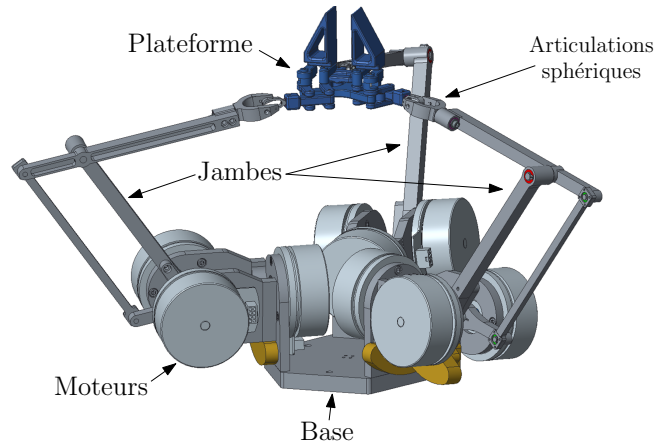


FIGURE 4.1 – Robot représenté dans le logiciel de CAO.

4.3 Conception mécanique des jambes

Dans cette section, la conception mécanique des jambes est abordée. L'architecture des jambes est de type hybride, suivant le modèle cinématique simplifié développé à la section 2.4. Un bref aperçu du design est montré. Le format et l'agencement des membrures sont choisis de manière à éviter les singularités décrites à la section 2.3. De plus, des contrepoids sont ajoutés au mécanisme afin de contrebalancer les couples causés par le poids des membrures. Les calculs relatifs à ceux-ci sont présentés dans cette section.

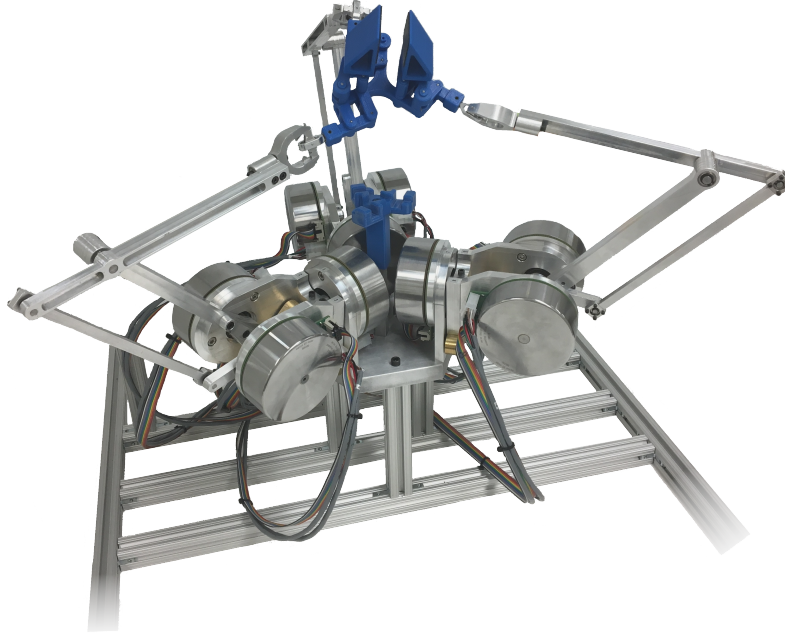


FIGURE 4.2 – Prototype du robot.

4.3.1 Description mécanique

Une jambe du robot est illustrée à la Fig. 4.3a. Cette jambe et la base sont reliées par le support fixe. Sur ce support est fixé le moteur du premier axe, soit à l'articulation actionnée R_{i1} . À ce moteur est fixé le support mobile et le mécanisme plan à 5 barres. Afin d'équilibrer statiquement le mécanisme plan, un contrepoids est utilisé. Cet équilibrage statique a pour but de diminuer les couples gravitationnels au moteurs $i2$ de manière à contrebalancer le plus possible le poids des membrures et de la plateforme. Un deuxième contrepoids pour la jambe est fixé au support mobile afin d'équilibrer le mécanisme de la jambe par rapport à l'articulation R_{i1} et ainsi de diminuer les couples gravitationnels au premier axe. Le calcul des contrepoids est discuté en détails à la section 4.3.4.

Les moteurs utilisés sont les EC90 fabriqués par Maxon. Les spécifications de ces moteurs sont présentées à l'annexe C. L'intérêt lié à l'utilisation de ces moteurs est que le couple à l'arbre est très élevé pour le format.

4.3.2 Design des membrures

Le dimensionnement géométrique des membrures est effectué en fonction du couple disponible aux actionneurs. En effet, les longueurs des bras de levier sont choisies de manière à maximiser l'espace de travail du robot, sans dépasser les couples disponibles aux moteurs. Les longueurs choisies pour le mécanisme plan sont présentées à l'annexe D. La longueur l_1 est déterminée en fonction des composants mécaniques de manière à minimiser l'espace occupé par ceux-ci.

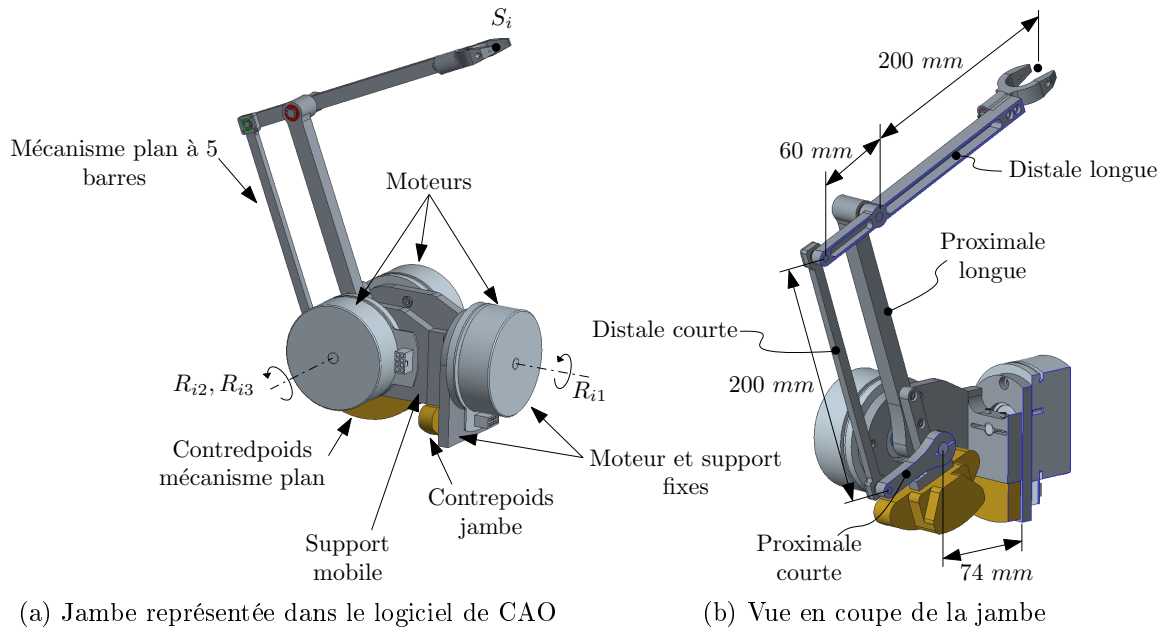


FIGURE 4.3 – Vue de la jambe représentée dans le logiciel de CAO.

Après plusieurs itérations de conception mécanique, la valeur choisie pour ce paramètre est de 74 mm . Une vue en coupe de la jambe avec les longueurs géométriques ainsi que l'identification des membrures est présentée à la Fig. 4.3b.

La section de chaque membrure est déterminée en fonction des charges qu'elle a à supporter, selon le chargement appliqué à l'effecteur de la jambe (au point S_i). La membrure proximale longue est conçue de manière à reprendre les charges en torsion et en flexion, de sorte que les charges reprises par la membrure distale courte soient uniquement en tension-compression, ce qui explique la section plus petite de cette dernière. De plus, les contraintes internes dans les membrures à proximité de la charge appliquée au point S_i sont moins importantes que celles présentes dans les membrures plus près de la base. En effet, tel que vu à la Fig. 4.3b, l'aire de section des membrures proximales est plus importante que celle des membrures distales. Le poids des membrures proximales est donc plus élevé. Cependant, l'effet de celles-ci sur l'inertie du mécanisme perçue par les moteurs est moins important puisque ces membrures sont plus près des axes actionnés.

4.3.3 Évitement des singularités de type I

Les jambes du robot doivent être conçues de manière à empêcher les configurations singulières de se produire. L'évitement de celles-ci se fait par la limitation du mouvement des membrures en introduisant des interférences dans le mécanisme. L'agencement des membrures du mécanisme à cinq barres est réalisé de manière à éviter certains cas de parallélisme entre les

membrures, tels que discutés à la section 2.3. L'interférence mécanique illustrée à la Fig.4.4a survient lors de l'extension de la jambe. Les membrures distales et proximales courtes ($i5$ et $i6$) entrent en collision avec le contrepois du mécanisme plan. L'interférence illustrée à la Fig. 4.4b survient lors du repliement de la jambe. La membrure proximale longue ($i2$) entre en collision avec la membrure distale courte.

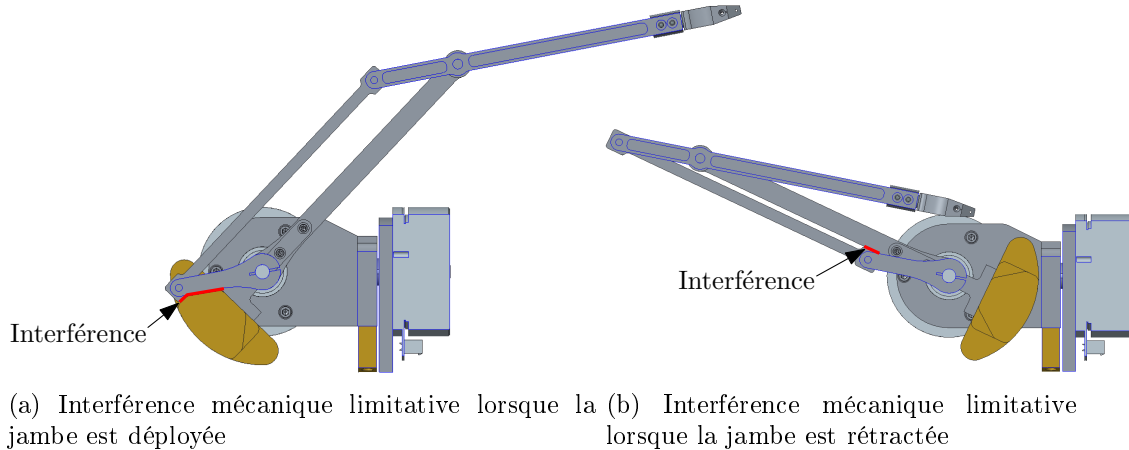


FIGURE 4.4 – Interférences mécaniques entre les membrures afin d'éviter le parallélisme des membrures.

Afin d'éviter les cas de singularité où l'articulation S_i est située sur le premier axe R_{i1} , la disposition des jambes est faite de manière à ce que les axes de rotation R_{i1} ne passent pas dans l'espace de travail du robot. Elles sont disposées de manière à ce qu'elles soient contenues dans le plan xy de la base. En effet, il est montré au chapitre 3 que l'espace de travail en rotation du robot est situé au dessus de la base.

4.3.4 Calculs relatifs à l'équilibrage statique

Afin de diminuer les couples gravitationnels causés par le poids des membrures et de l'effecteur du robot, l'équilibrage statique par l'ajout de contrepois est préconisé. Les couples statiques aux moteurs étant réduits, les performances dynamiques du robot s'en trouvent grandement améliorées. Une jambe est composée d'un mécanisme parallèle plan tournant par rapport à l'axe R_{i1} . Afin qu'elle soit équilibrée, la position du centre de masse de ce mécanisme doit être confondue avec l'axe de rotation R_{i1} . La Fig. 4.5 illustre un schéma du mécanisme plan de la jambe avec les masses en jeu. Afin de compenser le poids des membrures du mécanisme, des masses identifiées m_{c2} et m_{c3} constituent les contrepois pour chaque degré de liberté du mécanisme (θ_{i2} et θ_{i3}). L'équation suivante exprime l'énergie potentielle du mécanisme plan

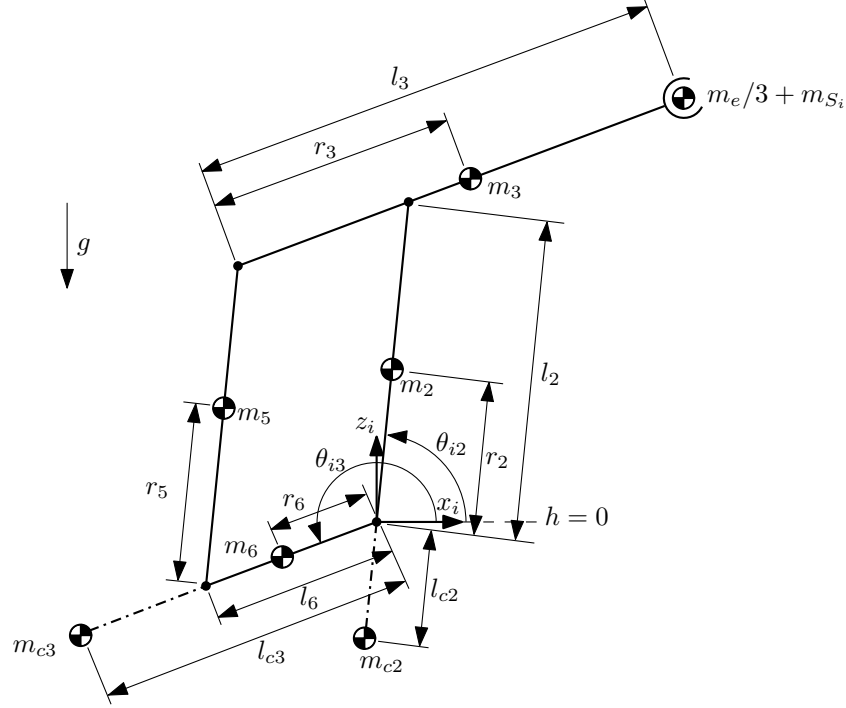


FIGURE 4.5 – Schéma des masses du mécanisme plan.

en fonction des coordonnées articulaires et des grandeurs physiques :

$$E_p = m_2gr_2 \sin(\theta_{i2}) + m_6gr_6 \sin(\theta_{i3}) + m_5g(l_6 \sin(\theta_{i3}) + r_5 \sin(\theta_{i2})) + m_3g(l_2 \sin(\theta_{i2}) + (l_2 - r_3) \sin(\theta_{i3})) + (m_e/3 + m_{S_i})g(l_2 \sin(\theta_{i2}) + (l_2 - l_3) \sin(\theta_{i3})) - m_{c2}gl_{c2} \sin(\theta_{i2}) + m_{c3}gl_{c3} \sin(\theta_{i3}). \quad (4.1)$$

où les variables r_k représentent la position du centre de masse de la membrure k par rapport à l'un de ses points de pivot. Le terme m_e représente la masse de la plateforme du robot. Afin d'approximer l'effet de celle-ci sur le mécanisme, cette dernière est divisée en 3. Le terme m_{S_i} représente la masse de l'articulation sphérique S_i . Le repère d'origine ($h = 0$) est situé au premier axe de rotation R_{i1} . L'équation (4.1) se réécrit de la façon suivante :

$$E_p = Ag \sin(\theta_{i2}) + Bg \sin(\theta_{i3}) \quad (4.2)$$

où g est la constante gravitationnelle et

$$A = m_2r_2 + m_5r_5 + m_3l_2 - m_{c2}l_{c2} + m_e l_2 \quad (4.3)$$

$$B = m_6r_6 + m_3(l_2 - r_3) + m_{c3}l_{c3} + (m_e/3 + m_{S_i})(l_3 - l_2). \quad (4.4)$$

Le mécanisme est équilibré statiquement lorsque l'énergie potentielle de celui-ci est constante peu importe les valeurs de θ_{i2} et θ_{i3} . On doit donc avoir,

$$A = B = 0. \quad (4.5)$$

On a alors que,

$$m_{c2}l_{c2} = m_2r_2 + m_5r_5 + m_3l_2 + m_e l_2 \quad (4.6)$$

$$m_{c3}l_{c3} = m_3(r_3 - l_2) - m_6r_6 + m_e(l_2 - l_3). \quad (4.7)$$

L'utilisation de deux contrepoids peut être encombrant pour le mécanisme. Afin de réduire l'encombrement des contrepoids, une approche possible proposée par Laliberté et Gosselin [16] consiste à équilibrer le mécanisme avec un pantographe. Cette approche consiste à ramener ces deux contrepoids à un seul soit en posant la valeur des deux contrepoids étant égaux, soit

$$m_{c2} = m_{c3} = m_c. \quad (4.8)$$

Selon la valeur choisie de m_c , les valeurs de l_{c2} et l_{c3} sont calculées et le contrepoids est placé dans le mécanisme, à l'endroit correspondant au parallélogramme de longueurs l_{c2} et l_{c3} , tel qu'illustré à la Fig. 4.6. Cependant, cette stratégie engendre un mouvement du contrepoids

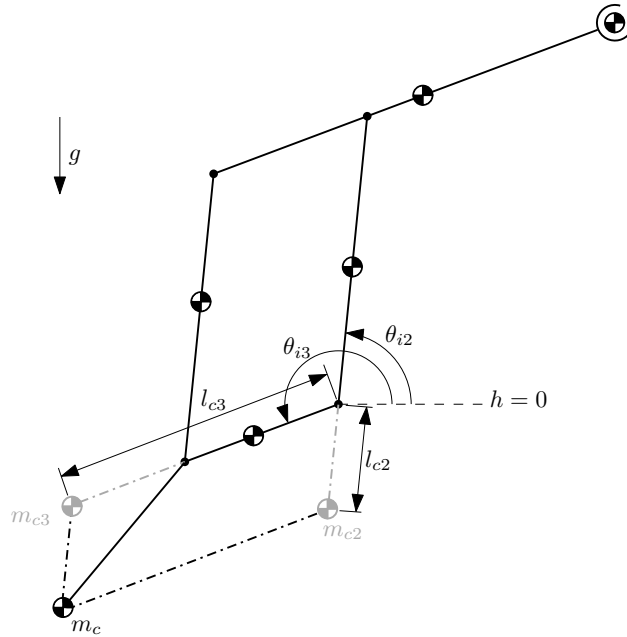


FIGURE 4.6 – Équilibrage statique avec une seule masse.

selon les deux degrés de liberté du mécanisme plan. Cela augmente donc les possibilités d'interférences mécaniques entre le contrepoids et les autres composants du robot. Cette stratégie enlève beaucoup d'espace de travail au robot.

Pour des fins de réduction de l'encombrement mécanique, l'approche utilisée pour l'équilibrage du prototype est de compenser une partie des effets gravitationnels. Dans le cas présent, un calcul statique a permis d'établir que le poids repris par le moteur de l'articulation R_{i2} est le plus critique. De plus, en termes d'encombrement mécanique, il est facile à compenser. On

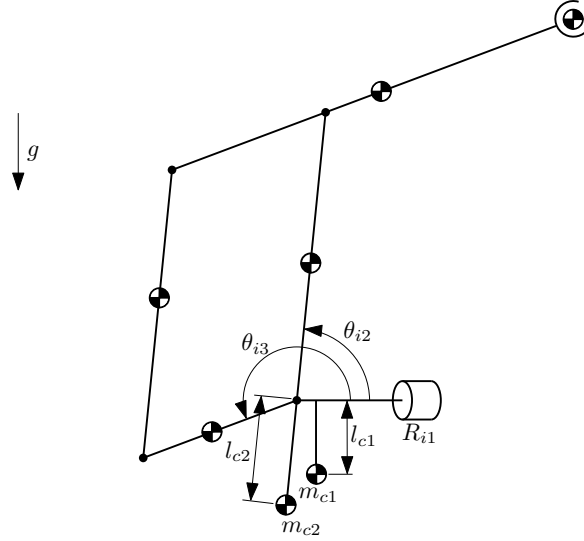


FIGURE 4.7 – Équilibrage statique avec une seule masse pour le degré de liberté θ_{i2} .

a donc le cas d'équilibrage illustré à la Fig. 4.7. L'ajout d'un contrepoids m_{c1} sur la jambe par rapport à l'axe de l'articulation R_{i1} contribue à l'équilibrage statique approximatif, tout en minimisant les interférences mécaniques. Les poids, les données d'inertie et les dimensions mécaniques des membrures du robot sont données à l'annexe D.

4.4 Conception mécanique de la plateforme

Dans cette section les principales étapes de conception de l'effecteur sont présentées. Le design mécanique est effectué de manière à éviter les singularités de type II présentées à la Sec. 1.3. Des exigences mécaniques sont d'abord posées. Ensuite, un concept équivalent remplaçant les articulations rotoïdes R_{i4} par des mécanismes à quatre barres est proposé. Ce concept permet l'utilisation des degrés de liberté redondants afin de mettre en œuvre un préhenseur qui est actionné par les moteurs aux jambes. L'architecture mécanique de l'effecteur est discutée et les relations géométriques pour déterminer l'ouverture des doigts sont également données.

4.4.1 Évitement des singularités de type II

Afin d'éviter les singularités de type II, une approche basée sur l'ajout d'interférences mécaniques est également utilisée. Un schéma simplifié de l'effecteur est illustré à la Fig. 4.8. Pour éviter les cas de singularité de la première catégorie présentées à la section 1.3, des intervalles d'opérations pour les angles β_i , sont définis comme suit :

$$\beta_i \in]\beta_i^{min}; \beta_i^{max}[=]30^\circ; 150^\circ[. \quad (4.9)$$

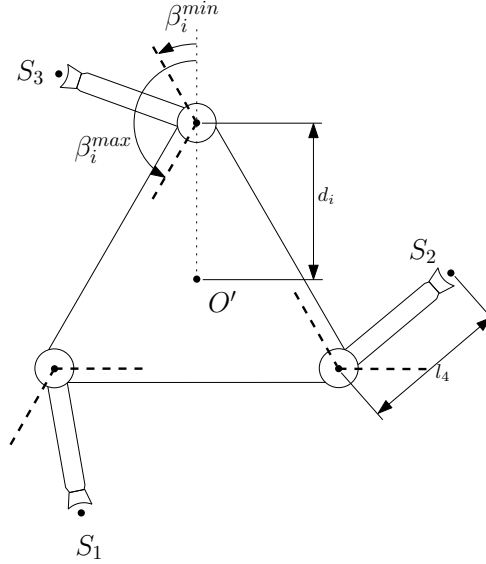


FIGURE 4.8 – Schéma de la plateforme avec les membrures $i4$.

Dans ces domaines de β_i , il peut être démontré qu'aucun cas de singularité où les lignes d'action des vecteurs \mathbf{a}_{i4} sont parallèles ou se croisent ne peut se produire. Afin d'éviter les singularités de type II à l'effecteur, des interférences sont introduites dans le mécanisme afin de limiter le mouvement des degrés de liberté redondants à cet intervalle d'angles.

Afin d'éviter les cas de singularité de la deuxième catégorie présentés à la Sec. 1.3, les membrures $i4$ doivent être relativement courtes par rapport à la dimension R_p de la plateforme. Ces membrures doivent être assez courtes de façon à ce que les points S_i ne se situent jamais sur une droite commune. La longueur des membrures $i4$ doit être déterminée tel que,

$$l_4 < \frac{3}{4}R_p. \quad (4.10)$$

En d'autres termes, la longueur des membrures l_4 ne doit pas être plus grande que la moitié de la hauteur du triangle équilatéral formé par les articulations R_{i4} .

4.4.2 Remplacement des membrures $i4$ par des mécanismes à quatre barres

Pour des fins de robustesse mécanique, les membrures $i4$ et les articulations R_{i4} sont remplacées par des mécanismes à quatre barres. Ces derniers sont de forme parallélogramme de manière à ce qu'ils soient cinématiquement équivalents au concept avec les membrures $i4$. Le schéma de la Fig. 4.9 illustre le mécanisme de l'effecteur sous forme filaire. Dans cette figure, les membrures $i4$ et les articulations R_{i4} deviennent "virtuelles". Les longueurs des membrures sont déterminées de manière à ce que les articulations S_i décrivent un arc de cercle de rayon l_4

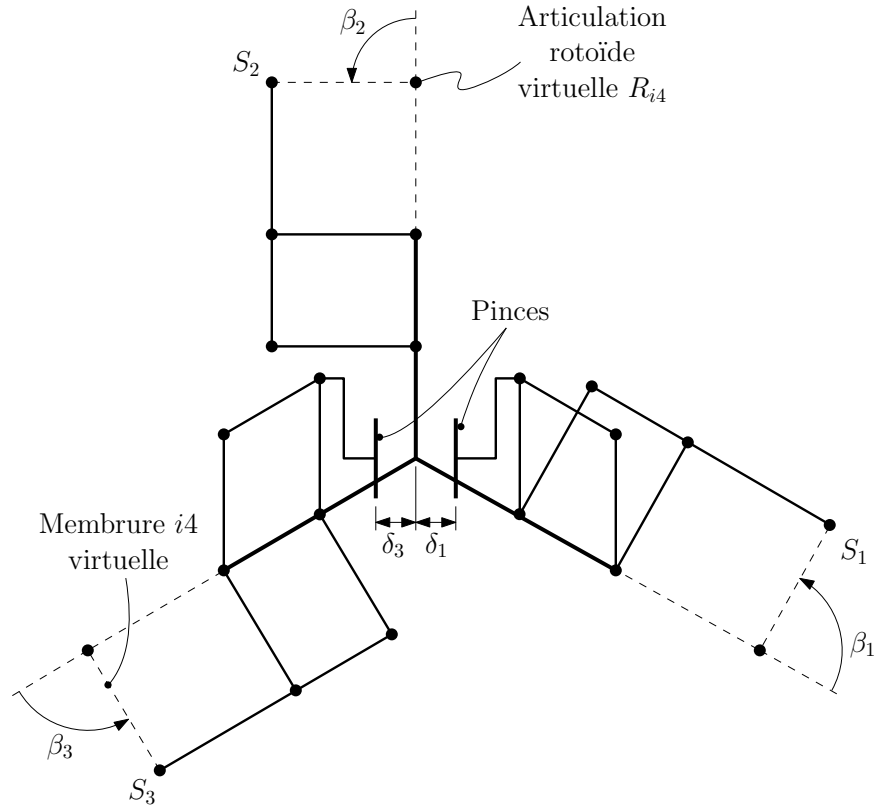


FIGURE 4.9 – Schéma de la plateforme avec les mécanismes à quatre barres afin de remplacer les membrures $i4$ et les articulations R_{i4} .

centré au point virtuel R_{i4} . Deux degrés de liberté redondants, soit ceux décrits par les angles β_1 et β_3 sont utilisés afin d'opérer une pince parallèle à deux doigts. L'utilisation de deux doigts permet la prise de la plupart des objets. Les avantages liés à l'utilisation des mécanismes à quatre barres sont notamment la robustesse et la concentration des composants mécaniques dans le milieu de l'effecteur, minimisant ainsi les possibilités d'interférences mécaniques avec les jambes. Afin d'opérer la pince, deux degrés de liberté redondants sont utilisés. Le degré de liberté inutilisé, soit celui décrit par l'angle β_2 , demeure à un angle de 90° afin d'éviter les configurations singulières. L'ouverture des doigts, soient les variables δ_1 et δ_3 sont définies comme étant la distance normale entre le centre de l'effecteur et la surface de contact du doigt correspondant. Les relations géométriques d'ouverture des doigts en fonction des angles β_1 et β_3 sont les suivantes :

$$\delta_1 = \delta_{max} \left(\frac{1}{2} + \cos \beta_1 \right) \quad (4.11)$$

$$\delta_3 = \delta_{max} \left(\frac{1}{2} - \cos \beta_3 \right) \quad (4.12)$$

où δ_{max} est l'ouverture maximale de chaque doigt qui est égale à 25 mm . Le concept illustré dans le logiciel de CAO est présenté à la Fig. 4.10. Les mécanismes sont conçus de manière à ce que les plages d'opération des angles β_1 et β_3 se situent entre 60° et 120° , soit dans les

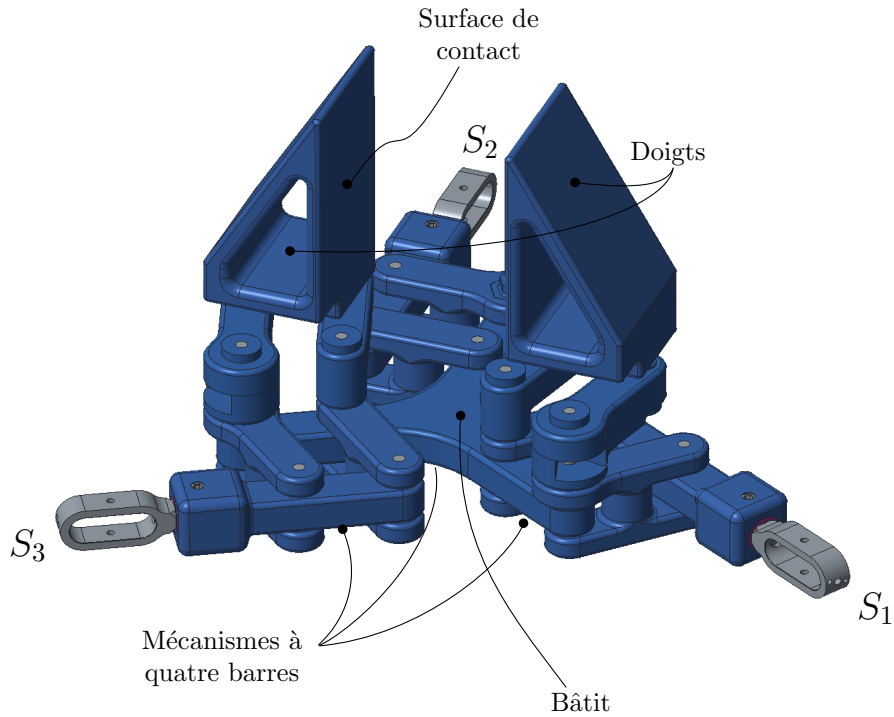


FIGURE 4.10 – Plateforme représentée dans le logiciel de CAO.

intervalles d'angle définies à la section 4.4.1. La Tableau 4.1 suivant montre les valeurs des angles selon l'ouverture ou la fermeture des pinces.

TABLEAU 4.1 – Angles β_i selon l'ouverture des doigts

	$\beta_1(^{\circ})$	$\beta_2(^{\circ})$	$\beta_3(^{\circ})$
ouvert	60	90	120
fermé	120	90	60

Les pinces sont munies d'un mécanisme compliant, de manière à toujours être non sur-contraintes dynamiquement lors de la prise d'un objet rigide. Sans cette compliance dans le mécanisme, un contrôleur complexe impliquant un contrôle en force aux doigts doit être implanté de manière à garder la même force de fermeture des pinces pour ne pas échapper l'objet lors de la prise. Le mécanisme compliant développé permet la prise d'un objet, laissant ainsi une marge d'erreur sur la position des articulations sphériques S_i lors de la prise d'un objet. Ce mécanisme est composé d'un ressort en torsion pour chaque doigt. Ce ressort est situé entre les barres proximales et les barres distales de chaque doigt. Le mécanisme est montré à la Fig. 4.11.

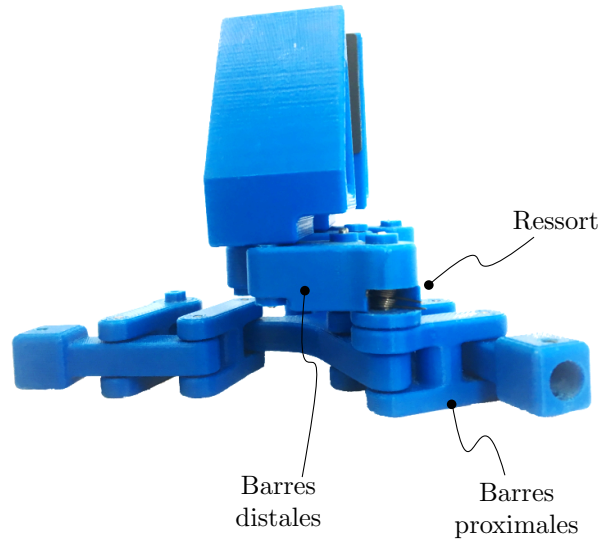


FIGURE 4.11 – Mécanisme compliant pour la saisie d’objets.

4.5 Conception mécanique du robot

Dans cette section, la mise en commun des éléments du robot, soient les jambes, la plateforme et la base du robot est discutée. Les liaisons S_i entre la plateforme et les jambes sont discutées. Le dimensionnement de la base et de la plateforme par rapport à l’espace de travail en orientation est également discuté.

4.5.1 Liaisons entre les jambes et la plateforme

À la section 3.4.6, il est montré que le débattement des articulations sphériques S_i est très déterminant pour le volume de l’espace de travail en rotation. Étant donné que la plateforme du robot doit réaliser de grandes rotations sans être contrainte par ces articulations S_i , le concept d’articulation sphérique développé par Schreiber et Gosselin [23] possédant un grand débattement est utilisé. L’angle minimal γ_i^{min} de ce concept d’articulation sphérique est de 30° . Ces articulations sont illustrées aux Figs. 4.1 et 4.2

4.5.2 Espace de travail en rotation du robot

Au chapitre 3, une étude de l’espace de travail du robot en rotation selon les dimensions de la base et de la plateforme est effectuée. Dans cette section, les dimensions de la base et de l’effecteur sont comparées à celles des jambes afin de vérifier si elles sont optimales.

Le dimensionnement de la base est réalisé de manière à minimiser le plus possible la valeur de R_b . Cette dimension inclut la distance entre le centre de la base et le point d’attache d’une jambe, soit c_i ainsi que la longueur de la membrure $i1$, soit l_1 , puisque les axes de rotation R_{i1}

sont dans le plan xy la base. On a donc que la valeur de ce paramètre est de 159.35 mm , soit 79.68% de la dimension des membrures $i2$ et $i3$. Ce ratio est favorable à la maximisation de l'espace de travail puisqu'il se situe entre 60 et 80% de la dimension des membrures $i2$ et $i3$. Le dimensionnement de la plateforme est également réalisé de manière à minimiser la valeur de R_p . Cette dimension inclut seulement la valeur de d_i qui est de 77.662 mm , soit 38.83% de la dimension des membrures $i2$ et $i3$. En se rapportant au graphique de la Fig. 3.10, on a que la dimension de la plateforme n'est pas la plus optimale pour cette valeur de R_b . Cependant, la charge de 1 kg à l'effecteur du robot demande une conception mécanique plus robuste de celui-ci. Pour des fins de résistance des matériaux, le mécanisme de l'effecteur ne peut être plus petit.

L'espace de travail en rotation résultant des dimensions présentées dans ce tableau est illustré à la Fig. 4.12. La taille de l'espace de travail en rotation du robot est de $8.656 \times 10^6 \text{ mm}^3$. L'allongement des membrures $i2$ et $i3$ contribue grandement à l'agrandissement de l'espace de

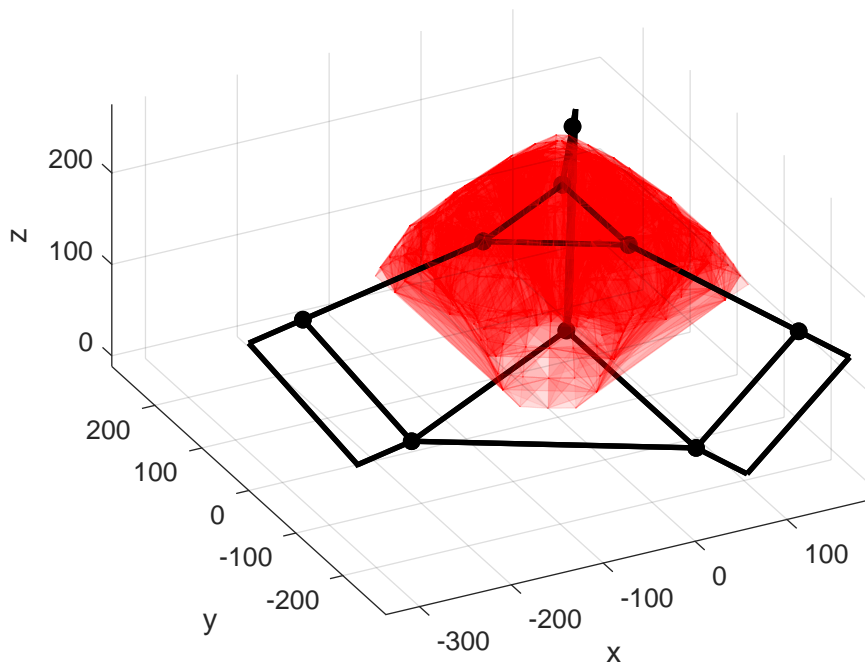


FIGURE 4.12 – Espace de travail en rotation du robot conçu, le volume de cet espace fait $8.656 \times 10^6 \text{ mm}^3$.

travail en rotation. L'ajout des membrures parallèles aux jambes (comparativement au modèle d'étude présenté au chapitre 3) n'affecte pas significativement le volume de l'espace de travail en rotation. En effet, celles-ci se situent à l'arrière des jambes, loin des zones propices aux interférences mécaniques avec les autres jambes.

4.5.3 Vidéo du prototype

À ce mémoire est joint un fichier vidéo montrant le prototype en action. Différentes trajectoires sont réalisées notamment en torsion et en inclinaison, afin de démontrer le grand espace de travail du robot. Une trajectoire de "pick-and-place" est également réalisée afin de montrer un exemple d'application réelle de ce robot. Finalement, le robot est appliqué à une interface haptique collaborative. Avec l'interface haptique, l'utilisateur enseigne une trajectoire au robot via l'effecteur et ce dernier reproduit exactement la trajectoire par la suite.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les principaux aspects de la conception mécanique du robot sont développés. Un système de contrepoids est développé de manière à minimiser les couples gravitationnels repris aux actionneurs. Celui-ci se compose d'un contrepoids placé par rapport aux articulations R_{i1} et R_{i2} . L'effecteur s'apparente à un mécanisme plan parallèle possédant trois mécanismes à quatre barres. Ceux-ci remplacent les membrures $i4$, donnant plus de robustesse au mécanisme tout en réduisant les risques d'interférences mécaniques de celui-ci avec les jambes. Un système de préhenseur est également intégré à l'effecteur afin d'exploiter les degrés de liberté redondants. Finalement, l'espace de travail en rotation du robot est évalué, selon la méthode développée au chapitre 3. Le chapitre suivant traite de la sensibilité et la précision du robot à différentes configurations.

Chapitre 5

Étude de la sensibilité cinématique du robot

Dans ce chapitre, la sensibilité cinématique du robot est étudiée. L'impact des erreurs de positionnement aux moteurs sur la position, l'orientation de l'effecteur et l'ouverture des pinces est étudiée. L'analyse est séparée en trois parties distinctes. D'abord, la sensibilité du mécanisme d'ouverture des doigts est étudiée. Par la suite, la sensibilité de la position, en orientation et des degrés de liberté redondants de l'effecteur est étudiée. La sensibilité des jambes en positionnement des articulations sphériques est également étudiée. Finalement, une étude générale de la sensibilité du robot établissant les erreurs des coordonnées cartésiennes en fonction des erreurs aux coordonnées articulaires est présentée.

5.1 Sensibilité du mécanisme d'ouverture des doigts

Pour l'analyse de sensibilité d'ouverture des doigts, on prend la différentielle des équations (4.11) et (4.12). On obtient donc,

$$d\delta_1 = -\delta_{max} \sin \beta_1 d\beta_1 \quad (5.1)$$

$$d\delta_3 = \delta_{max} \sin \beta_3 d\beta_3. \quad (5.2)$$

À partir de ces équations, on peut évaluer les indices de sensibilité des erreurs d'ouverture, notés σ_{δ_i} , en fonction des erreurs d'angles $d\beta_i$. On a que,

$$\sigma_{\delta_i} = \left| \frac{d\delta_i}{d\beta_i} \right| = \delta_{max} |\sin \beta_i|, \quad i = 1, 3. \quad (5.3)$$

Les unités de ces indices sont des *mm/rad*.

5.1.1 Évaluation de l'indice de sensibilité des doigts

L'équation de sensibilité des doigts (5.3) est représentée au graphique de la Fig. 5.1. L'intervalle des angles β_i , $i = 1, 3$ est la plage d'opération définie au Tableau 4.1 du chapitre 4,

soit entre 60° ($\pi/3$ rad) et 120° ($2\pi/3$ rad). Ces indices de sensibilité représentent l'écart

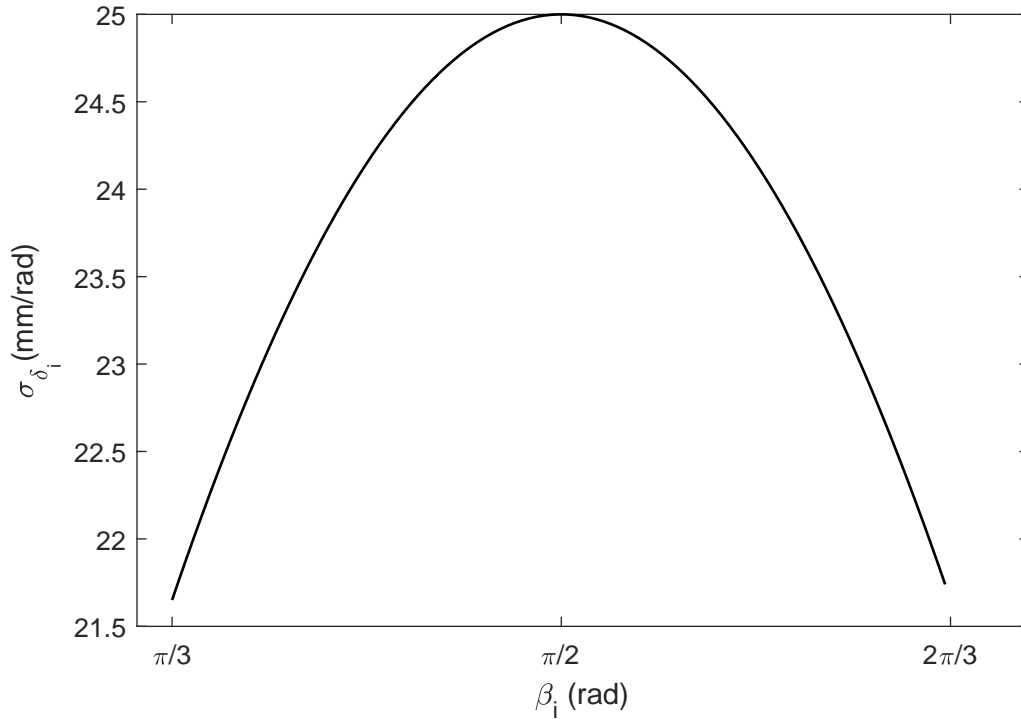


FIGURE 5.1 – Sensibilité σ_{δ_i} en fonction de l'angle β_i .

sur l'ouverture $\Delta\delta_i$ du doigt i engendrée par une variation de ± 1 rad sur l'angle β_i . À partir de cette relation il est donc possible de déterminer l'écart $\Delta\delta_i$ en fonction d'une erreur $\Delta\beta_i$ quelconque pour une configuration donnée du mécanisme. L'addition des écarts $\Delta\delta_1$ et $\Delta\delta_3$ représente la plus grande erreur sur la distance entre les doigts engendrée par des erreurs de $\Delta\beta_1$ et $\Delta\beta_3$. Il est donc possible d'évaluer l'erreur d'ouverture des deux doigts.

À la vue du graphique de la Fig. 5.1 la sensibilité est plus grande lorsque l'angle β_i est égal à 90° ($\pi/2$). À cette configuration, une erreur sur l'angle β_i induit un déplacement uniquement dans la direction de δ_i .

5.2 Sensibilité de la plateforme

Pour l'analyse de sensibilité de la plateforme, les équations reliant la vitesse cartésienne $\dot{\mathbf{p}}$ et la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de l'effecteur aux vitesses des articulations sphériques, développées dans la section 1.2, sont utilisées. À ces équations est ajoutée la dérivation de l'expression (1.3) présentée à la section 1.1.1, afin d'inclure les termes β_i dans la formulation de la matrice

jacobienne. En prenant la différentielle de l'équation (1.3), on obtient,

$$\mathbf{d}\mathbf{r}_i = \mathbf{d}\mathbf{p} + \mathbf{d}\mathbf{Q} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} \mathbf{Q}'_{\beta_i} \right) \mathbf{d}_i \right] + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} \mathbf{Q} \mathbf{d}\mathbf{Q}'_{\beta_i} \mathbf{d}_i. \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) est écrite sous forme vectorielle. Afin de conserver la composante d'intérêt, les projections de chaque composante de l'équation (5.4) sur un vecteur perpendiculaire à la membrure $i4$, soit $\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4}$, sont considérées. L'équation devient donc,

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{d}\mathbf{r}_i = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{d}\mathbf{p} + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{d}\mathbf{Q} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} \mathbf{Q}'_{\beta_i} \right) \mathbf{d}_i \right] + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{Q} \mathbf{d}\mathbf{Q}'_{\beta_i} \mathbf{d}_i. \quad (5.5)$$

Le second terme à droite de l'égalité de l'équation (5.5) est développé comme suit :

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{d}\mathbf{Q} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} \mathbf{Q}'_{\beta_i} \right) \mathbf{d}_i \right] = \mathbf{g}_i^T \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} \quad (5.6)$$

où

$$\mathbf{g}_i = \left[\left(\mathbf{Q} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} \mathbf{Q}'_{\beta_i} \right) \mathbf{d}_i \right] \right) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4}) \right] \quad (5.7)$$

et $\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}$ est une différentielle en orientation, reliée linéairement à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Le troisième terme à gauche de l'égalité de l'équation (5.5) est développé comme suit :

$$\frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{Q} \mathbf{d}\mathbf{Q}'_{\beta_i} \mathbf{d}_i = h_i \mathbf{d}\beta_i \quad (5.8)$$

où

$$h_i = \frac{l_4}{\|\mathbf{d}_i\|} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{Q}'_{\beta_i} \mathbf{d}_i \quad (5.9)$$

et la matrice \mathbf{E} s'exprime comme suit :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

En insérant les termes des équations (5.6) et (5.8) à l'équation (5.5), on obtient

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{d}\mathbf{r}_i = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4})^T \mathbf{d}\mathbf{p} + \mathbf{g}_i^T \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} + h_i \mathbf{d}\beta_i. \quad (5.11)$$

Les équations (1.28), (1.44) et (5.11) sont réécrites sous forme matricielle :

$$\mathbf{B}\mathbf{c}_n = \mathbf{C}\mathbf{d}\mathbf{r} \quad (5.12)$$

où $\mathbf{c}_n = \left[\mathbf{d}\mathbf{p}^T \quad \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}^T \quad \mathbf{d}\boldsymbol{\beta}^T \right]^T$ est le vecteur des variations de déplacements cartésiens contenant aussi le vecteur des déplacements angulaires $\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}$. Ce dernier est défini comme suit : $\mathbf{d}\boldsymbol{\beta} = \left[\mathbf{d}\beta_1 \quad \mathbf{d}\beta_2 \quad \mathbf{d}\beta_3 \right]^T$. Le vecteur $\mathbf{d}\mathbf{r}$ contient les différentielles des positions cartésiennes

des articulations sphériques et s'exprime comme suit : $\mathbf{dr} = \begin{bmatrix} \mathbf{dr}_1^T & \mathbf{dr}_2^T & \mathbf{dr}_3^T \end{bmatrix}^T$. Les matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} prennent la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{14}^T & [(\mathbf{Qd}_1) \times \mathbf{a}_{14}]^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{n})^T & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T & \mathbf{g}_1^T & h_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{24}^T & [(\mathbf{Qd}_2) \times \mathbf{a}_{24}]^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{n})^T & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T & \mathbf{g}_2^T & 0 & h_2 & 0 \\ \mathbf{a}_{34}^T & [(\mathbf{Qd}_3) \times \mathbf{a}_{34}]^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{n})^T & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T & \mathbf{g}_3^T & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{14}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{n}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{a}_{24}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{n}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{a}_{34}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{n}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

où le vecteur $\mathbf{0}$ est de dimensions 3×1 .

5.2.1 Évaluation des indices de sensibilité de la plateforme

Puisque la matrice \mathbf{B} est inversible, l'expression des différentielles est réécrite (5.12) comme suit :

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{Ddr}. \quad (5.15)$$

où

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}. \quad (5.16)$$

Afin d'évaluer les indices de sensibilité de la plateforme, l'approche d'évaluation de la sensibilité maximale présentée par Cardou et al. [5] est utilisée pour l'analyse du mécanisme. De l'équation (5.15), on a $\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|_2 = \|\mathbf{D}_p\mathbf{dr}\|_2$, $\|\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\|_2 = \|\mathbf{D}_\alpha\mathbf{dr}\|_2$ et $\|\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}\|_2 = \|\mathbf{D}_\beta\mathbf{dr}\|_2$ de telle sorte qu'on obtient les trois indices de sensibilité suivants :

$$\sigma_p^D = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|_2}{\|\mathbf{dr}\|_2} = \max_{\|\mathbf{dr}\|_2=1} \|\mathbf{D}_p\mathbf{dr}\|_2 = \|\mathbf{D}_p\|_2 \quad (5.17)$$

$$\sigma_\alpha^D = \frac{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\|_2}{\|\mathbf{dr}\|_2} = \max_{\|\mathbf{dr}\|_2=1} \|\mathbf{D}_\alpha\mathbf{dr}\|_2 = \|\mathbf{D}_\alpha\|_2 \quad (5.18)$$

$$\sigma_\beta^D = \frac{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}\|_2}{\|\mathbf{dr}\|_2} = \max_{\|\mathbf{dr}\|_2=1} \|\mathbf{D}_\beta\mathbf{dr}\|_2 = \|\mathbf{D}_\beta\|_2 \quad (5.19)$$

où les matrices \mathbf{D}_p , \mathbf{D}_α et \mathbf{D}_β sont les parties de la jacobienne \mathbf{D} affectées respectivement par les termes de variation de déplacement $d\mathbf{p}$, de variation d'orientation $d\boldsymbol{\alpha}$ et de variation d'angles $d\boldsymbol{\beta}$. Ces matrices sont toutes de dimensions 3×9 . L'évaluation de ces indices de sensibilité a pour but de vérifier l'impact d'une erreur de module unitaire du positionnement des articulations sphériques $\Delta\mathbf{r}$ sur la position et l'orientation de l'effecteur ainsi que sur la valeur des angles β_i . Ces indices sont calculés selon différentes positions, orientations et valeurs de β_i .

Il peut être démontré que les indices de sensibilité σ_p^D , σ_α^D et σ_β^D sont indépendants de la position et de l'orientation de l'effecteur lorsque les angles β_i sont constants. Ces indices demeurent inchangés puisque la position des points S_i par rapport au repère mobile O' ne varie pas lors des mouvements de la plateforme dans l'espace. Les indices de sensibilité dépendent seulement des angles β_i . Afin de vérifier l'impact de la variation des angles β_i sur les indices de sensibilité de la plateforme, l'un des angles subit une variation entre 0 et 180° et les autres angles sont fixés à 90°. Les graphiques de la Fig. 5.2 illustrent la tendance pour chaque indice de sensibilité en fonction de la valeur de l'angle β_i , $i = 1, 2$ ou 3. À la vue de ces graphiques,

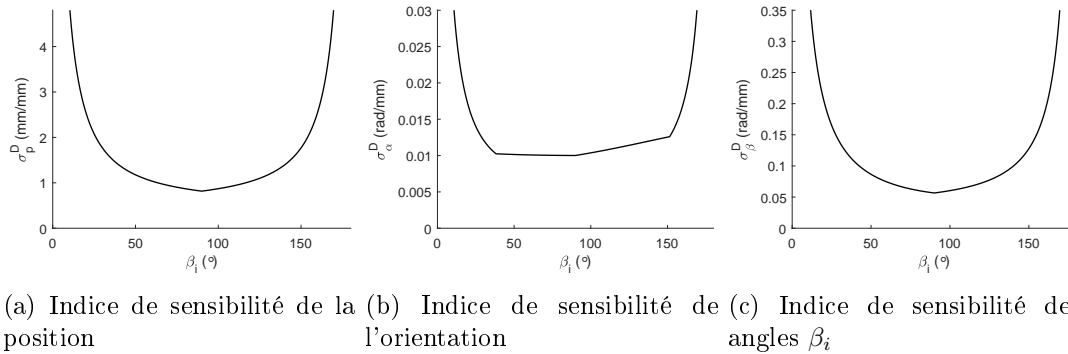


FIGURE 5.2 – Indices de sensibilité de la position, de l'orientation et des angles β_i selon la variation d'angle β_i , $i = 1, 2$ ou 3, lorsque les autres angles sont de 90°.

lorsque l'angle β_i approche les valeurs de 0 et 180°, la sensibilité devient infinie, ce qui indique la présence de configurations singulières, telles que les lignes d'action des vecteurs \mathbf{a}_{i4} se croisent en un point. Cette configuration s'apparente à l'exemple illustré à la Fig. 1.4. Lorsque l'angle est à 90°, ceci engendre une configuration où la sensibilité est moindre à la fois en position, en orientation et pour la valeur des angles β_i . Cette configuration est donc à privilégier lors des déplacements de la plateforme, afin de maximiser la précision du robot.

5.3 Sensibilité d'une jambe

La sensibilité du robot en position, en orientation et des angles β_i dépend également de la configuration des jambes. Dans cette section, la sensibilité en position des articulations sphériques S_i est étudiée. Les équations développées à la section 2.2.3 sont utilisées. Le modèle

considéré pour l'étude est illustré à la Fig. 5.3. Le système de coordonnées utilisé pour l'étude est celui défini pour le modèle cinématique simplifié de la jambe développé à la section 2.4, identifié O_i . Puisque l'étude n'est pas effectuée par rapport au repère fixe, la position de l'articulation sphérique par rapport à ce repère est exprimée par le vecteur \mathbf{q}_i . Ce changement de repère n'a pas d'impact sur la valeur de la sensibilité globale des jambes.

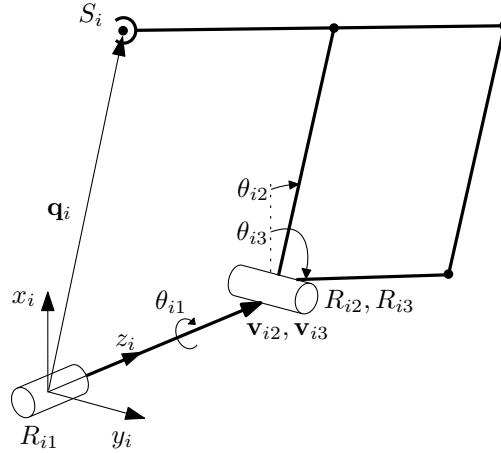


FIGURE 5.3 – Modèle cinématique utilisé pour l'étude de sensibilité des jambes.

5.3.1 Évaluation de l'indice de sensibilité d'une jambe

La relation entre les vitesses articulaires et les vitesses cartésiennes de la jambe est définie comme suit :

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{M}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (5.20)$$

où la matrice \mathbf{M}_i est définie à la section 2.2.3, considérant que $\mathbf{l}_i = [0 \ 0 \ 0]^T$ et que $\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i$. Cette relation s'applique aussi aux différentielles, c'est-à-dire,

$$d\mathbf{q}_i = \mathbf{M}_i d\boldsymbol{\theta}_i. \quad (5.21)$$

Afin de déterminer la sensibilité des jambes, la norme Euclidienne de cette matrice est considérée tel que

$$\sigma_{\mathbf{q}_i} = \frac{\|d\mathbf{q}_i\|_2}{\|\Delta\boldsymbol{\theta}_i\|_2} = \max_{\|d\boldsymbol{\theta}_i\|_2=1} \|\mathbf{M}_i d\boldsymbol{\theta}_i\|_2 = \|\mathbf{M}_i\|_2. \quad (5.22)$$

L'évaluation de cet indice de sensibilité a pour but de vérifier l'impact d'une erreur unitaire de positionnement des moteurs sur la position de l'articulation sphérique S_i . Cet indice est calculé pour différentes positions de celle-ci.

Afin d'évaluer les indices de sensibilité à différentes positions, deux trajectoires sont effectuées, soient une trajectoire parallèle à l'axe z_i sur le plan $x_i z_i$ ainsi qu'une autre parallèle à l'axe y_i au plan $z_i = 74$, centrées au point décrit par les vecteurs \mathbf{v}_{i2} et \mathbf{v}_{i3} . Ces trajectoires sont

réalisées pour différentes valeurs de x_i . Les graphiques de la Fig. 5.4 illustrent les indices de sensibilité obtenus pour ces trajectoires.

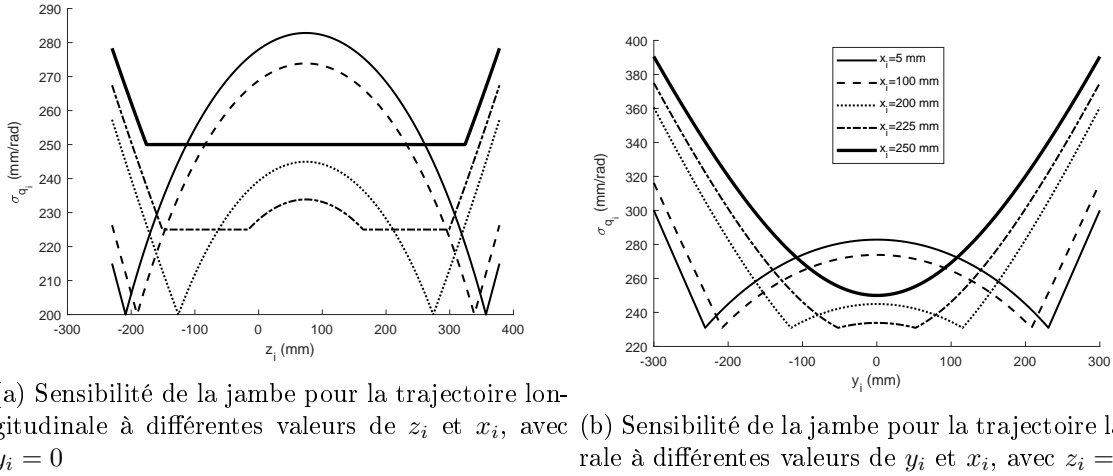


FIGURE 5.4 – Indice de sensibilité de la jambe pour les trajectoires longitudinales et latérales.

Dans le cas de la Fig. 5.4a, lorsque le point S_i s’approche ou s’éloigne des articulations R_{i2} et R_{i3} , la sensibilité augmente. Ce comportement s’apparente aux configurations singulières où la jambe est rétractée ou déployée. Également, lorsque le point S_i se trouve près du premier axe de rotation R_{i1} , l’indice de sensibilité augmente également puisque la jambe est près d’une configuration singulière. Lorsque la valeur de x_i augmente, les valeurs de ces courbes diminuent étant donné que l’effecteur s’éloigne du premier axe de rotation. À un certain seuil d’éloignement du premier axe, les valeurs des courbes de sensibilité deviennent plus importantes puisque la jambe devient de plus en plus déployée. Le calcul de la norme euclidienne de la matrice \mathbf{M}_i considère la valeur propre liée à l’articulation causant l’erreur maximale en positionnement de S_i . Dans le cas où $x_i = 225$ et 250 , la courbe devient constante peu importe la valeur de z_i . Dans ces cas, la valeur de l’indice de sensibilité est égale à la valeur de x_i . Dans ce cas, une erreur de positionnement pour θ_{i1} cause l’erreur la plus grande, puisque la distance entre l’axe de rotation de celle-ci et le point S_i correspond à la valeur de x_i et qu’une erreur de 1 rad induit directement une variation de positionnement égale à x_i .

Dans le cas de la Fig. 5.4b, le fait de s’éloigner des axes R_{i2} et R_{i3} augmente grandement la sensibilité. De plus, on peut également observer des maximums locaux lorsque le point S_i se situe près de l’axe de l’articulation R_{i1} . Cet effet est notable pour les courbes où x_i possède des valeurs de 5 à 225 mm . Lorsque la valeur de x_i est plus élevée, l’approche de l’origine a peu d’effet sur la tendance de la sensibilité. À partir de ces tendances générales pour la sensibilité des jambes, il devient plus facile de prédire le comportement de la sensibilité du robot.

5.4 Sensibilité du robot

Dans cette section, la sensibilité du robot incluant tous les éléments du mécanisme est étudiée. Pour ce faire, les équations établissant le lien entre les variations des coordonnées articulaires et les variations des coordonnées cartésiennes et d'ouverture des doigts du robot sont établies. Les équations de variation d'ouverture des doigts sont d'abord incorporées à celles de l'effecteur soit en insérant les équations (5.1) et (5.2) à la relation (5.11) pour $i = 1, 3$. L'angle β_2 n'étant relié à aucun mécanisme, l'équation (5.11) pour $i = 2$ reste telle quelle. On obtient alors les trois équations suivantes :

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T d\mathbf{r}_1 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T d\mathbf{p} + \mathbf{g}_1^T d\boldsymbol{\alpha} - \frac{h_1}{A \sin \beta_1} d\delta_1 \quad (5.23)$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T d\mathbf{r}_2 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T d\mathbf{p} + \mathbf{g}_2^T d\boldsymbol{\alpha} + h_2 d\beta_2 \quad (5.24)$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T d\mathbf{r}_3 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T d\mathbf{p} + \mathbf{g}_3^T d\boldsymbol{\alpha} + \frac{h_3}{A \sin \beta_3} d\delta_3. \quad (5.25)$$

Les équations (5.23) à (5.25) sont ensuite exprimées par rapport aux variations articulaires des jambes, les équations deviennent donc,

$$\mathbf{K}_7 d\boldsymbol{\theta}_1 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T d\mathbf{p} + \mathbf{g}_1^T d\boldsymbol{\alpha} - \frac{h_1}{\delta_{max} \sin \beta_1} d\delta_1 \quad (5.26)$$

$$\mathbf{K}_8 d\boldsymbol{\theta}_2 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T d\mathbf{p} + \mathbf{g}_2^T d\boldsymbol{\alpha} + h_2 d\beta_2 \quad (5.27)$$

$$\mathbf{K}_9 d\boldsymbol{\theta}_3 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T d\mathbf{p} + \mathbf{g}_3^T d\boldsymbol{\alpha} + \frac{h_3}{\delta_{max} \sin \beta_3} d\delta_3. \quad (5.28)$$

où

$$\mathbf{K}_7 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T \mathbf{M}_1 \quad (5.29)$$

$$\mathbf{K}_8 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T \mathbf{M}_2 \quad (5.30)$$

$$\mathbf{K}_9 = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T \mathbf{M}_3. \quad (5.31)$$

On combine les équations (1.35), (1.47) et les équations (5.26) à (5.28) dans un système matriciel, et on obtient :

$$\mathbf{G}\mathbf{c}'_n = \mathbf{H}d\boldsymbol{\theta} \quad (5.32)$$

où $\mathbf{c}'_n = [\mathbf{d}\mathbf{p}^T \quad \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}^T \quad d\delta_1 \quad d\delta_3 \quad d\beta_2]^T$ est le vecteur des variations cartésiennes contenant aussi les variations d'ouverture des doigts. Les matrices \mathbf{G} et \mathbf{H} prennent la forme suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{14}^T & [(\mathbf{Q}\mathbf{d}_1) \times \mathbf{a}_{14}]^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{n})^T & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{14})^T & \mathbf{g}_1^T & -\frac{h_1}{A \sin \beta_1} & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{24}^T & [(\mathbf{Q}\mathbf{d}_2) \times \mathbf{a}_{24}]^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{n})^T & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{24})^T & \mathbf{g}_2^T & 0 & 0 & h_2 \\ \mathbf{a}_{34}^T & [(\mathbf{Q}\mathbf{d}_3) \times \mathbf{a}_{34}]^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}^T & (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{n})^T & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{34})^T & \mathbf{g}_3^T & 0 & \frac{h_3}{A \sin \beta_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_7 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_8 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_9 \end{bmatrix} . \quad (5.34)$$

5.4.1 Évaluation de la sensibilité du robot

La relation entre les variations des coordonnées articulaires du robot ainsi que les déplacements cartésiens de la plateforme est réécrite comme suit :

$$\mathbf{c}'_n = \mathbf{P}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} \quad (5.35)$$

où

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}. \quad (5.36)$$

Afin de déterminer la sensibilité des jambes, la norme euclidienne de la matrice \mathbf{P} est évaluée pour différentes positions. De l'équation (5.35), on a $\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|_2 = \|\mathbf{P}_p\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2$, $\|\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\|_2 = \|\mathbf{P}_\alpha\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2$, $\|\mathbf{d}\boldsymbol{\delta}_{1,3}\|_2 = \|\mathbf{P}_{\delta_{1,3}}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2$ et $\|\mathbf{d}\beta_2\|_2 = \|\mathbf{P}_{\beta_2}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2$ de telle sorte qu'on obtient les quatre indices

de sensibilité suivants :

$$\sigma_p = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|_2}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2} = \max_{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2=1} \|\mathbf{P}_p \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2 = \|\mathbf{P}_p\|_2 \quad (5.37)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}\|_2}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2} = \max_{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2=1} \|\mathbf{P}_\alpha \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2 = \|\mathbf{P}_\alpha\|_2 \quad (5.38)$$

$$\sigma_{\delta_{1,3}} = \frac{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\delta}_{1,3}\|_2}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2} = \max_{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2=1} \|\mathbf{P}_{\delta_{1,3}} \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2 = \|\mathbf{P}_{\delta_{1,3}}\|_2 \quad (5.39)$$

$$\sigma_{\beta_2} = \frac{d\beta_2}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2} = \max_{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2=1} \|\mathbf{P}_{\beta_2} \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\|_2 = \|\mathbf{P}_{\beta_2}\|_2 \quad (5.40)$$

où les matrices \mathbf{P}_p , \mathbf{P}_α , $\mathbf{P}_{\delta_{1,3}}$ et \mathbf{P}_{β_2} sont des blocs de la jacobienne affectés respectivement par les termes de variation $\mathbf{d}\mathbf{p}$, $\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}$, des variations d'ouverture et de fermeture des doigts $d\beta_1$ et $d\beta_3$ ainsi que de la variation angulaire $d\beta_2$.

Six trajectoires sont effectuées afin d'évaluer la sensibilité liée à chaque mouvement de base du robot. Premièrement, une trajectoire verticale est effectuée le long de l'axe z (centrée à des valeurs de $x = y = 0$), à une orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ et aux valeurs de $\delta_{1,3} = 12.5$ ($\beta_1 = \beta_3 = 90^\circ$) et $\beta_2 = 90^\circ$. Les valeurs des indices de sensibilité sont illustrées aux graphiques de la Fig.5.5. Pour cette trajectoire, les coordonnées cartésiennes en orientation ainsi que d'ouverture des doigts sont constants. Le comportement des indices de sensibilité du robot dépend donc majoritairement de la sensibilité des jambes. Les minimums locaux sont typiques des comportements observés aux graphiques de la Fig. 5.4. De plus, pour des plus grandes valeurs de z , l'indice de sensibilité augmente puisque les jambes s'allongent. Pour les indices de sensibilité $\sigma_{\delta_{1,3}}$ et σ_{β_2} , les courbes sont similaires. On observe un minimum des indices lorsque la valeur de z se situe autour de 110 mm . Cette hauteur est utilisée afin de générer les graphiques de sensibilité du robot à l'ouverture des doigts.

Les graphiques de sensibilité au mouvement des doigts sont présentés aux Fig. 5.6 (pour l'ouverture du doigt 1) et 5.7 (pour l'ouverture du doigt 3). Ceux-ci sont générés lorsque l'effecteur est centré sur l'axe vertical à une élévation $z = 110$ et à une orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$. Les doigts bougent indépendamment. Les ouvertures δ_i varient entre 0 et 25 mm . L'angle β_2 est gardé constant, soit à 90° . Pour ces trajectoires, l'amplitude de mouvement des articulations sphériques S_i n'est pas significative par rapport à l'ordre de grandeur des jambes. Le comportement des indices de sensibilité du robot dépend donc majoritairement de la sensibilité de la plateforme et des mécanismes des doigts. L'allure des graphiques de l'indice de sensibilité en position et en orientation est similaire. Sur ces courbes, des minimums près de la valeur d'ouverture de 12.5 mm sont observés. Ceux-ci correspondent à un angle β_i de 90° . Ce comportement n'est pas inconnu puisque celui-ci est similaire à celui observé aux graphiques de la Fig. 5.2.

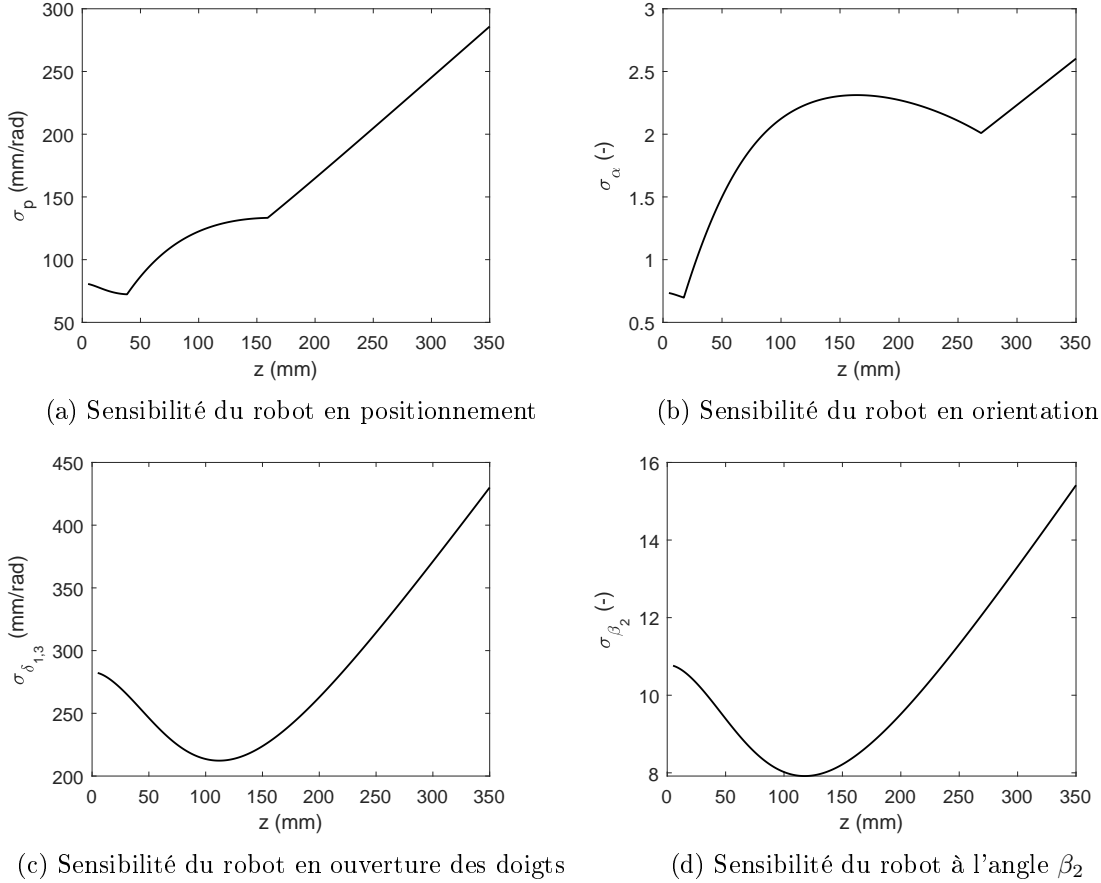


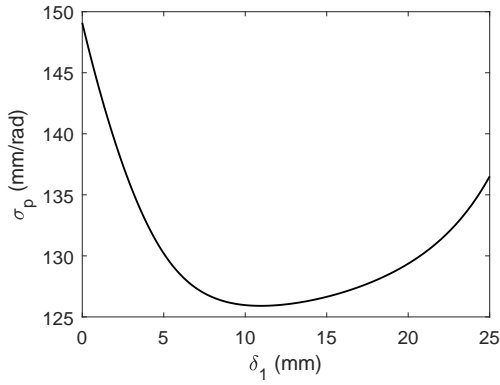
FIGURE 5.5 – Indices de sensibilité du robot pour une trajectoire verticale de l'effecteur le long de l'axe z ($x = y = 0$), à orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ et aux valeurs de $\beta_i = 90^\circ$ ($\delta_1 = \delta_3 = 12.5$ mm).

Les graphiques de sensibilité du robot pour les mouvements de rotation de la plateforme de $\pm 90^\circ$ par rapport aux axes x , y et z sont illustrés respectivement aux Fig. 5.8, 5.9 et 5.10. Les mouvements de rotation se font également au point centré sur l'axe vertical à une élévation $z = 110$ à des valeurs de $\delta_{1,3} = 12.5$ ($\beta_1 = \beta_3 = 90^\circ$) et $\beta_2 = 90^\circ$.

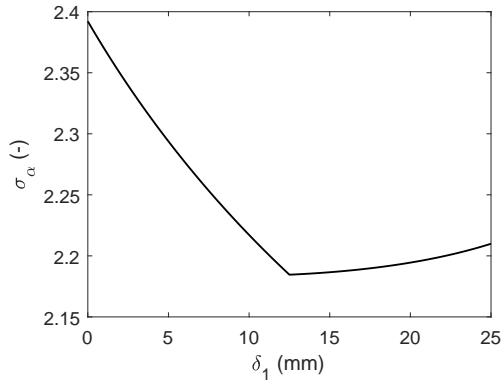
Puisque l'ouverture des doigts δ_i et l'angle β_2 ne varient pas, les indices de sensibilité du robot pour ces trajectoires dépendent majoritairement de la sensibilité des jambes.

5.5 Conclusion

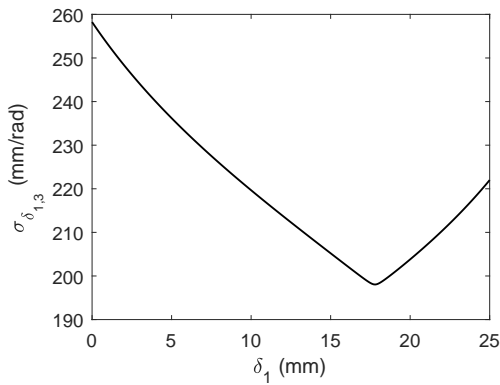
Dans ce chapitre, l'objectif est d'évaluer les indices de sensibilité des différents mécanismes qui composent le robot pour des trajectoires déterminantes données. Les équations de variation des coordonnées et les matrices jacobiennes des éléments du robot sont détaillés dans ce chapitre. Plusieurs comportements sont vérifiés par rapport aux configurations singulières relevées dans les chapitres précédents.



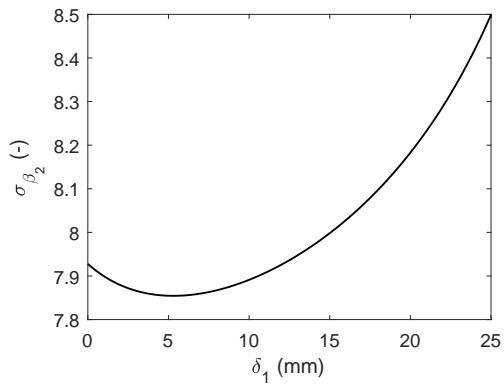
(a) Sensibilité du robot en positionnement



(b) Sensibilité du robot en orientation

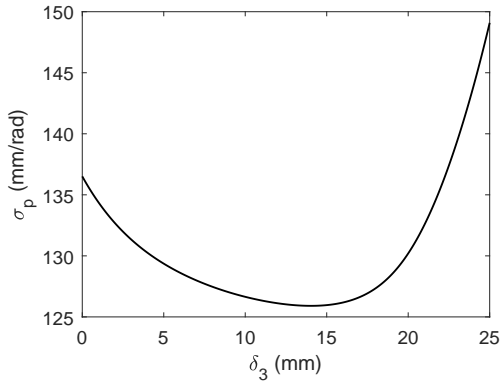


(c) Sensibilité du robot en ouverture des doigts

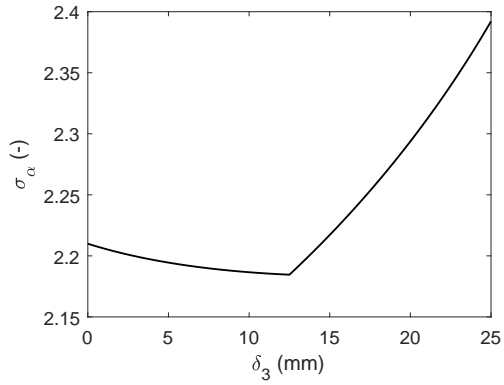


(d) Sensibilité du robot à l'angle β_2

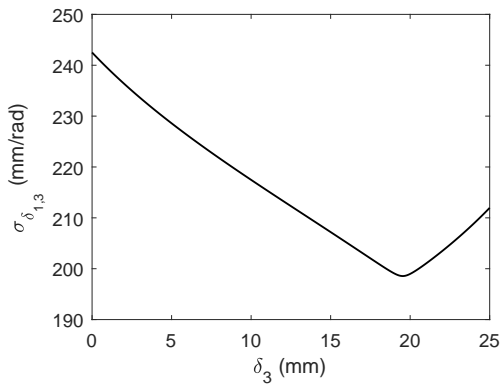
FIGURE 5.6 – Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et à orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$, pour une variation de δ_1 entre 0 et 25 mm .



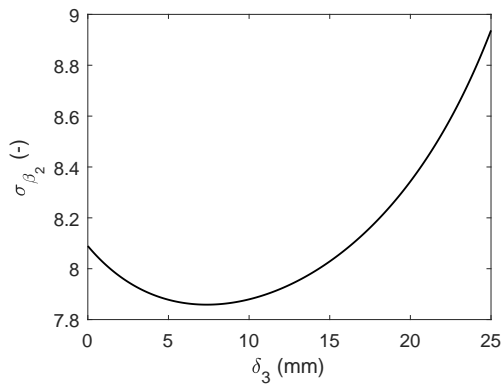
(a) Sensibilité du robot en positionnement



(b) Sensibilité du robot en orientation

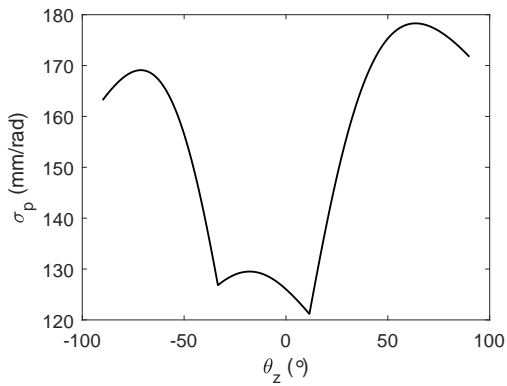


(c) Sensibilité du robot en ouverture des doigts

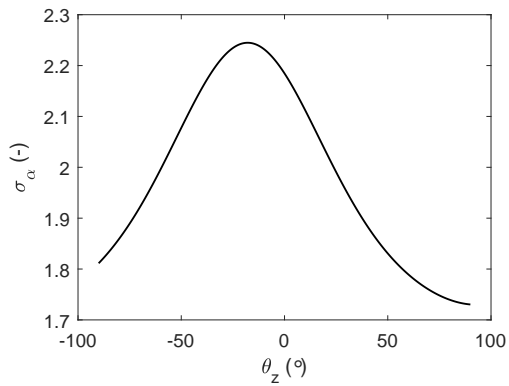


(d) Sensibilité du robot à l'angle β_2

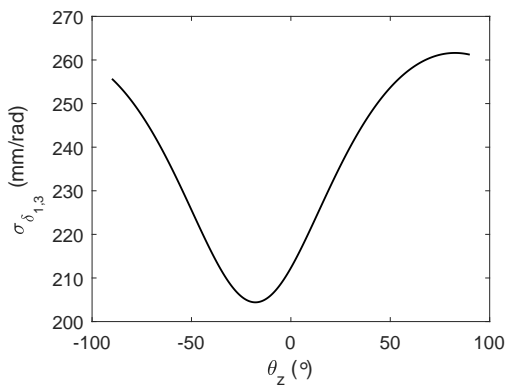
FIGURE 5.7 – Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et à orientation $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$, pour une variation de δ_3 entre 0 et 25 mm.



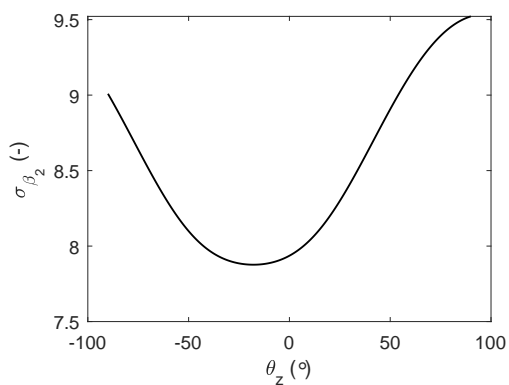
(a) Sensibilité du robot en positionnement



(b) Sensibilité du robot en orientation

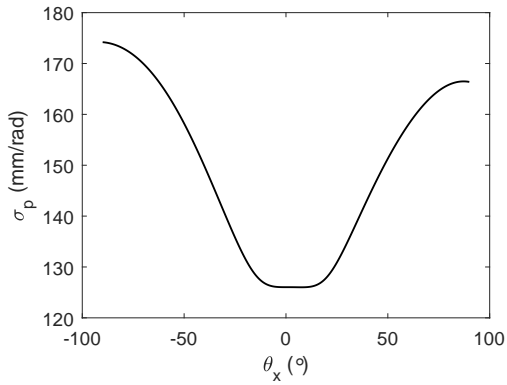


(c) Sensibilité du robot en ouverture des doigts

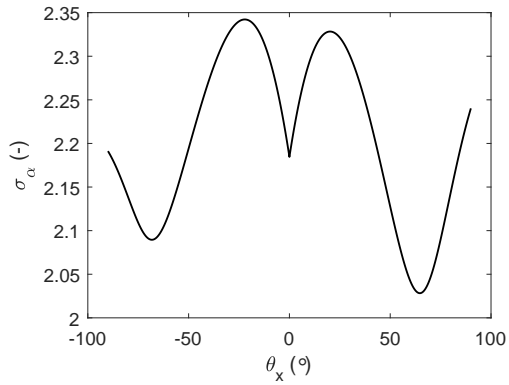


(d) Sensibilité du robot à l'angle β_2

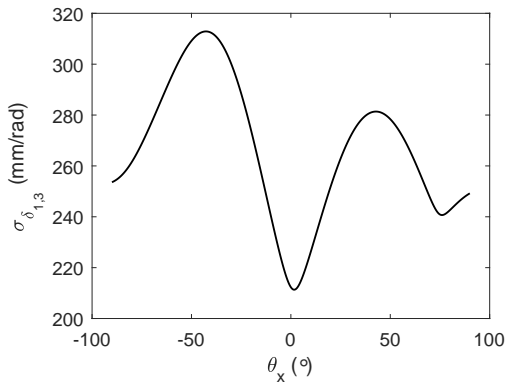
FIGURE 5.8 – Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et des valeurs de δ_i et β_2 constantes, pour un mouvement de torsion de -90 à $+90^\circ$.



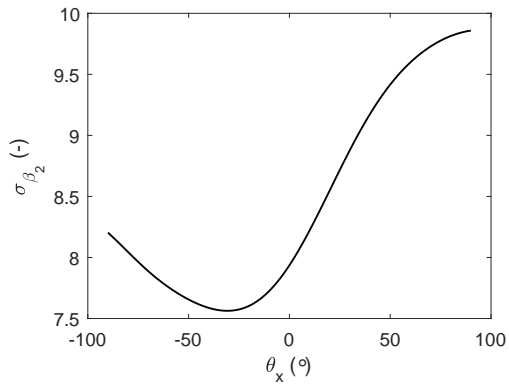
(a) Sensibilité du robot en positionnement



(b) Sensibilité du robot en orientation

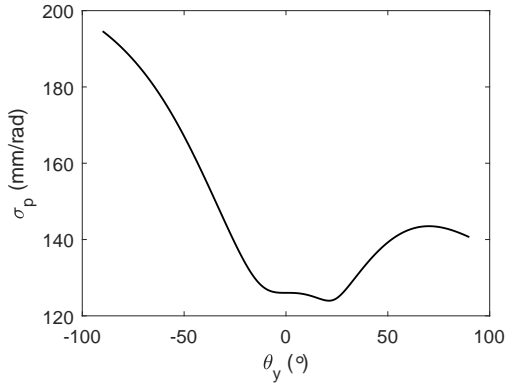


(c) Sensibilité du robot en ouverture des doigts

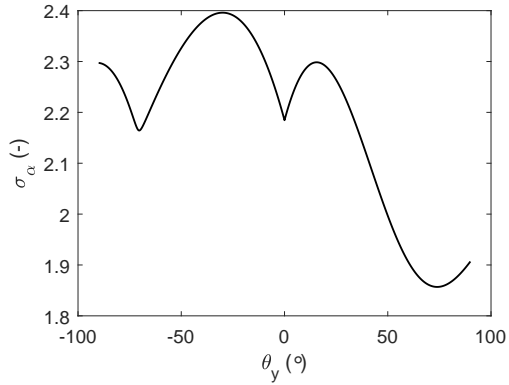


(d) Sensibilité du robot à l'angle β_2

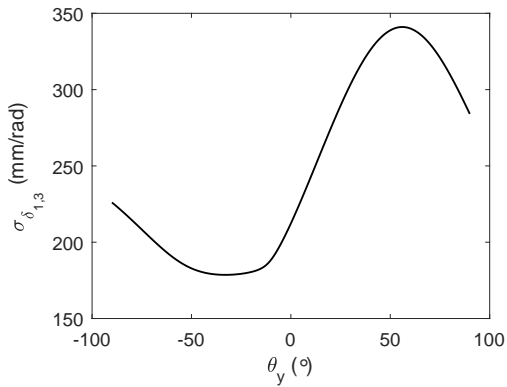
FIGURE 5.9 – Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et des valeurs de δ_i et β_2 constantes, pour un mouvement d'inclinaison par rapport à l'axe x de -90 à $+90^\circ$.



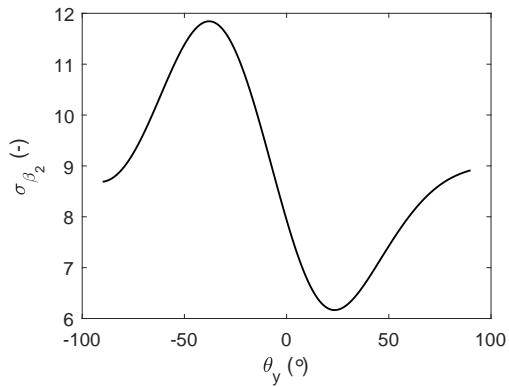
(a) Sensibilité du robot en positionnement



(b) Sensibilité du robot en orientation



(c) Sensibilité du robot en ouverture des doigts



(d) Sensibilité du robot à l'angle β_2

FIGURE 5.10 – Indices de sensibilité du robot situé sur l'axe z ($x = y = 0$), à une hauteur $z = 110$ et des valeurs de δ_i et β_2 constantes, pour un mouvement d'inclinaison par rapport à l'axe y de -90 à $+90^\circ$.

Chapitre 6

Modèle dynamique du robot

Dans ce chapitre, les modèles dynamique et statique du robot sont développés. Ces modèles sont élaborés en deux temps, commençant par ceux de la plateforme et finissant par ceux des jambes. Le modèle statique de la plateforme est développé avec les principes de Newton tandis que ceux des jambes sont élaborés avec la méthode de Lagrange. Ces modèles sont à la base d'un schéma de commande prédictive du robot afin d'accroître ses performances.

6.1 Modélisation de la plateforme avec la méthode de Newton

Afin de modéliser la dynamique de la plateforme, la deuxième loi de Newton en translation et en rotation est utilisée pour l'analyse de chaque corps de la plateforme. On a,

$$\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (6.1)$$

$$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (6.2)$$

où \mathbf{I} est le tenseur d'inertie du corps par rapport à son centre de masse, m est la masse du corps, $\Sigma \mathbf{F}$ représente la somme des forces appliquées sur le corps et $\Sigma \mathbf{M}$ la somme des moments appliqués sur le corps.

6.1.1 Modèle et hypothèses

Puisque la plateforme n'effectue pas de mouvement impliquant de fortes accélérations, on suppose que la plateforme est en équilibre statique. Les corps considérés dans l'étude statique sont illustrés au schéma de la Fig. 6.1 qui représente un modèle de l'effecteur tel que montré à la Fig. 4.10. Les articulations sphériques sont fixées aux barres ia qui ont une masse m_{ia} . Ces dernières sont reliées aux barres transversales ib et ie . Dans ce modèle, pour les mécanismes avec les doigts, les barres transversales ib comprennent les parties proximales et distales et sont rigides. On ne considère aucun mécanisme compliant pour la prise d'objet. Les membrures ia et ib sont liées par des articulations rotoïdes. Les membrures ib pivotent par rapport au bâti de la plateforme par le biais de liaisons rotoïdes également. Les doigts id et les membrures ib

Il est à noter que le DCL partiel du bâti de la plateforme illustre un cas où sont représentés les forces de réaction induites par les mécanismes $i = 1, 3$. Puisqu'il n'y a pas de corps id pour le mécanisme $i = 2$, les forces de réaction induites par le mécanisme $i = 2$ sur le bâti s'apparentent à celles illustrées, excluant la force \mathbf{w}_{ie} . Également, pour le mécanisme $i = 2$, le corps ib s'apparente à la partie proximale de la membrure transversale. Le cas de chargement est donc similaire à celui illustré à la Fig. 6.2b, excluant la force \mathbf{w}_{id} et le moment \mathbf{s}_{id} . Les vecteurs \mathbf{r}_{i1} à \mathbf{r}_{i10} définissent les positions des centres de masse des corps par rapport à chaque articulation. Ces derniers dépendent de la configuration des mécanismes à quatre barres. Le calcul de ces vecteurs est détaillé à l'annexe E.

Un système d'axes plan $n_i t_i$ est également défini à l'extrémité de chaque vecteur \mathbf{d}_i . Ces systèmes d'axes plans sont fixés à la plateforme et les axes sont inclus dans le plan du mécanisme. Les vecteurs unitaires \mathbf{e}_{n_i} et \mathbf{e}_{t_i} définissent la direction des axes n_i et t_i . Ceux-ci sont définis comme suit :

$$\mathbf{e}_{n_i} = \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{e}_{t_i} = \mathbf{e}_{n_i} \times \mathbf{n} \quad (6.4)$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal à la plateforme tel que défini au chapitre 1.

6.1.2 Formulation des équations de statique

Les équations de statique découlant de la modélisation établie dans les sections précédentes sont présentées dans cette section. À partir du DCL des corps ia montré à la Fig. 6.2a, on obtient les équations suivantes :

$$\sum \mathbf{F}_{ia} = \mathbf{f}_i + \mathbf{w}_{ia} + \mathbf{w}_{ic} + m_{ia}\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

$$\sum \mathbf{M}_{ia} = \mathbf{r}_{i1} \times \mathbf{f}_i + \mathbf{r}_{i2} \times \mathbf{w}_{ia} + \mathbf{r}_{i3} \times \mathbf{w}_{ic} + \mathbf{s}_{ia} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.6)$$

Puisque les corps ic sont des membrures à deux forces, on définit \mathbf{w}_{ic} comme suit :

$$\mathbf{w}_{ic} = \frac{\mathbf{a}_{i4}}{\|\mathbf{a}_{i4}\|} \|\mathbf{w}_{ic}\| = \frac{\mathbf{a}_{i4}}{l_4} \|\mathbf{w}_{ic}\| \quad (6.7)$$

dont la direction est parallèle au vecteur \mathbf{a}_{i4} . À partir du DCL des corps ib montré à la Fig. 6.2b, on a les équations suivantes :

$$-\mathbf{w}_{ia} + \mathbf{w}_{ib} + \mathbf{w}_{id} + m_i b \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 3 \quad (6.8)$$

$$-\mathbf{r}_{i4} \times \mathbf{w}_{ia} + \mathbf{r}_{i5} \times \mathbf{w}_{ib} + \mathbf{r}_{i6} \times \mathbf{w}_{id} - \mathbf{s}_{ia} + \mathbf{s}_{ib} + \mathbf{s}_{id} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 3. \quad (6.9)$$

Ces équations s'appliquent pour les mécanismes comportant les doigts, soit lorsque $i = 1, 3$. Pour le cas où $i = 2$, les forces de réaction liées aux membrures id n'apparaissent pas dans les

équations de statique (puisqu'il n'y a pas de doigt). On a donc,

$$-\mathbf{w}_{ia} + \mathbf{w}_{ib} + m_i b \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad i = 2 \quad (6.10)$$

$$-\mathbf{r}_{i4} \times \mathbf{w}_{ia} + \mathbf{r}_{i5} \times \mathbf{w}_{ib} - \mathbf{s}_{ia} + \mathbf{s}_{ib} = \mathbf{0}, \quad i = 2. \quad (6.11)$$

À partir du DCL des corps id , on a les équations de statique suivantes,

$$-\mathbf{w}_{id} + \mathbf{w}_{ie} + m_i d \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 3 \quad (6.12)$$

$$-\mathbf{r}_{i7} \times \mathbf{w}_{id} + \mathbf{r}_{i8} \times \mathbf{w}_{ie} - \mathbf{s}_{id} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 3. \quad (6.13)$$

Puisque les corps ie sont des membrures à deux forces, on définit \mathbf{w}_{ie} comme suit :

$$\mathbf{w}_{ie} = \frac{\mathbf{Q}_{\zeta_i} \mathbf{a}_{i4}}{\|\mathbf{a}_{i4}\|} \|\mathbf{w}_{ie}\| = \frac{\mathbf{Q}_{\zeta_i} \mathbf{a}_{i4}}{l_4} \|\mathbf{w}_{ie}\|, \quad i = 1, 3. \quad (6.14)$$

Les directions de ces forces sont définies par $\mathbf{Q}_{\zeta_i} \mathbf{a}_{i4}$ où \mathbf{Q}_{ζ_i} est définie comme suit :

$$\mathbf{Q}_{\zeta_i} = \mathbf{nn}^T + \cos \zeta_i (\mathbf{1} - \mathbf{nn}^T) + \sin \zeta_i \mathbf{1} \times \mathbf{n}. \quad (6.15)$$

La variable ζ_i représente l'angle entre les barres ic et ie tel que montré à la Fig. 6.1. Les longueurs des barres ic et ie sont les mêmes.

Finalement, les équations d'équilibre statique de la partie centrale de la plateforme dont le DCL est montré à la Fig. 6.2f sont les suivantes :

$$-\sum_{i=1,2,3} (\mathbf{w}_{ib} + \mathbf{w}_{ic}) - \sum_{i=1,3} (\mathbf{w}_{ie}) + m_e^f \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (6.16)$$

$$-\sum_{i=1,2,3} (\mathbf{r}_{i10} \times \mathbf{w}_{ib} + \mathbf{r}_{i9} \times \mathbf{w}_{ic} + \mathbf{s}_{ib}) - \sum_{i=1,3} (\mathbf{r}_{i9} \times \mathbf{w}_{ie}) + m_e^f \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (6.17)$$

Les liaisons rotoïdes des mécanismes de la plateforme n'induisent aucun moment dans la direction z' . Les moments \mathbf{s}_{ik} s'expriment par rapport aux directions \mathbf{e}_{n_i} et \mathbf{e}_{t_i} et sont définis comme suit :

$$\mathbf{s}_{ik} = s_{n_{ik}} \mathbf{e}_{n_i} + s_{t_{ik}} \mathbf{e}_{t_i}. \quad (6.18)$$

L'ensemble des équations vectorielles (6.5) à (6.17) génèrent 54 équations scalaires linéairement indépendantes. Les forces \mathbf{f}_i et \mathbf{w}_i et les moments \mathbf{s}_{ik} sont inconnus, générant 54 valeurs scalaires à déterminer. À ces équations, les termes d'accélération des composantes de la plateforme peuvent facilement être ajoutés. Cependant, le système subissant des accélérations faibles, ces termes peuvent être négligés.

6.1.3 Évaluation des couples articulaires pour une configuration donnée

Pour une configuration donnée du robot, le système d'équations linéaires défini par les équations (6.5) à (6.17) est résolu. Afin de connaître les couples aux moteurs du robot engendrés par les forces statiques de la plateforme, les forces \mathbf{f}_i ($i = 1, 2, 3$) aux articulations sphériques S_i sont considérées. Les couples articulaires sont ainsi déterminés par la relation suivante, issue du principe du travail virtuel :

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{f}_i} = \mathbf{M}_i^T \mathbf{f}_i. \quad (6.19)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{f}_i}$ représente les couples articulaires engendrés par la force \mathbf{f}_i exercée sur le point S_i et \mathbf{M}_i est la matrice jacobienne de la jambe i telle que définie au chapitre 2. Par l'utilisation de cette relation, on suppose qu'il n'y a aucune perte d'énergie au niveau des jambes.

Les effets statiques de la plateforme sur les couples aux actionneurs sont considérés dans ce modèle. Il est à noter que les forces d'interaction entre les deux doigts lors de la prise d'un objet n'est pas prise en compte dans ce modèle. Dans la section suivante, le modèle dynamique et statique des jambes est élaboré. Par la suite, ces modèles sont combinés afin d'évaluer les couples statiques et inertiels du robot en entier, pour une trajectoire donnée.

6.2 Modélisation dynamique des jambes avec la méthode de Lagrange

Dans cette section, la dynamique d'une jambe est modélisée avec la formulation de Lagrange. Cette approche systématique simple basée sur l'énergie est tout-à-fait adaptée pour ce mécanisme. L'idée principale de cette méthode est de générer n équations pour un système ayant n degrés de liberté. Ces équations sont toutes couplées par une variable commune, soit le lagrangien défini comme suit :

$$\mathcal{L}_i = T_i - V_i \quad (6.20)$$

où le terme T_i représente l'énergie cinétique et V_i représente l'énergie potentielle de la jambe. L'équation de dynamique de Lagrange s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial (\dot{q}_j)_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial (q_j)_i} = (Q_j)_i, \quad j = 1, \dots, n \quad (6.21)$$

où q_j représente la j^e variable décrivant le système et n représente le nombre de degrés de liberté du système. Dans le cas présent, le système à l'étude est la i^e jambe et les variables du système sont les coordonnées articulaires θ_{i1} , θ_{i2} et θ_{i3} . Le nombre de degrés de liberté de la jambe est donc 3. Le terme $(Q_j)_i$ représente la résultante des forces externes appliquées au système associées à chaque coordonnée j . Ces forces sont non-conservatrices, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas causées par le poids ou l'inertie des composantes mécaniques qui composent le système modélisé. Celles-ci peuvent être, par exemple, des forces d'actionnement,

des forces de friction, un contact de la jambe avec un objet de l'environnement, etc.

Le terme d'énergie cinétique T_i de l'équation (6.20) s'écrit comme étant la somme des énergies cinétiques de translation et de rotation de chaque composante du système. On a,

$$T_i = \frac{1}{2} \sum_k (m_k \dot{\mathbf{c}}_{ik}^T \dot{\mathbf{c}}_{ik} + \boldsymbol{\omega}_{ik}^T \mathbf{J}_k \boldsymbol{\omega}_{ik}) \quad (6.22)$$

où m_k est la masse du k^e composant, \mathbf{c}_{ik} étant la position du centre de masse du k^e composant de la jambe i . Le vecteur $\boldsymbol{\omega}_{ik}$ représente la vitesse angulaire du k^e composant et \mathbf{J}_k est la matrice d'inertie du composant k . Il est également possible d'écrire cette équation sous forme matricielle tel que :

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}_i) \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (6.23)$$

où la matrice \mathbf{J}_i représente la matrice d'inertie généralisée de la jambe i . Cette matrice dépend de la configuration de la jambe, soit $\boldsymbol{\theta}_i$, ainsi que de ses paramètres géométriques et inertiels. Cette matrice s'obtient en effectuant une double dérivée de l'expression de l'énergie cinétique (6.22) par rapport aux vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$, soit,

$$\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^2}. \quad (6.24)$$

La dimension de cette la matrice est de $n \times n$. Dans le cas présent, une jambe possède 3 ddls, cette matrice est donc de dimensions 3×3 :

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1}^2} & \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1} \partial \dot{\theta}_{i2}} & \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1} \partial \dot{\theta}_{i3}} \\ \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1} \partial \dot{\theta}_{i2}} & \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i2}^2} & \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i2} \partial \dot{\theta}_{i3}} \\ \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1} \partial \dot{\theta}_{i3}} & \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i2} \partial \dot{\theta}_{i3}} & \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i3}^2} \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Le terme d'énergie potentielle V_i de l'équation 6.20 s'écrit comme étant la somme des énergies potentielles de chaque composante du système.

$$V_i = g \mathbf{h}^T \sum_k (m_k \mathbf{c}_{ik}) \quad (6.26)$$

où g est l'accélération gravitationnelle, \mathbf{h} est un vecteur unitaire défini dans la direction verticale positive et \mathbf{c}_{ik} est la position du centre de masse du k^e composant selon le repère fixe de la jambe.

En insérant l'équation (6.23) dans l'équation (6.20) et en insérant cette dernière dans l'équation (6.21), on obtient le modèle dynamique de la jambe sous forme matricielle :

$$\mathbf{J}_i \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \dot{\mathbf{J}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i + \frac{\partial T_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} + \frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} = \boldsymbol{\tau}_i - \boldsymbol{\Phi}_i \quad (6.27)$$

où τ_i représente les couples articulaires appliqués par les moteurs de la jambe i et Φ_i représente les forces de frottement dissipées aux articulations. Le premier terme à gauche de l'équation (6.27) exprime les forces générées par l'accélération des composantes tandis que le deuxième et le troisième termes expriment les forces centripètes et les effets d'accélération de Coriolis tandis que le quatrième terme exprime les forces engendrées par le poids du mécanisme. Afin de connaître les différents termes de cette équation de dynamique, les expressions d'énergie cinétique T_i et potentielle V_i en fonction des coordonnées et des vitesses articulaires de la jambe sont déterminées.

6.2.1 Définition des repères de chaque composant mécanique

Afin de développer les termes d'énergie cinétique et potentielle pour une jambe, différents repères sont définis selon les corps du mécanisme. Ceux-ci sont illustrés à la Fig. 6.3. Le repère

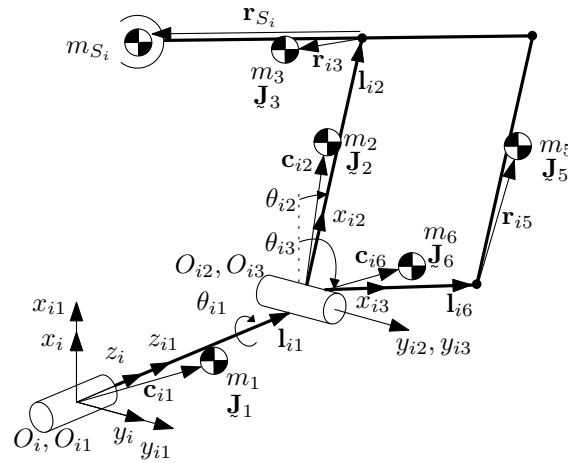


FIGURE 6.3 – Corps et repères de la jambe.

de chaque jambe O_i est fixe. L'origine de ce dernier est à la première articulation, soit R_{i1} . Le repère O_{i1} est fixé au premier corps mobile, soit la membrure reliant les articulations R_{i2} et R_{i3} à l'articulation R_{i1} . L'origine de ce repère est localisée au même point que celle du repère O_i . Le repère O_{i2} est fixé à la membrure 2. L'origine de ce repère est coïncidente avec les axes de rotation R_{i2} et R_{i3} . L'axe x_{i2} est coïncident avec la deuxième membrure. Le repère O_{i3} est fixé à la membrure 6. Le centre de ce repère est également coïncident aux axes de rotation R_{i2} et R_{i3} . L'axe x_{i3} est coïncident avec la membrure 6.

6.2.2 Hypothèses

Pour des fins de simplification, le premier composant mécanique de masse m_1 inclut le contre-poids c_1 , les supports, les moteurs $i2$ et $i3$ ainsi que le rotor du moteur $i1$. Le composant de masse m_2 inclut la membrure 2, le rotor du moteur $i2$ ainsi que le contre-poids c_2 . Les positions des centres de masse c_{ik} et les poids m_k sont déterminés en conséquence. L'articulation

sphérique S_i faisant le lien entre la plateforme et la jambe est considérée comme étant une masse ponctuelle m_{S_i} appliquée à l'extrémité de la membrure 3.

6.2.3 Matrices de rotation

Les matrices de rotation exprimant l'orientation d'un repère par rapport aux repères précédents sont définies selon les sens de rotation illustrés à la Fig. 6.3. La matrice de rotation du repère $i1$ par rapport au repère fixe de la jambe i s'exprime comme suit :

$$[\mathbf{Q}_{i1}]_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i1} & -\sin \theta_{i1} & 0 \\ \sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

La matrice de rotation du repère $i2$ par rapport au repère $i1$ s'exprime comme suit :

$$[\mathbf{Q}_{i2}]_{i1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i2} & 0 & -\sin \theta_{i2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{i2} & 0 & \cos \theta_{i2} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Finalement, la matrice de rotation du repère $i3$ par rapport au repère $i1$ s'exprime comme suit :

$$[\mathbf{Q}_{i3}]_{i1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i3} & 0 & -\sin \theta_{i3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{i3} & 0 & \cos \theta_{i3} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

L'indice suivant les crochets indique le repère dans lequel est exprimée la matrice de rotation. Par exemple, la matrice $[\mathbf{Q}_{i1}]_i$ exprime la rotation du repère $i1$ dans le repère i . Les sections suivantes traitent de la détermination des termes d'énergie cinétique et potentielle de la jambe.

6.2.4 Détermination de l'expression d'énergie cinétique de la jambe

Afin de déterminer l'énergie cinétique totale de la jambe, l'équation (6.22) est utilisée. On a donc l'expression de l'énergie cinétique totale qui regroupe l'énergie de translation et de rotation de chaque composant :

$$T_i = \frac{1}{2} \left[(m_1 \dot{\mathbf{c}}_{i1}^T \dot{\mathbf{c}}_{i1} + \boldsymbol{\omega}_{i1}^T \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_{i1}) + (m_2 \dot{\mathbf{c}}_{i2}^T \dot{\mathbf{c}}_{i2} + \boldsymbol{\omega}_{i2}^T \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_{i2}) + (m_3 \dot{\mathbf{c}}_{i3}^T \dot{\mathbf{c}}_{i3} + \boldsymbol{\omega}_{i3}^T \mathbf{J}_3 \boldsymbol{\omega}_{i3}) + \right. \\ \left. (m_5 \dot{\mathbf{c}}_{i5}^T \dot{\mathbf{c}}_{i5} + \boldsymbol{\omega}_{i5}^T \mathbf{J}_5 \boldsymbol{\omega}_{i5}) + (m_6 \dot{\mathbf{c}}_{i6}^T \dot{\mathbf{c}}_{i6} + \boldsymbol{\omega}_{i6}^T \mathbf{J}_6 \boldsymbol{\omega}_{i6}) + (m_{S_i} \dot{\mathbf{c}}_{S_i}^T \dot{\mathbf{c}}_{S_i}) \right]. \quad (6.31)$$

Pour des fins de simplification des calculs, chacun des termes est calculé dans son propre repère (excepté pour les composants $i3$ et $i5$ qui sont calculés respectivement dans les repères $i2$ et $i3$). Afin de déterminer les expressions de vitesse du centre de masse des composants k , soit $\dot{\mathbf{c}}_{ik}$ on a l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{c}}_{ik} = \dot{\mathbf{c}}_{ik} + \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{c}_{ik} \quad (6.32)$$

où $[\dot{\mathbf{c}}_{ik}]$ désigne la dérivée des composantes du vecteur \mathbf{c}_{ik} par rapport au temps et $\boldsymbol{\omega}_R$ est le vecteur de vitesse angulaire du repère dans lequel est exprimé le vecteur \mathbf{c}_{ik} . Ce vecteur de vitesse angulaire est également exprimé dans le repère de travail. Puisque les repères $i2$ et $i3$ sont attachés à leur composant respectif, les vecteurs vitesse de rotation de ces repères $\boldsymbol{\omega}_R$ deviennent les vecteurs de vitesse angulaire des composants k exprimés dans leur propre repère, soit $\boldsymbol{\omega}_{ik}$. De plus, étant donné que le mécanisme plan est de forme parallélogramme, on a que $\boldsymbol{\omega}_{i2} = \boldsymbol{\omega}_{i5}$ et $\boldsymbol{\omega}_{i3} = \boldsymbol{\omega}_{i6}$.

Les termes de vitesses cartésiennes $\dot{\mathbf{c}}_{ik}$ de l'équation (6.31) sont développés dans les repères des corps correspondants. Avec l'équation (6.32), on a que,

$$[\dot{\mathbf{c}}_{i1}]_{i1} = \boldsymbol{\omega}_{i1} \times [\mathbf{c}_{i1}]_{i1} \quad (6.33)$$

$$[\dot{\mathbf{c}}_{i2}]_{i2} = \boldsymbol{\omega}_{i2} \times [\mathbf{c}_{i2}]_{i2} \quad (6.34)$$

$$[\dot{\mathbf{c}}_{i6}]_{i3} = \boldsymbol{\omega}_{i3} \times [\mathbf{c}_{i6}]_{i3} \quad (6.35)$$

où

$$[\boldsymbol{\omega}_{i1}]_{i1} = \dot{\theta}_{i1} \mathbf{k}_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{i1} \end{bmatrix}^T \quad (6.36)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_{i2}]_{i2} = \dot{\theta}_{i1} [\mathbf{Q}_{i2}]_{i1} \mathbf{k}_{i1} - \dot{\theta}_{i2} \mathbf{j}_{i2} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i1} \sin \theta_{i2} & -\dot{\theta}_{i2} & \dot{\theta}_{i1} \cos \theta_{i2} \end{bmatrix}^T \quad (6.37)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_{i3}]_{i3} = \dot{\theta}_{i1} [\mathbf{Q}_{i3}]_{i1} \mathbf{k}_{i1} - \dot{\theta}_{i3} \mathbf{j}_{i3} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i1} \sin \theta_{i3} & -\dot{\theta}_{i3} & \dot{\theta}_{i1} \cos \theta_{i3} \end{bmatrix}^T \quad (6.38)$$

où les vecteurs unitaires \mathbf{k}_{i1} , \mathbf{j}_{i2} et \mathbf{j}_{i3} (représentant respectivement les axes z_{i1} , y_{i2} et y_{i3}) sont définis comme suit :

$$\mathbf{k}_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (6.39)$$

$$\mathbf{j}_{i2} = \mathbf{j}_{i3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (6.40)$$

La vitesse cartésienne des membrures $i3$, $i5$ et de l'articulation sphérique S_i , soient $\dot{\mathbf{c}}_{i3}$, $\dot{\mathbf{c}}_{i5}$ et $\dot{\mathbf{c}}_{S_i}$ sont exprimés dans le repère $i1$. On a que les vecteurs position des centres de masse \mathbf{c}_{i3} , \mathbf{c}_{i5} et \mathbf{c}_{S_i} s'expriment comme suit :

$$[\mathbf{c}_{i3}]_{i1} = [\mathbf{l}_{i1}]_{i1} + [\mathbf{Q}_{i2}]_{i1} [\mathbf{l}_{i2}]_{i2} + [\mathbf{Q}_{i3}]_{i1} [\mathbf{r}_{i3}]_{i3} \quad (6.41)$$

$$[\mathbf{c}_{i5}]_{i1} = [\mathbf{l}_{i1}]_{i1} + [\mathbf{Q}_{i3}]_{i1} [\mathbf{l}_{i6}]_{i3} + [\mathbf{Q}_{i2}]_{i1} [\mathbf{r}_{i5}]_{i2} \quad (6.42)$$

$$[\mathbf{c}_{S_i}]_{i1} = [\mathbf{l}_{i1}]_{i1} + [\mathbf{Q}_{i2}]_{i1} [\mathbf{l}_{i2}]_{i2} + [\mathbf{Q}_{i3}]_{i1} [\mathbf{r}_{ie}]_{i3} \quad (6.43)$$

où les vecteurs \mathbf{l}_{i1} , \mathbf{l}_{i2} et \mathbf{l}_{i6} représentent respectivement les membrures $i1$, $i2$ et $i6$, tel que

montré à la Fig. 6.3. Ces vecteurs sont définis comme suit :

$$[\mathbf{l}_{i1}]_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_1 \end{bmatrix}^T \quad (6.44)$$

$$[\mathbf{l}_{i2}]_{i2} = \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.45)$$

$$[\mathbf{l}_{i6}]_{i3} = \begin{bmatrix} l_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T . \quad (6.46)$$

Les vecteurs $[\mathbf{r}_{i3}]_{i3}$ et $[\mathbf{r}_{i5}]_{i2}$ représentent la position du centre de masse des membrures correspondantes à partir des points de pivots définis à la Fig. 6.3. Le vecteur $[\mathbf{r}_{ie}]_{i3}$ représente la position de la masse ponctuelle représentant l'effecteur, exprimée dans le repère $i3$.

Dans l'expression de l'énergie cinétique (6.31) les matrices d'inertie des composants sont exprimées dans leur propre repère. Ces matrices sont de la forme suivante :

$$[\mathbf{J}_k]_k = \begin{bmatrix} j_{kxx} & j_{kxy} & j_{kxz} \\ j_{kxy} & j_{kyy} & j_{kyz} \\ j_{kxz} & j_{kyz} & j_{kzz} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Connaissant également les termes de vitesses et de vitesses angulaires de chaque composant, l'expression de l'énergie cinétique d'une jambe sous forme scalaire se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} T_i = \frac{1}{2} & \left[m_1 (c_{1x}^2 + c_{1y}^2) \dot{\theta}_{i1}^2 + m_2 (t_{i1} \dot{\theta}_{i1}^2 + t_{i2} \dot{\theta}_{i2}^2 + t_{i3} \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i2}) + m_6 (t_{i4} \dot{\theta}_{i1}^2 + t_{i5} \dot{\theta}_{i3}^2 + t_{i6} \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i3}) \right. \\ & + m_5 (t_{i26}^2 \dot{\theta}_{i1}^2 + (t_{i25} \dot{\theta}_{i1} + t_{i7} \dot{\theta}_{i2} + t_{i8} \dot{\theta}_{i3})^2 + (t_{i9} \dot{\theta}_{i2} + t_{i10} \dot{\theta}_{i3})^2) \\ & + m_3 (t_{i24}^2 \dot{\theta}_{i1}^2 + (t_{i23} \dot{\theta}_{i1} + t_{i11} \dot{\theta}_{i2} + t_{i12} \dot{\theta}_{i3})^2 + (t_{i13} \dot{\theta}_{i2} + t_{i14} \dot{\theta}_{i3})^2) \\ & + (j_{1zz} \dot{\theta}_{i1}^2) + (t_{i15} \dot{\theta}_{i1}^2 + j_{2yy} \dot{\theta}_{i2}^2 + t_{i16} \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i2}) + (t_{i17} \dot{\theta}_{i1}^2 + j_{3yy} \dot{\theta}_{i3}^2 + t_{i18} \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i3}) \\ & + (t_{i19} \dot{\theta}_{i1}^2 + j_{5yy} \dot{\theta}_{i2}^2 + t_{i20} \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i2}) + (t_{i21} \dot{\theta}_{i1}^2 + j_{6yy} \dot{\theta}_{i3}^2 + t_{i22} \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i3}) \\ & \left. + m_{S_i} ((t_{i13} \dot{\theta}_{i2} + t_{i28} \dot{\theta}_{i3})^2 + (t_{i29} \dot{\theta}_{i1} + t_{i11} \dot{\theta}_{i2} + t_{i27} \dot{\theta}_{i3})^2 + t_{i30}^2 \dot{\theta}_{i1}^2) \right]. \quad (6.48) \end{aligned}$$

Les coefficients t_{i1} à t_{i30} sont définis à l'annexe F. À la section suivante, l'expression de l'énergie potentielle de la jambe est déterminée.

6.2.5 Détermination de l'expression d'énergie potentielle de la jambe

Afin de déterminer l'énergie potentielle totale de la jambe, l'équation (6.26) est utilisée. On a,

$$\begin{aligned} V_i = (m_1 g \mathbf{h}^T [\mathbf{c}_{i1}]_i) + (m_2 g \mathbf{h}^T [\mathbf{c}_{i2}]_i) + (m_3 g \mathbf{h}^T [\mathbf{c}_{i3}]_i) + (m_5 g \mathbf{h}^T [\mathbf{c}_{i5}]_i) \\ + (m_6 g \mathbf{h}^T [\mathbf{c}_{i6}]_i) + (m_{S_i} g \mathbf{h}^T [\mathbf{c}_{S_i}]_i). \quad (6.49) \end{aligned}$$

La direction verticale positive est définie dans le sens positif de l'axe x_i , soit $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Afin de déterminer l'expression de l'énergie potentielle de la jambe, les positions des centres

de masse des composants sont calculées selon le repère fixe de la jambe i . On a donc les expressions pour les vecteurs $[\mathbf{c}_{ik}]_i$ qui s'écrivent comme suit :

$$[\mathbf{c}_{i1}]_i = [\mathbf{Q}_{i1}]_i [\mathbf{c}_{i1}]_{i1} \quad (6.50)$$

$$[\mathbf{c}_{i2}]_i = [\mathbf{Q}_{i1}]_i ([\mathbf{Q}_{i2}]_{i1} [\mathbf{c}_{i2}]_{i2} + [\mathbf{l}_{i1}]_{i1}) \quad (6.51)$$

$$[\mathbf{c}_{i3}]_i = [\mathbf{Q}_{i1}]_i [\mathbf{c}_{i3}]_{i1} \quad (6.52)$$

$$[\mathbf{c}_{i5}]_i = [\mathbf{Q}_{i1}]_i [\mathbf{c}_{i5}]_{i1} \quad (6.53)$$

$$[\mathbf{c}_{i6}]_i = [\mathbf{Q}_{i1}]_i ([\mathbf{Q}_{i3}]_{i1} [\mathbf{c}_{i6}]_{i3} + [\mathbf{l}_{i1}]_{i1}) \quad (6.54)$$

$$[\mathbf{c}_{S_i}]_i = [\mathbf{Q}_{i1}]_i [\mathbf{c}_{S_i}]_{i1}. \quad (6.55)$$

En insérant les équations (6.50) à (6.55) dans l'équation (6.49), on obtient l'expression scalaire de l'énergie potentielle qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} V_i = & m_1 g (c_{i1x} \cos \theta_{i1} - c_{i1y} \sin \theta_{i1}) + m_2 g ((c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2}) \cos \theta_{i1} - c_{i2y} \sin \theta_{i1}) \\ & + m_3 g ((l_2 \cos \theta_{i2} + r_{i3x} \cos \theta_{i3} - r_{i3z} \sin \theta_{i3}) \cos \theta_{i1} - r_{i3y} \sin \theta_{i1}) \\ & + m_5 g ((l_6 \cos \theta_{i3} + r_{i5x} \cos \theta_{i2} - r_{i5z} \sin \theta_{i2}) \cos \theta_{i1} - r_{i5y} \sin \theta_{i1}) \\ & + m_6 g ((c_{i6x} \cos \theta_{i3} - c_{i6z} \sin \theta_{i3}) \cos \theta_{i1} - c_{i6y} \sin \theta_{i1}) \\ & + m_{S_i} g ((l_2 \cos \theta_{i2} + r_{S_ix} \cos \theta_{i3} - r_{S_iz} \sin \theta_{i3}) \cos \theta_{i1} - r_{S_iy} \sin \theta_{i1}) \quad (6.56) \end{aligned}$$

Ayant les expressions d'énergie cinétique et potentielle de la jambe, ces dernières sont dérivées afin d'obtenir les termes de l'équation du mouvement (6.27).

6.2.6 Dérivations

Les termes d'énergie cinétique et potentielle étant connus, les dérivations afin d'obtenir les matrices et les vecteurs de l'équation du mouvement (6.27) sont présentées dans cette section. La matrice d'inertie généralisée s'obtient en dérivant l'équation (6.48) selon les dérivées contenues dans la matrice de l'équation (6.24). On a alors,

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \dot{j}_{i11} & \dot{j}_{i12} & \dot{j}_{i13} \\ \dot{j}_{i21} & \dot{j}_{i22} & \dot{j}_{i23} \\ \dot{j}_{i31} & \dot{j}_{i32} & \dot{j}_{i33} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

où

$$\begin{aligned} \underline{j}_{i11} &= \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1}^2} = m_1(c_{i1x}^2 + c_{i1y}^2) + m_2 t_{i1} + m_3(t_{i23}^2 + t_{i24}^2) + m_5(t_{i25}^2 + t_{i26}^2) \\ &\quad + m_6 t_{i4} + j_{i1zz} + m_{S_i}(t_{i29}^2 + t_{i30}^2) + t_{i15} + t_{i17} + t_{i19} + t_{i21} \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\underline{j}_{i22} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i2}^2} = m_2 t_{i2} + j_{2yy} + j_{5yy} + (m_3 + m_{S_i})l_2^2 + m_5(r_{i5x}^2 + r_{i5z}^2) \quad (6.59)$$

$$\underline{j}_{i33} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i3}^2} = m_6 t_{i5} + j_{3yy} + j_{6yy} + m_5 l_6^2 + m_3(r_{i3x}^2 + r_{i3z}^2) + m_{S_i}(r_{S_ix}^2 + r_{S_iz}^2) \quad (6.60)$$

$$\underline{j}_{i12} = \underline{j}_{i21} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1} \partial \dot{\theta}_{i2}} = \frac{1}{2} (m_2 t_{i3} + t_{i16} + t_{i20}) + m_5 t_{i7} t_{i25} + m_3 t_{i11} t_{i23} + m_{S_i} t_{i11} t_{i29} \quad (6.61)$$

$$\underline{j}_{i13} = \underline{j}_{i31} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1} \partial \dot{\theta}_{i3}} = \frac{1}{2} (m_6 t_{i6} + t_{i18} + t_{i22}) + m_5 t_{i8} t_{i25} + m_3 t_{i12} t_{i23} + m_{S_i} t_{i27} t_{i29} \quad (6.62)$$

$$\underline{j}_{i23} = \underline{j}_{i32} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \dot{\theta}_{i2} \partial \dot{\theta}_{i3}} = m_5(t_{i7} t_{i8} + t_{i9} t_{i10}) + m_3(t_{i11} t_{i12} + t_{i13} t_{i14}) + m_{S_i}(t_{i11} t_{i27} + t_{i13} t_{i28}). \quad (6.63)$$

La dérivée temporelle de la matrice d'inertie généralisée s'exprime comme suit :

$$\dot{\mathbf{J}}_i = \frac{d\mathbf{J}_i}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{j}}_{i11} & \dot{\underline{j}}_{i12} & \dot{\underline{j}}_{i13} \\ \dot{\underline{j}}_{i21} & \dot{\underline{j}}_{i22} & \dot{\underline{j}}_{i23} \\ \dot{\underline{j}}_{i31} & \dot{\underline{j}}_{i32} & \dot{\underline{j}}_{i33} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\underline{j}}_{i11} &= m_2 \dot{t}_{i1} + m_6 \dot{t}_{i4} + \dot{t}_{i15} + \dot{t}_{i17} + \dot{t}_{i19} + \dot{t}_{i21} + 2m_3(t_{i23} \dot{t}_{i23} + t_{i24} \dot{t}_{i24}) + 2m_5(t_{i25} \dot{t}_{i25} + t_{i26} \dot{t}_{i26}) \\ &\quad + 2m_{S_i}(t_{i29} \dot{t}_{i29} + t_{i30} \dot{t}_{i30}) \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\dot{\underline{j}}_{i22} = 0 \quad (6.66)$$

$$\dot{\underline{j}}_{i33} = 0 \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{j}}_{i12} = \dot{\underline{j}}_{i21} &= \frac{1}{2} (m_2 \dot{t}_{i3} + \dot{t}_{i16} + \dot{t}_{i20}) + m_5(t_{i7} \dot{t}_{i25} + \dot{t}_{i7} t_{i25}) + m_3(t_{i11} \dot{t}_{i23} + \dot{t}_{i11} t_{i23}) \\ &\quad + m_{S_i}(t_{i11} \dot{t}_{i29} + \dot{t}_{i11} t_{i29}) \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{j}}_{i13} = \dot{\underline{j}}_{i31} &= \frac{1}{2} (m_6 \dot{t}_{i6} + \dot{t}_{i18} + \dot{t}_{i22}) + m_5(t_{i8} \dot{t}_{i25} + \dot{t}_{i8} t_{i25}) + m_3(t_{i12} \dot{t}_{i23} + \dot{t}_{i12} t_{i23}) \\ &\quad + m_{S_i}(t_{i27} \dot{t}_{i29} + \dot{t}_{i27} t_{i29}) \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{j}}_{i23} = \dot{\underline{j}}_{i32} &= m_3(t_{i11} \dot{t}_{i12} + \dot{t}_{i11} t_{i12} + t_{i13} \dot{t}_{i14} + \dot{t}_{i13} t_{i14}) + m_5(t_{i7} \dot{t}_{i8} + \dot{t}_{i7} t_{i8} + t_{i9} \dot{t}_{i10} + \dot{t}_{i9} t_{i10}) \\ &\quad + m_{S_i}(t_{i11} \dot{t}_{i27} + \dot{t}_{i11} t_{i27} + t_{i13} \dot{t}_{i28} + \dot{t}_{i13} t_{i28}). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Les dérivées par rapport au temps \dot{t}_{i1} à \dot{t}_{i30} sont explicitées à l'annexe F. La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au vecteur des coordonnées articulaires s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\theta}_{i1}} & \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\theta}_{i2}} & \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\theta}_{i3}} \end{bmatrix}^T. \quad (6.71)$$

Chaque terme de ce vecteur fait intervenir des dérivées partielles des termes t_{i1} à t_{i30} par rapport aux coordonnées articulaires. Pour des questions de notation, la coordonnée articulaire suivant le terme indique la variable par rapport à laquelle est dérivée ce terme. Par exemple, la dérivée partielle de t_{i1} par rapport à θ_{i2} est notée $t_{i1,\theta_{i2}}$. Les composantes de ce vecteur sont les suivantes :

$$\frac{\partial T_i}{\partial \theta_{i1}} = 0 \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial \theta_{i2}} = & \frac{1}{2} \left(m_2 (\dot{\theta}_{i1}^2 t_{i1,\theta_{i2}} + \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i2} t_{i3,\theta_{i2}}) + \dot{\theta}_{i1}^2 (t_{i15,\theta_{i2}} + t_{i19,\theta_{i2}}) + \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i2} (t_{i16,\theta_{i2}} + t_{i20,\theta_{i2}}) \right) \\ & + m_5 \left((t_{i25} \dot{\theta}_{i1} + t_{i7} \dot{\theta}_{i2} + t_{i8} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i2} t_{i7,\theta_{i2}}) + (t_{i9} \dot{\theta}_{i2} + t_{i10} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i2} t_{i9,\theta_{i2}}) \right) \\ & + (t_{i26} \dot{\theta}_{i1}) (\dot{\theta}_{i1} t_{i26,\theta_{i2}}) + m_3 \left((t_{i23} \dot{\theta}_{i1} + t_{i11} \dot{\theta}_{i2} + t_{i12} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i2} t_{i11,\theta_{i2}}) \right) \\ & + (t_{i13} \dot{\theta}_{i2} + t_{i14} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i2} t_{i13,\theta_{i2}}) + (t_{i24} \dot{\theta}_{i1}) (\dot{\theta}_{i1} t_{i24,\theta_{i2}}) \\ & + m_{S_i} \left((t_{i29} \dot{\theta}_{i1} + t_{i11} \dot{\theta}_{i2} + t_{i27} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i2} t_{i11,\theta_{i2}}) + (t_{i13} \dot{\theta}_{i2} + t_{i28} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i2} t_{i13,\theta_{i2}}) \right) \\ & + (t_{i30} \dot{\theta}_{i1}) (\dot{\theta}_{i1} t_{i30,\theta_{i2}}) \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial \theta_{i3}} = & \frac{1}{2} \left(m_6 (\dot{\theta}_{i1}^2 t_{i4,\theta_{i3}} + \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i3} t_{i6,\theta_{i3}}) + \dot{\theta}_{i1}^2 (t_{i17,\theta_{i3}} + t_{i21,\theta_{i3}}) + \dot{\theta}_{i1} \dot{\theta}_{i3} (t_{i18,\theta_{i3}} + t_{i22,\theta_{i3}}) \right) \\ & + m_5 \left((t_{i25} \dot{\theta}_{i1} + t_{i7} \dot{\theta}_{i2} + t_{i8} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i3} t_{i8,\theta_{i3}}) + (t_{i9} \dot{\theta}_{i2} + t_{i10} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i3} t_{i10,\theta_{i3}}) \right) \\ & + (t_{i26} \dot{\theta}_{i1}) (\dot{\theta}_{i1} t_{i26,\theta_{i3}}) + m_3 \left((t_{i23} \dot{\theta}_{i1} + t_{i11} \dot{\theta}_{i2} + t_{i12} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i3} t_{i12,\theta_{i3}}) \right) \\ & + (t_{i13} \dot{\theta}_{i2} + t_{i14} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i3} t_{i14,\theta_{i3}}) + (t_{i24} \dot{\theta}_{i1}) (\dot{\theta}_{i1} t_{i24,\theta_{i3}}) \\ & + m_{S_i} \left((t_{i29} \dot{\theta}_{i1} + t_{i11} \dot{\theta}_{i2} + t_{i27} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i3} t_{i27,\theta_{i3}}) + (t_{i13} \dot{\theta}_{i2} + t_{i28} \dot{\theta}_{i3}) (\dot{\theta}_{i3} t_{i28,\theta_{i3}}) \right) \\ & + (t_{i30} \dot{\theta}_{i1}) (\dot{\theta}_{i1} t_{i30,\theta_{i3}}). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Les dérivées partielles des termes sont données à l'annexe F. Le terme de forces statiques, soit la dérivée de l'énergie potentielle par rapport aux coordonnées articulaires $\frac{\partial T_i}{\partial \theta_i}$ s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial V_i}{\partial \theta_i} = \left[\frac{\partial V_i}{\partial \theta_{i1}} \quad \frac{\partial V_i}{\partial \theta_{i2}} \quad \frac{\partial V_i}{\partial \theta_{i3}} \right]^T. \quad (6.75)$$

Les composantes de ce vecteur sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_i}{\partial \theta_{i1}} = & -m_1 g (c_{i1x} \sin \theta_{i1} + c_{i1y} \cos \theta_{i1}) \\
& -m_2 g ((c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2}) \sin \theta_{i1} + c_{i2y} \cos \theta_{i1}) \\
& -m_3 g ((l_2 \cos \theta_{i2} + r_{i3x} \cos \theta_{i3} - r_{i3z} \sin \theta_{i3}) \sin \theta_{i1} - r_{i3y} \cos \theta_{i1}) \\
& -m_5 g ((l_6 \cos \theta_{i3} + r_{i5x} \cos \theta_{i2} - r_{i5z} \sin \theta_{i2}) \sin \theta_{i1} - r_{i5y} \cos \theta_{i1}) \\
& -m_6 g ((c_{i6x} \cos \theta_{i3} - c_{i6z} \sin \theta_{i3}) \sin \theta_{i1} + c_{i6y} \cos \theta_{i1}) \\
& -m_{S_i} g ((l_2 \cos \theta_{i2} + r_{S_ix} \cos \theta_{i3} - r_{S_iz} \sin \theta_{i3}) \sin \theta_{i1} - r_{S_iy} \cos \theta_{i1}) \tag{6.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_i}{\partial \theta_{i2}} = & -m_2 g (c_{i2x} \sin \theta_{i2} + c_{i2z} \cos \theta_{i2}) \cos \theta_{i1} \\
& - (m_3 + m_{S_i}) g (l_2 \sin \theta_{i2}) \cos \theta_{i1} - m_5 g (r_{i5x} \sin \theta_{i2} + r_{i5z} \cos \theta_{i2}) \cos \theta_{i1} \tag{6.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_i}{\partial \theta_{i3}} = & -m_3 g (r_{i3x} \sin \theta_{i3} + r_{i3z} \cos \theta_{i3}) \cos \theta_{i1} - m_5 g (l_6 \sin \theta_{i3}) \cos \theta_{i1} \\
& -m_6 g (c_{i6x} \sin \theta_{i3} + c_{i6z} \cos \theta_{i3}) \cos \theta_{i1} - m_{S_i} g (r_{S_ix} \sin \theta_{i3} + r_{S_iz} \cos \theta_{i3}) \cos \theta_{i1}. \tag{6.78}
\end{aligned}$$

Ces expressions dérivées sont insérées dans l'équation (6.27) afin d'évaluer les couples dynamiques et statiques des jambes pour une trajectoire de l'effecteur S_i donnée.

6.2.7 Poids, inerties et centre de masse des composants des jambes

Les équations de la dynamique des jambes du robot étant données plus haut, les poids, les matrices d'inertie ainsi que la position des centres de masse sont données à la section D.2 de l'annexe D. Ces données sont obtenues à partir du prototype présenté au chapitre 4 et elles proviennent du logiciel de modélisation solide PTC CREO.

6.3 Combinaison des modèles dynamiques

Dans cette section, le modèle dynamique de la jambe est combiné à celui de la plateforme. Par le principe de D'Alembert, l'équation (6.19) est insérée dans l'équation (6.27) afin de constituer le modèle dynamique pour chaque jambe, incluant celui d'une partie de la plateforme. On a ainsi l'équation suivante :

$$\mathbf{J}_i \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \tilde{\mathbf{J}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i + \frac{\partial T_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} + \frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} = \boldsymbol{\tau}_i - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{f}_i} - \boldsymbol{\Phi}_i \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.79}$$

Tout comme la cinématique, la formulation du modèle dynamique du robot est modulaire. En effet, le changement d'architecture d'un des sous-systèmes n'affecte pas la modélisation mathématique de l'autre et vice-versa. À partir de ce modèle, une étude des performances dynamiques du robot peut être effectuée. La section suivante établit une évaluation de la bande passante du robot.

6.3.1 Évaluation de la bande passante du robot

Dans cette section, une étude de la bande passante du robot est effectuée. Afin de simplifier l'étude, celle-ci est ramenée à l'évaluation de la bande passante d'une seule jambe. La masse de la plateforme est divisée en trois et appliquée à l'articulation S_i . Cette approximation considère la masse de la plateforme sans tenir compte de l'architecture de cette dernière. La valeur de m_{S_i} comprend donc la masse des articulations sphériques et celle de la plateforme divisée en trois. Les valeurs de masses sont données aux annexes E et D. Cette étude a pour but de quantifier les performances en accélération du robot. On considère qu'aucun objet n'est saisi à l'effecteur.

Pour l'étude en fréquence, une trajectoire de base est réalisée pour chaque articulation. Premièrement, une configuration neutre de la jambe est définie, soit celle illustrée à la Fig. 6.4. Les coordonnées articulaires sont définies comme suit :

$$\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_i^I = \begin{bmatrix} 0^\circ & 45^\circ & 135^\circ \end{bmatrix}^T. \quad (6.80)$$

Deuxièmement, à partir de cette configuration, une oscillation de $\pm 45^\circ$ suivant un profil

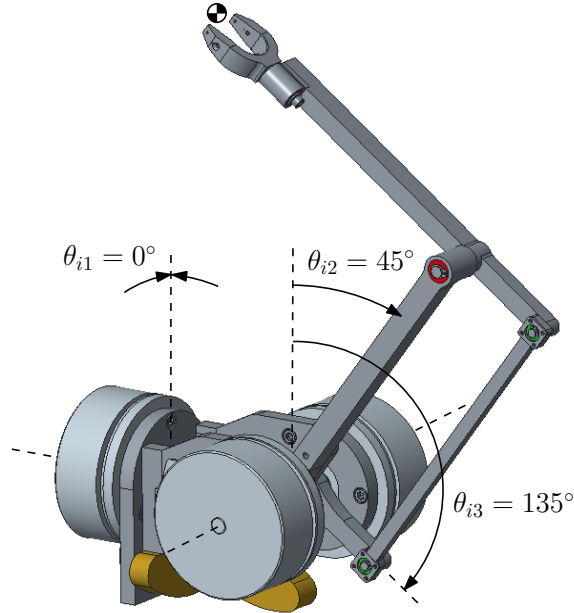


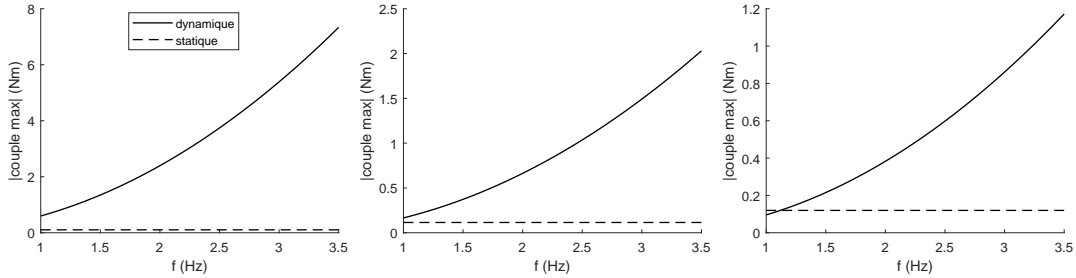
FIGURE 6.4 – Configuration à l'étude, soit lorsque $(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}) = (0^\circ, 45^\circ, 135^\circ)$.

sinusoïdal est imposée à chaque articulation individuellement tel que,

$$\theta_{ij}(t) = \theta_{ij}^I + 45 \sin(2\pi ft), \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2, 3 \quad (6.81)$$

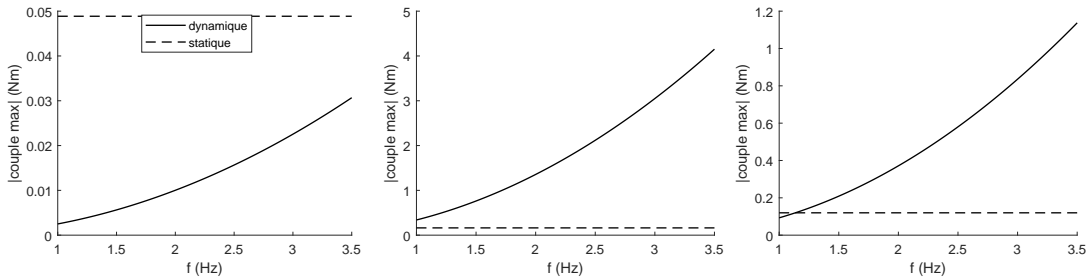
où j est l'indice de la coordonnée articulaire de la $i^{\text{ème}}$ jambe et f est la fréquence d'oscillation. Ces types de mouvements articulaires aux jambes sont typiques à ceux induits par le mouvement de la plateforme.

Les couples articulaires statiques et dynamiques maximaux sont considérés à plusieurs fréquences d'oscillation f . Les graphiques présentés à la Fig. 6.5 montrent les couples dynamique, statique et total maximaux obtenus pour chaque articulation lors de l'oscillation de l'articulation R_{i1} . Les Fig. 6.6 et 6.7 montrent ces graphiques pour l'oscillation des articulations R_{i2} et R_{i3} .



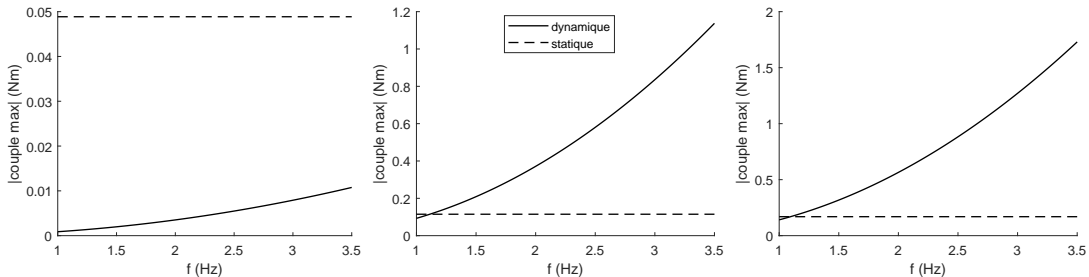
(a) Couples à l'articulation 1 (b) Couples à l'articulation 2 (c) Couples à l'articulation 3

FIGURE 6.5 – Couples articulaires dynamique, statique et total maximaux en fonction de la fréquence f d'actionnement selon chaque articulation, pour une oscillation de θ_{i1} .



(a) Couples à l'articulation 1 (b) Couples à l'articulation 2 (c) Couples à l'articulation 3

FIGURE 6.6 – Couples articulaires dynamique, statique et total maximaux en fonction de la fréquence f d'actionnement selon chaque articulation, pour une oscillation de θ_{i2} .



(a) Couples à l'articulation 1 (b) Couples à l'articulation 2 (c) Couples à l'articulation 3

FIGURE 6.7 – Couples articulaires dynamique, statique et total maximaux en fonction de la fréquence f d'actionnement selon chaque articulation, pour une oscillation de θ_{i3} .

Pour l'oscillation de l'articulation R_{i1} , les couples dynamiques non nuls repris par les moteurs

2 et 3 sont causés par la force centripète exercée sur les membrures du mécanisme plan. Les couples statiques non-nuls aux moteurs s'expliquent par le fait que le mécanisme plan n'est pas complètement équilibré statiquement, tel qu'expliqué au chapitre 4.

Lors de l'oscillation des articulations R_{i2} et R_{i3} , les couples dynamiques repris par le premier moteur sont à peu près nuls. Les faibles valeurs de couples statique et dynamique au premier axe s'expliquent par le fait que les centres de masse des membrures du mécanisme plan ne sont pas situés exactement sur le plan $x_i z_i$ et génèrent de petits moments autour de l'axe R_{i1} .

La variation de la fréquence f n'a aucun effet sur l'ordre de grandeur des couples statiques. Les valeurs maximales de ce dernier sont donc constantes pour chaque fréquence. Toutefois, en posant l'hypothèse que le mécanisme ne subit aucune perte d'énergie par frottement ou amortissement, la fréquence a un effet quadratique sur l'ordre de grandeur des couples dynamiques. Cela s'explique par le profil sinusoïdal utilisé. L'accélération générée par ce profil de mouvement dépend de f^2 . De plus, les accélérations centripètes subies par les composants adjacents dépendent également de f^2 .

Le couple total demeure généralement plus important pour les articulations qui oscillent que celles qui sont immobiles. Considérons donc les graphiques des Fig. 6.5a, 6.6b et 6.7c ainsi que les spécifications des moteurs Maxon présentées à l'annexe C pour les fins d'évaluation de la bande passante de chaque articulation.

Pour ce robot réalisant des trajectoires dynamiques, la période des oscillations est nettement plus petite que la constante de temps thermique du bobinage des moteurs. On peut donc permettre un couple momentané aux moteurs d'environ 2 fois le couple nominal. Dans ce cas, on obtient un couple moyen tournant autour du couple continu. Sachant que le prototype n'est pas utilisé longtemps, ce choix est conservateur. En considérant que le couple statique maximal aux moteurs lors des oscillations est d'environ $0.2 Nm$, on compare donc le couple dynamique au double du couple nominal soustrait de $0.2 Nm$, soit $1.728 Nm$, afin de déterminer la bande passante à chaque articulation. Considérant les graphiques relevés plus haut, on a que la fréquence maximale de mouvement permise à l'articulation R_{i1} est d'environ $1.6 Hz$, $2.2 Hz$ à l'articulation R_{i2} et $3.5 Hz$ à l'articulation R_{i3} .

Le fait que la fréquence maximale admise à l'articulation R_{i1} soit inférieure à celle aux articulations R_{i2} et R_{i3} est plausible, étant donné que la masse en mouvement est plus importante à cette articulation. De plus, cette étude ne prend pas en compte le sens des couples dynamique et statique. Celle-ci fournit donc des valeurs de fréquences maximales aux articulations

conservatrices.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle dynamique de la plateforme et des jambes du robot ainsi que les hypothèses qui s'y rattachent sont développés. La modélisation dynamique de la plateforme est faite avec la méthode de Newton et celle des jambes est élaborée avec l'approche de Lagrange. La combinaison de ces modèles permet de caractériser la dynamique du robot au complet. À partir de ce modèle, une méthode d'estimation de la bande passante à chaque articulation est élaborée. Au terme de ce chapitre, le modèle dynamique du robot peut ainsi être intégré dans un schéma de commande prédictive dans le contrôleur du robot.

Conclusion

Le but du projet décrit dans ce mémoire est la modélisation, la conception mécanique et l'étude d'un robot hybride collaboratif redondant à $(6+3)$ ddls. Ce robot est divisé en quatre parties distinctes, soient trois jambes hybrides à 3 ddl servant à positionner la plateforme qui est un mécanisme plan à 3 ddl. Les trois degrés de liberté redondants sont utilisés à la plateforme pour actionner un mécanisme à partir des moteurs des jambes situés à la base. Dans le cas présent, deux de ces trois degrés de liberté sont utilisés pour actionner un préhenseur à deux doigts. La redondance cinématique du robot permet également d'agrandir l'espace de travail de la plateforme en translation et en rotation, comparativement à celui d'un robot conventionnel non redondant. Ce robot peut réaliser des rotations de sa plateforme de $\pm 90^\circ$ en torsion et en inclinaison dans un grand volume d'espace. Les chapitres de ce mémoire traitent de différents aspects de ce robot, soient le modèle cinématique et l'étude des singularités, une étude de l'espace de travail du robot, les principes utilisés lors de la conception mécanique du robot, l'évaluation de la sensibilité cinématique des différents mécanismes qui composent le robot, ainsi que l'élaboration du modèle dynamique.

Au chapitre 1, le modèle cinématique général du robot ainsi que celui de la plateforme sont développés. Les équations de la cinématique issues des contraintes géométriques y sont développées. À partir de celles-ci, les problèmes géométriques direct et inverse sont développés. Les équations de vitesse de la plateforme et du robot en général sont également développées. À partir de celles-ci une étude des singularités du robot est réalisée. Les configurations singulières des jambes constituent les singularités de type I du robot. Les configurations singulières de type II du robot sont celles de la plateforme.

Au chapitre 2, le modèle cinématique des jambes est développé. Les équations de contraintes géométriques ainsi que les problèmes géométriques direct et inverse sont développés. Comme pour le chapitre 1, les équations de vitesses ainsi qu'une étude des configurations singulières sont développées. Les résultats de l'étude des singularités des jambes et de la plateforme (développée au chapitre précédent) sont à prendre en compte pour l'étape de conception mécanique du robot. Une architecture parallélogramme du mécanisme de la jambe est également propo-

sée, afin de simplifier la conception mécanique et le contrôle du robot.

Au chapitre 3, une étude de l'espace de travail du robot est effectuée. L'étude est séparée en deux parties, soient celle de l'espace de travail en translation et celle de l'espace de travail en rotation de la plateforme. Des méthodes sont proposées afin d'évaluer ces espaces de travail du robot. Une méthode analytique pour l'évaluation de l'espace de travail en translation est proposée. Celle-ci ne tient pas compte des interférences mécaniques entre les membrures, ni des limites des articulations. Une méthode plus élaborée pour l'évaluation du volume de l'espace de travail en rotation de la plateforme est également proposée dans ce chapitre. Des tendances de ce volume en fonction des paramètres géométriques sont montrées. Au terme de ce chapitre il est relevé que les limitations aux articulations sphériques S_i affectent grandement le volume de l'espace de travail en rotation du robot. De plus, l'optimum du dimensionnement géométrique du robot est donné et expliqué.

Au chapitre 4, les principes utilisés lors de la conception mécanique du robot sont détaillés. Une revue des exigences techniques est effectuée. Le design mécanique du robot est effectué en conséquence. Les actionneurs utilisés ne possèdent aucun réducteur, ce qui facilite l'implantation d'une commande en impédance. Afin de limiter les couples gravitationnels engendrés par le poids des membrures aux actionneurs, un système de contrepoids est élaboré. De ce fait, le couple disponible aux moteurs est principalement utilisé pour combattre l'inertie lors de la mise en mouvement du robot. Il est à noter que cette dernière est faible, puisque les moteurs sont situés près de la base. Ce robot possède donc une faible impédance de mouvement. De plus, un concept mécanique de préhenseur est présenté. Ce dernier est composé de deux doigts qui sont bougés indépendamment. Finalement, l'espace de travail en rotation du robot conçu est montré.

Au chapitre 5, une étude de la sensibilité cinématique de chaque mécanisme qui compose le robot est réalisée. Les sensibilités des mécanismes du préhenseur, de l'effecteur et des jambes sont étudiées individuellement. L'erreur aux coordonnées cartésiennes de chaque mécanisme en fonction d'une erreur de module unitaire aux coordonnées articulaires est étudiée. Finalement, la sensibilité du robot en entier est traitée. Celle-ci établit les erreurs cartésiennes en position, en orientation et en ouverture du préhenseur en fonction d'une erreur aux coordonnées articulaires. Les résultats montrés permettent de connaître le comportement du robot pour différentes trajectoires en translation, en rotation et en ouverture des doigts.

Au chapitre 6, le modèle dynamique et statique du robot est élaboré. Ce dernier est traité en deux parties, soit celui de la plateforme et celui d'une jambe. La modélisation de la pla-

teforme est réalisée avec l'approche de Newton. Les forces à chaque articulation sphérique S_i sont déterminées pour une trajectoire de la plateforme donnée. Par la suite, avec le principe de conservation de l'énergie, ces forces à l'extrémité de chaque jambe sont converties en couples moteurs. La dynamique des jambes est traitée pour chaque jambe individuellement. L'approche de Lagrange est utilisée. Le modèle développé permet de déterminer les couples qui doivent être appliqués aux actionneurs lors de mouvements de la jambe. Ces modèles sont ainsi combinés et insérés dans le contrôleur du robot afin de prédire la commande en fonction du comportement dynamique du robot.

Dans un travail futur, le contrôle du robot est à réaliser. Ce dernier doit se faire dans une optique de collaboration humain robot, de manière à prendre en compte les interactions du robot avec son environnement. Il peut être appliqué à une interface haptique avec une commande impédance. Le principal avantage de cette stratégie serait l'absence de capteur de force à l'effecteur. De ce fait, la maniabilité de l'effecteur serait optimale, minimisant ainsi l'impédance d'interaction avec le mécanisme. Il serait également pertinent de revoir le design des composants du robot de manière à ce qu'ils soient plus sécuritaires tout en respectant les principes de la collaboration humain robot. Il serait bien de revoir la forme des membrures et des articulations sphériques de manière à éliminer les arrêtes vives et les points de coincement potentiels.

Annexe A

Développement des dérivées partielles pour le PGD de la plateforme

Dans cette annexe, les dérivées partielles nécessaires à la résolution du problème géométrique direct de la plateforme du robot présenté à la Section 1.1.2 sont développées.

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_x^T} = 2d_{11}\mathbf{u}_1^T \quad \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_y^T} = 2d_{12}\mathbf{u}_1^T \quad \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}^T} = 2\mathbf{u}_1^T \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{q}_x^T} = 2d_{21}\mathbf{u}_2^T \quad \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{q}_y^T} = 2d_{22}\mathbf{u}_2^T \quad \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}^T} = 2\mathbf{u}_2^T \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{q}_x^T} = 2d_{31}\mathbf{u}_3^T \quad \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{q}_y^T} = 2d_{32}\mathbf{u}_3^T \quad \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{p}^T} = 2\mathbf{u}_3^T \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{p}^T} = -\mathbf{q}_z^T \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_5}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_5}{\partial \mathbf{p}^T} = -\mathbf{q}_z^T \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_6}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_6}{\partial \mathbf{p}^T} = -\mathbf{q}_z^T \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial \mathbf{q}_x^T} = 2\mathbf{q}_x^T \quad \frac{\partial f_7}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_7}{\partial \mathbf{p}^T} = \mathbf{0}^T \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_8}{\partial \mathbf{q}_y^T} = 2\mathbf{q}_y^T \quad \frac{\partial f_8}{\partial \mathbf{p}^T} = \mathbf{0}^T \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{q}_y^T \quad \frac{\partial f_9}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{q}_x^T \quad \frac{\partial f_9}{\partial \mathbf{p}^T} = \mathbf{0}^T \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{q}_z^T \quad \frac{\partial f_{10}}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_{10}}{\partial \mathbf{p}^T} = \mathbf{0}^T \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{q}_x^T} = \mathbf{0}^T \quad \frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{q}_y^T} = \mathbf{q}_z^T \quad \frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{p}^T} = \mathbf{0}^T \quad (\text{A.11})$$

Chaque dérivée partielle résulte un un vecteur de dimension 3×1 . Les expressions $\mathbf{0}^T$ sont des vecteurs nuls.

Annexe B

Algorithme d'évaluation de la distance entre deux membrures

Dans cette annexe est présentée une stratégie d'évaluation de la distance minimale entre deux membrures. Ces membrures sont modélisées par des segments de droites dans l'espace. L'approche utilisée dans cet algorithme est basée sur l'évaluation de la distance minimale entre deux droites qui incluent les segments à l'étude. Ces droites sont définies par une extrémité du segment et un vecteur directeur pointant vers l'autre extrémité du segment. Ce vecteur possède une norme euclidienne égale à la longueur du segment.

B.1 Notions théoriques

Les segments utilisés pour l'élaboration du modèle de calcul sont représentés à la Fig.B.1. À

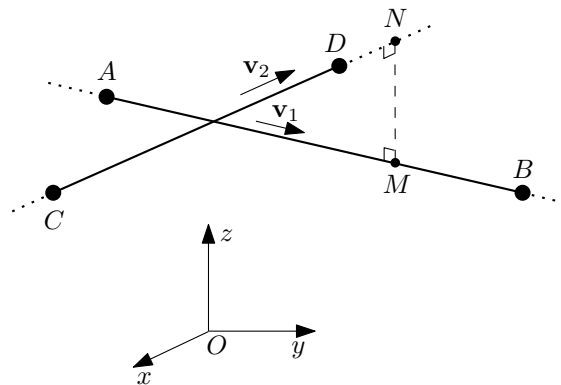


FIGURE B.1 – Segments de droites dans l'espace \mathbb{R}^3 .

partir de cette figure, les deux membrures sont illustrées par les segments \overline{AB} et \overline{CD} . Les directions de ces segments sont définies par des vecteurs directeurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 exprimés comme

suit :

$$\mathbf{v}_1 = \overline{OB} - \overline{OA} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{v}_2 = \overline{OD} - \overline{OC}. \quad (\text{B.2})$$

Or, il est possible d'exprimer la position d'un point inclus dans les segments de droite avec les équations paramétriques suivantes :

$$\overline{OM} = \overline{OA} + k_1 \mathbf{v}_1 \quad (\text{B.3})$$

$$\overline{ON} = \overline{OC} + k_2 \mathbf{v}_2 \quad (\text{B.4})$$

où les paramètres k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

Le segment \overline{MN} relie les deux points les plus proches des deux droites sur lesquelles les segments \overline{AB} et \overline{CD} sont inscrits. Le segment \overline{MN} est à la fois perpendiculaire aux deux droites. Celui-ci est défini comme suit :

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \overline{OC} + k_2 \mathbf{v}_2 - (\overline{OA} + k_1 \mathbf{v}_1). \quad (\text{B.5})$$

La norme euclidienne de ce segment correspond à la distance minimale entre les deux droites tel que défini comme suit :

$$\delta_{min}^\Delta = \|\overline{MN}\| \quad (\text{B.6})$$

où δ_{min}^Δ est la distance minimale entre les deux droites.

Sachant que \overline{MN} est à la fois perpendiculaire aux deux droites, on a également que les produits scalaires entre \overline{MN} et les vecteurs directeurs des droites \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont nuls. On a alors que

$$\overline{MN} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\overline{MN} \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \quad (\text{B.8})$$

En insérant l'équation (B.5) dans les équations (B.7) et (B.8), et en réorganisant les termes, on obtient les équations suivantes :

$$(\overline{OC} - \overline{OA}) \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1)k_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)k_2 = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$(\overline{OC} - \overline{OA}) \cdot \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)k_1 + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)k_2 = 0 \quad (\text{B.10})$$

Les valeurs de k_1 et de k_2 sont à déterminer à partir des équations (B.9) et (B.10). L'expression de k_1 est la suivante :

$$k_1 = \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\overline{OC} - \overline{OA}) \cdot \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)(\overline{OC} - \overline{OA}) \cdot \mathbf{v}_1}{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)} \quad (\text{B.11})$$

L'expression de k_2 est découlée de l'équation (B.10). On a donc

$$k_2 = \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)k_1 - (\overline{OC} - \overline{OA}) \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}. \quad (\text{B.12})$$

Les valeurs de k_1 et k_2 donnent de bons indices sur la position relative des points M et N sur les droites. Lorsque $0 \leq k_i \leq 1$ ($i = 1, 2$), le point de la i^{eme} droite se situe sur le segment. Si k_i n'est pas dans ce domaine, le point se situe ailleurs sur la droite. À partir de ces indices, il est possible d'évaluer la configuration des deux segments à l'étude et d'évaluer la bonne distance entre ceux-ci.

B.2 Configurations

Afin de déterminer la distance entre les segments, plusieurs cas de configurations sont analysés. Ces configurations ainsi que les calculs réalisés sont données dans les sous-sections suivantes. Tout d'abord, le parallélisme des segments est détecté.

B.2.1 Segments parallèles

La première étape de calcul consiste à vérifier si la direction des membrures est parallèle. Afin de déterminer le parallélisme entre les segments, le module du produit vectoriel entre les vecteurs directeurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 est considéré. En effet, lorsque

$$\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| = 0 \quad (\text{B.13})$$

les segments ont des directions parallèles. Sinon, se rapporter aux éléments présentés à la section B.2.2.

Dans un cas de parallélisme, plusieurs configurations sont possibles. Par exemple, les domaines des segments peuvent se chevaucher, tandis que pour d'autres cas de parallélisme, ces domaines peuvent être distincts. Des exemples des deux cas de parallélisme sont illustrés à la Fig. B.2.

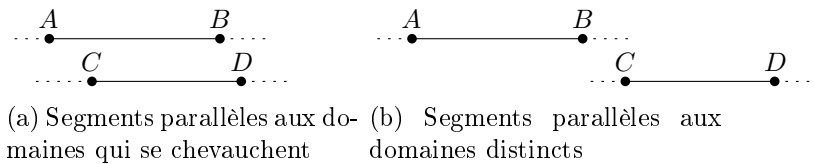


FIGURE B.2 – Types de parallélisme entre deux segments.

Calculs

Lorsque le cas de la Fig. B.2a se présente, l'équation (B.12) est utilisée. Dans cette équation, la valeur de k_1 est imposée à 0 et à 1 afin de voir à quelle position se trouvent les points A et B

dans le domaine de k_2 (sur la droite CD). La valeur de k_2 , avec $k_1 = 0$ est notée k_2^A et avec $k_1 = 1$, elle est notée k_2^B .

Lorsque la condition suivante se présente, soit

$$0 \leq k_2^A \leq 1 \text{ ou } 0 \leq k_2^B \leq 1. \quad (\text{B.14})$$

on a le cas représenté à la Fig. B.2a. Ces conditions s'appliquent également dans le cas où le domaine de l'un des segments est complètement inclus dans celui de l'autre. Dans ce cas, la distance entre les segments δ_s est directement celle entre les droites directrices, soit

$$\delta_s = \delta_{min}^\Delta = \left\| (\overline{OC} - \overline{OA}) \times \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \right\|. \quad (\text{B.15})$$

Il est à noter que l'évaluation de la distance à l'équation (B.15) s'écrit également en fonction de \mathbf{v}_2 , \overline{OB} et \overline{OD} . Lorsque la condition suivante se présente, soit

$$(k_2^A < 0 \ \& \ k_2^B < 0) \text{ ou } (k_2^A > 1 \ \& \ k_2^B > 1) \quad (\text{B.16})$$

le cas illustré à la Fig. B.2b est représenté. Dans ce cas, les distances entre les points A, B, C et D sont évaluées et comparées. La plus petite valeur est alors considérée. On a alors que

$$\delta_s = \min[\text{dist}(A, C); \text{dist}(A, D); \text{dist}(B, C); \text{dist}(B, D)] \quad (\text{B.17})$$

où $\text{dist}(a, b)$ est une fonction d'évaluation de la distance euclidienne entre les point a et b . Dans le cas où les segments ne sont pas parallèles, les éléments présentés à la section suivante sont considérés.

B.2.2 Segments non-parallèles

Dans le cas où les segments ne sont pas parallèles, plusieurs cas sont envisagés. Par exemple, les segments peuvent être gauches, tel qu'illustré à la Fig. B.3a. Il se peut également que les valeurs de k_1 et k_2 ne soient pas contenues dans le domaine $[0; 1]$, tel que montré aux Fig. B.3b et B.3c.

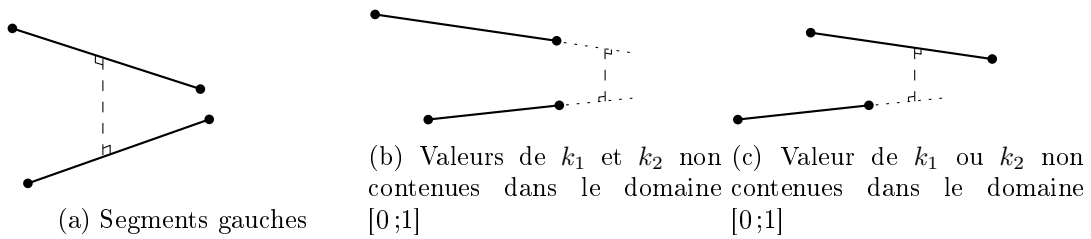


FIGURE B.3 – Configurations non-parallèles.

Calculs

Lorsque le cas illustré à la Fig. B.3a se présente, soit lorsque la condition suivante est satisfaite,

$$0 \leq k_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq k_2 \leq 1, \quad (\text{B.18})$$

la distance entre les segments est directement la distance perpendiculaire entre les droites directrices \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Celle-ci se calcule en déterminant la grandeur du segment \overline{MN} (tel qu'illustré à la Fig. B.1) avec l'équation suivante :

$$\delta_s = \text{dist}(M, N). \quad (\text{B.19})$$

L'expression vectorielle utilisée pour \overline{MN} est donnée à l'équation (B.5). Lorsque le cas de la Fig. B.3b se présente, soit lorsque la condition suivante est satisfaite,

$$(k_1 < 0 \text{ ou } k_1 > 1) \text{ et } (k_2 < 0 \text{ ou } k_2 > 1), \quad (\text{B.20})$$

la plus courte distance entre les segments s'obtient en comparant la distance entre chaque extrémité des segments, soit avec l'équation (B.17). Lorsque le cas de la Fig. B.3c se présente, soit lorsque la condition suivante est satisfaite,

$$(k_1 < 0 \text{ ou } k_1 > 1) \text{ ou } (k_2 < 0 \text{ ou } k_2 > 1), \quad (\text{B.21})$$

deux cas sont possibles. Soit k_1 ou k_2 est contenu dans le domaine $[0; 1]$. Dans le cas où k_1 est contenu dans ce domaine, lorsque la condition suivante est satisfaite,

$$0 \leq k_1 \leq 1, \quad (\text{B.22})$$

la plus courte distance entre les segments s'exprime comme suit :

$$\delta_s = \min[\text{dist}(M, C) ; \text{dist}(M, D)]. \quad (\text{B.23})$$

Dans le cas où la condition suivante est satisfaite,

$$0 \leq k_2 \leq 1, \quad (\text{B.24})$$

la plus courte distance entre les segments s'exprime comme suit :

$$\delta_s = \min[\text{dist}(A, N) ; \text{dist}(B, N)]. \quad (\text{B.25})$$

B.3 Résumé

La Fig. B.4 illustre un schéma résumé expliquant l'algorithme utilisé afin d'évaluer la distance entre deux segments en fonction des valeurs de k_1 et k_2 calculées.

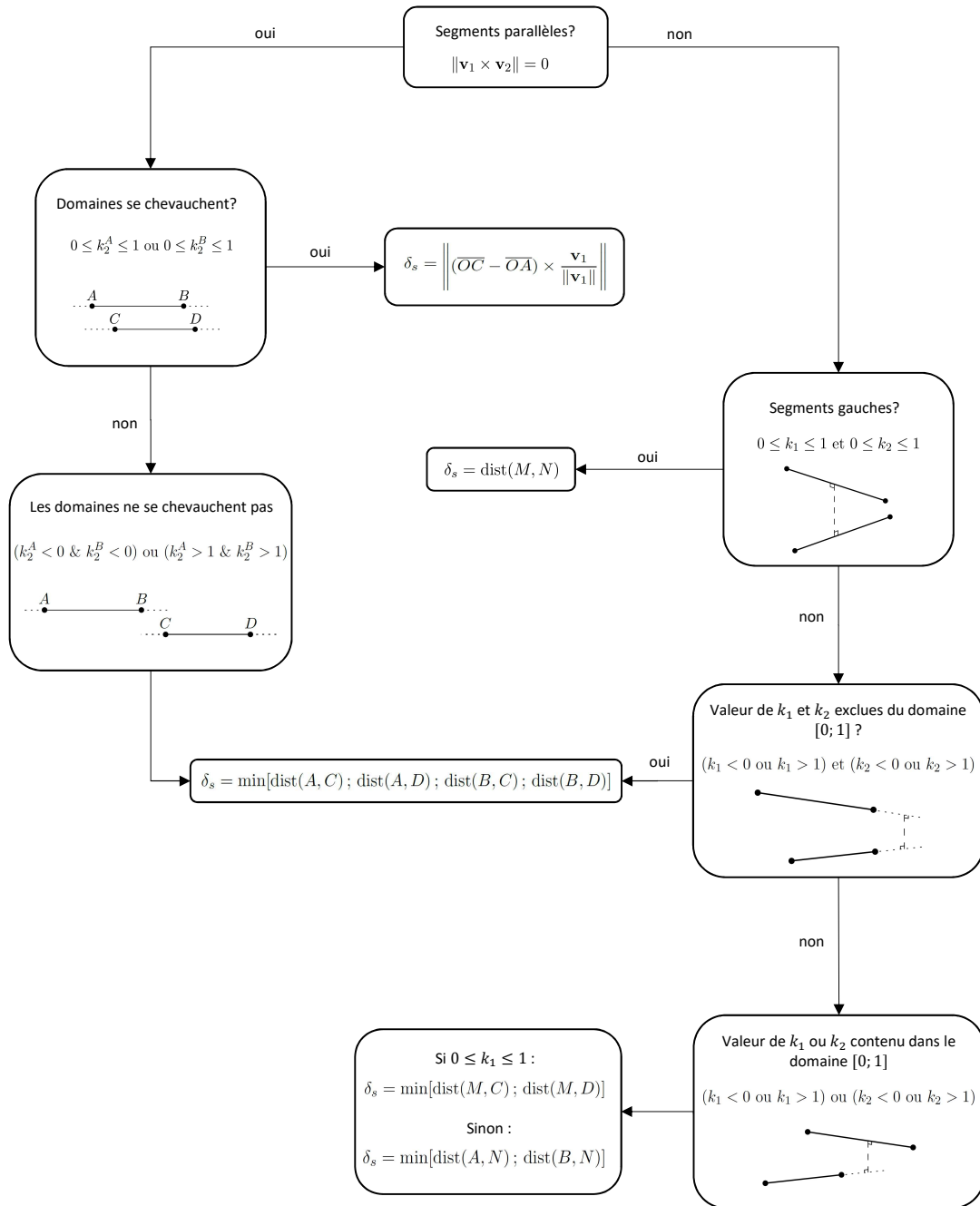


FIGURE B.4 – Algorithme d'évaluation de la distance entre deux segments.

Annexe C

Spécifications des moteurs utilisés

Dans cette annexe, les spécifications des moteurs et des encodeurs utilisés pour l'actionnement du robot sont données. Celles-ci sont données aux pages suivantes. Cette documentation provient du site web de Maxon¹. Le numéro du moteur utilisé est 500267 et celui de l'encodeur est 621792.

1. Site des achats de Maxon motors : <https://www.maxonmotor.com/maxon/view/product/motor/ecmotor/ecflat/ecflat90/500267>, consulté le 18 juin 2019.

Annexe D

Poids, inerties et données géométriques des jambes

Dans cette annexe, les données géométriques, les poids ainsi que les inerties des membrures des jambes sont données. Ces données sont obtenues à partir du prototype conçu au chapitre 4 et sont utiles pour l'élaboration du modèle dynamique du robot présenté au chapitre 6. Les données de masses et d'inerties proviennent principalement du logiciel de modélisation solide PTC CREO.

D.1 Données géométriques et poids

Le schéma d'une jambe ainsi que de la base et l'effecteur du robot sont illustrés à la Fig. D.1. Les dimensions des membrures des jambes et le format de la base et de l'effecteur sont donnés dans le Tableau D.1.

TABLEAU D.1 – Paramètres géométriques du robot

Paramètres	Valeurs
longueur membrure l_1 (mm)	74
longueur membrure l_2 (mm)	200
longueur membrure l_3 (mm)	200
longueur membrure l_4 (mm)	25
longueur membrure l_5 (mm)	200
longueur membrure l_6 (mm)	60
longueur membrure l_7 (mm)	60
rayon base c_i (mm)	85.35
rayon effecteur d_i (mm)	77.662

Les masses de chaque composant mobile sont données au Tableau D.2. La masse de la membrure $i1$ (m_1) inclut celle du contrepois m_{c1} ainsi que celle des deux moteurs qui font bouger les membrures $i2$ et $i6$. Elle inclut également la masse des plaques supports de ces moteurs.

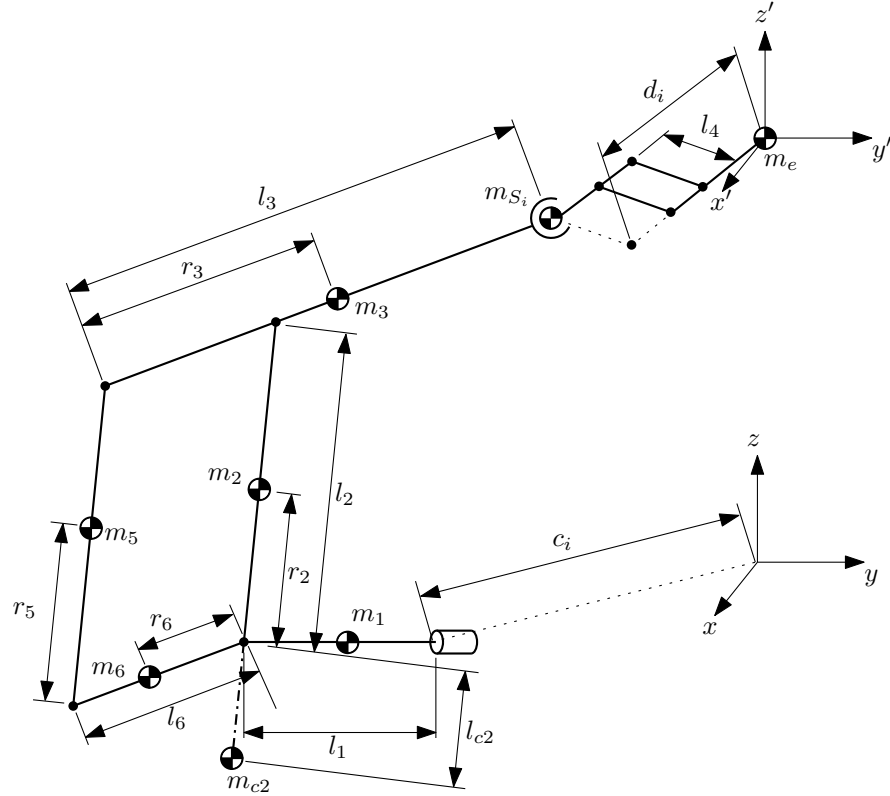


FIGURE D.1 – Schéma d'une jambe sur le robot avec la base et l'effecteur ainsi que les grandeurs géométriques et les poids

TABLEAU D.2 – Masse des composants mobiles du robot

Paramètres	Valeurs
masse membre m_1 (g)	2624
masse membre m_2 (g)	867
masse membre m_3 (g)	53
masse membre m_5 (g)	40
masse membre m_6 (g)	26
masse effecteur m_e (g)	183.3
masse articulation sphérique m_{S_i} (g)	48

La masse de la membre $i2$ (m_2) inclut celle du contrepois m_{c2} ainsi que des roulements et des éléments de fixation aux articulations avec les autres membrures. La masse de l'effecteur inclut celle du mécanisme et des doigts.

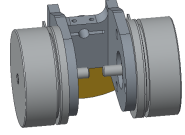
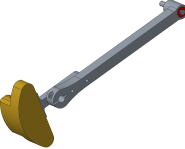
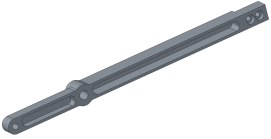
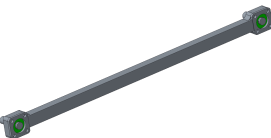
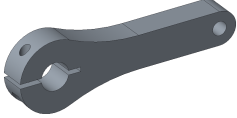
D.2 Inerties et positions des centres de masse pour le modèle dynamique des jambes

Dans cette section, les vecteurs \mathbf{c}_{ik} , \mathbf{r}_{ik} et les matrices d'inertie \mathbf{J}_k impliquées dans le système dynamique développé au chapitre 6 sont explicités. Les repères de travail sont ceux définis à

la Fig. 6.3 du chapitre 6.

Les vecteurs position des centre de masse des composants sont exprimés dans leur propre repère, à l'exception des vecteurs \mathbf{r}_{i3} et \mathbf{r}_{i5} qui sont exprimés respectivement dans les repères $i3$ et $i2$. Les matrices d'inertie sont exprimées par rapport au centre de masse des composants. Les inerties et les positions des centres de masse des composants mobile des jambes sont données au Tableau D.3.

TABLEAU D.3 – Inerties et positions des centres de masse des composants mobiles du robot

Corps mobile $i1$		$[\mathbf{c}_{i1}]_{i1} = [-5.320 \ 0 \ 61.248]^T \text{ mm}$ $[\mathbf{J}_1]_{i1} = \begin{bmatrix} 18.977 & 0 & 0.0047 \\ 0 & 14.893 & 0 \\ 0.0047 & 0 & 7.787 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Corps mobile $i2$		$[\mathbf{c}_{i2}]_{i2} = [-17.983 \ 4.170 \ 0]^T \text{ mm}$ $[\mathbf{J}_2]_{i2} = \begin{bmatrix} 0.407 & -0.150 & 0 \\ -0.150 & 4.092 & 0 \\ 0 & 0 & 3.877 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Corps mobile $i3$		$[\mathbf{r}_{i3}]_{i3} = [-51.391 \ -13.186 \ 0]^T \text{ mm}$ $[\mathbf{J}_3]_{i3} = \begin{bmatrix} 1.814 & 1.527 & 0 \\ 1.527 & 229.14 & 0 \\ 0 & 0 & 229.06 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Corps mobile $i5$		$[\mathbf{r}_{i5}]_{i2} = [100 \ -6.498 \ 0]^T \text{ mm}$ $[\mathbf{J}_5]_{i2} = \begin{bmatrix} 0.007 & 0 & 0 \\ 0 & 2.208 & 0 \\ 0 & 0 & 2.209 \end{bmatrix} \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Corps mobile $i6$		$[\mathbf{c}_{i6}]_{i3} = [23.448 \ 15.650 \ 0]^T \text{ mm}$ $[\mathbf{J}_6]_{i3} = \begin{bmatrix} 0.930 & 0 & -0.120 \\ 0 & 12.748 & 0 \\ -0.120 & 0 & 12.224 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Sphérique	S/O	$[\mathbf{r}_{S_i}]_{i3} = [-200 \ 0 \ 0]^T \text{ mm}$ $m_{S_i} = 48 \text{ g}$

Dans les matrices d'inertie $[\mathbf{J}_1]_{i1}$, $[\mathbf{J}_2]_{i2}$ et $[\mathbf{J}_6]_{i3}$, l'inertie du rotor du moteur n'est pas incluse.

Il suffit d'y additionner les matrices suivantes.

$$[\mathbf{J}_{rot}]_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 506 \end{bmatrix} kg \cdot mm^2 \quad (D.1)$$

$$[\mathbf{J}_{rot}]_{i2,i3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 506 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} kg \cdot mm^2. \quad (D.2)$$

La matrice de l'équation (D.1) est additionnée à la matrice $[\mathbf{J}_1]_{i1}$, tandis que celle de l'équation (D.2) est additionnée aux matrices $[\mathbf{J}_2]_{i2}$ et $[\mathbf{J}_6]_{i3}$. On a donc que

$$[\mathbf{J}_1]_{i1}^* = [\mathbf{J}_1]_{i1} + [\mathbf{J}_{rot}]_{i1} = \begin{bmatrix} 8.741 & 0 & -0.850 \\ 0 & 4.630 & 0 \\ -0.850 & 0 & 8.065 \end{bmatrix} \times 10^3 kg \cdot mm^2 \quad (D.3)$$

$$[\mathbf{J}_2]_{i2}^* = [\mathbf{J}_2]_{i2} + [\mathbf{J}_{rot}]_{i2,i3} = \begin{bmatrix} 0.407 & -0.150 & 0 \\ -0.150 & 4.598 & 0 \\ 0 & 0 & 3.877 \end{bmatrix} \times 10^3 kg \cdot mm^2 \quad (D.4)$$

$$[\mathbf{J}_6]_{i3}^* = [\mathbf{J}_6]_{i3} + [\mathbf{J}_{rot}]_{i2,i3} = \begin{bmatrix} 0.930 & 0 & -0.120 \\ 0 & 518.748 & 0 \\ -0.120 & 0 & 12.224 \end{bmatrix} kg \cdot mm^2 \quad (D.5)$$

Ces nouvelles matrices d'inertie sont à considérer pour les calculs dans le modèle dynamique.

Annexe E

Poids et données géométriques de la plateforme

Dans cette annexe, les vecteurs \mathbf{r}_{i1} à \mathbf{r}_{i10} ainsi que les poids des composantes mécaniques de la plateforme sont donnés. Ces données sont obtenues à partir du prototype conçu au chapitre 4 et sont utiles pour l'élaboration du modèle statique de la plateforme présenté au chapitre 6. Les données de masse et proviennent principalement du logiciel de modélisation solide PTC CREO.

Les schémas de la Fig.E.1 illustrent les membrures des mécanismes à quatre barres ainsi que les dimensions géométriques pour caractériser la position de leur centre de masse. Les positions des centres de masse dans le repère fixe dépendent des dimensions géométriques et des vecteurs \mathbf{a}_{i4} , \mathbf{d}_i et \mathbf{n} , définis au chapitre 1. Les vecteurs de position des centres de masse pour les corps ia ($i = 1, 2, 3$) s'expriment comme suit :

$$\mathbf{r}_{i1} = r_{i1d}\mathbf{e}_{n_i} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{r}_{i2} = r_{i2d}\mathbf{e}_{n_i} \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{r}_{i3} = r_{i3d}\mathbf{e}_{n_i}. \quad (\text{E.3})$$

Les vecteurs de position des centres de masse pour les corps ib s'expriment comme suit :

$$\mathbf{r}_{i4} = \mathbf{r}_{i5} - \mathbf{a}_{i4}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{r}_{i5} = \frac{r_{i5n}}{l_4}\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{i4} + \frac{r_{i5a}}{l_4}\mathbf{a}_{i4} + r_{i5z}\mathbf{n}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{r}_{i6} = \mathbf{r}_{i5} + \frac{r_{i6n}}{l_4}\mathbf{Q}_{\zeta_i}\mathbf{a}_{i4} + r_{i6z}\mathbf{n}, \quad i = 1, 3. \quad (\text{E.6})$$

Les vecteurs de position des centres de masse pour les corps id ($i = 1, 3$) s'expriment comme suit :

$$\mathbf{r}_{i7} = r_{i7d}\mathbf{e}_{n_i} + r_{i7z}\mathbf{n} \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbf{r}_{i8} = r_{i8d}\mathbf{e}_{n_i} + r_{i8z}\mathbf{n} \quad (\text{E.8})$$

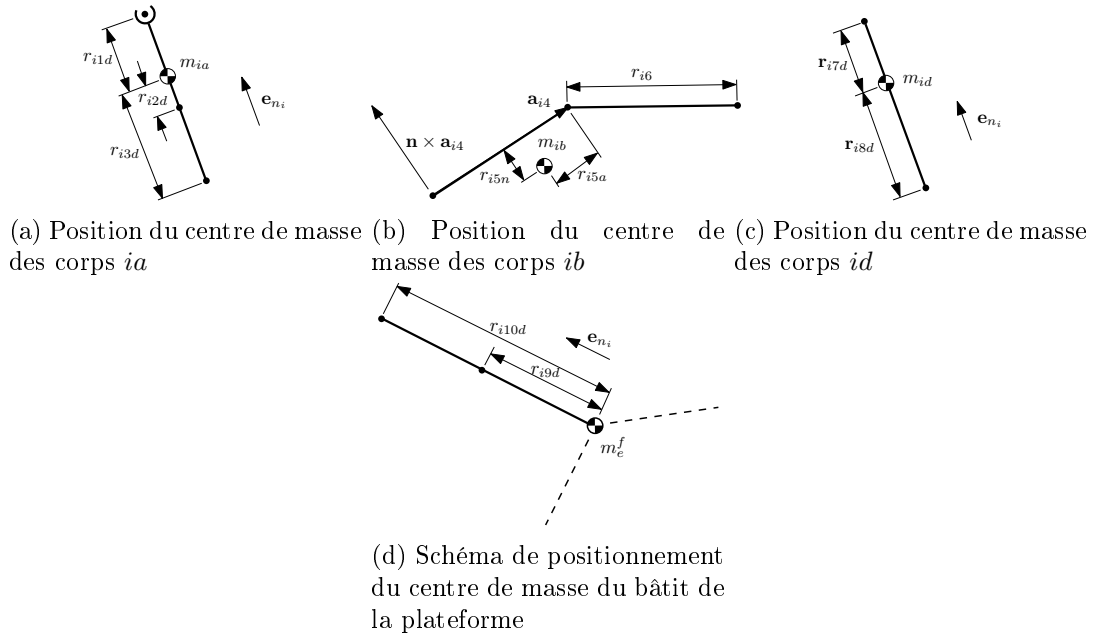


FIGURE E.1 – Schéma du centre de masse des coprs de la plateforme

Les vecteurs de position du centre de masse du corps central pour $i = 1, 2, 3$ s'expriment comme suit :

$$\mathbf{r}_{i9} = r_{i9d} \mathbf{e}_{n_i} \quad (\text{E.9})$$

$$\mathbf{r}_{i10} = r_{i10d} \mathbf{e}_{n_i}. \quad (\text{E.10})$$

Les masses et les dimensions géométriques des composants sont illustrées au tableau E.1. La masse de la partie centrale de la plateforme est $m_e^f = 0.0126 \text{ kg}$.

TABLEAU E.1 – Masse et grandeurs géométriques des parties supportant les doigts des mécanismes à quatre barres

Doigts	#1	#2	#3
ζ_i (rad)	$7\pi/6$	-	$11\pi/6$
m_{ia} (kg)	0.00541	0.00541	0.00541
m_{ib} (kg)	0.0238	0.0128	0.0238
m_{id} (kg)	0.0407	0.0407	0.0407
r_{i1d} (mm)	34.97	34.97	34.97
r_{i2d} (mm)	-2.69	-2.69	-2.69
r_{i3d} (mm)	-22.69	-22.69	-22.69
r_{i5n} (mm)	2.08	0.00	2.00
r_{i5a} (mm)	10.11	12.50	3.04
r_{i5z} (mm)	-10.61	0.00	-10.61
r_{i6} (mm)	23.00	-	25.00
r_{i7d} (mm)	-33.79	-	12.59
r_{i7z} (mm)	-33.79	-	12.59
r_{i8d} (mm)	-33.79	-	-7.41
r_{i8z} (mm)	-33.79	-	-7.41
r_{i9d} (mm)	20.00	20.00	20.00
r_{i10d} (mm)	40.00	40.00	40.00

Annexe F

Définition des coefficients pour la dérivation du modèle dynamique d'une jambe

Dans cette annexe, les coefficients t_{i1} à t_{i30} ainsi que les dérivées nécessaires aux calculs du modèle dynamique des jambes du robot présenté au chapitre 6 sont données.

Les coefficients t_{i1} à t_{i30} utilisés dans les équations (6.48) et (6.57) sont définis comme suit :

$$t_{i1} = c_{i2y}^2 + (c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2})^2 \quad (\text{F.1})$$

$$t_{i2} = c_{i2x}^2 + c_{i2z}^2 \quad (\text{F.2})$$

$$t_{i3} = 2(c_{i2y}c_{i2z} \cos \theta_{i2} + c_{i2x}c_{i2y} \sin \theta_{i2}) \quad (\text{F.3})$$

$$t_{i4} = c_{i6y}^2 + (c_{i6x} \cos \theta_{i3} - c_{i6z} \sin \theta_{i3})^2 \quad (\text{F.4})$$

$$t_{i5} = c_{i6x}^2 + c_{i6z}^2 \quad (\text{F.5})$$

$$t_{i6} = 2(c_{i6y}c_{i6z} \cos \theta_{i3} + c_{i6x}c_{i6y} \sin \theta_{i3}) \quad (\text{F.6})$$

$$t_{i7} = - (r_{i5x} \sin \theta_{i2} + r_{i5z} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.7})$$

$$t_{i8} = - l_6 \sin \theta_{i3} \quad (\text{F.8})$$

$$t_{i9} = r_{i5x} \cos \theta_{i2} - r_{i5z} \sin \theta_{i2} \quad (\text{F.9})$$

$$t_{i10} = l_6 \cos \theta_{i3} \quad (\text{F.10})$$

$$t_{i11} = - l_2 \sin \theta_{i2} \quad (\text{F.11})$$

$$t_{i12} = - (r_{i3x} \sin \theta_{i3} + r_{i3z} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.12})$$

$$t_{i13} = l_2 \cos \theta_{i2} \quad (\text{F.13})$$

$$t_{i14} = r_{i3x} \cos \theta_{i3} - r_{i3z} \sin \theta_{i3} \quad (\text{F.14})$$

$$t_{i15} = j_{2xx} \sin^2 \theta_{i2} + 2j_{2xz} \sin \theta_{i2} \cos \theta_{i2} + j_{2zz} \cos^2 \theta_{i2} \quad (\text{F.15})$$

$$t_{i16} = - 2(j_{2xy} \sin \theta_{i2} + j_{2yz} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.16})$$

$$t_{i17} = j_{3xx} \sin^2 \theta_{i3} + 2j_{3xz} \sin \theta_{i3} \cos \theta_{i3} + j_{3zz} \cos^2 \theta_{i3} \quad (\text{F.17})$$

$$t_{i18} = - 2(j_{3xy} \sin \theta_{i3} + j_{3yz} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.18})$$

$$t_{i19} = j_{5xx} \sin^2 \theta_{i2} + 2j_{5xz} \sin \theta_{i2} \cos \theta_{i2} + j_{5zz} \cos^2 \theta_{i2} \quad (\text{F.19})$$

$$t_{i20} = - 2(j_{5xy} \sin \theta_{i2} + j_{5yz} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.20})$$

$$t_{i21} = j_{6xx} \sin^2 \theta_{i3} + 2j_{6xz} \sin \theta_{i3} \cos \theta_{i3} + j_{6zz} \cos^2 \theta_{i3} \quad (\text{F.21})$$

$$t_{i22} = - 2(j_{6xy} \sin \theta_{i3} + j_{6yz} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.22})$$

$$t_{i23} = - r_{i3y} \quad (\text{F.23})$$

$$t_{i24} = l_2 \cos \theta_{i2} + r_{i3x} \cos \theta_{i3} - r_{i3z} \sin \theta_{i3} \quad (\text{F.24})$$

$$t_{i25} = - r_{i5y} \quad (\text{F.25})$$

$$t_{i26} = r_{i5x} \cos \theta_{i2} - r_{i5z} \sin \theta_{i2} + l_6 \cos \theta_{i3} \quad (\text{F.26})$$

$$t_{i27} = - (r_{S_i x} \sin \theta_{i3} + r_{S_i z} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.27})$$

$$t_{i28} = r_{S_i x} \cos \theta_{i3} - r_{S_i z} \sin \theta_{i3} \quad (\text{F.28})$$

$$t_{i29} = - r_{S_i y} \quad (\text{F.29})$$

$$t_{i30} = l_2 \cos \theta_{i2} + r_{S_i x} \cos \theta_{i3} - r_{S_i z} \sin \theta_{i3}. \quad (\text{F.30})$$

Les dérivées par rapport au temps de t_{i1} à t_{i30} utilisées dans l'équation (6.64) sont explicitées ci-dessous :

$$\dot{t}_{i1} = -2(c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2})(c_{i2x} \sin \theta_{i2} + c_{i2z} \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.31})$$

$$\dot{t}_{i2} = 0 \quad (\text{F.32})$$

$$\dot{t}_{i3} = 2c_{i2y}(c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.33})$$

$$\dot{t}_{i4} = -2(c_{i6x} \cos \theta_{i3} - c_{i6z} \sin \theta_{i3})(c_{i6x} \sin \theta_{i3} + c_{i6z} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.34})$$

$$\dot{t}_{i5} = 0 \quad (\text{F.35})$$

$$\dot{t}_{i6} = 2(c_{i6x}c_{i6y} \cos \theta_{i3} - c_{i6y}c_{i6z} \sin \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.36})$$

$$\dot{t}_{i7} = (r_{i5z} \sin \theta_{i2} - r_{i5x} \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.37})$$

$$\dot{t}_{i8} = -(l_6 \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.38})$$

$$\dot{t}_{i9} = -(r_{i5x} \sin \theta_{i2} + r_{i5z} \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.39})$$

$$\dot{t}_{i10} = -(l_6 \sin \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.40})$$

$$\dot{t}_{i11} = -(l_2 \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.41})$$

$$\dot{t}_{i12} = (r_{i3z} \sin \theta_{i3} - r_{i3x} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.42})$$

$$\dot{t}_{i13} = -(l_2 \sin \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.43})$$

$$\dot{t}_{i14} = -(r_{i3x} \sin \theta_{i3} + r_{i3z} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.44})$$

$$\dot{t}_{i15} = 2(\sin \theta_{i2} \cos \theta_{i2}(j_{2xx} - j_{2zz}) + j_{2xz}(\cos^2 \theta_{i2} - \sin^2 \theta_{i2}))\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.45})$$

$$\dot{t}_{i16} = 2(j_{2yz} \sin \theta_{i2} - j_{2xy} \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.46})$$

$$\dot{t}_{i17} = 2(\sin \theta_{i3} \cos \theta_{i3}(j_{3xx} - j_{3zz}) + j_{3xz}(\cos^2 \theta_{i3} - \sin^2 \theta_{i3}))\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.47})$$

$$\dot{t}_{i18} = 2(j_{3yz} \sin \theta_{i3} - j_{3xy} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.48})$$

$$\dot{t}_{i19} = 2(\sin \theta_{i2} \cos \theta_{i2}(j_{5xx} - j_{5zz}) + j_{5xz}(\cos^2 \theta_{i2} - \sin^2 \theta_{i2}))\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.49})$$

$$\dot{t}_{i20} = 2(j_{5yz} \sin \theta_{i2} - j_{5xy} \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} \quad (\text{F.50})$$

$$\dot{t}_{i21} = 2(\sin \theta_{i3} \cos \theta_{i3}(j_{6xx} - j_{6zz}) + j_{6xz}(\cos^2 \theta_{i3} - \sin^2 \theta_{i3}))\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.51})$$

$$\dot{t}_{i22} = 2(j_{6yz} \sin \theta_{i3} - j_{6xy} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.52})$$

$$\dot{t}_{i23} = 0 \quad (\text{F.53})$$

$$\dot{t}_{i24} = -(l_2 \sin \theta_{i2}\dot{\theta}_{i2} + (r_{i3x} \sin \theta_{i3} + r_{i3z} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3}) \quad (\text{F.54})$$

$$\dot{t}_{i25} = 0 \quad (\text{F.55})$$

$$\dot{t}_{i26} = -((r_{i5x} \sin \theta_{i2} + r_{i5z} \cos \theta_{i2})\dot{\theta}_{i2} + l_6 \sin \theta_{i3}\dot{\theta}_{i3}) \quad (\text{F.56})$$

$$\dot{t}_{i27} = (r_{S_{iz}} \sin \theta_{i3} - r_{S_{ix}} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.57})$$

$$\dot{t}_{i28} = -(r_{S_{ix}} \sin \theta_{i3} + r_{S_{iz}} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3} \quad (\text{F.58})$$

$$\dot{t}_{i29} = 0 \quad (\text{F.59})$$

$$\dot{t}_{i30} = -(l_2 \sin \theta_{i2}\dot{\theta}_{i2} + (r_{S_{ix}} \sin \theta_{i3} + r_{S_{iz}} \cos \theta_{i3})\dot{\theta}_{i3}) \quad (\text{F.60})$$

$$(\text{F.61})$$

Les dérivées partielles utilisées pour l'équation (6.71) sont données ci-dessous.

$$t_{i1,\theta_{i2}} = \frac{\partial t_{i1}}{\partial \theta_{i2}} = -2(c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2})(c_{i2x} \sin \theta_{i2} + c_{i2z} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.62})$$

$$t_{i3,\theta_{i2}} = 2c_{i2y}(c_{i2x} \cos \theta_{i2} - c_{i2z} \sin \theta_{i2}) \quad (\text{F.63})$$

$$t_{i7,\theta_{i2}} = r_{i5z} \sin \theta_{i2} - r_{i5x} \cos \theta_{i2} \quad (\text{F.64})$$

$$t_{i9,\theta_{i2}} = -(r_{i5x} \sin \theta_{i2} + r_{i5z} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.65})$$

$$t_{i11,\theta_{i2}} = -(l_2 \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.66})$$

$$t_{i13,\theta_{i2}} = -(l_2 \sin \theta_{i2}) \quad (\text{F.67})$$

$$t_{i15,\theta_{i2}} = 2(\sin \theta_{i2} \cos \theta_{i2}(j_{2xx} - j_{2zz}) + j_{2xz}(\cos^2 \theta_{i2} - \sin^2 \theta_{i2})) \quad (\text{F.68})$$

$$t_{i16,\theta_{i2}} = 2(j_{2yz} \sin \theta_{i2} - j_{2xy} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.69})$$

$$t_{i19,\theta_{i2}} = 2(\sin \theta_{i2} \cos \theta_{i2}(j_{5xx} - j_{5zz}) + j_{5xz}(\cos^2 \theta_{i2} - \sin^2 \theta_{i2})) \quad (\text{F.70})$$

$$t_{i20,\theta_{i2}} = 2(j_{5yz} \sin \theta_{i2} - j_{5xy} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.71})$$

$$t_{i24,\theta_{i2}} = -(l_2 \sin \theta_{i2}) \quad (\text{F.72})$$

$$t_{i26,\theta_{i2}} = -(r_{i5x} \sin \theta_{i2} + r_{i5z} \cos \theta_{i2}) \quad (\text{F.73})$$

$$t_{i30,\theta_{i2}} = -(l_2 \sin \theta_{i2}) \quad (\text{F.74})$$

$$(\text{F.75})$$

$$t_{i4,\theta_{i3}} = \frac{\partial t_{i1}}{\partial \theta_{i3}} = -2(c_{i6x} \cos \theta_{i3} - c_{i6z} \sin \theta_{i3})(c_{i6x} \sin \theta_{i3} + c_{i6z} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.76})$$

$$t_{i6,\theta_{i3}} = 2(c_{i6x}c_{i6y} \cos \theta_{i3} - c_{i6y}c_{i6z} \sin \theta_{i3}) \quad (\text{F.77})$$

$$t_{i8,\theta_{i3}} = -(l_6 \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.78})$$

$$t_{i10,\theta_{i3}} = -(l_6 \sin \theta_{i3}) \quad (\text{F.79})$$

$$t_{i12,\theta_{i3}} = (r_{i3z} \sin \theta_{i3} - r_{i3x} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.80})$$

$$t_{i14,\theta_{i3}} = -(r_{i3x} \sin \theta_{i3} + r_{i3z} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.81})$$

$$t_{i17,\theta_{i3}} = 2(\sin \theta_{i3} \cos \theta_{i3}(j_{3xx} - j_{3zz}) + j_{3xz}(\cos^2 \theta_{i3} - \sin^2 \theta_{i3})) \quad (\text{F.82})$$

$$t_{i18,\theta_{i3}} = 2(j_{3yz} \sin \theta_{i3} - j_{3xy} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.83})$$

$$t_{i21,\theta_{i3}} = 2(\sin \theta_{i3} \cos \theta_{i3}(j_{6xx} - j_{6zz}) + j_{6xz}(\cos^2 \theta_{i3} - \sin^2 \theta_{i3})) \quad (\text{F.84})$$

$$t_{i22,\theta_{i3}} = 2(j_{6yz} \sin \theta_{i3} - j_{6xy} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.85})$$

$$t_{i24,\theta_{i3}} = -(r_{i3x} \sin \theta_{i3} + r_{i3z} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.86})$$

$$t_{i26,\theta_{i3}} = -(l_6 \sin \theta_{i3}) \quad (\text{F.87})$$

$$t_{i27,\theta_{i3}} = (r_{S_{iz}} \sin \theta_{i3} - r_{S_{ix}} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.88})$$

$$t_{i28,\theta_{i3}} = -(r_{S_{ix}} \sin \theta_{i3} + r_{S_{iz}} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.89})$$

$$t_{i30,\theta_{i3}} = -(r_{S_{ix}} \sin \theta_{i3} + r_{S_{iz}} \cos \theta_{i3}) \quad (\text{F.90})$$

Bibliographie

- [1] Jumpei ARATA, Hiroyuki KONDO, Masamichi SAKAGUCHI et Hideo FUJIMOTO : Development of a Haptic Device “DELTA-4” using Parallel Link Mechanism. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 294–300, 2009.
- [2] I.A. BONEV, D. ZLATANOV et Clément M. GOSSELIN : Advantages of the modified Euler angles in the design and control of pkms. *Parallel Kinematic Machines International Conference*, pages 199 – 215, 2002.
- [3] Gabriel BOUCHER, Thierry LALIBERTÉ et Clément GOSSELIN : A parallel low-impedance sensing approach for highly responsive physical human-robot interaction. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3754–3760, 2019.
- [4] Alexandre CAMPEAU-LECOURS, Véronique MAHEU, Sébastien LEPAGE, Hugo LAMONTAGNE, Simon LATOUR, Laurie PAQUET et Neil HARDIE : JACO Assistive Robotic Device : Empowering People With Disabilities Through Innovative Algorithms. *Rehabilitation Engineering and Assistive Technology Society of North America (RESNA) Annual Conference*, (October), 2016.
- [5] P. CARDOU, S. BOUCHARD et C. GOSSELIN : Kinematic-sensitivity indices for dimensionally nonhomogeneous jacobian matrices. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(1):166–173, Feb 2010.
- [6] J Edward COLGATE et J Michael BROWN : Factors Affecting the Z-Width of a Haptic Display. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3205–3210, 1994.
- [7] Vincent DUCHAINE, Nicolas LAUZIER, Mathieu BARIL, Marc-Antoine LACASSE et Clément GOSSELIN : A flexible robot skin for safe physical human robot interaction. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3676–3681, 2009.
- [8] M. A. ERGIN, A. C. SATICI et V. PATOGLU : Design optimization, impedance control and characterization of a modified delta robot. *In 2011 IEEE International Conference on Mechatronics*, pages 737–742, April 2011.

- [9] Clément GOSSELIN, Thierry LALIBERTÉ, Boris MAYER-ST-ONGE, Simon FOUCAULT, Alexandre LECOURE, Vincent DUCHAINE, Dalong GAO et Roland MENASSA : A Friendly Beast of Burden. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, (October):139–147, 2013.
- [10] Clément GOSSELIN, Thierry LALIBERTÉ et Audrey VEILLETTE : Singularity-Free Kinetically Redundant Planar Parallel Mechanisms With Unlimited Rotational Capability. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(2):457–467, 2015.
- [11] Clément M GOSSELIN, Jaouad SEFRIQUI et Marc J RICHARD : Solutions polynomiales au problème de la cinématique directe des manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté. *Mechanism and Machine Theory*, 27(2):107 – 119, 1992.
- [12] Clément M. GOSSELIN : Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators. *ASME Journal of Mechanical Design*, 112(3):331 – 336, 1990.
- [13] J. HAO, X. XIE, G. BIAN, Z. HOU et X. ZHOU : Development and evaluation of a 7-dof haptic interface. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 5(1):261–269, Jan 2018.
- [14] Yasuhisa HAYAKAWA, Ikuo KITAGISHI et Shigeki SUGANO : Human intention based physical support robot system in assembling work. extraction of behaviour support trigger from " work triangle". In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Innovations in Theory, Practice and Applications (Cat. No. 98CH36190)*, volume 2, pages 930–935, 1998.
- [15] Hyung Wook KIM, Jae Hoon LEE, Il Hong SUH et Byung Ju YI : Comparative study and experimental verification of singular-free algorithms for a 6 DOF parallel haptic device. *Mechatronics*, 15(4):403–422, 2005.
- [16] Thierry LALIBERTÉ et Clément GOSSELIN : Synthesis, optimization and experimental validation of reactionless two-dof parallel mechanisms using counter-mechanisms. *Meccanica*, 51(12):3211–3225, Dec 2016.
- [17] Jérôme LANDURÉ et Clément GOSSELIN : Kinematic Analysis of a Novel Kinetically Redundant Spherical Parallel Manipulator. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 10(2), 02 2018. 021007.
- [18] T. H. MASSIE et J. K. SALISBURY : The PHANTOM Haptic Interface : A Device for Probing Virtual Objectstle. In *ASME Int. Mechanical Engineering Exposition and Congress*, pages 295–302, Chicago, 1994.
- [19] Margaret L. MCLAUGHLIN, Gaurav SUKHATME et Jooao HESPANHA : *Touch in Virtual Environments : Haptics and the Design of Interactive Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

- [20] Jean-Pierre MERLET, Clément M. GOSSELIN et Nicolas MOULY : Workspaces of planar parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 33(1):7 – 20, 1998.
- [21] Bruno MONSARRAT et Clément M. GOSSELIN : Workspace analysis and optimal design of a 3-Leg 6-DOF parallel platform mechanism. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(6):954–966, 2003.
- [22] M. MORIOKA et S. SAKAKIBARA : A new cell production assembly system with human-robot cooperation. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 59(1):9–12, 2010.
- [23] Louis-Thomas SCHREIBER et Clément GOSSELIN : Passively Driven Redundant Spherical Joint With Very Large Range of Motion. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 9(3):1–10, 2017.
- [24] Y. TSUMAKI, H. NARUSE, D.N. NENCHEV et M. UCHIYAMA : Design of a compact 6-DOF haptic interface. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3(May):2580–2585, 1998.
- [25] Marc UEBERLE, Nico MOCK, Angelika PEER, Christian MICHAS et Martin BUSS : Design and control concepts of a hyper redundant haptic interface for interaction with virtual environments. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS, Workshop on Touch and Haptics*, 2004.
- [26] Kefei WEN, David HARTON, Thierry LALIBERTÉ et Clément GOSSELIN : Kinematically redundant (6+ 3)-dof hybrid parallel robot with large orientational workspace and remotely operated gripper. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1672–1678, 2019.