

FRANÇOIS CARON

**ANALYSE ET CONCEPTION D'UN MANIPULATEUR
PARALLÈLE SPHÉRIQUE À DEUX DEGRÉS DE
LIBERTÉ POUR L'ORIENTATION D'UNE CAMÉRA**

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

AOÛT 1997

© François Caron, 1997

Résumé

Ce mémoire consigne les travaux reliés au projet d'analyse et de conception de mécanismes sphériques parallèles à deux degrés de liberté. On étudie d'abord la cinématique du mécanisme, c'est-à-dire la génération des équations permettant de solutionner les problèmes géométriques direct et inverse, la détermination des équations de vitesse menant à la matrice jacobienne, la cinématique des membrures et enfin l'analyse du comportement du manipulateur: ses lieux de singularités, sa dextérité ainsi que son espace atteignable. Vient ensuite l'étude dynamique du manipulateur à l'aide de deux méthodes, l'approche newtonienne et l'approche énergétique. Les équations dynamiques sont remaniées et simplifiées pour le transfert dans un contrôleur. Certaines équations sont alors implantées dans des logiciels de visualisation alors que d'autres sont incorporées dans le développement de programmes d'analyse. La dernière partie consiste en la conception mécanique proprement dite de prototypes à partir de critères bien définis et basés sur les équations développées. Les étapes de conception décrites sont: le choix des composantes, la vérification des calculs, le dessin des plans et la supervision de la construction et de l'assemblage des prototypes.

François Caron

Clément Gosselin

Avant-propos

Je tiens à adresser des remerciements en or à mon directeur de thèse Clément Gosselin. Je le remercie pour son incroyable disponibilité, son professionnalisme implacable et ses conseils toujours appréciés (et justifiés!). Cette expérience a été pour moi des plus enrichissantes autant sur le plan technique que sur le plan humain. Je veux aussi remercier tous ceux qui, de loin ou de proche, ont participé au résultat qu'est ce mémoire. Un clin d'oeil particulier à celui qui serait certainement très fier de moi, mon père. Un petit mot spécial pour quelqu'un sans qui je ne serais sûrement pas en train d'écrire ces lignes puisqu'il m'a toujours encouragé à entreprendre ces études, mon frère Claude. Merci aussi à Pratt pour le coup de pied! Finalement, je tiens à remercier du fond de mon coeur ceux qui m'ont permis de mener à terme cette importante étape de ma vie, ceux qui m'ont enduré ou supporté (choisissez votre clan!): ma copine Anne-Sophie, ses parents Pierre et Mimi, toute la bande du lab (Boris, Louis, Marc, Martin, Michel, Nicolas, Pierre, Rémi, Serge et Thierry) qui ont su égayer mes journées, mes amis et sans oublier le vieux matou Souki!

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des Tableaux	vii
Liste des Figures	ix
Introduction	1
1 Mise en situation	3
1.1 Description des projets et mise en situation	3
1.1.1 Mécanisme pour l'orientation de caméras multiples	3
1.1.1.1 Description du projet	3
1.1.1.2 Cahier des charges	5
1.1.2 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature	5
1.1.2.1 Description du projet	5
1.1.2.2 Cahier des charges	6
1.1.3 Mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse	6
1.1.3.1 Description du projet	6
1.1.3.2 Cahier des charges	7
1.2 Manipulateurs parallèles sphériques	8

2	Analyse cinématique	10
2.1	Définition du manipulateur	10
2.2	Problème géométrique inverse	12
2.3	Problème géométrique direct	21
2.4	Détermination de la jacobienne et équations de vitesse	27
2.5	Cinématique des membrures	29
2.5.1	Vitesses articulaires	29
2.5.2	Accélérations articulaires	31
2.6	Les lieux de singularité	33
2.7	Dextérité	35
2.8	Espace de travail du manipulateur	36
2.9	Préservation de l'horizontale de l'image	38
2.10	Conclusion	39
3	Analyse dynamique	40
3.1	Approche newtonienne	40
3.1.1	Introduction	40
3.1.2	Notation et méthodologie	41
3.1.3	Équations d'équilibre	42
3.1.3.1	Organe terminal	43
3.1.3.2	Membrane distale	44
3.1.3.3	Membrane proximale 1	45
3.1.3.4	Membrane proximale 2	47
3.1.4	Détermination des efforts	48
3.1.5	Équations du contrôleur	49
3.2	Approche énergétique	50
3.2.1	Développement mathématique	50
3.2.1.1	Énergie cinétique	50
3.2.1.2	Énergie potentielle	51
3.2.1.3	Travail	51
3.2.1.4	Bilan énergétique	51
3.3	Résultats	51
3.4	Conclusion	54

4	Outils d'analyse	55
4.1	Introduction	55
4.2	SMAPS et OpenInventor	56
4.3	Mathematica	57
4.3.1	Problèmes géométriques direct et inverse	58
4.3.2	Analyse dynamique	58
4.3.3	Graphes de la dextérité, des singularités et de l'espace atteignable	58
4.3.4	Contrôle et animation du manipulateur	58
4.3.5	Environnement de graphes de diagrammes de corps libres	59
4.4	Conclusion	59
5	Conception mécanique	60
5.1	Introduction	60
5.2	Choix de l'architecture	61
5.3	Mécanisme d'orientation de caméras multiples	62
5.3.1	Vérification de l'architecture	62
5.3.2	Interférences	63
5.3.3	L'organe terminal	63
5.3.4	Conception des membrures	64
5.3.5	Liaisons	66
5.3.6	Étude dynamique	67
5.3.7	Choix des actionneurs	67
5.3.8	Le MOCa, Mécanisme d'Orientation de Caméra	68
5.4	Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature	68
5.4.1	Vérification de l'architecture	69
5.4.2	Interférences	69
5.4.3	Le prototypage rapide	70
5.4.4	L'organe terminal	71
5.4.5	Conception des membrures	72
5.4.6	Liaisons	73
5.4.7	Étude dynamique	73
5.4.8	Choix des moteurs	74
5.4.9	L'Oeil Agile II	74
5.5	Mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse	74

5.6 Conclusion	78
Conclusion	79
Bibliographie	81
A Plans du mécanisme pour l'orientation de caméras multiples	84
A.1 Plans	85
A.2 Vues 3D	89
B Plans du mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature	92
B.1 Plans	93
B.2 Vues 3D	97
C Spécifications des composants	100
C.1 Ensemble moteur MOCa et Oeil Agile 2	101
C.2 Ensemble moteur CVD	108
C.3 Roulements	111
D Termes inertiels et dimensions des prototypes	112
D.1 Mécanisme pour l'orientation de caméras multiples	113
D.1.1 Termes inertiels	113
D.1.2 Position du centre de masse p/r au centre géométrique	114
D.1.3 Position des liaisons p/r au centre géométrique	115
D.2 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature	116
D.2.1 Termes inertiels	116
D.2.2 Position du centre de masse p/r au centre géométrique	117
D.2.3 Position des liaisons p/r au centre géométrique	118
E Essais dynamiques	119
E.1 Mécanisme pour l'orientation de caméras multiples	120
E.2 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature	123

Liste des Tableaux

1.1	Spécifications du mécanisme pour l'orientation de caméras multiples.	5
1.2	Spécifications de l'oeil agile.	5
1.3	Spécifications du mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature.	6
1.4	Spécifications du mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse.	7
2.1	Dimensions de l'architecture particulière.	18
5.1	Dimensions de l'architecture particulière.	61
5.2	Spécifications du mécanisme pour l'orientation de caméras multiples.	62
5.3	Dimensions principales de l'organe terminal.	64
5.4	Spécifications du mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature.	69
5.5	Spécifications du plastique ABS.	70
C.1	Dimensions du roulement SKF-WAX1/8.	111
C.2	Dimensions du roulement SKF-WX1/8.	111
D.1	Matrice d'inertie de l'organe terminal MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).	113
D.2	Matrice d'inertie de la membrure distale MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).	113
D.3	Matrice d'inertie de la membrure proximale 1 MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).	113

D.4	Matrice d'inertie de la membrure proximale 2 MOCa ($X10^{-4}$ m ⁴).	113
D.5	Position du C.M. de l'organe terminal MOCa (m).	114
D.6	Position du C.M. de la membrure distale MOCa (m).	114
D.7	Position du C.M. de la membrure proximale 1 MOCa (m).	114
D.8	Position du C.M. de la membrure proximale 2 MOCa (m).	114
D.9	Position des liaisons de l'organe terminal MOCa (m).	115
D.10	Position des liaisons de la membrure distale MOCa (m).	115
D.11	Position des liaisons de la membrure proximale 1 MOCa (m).	115
D.12	Position des liaisons de la membrure proximale 2 MOCa (m).	115
D.13	Matrice d'inertie de l'organe terminal OA2 ($X10^{-5}$ m ⁴).	116
D.14	Matrice d'inertie de la membrure distale OA2 ($X10^{-5}$ m ⁴).	116
D.15	Matrice d'inertie de la membrure proximale 1 OA2 ($X10^{-5}$ m ⁴).	116
D.16	Matrice d'inertie de la membrure proximale 2 OA2 ($X10^{-5}$ m ⁴).	116
D.17	Position du C.M. de l'organe terminal OA2 (m).	117
D.18	Position du C.M. de la membrure distale OA2 (m).	117
D.19	Position du C.M. de la membrure proximale 1 OA2 (m).	117
D.20	Position du C.M. de la membrure proximale 2 OA2 (m).	117
D.21	Position des liaisons de l'organe terminal OA2 (m).	118
D.22	Position des liaisons de la membrure distale OA2 (m).	118
D.23	Position des liaisons de la membrure proximale 1 OA2 (m).	118
D.24	Position des liaisons de la membrure proximale 2 OA2 (m).	118

Liste des Figures

1.1	Le manipulateur à 23 degrés de liberté de l'IREQ.	4
1.2	L'oeil Agile.	6
1.3	Scène d'observation.	7
2.1	Les repères associés au mécanisme parallèle sphérique à 2 ddl.	11
2.2	Orientation du vecteur \mathbf{v} par rapport à l'effecteur	13
2.3	Les angles cartésiens représentant l'orientation du vecteur \mathbf{v} . On effectue d'abord une rotation de ϕ_1 autour de \mathbf{Z}_1 pour obtenir les axes \mathbf{X}' , \mathbf{Y}' et \mathbf{Z}' , puis de ϕ_2 autour de \mathbf{Y}' pour obtenir \mathbf{v}	14
2.4	La représentation schématique.	19
2.5	Les 4 solutions du problème géométrique inverse.	20
2.6	Les 2 solutions du problème géométrique direct.	25
2.7	La dextérité du manipulateur avec l'architecture particulière.	36
2.8	Configurations singulières du manipulateur à architecture particulière.	37
3.1	Diagramme de corps libre de la membrure terminale.	44
3.2	Diagramme de corps libre de la membrure distale.	45
3.3	Diagramme de corps libre de la membrure proximale 1.	46

3.4	Diagramme de corps libre de la membrure proximale 2.	47
3.5	Trajectoire #1.	53
3.6	Dynamique de la trajectoire #1.	53
3.7	Trajectoire #2.	53
3.8	Dynamique de la trajectoire #2.	54
4.1	Logiciel d'analyse SMAPS.	56
5.1	L'espace de travail de l'architecture particulière.	62
5.2	L'organe terminal.	64
5.3	La membrure adaptatrice.	64
5.4	La membrure proximale 1.	65
5.5	La membrure distale.	65
5.6	La membrure proximale 2.	66
5.7	La base.	66
5.8	L'ensemble liaison.	67
5.9	Le manipulateur MOCa.	68
5.10	La machine à prototypage rapide.	71
5.11	L'organe terminal.	71
5.12	La membrure proximale 1.	72
5.13	La membrure distale.	72
5.14	La membrure proximale 2.	73
5.15	La liaison.	74
5.16	L'oeil agile version 2 ddl.	75
5.17	Solution VE-379.	76
5.18	Le MAGLEV.	76

5.19	L'organe terminal.	77
5.20	Esquisse du manipulateur CVD.	78
E.1	Trajectoire.	120
E.2	Dynamique de la trajectoire.	120
E.3	Variables cinématiques des articulations.	121
E.4	Puissances aux actionneurs.	122
E.5	Trajectoire.	123
E.6	Dynamique de la trajectoire.	123
E.7	Variables cinématiques des articulations.	124
E.8	Puissances aux actionneurs.	125

Introduction

Problématique

Dans les applications de télérobotique (utilisation d'un robot sous la supervision d'un opérateur humain), on s'efforce de maintenir l'opérateur loin de la zone de travail puisque celle-ci présente des dangers. Par exemple, le système actuellement développé par l'IREQ pour l'entretien de lignes de distribution électrique sous tension se démarquera de ses prédécesseurs par le fait que l'opérateur sera localisé au sol et non près des lignes sous tension. Il est donc nécessaire de procurer à l'opérateur des informations visuelles provenant de caméras (2D et 3D) qui "regardent" la scène de plus près. À cette fin, ces caméras doivent être constamment réorientées. Une des solutions envisageables est d'utiliser un mécanisme parallèle sphérique pour cette dernière tâche. Ce mécanisme est très performant mais sa conception est complexe. Deux prototypes de ce genre ont été conçus à l'Université Laval et l'un d'eux a été construit et est utilisé au laboratoire de robotique. Il s'agit d'un des seuls mécanismes de ce type au monde et les équations qui permettraient d'en faire la conception optimale posent encore quelques défis.

Objectifs

Ce projet vise le développement d'un mécanisme parallèle sphérique à deux degrés de liberté qui servira à orienter le module de caméras de façon à ce que celles-ci "regardent" toujours la région d'intérêt de la scène. Le mécanisme devra être conçu en fonction des caractéristiques cinématiques, dynamiques et mécaniques requises par la

tâche (masse des caméras, accélérations requises, dimensions, autres) en plus d'éviter les configurations singulières.

Méthodologie

Les équations cinématiques et dynamiques associées au manipulateur parallèle sphérique à trois degrés de liberté ont été obtenues lors de travaux précédents (Gosselin et Hamel 1994; Gosselin et Gagné 1995). Dans le cadre de ce projet, il faudra reprendre la démarche de conception à partir du début. En effet, la conception d'un tel mécanisme n'est pas intuitive et puisque les caractéristiques désirées pour le nouveau mécanisme seront différentes de celles des mécanismes existants, on ne pourra se contenter de simples "modifications" aux paramètres cinématiques ou dynamiques. D'abord, il faudra reprendre les équations cinématiques pour la détermination de l'espace atteignable et de la dextérité. Ensuite, les propriétés dynamiques seront étudiées afin de définir les paramètres du mécanisme. Ces deux étapes seront réalisées en utilisant des programmes en C mis au point par d'autres membres du laboratoire de robotique ainsi que d'autres programmes développés dans le cadre de ce travail. Finalement, la conception mécanique complète sera réalisée et la création du modèle mécanique final sera effectuée en utilisant le logiciel I-DEAS.

Structure du mémoire

La problématique est déjà en partie exposée et sera plus détaillée dans le prochain chapitre en fonction des différents sous-projets. En effet chaque sous-projet sera repris et expliqué plus en détail et des références seront fournies pour une meilleure compréhension globale. Cette introduction au sujet comprendra aussi une revue de littérature portant sur les mécanismes sphériques parallèles et leurs applications. Les chapitres 2 et 3 décrivent l'analyse du modèle général du mécanisme, c'est-à-dire les analyses cinématique et dynamique du manipulateur. Le chapitre 4 sera consacré aux outils d'analyse développés et utilisés afin d'aider à la conception de prototypes. Enfin, le chapitre 5 consigne les étapes et les procédures de conception des prototypes. Le mémoire se termine par une conclusion rassemblant les points importants accomplis et le travail à continuer.

Chapitre 1

Mise en situation

1.1 Description des projets et mise en situation

Afin de mieux comprendre le projet il devient opportun de bien cerner le problème à la base par l'explication de la problématique, l'exposition du cahier des charges et une introduction aux solutions envisagées.

1.1.1 Mécanisme pour l'orientation de caméras multiples

1.1.1.1 Description du projet

Ce projet de développement d'un mécanisme pour l'orientation de caméras multiples fait partie d'un plus grand projet piloté par l'Institut de Recherche d'Hydro-Québec

(IREQ) sur la télémanipulation des opérations sur les lignes à haute tension (Lessard et al. 1992). Le projet global a pour but de remplacer les opérateurs sur les lignes à haute tension afin de les éloigner des dangers évidents reliés à cet environnement. Le projet fait appel à de nombreux champs d'études dont la mécanique des manipulateurs, la reconnaissance visuelle en trois dimensions, l'évitement d'obstacles et la vision artificielle. Plusieurs pays sont intéressés par cette technologie avant-gardiste. La première étape du projet implique l'utilisation d'un manipulateur à 23 degrés de liberté, illustré à la figure 1.1, dans lequel prend place un opérateur. C'est donc dans ce manipulateur que l'opérateur effectue les tâches à risque sur les lignes à haute tension, comme, par exemple, le changement d'un isolateur en céramique.

La deuxième étape du projet est d'éloigner l'opérateur de la zone de travail. C'est alors que le besoin d'un organe de vision artificielle est apparu. Le système devra être capable de faire du suivi d'objets en temps réel puisqu'il surveillera la scène d'intérêt et renverra une image ensuite décodée par des algorithmes de vision. Plusieurs projets sont en cours à propos de ces algorithmes au Laboratoire de Vision et de Systèmes Numériques de l'Université Laval.

La partie mécanique du projet implique la fabrication d'un prototype de mécanisme d'orientation à deux degrés de liberté. Le mécanisme devra fournir d'excellentes propriétés dynamiques et devra être d'une grande précision puisqu'il s'agit d'une tâche de poursuite d'objet en temps réel et que le temps alloué au déplacement de la caméra doit être minimal.

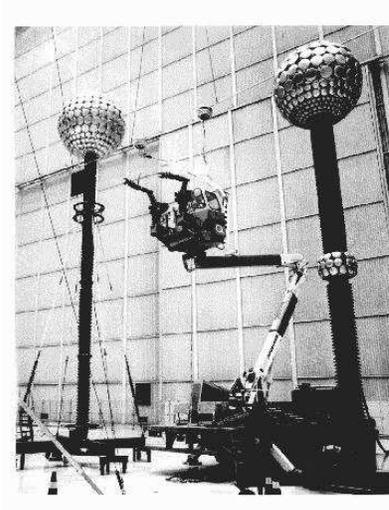


Figure 1.1: Le manipulateur à 23 degrés de liberté de l'IREQ.

1.1.1.2 Cahier des charges

La tâche à effectuer peut être décrite comme le suivi d'un objet qui oscille à 2 Hz avec une amplitude maximale de 15 cm. Le mécanisme sera placé au minimum à 1 m de la scène. On peut donc déduire avec $s = r\theta$ que le débattement maximal est d'environ 9 degrés. Toutefois, on impose un débattement beaucoup plus grand en raison des conditions très variables qui sont à prévoir. Par ailleurs, on impose un délai minimal pour une trajectoire de 1 degré. Le temps alloué pour le déplacement est de 30 ms, la capture et le traitement de l'image monopolisant la majeure partie du temps total. Les spécifications du mécanisme ainsi que la masse de l'organe terminal à orienter sont consignées au tableau 1.1.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Débattement	cône de 60 degrés
Temps alloué pour une trajectoire de 1 degré	30 ms

Tableau 1.1: Spécifications du mécanisme pour l'orientation de caméras multiples.

1.1.2 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature

1.1.2.1 Description du projet

Un mécanisme similaire à trois degrés de liberté a été développé par Gosselin et Hamel (1994). Ce manipulateur (figure 1.2), unique en son genre, possède des caractéristiques dynamiques très intéressantes (tableau 1.2). Notre but est de vérifier si on peut améliorer de façon notable les capacités du manipulateur en abaissant le nombre de degrés de liberté à deux. Ceci conférerait au nouveau mécanisme une charge inertielle plus basse ainsi qu'un plus faible encombrement des membrures. Par contre, il perd un degré de liberté et surtout la puissance additionnelle d'un actionneur.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Débattement	cône de 140 degrés
Temps alloué pour une trajectoire de 90 degrés	125 ms

Tableau 1.2: Spécifications de l'oeil agile.

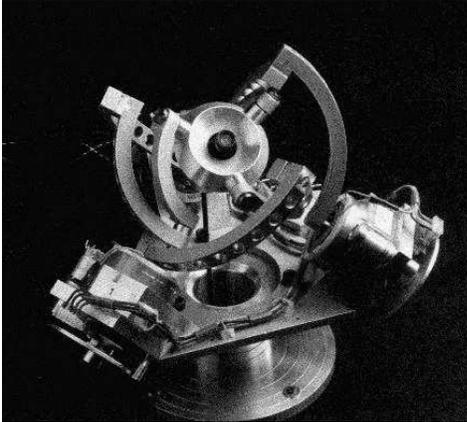


Figure 1.2: L'oeil Agile.

1.1.2.2 Cahier des charges

Ce projet étant à la base un défi technologique il est difficile de poser des objectifs. Néanmoins notre but étant de dépasser l'oeil agile, nous avons fixé nos objectifs en relation avec celui-ci. Le tableau 1.3 consigne les spécifications du manipulateur pour l'orientation d'une caméra miniature.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Débattement	cône de 140 degrés
Temps alloué pour une trajectoire de 90 degrés	40 ms

Tableau 1.3: Spécifications du mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature.

1.1.3 Mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse

1.1.3.1 Description du projet

Les partenaires impliqués dans le développement de ce projet sont Precarn & associés, Canpolar East Inc., l'Université Laval et Hydro-Québec.

Le but de l'exercice est d'explorer la faisabilité du développement d'un mécanisme capable d'orienter la visée d'une caméra avec des critères de performance très élevés tout en respectant les objectifs de coûts raisonnables.

Le dispositif est appelé à être utilisé dans des tâches de supervision ou de surveillance

dans les milieux urbains ou industriels. La scène typique, illustrée à la figure 1.3, est constituée d'un tapis roulant sur lequel sont disposés des objets. La caméra doit balayer le tapis en inspectant les objets. Évidemment il n'est pas recommandé de réduire la vitesse du tapis roulant pour permettre à la caméra de faire son acquisition de données. Il nous faut donc un manipulateur rapide et précis.

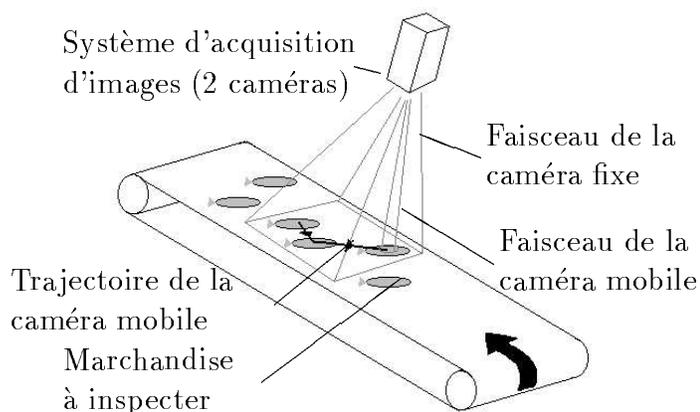


Figure 1.3: Scène d'observation.

1.1.3.2 Cahier des charges

Le cahier des charges pour ce projet est réellement contraignant et se trouve résumé dans le tableau 1.4.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Débattement	cône de 2 rad
Temps alloué pour une trajectoire de 90 degrés	5 ms
Poids	<500 g
Volume	<0.001 m ³
Coût	<1000 \$

Tableau 1.4: Spécifications du mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse.

1.2 Manipulateurs parallèles sphériques

Depuis près de 40 ans les chercheurs étudient les mécanismes sphériques: citons par exemple quelques pionniers du domaine (Dobrovolskii 1940,1943; Crossley 1955; Keator & Crossley 1955). Ces mécanismes sont présents dans la vie de tous les jours entre autres sous la forme de plaque oscillante pour les machines à laver et le fameux joint de cardan (joint de Hooke).

Dobrovolskii (1947) fut un des premiers, en 1947, à publier un livre consacré uniquement aux mécanismes sphériques. La théorie des mécanismes s'étant beaucoup développée depuis, une synthèse des travaux accomplis commençait à devenir nécessaire et c'est dans cet esprit que Chiang (1988) publia un ouvrage de référence sur les mécanismes sphériques. Ce livre rassemble les principes généraux et présente les résultats des travaux de nombreux chercheurs.

Plus récemment on s'est beaucoup intéressé aux manipulateurs parallèles (Hunt 1983, Gosselin 1988). Plus particulièrement, la recherche sur les manipulateurs sphériques à trois degrés de liberté (Craver 1989, Gosselin et Angeles 1989, Gosselin et Lavoie 1993) a mené à des applications très intéressantes dont un mécanisme pouvant reproduire et même dépasser les capacités de l'oeil humain (Gosselin et Hamel 1994, Gosselin et Gagné 1995). Les qualités de ce type de manipulateur résident dans leurs excellentes capacités dynamiques et leur grande rigidité.

Ce sont ces qualités qui, pour ce projet, nous intéressent. Ce mécanisme devra être muni de deux actionneurs et devra être conçu afin de permettre de pointer la caméra dans une direction arbitraire autour d'un point fixe tout en préservant l'horizontale dans l'image de la caméra.

Le mécanisme envisagé est un mécanisme sphérique à cinq articulations rotoïdes composé d'une seule chaîne cinématique fermée. Les actionneurs sont positionnés sur les articulations fixées à la base.

L'utilisation d'un tel type de mécanisme est souhaitable afin de réduire les chances d'interférences mécaniques entre les membrures du mécanisme. En effet sa simplicité mécanique fait de ce mécanisme le choix idéal pour le type de tâche prédéfini.

Un cas particulier de ce type de mécanisme a déjà été étudié, notamment dans

(Ouerfelli et Kumar 1991). Dans le mécanisme considéré, l'effecteur était positionné sur l'axe d'une des articulations de la chaîne cinématique. Notre particularité réside dans le fait que l'effecteur est placé arbitrairement sur une des membrures du manipulateur.

Un autre type de manipulateur sphérique à deux degrés de liberté utilise un mécanisme comprenant huit liaisons rotoïdes à deux chaînes fermées tel qu'étudié par (Gosselin, Cloutier et Rancourt 1994). Cependant, dans notre cas, on préfère la première approche pour sa simplicité cinématique et l'avantage offert au niveau des interférences mécaniques.

Chapitre 2

Analyse cinématique

Dans le chapitre précédent nous avons établi les bases pour une meilleure compréhension de l'ouvrage. Ayant terminé cette mise en situation par une brève explication des projets, il est maintenant possible de générer les équations cinématiques du manipulateur concerné dans ce mémoire. Seront donc expliqués dans ce chapitre, les problèmes géométriques direct et inverse, les équations de vitesse, les lieux de singularité, la dextérité, l'espace atteignable ainsi qu'une condition géométrique importante pour la conception: la préservation de l'horizontale pour la caméra.

2.1 Définition du manipulateur

Le mécanisme à concevoir est montré à la figure 2.1. Il consiste en une chaîne cinématique fermée comprenant cinq membrures reliées par des articulations rotoïdes. Les axes des

articulations rotoïdes s'intersectent tous en un point commun, ce qui donne deux degrés de liberté au mécanisme puisque toutes les membrures sont en rotation pure autour d'un même point fixe.

De plus, on associe un vecteur unitaire \mathbf{e}_i à chacun des axes des articulations. Les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont associés aux articulations actionnées (fixes) tandis que les vecteurs $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ et \mathbf{e}_6 (où $\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_6$) sont associés aux articulations mobiles, tel qu'indiqué à la figure 2.1.

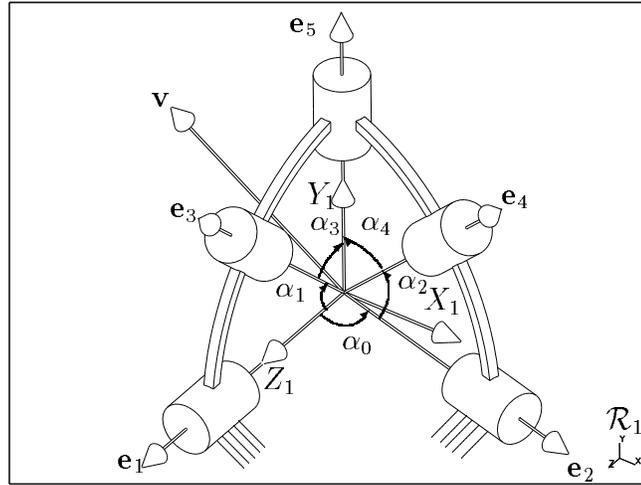


Figure 2.1: Les repères associés au mécanisme parallèle sphérique à 2 ddl.

Un repère fixe \mathcal{R}_1 est défini de façon à ce que l'axe \mathbf{z}_1 de ce repère soit dans la direction du vecteur \mathbf{e}_1 et que le vecteur \mathbf{e}_2 soit dans le plan défini par les axes \mathbf{x}_1 et \mathbf{z}_1 . L'angle entre les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 est défini comme α_0 alors que l'angle sous-tendu par la membrure mobile reliant les articulations associées aux vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_{i+2} est défini comme α_i , pour $i=1, \dots, 4$, tel qu'indiqué à la figure 2.1. Un repère mobile \mathcal{R}_i est associé à chacune des membrures suivant la convention de Denavit-Hartenberg (Denavit et Hartenberg 1955), de la façon suivante: un repère \mathcal{R}_3 est associé à la membrure d'angle α_1 et \mathbf{Q}_1 est définie comme la matrice de rotation du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_3 . De même, un repère \mathcal{R}_5 est associé à la membrure d'angle α_3 et \mathbf{Q}_3 est définie comme la matrice de rotation du repère \mathcal{R}_3 au repère \mathcal{R}_5 . Similairement, le repère fixe \mathcal{R}_2 est défini comme un repère dont l'axe \mathbf{z} est dans la direction de \mathbf{e}_2 et dans lequel \mathbf{e}_1 est dans le plan $\mathbf{x}_2\mathbf{z}_2$. Des repères \mathcal{R}_4 et \mathcal{R}_6 sont associés aux membrures d'angle α_2 et α_4

et \mathbf{Q}_2 et \mathbf{Q}_4 relient respectivement le repère \mathcal{R}_2 au repère \mathcal{R}_4 et le repère \mathcal{R}_4 au repère \mathcal{R}_6 . Tous les repères ont leur origine au centre de rotation du mécanisme et les angles associés au mouvement des articulations sont notés θ_i , pour $i=1,\dots,4$. On a donc:

$$[\mathbf{e}_i]_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 6 \quad (2.1)$$

et l'on définit le vecteur \mathbf{u} comme

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_6 \quad (2.2)$$

alors que le vecteur \mathbf{v} est défini comme le vecteur unitaire représentant l'axe à orienter (axe de la caméra, normale au miroir, axe d'un laser). Ce vecteur est physiquement attaché à la membrure d'angle α_3 (effecteur) et son orientation est définie à l'aide des angles β_1 et β_2 , tel qu'illustré à la figure 2.2.

2.2 Problème géométrique inverse

Le problème géométrique inverse consiste à déterminer les coordonnées des articulations actionnées, θ_1 et θ_2 , qui correspondent à une orientation donnée du vecteur \mathbf{v} .

On définit la matrice \mathbf{Q}_0 comme la rotation du repère \mathcal{R}_1 vers le repère \mathcal{R}_2 , soit

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} c\alpha_0 & 0 & s\alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\alpha_0 & 0 & c\alpha_0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

où la convention suivante sera utilisée: $\cos \theta \equiv c\theta$ et $\sin \theta \equiv s\theta$. On représente le vecteur \mathbf{v} dans le repère \mathcal{R}_5 , tel que montré à la figure 2.2, en définissant les angles suivants: γ est défini comme l'angle entre les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{e}_3 , β_2 est défini comme l'angle entre le vecteur \mathbf{v} et le plan formé par les vecteurs \mathbf{e}_3 et \mathbf{e}_5 et β_1 est défini comme l'angle entre le vecteur \mathbf{e}_5 et la projection du vecteur \mathbf{v} dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{e}_3 et \mathbf{e}_5 . Il est à noter que seulement deux de ces angles sont suffisants pour orienter le vecteur \mathbf{v} par rapport à l'effecteur.

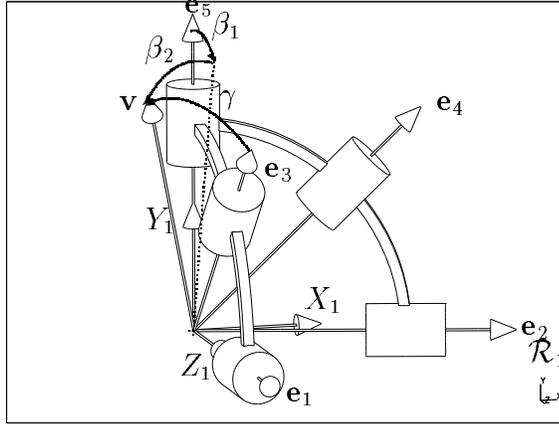


Figure 2.2: Orientation du vecteur \mathbf{v} par rapport à l'effecteur

On a donc

$$[\mathbf{v}]_5 = \begin{bmatrix} s\beta_2 \\ s\beta_1 c\beta_2 \\ c\beta_1 c\beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De plus, les matrices de rotation définies plus haut selon la convention de Denavit-Hartenberg, avec les angles θ_i et α_i , peuvent s'écrire:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.5)$$

La technique employée pour résoudre le problème géométrique inverse sera d'utiliser la géométrie du manipulateur comme équation de base. Il nous faut tout d'abord trouver une expression pour l'angle γ , l'angle sous-tendu par \mathbf{e}_3 et \mathbf{v} tel que montré à la figure 2.2 et défini plus haut. Il faut donc effectuer le produit scalaire entre \mathbf{e}_3 et \mathbf{v} dans le repère \mathcal{R}_5 car:

$$[\mathbf{e}_3]_5 \cdot [\mathbf{v}]_5 = c\gamma \quad (2.6)$$

où

$$[\mathbf{e}_3]_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ s\alpha_3 \\ c\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[\mathbf{v}]_5 = \begin{bmatrix} s\beta_2 \\ s\beta_1 c\beta_2 \\ c\beta_1 c\beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

d'où

$$c\gamma = c\alpha_3 c\beta_1 c\beta_2 + s\alpha_3 s\beta_1 c\beta_2 \quad (2.9)$$

Nous pouvons maintenant reprendre l'équation (2.6) mais exprimée dans le repère \mathcal{R}_1 :

$$[\mathbf{e}_3]_1 \cdot [\mathbf{v}]_1 = c\gamma \quad (2.10)$$

Il est à noter que le vecteur \mathbf{e}_3 est facilement représenté dans le repère \mathcal{R}_1 en utilisant seulement l'angle θ_1 avec:

$$[\mathbf{e}_3]_1 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{e}_3]_3 \quad (2.11)$$

où

$$[\mathbf{e}_3]_3 = [\mathbf{e}_1]_1 = [0, 0, 1]^T \quad (2.12)$$

Le vecteur \mathbf{v} est, quant à lui, représenté par rapport à une orientation de référence (par rapport au repère 1) grâce aux deux angles cartésiens ϕ_1 et ϕ_2 illustrés à la figure 2.3.

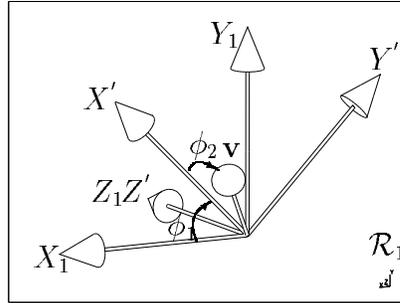


Figure 2.3: Les angles cartésiens représentant l'orientation du vecteur \mathbf{v} . On effectue d'abord une rotation de ϕ_1 autour de \mathbf{Z}_1 pour obtenir les axes \mathbf{X}' , \mathbf{Y}' et \mathbf{Z}' , puis de ϕ_2 autour de \mathbf{Y}' pour obtenir \mathbf{v} .

$$[\mathbf{v}]_1 = \mathbf{Q}[\mathbf{e}_x]_1 \quad (2.13)$$

où $[\mathbf{e}_x]_1 = [1, 0, 0]^T$ et

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c\phi_1 c\phi_2 & -s\phi_1 & c\phi_1 s\phi_2 \\ s\phi_1 c\phi_2 & c\phi_1 & s\phi_1 s\phi_2 \\ -s\phi_2 & 0 & c\phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ce qui donne

$$[\mathbf{v}]_1 = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_1 c\phi_2 \\ s\phi_1 c\phi_2 \\ -s\phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En utilisant l'équation (2.11) que nous substituons dans l'équation (2.10), nous obtenons une équation en $\sin \theta_1$ et en $\cos \theta_1$, c'est-à-dire,

$$v_x s\alpha_1 s\theta_1 - v_y s\alpha_1 c\theta_1 + v_z c\alpha_1 = c\gamma \quad (2.16)$$

que l'on transforme en utilisant l'identité suivante:

$$\cos \theta_1 = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \quad \sin \theta_1 = \frac{2T}{1 + T^2}, \quad T = \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad (2.17)$$

ce qui donne

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (2.18)$$

où

$$A = v_z c\alpha_1 + v_y s\alpha_1 - c\gamma \quad (2.19)$$

$$B = 2v_x s\alpha_1 \quad (2.20)$$

$$C = v_z c\alpha_1 - v_y s\alpha_1 - c\gamma \quad (2.21)$$

Il s'agit donc d'une quadratique, ce qui nous mène à deux solutions pour θ_1 pour une orientation donnée du vecteur \mathbf{v} . Ces solutions se calculent avec:

$$T = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.22)$$

Il nous faut maintenant calculer θ_3 afin de déterminer l'orientation complète de la membrure à laquelle est attaché le vecteur \mathbf{v} . À partir des définitions données plus haut, on a:

$$[\mathbf{v}]_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3 [\mathbf{v}]_5 \quad (2.23)$$

En écrivant cette dernière équation sous la forme:

$$\mathbf{Q}_1^T [\mathbf{v}]_1 = \mathbf{Q}_3 [\mathbf{v}]_5 \quad (2.24)$$

on obtient un système de trois équations, deux inconnues, soient les variables $\sin \theta_3$ et $\cos \theta_3$, c'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix} v_x c \theta_1 + v_y s \theta_1 \\ -v_x s \theta_1 c \alpha_1 + v_y c \theta_1 c \alpha_1 + v_z s \alpha_1 \\ v_x s \theta_1 s \alpha_1 - v_y c \theta_1 s \alpha_1 + v_z c \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a c \theta_3 + b s \theta_3 \\ -b c \theta_3 + a s \theta_3 \\ c \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

où

$$a = s \beta_2 \quad (2.26)$$

$$b = s \alpha_3 c \beta_1 c \beta_2 - c \alpha_3 s \beta_1 c \beta_2 \quad (2.27)$$

$$c = c \alpha_3 c \beta_1 c \beta_2 + s \alpha_3 s \beta_1 c \beta_2 \quad (2.28)$$

Des deux premières équations, on tire:

$$a \cos \theta_3 + b \sin \theta_3 = d \quad (2.29)$$

$$-b \cos \theta_3 + a \sin \theta_3 = e \quad (2.30)$$

où

$$d = v_x c \theta_1 + v_y s \theta_1 \quad (2.31)$$

$$e = -v_x s \theta_1 c \alpha_1 + v_y c \theta_1 c \alpha_1 + v_z s \alpha_1 \quad (2.32)$$

on trouve:

$$s \theta_3 = \frac{a e + b d}{a^2 + b^2} \quad (2.33)$$

$$c \theta_3 = \frac{a d - b e}{a^2 + b^2} \quad (2.34)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(\frac{a e + b d}{a^2 + b^2}, \frac{a d - b e}{a^2 + b^2}\right) \quad (2.35)$$

où atan2 représente la fonction mathématique tangente inverse pour laquelle nous nous assurons d'avoir une solution unique en utilisant deux arguments (le sinus et le cosinus de l'angle sont connus). On s'aperçoit que le cas $a^2 + b^2 = 0$ nous causera un problème mathématique. En étudiant les termes de cette dernière équation on note que deux conditions peuvent mener à la vérification de l'égalité. En effet, si:

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \alpha_3 = 0 \quad (2.36)$$

ou si

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_3 = \frac{\pi}{2} \quad (2.37)$$

alors $a^2 + b^2$ sera égal à zéro. Ces conditions se traduisent géométriquement par le vecteur \mathbf{v} qui coïncide avec le vecteur \mathbf{e}_3 . Il est alors impossible de spécifier θ_3 car on se retrouve avec un problème à un degré de liberté. Ces cas ne peuvent donc pas se produire dans un mécanisme réel.

C'est ce qui complète l'étude de la première branche en donnant une solution unique pour θ_3 pour chaque valeur de θ_1 . Il reste alors à calculer la seconde coordonnée articulaire θ_2 . On écrit

$$[\mathbf{e}_4]_1 \cdot [\mathbf{u}]_1 = c\alpha_4 \quad (2.38)$$

où le vecteur \mathbf{u} est calculé avec les valeurs trouvées pour θ_1 et θ_3 , c'est-à-dire,

$$[\mathbf{u}]_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3 [\mathbf{e}_1]_1 \quad (2.39)$$

donc

$$[\mathbf{u}]_1 = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\alpha_1 c\alpha_3 + s\theta_1 c\theta_3 c\alpha_1 s\alpha_3 + c\theta_1 s\theta_3 s\alpha_3 \\ -c\theta_1 s\alpha_1 c\alpha_3 - c\theta_1 c\theta_3 c\alpha_1 s\alpha_3 + s\theta_1 s\theta_3 s\alpha_3 \\ c\alpha_1 c\alpha_3 - c\theta_3 s\alpha_1 s\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

et \mathbf{e}_4 est exprimé en fonction de θ_2 :

$$[\mathbf{e}_4]_1 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2 [\mathbf{e}_4]_4 \quad (2.41)$$

Ce qui nous donne:

$$[\mathbf{e}_4]_1 = \begin{bmatrix} s\alpha_0 c\alpha_2 + s\theta_2 c\alpha_0 s\alpha_2 \\ -c\theta_2 s\alpha_2 \\ c\alpha_0 c\alpha_2 - s\theta_2 s\alpha_0 s\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La substitution des équations (2.40) et (2.42) dans l'équation (2.38) donne alors

$$s\theta_2 c\alpha_0 s\alpha_2 u_x + s\alpha_0 c\alpha_2 u_x - c\theta_2 s\alpha_2 u_y - s\theta_2 s\alpha_0 s\alpha_2 u_z + c\alpha_0 c\alpha_2 u_z = c\alpha_4 \quad (2.43)$$

Cette équation est aussi réécrite en utilisant:

$$\cos \theta_2 = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \quad \sin \theta_2 = \frac{2T}{1 + T^2}, \quad T = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad (2.44)$$

Nous avons donc, après remplacement dans (2.43):

$$AT^2 + BT + C = 0 \quad (2.45)$$

où

$$A = u_x s \alpha_0 c \alpha_2 + u_y s \alpha_2 + u_z c \alpha_0 c \alpha_2 - c \alpha_4 \quad (2.46)$$

$$B = 2(u_x c \alpha_0 s \alpha_2 - u_z s \alpha_0 s \alpha_2) \quad (2.47)$$

$$C = u_x s \alpha_0 c \alpha_2 - u_y s \alpha_2 + u_z c \alpha_0 c \alpha_2 - c \alpha_4 \quad (2.48)$$

Puisqu'il s'agit d'une quadratique, on trouve deux solutions pour chaque valeur de θ_1 . Ces solutions se calculent avec:

$$T = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.49)$$

Ce qui complète la solution du problème géométrique inverse et conduit donc à quatre solutions au total. Ces quatre solutions sont représentées à la figure 2.5, où nous avons utilisé un mécanisme dont les paramètres géométriques sont donnés au tableau 2.1.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
α_1	90 degrés
α_2	90 degrés
α_3	90 degrés
α_4	90 degrés
α_5	90 degrés
β_1	0 degrés
β_2	90 degrés

Tableau 2.1: Dimensions de l'architecture particulière.

Afin de bien comprendre la représentation schématique utilisée pour les figures montrant le manipulateur et utilisant cette architecture particulière, nous allons décrire cette représentation. Sur la figure 2.4 on peut voir le manipulateur avec des indications décrivant les membrures et composantes. Les deux actionneurs sont indiqués par les inscriptions *moteur 1* et *moteur 2*, la membrure *proximale 1* est la membrure en U soutenue par les vecteurs \mathbf{e}_3 et $-\mathbf{e}_3$. La membrure *distale* est la membrure en quart de cylindre à l'arrière soutenue par les vecteurs \mathbf{e}_4 et \mathbf{e}_5 . La membrure *proximale 2* est l'autre quart de cylindre soutenu par les vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_4 . L'organe *terminal* est représenté par un disque vide duquel pointe un long cylindre suivant le vecteur de visée

de la caméra, l'axe \mathbf{v} . Enfin, les liaisons entre les membrures sont représentées par de petits parallélépipèdes.

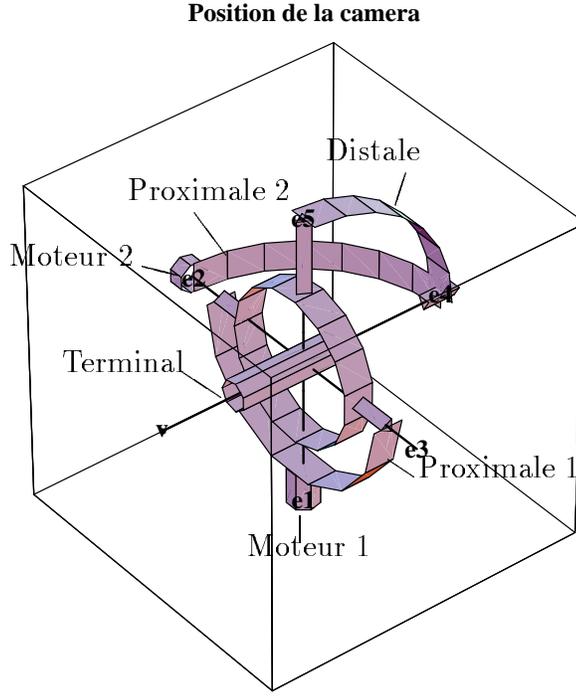


Figure 2.4: La représentation schématique.

Dans certains cas il peut s'avérer utile de calculer la coordonnée θ_4 . On utilise alors la relation suivante:

$$[\mathbf{u}]_1 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_4 [\mathbf{u}]_6 \quad (2.50)$$

ce qui peut être écrit:

$$\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_0^T [\mathbf{u}]_1 = \mathbf{Q}_4 [\mathbf{u}]_6 \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} au_x + bu_y - cu_z \\ du_x + eu_y + fu_z \\ gu_x - hu_y + iu_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_4 s\alpha_4 \\ -c\theta_4 s\alpha_4 \\ c\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

où

$$a = c\theta_2 c\alpha_0 \quad (2.53)$$

$$b = s\theta_2 \quad (2.54)$$

$$c = c\theta_2 s\alpha_0 \quad (2.55)$$

$$d = (s\alpha_0 s\alpha_2 - s\theta_2 c\alpha_0 c\alpha_2) \quad (2.56)$$

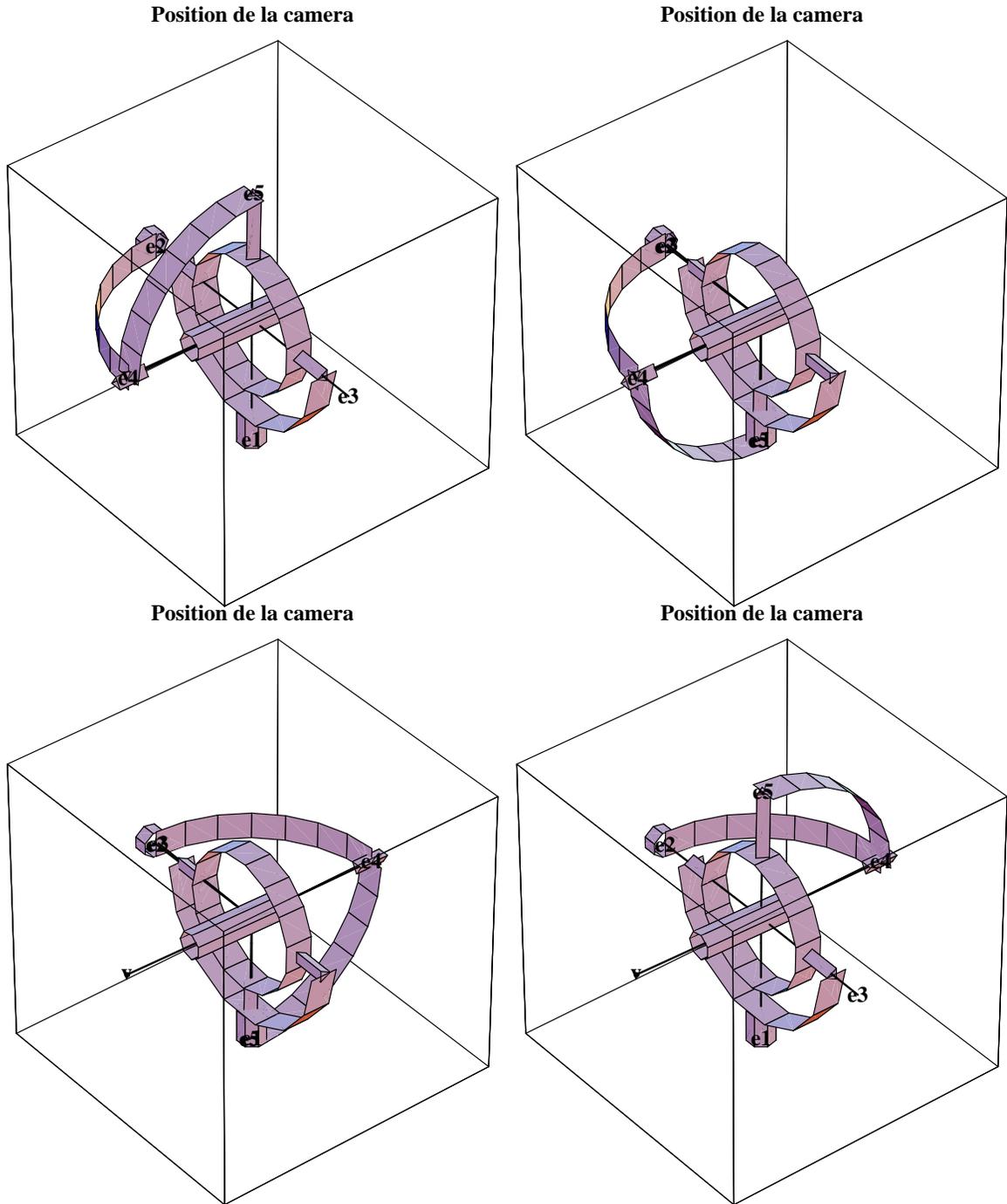


Figure 2.5: Les 4 solutions du problème géométrique inverse.

$$e = c\theta_2 c\alpha_2 \quad (2.57)$$

$$f = (c\alpha_0 s\alpha_2 + s\theta_2 s\alpha_0 c\alpha_2) \quad (2.58)$$

$$g = (s\alpha_0 c\alpha_2 + s\theta_2 s\alpha_0 s\alpha_2) \quad (2.59)$$

$$h = c\theta_2 s\alpha_2 \quad (2.60)$$

$$i = (c\alpha_0 c\alpha_2 - s\theta_2 s\alpha_0 s\alpha_2) \quad (2.61)$$

De la première équation de (2.52) on tire:

$$s\theta_4 = \frac{u_x c\theta_2 c\alpha_0 + u_y s\theta_2 - u_z c\theta_2 s\alpha_0}{s\alpha_4} \quad (2.62)$$

De la seconde équation de (2.52) on tire:

$$c\theta_4 = \frac{-u_x (s\alpha_0 s\alpha_2 - s\theta_2 c\alpha_0 c\alpha_2) - u_y c\theta_2 c\alpha_2 - u_z (c\alpha_0 s\alpha_2 + s\theta_2 s\alpha_0 c\alpha_2)}{s\alpha_4} \quad (2.63)$$

Ce qui nous mène à:

$$\theta_4 = \text{atan2}(s\theta_4, c\theta_4) \quad (2.64)$$

Nous avons donc toutes les équations dont nous avons besoin pour déterminer les variables articulaires en fonction des variables cartésiennes.

2.3 Problème géométrique direct

Le problème géométrique direct consiste à spécifier les angles d'entrée θ_1 et θ_2 et d'en déduire l'orientation du vecteur \mathbf{v} lié à l'effecteur. Pour y arriver nous devons, à partir des équations de fermeture, travailler sur une contrainte physique intrinsèque au manipulateur. En effet, si θ_1 et θ_2 sont donnés, il est facile de calculer l'orientation des vecteurs \mathbf{e}_3 et \mathbf{e}_4 . La configuration complète du mécanisme sera donc connue si on détermine l'orientation du vecteur \mathbf{u} . À cet effet on utilise la géométrie du manipulateur qui nous donne que:

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u} = \cos \alpha_3 \quad (2.65)$$

$$\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{u} = \cos \alpha_4 \quad (2.66)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad (2.67)$$

En exprimant les trois vecteurs $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ et \mathbf{u} dans le repère \mathcal{R}_1 , on obtient:

$$[\mathbf{e}_3]_1 = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\alpha_1 \\ -c\theta_1 s\alpha_1 \\ c\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$[\mathbf{e}_4]_1 = \begin{bmatrix} s\alpha_0 c\alpha_2 + s\theta_2 c\alpha_0 s\alpha_2 \\ -c\theta_2 s\alpha_2 \\ c\alpha_0 c\alpha_2 - s\theta_2 s\alpha_0 s\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$[\mathbf{u}]_1 = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Une fois le produit scalaire effectué on obtient le système d'équations suivant:

$$a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u_z = d_1 \quad (2.71)$$

$$a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 u_z = d_2 \quad (2.72)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (2.73)$$

où

$$a_1 = \sin \theta_1 \sin \alpha_1 \quad (2.74)$$

$$b_1 = -\cos \theta_1 \sin \alpha_1 \quad (2.75)$$

$$c_1 = \cos \alpha_1 \quad (2.76)$$

$$d_1 = \cos \alpha_3 \quad (2.77)$$

$$a_2 = \sin \alpha_0 \cos \alpha_2 + \sin \theta_2 \cos \alpha_0 \sin \alpha_2 \quad (2.78)$$

$$b_2 = -\cos \theta_2 \sin \alpha_2 \quad (2.79)$$

$$c_2 = \cos \alpha_0 \cos \alpha_2 - \sin \theta_2 \sin \alpha_0 \sin \alpha_2 \quad (2.80)$$

$$d_2 = \cos \alpha_4 \quad (2.81)$$

Avec les deux premières équations du système précédent on exprime u_x et u_y en fonction de u_z , c'est-à-dire,

$$u_x = \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1 - u_z (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad (2.82)$$

$$u_y = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1 - u_z (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (2.83)$$

En introduisant ces résultats dans la troisième équation, on obtient

$$\left[\frac{b_1 d_2 - b_2 d_1 - u_z (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right]^2 + \left[\frac{a_1 d_2 - a_2 d_1 - u_z (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right]^2 + u_z^2 = 1 \quad (2.84)$$

qui constitue une équation quadratique en u_z , soit,

$$A u_z^2 + B u_z + C = 0 \quad (2.85)$$

où

$$A = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 \quad (2.86)$$

$$B = 2((a_1c_2 - a_2c_1)(a_2d_1 - a_1d_2) + (b_1c_2 - b_2c_1)(b_2d_1 - b_1d_2)) \quad (2.87)$$

$$C = (a_1d_2 - a_2d_1)^2 + (b_1d_2 - b_2d_1)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \quad (2.88)$$

Il apparaît donc que le problème admet deux solutions. On tire u_z de cette quadratique en la résolvant

$$u_z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.89)$$

puis, en utilisant les équations (2.82) et (2.83), on retrouve les trois composantes du vecteur \mathbf{u} .

Nous pouvons maintenant déterminer θ_3 en utilisant la relation suivante:

$$[\mathbf{u}]_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3 [\mathbf{u}]_5 \quad (2.90)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\alpha_1 c\alpha_3 s\theta_1 + c\alpha_1 s\alpha_3 s\theta_1 c\theta_3 + s\alpha_3 c\theta_1 s\theta_3 \\ -s\alpha_1 c\alpha_3 c\theta_1 - c\alpha_1 s\alpha_3 c\theta_1 c\theta_3 + s\alpha_3 s\theta_1 s\theta_3 \\ c\alpha_1 c\alpha_3 - s\alpha_1 s\alpha_3 c\theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Nous avons trois équations et deux inconnues:

$$a_1 c\theta_3 + b_1 s\theta_3 = c_1 \quad (2.92)$$

$$a_2 c\theta_3 + b_2 s\theta_3 = c_2 \quad (2.93)$$

$$a_3 c\theta_3 = c_3 \quad (2.94)$$

où

$$a_1 = c\alpha_1 s\alpha_3 s\theta_1 \quad (2.95)$$

$$b_1 = s\alpha_3 c\theta_1 \quad (2.96)$$

$$c_1 = -s\alpha_1 c\alpha_3 s\theta_1 + u_x \quad (2.97)$$

$$a_2 = -c\alpha_1 s\alpha_3 c\theta_1 \quad (2.98)$$

$$b_2 = s\alpha_3 s\theta_1 \quad (2.99)$$

$$c_2 = s\alpha_1 c\alpha_3 c\theta_1 + u_y \quad (2.100)$$

$$a_3 = -s\alpha_1 s\alpha_3 \quad (2.101)$$

$$c_3 = -c\alpha_1 c\alpha_3 + u_z \quad (2.102)$$

Il nous faudra utiliser les équations normales afin de solutionner ce système de trois équations à deux inconnues (la solution du système est exacte puisque les équations sont consistantes). Le système est représenté sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 \\ s\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

d'où on tire:

$$\begin{aligned} \sin \theta_3 &= \frac{A}{B} \\ \cos \theta_3 &= \frac{C}{B} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= a_2^2 b_1 c_1 + a_3^2 b_1 c_1 - a_1 a_2 b_2 c_1 - a_1 a_2 b_1 c_2 + a_1^2 b_2 c_2 + a_3^2 b_2 c_2 \\ &\quad - a_1 a_3 b_1 c_3 - a_2 a_3 b_2 c_3 \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$B = a_2^2 b_1^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_3^2 b_2^2 \quad (2.105)$$

$$C = -a_2 b_1 b_2 c_1 + a_1 b_2^2 c_1 + a_2 b_1^2 c_2 - a_1 b_1 b_2 c_2 + a_3 b_1^2 c_3 + a_3 b_2^2 c_3 \quad (2.106)$$

et finalement

$$\theta_3 = \text{atan2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3) \quad (2.107)$$

Il est maintenant aisé de positionner le vecteur \mathbf{v} à l'aide de la relation suivante:

$$[\mathbf{v}]_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3 [\mathbf{v}]_5 \quad (2.108)$$

Et nous pouvons enfin retrouver les coordonnées cartésiennes avec:

$$\sin \phi_2 = -v_z \quad (2.109)$$

$$\cos \phi_2 = \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.110)$$

$$\sin \phi_1 = \frac{v_y}{\cos \phi_2} \quad (2.111)$$

$$\cos \phi_1 = \frac{v_x}{\cos \phi_2} \quad (2.112)$$

et

$$\phi_1 = \text{atan2}(\sin \phi_1, \cos \phi_1) \quad (2.113)$$

$$\phi_2 = \text{atan2}(\sin \phi_2, \cos \phi_2) \quad (2.114)$$

Ici il faut vérifier le cas où $\cos \phi_2 = 0$. Cela arrive lorsque ϕ_2 est égal à ± 90 degrés et alors quelle que soit la valeur de ϕ_1 , l'orientation du vecteur \mathbf{v} ne change pas, il ne fait que pivoter sur son axe. Nous en discuterons plus loin dans la section 2.7. C'est ce qui complète le problème géométrique direct.

On peut donc conclure que le problème géométrique direct admet un maximum de deux solutions puisqu'il est résolu avec une quadratique (équation (2.89)) qui elle-même n'admet que deux solutions. Ces deux solutions sont représentées à la figure 2.6.

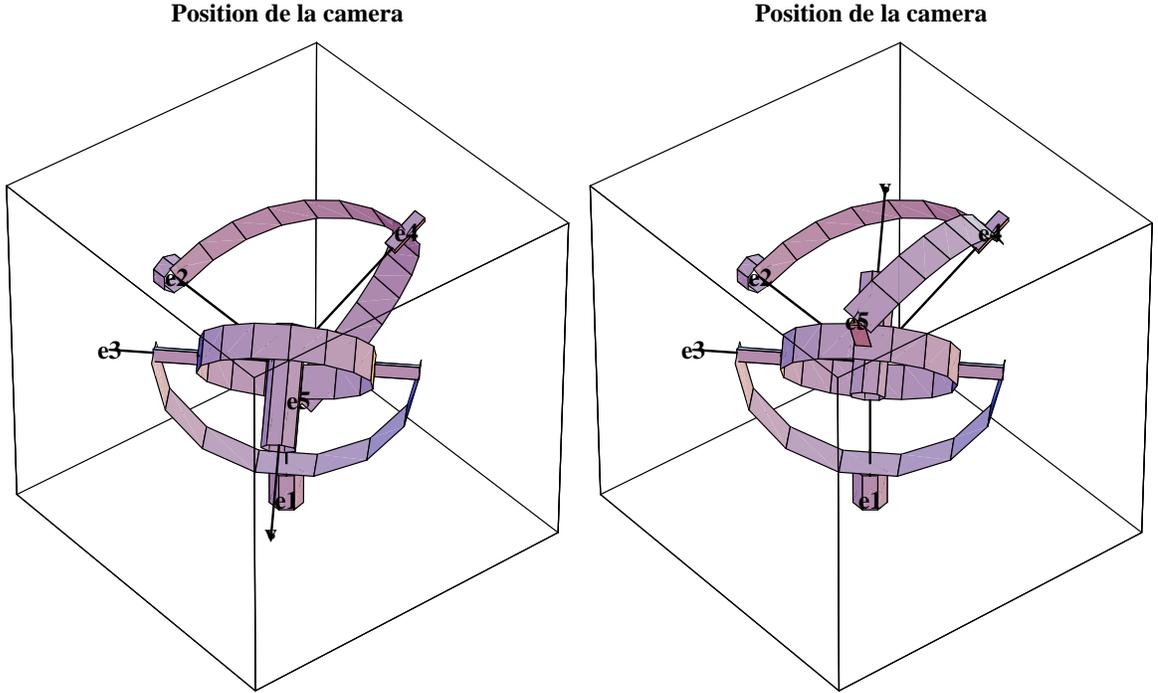


Figure 2.6: Les 2 solutions du problème géométrique direct.

Dans certains cas on peut désirer calculer la coordonnée θ_4 . On écrit alors

$$[\mathbf{u}]_1 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_4 [\mathbf{u}]_6 \quad (2.115)$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

où

$$\begin{aligned} a &= -s\alpha_0 s\alpha_2 s\alpha_4 c\theta_4 + c\alpha_0 c\alpha_2 s\alpha_4 s\theta_2 c\theta_4 + s\alpha_0 c\alpha_2 c\alpha_4 + c\alpha_0 s\alpha_2 c\alpha_4 s\theta_2 \\ &\quad + c\alpha_0 s\alpha_4 c\theta_2 s\theta_4 \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$b = -s\alpha_2 c\alpha_4 c\theta_2 - c\alpha_2 s\alpha_4 c\theta_2 c\theta_4 + s\alpha_4 s\theta_2 s\theta_4 \quad (2.118)$$

$$c = -c\alpha_0 s\alpha_2 s\alpha_4 c\theta_4 - s\alpha_0 c\alpha_2 s\alpha_4 s\theta_2 c\theta_4 + c\alpha_0 c\alpha_2 c\alpha_4 - s\alpha_0 s\alpha_2 c\alpha_4 s\theta_2 - s\alpha_0 s\alpha_4 c\theta_2 s\theta_4 \quad (2.119)$$

Nous avons trois équations et deux inconnues:

$$a_1 c\theta_4 + b_1 s\theta_4 = c_1 \quad (2.120)$$

$$a_2 c\theta_4 + b_2 s\theta_4 = c_2 \quad (2.121)$$

$$a_3 c\theta_4 + b_3 s\theta_4 = c_3 \quad (2.122)$$

où

$$a_1 = c\alpha_0 c\alpha_2 s\alpha_4 s\theta_2 - s\alpha_0 s\alpha_2 s\alpha_4 \quad (2.123)$$

$$b_1 = c\alpha_0 s\alpha_4 c\theta_2 \quad (2.124)$$

$$c_1 = -s\alpha_0 c\alpha_2 c\alpha_4 - c\alpha_0 s\alpha_2 c\alpha_4 s\theta_2 + u_x \quad (2.125)$$

$$a_2 = -c\alpha_2 s\alpha_4 c\theta_2 \quad (2.126)$$

$$b_2 = s\alpha_4 s\theta_2 \quad (2.127)$$

$$c_2 = s\alpha_2 c\alpha_4 c\theta_2 + u_y \quad (2.128)$$

$$a_3 = -c\alpha_0 s\alpha_2 s\alpha_4 - s\alpha_0 c\alpha_2 s\alpha_4 s\theta_2 \quad (2.129)$$

$$b_3 = -s\alpha_0 s\alpha_4 c\theta_2 \quad (2.130)$$

$$c_3 = -c\alpha_0 c\alpha_2 c\alpha_4 + s\alpha_0 s\alpha_2 c\alpha_4 s\theta_2 + u_z \quad (2.131)$$

Il nous faudra encore utiliser les équations normales afin de solutionner ce système de trois équations à deux inconnues (la solution du système est exacte puisque les équations sont consistantes). Ce système peut aussi être représenté sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_4 \\ s\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

d'où on tire:

$$\cos \theta_4 = \frac{A}{B}$$

$$\sin \theta_4 = \frac{C}{D}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= -a_2 b_1 b_2 c_1 + a_1 b_2^2 c_1 - a_3 b_1 b_3 c_1 + a_1 b_3^2 c_1 + a_2 b_1^2 c_2 - a_1 b_1 b_2 c_2 - a_3 b_2 b_3 c_2 \\
&\quad + a_2 b_3^2 c_2 + a_3 b_1^2 c_3 + a_3 b_2^2 c_3 - a_1 b_1 b_3 c_3 - a_2 b_2 b_3 c_3 \\
B &= a_2^2 b_1^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2 \\
C &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) \\
D &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\theta_4 = \text{atan2}(\sin \theta_4, \cos \theta_4) \quad (2.133)$$

2.4 Détermination de la jacobienne et équations de vitesse

La dextérité caractérise le comportement *local* du manipulateur. Elle est une mesure de la capacité d'un manipulateur à effectuer précisément des mouvements fins. Dans le but d'évaluer la dextérité du manipulateur, nous devons formuler la matrice jacobienne, qui relie les vitesses cartésiennes aux vitesses articulaires. Nous allons dériver géométriquement la matrice jacobienne afin d'obtenir des expressions vectorielles pour le traitement des singularités. Puisque toutes les membrures sont en rotation pure on a (Gosselin et Angeles 1989):

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\theta}_1(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) \quad (2.134)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_4 = \dot{\theta}_2(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) \quad (2.135)$$

et pour la plate-forme:

$$\dot{\mathbf{e}}_5 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_5 \quad (2.136)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (2.137)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de la plate-forme (membrure d'angle α_3). De plus, en dérivant l'équation (2.10) par rapport au temps, on trouve

$$\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{e}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.138)$$

La substitution des équations (2.134) et (2.137) dans l'équation (2.138) donne alors

$$\dot{\theta}_1 \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad (2.139)$$

Par ailleurs, en dérivant l'équation (2.38) par rapport au temps et en notant que $\mathbf{e}_5 = \mathbf{u}$, on a

$$\dot{\mathbf{e}}_4 \cdot \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_4 \cdot \dot{\mathbf{e}}_5 = 0 \quad (2.140)$$

et la substitution des équations (2.135) et (2.136) dans l'équation (2.140) conduit alors à

$$\dot{\theta}_2 \mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_5) \cdot \mathbf{e}_4 = 0 \quad (2.141)$$

En réarrangeant les équations (2.139) et (2.141), on trouve directement:

$$\dot{\theta}_1 (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.142)$$

$$\dot{\theta}_2 (\mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4)) = (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.143)$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega} \quad (2.144)$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v})^T \\ (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5)^T \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

Cependant nous avons une équation reliant les vitesses articulaires à la vitesse angulaire ($\boldsymbol{\omega}$) de la plate-forme qui n'est pas la vitesse cartésienne proprement dite. En effet, puisque le mécanisme n'a que deux degrés de liberté, nous utilisons comme coordonnées cartésiennes le vecteur $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2]^T$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont les angles définis à la figure 2.3. Il nous faut relier la vitesse angulaire aux vitesses cartésiennes. Pour ce faire nous pouvons utiliser le tenseur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ (Angeles 1988) qui est défini tel que

$$\boldsymbol{\omega} = \text{vect}(\boldsymbol{\Omega}) \quad (2.148)$$

ce qui nous conduit directement à:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.149)$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

et

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi_1 \\ 0 & \cos \phi_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

donc nous obtenons:

$$\mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_0\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.152)$$

Les matrices Jacobiennes sont \mathbf{K} et \mathbf{J} , où $\mathbf{J}=\mathbf{J}_0\mathbf{S}$.

2.5 Cinématique des membrures

2.5.1 Vitesses articulaires

Les vitesses des actionneurs $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ en fonction des vitesses cartésiennes $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ peuvent être facilement calculées à partir des équations de vitesse, c'est-à-dire:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

Ensuite, comme il nous sera utile de les connaître, on peut utiliser la définition de la vitesse angulaire pour déterminer $\dot{\theta}_3$, $\dot{\theta}_4$ et $\dot{\theta}_5$. Tout d'abord la vitesse angulaire de l'organe terminal est définie comme suit en fonction de $\dot{\theta}_3$:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_3\mathbf{e}_3 \quad (2.154)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de l'organe terminal et est définie à l'équation (2.149) et \mathbf{S} est la matrice définie à l'équation (2.151).

En substituant l'équation (2.154) dans l'équation (2.149), on obtient un système de trois équations avec une seule inconnue (système sur-déterminé) pour $\dot{\theta}_3$ qu'on résout à l'aide des équations normales :

$$\dot{\theta}_3 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\boldsymbol{\omega} - \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1) \quad (2.155)$$

où

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_3 \quad (2.156)$$

Pour ce qui est de $\dot{\theta}_4$ et $\dot{\theta}_5$, on part de l'équation suivante définissant la vitesse de l'organe terminal:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_4 \mathbf{e}_4 + \dot{\theta}_5 \mathbf{e}_5 \quad (2.157)$$

On applique la même procédure que pour $\dot{\theta}_3$, c'est-à-dire former un système de trois équations avec deux inconnues (système sur-déterminé).

$$[\boldsymbol{\omega} - \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

Encore une fois en appliquant les équations normales on résout le système pour $\dot{\theta}_4$ et $\dot{\theta}_5$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\boldsymbol{\omega} - \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2) \quad (2.159)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Notons que la vitesse angulaire de l'organe terminal peut être définie par (2.154) ou (2.157). Les vitesses angulaires des membrures distale, proximale 2 et proximale 1 sont définies respectivement comme suit:

$$\boldsymbol{\omega}_d = \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_4 \mathbf{e}_4 \quad (2.161)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{p_2} = \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.162)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{p_1} = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \quad (2.163)$$

2.5.2 Accélérations articulaires

Il nous faut maintenant générer les équations qui définissent les accélérations articulaires. Nous procéderons en dérivant deux fois les équations (2.6) et (2.38) du problème géométrique inverse par rapport au temps. On obtient:

$$\ddot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{v} + 2\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{e}_3 \cdot \ddot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.164)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_4 \cdot \mathbf{e}_5 + 2\dot{\mathbf{e}}_4 \cdot \dot{\mathbf{e}}_5 + \mathbf{e}_4 \cdot \ddot{\mathbf{e}}_5 = 0 \quad (2.165)$$

Les termes $\dot{\mathbf{e}}_3$, $\dot{\mathbf{e}}_4$, $\dot{\mathbf{e}}_5$ et $\dot{\mathbf{v}}$ ont déjà été définis aux équations (2.134),(2.135),(2.136) et (2.137). Il est donc possible de dériver ces dernières équations par rapport au temps pour obtenir

$$\ddot{\mathbf{e}}_3 = \ddot{\theta}_1(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) + \dot{\theta}_1(\mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_3) \quad (2.166)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_4 = \ddot{\theta}_2(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) + \dot{\theta}_2(\mathbf{e}_2 \times \dot{\mathbf{e}}_4) \quad (2.167)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_5 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_5 + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}_5 \quad (2.168)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{v}} \quad (2.169)$$

et, en dérivant l'équation (2.149) par rapport au temps,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{S}\ddot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\mathbf{S}}\dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.170)$$

où \mathbf{S} est définie plus haut dans l'équation (2.151).

On peut donc déterminer $\ddot{\theta}_1$ à partir de (2.164) et (2.169), ce qui conduit à

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-(\mathbf{e}_3 \cdot \ddot{\mathbf{v}}) - 2\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}} - \dot{\theta}_1 \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_3)}{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3)} \quad (2.171)$$

où $\ddot{\mathbf{v}}$ est déterminé grâce à (2.169), et $\ddot{\theta}_2$ à partir de (2.165) et (2.168), ce qui donne

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-(\mathbf{e}_4 \cdot \ddot{\mathbf{e}}_5) - 2\dot{\mathbf{e}}_4 \cdot \dot{\mathbf{e}}_5 - \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \dot{\mathbf{e}}_4)}{\mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4)} \quad (2.172)$$

où $\ddot{\mathbf{e}}_5$ est déterminé grâce à (2.168).

Puisque nous aurons besoin des valeurs des accélérations articulaires $\ddot{\theta}_3$, $\ddot{\theta}_4$ et $\ddot{\theta}_5$ afin de déterminer les vitesses angulaires des membrures, nous allons les calculer. Tout d'abord calculons $\ddot{\theta}_3$ en dérivant l'équation (2.154):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 + \dot{\theta}_3 \dot{\mathbf{e}}_3 \quad (2.173)$$

où $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, l'accélération angulaire de l'organe terminal est définie à l'équation (2.170). En formulant l'équation (2.173) sous forme matricielle on obtient un système sur-déterminé:

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}} - \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 - \dot{\theta}_3 \dot{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_3] \ddot{\theta}_3 \quad (2.174)$$

En utilisant les équations normales afin de résoudre ce système on obtient:

$$\ddot{\theta}_3 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}} - \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 - \dot{\theta}_3 \dot{\mathbf{e}}_3) \quad (2.175)$$

où

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_3] \quad (2.176)$$

La même procédure est appliquée aux coordonnées articulaires $\ddot{\theta}_4$ et $\ddot{\theta}_5$. L'équation (2.157) est tout d'abord dérivée par rapport au temps:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \ddot{\theta}_4 \mathbf{e}_4 + \dot{\theta}_4 \dot{\mathbf{e}}_4 + \ddot{\theta}_5 \mathbf{e}_5 + \dot{\theta}_5 \dot{\mathbf{e}}_5 \quad (2.177)$$

où $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ est définie à l'équation (2.170). Ensuite on remanie cette dernière équation sous forme matricielle:

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}} - \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 - \dot{\theta}_4 \dot{\mathbf{e}}_4 - \dot{\theta}_5 \dot{\mathbf{e}}_5] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

et on applique les équations normales à ce nouveau système sur-déterminé.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\dot{\omega} - \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 - \dot{\theta}_4 \dot{\mathbf{e}}_4 - \dot{\theta}_5 \dot{\mathbf{e}}_5) \quad (2.179)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

Notons finalement que l'accélération angulaire de l'organe terminal est définie par (2.173) ou (2.177). Les accélérations angulaires des membrures distale, proximale 2 et proximale 1 sont respectivement définies par:

$$\dot{\omega}_d = \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + \ddot{\theta}_4 \mathbf{e}_4 + \dot{\theta}_4 \dot{\mathbf{e}}_4 \quad (2.181)$$

$$\dot{\omega}_{p_2} = \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 \quad (2.182)$$

$$\dot{\omega}_{p_1} = \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 \quad (2.183)$$

C'est ce qui complète l'étude des équations cinématiques proprement dites. Les prochaines sections seront consacrées aux caractéristiques du manipulateur définies par les équations de ce chapitre.

2.6 Les lieux de singularité

Les lieux de singularité définissent des plages dans les coordonnées articulaires ou cartésiennes qui produiront une configuration singulière du manipulateur. C'est-à-dire qu'il devient impossible de contrôler le manipulateur lorsque celui-ci est dans cette configuration: ou on perd le contrôle complètement (des vitesses non nulles de l'organe terminal sont possibles pour des vitesses nulles des actionneurs) ou encore seulement l'un des degrés de liberté du mécanisme est perdu. Il est très important de connaître ces lieux pour la conception mécanique et la commande de manipulateurs car on désire éviter de retrouver une zone de singularité dans l'espace de travail. On connaît deux types de singularités:

Type I:

On a une singularité de type I si le déterminant de la matrice \mathbf{K} s'annule donc, selon (2.145), si $k_{11} = 0$ ou si $k_{22} = 0$. Pour que ces conditions se produisent il faut qu'une des 2 situations suivantes se produise:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) = 0 \quad (2.184)$$

$$\mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) = 0 \quad (2.185)$$

Ces conditions représentent respectivement les vecteurs \mathbf{v} , \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_3 coplanaires et les vecteurs \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_4 et \mathbf{e}_5 coplanaires. Dans les deux cas il s'agit d'une limite de l'espace atteignable puisque ces configurations représentent une pleine extension ou un repli sur elles-mêmes des pattes du manipulateur.

Type II:

On a une singularité de type II si le déterminant de la matrice \mathbf{J} s'annule. Cependant cette matrice est difficile à exprimer algébriquement. On substitue alors plutôt l'équation (2.149) dans l'équation (2.144), ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.186)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) & 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) & \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

On utilise alors le fait que $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_3$ peuvent être utilisées comme coordonnées indépendantes de vitesse pour la plate-forme.

Ainsi, les singularités du système décrit ci-dessus correspondront aux singularités de la matrice \mathbf{J} . Par ailleurs, pour que le déterminant de cette dernière matrice soit égal à zéro, il faut que soit $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) = 0$ ou que $\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) = 0$. La première condition a déjà été exprimée comme étant une limite de l'espace atteignable et la dernière signifie que les vecteurs \mathbf{e}_3 , \mathbf{e}_4 et \mathbf{e}_5 sont coplanaires, ce qui occasionne une perte de contrôle sur l'effecteur. Les zones de singularités associées à notre architecture particulière seront discutées en même temps que la dextérité dans la section suivante.

2.7 Dextérité

La dextérité est la mesure de la capacité d'un manipulateur à effectuer des mouvements fins (Salisbury et Craig 1982). La dextérité est calculée à l'aide de la matrice Jacobienne du système ($\mathbf{J}_c = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{J}$) et elle est égale à l'inverse du conditionnement de cette matrice, noté $1/\kappa$. La dextérité est un des principaux critères dans le choix de l'espace de travail d'un manipulateur. On essaie de s'assurer que la dextérité moyenne soit la meilleure possible.

On calcule le conditionnement comme suit:

$$\kappa = \|\mathbf{J}_c\| \|\mathbf{J}_c^{-1}\| \quad (2.188)$$

où $\|\mathbf{J}_c\|$ est la norme de \mathbf{J}_c . On utilise ici la norme euclidienne, que l'on peut calculer en utilisant

$$\|\mathbf{J}_c\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{J}_c \mathbf{W} \mathbf{J}_c^T)} \quad (2.189)$$

avec

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \mathbf{1} \quad (2.190)$$

où tr désigne la trace, n est la dimension de la jacobienne \mathbf{J}_c et $\mathbf{1}$ désigne la matrice identité de dimension $n \times n$.

La figure 2.7 représente la dextérité d'un manipulateur bâti selon notre architecture particulière dont les paramètres sont donnés au tableau 2.1. Les niveaux de gris représentent la dextérité, les zones les plus foncées désignant les singularités et les zones les plus pâles les zones où le conditionnement est le meilleur. On remarque sur cette figure qu'il existe quatre zones distinctes de travail possible. En fait il y en a réellement deux. Les deux zones foncées progressives placées autour de $\phi_1 = 0$ et $\phi_1 = 180$ degrés représentent des zones de perte de contrôle sur le manipulateur (singularités). En effet lorsque le manipulateur arrive dans cette orientation, on perd le contrôle sur la membrure sous-tendue par les vecteurs \mathbf{e}_4 et \mathbf{e}_5 comme illustré sur la figure 2.8(a). Ces zones de singularité séparent donc l'espace de travail en deux. Par contre, les deux lignes noires placées à $\phi_2 = 90$ et $\phi_2 = -90$ degrés sont des zones spéciales. Dans cette orientation (illustrée à la figure 2.8(b)) le contrôle sur un des degrés de liberté est

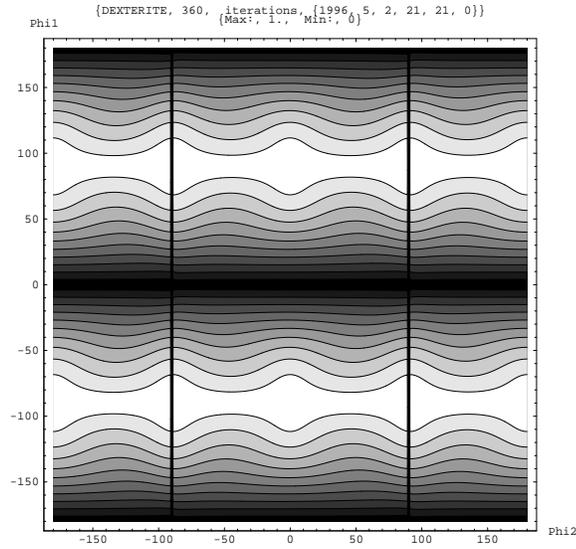


Figure 2.7: La dextérité du manipulateur avec l'architecture particulière.

localement perdu, d'où la singularité, mais le manipulateur demeure stable. En effet, il est possible dans cette orientation de faire tourner l'actionneur no.1 sans faire changer les paramètres cartésiens. Il ne se produit qu'une torsion de la caméra (elle tourne autour de son axe optique). Cette position spéciale permet de changer de branche de solution sans perte de contrôle total. Ce phénomène a été étudié par Wenger (1997).

Il est à remarquer aussi que dans sa position de référence ($\phi_1 = \pm 90$ et $\phi_2 = 0$) le manipulateur particulier est isotrope. C'est-à-dire que le contrôle des deux degrés de liberté est découplé, ce qui procure la précision maximale.

2.8 Espace de travail du manipulateur

L'espace atteignable d'un manipulateur est l'espace dans lequel le manipulateur peut évoluer pour effectuer un travail. Les limites de l'espace atteignable sont définies par les configurations extrêmes du manipulateur qui peuvent s'exprimer par les équations suivantes:

$$[\mathbf{v}]_1 \cdot [\mathbf{e}_1]_1 = \cos(\alpha_1 \pm \gamma) \quad (2.191)$$

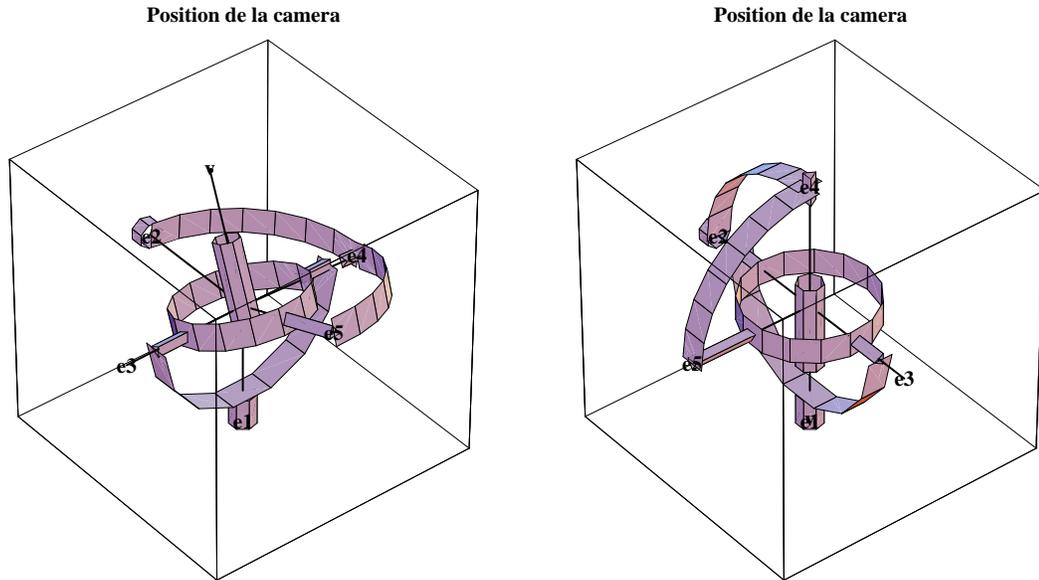
$$[\mathbf{v}]_1 \cdot [\mathbf{e}_2]_1 = \cos(\alpha_2 \pm \alpha_4) \quad (2.192)$$

On peut exprimer ces équations en fonction de ϕ_1 et ϕ_2 , on trouve alors

$$-\sin \phi_2 = \cos(\alpha_1 \pm \gamma) \quad (2.193)$$

$$\sin \alpha_0 \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \alpha_0 \sin \phi_2 = \cos(\alpha_2 \pm \alpha_4) \quad (2.194)$$

Ce qui nous donne quatre équations délimitant l'espace de travail dans l'espace cartésien, que l'on peut représenter ici comme l'espace (ϕ_1, ϕ_2) . Pour notre architecture particulière, cet espace de travail couvre tout l'espace (ϕ_1, ϕ_2) , tel que montré à la figure (2.7). Cependant, cet espace est divisé en deux zones par les singularités se trouvant à $\phi_1 = 0$ et $\phi_1 = 180$ degrés. D'après les axes définis à la figure 2.2, ces zones correspondent au fait que l'on peut pointer la caméra dans deux demi-sphères séparées par le plan XZ. Ce plan non-atteignable est la représentation des deux zones de dextérité nulle discutées dans la section précédente ($\phi_1 = 0$ et $\phi_1 = 180$ degrés).



(a) Configuration avec perte de contrôle de l'effecteur.

(b) Configuration avec perte d'un degré de liberté cartésien.

Figure 2.8: Configurations singulières du manipulateur à architecture particulière.

2.9 Préservation de l'horizontale de l'image

Il est préférable sinon indispensable, pour une caméra, de préserver l'horizontale de l'image lorsque la caméra est pointée dans différentes directions. Pour satisfaire cette condition, on pose un vecteur $[\mathbf{w}]_1$ représentant la verticale du repère fixe. Ensuite on définit un vecteur horizontal \mathbf{h} , donné par $\mathbf{h} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. De plus, on détermine une orientation particulière de ces vecteurs, notés alors \mathbf{v}^* et \mathbf{h}^* qui sont respectivement le vecteur \mathbf{v} et le vecteur \mathbf{h} lorsque $\theta_1 = 0$ et $\theta_3 = 0$. On désigne alors \mathbf{Q}_1^* et \mathbf{Q}_3^* comme les matrices \mathbf{Q}_1 et \mathbf{Q}_3 obtenues lorsque $\theta_1 = 0$ et $\theta_3 = 0$. Ces matrices s'écrivent:

$$\mathbf{Q}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

et

$$\mathbf{Q}_3^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 \\ 0 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

On peut donc écrire,

$$[\mathbf{v}^*]_1 = \mathbf{Q}_1^* \mathbf{Q}_3^* [\mathbf{v}]_5 \quad (2.197)$$

et le vecteur \mathbf{h}^* est alors défini de la façon suivante:

$$[\mathbf{h}^*]_1 = [\mathbf{v}^*]_1 \times [\mathbf{w}]_1 \quad (2.198)$$

On définit alors un autre vecteur \mathbf{h}' , qui est lié à l'effecteur et qui est dans la même orientation que \mathbf{h}^* lorsque $\theta_1 = \theta_3 = 0$. Ce vecteur, constant lorsqu'il est exprimé dans le repère \mathcal{R}_5 , s'écrit alors

$$[\mathbf{h}']_5 = \mathbf{Q}_3^{*T} \mathbf{Q}_1^{*T} [\mathbf{h}^*]_1 \quad (2.199)$$

et en substituant les équations (2.197) et (2.198) dans (2.199), on obtient

$$[\mathbf{h}']_5 = [\mathbf{v}]_5 \times \mathbf{Q}_3^{*T} \mathbf{Q}_1^{*T} [\mathbf{w}]_1 \quad (2.200)$$

Les vecteurs horizontal et vertical doivent rester perpendiculaires si l'on veut préserver l'horizontale de l'image. Cette condition peut s'exprimer par le produit scalaire entre ces deux vecteurs qui doit toujours être nul. Il nous faut exprimer le vecteur \mathbf{h}' dans

le repère \mathcal{R}_1 à l'aide des matrices \mathbf{Q}_1 et \mathbf{Q}_3 . La condition pour préserver l'horizontale est donc:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3 [\mathbf{h}']_5 \cdot [\mathbf{w}]_1 = 0 \quad (2.201)$$

Il suffit alors d'effectuer ce calcul et de vérifier les conditions physiques du manipulateur qui permettent de respecter l'égalité pour toute configuration du manipulateur. On trouve une équation en $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_3$ et du vecteur \mathbf{w} défini plus haut. Si on regarde le cas où la verticale est dans la direction négative de l'axe \mathbf{z}_1 alors l'équation (2.201) s'écrit

$$a \cos \theta_3 + b \sin \theta_3 + c = 0 \quad (2.202)$$

et pour que la condition soit respectée il faut que $a=b=c=0$ et dans l'équation précédente $a=c$, donc il faut que

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \beta_2 &= 0 \\ -\sin \alpha_1 (\cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_3) + \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)) &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas de notre architecture particulière, les valeurs vérifient les deux équations précédentes. Notre application respecte donc la condition de préservation de l'horizontale.

2.10 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons dérivé les équations des problèmes géométriques direct et inverse, défini les lieux de singularité, la dextérité et l'espace atteignable du manipulateur et nous avons démontré une condition géométrique intéressante pour le manipulateur: la préservation de l'horizontale. La cinématique maintenant bien maîtrisée nous pouvons nous attaquer à la dynamique du manipulateur dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Analyse dynamique

La cinématique étant maintenant définie nous allons au cours de ce chapitre, développer les équations régissant le comportement dynamique du manipulateur. Pour ce faire nous procéderons de deux manières: une approche newtonienne et une approche énergétique permettant de contre-vérifier la première approche. Il est à noter que les équations développées dans ce chapitre ne s'appliquent qu'au manipulateur particulier défini précédemment. Le chapitre se terminera par des exemples numériques sur ce manipulateur particulier.

3.1 Approche newtonienne

3.1.1 Introduction

Les hypothèses suivantes ont été prises en compte pour la résolution du système.

1. L'articulation sur le vecteur \mathbf{e}_3 est une articulation rotoïde parfaite, la friction est donc négligée;
2. Les articulations des vecteurs \mathbf{e}_4 et \mathbf{e}_5 ont été définies comme des articulations de cardan et sphérique respectivement. L'explication de cet artifice est donnée plus bas.

3.1.2 Notation et méthodologie

La convention de notation utilisée dans ce chapitre pour les efforts et les variables géométriques sera la suivante: premièrement il y a deux sortes d'indices, le premier indique à quelle membrure est attachée la force ou la dimension et qui est noté t (terminal), d (distal), $p1$ (proximal 1) ou $p2$ (proximal 2) alors que le deuxième est celui qui indique la direction de projection de la force ou de la dimension dans le repère local (noté selon les vecteurs \mathbf{e}_1 à \mathbf{e}_5).

Les forces seront représentées par les lettres \mathbf{a} à \mathbf{h} et les moments par les lettres \mathbf{m} à \mathbf{r} . Les composantes de ces forces et moments seront représentées par la lettre majuscule correspondante avec pour indice le vecteur direction de cette composante.

Les forces gravitationnelles seront représentés par le symbole \mathbf{f}_g avec en indice l'appartenance de cette force. Les composantes de cette force seront exprimées à l'aide du symbole F_g et les indices pour l'appartenance de cette force et le vecteur direction de cette composante.

Le vecteur d'accélération gravitationnelle est représenté par le symbole \mathbf{g} . Les masses des membrures seront dénotées par le symbole m avec l'appartenance de cette masse en indice.

Les forces inertielles dues à l'accélération des centres de masse seront notées par le symbole \mathbf{j} avec en indice la membrure reliée à cette force. Les composantes de ces forces seront représentées par la lettre J avec pour indice la membrure qui leur est associée et le vecteur direction de cette composante.

Le vecteur accélération des centres de masse est, quant à lui, représenté par le

symbole \mathbf{a} avec en indice la membrure à laquelle il est associé.

Les termes inertiels seront représentés par le symbole \mathbf{k} avec en indice la membrure qui lui est associée. Les composantes de ce terme seront exprimées à l'aide de la lettre K avec en indice la membrure qui lui est associée et le vecteur direction de cette composante. Les vitesses et accélérations angulaires seront notées respectivement $\boldsymbol{\omega}$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ avec les mêmes indices que les termes inertiels. Les matrices d'inertie seront notées par la lettre \mathbf{I} avec un indice représentant la membrure à laquelle la matrice est associée.

Enfin, les dimensions l et L ont pour indice la membrure à laquelle la dimension est associée et la direction selon laquelle elle est exprimée. Elles représentent respectivement la distance du centre géométrique au centre de masse et la distance du centre géométrique à chacun des points d'application des forces sur la membrure.

À partir des hypothèses précédentes et des équations de Newton-Euler il est possible de résoudre le problème de l'équilibre des forces. La procédure est expliquée ici:

1. On fait des diagrammes de corps libre pour chaque corps mobile et on écrit les équations d'équilibre pour chacun d'eux;
2. On résout le système de 36 équations et 36 inconnues obtenu en commençant par l'organe terminal et en descendant le plus rapidement possible aux actionneurs.

3.1.3 Équations d'équilibre

Avant de tracer les diagrammes de corps libre des différentes membrures, on doit prendre en considération le fait que le mécanisme à l'étude est un mécanisme dit surcontraint (Hunt 1978). En effet, on peut étudier le mécanisme à l'aide de la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach pour calculer le nombre de degrés de liberté:

$$l = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (3.1)$$

où l est le nombre de degrés de liberté du manipulateur, d est le nombre de degrés de liberté d'un corps non contraint dans l'espace considéré (espace=6, espace en rotation=3, plan=3), n est le nombre de corps rigides dans la chaîne cinématique, g est

le nombre d'articulations et f_i est le nombre de degrés de liberté permis par la i^{eme} articulation.

Si on applique cette formule au mécanisme sphérique à cinq barres avec $d=6$, on trouve un degré de liberté négatif. Toutefois, le mécanisme, en raison de sa géométrie, possède deux degrés de liberté (en raison du fait que les axes de toutes les liaisons rotoïdes s'intersectent en un point commun).

Ainsi, afin d'analyser le mécanisme on élimine les contraintes additionnelles en remplaçant la liaison rotoïde définie par le vecteur \mathbf{e}_5 par une liaison sphérique et la liaison rotoïde définie par le vecteur \mathbf{e}_3 par une articulation de cardan. On a alors un système qui respecte la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach (mécanisme isostatique). Il est à noter que ces hypothèses n'affecteront en rien les résultats trouvés pour les couples aux actionneurs.

Dans ce qui suit, nous allons écrire les équations d'équilibre dynamique de chacun des quatre corps mobiles, dont les diagrammes de corps libre sont représentés aux figures 3.1 à 3.4. Les forces et moments sont décomposés selon les axes associés aux vecteurs \mathbf{e}_i (par exemple, les forces sur l'organe terminal sont décomposées selon les directions $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5$ et $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_5$) et les équations sont données sous forme des composantes, avec la convention décrite plus haut. Les symboles utilisés pour les forces et moments sont définis sur les diagrammes de corps libre.

3.1.3.1 Organe terminal

Les équations d'équilibre sur l'organe terminal s'écrivent selon le diagramme de corps libre de la figure 3.1,

$$\Sigma F_{e_3} = A_{e_3} + B_{e_3} + F_{gte_3} = J_{te_3} \quad (3.2)$$

$$\Sigma F_{e_5} = A_{e_5} + B_{e_5} + F_{gte_5} = J_{te_5} \quad (3.3)$$

$$\Sigma F_{e_3 \times e_5} = A_{e_3 \times e_5} + B_{e_3 \times e_5} + F_{gte_3 \times e_5} = J_{te_3 \times e_5} \quad (3.4)$$

$$\Sigma M_{e_3} = L_{te_5} B_{e_3 \times e_5} - l_{te_3 \times e_5} F_{gte_5} + l_{te_5} F_{gte_3 \times e_5} = K_{te_3} \quad (3.5)$$

$$\Sigma M_{e_5} = M_{e_5} - l_{te_3} F_{gte_3 \times e_5} + l_{te_3 \times e_5} F_{gte_3} = K_{te_5} \quad (3.6)$$

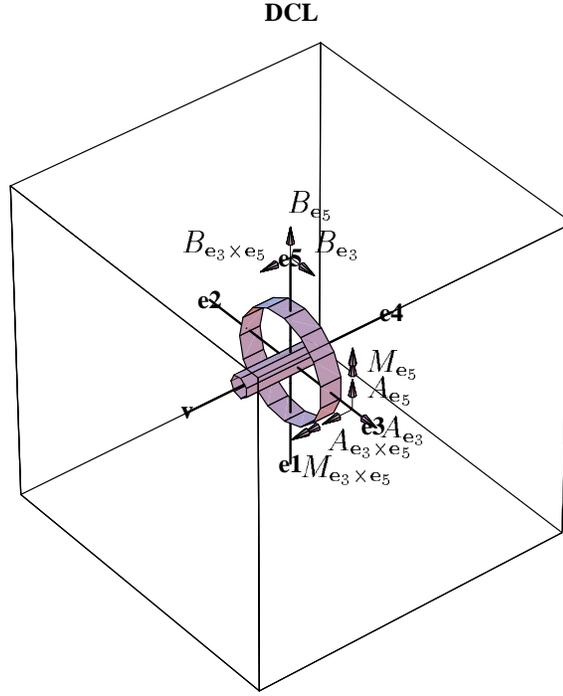


Figure 3.1: Diagramme de corps libre de la membrure terminale.

$$\Sigma M_{e_3 \times e_5} = M_{e_3 \times e_5} - l_{te_5} B_{e_3} + l_{te_3} F_{gt_{e_5}} - l_{te_5} F_{gt_{e_3}} = K_{te_3 \times e_5} \quad (3.7)$$

où

$$\mathbf{f}_{gt} = m_t \mathbf{g} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{j}_t = m_t \mathbf{a}_t \quad (3.9)$$

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{I}_t \dot{\boldsymbol{\omega}}_t + \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega}_t \quad (3.10)$$

et

$$\mathbf{a}_t = l_{te_3} \ddot{\mathbf{e}}_3 + l_{te_5} \ddot{\mathbf{e}}_5 + l_{te_3 \times e_5} [(\ddot{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{e}_5) + 2(\dot{\mathbf{e}}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_5) + (\mathbf{e}_3 \times \ddot{\mathbf{e}}_5)] \quad (3.11)$$

3.1.3.2 Membrure distale

Les équations d'équilibre sur la membrure distale donnent, selon le diagramme de corps libre de la figure 3.2:

$$\Sigma F_{e_4} = C_{e_4} + D_{e_4} + F_{gde_4} = J_{de_4} \quad (3.12)$$

$$\Sigma F_{e_5} = C_{e_5} + D_{e_5} + F_{gde_5} = J_{de_5} \quad (3.13)$$

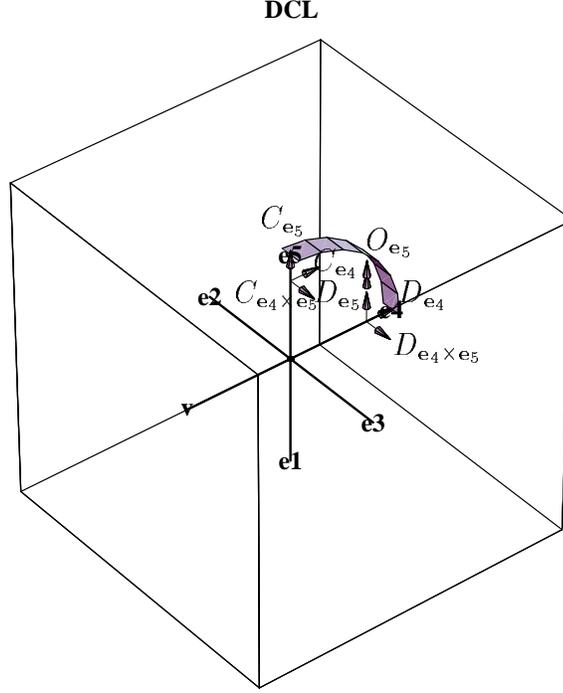


Figure 3.2: Diagramme de corps libre de la membrure distale.

$$\Sigma F_{e_4 \times e_5} = C_{e_4 \times e_5} + D_{e_4 \times e_5} + F_{gde_4 \times e_5} = J_{de_4 \times e_5} \quad (3.14)$$

$$\Sigma M_{e_4} = L_{de_5} C_{e_4 \times e_5} + l_{de_5} F_{gde_4 \times e_5} - l_{de_4 \times e_5} F_{gde_5} = K_{de_4} \quad (3.15)$$

$$\Sigma M_{e_5} = O_{e_5} - L_{de_4} D_{e_4 \times e_5} - l_{de_4} F_{gde_4 \times e_5} + l_{de_4 \times e_5} F_{gde_4} = K_{de_5} \quad (3.16)$$

$$\Sigma M_{e_4 \times e_5} = -L_{de_5} C_{e_4} + L_{de_4} D_{e_5} + l_{de_4} F_{gde_5} - l_{de_5} F_{gde_4} = K_{de_4 \times e_5} \quad (3.17)$$

où

$$\mathbf{f}_{gd} = m_d \mathbf{g} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{j}_d = m_d \mathbf{a}_d \quad (3.19)$$

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{I}_d \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{I}_d \boldsymbol{\omega}_d \quad (3.20)$$

et

$$\mathbf{a}_d = l_{de_4} \ddot{\mathbf{e}}_4 + l_{de_5} \ddot{\mathbf{e}}_5 + l_{de_4 \times e_5} [(\ddot{\mathbf{e}}_4 \times \mathbf{e}_5) + 2(\dot{\mathbf{e}}_4 \times \dot{\mathbf{e}}_5) + (\mathbf{e}_4 \times \ddot{\mathbf{e}}_5)] \quad (3.21)$$

3.1.3.3 Membrure proximale 1

Pour la membrure proximale 1, on trouve, d'après le diagramme de corps libre de la figure 3.3:

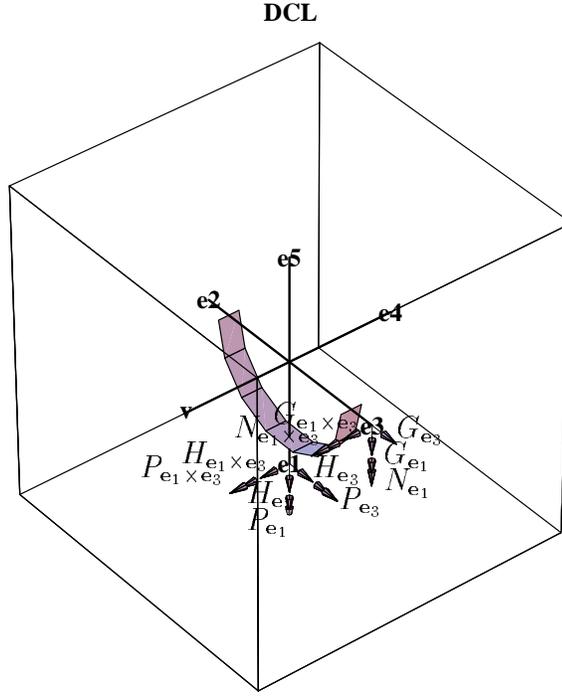


Figure 3.3: Diagramme de corps libre de la membrure proximale 1.

$$\Sigma F_{e_1} = H_{e_1} + G_{e_1} + F_{gp1e_1} = J_{p1e_1} \quad (3.22)$$

$$\Sigma F_{e_3} = H_{e_3} + G_{e_3} + F_{gp1e_3} = J_{p1e_3} \quad (3.23)$$

$$\Sigma F_{e_1 \times e_3} = H_{e_1 \times e_3} + G_{e_1 \times e_3} + F_{gp1e_1 \times e_3} = J_{p1e_1 \times e_3} \quad (3.24)$$

$$\Sigma M_{e_1} = N_{e_1} + P_{e_1} + l_{p1e_3} F_{gp1e_1 \times e_3} - l_{p1e_1 \times e_3} F_{gp1e_3} = K_{p1e_1} \quad (3.25)$$

$$\Sigma M_{e_3} = P_{e_3} - L_{p1e_1} H_{e_1 \times e_3} - l_{p1e_1} F_{gp1e_1 \times e_3} + l_{p1e_1 \times e_3} F_{gp1e_1} = K_{p1e_3} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{e_1 \times e_3} &= N_{e_1 \times e_3} + P_{e_1 \times e_3} + L_{p1e_1} H_{e_3} - l_{p1e_3} F_{gp1e_1} \\ &\quad + l_{p1e_1} F_{gp1e_3} = K_{p1e_1 \times e_3} \end{aligned} \quad (3.27)$$

où

$$\mathbf{f}_{gp1} = m_{p1} \mathbf{g} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{j}_{p1} = m_{p1} \mathbf{a}_{p1} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{k}_{p1} = \mathbf{I}_{p1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{p1} + \boldsymbol{\omega}_{p1} \times \mathbf{I}_{p1} \boldsymbol{\omega}_{p1} \quad (3.30)$$

et

$$\mathbf{a}_{p1} = l_{p1e_1} \ddot{\mathbf{e}}_1 + l_{p1e_3} \ddot{\mathbf{e}}_3 + l_{p1e_1 \times e_3} [(\ddot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_3) + 2(\dot{\mathbf{e}}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_3) + (\mathbf{e}_1 \times \ddot{\mathbf{e}}_3)] \quad (3.31)$$

3.1.3.4 Membrure proximale 2

Finalement, pour la membrure proximale 2, on utilise le diagramme de corps libre de la figure 3.4, ce qui permet d'écrire:

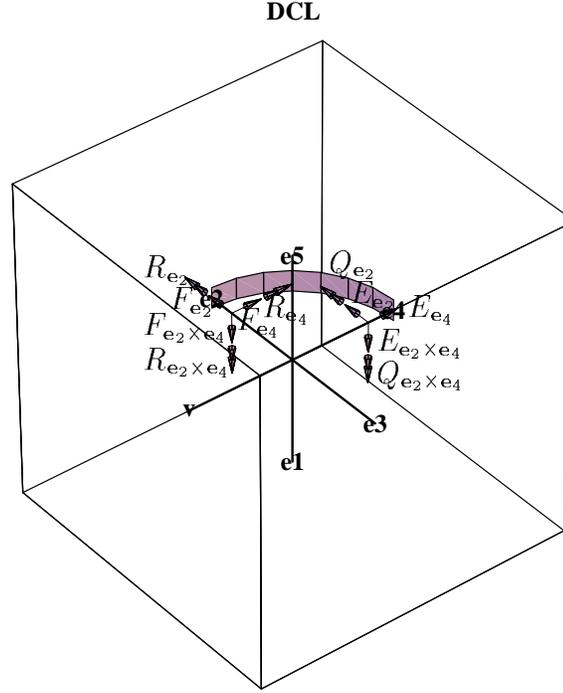


Figure 3.4: Diagramme de corps libre de la membrure proximale 2.

$$\Sigma F_{e_2} = E_{e_2} + F_{e_2} + F_{gp_2e_2} = J_{p_2e_2} \quad (3.32)$$

$$\Sigma F_{e_4} = E_{e_4} + F_{e_4} + F_{gp_2e_4} = J_{p_2e_4} \quad (3.33)$$

$$\Sigma F_{e_2 \times e_4} = E_{e_2 \times e_4} + F_{e_2 \times e_4} + F_{gp_2e_2 \times e_4} = J_{p_2e_2 \times e_4} \quad (3.34)$$

$$\Sigma M_{e_2} = R_{e_2} + Q_{e_2} + L_{p_2e_4} E_{e_2 \times e_4} - l_{p_2e_2 \times e_4} F_{gp_2e_4} + l_{p_2e_4} F_{gp_2e_2 \times e_4} \quad (3.35)$$

$$= K_{p_2e_2} \quad (3.36)$$

$$\Sigma M_{e_4} = R_{e_4} - L_{p_2e_2} F_{e_2 \times e_4} + l_{p_2e_2 \times e_4} F_{gp_2e_2} - l_{p_2e_2} F_{gp_2e_2 \times e_4} = K_{p_2e_4} \quad (3.37)$$

$$\Sigma M_{e_2 \times e_4} = R_{e_2 \times e_4} + Q_{e_2 \times e_4} + L_{p_2e_2} F_{e_4} - L_{p_2e_4} E_{e_2} + l_{p_2e_2} F_{gp_2e_4} - l_{p_2e_4} F_{gp_2e_2} = K_{p_2e_2 \times e_4} \quad (3.38)$$

où

$$\mathbf{f}_{gp_2} = m_{p_2} \mathbf{g} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{j}_{p_2} = m_{p_2} \mathbf{a}_{p_2} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{k}_{p_2} = \mathbf{I}_{p_2} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{p_2} + \boldsymbol{\omega}_{p_2} \times \mathbf{I}_{p_2} \boldsymbol{\omega}_{p_2} \quad (3.41)$$

et

$$\mathbf{a}_{p_2} = l_{p_2 e_2} \ddot{\mathbf{e}}_2 + l_{p_2 e_4} \ddot{\mathbf{e}}_4 + l_{p_2 e_2 \times e_4} [(\ddot{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{e}_4) + 2(\dot{\mathbf{e}}_2 \times \dot{\mathbf{e}}_4) + (\mathbf{e}_2 \times \ddot{\mathbf{e}}_4)] \quad (3.42)$$

3.1.4 Détermination des efforts

Il nous faut maintenant résoudre le système d'équations afin de pouvoir calculer chacune des forces. On utilise donc les 24 équations d'équilibre obtenues ci-dessus, auxquelles on ajoute 12 équations de compatibilité, qui proviennent de l'application du principe d'action-réaction sur chacune des liaisons du mécanisme. Ces équations de compatibilité s'écrivent:

$$C_{e_4} = (B_{e_3 \times e_5} + C_{e_4 \times e_5} \cos \gamma_1) / \sin \gamma_1 \quad (3.43)$$

$$B_{e_3} = -C_{e_4} \cos \gamma_1 - C_{e_4 \times e_5} \sin \gamma_1 \quad (3.44)$$

$$N_{e_1} = M_{e_5} \cos \gamma_2 - M_{e_3 \times e_5} \sin \gamma_2 \quad (3.45)$$

$$Q_{e_2} = O_{e_5} \sin \gamma_3 \quad (3.46)$$

$$E_{e_2 \times e_4} = D_{e_5} \cos \gamma_3 - D_{e_4 \times e_5} \sin \gamma_3 \quad (3.47)$$

$$N_{e_1 \times e_3} = -M_{e_5} \sin \gamma_2 - M_{e_3 \times e_5} \cos \gamma_2 \quad (3.48)$$

$$B_{e_5} = -C_{e_5} \quad (3.49)$$

$$G_{e_1} = -A_{e_5} \cos \gamma_2 - A_{e_3 \times e_5} \sin \gamma_2 \quad (3.50)$$

$$G_{e_3} = -A_{e_3} \quad (3.51)$$

$$G_{e_1 \times e_3} = -A_{e_3 \times e_5} \cos \gamma_2 - A_{e_5} \sin \gamma_2 \quad (3.52)$$

$$Q_{e_2 \times e_4} = O_{e_5} \cos \gamma_3 \quad (3.53)$$

$$E_{e_2} = D_{e_4 \times e_5} \cos \gamma_3 + D_{e_5} \sin \gamma_3 \quad (3.54)$$

où γ_1 , γ_2 et γ_3 sont respectivement l'angle entre la membrure terminale et la membrure distale, l'angle entre la membrure terminale et la membrure proximale 1 et l'angle entre la membrure distale et la membrure proximale 2. La position de référence, afin de déterminer ces angles, est la position de référence de notre architecture particulière

($\phi_1 = -90$ degrés, $\phi_2 = 0$ degrés). L'expression de leurs sinus et cosinus est:

$$\sin \gamma_1 = -\mathbf{e}_4 \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_5) \quad (3.55)$$

$$\cos \gamma_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 \quad (3.56)$$

$$\sin \gamma_2 = \mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) \quad (3.57)$$

$$\cos \gamma_2 = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_5) \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) \quad (3.58)$$

$$\sin \gamma_3 = (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) \quad (3.59)$$

$$\cos \gamma_3 = -\mathbf{e}_5 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4) \quad (3.60)$$

On peut alors résoudre le système linéaire de 36 équations à 36 inconnues décrit ci-haut afin d'obtenir toutes les forces inconnues et ultimement les couples aux actionneurs.

3.1.5 Équations du contrôleur

Les 36 équations précédentes ne sont pas toutes nécessaires pour contrôler le manipulateur. En effet, seuls les couples aux actionneurs (P_{e_1} et R_{e_2}) nous intéressent. Afin de minimiser le temps de calcul, il a donc fallu trouver la séquence de calcul impliquant le minimum de manipulation d'équations afin d'arriver à ces deux couples et les implanter dans le contrôleur. La cascade pour l'actionneur 1 comporte 8 équations présentées ci-après:

$$M_{e_5} = K_{te_5} + l_{te_3} F_{gte_3 \times e_5} - l_{te_3 \times e_5} F_{gte_3} \quad (3.61)$$

$$B_{e_3 \times e_5} = (K_{te_3} + l_{te_3 \times e_5} F_{gte_5} - l_{te_5} F_{gte_3 \times e_5}) / L_{te_5} \quad (3.62)$$

$$C_{e_4 \times e_5} = (K_{de_4} - l_{de_5} F_{gde_4 \times e_5} + l_{de_4 \times e_5} F_{gde_5}) / L_{de_5} \quad (3.63)$$

$$C_{e_4} = (B_{e_3 \times e_5} + C_{e_4 \times e_5} \cos \gamma_1) / \sin \gamma_1 \quad (3.64)$$

$$B_{e_3} = -C_{e_4} \cos \gamma_1 - C_{e_4 \times e_5} \sin \gamma_1 \quad (3.65)$$

$$M_{e_3 \times e_5} = K_{te_3 \times e_5} + L_{te_5} B_{e_3} - l_{te_3} F_{gte_5} + l_{te_5} F_{gte_3} \quad (3.66)$$

$$N_{e_1} = M_{e_5} \cos \gamma_2 - M_{e_3 \times e_5} \sin \gamma_2 \quad (3.67)$$

$$P_{e_1} = K_{m_1 e_1} \eta_1^2 + K_{p_1 e_1} - N_{e_1} - l_{p_1 e_3} F_{gp_1 e_3 \times e_5} + l_{p_1 e_3 \times e_5} F_{gp_1 e_3} \quad (3.68)$$

et pour l'actionneur 2 on ajoute six autres équations qui s'écrivent:

$$D_{e_5} = (K_{de_4 \times e_5} + L_{de_5} C_{e_4} - l_{de_4} F_{de_5} + l_{de_5} F_{gde_4}) / L_{de_4} \quad (3.69)$$

$$D_{e_4 \times e_5} = J_{de_4 \times e_5} - C_{e_4 \times e_5} - F_{gde_4 \times e_5} \quad (3.70)$$

$$O_{e_5} = K_{de_5} + L_{de_4} D_{e_4 \times e_5} + l_{de_4} F_{gde_4 \times e_5} - l_{de_4 \times e_5} F_{gde_4} \quad (3.71)$$

$$Q_{e_2} = O_{e_5} \sin \gamma_3 \quad (3.72)$$

$$E_{e_2 \times e_4} = D_{e_5} \cos \gamma_3 - D_{e_4 \times e_5} \sin \gamma_3 \quad (3.73)$$

$$R_{e_2} = K_{m_2 e_2} \eta_2^2 + K_{p_2 e_2} - Q_{e_2} - L_{p_2 e_2} E_{e_2 \times e_4} \\ + l_{p_2 e_2 \times e_4} F_{gp_2 e_2} - l_{p_2 e_2} F_{gp_2 e_2 \times e_4} \quad (3.74)$$

ce qui donne en tout 14 équations. Les 22 autres équations servent à la détermination des efforts dans les membrures.

3.2 Approche énergétique

3.2.1 Développement mathématique

Afin de contre-vérifier les résultats obtenus par l'approche newtonienne on a aussi implanté une méthode basée sur une formulation énergétique. Nous pourrions nous assurer de l'exactitude des résultats en effectuant le bilan énergétique de la trajectoire.

3.2.1.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système (E_t) est la somme de l'énergie cinétique des membrures. L'énergie cinétique de chacune des membrures est calculée avec ses propriétés inertielles et sa vitesse angulaire définie dans le chapitre précédent.

$$E_{tt} = 0.5 \boldsymbol{\omega}_t^T \mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega}_t \quad (3.75)$$

$$E_{td} = 0.5 \boldsymbol{\omega}_d^T \mathbf{I}_d \boldsymbol{\omega}_d \quad (3.76)$$

$$E_{tp_1} = 0.5 \boldsymbol{\omega}_{p_1}^T (\mathbf{I}_{p_1} + \mathbf{I}_{m_1} \eta_1^2) \boldsymbol{\omega}_{p_1} \quad (3.77)$$

$$E_{tp_2} = 0.5 \boldsymbol{\omega}_{p_2}^T (\mathbf{I}_{p_2} + \mathbf{I}_{m_2} \eta_2^2) \boldsymbol{\omega}_{p_2} \quad (3.78)$$

$$E_t = E_{tt} + E_{td} + E_{tp_1} + E_{tp_2} \quad (3.79)$$

où \mathbf{I}_{m_1} et \mathbf{I}_{m_2} sont les inerties respectives des actionneurs 1 et 2, alors que η_1 et η_2 sont respectivement les ratios des réducteurs 1 et 2 (si l'actionneur est monté directement sur le manipulateur alors ce ratio est égal à un).

3.2.1.2 Énergie potentielle

L'énergie potentielle du manipulateur (E_v) est la somme de l'énergie potentielle de chaque membrure. On calcule cette énergie potentielle à l'aide de l'élévation du centre de masse par rapport au centre géométrique.

$$E_{vt} = -m_t \mathbf{g} \cdot (l_{te_3} \mathbf{e}_3 + l_{te_5} \mathbf{e}_5 + l_{te_3 \times e_5} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_5)) \quad (3.80)$$

$$E_{vd} = -m_d \mathbf{g} \cdot (l_{de_4} \mathbf{e}_4 + l_{de_5} \mathbf{e}_5 + l_{de_4 \times e_5} (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5)) \quad (3.81)$$

$$E_{vp_1} = -m_{p_1} \mathbf{g} \cdot (l_{p_1 e_1} \mathbf{e}_1 + l_{p_1 e_3} \mathbf{e}_3 + l_{p_1 e_1 \times e_3} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3)) \quad (3.82)$$

$$E_{vp_2} = -m_{p_2} \mathbf{g} \cdot (l_{p_2 e_2} \mathbf{e}_2 + l_{p_2 e_4} \mathbf{e}_4 + l_{p_2 e_2 \times e_4} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4)) \quad (3.83)$$

$$E_v = E_{vt} + E_{vd} + E_{vp_1} + E_{vp_2} \quad (3.84)$$

3.2.1.3 Travail

Le travail est approximé par la somme du couple moyen (\overline{P}_{e_1} et \overline{R}_{e_2}) à chaque actionneur durant un intervalle de temps multiplié par la variation angulaire de l'actionneur.

$$W = \overline{P}_{e_1} \Delta\theta_1 + \overline{R}_{e_2} \Delta\theta_2 \quad (3.85)$$

3.2.1.4 Bilan énergétique

Le bilan énergétique nous indiquera si notre modèle est juste. Il s'agit de comparer la variation d'énergie au travail accompli par les actionneurs.

$$\Delta W = -W + \Delta E_v + \Delta E_t \quad (3.86)$$

3.3 Résultats

Cette section est consacrée à certains résultats obtenus sur notre manipulateur particulier. Afin de bien visualiser les résultats, on trace sur le même graphe les courbes suivantes:

1. La courbe d'énergie cinétique;
2. La courbe d'énergie potentielle;
3. La courbe négative du travail ($-W$) afin de mieux visualiser la différence;
4. La courbe du bilan énergétique.

Un cas important pour la conception du manipulateur et le choix des composantes est l'analyse du régime statique. En deux mots, on cherche le couple aux actionneurs lorsque le manipulateur est en position de référence. Choisissons par exemple le mécanisme pour l'orientation de caméras multiples (le poids des membrures influence le couple en régime statique).

Les couples de retenue pour le manipulateur sont de 0 N.mm et 4,83 N.mm pour les actionneurs 1 et 2. On remarque que l'actionneur 1 ne supporte aucune charge en régime statique et cela est une caractéristique du manipulateur. De par sa construction l'actionneur 1 est placé à la verticale de sorte qu'il n'entre en action que lors des déplacements de l'organe terminal.

Afin de démontrer l'exactitude du modèle dynamique nous allons observer deux trajectoires et représenter les couples aux actionneurs ainsi que le bilan énergétique de la trajectoire. La première trajectoire est un arc de 90 degrés à 45 degrés en ϕ_1 et ϕ_2 . Elle est représentée schématiquement à la figure 3.5. Les couples aux actionneurs sont tracés à la figure 3.6(a) alors que le bilan énergétique est montré à la figure 3.6(b). Comme le bilan donne zéro pour toute la trajectoire, on en conclut que les couples calculés aux actionneurs sont justes.

La dernière trajectoire est une figure en s dans l'espace cartésien et est représentée schématiquement à la figure 3.7. Les couples aux actionneurs et le bilan énergétique sont donnés à la figure 3.8. Encore une fois, le bilan énergétique est concluant.

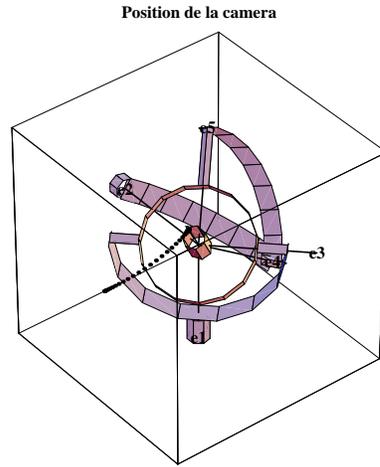
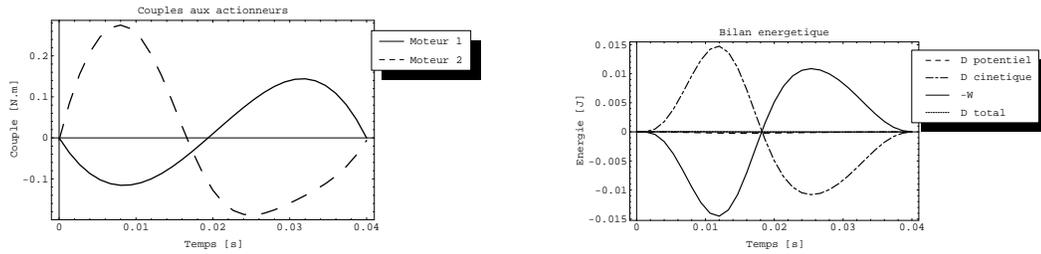


Figure 3.5: Trajectoire #1.



(a) Couple au actionneurs.

(b) Bilan énergétique.

Figure 3.6: Dynamique de la trajectoire #1.

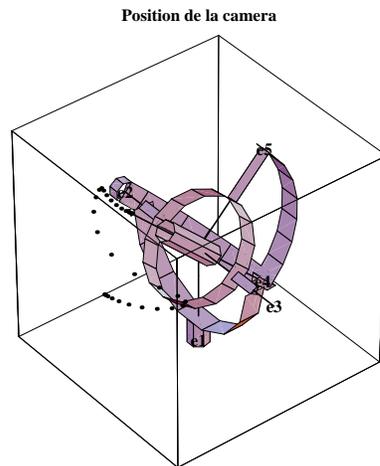
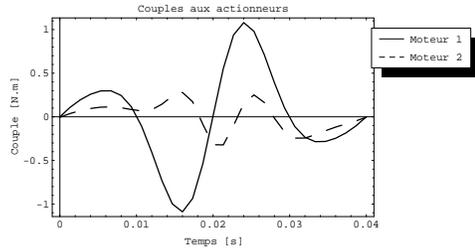
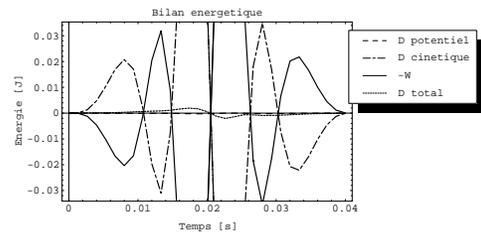


Figure 3.7: Trajectoire #2.



(a) Couple au actionneurs.



(b) Bilan énergétique.

Figure 3.8: Dynamique de la trajectoire #2.

3.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons établi les équations dynamiques du manipulateur particulier et nous les avons vérifiées. Les équations simplifiées de notre modèle particulier ont aussi été établies et il apparaît que le problème dynamique comporte très peu d'équations pour le contrôleur. Afin de poursuivre la progression du travail, les équations de bases étant définies dans les chapitres 2 et 3, nous allons maintenant exposer les outils d'analyse utilisés ainsi que les techniques employées afin de concevoir le manipulateur recherché.

Chapitre 4

Outils d'analyse

Les équations gouvernant le comportement du manipulateur étant maintenant définies nous pouvons, dans ce chapitre, exposer les outils d'analyse utilisés dans le cadre de la recherche. Ces outils ont été conçus et utilisés afin d'analyser et modéliser différentes solutions aux trois problèmes présentés au chapitre 1.

4.1 Introduction

Deux principaux outils ont été utilisés pour l'analyse, soient SMAPS et Mathematica. L'objectif des prochaines sections est d'expliquer le choix des logiciels et d'exposer le travail accompli au moyen de ces logiciels. Les programmes développés pour l'analyse contiennent les équations dérivées dans les chapitres précédents et serviront de base à la conception.

4.2 SMAPS et OpenInventor

Un environnement de simulation, SMAPS, a été développé au laboratoire, (Gosselin et al. 1994). Ce puissant outil d'analyse permet la visualisation du manipulateur ainsi que certaines caractéristiques qui lui sont propres tels son espace de travail ou les lieux de singularité. Sa construction orientée objet permet de lui ajouter d'autres modules, ce qui le rend très puissant. Sa principale force réside dans le fait qu'on peut animer le manipulateur et changer son architecture sur-le-champ à l'aide de glissières. On peut donc visualiser les zones d'interférences mécaniques ou le comportement du manipulateur dans une situation particulière.

Ce logiciel utilise les bibliothèques OpenInventor pour la représentation graphique 3D et des fonctions en langage de programmation C++ pour les modules d'analyse du logiciel. L'environnement OpenInventor permet de créer relativement simplement des objets en trois dimensions selon une structure arborescente. La puissance graphique de cet environnement n'est pas non plus à dédaigner tel qu'illustré à la Figure 4.1.

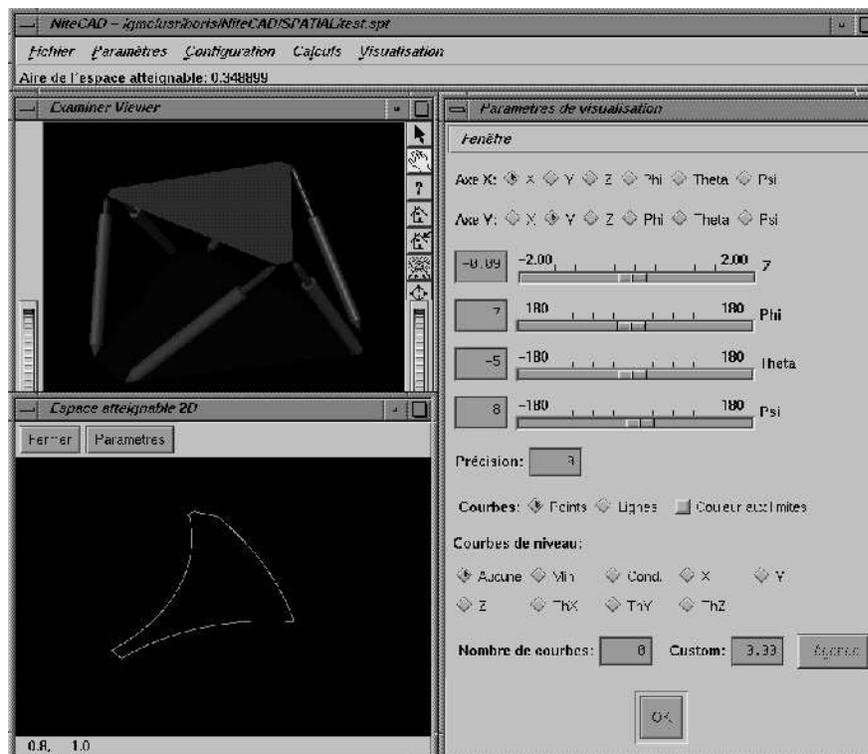


Figure 4.1: Logiciel d'analyse SMAPS.

Comme le logiciel permettait une excellente simulation 3D pour le contrôle articulaire ou cartésien du manipulateur ce fut un bon choix pour l'implantation des équations. Le manque de temps et la connaissance superficielle du langage de programmation C++ ont cependant apporté la nécessité d'une programmation plus simple et plus rapide.

4.3 Mathematica

Le gros avantage du logiciel précédent était sa convivialité et la possibilité d'effectuer des changements d'architecture ou de configuration en temps réel. Par contre comme il a été mentionné, les besoins d'une utilisation plus rapide et d'un développement plus facile ont favorisé la création d'un environnement de test sur Mathematica. Afin de simuler le manipulateur avec une plus grande précision, plusieurs modules ont été programmés. Les modules programmés sont:

1. Problème géométrique direct;
2. Problème géométrique inverse;
3. Analyse dynamique;
4. Graphes de la dextérité, des singularités et de l'espace atteignable;
5. Contrôle et animation du manipulateur hors-ligne en mode articulaire ou cartésien;
6. Environnement de graphes de diagrammes de corps libres.

Tous les modules peuvent être appliqués à différents manipulateurs. Ceux-ci sont définis dans des fichiers de données contenant toutes les informations pertinentes à l'analyse. Il y a aussi des fichiers d'actionneurs pour la partie dynamique.

4.3.1 Problèmes géométriques direct et inverse

Ce module permet à l'utilisateur d'effectuer le problème géométrique direct ou inverse et de visionner le résultat sous forme numérique ou graphique. Le programme présente toutes les solutions possibles (deux pour le PGD et quatre pour le PGI, voir le chapitre 2).

4.3.2 Analyse dynamique

Le module d'analyse dynamique permet de calculer les efforts requis aux actionneurs afin d'accomplir une trajectoire donnée de l'effecteur. Le changement d'orientation de l'effecteur peut s'effectuer en mode cartésien ou articulaire et peut se faire selon une trajectoire prédéfinie à partir d'un fichier. L'utilisateur peut choisir de tenir compte de l'inertie des moteurs si nécessaire et choisir le degré du polynôme de contrôle (Gosselin et Hadj-Messaoud 1993). Les résultats graphiques pour ce module sont les suivants: graphe des couples aux actionneurs, graphe du bilan énergétique, graphe des efforts aux articulations, graphe de puissance des actionneurs et graphe des variables cinématiques des articulations (position, vitesse et accélération).

4.3.3 Graphes de la dextérité, des singularités et de l'espace atteignable

Ces modules présentent les graphes de la dextérité, des singularités et de l'espace atteignable, avec une précision plus ou moins grande, du manipulateur concerné. L'utilisateur peut choisir l'espace sur lequel il désire les résultats.

4.3.4 Contrôle et animation du manipulateur

Ce module permet à l'utilisateur de visualiser le manipulateur effectuant un déplacement. L'utilisateur choisit l'architecture désirée, le type d'actionnement (articulaire ou cartésien), une trajectoire si nécessaire ainsi que différents paramètres de contrôle. Le programme, en plus de créer une animation représentant le manipulateur en action, trace la

trajectoire suivie par l'effecteur pour une meilleure visualisation. L'inconvénient principal de la méthode réside dans le fait que les changements de paramètres ne peuvent se faire pendant l'animation, il faut relancer le programme à chaque fois.

4.3.5 Environnement de graphes de diagrammes de corps libres

Ce module permet de produire des graphes de chacune des membrures avec des forces et moments placés arbitrairement selon le choix de l'utilisateur.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a décrit les outils et les méthodes utilisés dans l'analyse des manipulateurs à concevoir. Ces outils servent de tronc commun au projet, c'est donc à partir du prochain chapitre que le travail se sépare en trois branches, c'est-à-dire les trois problèmes de conception considérés séparément.

Chapitre 5

Conception mécanique

Au cours des derniers chapitres nous avons établi les modèles ainsi que les outils utilisant ces modèles et nous permettant d'étudier différentes architectures. Nous sommes maintenant prêts à commenter la conception mécanique des prototypes. Nous commencerons par la justification du choix de l'architecture particulière montrée en exemple tout au long du mémoire.

5.1 Introduction

Le projet comporte un volet conception mécanique duquel doit découler un prototype fonctionnel. Les trois prototypes (un pour chaque sous-projet) partagent la même architecture (notre architecture particulière) dont nous exposerons les raisons du choix dans la section 5.2. Le choix de cette architecture, mené en parallèle avec les analyses

cinématique et dynamique, constitue d'ailleurs la première étape de conception suivie de la conception mécanique proprement dite expliquée dans ce chapitre. Les principales différences entre les prototypes résident dans les dimensions et les caractéristiques dynamiques exigées. La tâche commune à chaque prototype est l'orientation avec deux degrés de liberté d'un organe quelconque.

Le logiciel de conception utilisé est I-DEAS de la société *SDRC*. Ce choix repose sur la puissance du logiciel ainsi que sa disponibilité au département de génie mécanique.

5.2 Choix de l'architecture

Comme cette partie est commune aux différents prototypes elle sera traitée en premier. Rappelons tout d'abord les paramètres architecturaux particuliers. Le tableau 5.1 les résume.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
α_1	90 degrés
α_2	90 degrés
α_3	90 degrés
α_4	90 degrés
α_5	90 degrés
β_1	0 degrés
β_2	90 degrés

Tableau 5.1: Dimensions de l'architecture particulière.

Plusieurs raisons qui ont motivé le choix de cette architecture ont été exprimées tout au long du mémoire, effectuons un bref retour sur celles-ci. Avant tout il s'agit de l'espace de travail. En effet avec ces paramètres l'espace de travail se divise en deux demi-sphères (figure 5.1); il est donc maximum pour ce type de manipulateur. Aucun lieu de singularité ne traverse cet espace de travail hormis les deux positions spéciales discutées précédemment. De plus, le manipulateur est isotrope dans sa position de référence, ce qui lui confère une excellente dextérité pour les mouvements fins. Enfin, étant donné que tous les angles définissant l'architecture valent 0 ou 90 degrés, les

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Débattement	cône de 60 degrés
Temps alloué pour une trajectoire de 1 degré	30 ms

Tableau 5.2: Spécifications du mécanisme pour l'orientation de caméras multiples.

calculs sont beaucoup simplifiés. C'est donc à partir de cette architecture qu'ont été construits les prototypes décrits dans les prochaines sections.

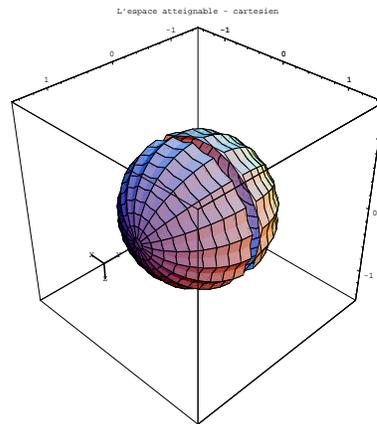


Figure 5.1: L'espace de travail de l'architecture particulière.

5.3 Mécanisme d'orientation de caméras multiples

Ce projet consiste à concevoir un mécanisme capable d'orienter un ensemble de caméras et de lasers selon deux axes d'orientation (2 ddl): l'azimuth et l'élévation. Les spécifications pour les performances du manipulateur sont résumées dans le tableau 5.2. Plusieurs difficultés ont été rencontrées en cours de conception, entre autres le changement de l'organe terminal pour accommoder la partie vision et le choix des actionneurs.

5.3.1 Vérification de l'architecture

La position de référence isotrope de l'architecture choisie est à $\phi_1 = -90$ degrés et $\phi_2 = 0$ degrés. Il faut s'assurer que le manipulateur soit en mesure d'atteindre les objectifs imposés par le cahier des charges.

1. L'architecture permet d'atteindre tous les points du cône de 60 degrés;
2. Il n'y a pas de zones de singularités dans l'espace de travail.

D'autres critères de conception doivent aussi être respectés: le volume minimal et le poids minimal (minimiser l'inertie des pièces).

Les plans du prototype sont présentés en annexe A.

5.3.2 Interférences

Le choix d'un manipulateur à deux degrés de liberté seulement (par opposition à trois) simplifie la tâche de conception puisque, pour le débattement demandé, il y a possibilité de construire facilement des membrures sans interférences. Il est quand même intéressant de vérifier l'état des interférences.

Les membrures sont disposées sur trois sphères. La première sphère comprend l'organe terminal et l'adaptateur, la deuxième comprend la membrure proximale 1 et la membrure distale et enfin, la troisième comprend la membrure proximale 2.

La sphère médiane nous intéresse plus particulièrement parce que deux membrures y prennent place, la membrure proximale 1 et la membrure distale. À l'aide du logiciel de conception IDEAS nous avons pu dimensionner et tester les membrures afin qu'il n'apparaisse aucune interférence dans l'espace de travail recommandé.

5.3.3 L'organe terminal

L'organe terminal nous est imposé par les travaux réalisés en vision par Loranger (1997). Il a en effet conçu cet organe en fonction de la position des deux caméras et du laser qui en font partie (illustré à la figure 5.2). Les principales caractéristiques dimensionnelles nous concernant sont présentées dans le tableau 5.3.

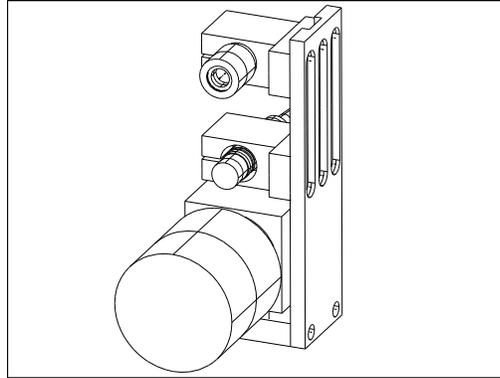


Figure 5.2: L'organe terminal.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Hauteur totale	5.24 po
Largeur totale	2 po
Poids de l'ensemble	670 g

Tableau 5.3: Dimensions principales de l'organe terminal.

5.3.4 Conception des membrures

Il est à noter que pour des raisons évidentes d'encombrement et de dimensionnement, la branche de solution où la membrure distale est en-dessous de l'organe terminal a été retenue (voir section 2.2).

Le choix de l'aluminium comme matériau de fabrication se justifie de lui-même lorsque l'on parle de faible poids et de rigidité appréciable.

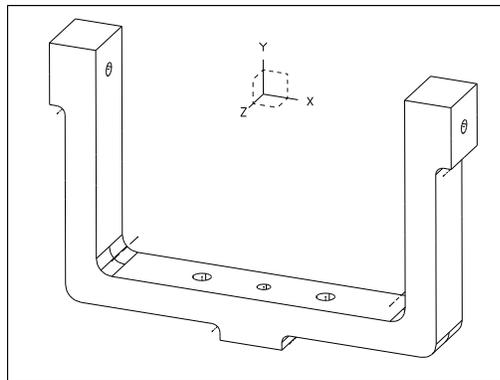


Figure 5.3: La membrure adaptatrice.

La membrure adaptatrice (figure 5.3) fait le lien entre l'organe terminal (imposé) et la membrure proximale 1. C'est une pièce qui a aussi l'utilité d'amener le centre de masse le plus près possible du centre géométrique de rotation (cela diminue la "résistance inertielle").

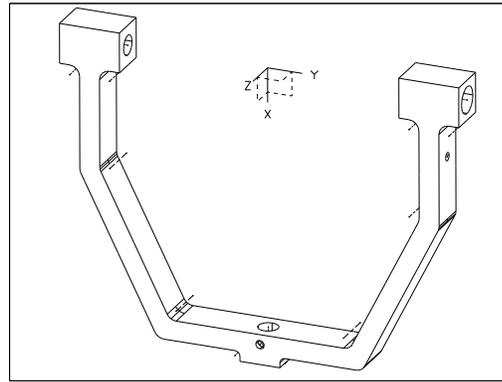


Figure 5.4: La membrure proximale 1.

La membrure proximale 1 (figure 5.4) fait le lien entre le moteur no.1 et l'adaptateur. Les contraintes liées à sa forme sont l'espace suffisant pour laisser passer l'organe terminal, l'évitement d'interférences avec la membrure distale et de bonnes caractéristiques dynamiques.

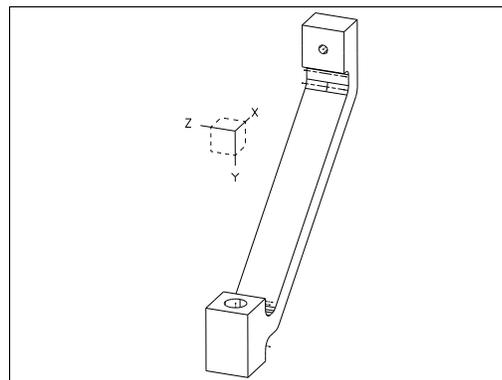


Figure 5.5: La membrure distale.

La membrure distale (figure 5.5) fait le lien entre l'adaptateur et la membrure proximale 1. Ici encore il faut vérifier l'interférence avec la membrure proximale 1 et la membrure proximale 2.

La membrure proximale 2 (figure 5.6) fait le lien entre la membrure distale et le moteur no.2. Celle-ci offre une forme circulaire afin de pouvoir laisser pivoter l'organe

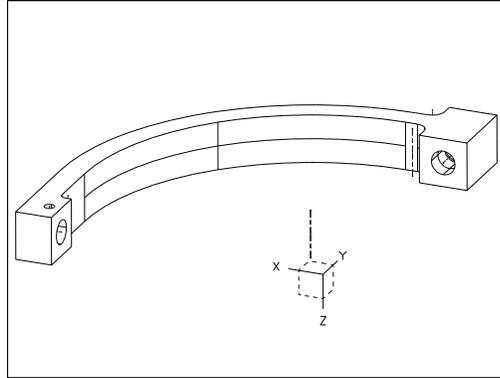


Figure 5.6: La membrure proximale 2.

terminal autour de l'angle ϕ_1 sans interférences.

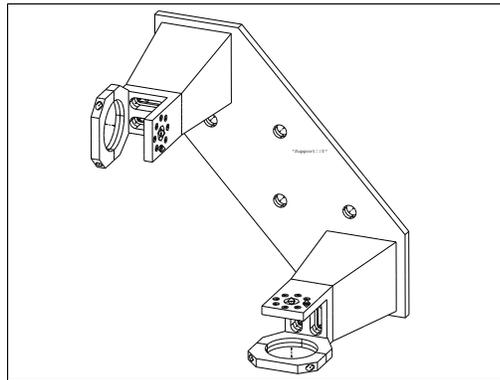


Figure 5.7: La base.

La base (figure 5.7) comporte une plaque de support avec deux piliers. Ces piliers sont fabriqués afin de permettre un ajustement parfait des moteurs avec les membrures.

5.3.5 Liaisons

La liaison entre les membrures (figure 5.8) se fait par un axe en acier sur lequel sont montés deux roulements (WX1/8 et WAX1/8) et deux espaceurs en laiton (le laiton offre une bonne adhérence sur l'aluminium). L'espaceur qui effectue le contact avec la membrure est fileté et sert de contre-écrou pour barrer l'axe en place. Un couvercle vient protéger les roulements et s'assoit sur la bague extérieure d'un des roulements.

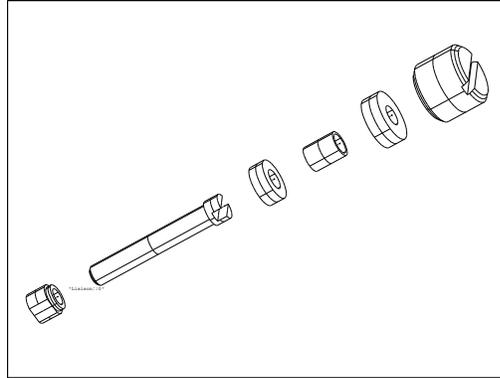


Figure 5.8: L'ensemble liaison.

5.3.6 Étude dynamique

Afin de dimensionner correctement les actionneurs en fonction de notre application, on doit effectuer quelques vérifications au niveau de la dynamique. Il faut tout d'abord calculer les masses, les propriétés inertielles et les positions des centres de masse de chaque membrure à l'aide du logiciel IDEAS (résultats en annexe D). Ensuite, en utilisant le logiciel d'analyse programmé sur Mathematica on peut tracer les courbes d'efforts aux actionneurs en fonction de différentes trajectoires (dans le modèle dynamique on ne tient pas compte du frottement). Les résultats graphiques pour différentes trajectoires sont présentés dans l'annexe E.

5.3.7 Choix des actionneurs

Le moteur à retenir doit fournir le couple et les vitesses calculés précédemment. Plusieurs options ont compliqué le choix. L'utilisation d'un réducteur aurait permis de meilleures capacités mais comme les meilleurs possèdent un jeu angulaire de ± 1 ou 2 degrés à la sortie et que notre application doit être précise au dixième de degré nous avons opté pour le couplage direct.

Nous avons choisi le moteur 3557K024CR de la compagnie *Micromo Electronics* puisqu'il répondait très bien aux exigences. Notons que les caractéristiques dynamiques sont relativement différentes pour les deux axes et cela est principalement dû au fait que le moteur no.1 est monté verticalement sous le manipulateur et n'a pas à combattre la gravité. La décision d'utiliser le même moteur pour les deux axes est motivée par la

simplicité du manipulateur ainsi que le facteur coût.

Un des facteurs du choix de cette compagnie est l'encastrement des composantes auxiliaires au moteur. Nous aurions pu en effet acheter un moteur sans cage (frameless), mais nous aurions alors dû fabriquer sa cage et assembler des composantes achetées d'autres compagnies ensembles. La compagnie *Micromo Electronics* offrait tout un ensemble de composantes s'assemblant simplement les uns aux autres. Nous avons choisi l'encodeur HEDS5540A06 et son adaptateur X464C et le frein X0727C. L'ensemble moteur est présenté à l'annexe C.

5.3.8 Le MOCa, Mécanisme d'Orientation de Caméra

La figure 5.9 représente le MOCa assemblé. On y distingue bien les deux actionneurs, l'organe terminal, de même que les membrures intermédiaires.

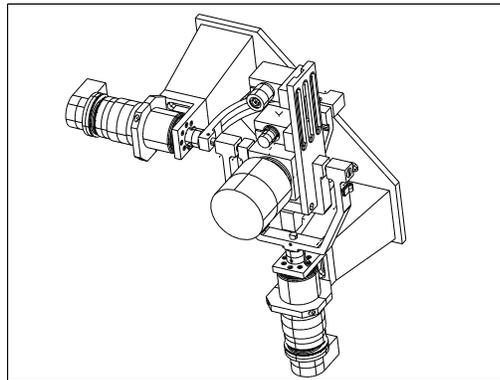


Figure 5.9: Le manipulateur MOCa.

5.4 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature

Ce projet consiste à concevoir un prototype capable d'égaliser ou de dépasser les performances de l'oeil agile (Gosselin et Hamel 1994). Les objectifs sont résumés dans le tableau 5.4.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Débattement	cône de 140 degrés
Temps alloué pour une trajectoire de 90 degrés	40 ms

Tableau 5.4: Spécifications du mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature.

5.4.1 Vérification de l'architecture

La position de référence isotrope de l'architecture choisie est aussi à $\phi_1 = -90$ degrés et $\phi_2 = 0$ degrés. Il faut encore s'assurer que le manipulateur soit en mesure d'atteindre les objectifs imposés par le cahier des charges.

1. L'architecture permet d'atteindre tous les points du cône de 140 degrés;
2. Il n'y a pas de zones de singularités dans l'espace de travail.

L'architecture correspond donc à nos besoins. Le prototype partage beaucoup de points communs avec le prototype précédent, leur construction étant presque similaire. Les plans du prototype sont présentés à l'annexe B.

5.4.2 Interférences

Il existe, tout comme sur le prototype du MOCa, 3 sphères sur lesquelles sont distribuées les membrures. La sphère intérieure comprend l'organe terminal, la sphère intermédiaire comprend la membrure proximale 1 et la membrure distale et enfin, la sphère extérieure comprend la membrure proximale 2. Dans le cas présent l'organe terminal est beaucoup moins encombrant que pour le MOCa.

Ici encore la sphère qui nous intéresse est l'intermédiaire puisqu'elle comprend deux membrures susceptibles d'entrer en interférence. Il a suffi d'allonger la membrure proximale 1 afin de permettre à l'organe terminal de s'y engager et d'aplatir la membrure distale afin de dégager le passage. À l'aide du logiciel IDEAS nous avons dimensionné les membrures afin d'éviter toute interférence dans l'espace de travail.

<i>Variable</i>	<i>Valeur</i>
Module de rigidité en tension	34.5 MPa
Module de rigidité en flexion	62.1 MPa
Module de Young en tension	2.5 GPa
Module de Young en flexion	2.62 GPa
Masse volumique	1.05 g/cm ³

Tableau 5.5: Spécifications du plastique ABS.

5.4.3 Le prototypage rapide

Le choix du matériau pour fabriquer ce prototype est assez original. Nous avons décidé de faire appel à une technologie assez nouvelle pour son développement: le prototypage rapide. Nos raisons sont assez simples: nous voulions un matériau léger, assez robuste et pas trop dispendieux. Les caractéristiques du plastique utilisé par la machine disponible sont résumées dans le tableau 5.5.

Ce choix audacieux possède tout de même un fondement. En plus de répondre aux exigences mentionnées ci-haut, il nous permettait de tester cette nouvelle approche de conception très intéressante. En effet cette technologie simplifie énormément la conception de nouvelles pièces en abaissant le coût et le temps de production ainsi qu'en réduisant le nombre d'étapes entre la conception et la pièce finie.

La procédure de fabrication d'une pièce est assez simple. Tout d'abord il faut concevoir la pièce sur un système CAO puis ensuite sauvegarder le fichier dans un format reconnu par la machine. On fournit ensuite ce fichier à la machine et on lui indique les faces de la pièce ainsi que certains paramètres de construction tels l'axe de construction, la densité du matériau, etc. Finalement la machine fabrique directement la pièce.

La machine dont nous disposons (figure 5.10) fabrique les pièces couche par couche en déposant un fil de plastique chauffé.

Il faut cependant tenir compte de quelques critères pour la conception des pièces:

1. Concevoir de préférence des pièces prismatiques (avec un axe principal) pour obtenir une meilleure rigidité;



Figure 5.10: La machine à prototypage rapide.

2. Concevoir des parois d'au moins 1/8 de pouce d'épaisseur;
3. Dessiner des pré-trous pour l'usinage plus précis.

5.4.4 L'organe terminal

L'organe terminal, montré à la figure 5.11 retient la caméra à orienter dans un mandrin. Il est composé d'une partie vis et d'une partie écrou. Cette pièce était le défi du prototype puisque nous tentions des expériences d'usinage sur une pièce produite par prototypage rapide. La partie vis est filetée conique et son bout est fendu en quatre lamelles qui se referment sur l'objet à saisir. La partie écrou est filetée à l'intérieur.

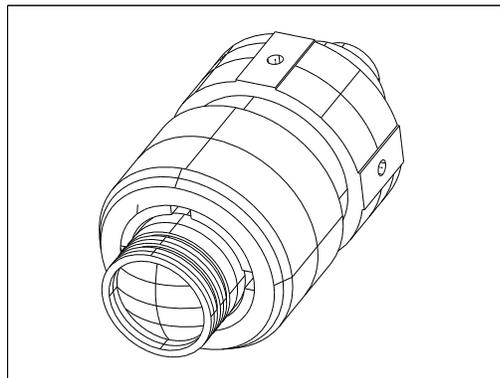


Figure 5.11: L'organe terminal.

5.4.5 Conception des membrures

L'organe terminal étant symétrique selon son axe de longueur, le choix de la branche de solution s'est fait sur le critère d'interférence. La branche de solution avec la membrure distale sur le dessus n'implique à toutes fins pratiques aucune interférence. De plus puisque la membrure distale est au-dessus de l'organe terminal le volume de la membrure proximale 1 peut être réduit.

La membrure proximale 1 (figure 5.12) fait le lien entre l'organe terminal et le moteur no.1.

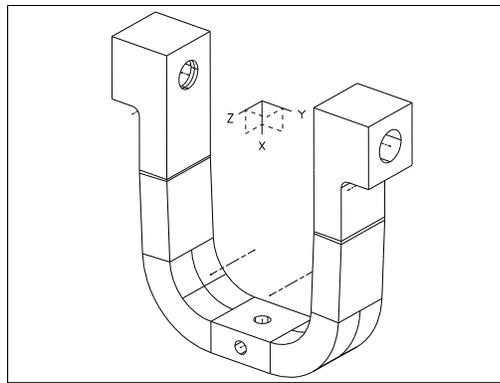


Figure 5.12: La membrure proximale 1.

La membrure distale (figure 5.13) fait le lien entre l'organe terminal et la membrure proximale 2. Sa conception est reliée principalement à l'évitement d'interférences avec la membrure proximale 2.

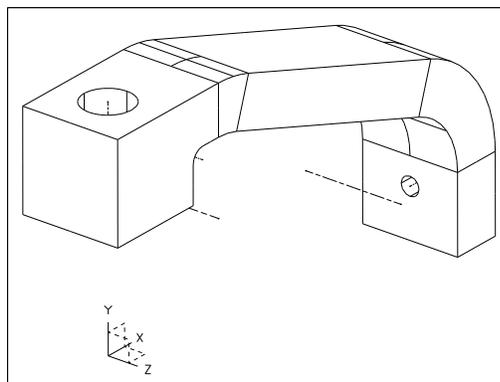


Figure 5.13: La membrure distale.

La membrure proximale 2 fait le lien entre la membrure distale et le moteur no.2.

Deux modèles seront testés, un premier plus court (figure 5.14(a)) et un second plus long (figure 5.14(b)). Les deux pièces seront préparées pour l'utilisation et les tests porteront sur la rigidité et l'inertie de la pièce. La membrure courte est attachée au moteur seulement alors que la membrure longue pourra être aussi supportée par un pivot fixe libre aligné avec l'axe du moteur.

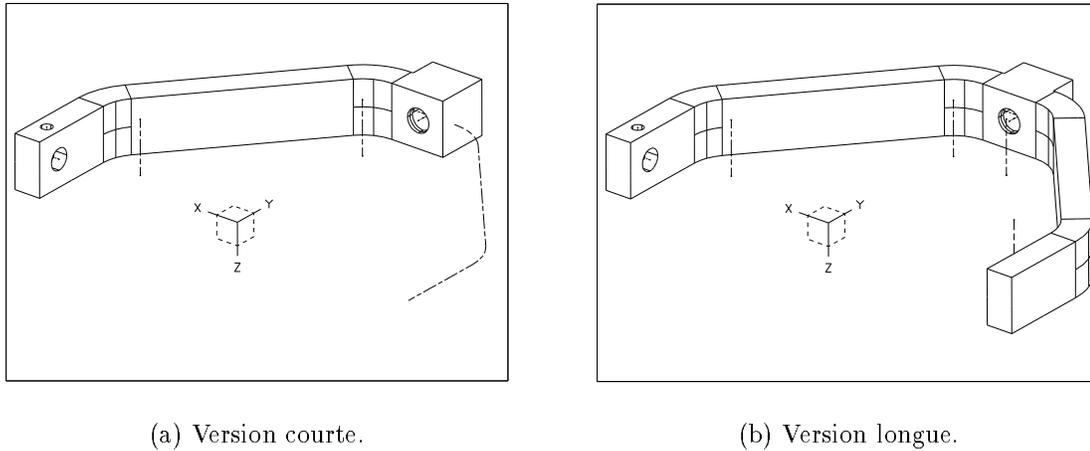


Figure 5.14: La membrure proximale 2.

5.4.6 Liaisons

Les liaisons sur ce prototype sont constituées d'un axe en acier sur lequel sont montés deux roulements WAX1/8 et deux espaceurs. La friction entre l'axe fileté et le plastique est assez grande pour l'empêcher de dévisser. Le montage en opposition des liaisons empêche les membrures de se déplacer en translation. L'ensemble liaison est illustré en vue éclatée sur la figure 5.15

5.4.7 Étude dynamique

Afin d'être en mesure de bien dimensionner les actionneurs du prototype, il nous faut effectuer des tests sur la dynamique du manipulateur. Après avoir calculé les propriétés inertielles, les masses et les positions des centres de masse de chaque membrure avec IDEAS (résultats en annexe D), nous pouvons utiliser le logiciel d'analyse développé sur Mathematica afin de tracer les courbes des couples aux actionneurs en fonction

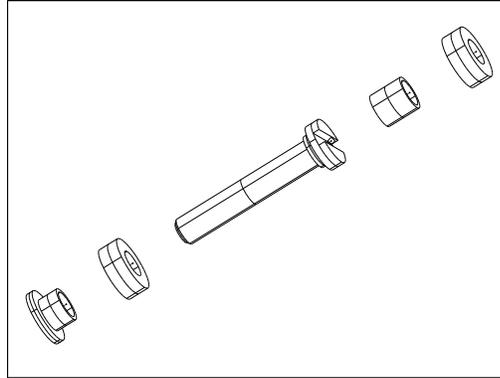


Figure 5.15: La liaison.

de trajectoires typiques. Les résultats graphiques pour différentes trajectoires sont présentés dans l'annexe E.

5.4.8 Choix des moteurs

Le choix des actionneurs sur ce prototype a été relativement simple. Puisque les moteurs pour le prototype précédent répondaient aussi aux exigences de ce prototype nous les avons choisis. Cette procédure simplifiera la tâche du concepteur du contrôleur. Les détails du moteur et de ses composants sont dans l'annexe C.

5.4.9 L'Oeil Agile II

L'assemblage des pièces est illustré à la figure 5.16. Ce mécanisme fait présentement l'objet d'une étude de brevet.

5.5 Mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse

Une filiale de *Canpolar East, VE Technologies*, produit déjà un système, le **VE-379** (figure 5.17(a)), qui possède des capacités assez étonnantes. C'est un système de surveillance qui fonctionne sur la base de deux caméras. Une caméra capte la scène générale

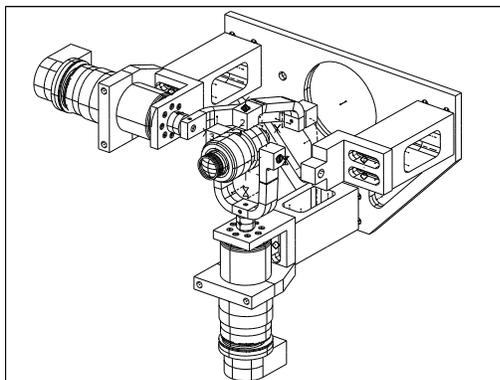


Figure 5.16: L'oeil agile version 2 ddl.

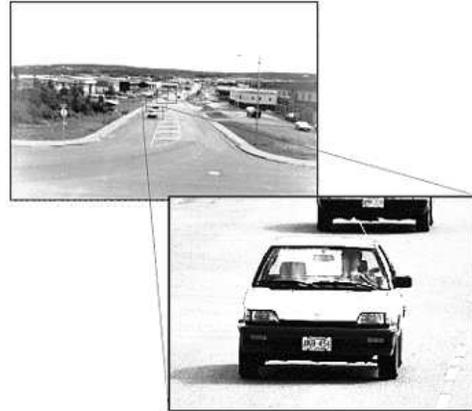
et un traitement de l'image renvoie les coordonnées d'un objet mobile, par exemple une voiture, et une seconde caméra montée sur un système d'orientation 2D (présentement il s'agit d'un système sériel coûtant près de 5000 \$ US) capte la région d'intérêt pour un sous-traitement de l'image subséquentement (illustré sur la figure 5.17(b)).

Ce système faisait partie des solutions envisagées par *Canpolar East* pour leur système à plus grande distribution. Par contre le système complet se vend environ 50000 \$ US, ce qui le rend inaccessible pour la clientèle visée par le projet (les petites entreprises de transformation de poisson). Diverses solutions ont été envisagées et impliquaient deux méthodes générales de capture de la région d'intérêt. Une première solution proposée par l'IREQ utilisait un stroboscope pour figer la région concernée et une seconde méthode conservait l'orientation de la caméra de capture par soit le mouvement de la caméra ou de la lentille. C'est sur cette dernière méthode que nous avons travaillé. Il a vite été retenu qu'un manipulateur sphérique parallèle à deux degrés de liberté répondrait bien aux exigences. Il restait à trouver les équations d'un tel mécanisme et plusieurs avenues étaient possibles quant aux méthodes d'actionnement de ce mécanisme. En effet l'utilisation de moteurs pas-à-pas, de piézo-électrique, de galvanomètres, d'actionnement pneumatique ou hydraulique, de métal à mémoire de forme, du prisme liquide (pour remplacer la lentille) et de fibres optiques ont été envisagés.

Vu les caractéristiques dynamiques exceptionnelles demandées dans ce projet la solution proposant l'orientation de la caméra fut abandonnée au profit de celle de l'orientation de la lentille (en fait il s'agit d'un miroir sur lequel la caméra pointe).



(a) L'appareil VE-379.



(b) Fonctionnement du VE-379.

Figure 5.17: Solution VE-379.

Nous avons commencé par l'élimination des modes d'articulation. La plupart des solutions ont été rejetées parce qu'elles ne répondaient pas aux exigences et les autres par leur manque de continuité (piézo-électrique) combiné à une répétabilité faible. Les moteurs électriques représentaient le seul mode d'articulation réalisable (le coût final de l'appareil étant relativement important). Nous avons également regardé du côté de la littérature pour savoir si il ne s'y trouverait pas une solution à nos problèmes. Une application intéressante, le MAGLEV, développé par (Hollis et al. 1991) attira notre attention. Le mécanisme, illustré à la figure 5.18, fonctionne sur le principe de la répulsion magnétique. Ceci lui confère d'excellentes propriétés dynamiques. Par contre la complexité et le volume du système nous ramenèrent à la solution du mécanisme parallèle sphérique à deux

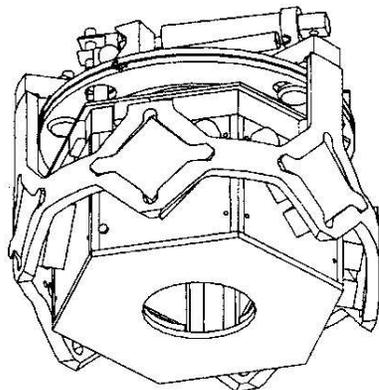


Figure 5.18: Le MAGLEV.

L'organe terminal est un socle permettant d'accueillir un miroir de 10 mm de diamètre et 2 mm d'épaisseur. Le miroir est tenu en place à l'aide d'une vis de pression. L'organe terminal possède quatre axes afin de recevoir les membrures. Il est illustré à la figure 5.19.

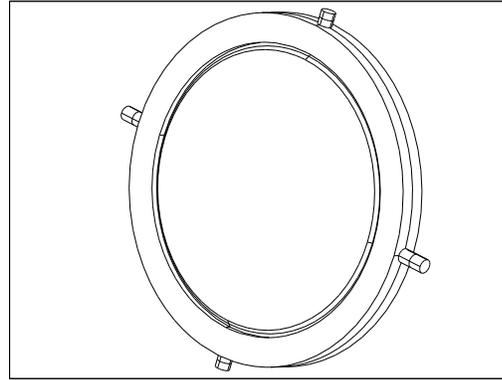


Figure 5.19: L'organe terminal.

Pour ce qui est de la conception du système de membrures il s'agissait d'arcs de cercle (en plastique ou en métal) reliés les uns aux autres par des articulations sur paliers lisses. La considération principale dans la conception des membrures était d'abaisser l'inertie des pièces tout en leur procurant une bonne rigidité.

Le choix des moteurs fut relativement complexe du fait que nous devions concentrer nos recherches dans les micromoteurs puisque l'enveloppe totale ne devait pas dépasser 10 cm^3 . De plus il fallait respecter des contraintes dynamiques assez importantes. Notre choix s'est arrêté sur le moteur DC0816 de la compagnie *MicroMo*. Ces moteurs sont parmi les plus petits disponibles sur le marché avec un diamètre de seulement 8 mm. Les capacités du moteur sont présentées en annexe C.

Le projet se termina avant la fabrication d'un prototype et nous n'avons pas été en mesure de terminer la conception. Le coût du système final n'aurait pas respecté les exigences. La figure 5.20 présente l'aspect du manipulateur CVD (Camera View Director) avec ses moteurs.

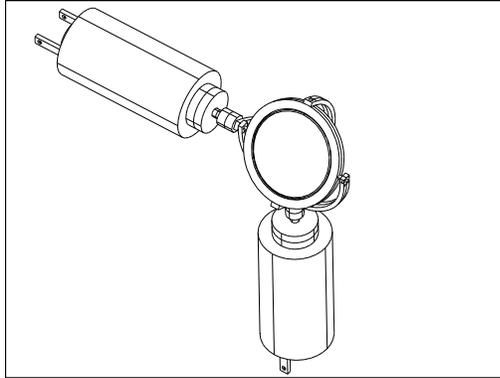


Figure 5.20: Esquisse du manipulateur CVD.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons résumé les étapes de conception et expliqué les choix faits pour les prototypes. Nous avons aussi donné tous les détails techniques relatifs à ces prototypes. Nous pouvons donc passer à la dernière étape et conclure sur les travaux à suivre.

Conclusion

Cette conclusion reprend les objectifs fixés au début du projet, en présente l'accomplissement et résume les travaux à continuer.

Tout d'abord le premier objectif était d'**obtenir un modèle cinématique et un modèle dynamique du manipulateur parallèle sphérique à deux ddl**. À partir des travaux réalisés par (Ouerfelli et Kumar 1991), nous avons dérivé les équations formant les modèles cinématiques et dynamiques. De plus, nous avons exprimé la condition géométrique pour la préservation de l'horizontale de l'image. Les chapitres 2 et 3 consignent ces résultats.

Le deuxième objectif consistait à **concevoir et fabriquer trois prototypes pour répondre aux besoins de trois projets spécifiques**. Cet objectif est en partie atteint. Nous avons exposé les outils conçus et utilisés afin de résoudre les trois problèmes et présenté une architecture particulière permettant l'atteinte des objectifs géométriques des trois projets. Ensuite nous avons présenté les démarches de conception pour ces trois projets ainsi que les solutions envisagées. Nous n'avons, par contre, que partiellement terminé deux des trois projets présentés. Le projet de mécanisme pour l'orientation d'un miroir à haute vitesse n'a pas été mené à terme en raison des coûts anticipés.

Cependant pour les projets de mécanisme pour l'orientation de caméras multiples et de mécanisme pour l'orientation de caméra miniature il en est tout autrement. Les

deux projets se sont rendus à la fabrication. L'analyse, la conception et la préparation des plans sont complétées. Les deux mécanismes sont en fabrication et les composantes sont en commande. Des problèmes de logistique n'ont pas permis la fin des travaux comme prévu mais les projets sont lancés.

Les travaux à compléter comprennent donc la surveillance de la fin de la fabrication, l'assemblage des mécanismes, la fabrication et la programmation des contrôleurs (en cours) et finalement les tests des mécanismes.

Finalement, il est important de noter que la topologie des mécanismes est présentement en étude de brevet.

Bibliographie

- [1] Angeles, J. (1988): *Rational Kinematics*. Springer-Verlag, New York.
- [2] Chiang, C.H. (1988): *Kinematics of spherical mechanisms*. Cambridge University Press. Great Britain.
- [3] Craver, W.M. (1989): *Structural analysis and design of a three-degree-of-freedom robotic shoulder module*. Master Thesis. The University of Texas at Austin.
- [4] Crossley, F.R.E. (1955): *3-D mechanisms*. Machine Design. Vol. 27, No. 8 August, pp. 175–179.
- [5] Denavit, J., Hartenberg, R.S. (1955): *A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices*. Journal of Applied Mechanics, pp.215–221.
- [6] Dobrovolskii, V.V. (1940): *Theory of relative motion in spherical mechanisms*. Izv. Akad. Nauk. Otd. Tekh. Nauk. pp.33–46.
- [7] Dobrovolskii, V.V. (1943): *Synthesis of spherical mechanisms*. Akad. Nauk. SSSR. Trudy Sem. Teorii Masin i Mechanizmov. pp.5–20.
- [8] Dobrovolskii, V.V. (1947): *Theory of Spherical Mechanisms*. Moscow.

- [9] Gosselin, C. (1988): *Kinematic Analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators*. Ph.D. Thesis. Department of Mechanical Engineering. McGill University. Montreal.
- [10] Gosselin, C., Angeles, J. (1989): *The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator*. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol. 111, No. 2. pp.202–207.
- [11] Gosselin, C., Cloutier, C., Rancourt, D. (1994): *Kinematic analysis of spherical two-degree-of-freedom parallel manipulators*. Proceedings of the ASME Mechanisms Conference, Robotics, Kinematics, Dynamics and Controls. pp.255–262.
- [12] Gosselin, C., Gagné, M. (1995): *Dynamic models for spherical parallel manipulators*. Proceedings of the Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Milano. Italy. Vol. 3. pp. 2032–2036.
- [13] Gosselin, C., Hadj-Messaoud, A. (1993): *Automatic planning of smooth trajectories for pick-and-place operations*. ASME Journal of Mechanical Design. Vol. 115, No. 3. pp. 450–456.
- [14] Gosselin, C., Hamel, J.-F. (1994): *The agile Eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device*. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Diego. pp.781–786.
- [15] Gosselin, C., Lavoie, E. (1993): *On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators*. The International Journal of Robotics Research. Vol. 12, No. 4. pp.394–402.
- [16] Gosselin, C., Perreault, L. et Vaillancourt, C. (1994): *SMAPS: A computer-aided design package for the analysis and optimization of spherical parallel manipulators*. Comptes-Rendus International Symposium on Robotics and Advanced Manufacturing. Maui. Vol. 1. Août. pp. 115–120.

- [17] Hollis, R.L., Salcudean, S.E., Allan, A.P. (1991): *A Six-Degree-of-Freedom Magnetically Levitated Variable Compliance Fine-Motion Wrist: Design, Modeling and Control*. IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 7, No. 3. pp.320–332.
- [18] Hunt, K.H. (1978): *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, Oxford.
- [19] Hunt, K.H. (1983): *Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms*. ASME Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. Vol. 105, No. 4. pp. 705–712.
- [20] Keator, F.W., Crossley, F.R.E. (1955): *Analysing dimensional and velocity characteristics of 3-D mechanisms*. Machine Design. Vol. 27. 204–209.
- [21] Lessard, J., Lavallée, J., Girard, P. and McGee, J.-Y. (1992): *Research and Developments in Telerobotics at Hydro-Québec for the introduction of a Live Line Telemanipulation System*. Rapport technique. IREQ. Hydro-Québec. Varennes. Québec. 1992.
- [22] Loranger, F. (1997): *Réalisation d'un capteur télémétrique utilisant la technologie de Biris pour la poursuite visuelle d'une structure poutre-isolateur-ligne: le capteur TRID*. Thèse de maîtrise. Faculté des Études Supérieures. Université Laval.
- [23] Ouerfelli, M., Kumar, V. (1991): *Optimization of a spherical five bar parallel drive linkage*. Advances in Design Automation. Vol. 1. pp.171–177.
- [24] Salisbury, J.K., Craig, J.J. (1982): *Articulated hands: force control and kinematics issues*. The International Journal of Robotics Research. Vol. 1, No. 1. pp.4–17.
- [25] Wenger, P., Chablat, D. (1997): *Definition sets for the direct kinematics of parallel manipulators*. Proceedings of the International Conference on Advanced Robotics.

Annexe A

Plans du mécanisme pour l'orientation de caméras multiples

Cette annexe présente dans une première section les plans du prototype réalisé pour l'orientation de caméras multiples, le MOCa. Viennent ensuite dans une dernière section des vues en trois dimensions afin de compléter la représentation.

A.1 Plans

A.2 Vues 3D

Annexe B

Plans du mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature

Cette annexe présente dans une première section les plans du prototype réalisé pour l'orientation d'une caméra miniature, l'Oeil Agile 2. Viennent ensuite dans une dernière section des vues en trois dimensions afin de compléter la représentation.

B.1 Plans

B.2 Vues 3D

Annexe C

Spécifications des composantes

C.1 Ensemble moteur MOCa et Oeil Agile 2

Le moteur choisi est le moteur *Micromo* 3557K024CR et les accessoires du moteur sont l'encodeur *Hewlett-Packard* HEDS5540A06, un adaptateur X464C et le frein X0727C. Les spécifications de ces composantes apparaissent sur les prochaines pages.

C.2 Ensemble moteur CVD

Le moteur sélectionné pour l'application CVD est le *Micromo* DC0816, un des plus petit moteur disponible sur le marché.

C.3 Roulements

Les roulements choisis sont des roulements SKF dont les données sont résumées dans les tableaux suivants:

Roulement	WAX1/8
Diamètre intérieur	0.125 po
Diamètre extérieur	0.25 po
Épaisseur	0.09375 po

Tableau C.1: Dimensions du roulement SKF-WAX1/8.

Roulement	WX1/8
Diamètre intérieur	0.125 po
Diamètre extérieur	0.3125 po
Épaisseur	0.109375 po

Tableau C.2: Dimensions du roulement SKF-WX1/8.

Annexe D

Termes inertiels et dimensions des prototypes

D.1 Mécanisme pour l'orientation de caméras multiples

D.1.1 Termes inertiels

13.74533	0.5525	0.0231
0.05525	7.883693	0.03545
0.0231	0.2606	9.323411

Tableau D.1: Matrice d'inertie de l'organe terminal MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).

0.569258	0.24328	0
0.24328	0.756467	0
0	0	1.317099

Tableau D.2: Matrice d'inertie de la membrure distale MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).

1.24244	0	0
0	2.11973	0
0	0	3.34407

Tableau D.3: Matrice d'inertie de la membrure proximale 1 MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).

1.50574	0.69759	0
0.69759	1.13788	0
0	0	2.63327

Tableau D.4: Matrice d'inertie de la membrure proximale 2 MOCa ($X10^{-4} \text{ m}^4$).

D.1.2 Position du centre de masse p/r au centre géométrique

Les axes sont définis selon chaque système choisi pour le diagramme des forces pour chaque membrure. Cette dimension est représentée dans les calculs par l_{indice} où l'indice est accordé selon la membrure en question.

0.003335818	0.00662247	0.01350811
-------------	------------	------------

Tableau D.5: Position du C.M. de l'organe terminal MOCa (m).

0.03980446	0.06505191	0
------------	------------	---

Tableau D.6: Position du C.M. de la membrure distale MOCa (m).

0.04698040	0	0
------------	---	---

Tableau D.7: Position du C.M. de la membrure proximale 1 MOCa (m).

0.04717383	0.05574744	0
------------	------------	---

Tableau D.8: Position du C.M. de la membrure proximale 2 MOCa (m).

D.1.3 Position des liaisons p/r au centre géométrique

Cette dimension est la distance du centre géométrique à chacune des positions des contacts aux liaisons des membrures. Son symbole dans les calculs est L_{indice} où l'indice est accordé selon la membrure en question. Ici encore les axes sont définis selon chaque système choisi pour le diagramme des forces pour chaque membrure.

0.041275	0.0492125	0
----------	-----------	---

Tableau D.9: Position des liaisons de l'organe terminal MOCa (m).

0.073025	0.0492125	0
----------	-----------	---

Tableau D.10: Position des liaisons de la membrure distale MOCa (m).

0.092075	0.041275	0
----------	----------	---

Tableau D.11: Position des liaisons de la membrure proximale 1 MOCa (m).

0.079375	0.073025	0
----------	----------	---

Tableau D.12: Position des liaisons de la membrure proximale 2 MOCa (m).

D.2 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature

D.2.1 Termes inertiels

1.3413	0.0	-0.0000524
0.0	1.383	-0.0000866
-0.0000524	-0.0000866	0.45815

Tableau D.13: Matrice d'inertie de l'organe terminal OA2 ($X10^{-5} \text{ m}^4$).

0.365	0.2493	0.0
0.2493	1.193	0.0
0.0	0.0	1.536

Tableau D.14: Matrice d'inertie de la membrure distale OA2 ($X10^{-5} \text{ m}^4$).

0.6282	0.0	0.0
0.0	1.164	-0.0000909
0.0	-0.0000909	1.755

Tableau D.15: Matrice d'inertie de la membrure proximale 1 OA2 ($X10^{-5} \text{ m}^4$).

3.404	0.0	0.0
0.0	2.083	0.0
0.0	0.0	5.44

Tableau D.16: Matrice d'inertie de la membrure proximale 2 OA2 ($X10^{-5} \text{ m}^4$).

D.2.2 Position du centre de masse p/r au centre géométrique

Les axes sont définis selon chaque système choisi pour le diagramme des forces pour chaque membrure. Cette dimension est représentée dans les calculs par l_{indice} où l'indice est accordé selon la membrure en question.

0	0.000487	0.01213
---	----------	---------

Tableau D.17: Position du C.M. de l'organe terminal OA2 (m).

0.02667	0.01689	0
---------	---------	---

Tableau D.18: Position du C.M. de la membrure distale OA2 (m).

0.0195	0	0
--------	---	---

Tableau D.19: Position du C.M. de la membrure proximale 1 OA2 (m).

0	0.0375	0
---	--------	---

Tableau D.20: Position du C.M. de la membrure proximale 2 OA2 (m).

D.2.3 Position des liaisons p/r au centre géométrique

Cette dimension est la distance du centre géométrique à chacune des positions des contacts aux liaisons des membrures. Son symbole dans les calculs est L_{indice} où l'indice est accordé selon la membrure en question. Ici encore les axes sont définis selon chaque système choisi pour le diagramme des forces pour chaque membrure.

0.0234	0.0234	0
--------	--------	---

Tableau D.21: Position des liaisons de l'organe terminal OA2 (m).

0.06508	0.0234	0
---------	--------	---

Tableau D.22: Position des liaisons de la membrure distale OA2 (m).

0.0508	0.0234	0
--------	--------	---

Tableau D.23: Position des liaisons de la membrure proximale 1 OA2 (m).

0.0524	0.06508	0
--------	---------	---

Tableau D.24: Position des liaisons de la membrure proximale 2 OA2 (m).

Annexe E

Essais dynamiques

E.1 Mécanisme pour l'orientation de caméras multiples

Cette section présente les résultats de tests théoriques sur une trajectoire contraignante afin de tester les actionneurs choisis. Cette trajectoire est un déplacement d'un degré en 30 ms selon la direction la plus contraignante, c'est-à-dire un départ à $\phi_1 = -90$ degrés et $\phi_2 = 0$ degrés et une élévation selon ϕ_2 .

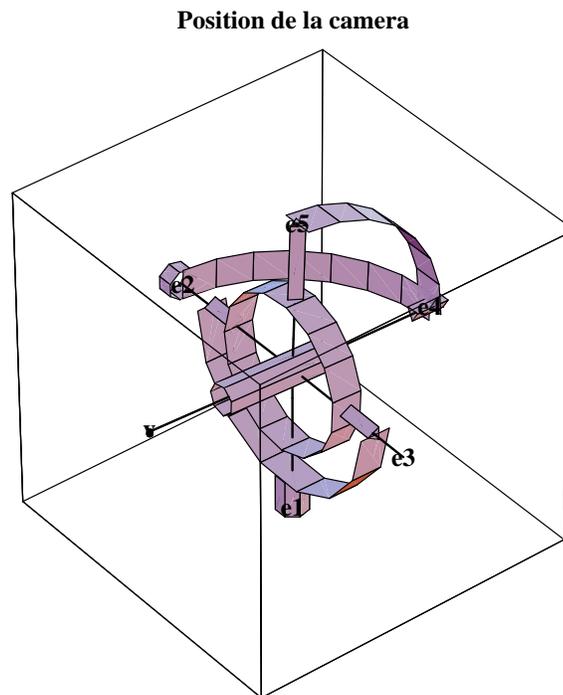


Figure E.1: Trajectoire.

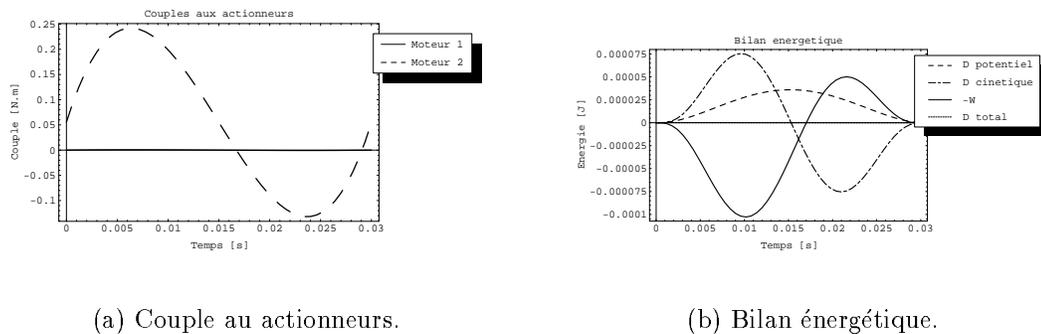
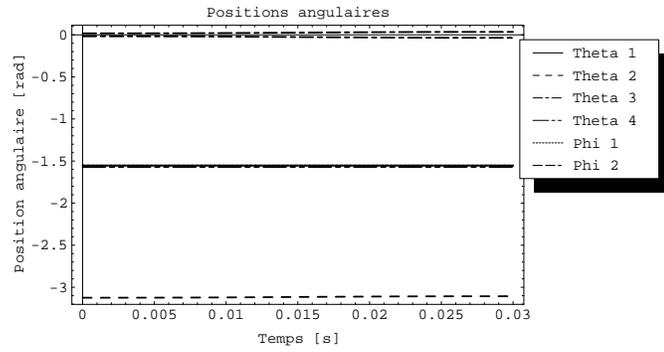
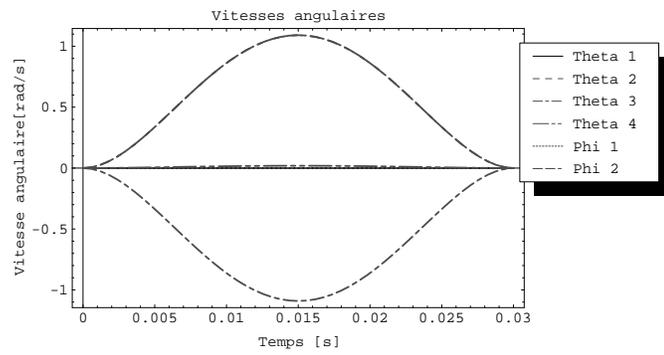


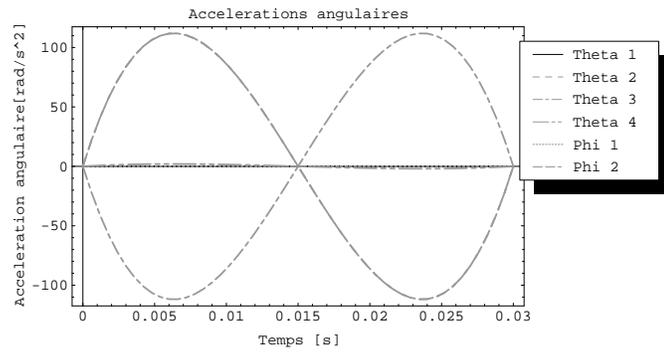
Figure E.2: Dynamique de la trajectoire.



(a) Position.

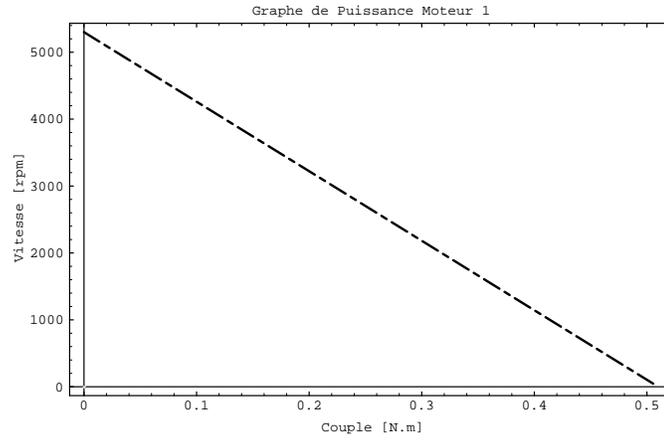


(b) Vitesse.

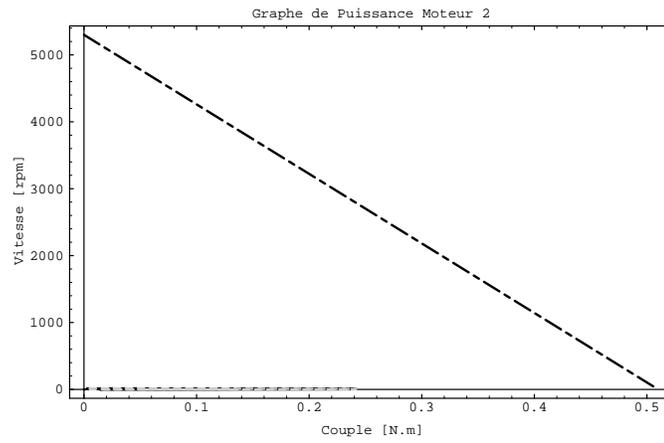


(c) Accélération.

Figure E.3: Variables cinématiques des articulations.



(a) Actionneur 1.



(b) Actionneur 2.

Figure E.4: Puissances aux actionneurs.

E.2 Mécanisme pour l'orientation d'une caméra miniature

On présente aussi les résultats de tests théoriques sur une trajectoire contraignante afin de tester les actionneurs choisis pour ce mécanisme. La trajectoire est différente au niveau où le $\Delta\phi_2 = 90$ degrés.

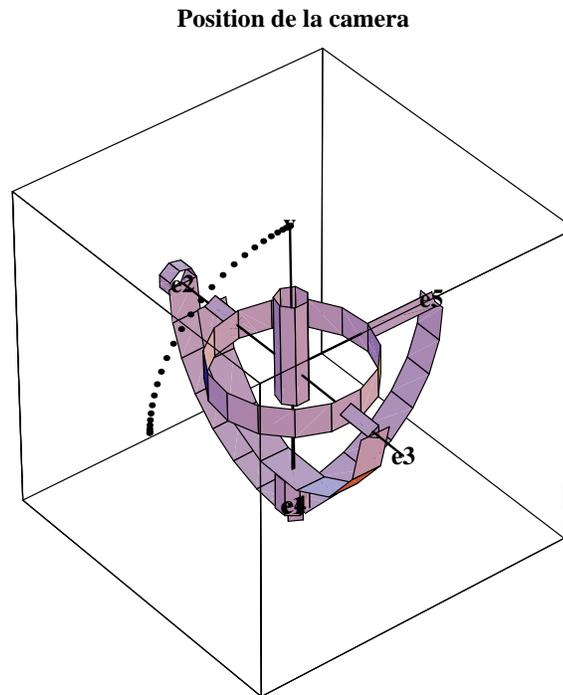
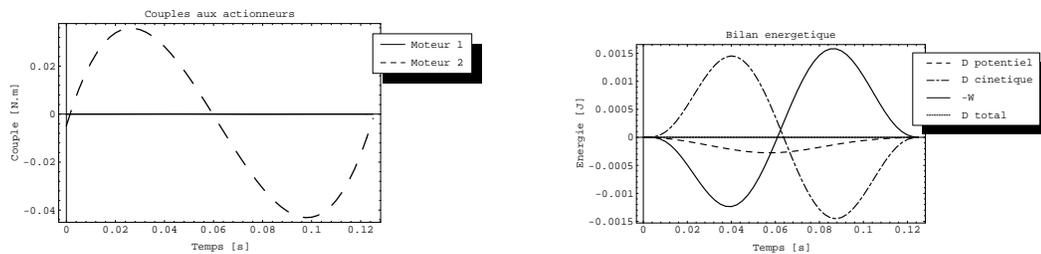


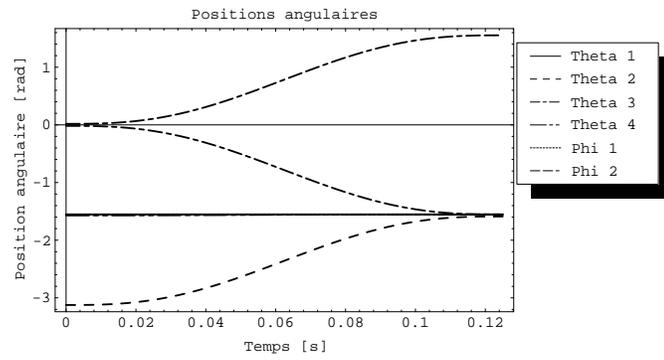
Figure E.5: Trajectoire.



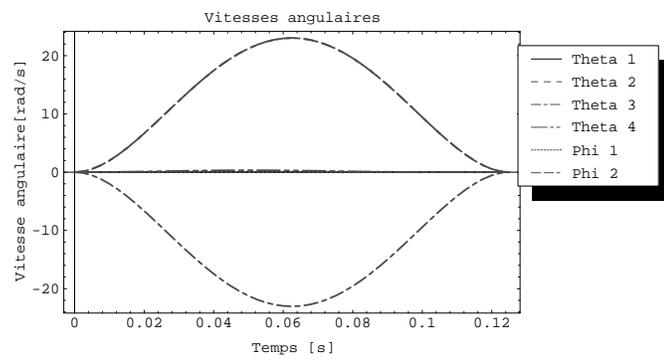
(a) Couple au actionneurs.

(b) Bilan énergétique.

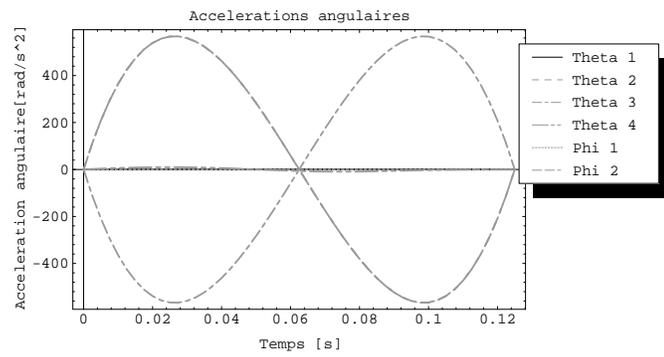
Figure E.6: Dynamique de la trajectoire.



(a) Position.

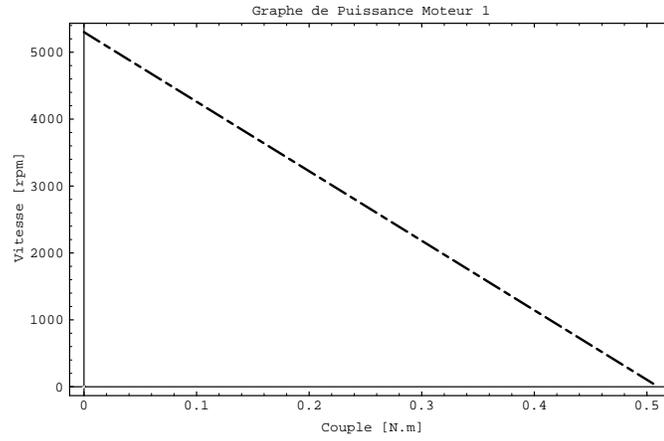


(b) Vitesse.

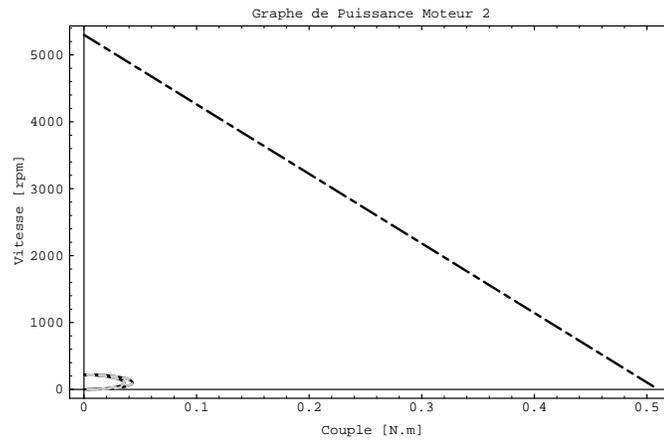


(c) Accélération.

Figure E.7: Variables cinématiques des articulations.



(a) Actionneur 1.



(b) Actionneur 2.

Figure E.8: Puissances aux actionneurs.