

GABRIEL CÔTÉ

**ANALYSE ET CONCEPTION DE MÉCANISMES
PARALLÈLES ACTIONNÉS PAR CÂBLES**

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

SEPTEMBRE 2003

Résumé

Ce mémoire présente d'abord les définitions de base, la cinématique et la dynamique des manipulateurs à câbles et explique leurs différences fondamentales par rapport aux autres types d'actionnement conventionnels.

Ensuite, on étudie de façon analytique, avec une approche vectorielle, les équations reliées aux frontières de l'espace de travail de ces types de mécanismes. On traite les mécanismes à câbles pouvant comprendre des liens passifs dans les cas plans à 2 et 3 ddl et spatiaux à 3 et 6 ddl.

Par la suite, on développe des méthodes numériques pour calculer des aires (cas 2d) ou volumes (cas 3d) des espaces atteignables. Finalement, on propose des critères d'optimisation et des modèles d'optimisation de mécanismes à câbles, lesquels permettent de présenter des exemples de mécanismes à câbles intéressants dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Gabriel Côté

Clément Gosselin

Avant-propos

À l'été 1998, j'ai fait un stage au laboratoire de robotique de l'université Laval. Rapidement, je me suis rendu compte de la qualité exceptionnelle de cette équipe et de la chance que j'avais. Aussi, à l'été 2001, en commençant ma maîtrise au laboratoire de robotique, je savais que j'allais avoir le privilège d'être entouré et appuyé par des collègues remarquables. Je tiens à remercier d'abord mon directeur de recherche, M. Clément M. Gosselin. Il a été exceptionnellement disponible et m'a conseillé de façon très judicieuse tout au long de ma maîtrise.

Je veux remercier aussi Thierry Laliberté, qui est toujours disponible et qui a travaillé de façon exceptionnelle dans la construction du prototype de mécanisme à câble du laboratoire. Je remercie aussi Boris Mayer St-Onge qui m'a grandement aidé par sa connaissance impressionnante de logiciels techniques (*Matlab*, *Maple*, *Adams*, *Kadmos*) et utilitaires (*Latex* et *Linux* en général).

Je remercie aussi tous les membres du laboratoire pour leur aide et leur agréable compagnie pendant ces deux années de ma maîtrise.

Mes derniers remerciements, et non les moindres, vont à mes parents, qui ont toujours eu confiance en moi, et qui m'ont appuyé dans mes études tout au long de ma vie.

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	x
Introduction	1
1 Définitions de bases, cinématique et dynamique	3
1.1 Généralités	3
1.2 Système plan ($d = 3$)	5
1.3 Système spatial ($d = 6$)	6
1.4 Définitions	7
1.5 Géométrie et cinématique	8
1.5.1 Système plan ($d = 3$)	9
1.5.2 Système spatial ($d = 6$)	10
2 Dynamique des mécanismes à câbles	12
2.1 Dérivation des équations de force	13
2.1.1 Note sur la dynamique et la dynamique inverse	15
2.2 Interprétation géométrique des frontières de l'espace atteignable	15
2.2.1 Cas du mécanisme plan à 2 ddl	15
2.2.2 Cas du mécanisme plan 3 ddl	16

2.3	Expressions des lieux d'équilibre : le vecteur des conditions dynamiques	19
3	Les frontières de l'espace atteignable : le cas plan	20
3.1	Frontières de singularités : cas plan	21
3.2	Frontières d'équilibre : méthode de résolution	21
3.3	Mécanisme plan à 2 ddl	22
3.3.1	Mécanisme plan à 2-ddl sans liaison passive	23
3.3.2	Mécanisme plan à 2-ddl avec des ressorts	23
3.3.3	Mécanisme plan à 2 ddl avec des câbles passifs à tension constante	25
3.3.4	Considérations générales pour les mécanismes plans à 2 ddl	26
3.4	Mécanisme plan à 3 ddl	27
3.4.1	Mécanisme plan à 3 ddl sans liaison passive	28
3.4.2	Mécanisme plan à 3 ddl avec des ressorts	28
3.4.3	Mécanisme plan à 3 ddl avec des câbles passifs à tension constante	29
3.4.4	Considérations générales sur les mécanismes plan à 3 ddl	30
3.5	Exemples de courbes d'équilibre de mécanismes à 2 ddl	31
3.5.1	Mécanismes à 2 ddl avec ressorts de longueur libre nulle	31
3.5.2	Mécanismes à 2 ddl avec ressorts de longueur libre arbitraire	32
3.5.3	Mécanismes à 2 ddl avec liens passifs à tension constante	33
3.6	Exemples de courbes d'équilibre de mécanismes à 3 ddl	34
3.6.1	Mécanismes à 3 ddl sans lien passif	35
3.6.2	Mécanismes à 3 ddl avec ressorts de longueur libre nulle	36
3.6.3	Mécanismes à 3 ddl avec ressorts de longueur libre arbitraire	38
3.6.4	Mécanismes à 3 ddl avec liens passifs à tension constante	38
3.7	Résumé du chapitre	41
4	Méthodes de calcul de l'espace atteignable : cas plan	44
4.1	Calcul de l'aire exacte	45
4.1.1	Théorème de Gauss	45
4.1.2	Sommation d'intégrales	46
4.1.3	Algorithme de découpe pour le croisement avec un espace limité	47
4.2	Découpage numérique avec tests vectoriels simplifiés	50
4.3	Découpage numérique progressif	51
4.4	Considérations générales	52
5	Critères d'optimisation et optimisation : cas plan	54
5.1	Algorithme d'optimisation	55
5.2	Critères d'optimisation	55

5.2.1	Aire pondérée	55
5.2.2	Mobilité ou volume atteignable plan	56
5.3	Méthodologie d'optimisation	57
5.4	Modèle d'optimisation et justifications	58
5.4.1	Critère de l'aire pondérée	59
5.4.2	Critère de la mobilité pondérée	61
5.5	Commentaires sur les optimisations	63
6	Les frontières de l'espace atteignable : le cas tridimensionnel	64
6.1	Frontières associées aux singularités	65
6.2	Frontières d'équilibre	65
6.2.1	Mécanisme spatial à 3 ddl en positionnement	65
6.2.1.1	Mécanisme spatial à 3 ddl sans liaison passive	66
6.2.1.2	Mécanisme spatial à 3 ddl avec ressorts (général)	67
6.2.1.3	Mécanisme spatial à 3 ddl avec ressorts de longueur libre nulle	68
6.2.1.4	Mécanisme spatial à 3 ddl avec câbles passifs à tension constante	68
6.2.2	Considérations générales sur les mécanismes spatiaux à 3 ddl	68
6.2.3	Mécanisme spatial à 6 ddl	69
6.2.3.1	Mécanisme spatial à 6 ddl sans liaison passive	71
6.2.3.2	Mécanisme spatial à 6-ddl avec liaisons passives	71
6.2.4	Considérations générales mécanismes spatial à 6 ddl	72
6.3	Exemples de frontières d'équilibre	73
6.3.1	Mécanismes à 3 ddl en positionnement	74
6.3.1.1	Avec ressorts à longueur libre nulle	74
6.3.1.2	Avec ressorts à longueur libre arbitraire	74
6.3.1.3	Avec câbles passifs à tension constante	76
6.3.2	Mécanismes à 6ddl	78
6.4	Résumé du chapitre	78
7	Méthodes de calcul de l'espace atteignable pour des mécanismes spatiaux	82
7.1	Calcul du volume de l'espace atteignable à orientation constante	83
7.2	Calcul du volume de l'espace atteignable en orientation à position constante	84
8	Critères d'optimisation et optimisation : cas spatial à 6 ddl	86
8.1	Algorithme d'optimisation	87

8.2	Critères d'optimisation	87
8.2.1	Volume de l'espace atteignable à orientation constante	87
8.2.2	Volume moyen de l'espace atteignable avec plusieurs conditions dynamiques	88
8.3	Méthodologie d'optimisation	88
8.4	Modèle d'optimisation utilisé	89
8.4.1	Géométrie du modèle d'optimisation	89
8.4.2	Les caractéristiques dynamiques de la plate-forme et des liens passifs	92
8.4.2.1	Critère du volume	93
8.4.2.2	Critère du volume pondéré	94
8.5	Commentaires sur les optimisations	94
Conclusion		96
Bibliographie		98
A La nature linéaire de certaines courbes d'équilibre		100
A.1	Mécanisme à 2ddl avec des ressorts de longueur libre nulle	101
A.1.1	Mécanisme avec ressorts de longueur libre nulle	101
A.2	Mécanisme à 3 ddl spatial avec des ressorts de longueur libre nulle	102
A.2.1	Mécanisme à 3 ddl spatial sans liens passifs	102
A.2.2	Mécanisme à 3 ddl spatial avec des ressorts à longueur libre nulle	103
B Remarques sur les quadratiques et les cubiques		104
B.1	Forme paramétrique des ellipses et des hyperboles	105
B.1.1	Ellipse	105
B.1.1.1	Méthode de résolution	106
B.1.1.2	Exemple	108
B.1.2	Hyperbole	108
B.1.2.1	Méthode de résolution	109
B.1.2.2	Exemple	111
B.2	Calcul des intersections des cubiques	112
B.2.1	Exemples	112
C Critères de performances des mécanismes à câbles		115
C.1	Mécanismes à câbles plans	116
C.1.1	Indice de jeu dynamique	116
C.1.2	Indices combinés avec la dextérité	117

C.2 Mécanismes à câbles spatiaux	118
C.2.1 Indice de jeu dynamique	118
C.2.2 Autres indices de performance	119
D Tableau récapitulatif des degrés des polynômes d'équilibre	121
D.1 Tableau récapitulatif sur les degrés des polynômes	122

Liste des tableaux

3.1	Architecture utilisée comme exemple avec des ressorts de longueur libre nulle.	31
3.2	Architecture utilisée comme exemple avec des ressorts de longueur libre arbitraire.	33
3.3	Architecture utilisée comme exemple avec des câbles à tension constante.	36
3.4	Architecture sans câbles passifs (figure 3.7)	36
3.5	Architecture avec des ressorts de longueur libre nulle (figure 3.8). . . .	38
3.6	Architecture avec des ressorts de longueur libre arbitraire (figure 3.9). .	40
3.7	Architecture avec des liens passifs à tension constante.	40
4.1	Caractéristiques du mécanisme utilisé comme exemple avec l’algorithme de découpage.	49
4.2	Comparaison entre les méthodes de calcul de l’aire de l’espace atteignable.	52
5.1	Résultats des optimisations avec aire pondérée.	60
5.2	Résultats des optimisations avec mobilité pondérée.	62
6.1	Architecture avec des ressorts à longueur libre nulle (figure 6.3).	75
6.2	Architecture avec des ressorts à longueur libre arbitraires (figure 6.4). .	75
6.3	Architecture avec des liens passifs en tension.	78
6.4	Architecture d’un mécanisme spatial à 6 ddl (voir figure 6.6).	79
8.1	Résultats des optimisations du volume statique à orientation de référence.	93
8.2	Résultats des optimisations du volume moyenné à orientation nulle. . .	94

D.1	Degrés de polynômes vérifiés de façon analytique.	122
D.2	Degrés de polynômes vérifiés de façon numérique pour N liens passifs. .	123

Liste des figures

1.1	Notation pour la liaison i d'un mécanisme plan.	5
1.2	Notation pour la liaison i d'un mécanisme spatial.	6
2.1	Schéma des triangles.	16
2.2	Représentation de l'espace de travail dynamique pour une combinaison de trois câbles.	18
3.1	Illustration schématique du mécanisme à 2 ddl plan.	22
3.2	Illustration d'un ressort à force constante.	25
3.3	Illustration schématique du mécanisme à 3 ddl plan.	27
3.4	Les frontières d'équilibre avec ressorts à longueur libre nulle ($m = 1kg$).	32
3.5	Les frontières d'équilibre avec ressorts à longueur libre arbitraire ($m = 0.1kg$).	34
3.6	Les frontières d'équilibre avec câbles passifs à tension constante ($m = 1kg$).	35
3.7	Les frontières d'équilibre sans câbles passifs.	37
3.8	Les frontières d'équilibre avec des ressorts de longueur libre nulle.	39
3.9	Les frontières d'équilibre avec des ressorts de longueur libre arbitraire.	41
3.10	Les frontières d'équilibre avec câbles passifs à tension constante.	42
4.1	Illustration du principe de soustraction d'aires avec des fonctions.	47
4.2	Illustration du calcul de l'espace dans une sous-zone utile.	48
4.3	Illustration de l'algorithme de découpage(espace atteignable en régime statique).	49
4.4	Illustration de l'aire mesurée par découpage numérique radial.	51

4.5	Illustration de l'aire mesurée par découpage numérique progressif radial.	52
5.1	Illustration d'un volume en X, Y, ϕ	57
5.2	Illustration des paramètres architecturaux pour l'optimisation.	59
5.3	Le résultat de l'optimisation.	60
5.4	Caractéristiques du mécanisme obtenu par optimisation de l'aire de l'espace atteignable moyenne.	61
5.5	Le résultat de l'optimisation.	62
5.6	Caractéristiques du mécanisme obtenu par optimisation de l'aire de l'espace atteignable moyenne.	63
6.1	Illustration schématique d'un mécanisme spatial à 3-ddl en positionnement.	66
6.2	Illustration schématique d'un mécanisme spatial à 6 ddl.	69
6.3	Les frontières d'équilibre avec des ressorts à longueur libre nulle.	76
6.4	Les frontières d'équilibre avec des ressorts à longueur libre arbitraire.	77
6.5	Les frontières d'équilibre avec câbles passifs à tension constante.	80
6.6	Les frontières d'équilibre avec des ressorts de longueur libre arbitraire.	81
7.1	Espace atteignable dans l'espace des coordonnées angulaires <i>tilt and torsion</i> .	85
8.1	Vue d'ensemble de la géométrie du mécanisme à câbles à 6ddl spatial.	90
8.2	Représentation géométrique des variables d'optimisation p_1, p_2 et p_3 .	91
8.3	Les dimensions de l'effecteur considéré pour le calcul des propriétés dynamiques.	92
8.4	Le mécanisme obtenu par optimisation du volume de l'espace atteignable statique.	93
8.5	Le mécanisme obtenu par optimisation du volume de l'espace atteignable moyenné.	95
B.1	Ellipse dont l'équation est mise sous forme paramétrique.	109
B.2	Hyperbole dont l'équation est mise sous forme paramétrique.	111
B.3	Premier exemple d'intersections entre deux cubiques.	113
B.4	Second exemple d'intersections entre deux cubiques.	114
C.1	Illustration des angles à considérer pour l'indice de jeu dynamique.	117
C.2	Illustration de la mesure proposée de l'indice de jeu dynamique.	119

Introduction

L'étude des manipulateurs parallèles est un domaine encore jeune. Néanmoins, plusieurs laboratoires de recherche s'intéressent à ce champ d'étude et on observe des progrès considérables [9].

En octobre 2002, l'Université Laval accueillait le congrès "*Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for parallel Mechanisms and Manipulators*" [6]. Cet évènement, réunissant une centaine de participants des milieux académiques et de l'industrie, illustre une ouverture grandissante de l'industrie pour ces types de mécanismes ainsi que de nouvelles perspectives intéressantes.

Parmi les architectures de mécanismes parallèles, les mécanismes à câbles offrent des avantages indéniables. Tout d'abord, l'utilisation de câbles permet une amplitude de mouvement incomparable à celle des autres types d'actionneurs comme les vérins. Cela est évidemment dû au fait qu'ils sont flexibles et peuvent être enroulés. Aussi, la nature des câbles fait qu'ils sont beaucoup plus légers que la plupart des actionneurs conventionnels et aussi moins coûteux. Ils sont aussi souples et cela constitue une sorte de protection naturelle lors d'une interférence ou d'une collision. Ces avantages ont notamment mené à la fabrication de mécanismes aux caractéristiques dynamiques intéressantes et aux débattements importants, comme le mécanisme "Robocrane" développé au NIST [3], un robot ultra-rapide [8] et la caméra aérienne connue sous le nom de "Skycam" [7]. Plus récemment, d'autres concepts de mécanismes fort intéressants utilisant des

câbles ont été proposés, comme un mécanisme hybride [2], ou un mécanisme à câble pour utiliser dans un tunnel d'essais aérodynamique [4].

L'utilisation de câbles offre donc des avantages, mais certainement aussi des inconvénients. Tout d'abord, les câbles ne peuvent être contrôlés que lorsqu'ils sont en tension. Cette caractéristique impose des différences majeures dans la caractérisation de l'espace atteignable des mécanismes à câbles. Tel que détaillé dans [12], l'espace atteignable ne dépend plus seulement de la géométrie du mécanisme, mais aussi des conditions dynamiques voulues. De cette caractéristique découle le fait que l'on doit utiliser la redondance d'actionnement si on veut contrôler pleinement tous les degrés de liberté, et donc une plus grande complexité de contrôle. Une alternative possible à la redondance d'actionnement est l'utilisation de liens passifs. Ceux-ci peuvent en effet compenser en partie l'unilatéralité d'actionnement.

Une étude fondamentale et systématique des mécanismes à câbles a été faite par Barrette [13] principalement sur la caractérisation de l'espace atteignable des manipulateurs à câbles. Dans cette étude il a été établi de façon analytique les frontières de l'espace de travail de certains types de manipulateurs à câbles plans et spatiaux. Ce mémoire se veut en partie la continuation de ce travail. Les chapitres 1 et 2 expliquent les notions de base sur la cinématique et la dynamique des manipulateurs à câbles. On traite aussi les frontières de l'espace atteignable avec une approche vectorielle pour les mécanismes plans (chapitre 3) et spatiaux (chapitre 6). Comme l'utilisation de liens passifs peut être une alternative à la redondance d'actionnement, les mécanismes plans et spatiaux comprenant de tels liens sont aussi étudiés. Ainsi, on considère les liens passifs du type ressort et câble à tension constante, car le premier a un comportement bien connu et le second offre des avantages certains en ce qui a trait au débattement et à la simplicité d'implantation.

Pour les mécanismes plans et spatiaux respectivement on illustre ensuite des méthodes de calcul de l'espace atteignable, et on propose des critères et des modèles d'optimisation. Ce mémoire est donc la continuation de l'étude des frontières de l'espace atteignable proposée dans [13] (par G. Barrette) , et ensuite une étude de l'utilisation de ces frontières dans la caractérisation des espaces atteignables ainsi que l'utilisation de cette caractérisation comme critères de design de manipulateurs à câbles.

Chapitre 1

Définitions de bases, cinématique et dynamique

Dans ce chapitre, il est présenté les notions de base sur les manipulateurs parallèles actionnés par câbles et la notation utilisée tout au long de ce mémoire. Un bref rappel du travail accompli par Barrette [13] est présenté.

1.1 Généralités

Un manipulateur parallèle est un mécanisme constitué de plusieurs chaînes cinématiques entre une base fixe et un effecteur. À l'opposé, un manipulateur sériel n'est

composé que d'une seule chaîne cinématique entre une base fixe et un effecteur. Un manipulateur parallèle actionné par câbles est donc un manipulateur parallèle dont les chaînes cinématiques reliant la base à l'effecteur incluent des câbles. La principale caractéristique qui distingue ce type de manipulateur des manipulateurs parallèles conventionnels est l'unilatéralité de l'actionnement. En effet, de par leur nature les câbles ne peuvent que travailler en tension. Aussi, il sera montré que cette caractéristique inhérente aux câbles leur donne des frontières d'espace atteignable très différentes de celles des manipulateurs parallèles conventionnels de type Gough-Stewart par exemple. Un manipulateur parallèle actionné par câbles est défini par un corps mobile appelé l'effecteur, relié à une base fixe en des points d'attache fixes à la base et sur l'effecteur. Les câbles reliant les points d'attache constituent soit des liens passifs soit des liens actifs. Les liens actifs sont les câbles reliés à des actionneurs et les liens passifs peuvent être soit des ressorts, soit des ressorts à force constante, ou bien tout autre type de lien dont le contrôle (loi de commande) est indépendant des liens actionnés.

Des hypothèses sont faites dans le cadre de l'analyse des manipulateurs à câbles. Les analyses de mécanismes à câbles présentées considèrent le câble comme une ligne droite. Les déformations dues à la masse du câble ou à d'autres forces externes (aérodynamiques entre autre) sont donc négligées. Cette approximation est très exacte pour l'analyse de mécanismes ayant des débattements de faibles à moyens. Aussi, dans les analyses, les débattements maximums des câbles ne sont pas considérés.

Par convention, les unités du système international (SI) sont utilisées. Sauf avis contraire, donc, les unités de temps, longueurs, masses, moments d'inertie, forces et moments de force sont mesurés en seconde (s), mètre (m), kilogramme (kg), kilogramme-mètre carré ($kg \cdot m^2$), Newton (N) et Newton-mètre ($N \cdot m$) respectivement. Sauf avis contraire, les angles seront exprimés en radians.

Par convention, une lettre minuscule en caractère gras désignera toujours un vecteur, tandis qu'une majuscule en caractère gras désignera une matrice. Aussi, mis à part certains paramètres utilisés ponctuellement, chaque symbole sera associé jusqu'à la toute fin à l'entité qu'il désigne. Par exemple, d , n et k désigneront respectivement le nombre de degrés de liberté, le nombre de câbles et le nombre de liaisons actives d'un mécanisme.

1.2 Système plan ($d = 3$)

Pour un système plan (figure 1.1), l'axe Y du repère fixe est considéré vertical (parallèle au champ gravitationnel). On désigne par P_i le $i^{\text{ème}}$ point d'attache sur la base et par V_i le $i^{\text{ème}}$ point d'attache sur la plate-forme. La notation suivante est utilisée :

- \mathbf{p}_i : vecteur position du point P_i (composantes a_i et b_i dans le repère fixe)
- \mathbf{v}_i : vecteur position du point V_i (composantes x_i et y_i dans le repère mobile)
- \mathbf{c} : vecteur position du point C , origine du repère mobile
(composantes x et y dans le repère fixe)
- ϕ : angle d'orientation du repère mobile par rapport au repère fixe
- ρ_i : distance entre P_i et V_i (longueur de la liaison i)

La configuration de l'effecteur est entièrement définie par le vecteur \mathbf{c} et l'angle ϕ .

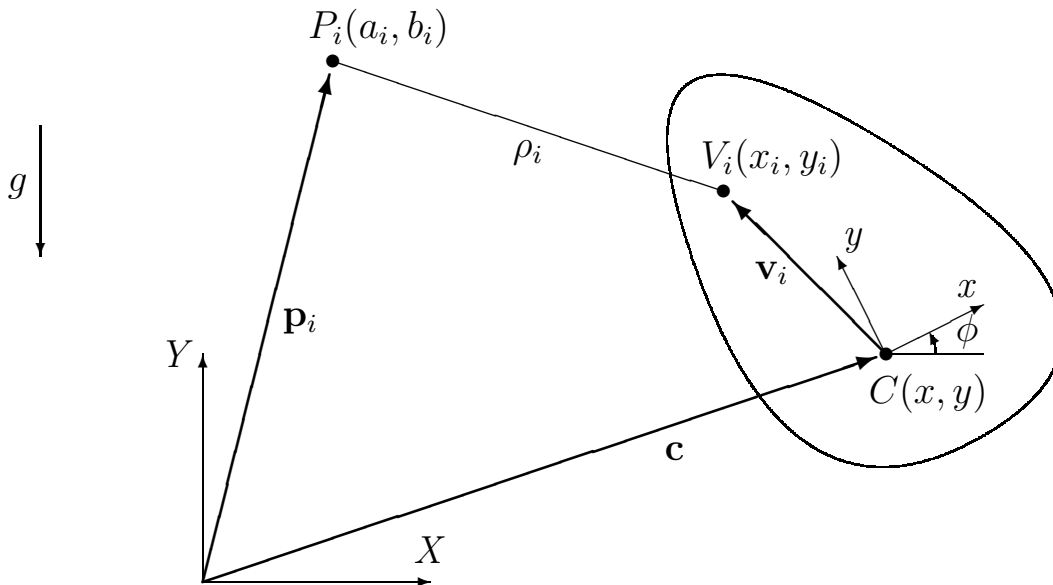


FIG. 1.1 – Notation pour la liaison i d'un mécanisme plan.

1.3 Système spatial ($d = 6$)

Pour un système spatial (figure 1.2), l'axe Z du repère fixe est considéré vertical et la notation suivante est utilisée :

- \mathbf{p}_i : vecteur position du point P_i (composantes a_i, b_i et c_i dans le repère fixe)
- \mathbf{v}_i : vecteur position du point V_i (composantes x_i, y_i et z_i dans le repère mobile)
- \mathbf{c} : vecteur position du point C , origine du repère mobile
(composantes x, y et z dans le repère fixe)
- \mathbf{Q} : matrice d'orientation du repère mobile par rapport au repère fixe
- ρ_i : distance entre P_i et V_i (longueur de la liaison i)

La configuration de l'effecteur est entièrement définie par le vecteur \mathbf{c} et la matrice \mathbf{Q} .

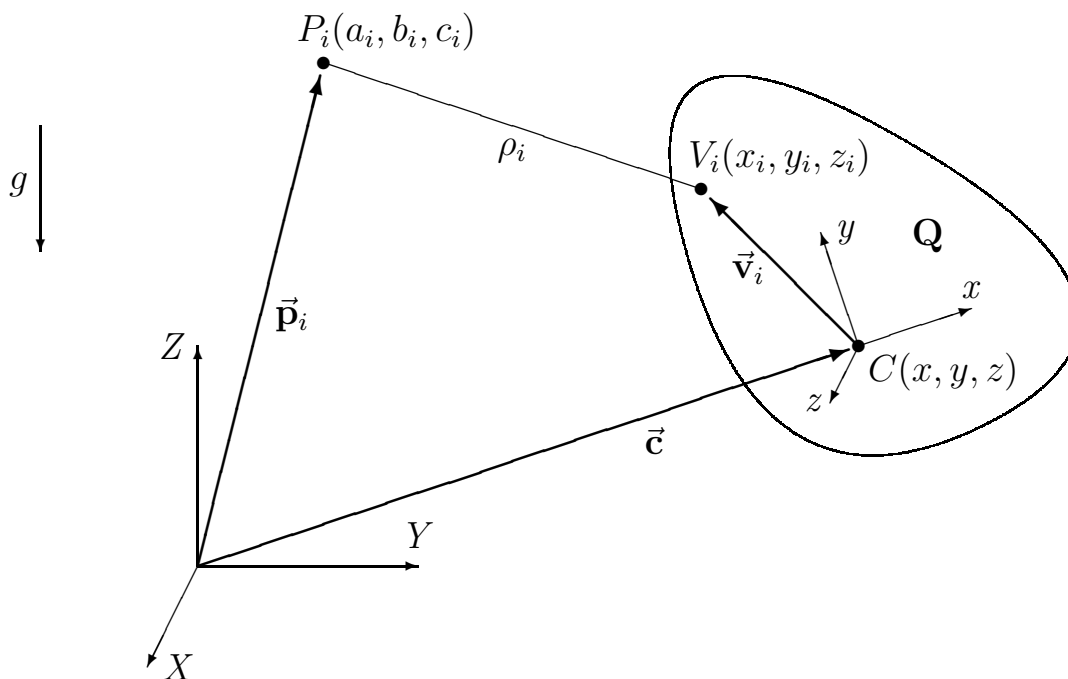


FIG. 1.2 – Notation pour la liaison i d'un mécanisme spatial.

1.4 Définitions

Les définitions suivantes sont introduites pour faciliter la compréhension du texte du mémoire ; certaines d'entre elles seront clarifiées au moment approprié.

EFFECTEUR : Organe terminal d'un mécanisme, d'un robot ou d'un manipulateur.

MÉCANISME PARALLÈLE : Mécanisme dont l'effecteur et la base sont reliés par plusieurs chaînes cinématiques.

REDONDANCE D'ACTIONNEMENT : Un mécanisme est dit à actionnement redondant lorsqu'il possède plus d'actionneurs que de degrés de liberté.

CONFIGURATION : État d'un mécanisme ou pose de tous les corps de ce mécanisme. La configuration d'un mécanisme est habituellement définie par ses variables articulaires ou ses variables cartésiennes.

SINGULARITÉ : Dégénérescence de la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses à l'effecteur d'un manipulateur.

CONFIGURATION SINGULIÈRE : Configuration d'un mécanisme pour laquelle celui-ci est en singularité.

CONDITIONS DYNAMIQUES : Ensemble des accélérations linéaires et angulaires de l'effecteur. Les conditions dynamiques sont définies par trois paramètres dans le plan $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\phi})$, et 9 dans l'espace $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \dot{\omega}, \dot{\omega})$ où ω est le vecteur tridimensionnel des vitesses angulaires de l'effecteur par rapport aux trois axes respectifs du repère fixe.

ESPACE ATTEIGNABLE DYNAMIQUE : Ensemble des configurations du mécanisme permettant de générer les conditions dynamiques requises tout en maintenant les câbles en tension.

CONFIGURATION POLYVALENTE : Configuration dans laquelle le mécanisme peut résister à tout jeu d'efforts externes ou générer tout jeu d'accélération à l'effecteur.

1.5 Géométrie et cinématique

La géométrie et la cinématique générale des manipulateurs parallèles actionnés par câbles est maintenant traitée. Tout d'abord, comme c'est en général le cas pour des mécanismes parallèles conventionnels, le problème géométrique inverse (PGI) des manipulateurs parallèles actionnés par câbles est simple. Pour une position et une orientation donnée de l'effecteur il est possible de trouver la position des points d'attache sur la plate-forme mobile de l'effecteur. Par la suite, les longueurs respectives de chaque lien actionné est simplement la distance du vecteur reliant la base à l'effecteur.

Dans le cas complètement général, le PGI s'exprime :

$$\begin{aligned}
 \rho_i &= \| (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i) \| , \\
 \rho_i^2 &= (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i) , \\
 \rho_i^2 &= \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{p}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i + \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i , \\
 \rho_i^2 &= \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i - 2\mathbf{p}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i + \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i .
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

On peut simplement dériver pour obtenir les relations entre les vitesses et développer pour les mécanismes plans et spatiaux ([12]).

En dérivant par rapport au temps, on obtient, pour chaque actionneur :

$$\rho_i \dot{\rho}_i = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v}_i , \tag{1.2}$$

où $\dot{\rho}_i$ est le taux de variation de la longueur de la liaison i , c'est-à-dire la vitesse articulaire.

L'équation (1.2) représente un système de n équations linéaires qui peut être exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{B} \mathbf{t} , \tag{1.3}$$

où $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ est le vecteur des vitesses articulaires, \mathbf{t} est le vecteur des vitesses de l'effecteur, comprenant les translations et les rotations, et où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont les matrices jacobiennes du système. On a

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & \dot{\rho}_2 & \dots & \dot{\rho}_n \end{bmatrix}^T, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \rho_n \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\left(\mathbf{A}_a\right)_{k \times k} = \text{diag} [\rho_1 \dots \rho_k], \quad \left(\mathbf{A}_r\right)_{(n-k) \times (n-k)} = \text{diag} [\rho_{k+1} \dots \rho_n],$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-1}^T \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix}_{n \times d} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{B}_a\right)_{k \times d} \\ \left(\mathbf{B}_r\right)_{(n-k) \times d} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

où d est le nombre de degrés de liberté du manipulateur et où les indices a et r réfèrent respectivement aux *actionneurs* et aux *ressorts*.

Les rangées \mathbf{b}^T de la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{t} étant différents pour un système plan et un système spatial, ceux-ci sont définis aux deux sections suivantes.

1.5.1 Système plan ($d = 3$)

Dans un espace à deux dimensions, la matrice de rotation est

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

et sa dérivée par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} \mathbf{Q} \dot{\phi} \quad (1.8)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'équation (1.2) devient donc :

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \dot{\phi} - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}_i^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \dot{\phi}, \\ \rho_i \dot{\rho}_i &= (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{c} - \mathbf{p}_i)^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

La rangée \mathbf{b}_i^T de la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{t} de (1.3) sont les suivants :

$$\mathbf{b}_i^T = \left[(\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \quad ((\mathbf{c} - \mathbf{p}_i)^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i) \right]_{1 \times 3}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T. \quad (1.11)$$

1.5.2 Système spatial ($d = 6$)

Dans un espace à trois dimensions, la matrice de rotation \mathbf{Q} est une matrice 3×3 orthogonale. Elle peut être constituée à partir des invariants naturels de la rotation qu'elle représente, à partir des trois angles d'Euler ou de toute autre représentation appropriée. Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \quad (1.12)$$

avec

$$\text{vect}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\omega}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des trois composantes de la vitesse angulaire de l'effecteur par rapport aux trois axes respectifs du repère de base.

L'équation (1.2) devient donc :

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}_i) - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}_i^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}_i), \\ \rho_i \dot{\rho}_i &= (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i \times (\mathbf{c} - \mathbf{p}_i))^T \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La rangée \mathbf{b}_i^T de la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{t} de (1.3) sont les suivants :

$$\mathbf{b}_i^T = \left[\left(\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i \right)^T \quad \left(\mathbf{Q}\mathbf{v}_i \times (\mathbf{c} - \mathbf{p}_i) \right)^T \right]_{1 \times 6}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{t} = \left[\dot{\mathbf{c}}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T \right]^T = \left[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \right]^T. \quad (1.15)$$

Chapitre 2

Dynamique des mécanismes à câbles

Dans ce chapitre, les relations entre les forces aux actionneurs et les efforts à l'effecteur en régime dynamique sont établies pour les mécanismes parallèles plans et spatiaux actionnés par câbles. Il est ensuite expliqué comment on identifie l'espace de travail dynamique, en faisant une union de sous-espaces.

2.1 Dérivation des équations de force

Selon le principe du travail virtuel, on peut écrire

$$-\mathbf{f}^T \delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{x} \quad (2.1)$$

avec

$$\mathbf{f}^T = \left[f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n \right]$$

où f_i est la tension dans la liaison i et où $\boldsymbol{\rho}$ et \mathbf{x} sont respectivement le vecteur des longueurs des câbles et le vecteur des coordonnées cartésiennes (position et orientation) de l'effecteur.

Dans le cas plan,

$$\mathbf{e}^T = \left[F_x \quad F_y \quad \tau \right] = \left[m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T \quad I\ddot{\phi} \right] \quad (2.2)$$

où F_x , F_y et τ sont les forces et le couple appliqués par l'ensemble des câbles et ressorts sur l'effecteur, \mathbf{g} est le vecteur d'accélération gravitationnelle et pointe dans la direction négative de l'axe Y (on considère un plan parallèle à la gravité), $\ddot{\mathbf{c}}$ et $\ddot{\phi}$ sont respectivement le vecteur d'accélération linéaire et le scalaire d'accélération angulaire du centre de masse de l'effecteur et, enfin, m et I sont respectivement la masse de l'effecteur et le moment d'inertie de celui-ci par rapport à son centre de masse. On considère implicitement que le repère mobile attaché à la plate-forme a son origine au centre de masse de celle-ci.

Dans le cas spatial,

$$\mathbf{e}^T = \left[F_x \quad F_y \quad F_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z \right] = \left[m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T \quad (\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^T \right] \quad (2.3)$$

où F_x , F_y , F_z , τ_x , τ_y et τ_z sont les forces et couples appliqués par l'ensemble des câbles et ressorts sur l'effecteur, \mathbf{g} est le vecteur d'accélération gravitationnelle, $\ddot{\mathbf{c}}$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ sont respectivement les vecteurs d'accélération du centre de masse et d'accélération angulaire de l'effecteur et, enfin, m et \mathbf{I} sont respectivement la masse de l'effecteur et le tenseur d'inertie de celui-ci par rapport à son centre de masse. On considère à nouveau que le centre de masse est à l'origine du repère mobile.

De l'équation (1.3), on peut écrire

$$\delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \delta \mathbf{x} \quad (2.4)$$

En substituant cette équation dans (2.1), on obtient

$$-\mathbf{f}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \delta \mathbf{x} = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{x} \quad (2.5)$$

Puisque cette dernière équation doit être satisfaite pour tout vecteur de déplacement cartésien $\delta \mathbf{x}$, on peut écrire

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{f} = \mathbf{e} \quad (2.6)$$

Des équations (1.5) et (1.6) on sait que

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a^T & \mathbf{B}_r^T \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}^{-T} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

et on peut alors décomposer le membre de gauche de (2.6) de la façon suivante :

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{f} = \mathbf{B}_a^T \mathbf{A}_a^{-1} \mathbf{f}_a + \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{f}_r \quad (2.9)$$

où \mathbf{f}_a est le vecteur des forces dans les câbles et \mathbf{f}_r , le vecteur des forces dans les ressorts. L'équation (2.6) devient donc

$$-\mathbf{B}_a^T \mathbf{A}_a^{-1} \mathbf{f}_a + \mathbf{e}_r = \mathbf{e}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{e}_r = -\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{f}_r \quad (2.11)$$

où \mathbf{e}_r est le vecteur des efforts, forces et moments, appliqués par l'ensemble des ressorts sur l'effecteur.

Si les conditions dynamiques et la configuration sont données, les vecteurs \mathbf{e} , \mathbf{f}_r et \mathbf{e}_r sont connus et on obtient finalement une équation de la forme

$$\mathbf{W} \mathbf{f}_a = \mathbf{h} \quad (2.12)$$

avec

$$\mathbf{W}_{d \times k} = -\mathbf{B}_a^T \mathbf{A}_a^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_{d \times 1} = \mathbf{e} - \mathbf{e}_r \quad (2.13)$$

Les éléments de \mathbf{h} correspondent donc aux forces et moments que doivent générer les câbles sur l'effecteur ; ces efforts servent à induire les accélérations désirées à l'effecteur et à reprendre les efforts engendrés par les ressorts.

2.1.1 Note sur la dynamique et la dynamique inverse

Comme les mécanismes à câbles peuvent avoir une redondance d'actionnement, il est possible que la forme de la matrice \mathbf{W} ne soit pas carrée. La détermination des efforts dans les câbles n'est alors pas univoque. Les différentes méthodes pour trouver les forces dans les câbles ne seront pas développées. Les calculs développés sur les espaces atteignables ne nécessitent pas de trouver des configurations de forces optimales, comme cela est expliqué au chapitre 4. En fait, ces frontières ne sont que des configurations géométriques et des conditions dynamiques du mécanisme.

2.2 Interprétation géométrique des frontières de l'espace atteignable

Pour les manipulateurs parallèles conventionnels, l'espace atteignable dépend des limites des actionneurs et des lieux de singularité [16, 17]. Pour les manipulateurs parallèles actionnés par câbles cependant, l'ensemble des configurations que peut atteindre l'effecteur dépend surtout du fait que les câbles ne travaillent qu'en tension. En effet, comme il a été détaillé dans [13], les frontières d'un mécanisme à câbles à d degrés de liberté (ddl) sont soit des lieux de singularité d'un sous-espace de d câbles, soit des frontières d'équilibre d'un sous-espace de $d - 1$ câbles.

2.2.1 Cas du mécanisme plan à 2 ddl

Pour illustrer le concept de singularité et de lieux d'équilibre dans le cas de mécanismes actionnés par câbles plans, on illustre d'abord le cas simple d'un mécanisme plan à 2 ddl en positionnement. Ainsi, on peut facilement visualiser les vecteurs accélérations possibles pour une pose donnée. Dans ce cas, les frontières de l'espace atteignable d'un manipulateur seront les sous-espaces suivants :

- Les lieux d'équilibre à un câble pour chaque câble.
- Les lieux de singularité pour chacune des combinaisons de 2 câbles.

Il est possible de visualiser géométriquement ce qui se passe sur une frontière de singularité ou d'équilibre à 1 câble de façon très simple dans le cas de mécanismes à 2 ddl plans. Soit le vecteur \mathbf{w} donnant la direction de la force que peut exercer un câble (peu importe son amplitude - seule sa direction et son sens importe). Dans le cas d'un manipulateur plan, pour qu'une configuration appartienne à l'espace atteignable, les vecteurs directeurs \mathbf{w} et le vecteur \mathbf{h} correspondant à cette configuration doivent respecter la règle suivante : \mathbf{h} se trouve à l'intérieur (ou sur une des frontières) d'au moins un des triangles (figure 2.1) formés par chacune des combinaisons de deux des vecteurs directeurs dans l'espace des efforts appliqués par les câbles sur l'effecteur ; cet espace à deux dimensions est facile à visualiser car il correspond simplement à la somme des forces selon l'axe X et la somme des forces selon l'axe Y appliqués par les câbles sur l'effecteur. On note que le triangle dont il est question ici s'étend jusqu'à ce que les forces demandées aux câbles soient au dessus de leurs limites maximales. Dans le cas 2 ddl il est possible de voir simplement par inspection que les forces que peuvent produire deux câbles couvrent une partie de l'espace plan délimitée par ces câbles. À la figure 2.1 par exemple, il est observé que les lieux d'équilibre correspondent aux endroits où les forces seront entièrement reprises par un seul câble.

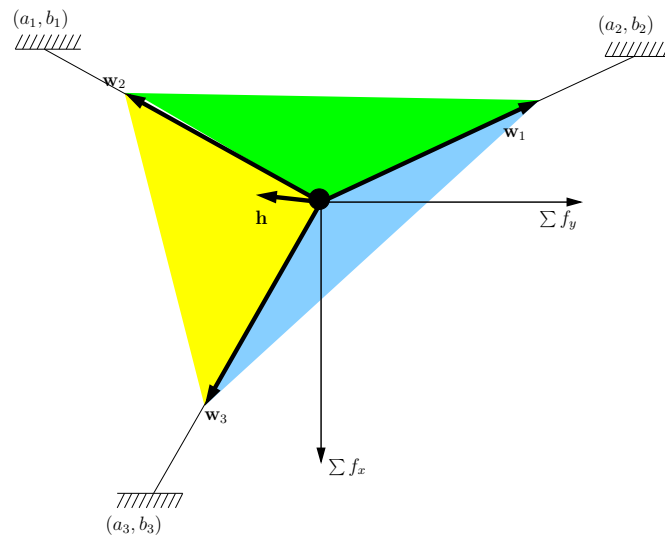


FIG. 2.1 – Schéma des triangles.

2.2.2 Cas du mécanisme plan 3 ddl

De façon analogue, les frontières de l'espace atteignable d'un manipulateur à 3 ddl plan sont déterminées par les intersections entre les sous-espaces suivants :

- Les lieux d'équilibre à deux câbles pour chacune des combinaisons de 2 câbles.
- Les lieux de singularité pour chacune des combinaisons de 3 câbles.

Il est possible de visualiser géométriquement ce qui se passe sur une frontière de singularité ou d'équilibre à deux câbles. Dans le cas d'un manipulateur plan à 3 ddl, pour qu'une configuration appartienne à l'espace atteignable, les vecteurs directeurs \mathbf{w} et le vecteur \mathbf{h} correspondant à cette configuration doivent respecter la règle suivante : \mathbf{h} se trouve à l'intérieur (ou sur une des faces) d'au moins une des pyramides triangulaires (figure 2.2(a)) formées par chacune des combinaisons de trois des vecteurs directeurs dans l'espace virtuel des efforts appliqués par les câbles sur l'effecteur ; les trois dimensions de cet espace sont la somme des forces selon l'axe X , la somme des forces selon l'axe Y et la somme des moments de force, appliqués par les câbles sur l'effecteur. De façon similaire au cas 2 ddl, on peut visualiser dans le domaine des forces les espaces que couvrent les câbles dans un seul sens, que ce soit en force ou en couple.

La figure 2.2(a) est une représentation des trois vecteurs directeurs \mathbf{w}_1 à \mathbf{w}_3 et du vecteur \mathbf{h} d'un manipulateur quelconque à trois câbles dans cet espace virtuel des efforts. Les vecteurs directeurs pivotent, de façon continue, autour de l'origine des axes de cet espace au cours d'un changement de configuration du mécanisme. La configuration correspondant à la disposition des vecteurs illustrée appartient à l'espace atteignable puisque le vecteur \mathbf{h} se trouve à l'intérieur de la pyramide formée par les vecteurs \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 et \mathbf{w}_3 .

Par extension du cas 2 ddl plan présenté précédemment, et par décomposition de l'espace des forces planes et du couple, la projection du cas du mécanisme plan 3 ddl (illustrée à la figure 2.2(b)) montre que l'appartenance au triangle du domaine des forces planes est une condition "sine qua non" à l'appartenance de la configuration à l'espace de travail dynamique. Aussi, le cas particulier correspondant au vecteur \mathbf{h} parallèle à l'un des vecteurs \mathbf{w}_i est un équilibre à 1 seul câble. Ce cas provoque le passage tension-compression des 2 autres câbles du trio de câbles.

Bien que la visualisation d'entités géométriques soit impossible dans un espace à six dimensions, les concepts construits précédemment peuvent tout de même être étendus aux manipulateurs spatiaux.

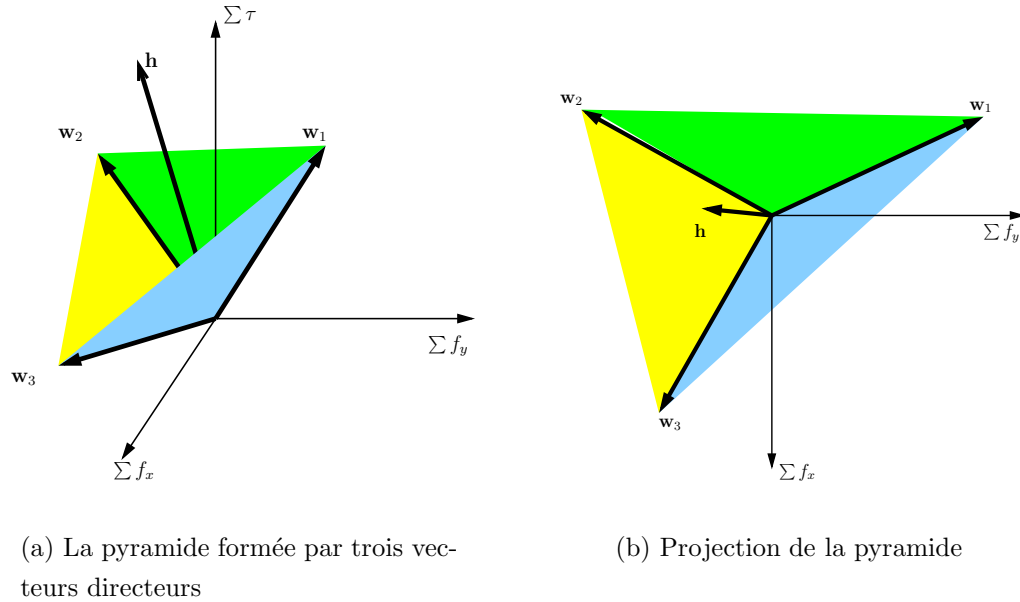


FIG. 2.2 – Représentation de l'espace de travail dynamique pour une combinaison de trois câbles.

Dans le cas des manipulateurs spatiaux, les vecteurs directeurs \mathbf{w} , le vecteur \mathbf{h} et l'espace virtuel des efforts ont six dimensions, lesquelles sont la somme des forces et des moments de force appliqués par les câbles sur l'effecteur selon les axes x , y et z .

Pour qu'une configuration appartienne à l'espace atteignable, les vecteurs directeurs et le vecteur \mathbf{h} correspondant à cette configuration doivent respecter la règle suivante : \mathbf{h} doit se trouver à l'intérieur (ou sur une des faces) d'au moins une des hyper-pyramides à six faces formées par chacune des combinaisons de six des vecteurs directeurs dans cet espace virtuel des efforts. Comme dans le cas du passage 2 ddl-3 ddl plan, le passage 3 ddl-6 ddl spatial impliquera que le seul fait que les forces cartésiennes d'une condition dynamique ne se trouvent pas dans la pyramide des forces cartésiennes est suffisant pour exclure cette configuration dynamique de l'espace atteignable, sans même vérifier les conditions dynamiques des couples et les composantes des moments des vecteurs directeurs \mathbf{w} . Cela est dû au fait que chaque câble est défini par une force et une direction, et que le couple produit est dépendant de ces paramètres.

Certes il est difficile de visualiser des entités géométriques en 6 dimensions, mais il est possible de visualiser une partie de l'hyper-pyramide en projetant son système des forces cartésiennes en 3d. Ainsi, pour un ensemble de 6 câbles, une condition nécessaire

pour l'appartenance d'une condition dynamique et d'une pose de l'effecteur à l'espace de travail s'exprime dans l'espace des forces 3d : les composantes forces cartésiennes du vecteur \mathbf{h} doivent être dans au moins une des 20 sous-pyramides d'une combinaison de 3 câbles parmi les six considérés.

2.3 Expressions des lieux d'équilibre : le vecteur des conditions dynamiques

Comme il a été expliqué à la section précédente, pour exprimer les frontières de l'espace atteignable d'un mécanisme à câbles, il faut trouver les sous-frontières de singularité et d'équilibre. Pour les deux types de contraintes, il suffit d'identifier si le vecteur \mathbf{h} peut être obtenu par l'une des combinaisons de câbles (trois dans le plan et six en 3d). Aussi, pour les calculs explicites des frontières d'équilibre, il faudra identifier le vecteur \mathbf{h} et résoudre un système d'équations pour lequel un nombre de câbles inférieur au nombre de ddl sera en équilibre. L'expression des lieux d'équilibre pour différents types de manipulateurs est explicitée dans le chapitre 3. Les expressions des vecteurs \mathbf{h} sont données de façon générale pour des mécanismes sans ressorts, avec ressorts et avec des câbles passifs à tension constante. Il est aussi clair qu'il serait possible d'exprimer le vecteur des conditions dynamiques \mathbf{h} pour d'autres types de contraintes. La résolution des systèmes linéaires reste la même, mais la complexité des équations d'équilibre augmente avec la complexité des relations entre les liens passifs et les positions cartésiennes.

Chapitre 3

Les frontières de l'espace atteignable : le cas plan

Dans ce chapitre nous traitons les équations exactes des frontières de l'espace de travail de mécanismes parallèles à câbles plans. Les lieux de singularité ne sont pas traités. Ils sont notamment détaillés dans ([10]). On traite donc simplement les frontières de l'espace de travail qui sont des courbes d'équilibre. Celles-ci sont développées dans le cas de mécanismes à 2 ddl et 3 ddl sans liens passifs et avec certains types des liens passifs. Les types de liens passifs traités sont les ressorts et les câbles à tension constante. On justifie le traitement du lien passif de type ressort car il s'agit d'un lien simple bien connu, et on traite le type de lien passif câble en tension constante car il permet un débattement intéressant, ainsi qu'une mise en oeuvre réelle simple sur un prototype. Quelques exemples de tracés de frontières d'équilibre sont ensuite faits.

3.1 Frontières de singularités : cas plan

Les lieux de singularité d'un mécanisme à câbles sont les mêmes que ceux d'un mécanisme à vérins conventionnel. En effet, ces deux mécanismes sont équivalents géométriquement. La cinématique est donc la même, mais les contraintes reliées à l'unilatéralité d'actionnement impliquent des frontières reliées à la dynamique du mécanisme. Pour décrire les frontières d'équilibre, pour un mécanisme à n ddl, il faut décrire les lieux d'équilibre correspondant aux combinaisons de $n - 1$ câbles. Dans le cas des frontières associées aux singularités, les courbes frontières sont définies pour chacune des combinaisons de n câbles. L'espace atteignable dynamique correspondant est l'union des sous-espaces définis par les frontières associées aux singularités et celles d'équilibre. Dans le cas plan, les singularités de mécanismes à 3-ddl ont déjà été étudiées ([10]) et identifiées comme étant des formes quadratiques. Les lieux d'équilibre quant à eux ont été traités dans les cas de mécanismes plans à 3 ddl sans ressorts et avec ressorts de longueur libre nulle ([13]). On traitera ici les équations d'équilibre avec une approche vectorielle et pour les types de mécanismes plans à 2 ddl et 3 ddl sans câbles passifs et avec des câbles passifs à tension constante et avec ressorts à longueur libre quelconque.

3.2 Frontières d'équilibre : méthode de résolution

Les équations d'équilibre d'un mécanisme à câbles dépendent des conditions dynamiques auxquelles le mécanisme est soumis. Dans le domaine plan, les cas 2 ddl en positionnement et 3 ddl sont traités. Pour un mécanisme à d ddl, les frontières seront toujours des lieux d'équilibre à $d - 1$ câbles. Ainsi, les mécanismes généraux redondants se décrivent par les mêmes frontières prises pour chaque sous-ensemble de d câbles pour les singularités et $d - 1$ câbles pour les lieux d'équilibre. Le principe de résolution qui mène aux équations d'équilibre est le même pour les différents types de mécanismes plans et spatiaux. Les approches suivantes peuvent être utilisées :

1. La résolution d'un système d'équations non-linéaires décrivant les conditions pour lesquelles $d - 1$ actionneurs produisent une condition dynamique à d ddl.
2. Établir les conditions pour lesquelles les vecteurs définissant les forces induites par $d - 1$ câbles seront aptes à produire à elles seules les accélérations (ou forces) voulues.

L'approche vectorielle est choisie pour sa représentation plus intuitive et plus simple. Aussi, il est ainsi possible d'utiliser une approche quasi-identique pour tous les types de mécanismes à câbles, aussi bien spatiaux que plans. Il est important de noter que les relations vectorielles analytiques qui sont présentées ne représentent pas systématiquement des lieux d'équilibre pour des mécanismes à câbles, mais plutôt des lieux potentiels. En effet, celles-ci sont satisfaites pour un équilibre indifféremment de la tension ou compression du câble. Cependant, des conditions simples pour lesquelles les frontières d'équilibre correspondent à des câbles en tension sont présentées.

3.3 Mécanisme plan à 2 ddl

Pour un mécanisme à 2 ddl, les frontières d'équilibre correspondent à un équilibre à 1 câble. L'équilibre à 1 câble est obtenu pour chacun des câbles actionnés du mécanisme par les équations de force dans le plan. Pour le cas 2 ddl, donc, les lieux d'équilibre correspondent aux lieux où le vecteur force dynamique à l'effecteur est parallèle à l'un des câbles. Dans cette section il sera question des frontières d'équilibre à 1 câble avec et sans liens passifs. Les types de liens passifs traités sont des ressorts et des câbles à tension constante.

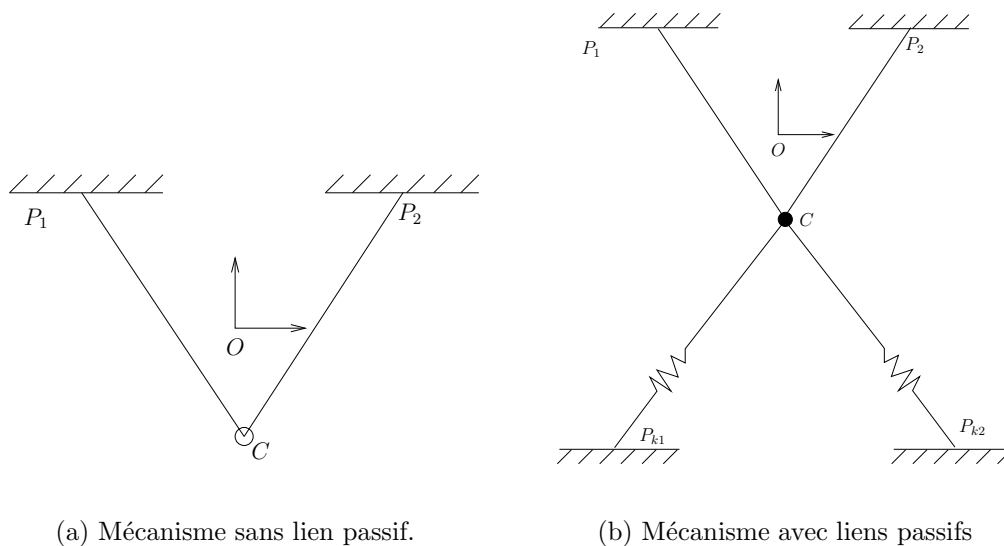


FIG. 3.1 – Illustration schématique du mécanisme à 2 ddl plan.

3.3.1 Mécanisme plan à 2-ddl sans liaison passive

Dans le cas d'un mécanisme qui ne comprend aucune liaison passive il est évident que les frontières sont toujours des droites. Par exemple, les frontières d'équilibre statique sont des droites verticales. L'expression de ces frontières, pour une condition dynamique donnée par $\mathbf{h} = (F_x, F_y)$ et le vecteur $\mathbf{p}_\mu = (a_\mu, b_\mu)$ reliant l'origine au point d'attache du câble μ considéré pour l'équilibre est obtenue en trouvant la relation pour laquelle il existe un module α de la force en tension dans les câbles qui satisfait la relation :

$$\alpha(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) = \mathbf{h} \quad (3.1)$$

Avec $\mathbf{c} = (x, y)$ le vecteur position de l'effecteur. Cela correspond aux conditions pour lesquelles le vecteur \mathbf{h} est parallèle au vecteur $(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c})$. Cette condition s'exprime donc par :

$$(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c})^T \mathbf{E} \mathbf{h} = 0 \quad (3.2)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Dans le cas où les conditions dynamiques ne sont pas reliées aux positions cartésiennes, c'est-à-dire s'il n'y a pas de membrures passives, il s'agit donc de droites car l'expression de l'équation (3.2) est alors linéaire en x et y .

3.3.2 Mécanisme plan à 2-ddl avec des ressorts

Soit un mécanisme à câbles plan à 2 ddl comprenant m ressorts à constante de rappel K_k , de longueur libre l_k , avec vecteur de point d'attache $\mathbf{p}_k = (a_k, b_k)$. Les lieux d'équilibre sont les endroits où il y a un module α de la tension dans les câbles actifs qui satisfait la condition dynamique voulue. Comme dans le cas sans membrures passives, cela correspond au moment où un vecteur colinéaire à un câble est parallèle au vecteur des conditions dynamiques voulues. Soit $\rho_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{c}\|$ la longueur du câble passif k . La relation d'équilibre générale est alors :

$$(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c})^T \mathbf{E} \mathbf{h}_e = 0 \quad (3.3)$$

avec, dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_e &= \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m K_k V_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) \\ V_k &= \frac{\rho_k - l_k}{\rho_k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

De façon générale, le polynôme en x, y correspondant à la relation (3.3) a un degré qui est fonction du nombre de membrures passives. Des explications supplémentaires à ce sujet sont données à l'annexe D. La forme de cette courbe est :

$$(a_\mu - x)(-F_y + \sum_{k=1}^m ((b_k - y)K_k V_k)) - (b_\mu - y)(-F_x + \sum_{k=1}^m ((a_k - x)K_k V_k)) = 0 \quad (3.5)$$

Il a été vérifié, pour un nombre de ressorts entre 0 et 4, que les lieux d'équilibre avec m ressorts sont décrits par un polynôme de degré inférieur ou égal à $2^m(m + 1)$ (D).

Dans le cas où la longueur libre des ressorts est nulle, on a que $V_k = 1$ où on obtient la relation (3.6) et (3.7), une relation semblable à l'expression (3.2). Cette relation montre que, pour un mécanisme comprenant des ressorts de longueur libre nulle, les frontières d'équilibre sont des droites. En effet, l'équation (3.6) est satisfaite quand le vecteur $(\mathbf{c} - \mathbf{p}_\mu)$ est aligné au vecteur \mathbf{h}_e , lequel est indépendant des positions cartésiennes (équation (3.7)).

$$(\mathbf{c} - \mathbf{p}_\mu)^T \mathbf{E} \mathbf{h}_e = 0 \quad (3.6)$$

avec, dans ce cas :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_\mu) \quad (3.7)$$

Le passage de l'équation (3.3) à l'équation (3.6) est détaillé à l'annexe A. À cette forme vectorielle correspond donc des droites de forme :

$$x \sum_{k=1}^m \Sigma_x + y \sum_{k=1}^m \Sigma_y + \sum_{k=1}^m \Sigma_c + F_x b_\mu - F_x y - a_\mu F_y + x F_y = 0 \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= K_k(-b_\mu + b_k) \\ \Sigma_y &= K_k(-a_k + a_m u) \\ \Sigma_c &= K_k(b_\mu a_k - a_\mu b_k) \end{aligned}$$

3.3.3 Mécanisme plan à 2 ddl avec des câbles passifs à tension constante

Plusieurs compagnies offrent des “ressorts à force constante”. Un lien de ce type est illustré à la figure 3.2. Ce type de lien peut aussi être obtenu en contrôlant un moteur pour qu’il induise une force constante dans un câble.

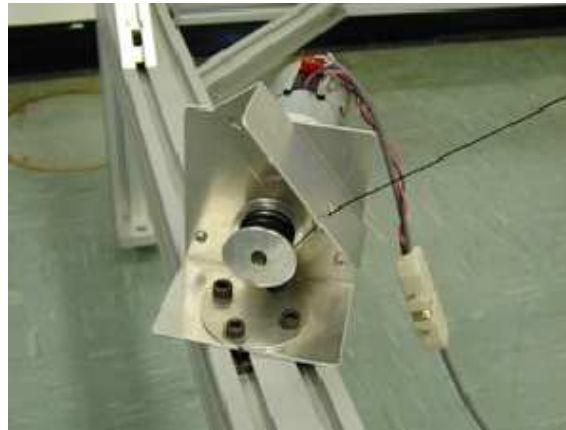


FIG. 3.2 – Illustration d’un ressort à force constante.

Soit maintenant un mécanisme à câbles avec m liens passifs étant des câbles à force négative constante F_k . Pour un câble μ , les lieux d’équilibre s’écrivent de façon similaire à l’équation (3.3), avec cependant :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m \frac{F_k(\mathbf{p}_k - \mathbf{c})}{\rho_k} \quad (3.9)$$

La forme scalaire des lieux d'équilibre correspondante, dans ce cas, est :

$$(F_x - \sum_{k=1}^m \frac{(a_k - x)F_k}{\rho_k})(b_\mu - y) - (F_y - \sum_{k=1}^m \frac{(b_k - y)F_k}{\rho_k})(a_\mu - x) = 0 \quad (3.10)$$

À partir de l'équation (3.10) il est vérifié que les frontières d'équilibre à 1 câble pour un mécanisme comprenant $m = 1, \dots, 4$ câbles passifs à force négative constante sont décrites par un polynôme d'un degré inférieur ou égal à $2^m(m + 1)$, tout comme dans le cas de membrures de type ressorts à longueur libre arbitraire. Des explications supplémentaires à ce sujet sont données à l'annexe D.

3.3.4 Considérations générales pour les mécanismes plans à 2 ddl

Pour tout type de mécanisme plan à 2 ddl, avec ou sans liens passifs, il est possible de représenter les lieux d'équilibre par une relation du type de l'équation (3.3). Aussi, cette relation sera satisfaite dans trois cas :

1. Cas où $\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c} = 0$. Ce cas correspond aux configurations où le câble actif est de longueur nulle. Il s'agit donc d'une configuration où l'équation dégénère et n'est pas en équilibre proprement dit.
2. Cas où $\mathbf{h}_e = 0$. Pour un mécanisme plan sans liaison passive, où $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$ n'est pas fonction des positions cartésiennes, ce cas est le cas statique en apesanteur. Il s'agit donc d'un cas où le mécanisme est en équilibre statique. Pour les mécanismes avec des liens passifs, le vecteur \mathbf{h}_e est alors fonction des positions cartésiennes. Ce cas correspond donc aux positions cartésiennes où les liens passifs produisent seuls les accélérations voulues. Il s'agit donc, par exemple, dans le cas statique, des positions où le mécanisme est en équilibre statique sous la simple action des liens passifs.
3. Cas général où $(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c})^T \mathbf{E} \mathbf{h}_e = 0$. Correspond aux frontières d'équilibre proprement dites, c'est-à-dire aux endroits où une membrure, qu'elle soit indifféremment en tension ou en compression, suffit à produire la condition dynamique voulue. Dans le cas 2 ddl plan, il s'agit d'un lieu d'équilibre à 1 câble en tension si $((\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{h}_e) > 0$.

3.4 Mécanisme plan à 3 ddl

Ce type de mécanisme est illustré schématiquement à la figure 3.3.

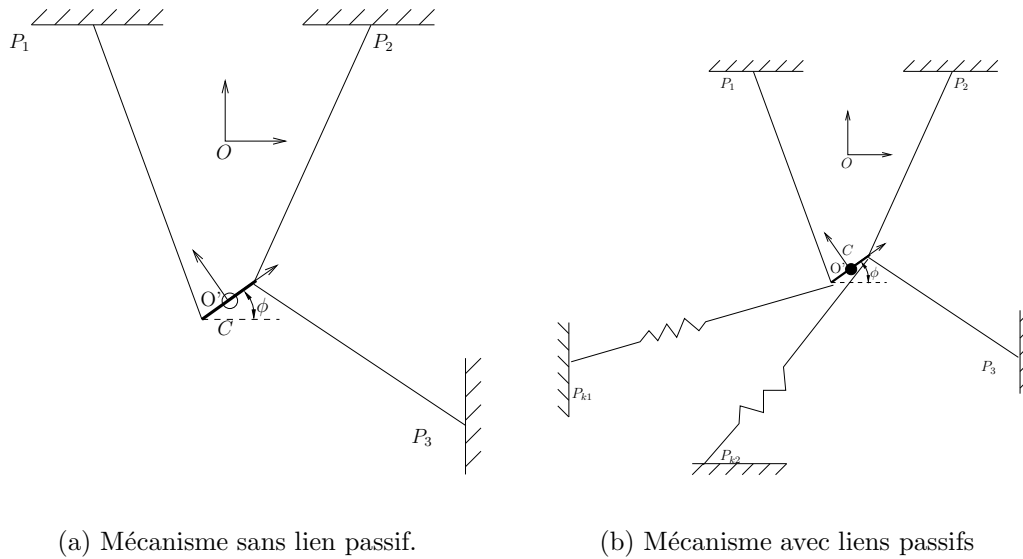


FIG. 3.3 – Illustration schématique du mécanisme à 3 ddl plan.

Pour ce type de manipulateur sans membrures passives et avec des membrures passives de type ressorts à longueur libre nulle, les frontières d'équilibre ont été trouvées par Barrette[13]. Les expressions des lieux d'équilibre sont développées ici avec une approche vectorielle dans les cas traités dans [13] ainsi que dans les cas de mécanismes comprenant des liaisons passives de type ressorts à longueur libre arbitraire et câbles à tension constante.

Comme il est mentionné au chapitre 2, il est possible de visualiser les frontières d'équilibre dans l'espace tridimensionnel des forces cartésiennes. Aussi, ces frontières d'équilibre dynamique correspondent aux configurations où le vecteur des forces voulues à l'effecteur \mathbf{h} se situe sur un des plans de la pyramide. Les configurations dans lesquelles l'effecteur est en équilibre à 2 câbles peuvent être exprimées par des systèmes d'équations linéaires, ou plus simplement de façon vectorielle. En effet, trois vecteurs sont dans un même plan quand leur produit triple est nul. Soit le vecteur \mathbf{v}_μ définissant la position du point d'attache du câble μ par rapport au repère mobile sur l'effecteur, et le vecteur \mathbf{c} définissant la position du repère de l'effecteur par rapport au repère fixe et son orientation étant définie par la matrice de rotation \mathbf{Q} . Dans l'espace des forces

cartésiennes, on définit la direction des composantes $\mathbf{w}_\mu = (f_x, f_y, \tau)^T$ du vecteur efforts cartésiens que produit le câble μ à l'effecteur (sa norme est arbitraire) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} &= \mathbf{p}_\mu - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_\mu \\ \tau &= -(\mathbf{Q}\mathbf{v}_\mu)^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4.1 Mécanisme plan à 3 ddl sans liaison passive

Pour un mécanisme plan à 3 ddl, les équations d'équilibre associées au duo de câbles μ et ν s'expriment par :

$$(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h} = 0 \quad (3.11)$$

Dans le cas de mécanismes sans liaison passive, la relation (3.11) correspond toujours à des quadratiques en (x, y) [13].

3.4.2 Mécanisme plan à 3 ddl avec des ressorts

Pour un mécanisme plan à 3 ddl avec des ressorts, les équations d'équilibre associées au duo de câbles μ et ν s'expriment de façon similaire à l'équation (3.11). Soit un mécanisme à m ressorts de rigidité K_k et de longueur libre l_k . La relation d'équilibre à deux câbles est donnée par :

$$(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h}_e = 0 \quad (3.12)$$

Avec

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m K_k G_k \mathbf{w}_k \quad (3.13)$$

$$G_k = \frac{\rho_k - l_k}{\rho_k}$$

Comme c'est le cas avec les équations d'équilibre du mécanisme plan à 2 ddl (section 3.3), la présence de ressorts à longueur libre nulle ne change pas le degré des courbes d'équilibre à deux câbles. Dans le cas général, cependant, la relation qui exprime les frontières d'équilibre à deux câbles d'un mécanisme avec m ressorts de longueur libre l_k pour un duo de câbles correspond à des polynômes dont le degré maximum dépend du nombre de membrures passives.

3.4.3 Mécanisme plan à 3 ddl avec des câbles passifs à tension constante

Soit maintenant le cas d'un mécanisme comprenant des liaisons passives de type câbles à tension constante F_k . Comme dans le cas de ressorts à longueurs libres arbitraires, on obtient une relation à laquelle correspond un polynôme d'un degré dépendant du nombre de liaisons passives. On a donc :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^m \frac{F_k}{\rho_k} \mathbf{w}_k \quad (3.14)$$

Des explications plus détaillées sur les méthodes utilisées pour trouver les polynômes équivalents aux formes vectorielles et des explications supplémentaires sont données à l'annexe D. Il y est montré notamment, pour m entre 1 et 4, que la description des lieux d'équilibre d'un mécanisme comprenant m câbles passifs de type ressort général ou m membrure passives de type câble à tension constante est associée à un polynôme de degré $2^m(m+2)$.

3.4.4 Considérations générales sur les mécanismes plan à 3 ddl

Pour tout type de mécanisme plan à 3 ddl, avec ou sans lien passif, il est possible de représenter les lieux d'équilibre par une relation ayant une forme similaire à l'équation (3.12). Aussi, cette relation sera satisfaite dans trois cas :

1. Cas où $\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu = 0$. Ce cas correspond aux configurations où les deux câbles coïncident, c'est-à-dire qu'ils induisent les mêmes accélérations cartésiennes à l'effecteur. Il s'agit donc d'une configuration où l'équation dégénère et n'est pas en équilibre proprement dit.
2. Cas où $\mathbf{h}_e = 0$. Pour un mécanisme plan sans liaison passive, où $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$ n'est pas fonction des positions cartésiennes, ce cas est le cas statique en apesanteur. Il s'agit donc d'un cas où le mécanisme est en équilibre statique. Pour les mécanismes avec des liens passifs, \mathbf{h}_e est fonction des positions cartésiennes. Ce cas correspond aux positions cartésiennes où les liens passifs produisent à eux seuls les accélérations voulues. Il s'agit donc, par exemple, dans le cas statique, des positions où le mécanisme est en équilibre statique sous la seule action des membrures passives.
3. Cas général où $(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h}_e = 0$. Correspond aux frontières d'équilibre proprement dites, c'est-à-dire aux endroits où deux membrures, qu'elles soient indifféremment en tension ou en compression, suffisent à produire la condition dynamique voulue. Dans le cas 3 ddl plan, il y a plusieurs façons de décrire les conditions pour lesquelles il s'agit d'un lieu d'équilibre à 2 câbles en tension. On peut calculer les forces dans les câbles pour une condition d'équilibre donnée. La condition de tension correspond au signe de la force sur ces câbles.

	\mathbf{p}_i	Raideur(N/m)
Ressort 1	$(-1, -0.5)$	0.5
Ressort 2	$(-0.5, 0)$	5
Ressort 3	$(0.5, -0.5)$	10
Câble actionné	$(0, 0)$	
Conditions dynamiques		
Masse effecteur (kg)	1	
Accélérations ($\frac{m}{s^2}$)	$(5, 2)$	

TAB. 3.1 – Architecture utilisée comme exemple avec des ressorts de longueur libre nulle.

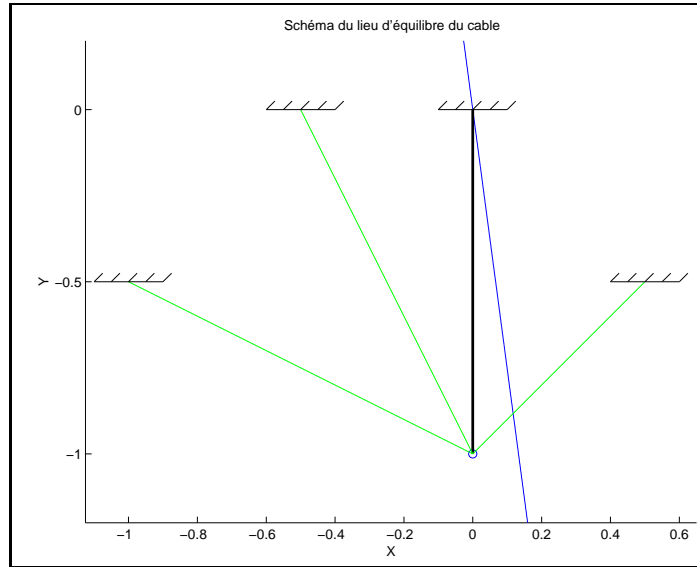
3.5 Exemples de courbes d'équilibre de mécanismes à 2 ddl

3.5.1 Mécanismes à 2 ddl avec ressorts de longueur libre nulle

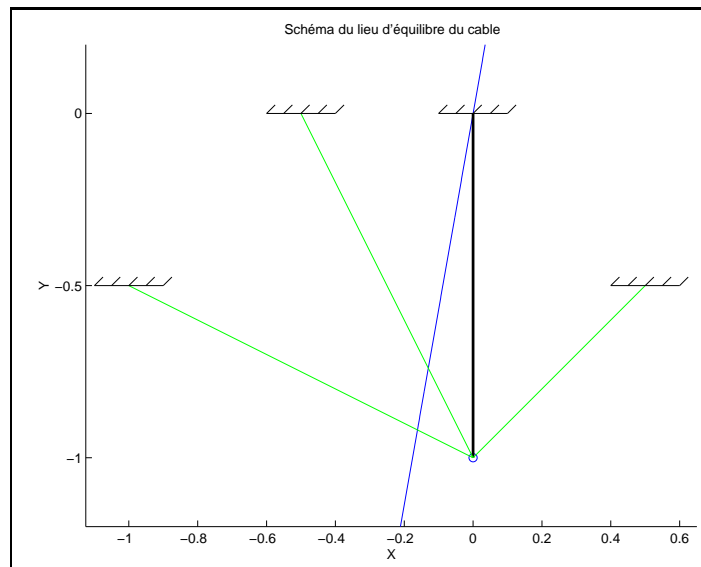
On illustre quelques exemples de lieux d'équilibre de mécanismes plans à 2 ddl avec des ressorts à longueur libre nulle. On remarque que pour un mécanisme comprenant un nombre arbitraire de membrures passives de ce type, les lieux d'équilibre sont toujours des droites. Cette propriété est d'ailleurs explicitée à l'annexe A.

Les courbes d'équilibre à un câble illustrées à la figure 3.4 correspondent à l'architecture détaillée au tableau 3.1. Il s'agit des lieux d'équilibre du câble (en noir) avec trois liens passifs (en vert) de type ressorts à longueur libre nulle.

Tel qu'il est mentionné à la section 3.3.2, la frontière d'équilibre est une droite qui correspond aux endroits où le vecteur $(\mathbf{c} - \mathbf{p}_\mu)$ est aligné avec le vecteur \mathbf{h}_e (voir équations (3.6) et (3.7)).



(a) Condition statique

(b) Condition dynamique : $(5,2)m/s^2$ FIG. 3.4 – Les frontières d'équilibre avec ressorts à longueur libre nulle ($m = 1kg$).

3.5.2 Mécanismes à 2 ddl avec ressorts de longueur libre arbitraire

On illustre à la figure 3.5 des lieux d'équilibre d'un mécanisme plan à 2 ddl mais cette fois avec des ressorts à longueur libre arbitraire. Il s'agit des lieux d'équilibre du

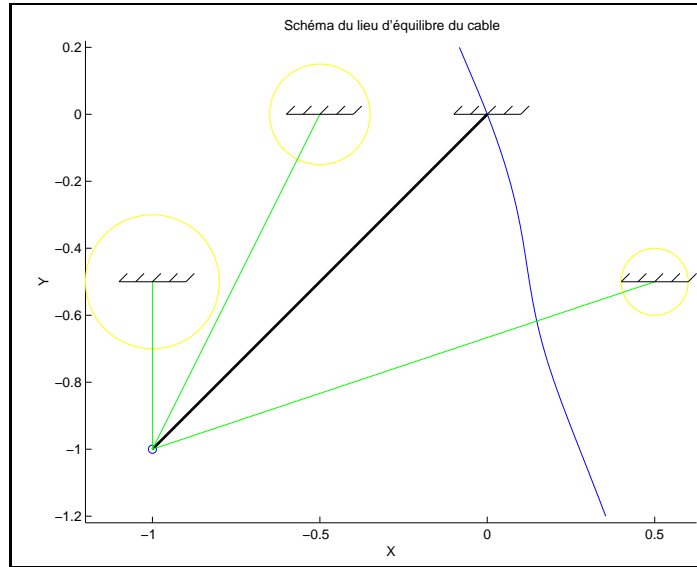
	\mathbf{p}_i	Raideur (N/m)	Longueur libre (m)
Ressort 1	$(-1, -0.5)$	0.5	0.2
Ressort 2	$(-0.5, 0)$	5	0.15
Ressort 3	$(0.5, -0.5)$	10	0.1
Câble actionné	$(0, 0)$		
Conditions dynamiques			
Masse effecteur (kg)	0.1		
Accélérations ($\frac{m}{s^2}$)	$(2, 2)$		

TAB. 3.2 – Architecture utilisée comme exemple avec des ressorts de longueur libre arbitraire.

câble (en noir) avec trois liens passifs (en vert) de type ressorts de longueur libre non nulle (représentée par les cercles verts foncés). Par ailleurs, il est important de noter qu'en pratique, lorsque l'effecteur se situe à l'intérieur de ces cercles, les forces induites par les ressorts peuvent être indéfinies. Comme il a été montré précédemment, ces lieux d'équilibre ne correspondent plus à des droites mais plutôt à des polynômes dont le degré maximum est fonction du nombre de liens passifs. L'architecture et les conditions dynamiques sont données au tableau 3.2. Il s'agit d'un cas où il y a trois câbles passifs. Tel que montré à l'annexe D, l'expression peut s'exprimer par un polynôme de degré 32.

3.5.3 Mécanismes à 2 ddl avec liens passifs à tension constante

À la figure 3.6, on illustre finalement des exemples de lieux d'équilibre de mécanismes plans à 2 ddl avec des câbles à tension constante. L'architecture considérée pour l'exemple et les conditions dynamiques sont données au tableau 3.3. Comme c'est le cas avec des mécanismes ayant des ressorts de longueur libre arbitraire, l'expression des lieux se décrit par un polynôme dont le degré est fonction du nombre de membrures passives. Dans le cas d'un mécanisme à trois membrures passives comme il est présenté ici, il s'agit d'une courbe de degré 32. Des analyses sur les formes polynomiales sont présentées en annexe D.



(a) Condition statique

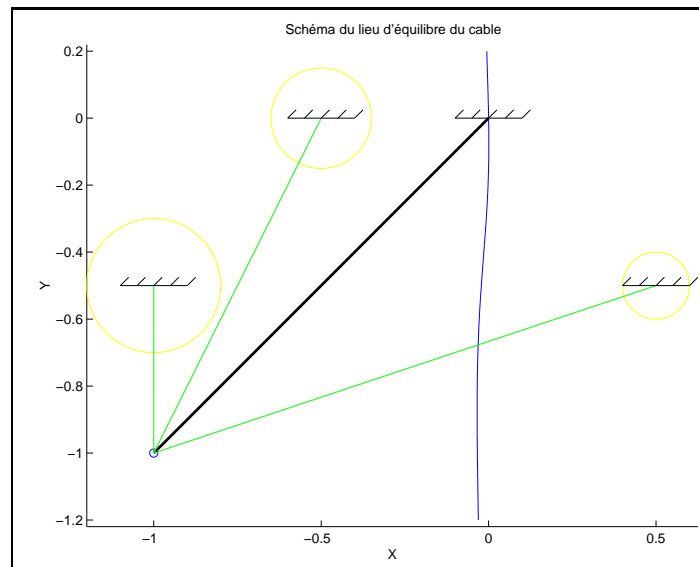
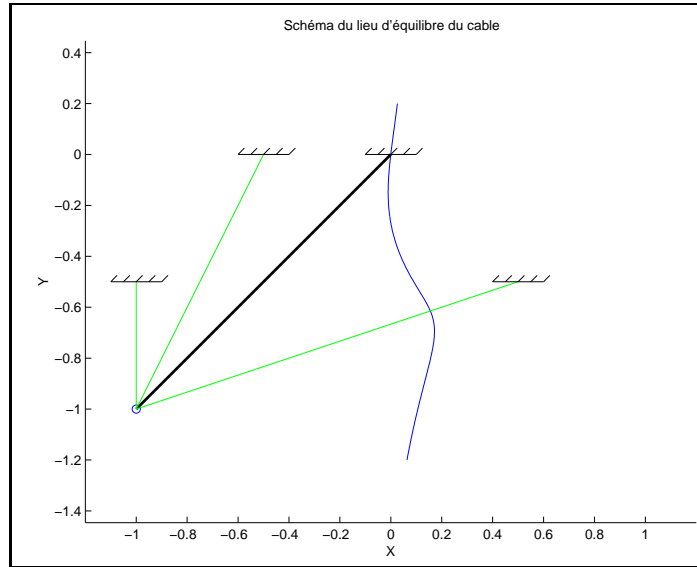
(b) Condition dynamique : $(2,2)m/s^2$

FIG. 3.5 – Les frontières d'équilibre avec ressorts à longueur libre arbitraire ($m = 0.1kg$).

3.6 Exemples de courbes d'équilibre de mécanismes à 3 ddl



(a) Condition statique

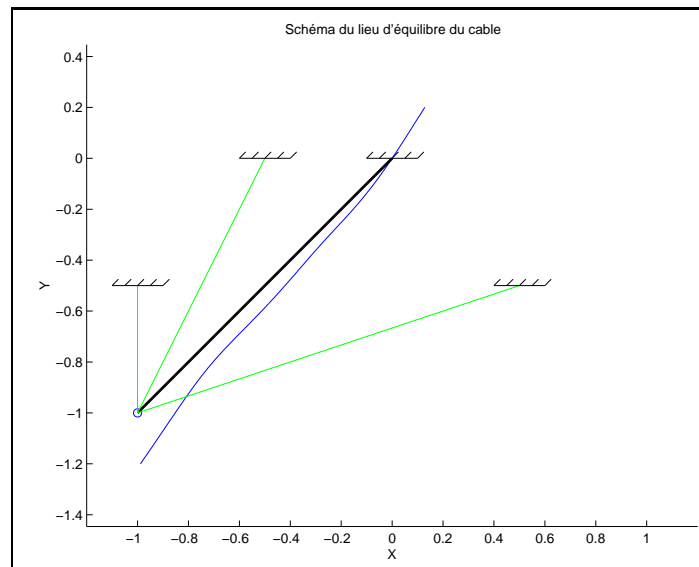
(b) Condition dynamique : $(10,2)m/s^2$

FIG. 3.6 – Les frontières d'équilibre avec câbles passifs à tension constante ($m = 1kg$).

3.6.1 Mécanismes à 3 ddl sans lien passif

On trace les frontières d'équilibre d'un mécanisme sans liaison passive, dont l'architecture est détaillée au tableau 3.4. Les frontières d'équilibre sont illustrées pour la

	\mathbf{p}_i	Force
Câble passif 1	$(-1, -0.5)$	2 N
Câble passif 2	$(-0.5, 0)$	5 N
Câble passif 3	$(0.5, -0.5)$	7 N
Câble actionné	$(0, 0)$	
<i>Conditions dynamiques</i>		
Masse effecteur (kg)	1	
Accélérations ($\frac{m}{s^2}$)	$(10, 2)$	

TAB. 3.3 – Architecture utilisée comme exemple avec des câbles à tension constante.

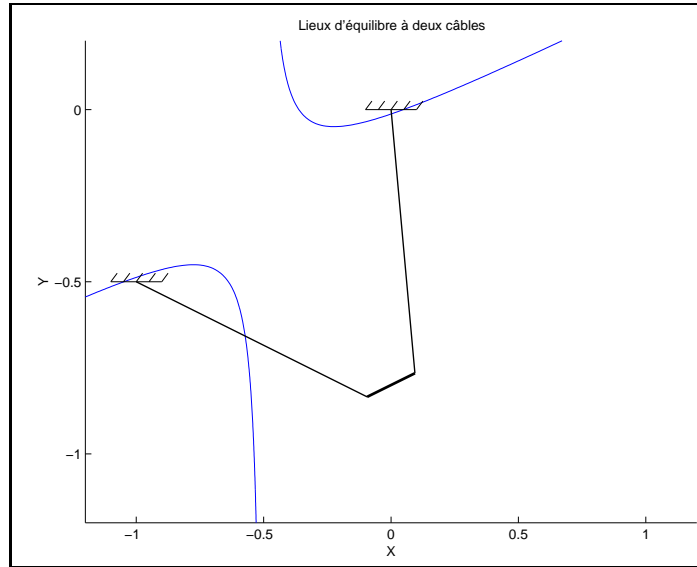
<i>Architecture</i>		
	\mathbf{p}_i	\mathbf{v}_i
Câble actionné 1	$(0, 0)$	$(0.1, 0)$
Câble actionné 2	$(-1, -0.5)$	$(-0.1, 0)$
<i>Conditions dynamiques</i>		
Masse effecteur	1 kg	
Inertie effecteur	1 kgm^2	
Accélérations cas statique	nulles	
Accélérations cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 2m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$	
Orientation effecteur	20 degrés	

TAB. 3.4 – Architecture sans câbles passifs (figure 3.7)

condition statique et une condition dynamique. Tel qu'il est mentionné à la section 3.4.1, il s'agit d'une quadratique, plus précisément d'une hyperbole dans ce cas. Les courbes d'équilibre à deux câbles sont illustrées à la figure 3.7 pour l'architecture définie au tableau 3.4.

3.6.2 Mécanismes à 3 ddl avec ressorts de longueur libre nulle

On illustre maintenant à la figure 3.8 les lieux d'équilibre d'un mécanisme plan à 3 ddl avec des ressorts de longueur libre nulle, dont l'architecture est donnée au tableau 3.5. Les 2 câbles actionnés considérés pour l'équilibre sont tracés en noir et les liens



(a) Condition statique

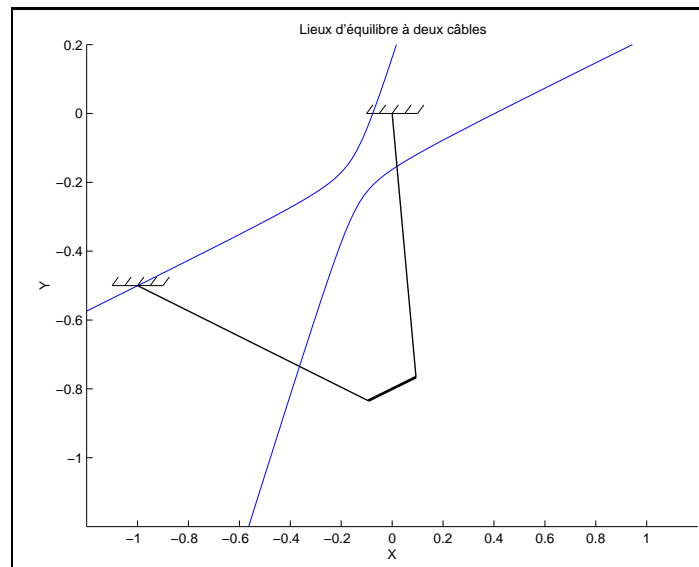
(b) Condition dynamique : $(5, 2)m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$

FIG. 3.7 – Les frontières d'équilibre sans câbles passifs.

passifs (ressorts) en vert. Tel qu'attendu, les frontières d'équilibre correspondent à des quadratiques, plus précisément à des hyperboles.

<i>Architecture</i>		
	\mathbf{p}_i	\mathbf{v}_i
Câble actionné 1	(0, 0)	(0.1, 0)
Câble actionné 2	(-1, -0.5)	(-0.1, 0)
Ressort 1 (0.5 N/m)	(-1, 0)	(-0.1, 0)
Ressort 2 (5 N/m)	(-0.5, -0.5)	(-0.1, 0)
Ressort 3 (10 N/m)	(0.5, -0.5)	(0.1, 0)
<i>Conditions dynamiques</i>		
Masse effecteur	1 kg	
Inertie effecteur	1 kgm^2	
Accélérations cas statique	nulles	
Accélérations cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 2m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$	
Orientation effecteur	20 degrés	

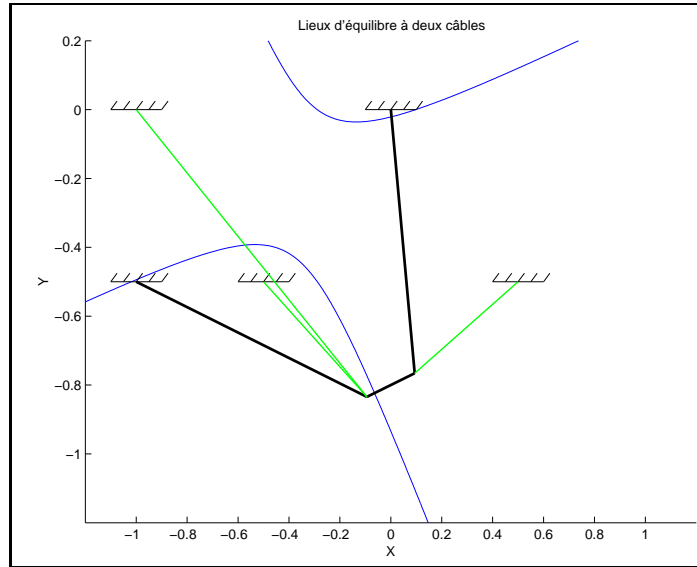
TAB. 3.5 – Architecture avec des ressorts de longueur libre nulle (figure 3.8).

3.6.3 Mécanismes à 3 ddl avec ressorts de longueur libre arbitraire

Voici maintenant quelques exemples de lieux d'équilibre de mécanismes plans à 3 ddl avec des ressorts de longueur libre arbitraire. L'architecture est illustrée au tableau 3.6. Pour l'exemple, l'architecture est la même que celle présentée au tableau 3.5 mis à part la longueur libre des ressorts qui n'est pas nulle. Les frontières d'équilibre sont tracées à la figure 3.9. Les deux câbles actifs sont en noir, et les trois câbles passifs sont en vert. Les cercles en vert foncé autour des points d'attache des câbles passifs représentent la longueur libre des ressorts. Dans ce cas, les courbes correspondent à des polynômes de degré 40.

3.6.4 Mécanismes à 3 ddl avec liens passifs à tension constante

Finalement quelques exemples de lieux d'équilibre de mécanismes plans à 3 ddl avec des câbles passifs à tension constante sont montrés. Les courbes d'équilibre sont



(a) Condition statique

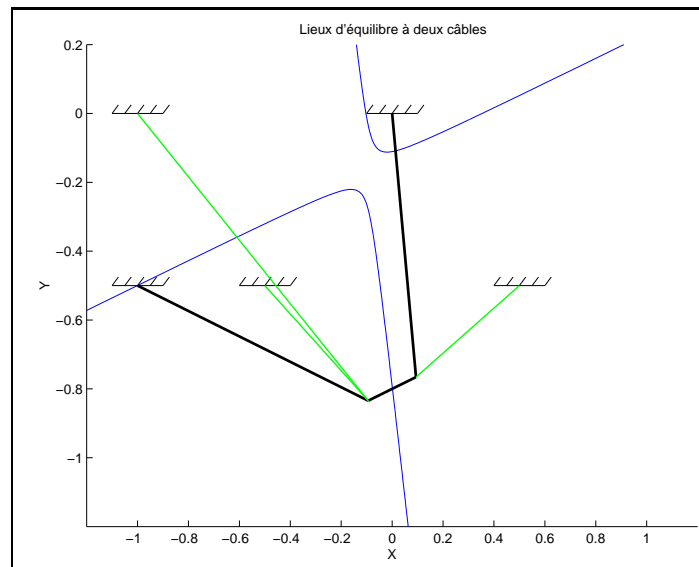
(b) Condition dynamique : $(5, 2)m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$

FIG. 3.8 – Les frontières d'équilibre avec des ressorts de longueur libre nulle.

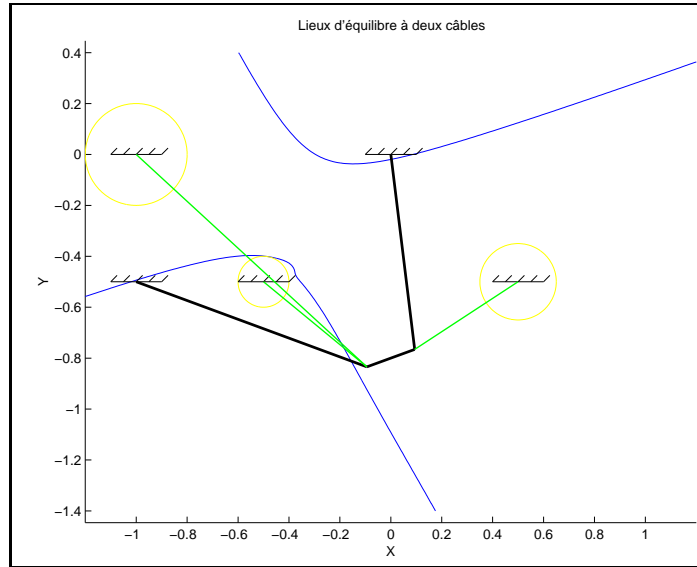
représentées à la figure 3.10 et correspondent à l'architecture représentée au tableau 3.7. Les deux câbles en noir représentent les liens actionnés, et les trois câbles en vert les liens passifs. Dans ce cas, l'expression polynomiale correspondant à la relation vectorielle des lieux d'équilibre est de degré 40.

<i>Architecture</i>			
	\mathbf{p}_i	\mathbf{v}_i	Longueur libre
Câble actionné 1	(0, 0)	(0.1, 0)	
Câble actionné 2	(-1, -0.5)	(-0.1, 0)	
Ressort 1 (0.5 N/m)	(-1, 0)	(-0.1, 0)	0.2m.
Ressort 2 (5N/m)	(-0.5, -0.5)	(-0.1, 0)	0.1m.
Ressort 3 (10N/m)	(0.5, -0.5)	(0.1, 0)	0.15m.
<i>Conditions dynamiques</i>			
Masse effecteur	1 kg		
Inertie effecteur	1 kgm^2		
Cas statique	nulles		
Cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 2m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$		
Orientation	20 degrés		

TAB. 3.6 – Architecture avec des ressorts de longueur libre arbitraire (figure 3.9).

<i>Architecture</i>		
	\mathbf{p}_i	\mathbf{v}_i
Câble actionné 1	(0, 0)	(0.1, 0)
Câble actionné 2	(-1, -0.5)	(0.1, 0)
Lien passif 1 (0.5 N)	(-1, 0)	(-0.1, 0)
Lien passif 2 (5 N)	(-0.5, -0.5)	(-0.1, 0)
Lien passif 3 (10 N)	(0.5, -0.5)	(0.1, 0)
<i>Conditions dynamiques</i>		
Masse effecteur	1 kg	
Inertie effecteur	1 kgm^2	
Accélérations cas statique	nulles	
Accélérations cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 2m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$	
Orientation	20 degrés	

TAB. 3.7 – Architecture avec des liens passifs à tension constante.



(a) Condition statique

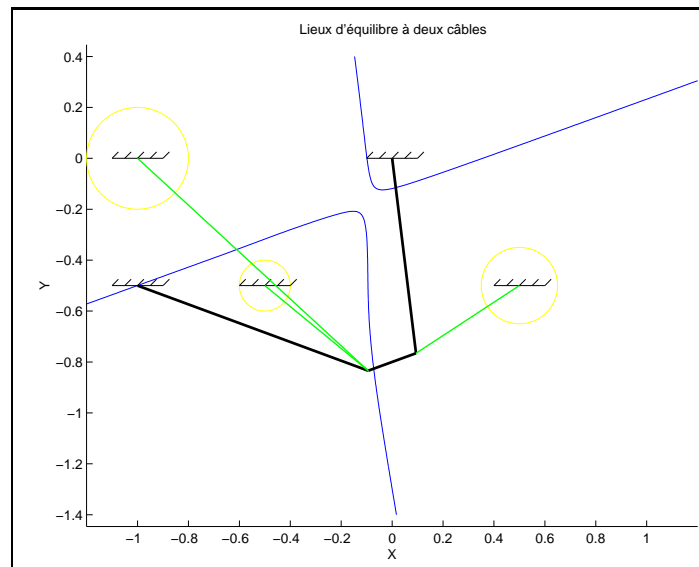
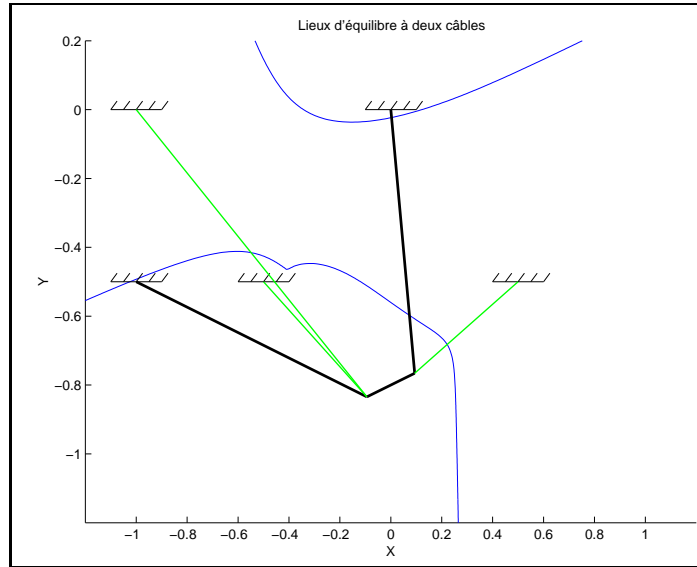
(b) Condition dynamique : $(5, 2)m/s^2, a_\tau = 1rad/s^2$

FIG. 3.9 – Les frontières d'équilibre avec des ressorts de longueur libre arbitraire.

3.7 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, des relations décrivant les lieux d'équilibre ont été présentées pour les mécanismes plans à 2 et 3 ddl pouvant inclure des liens passifs de type ressorts ou



(a) Condition statique

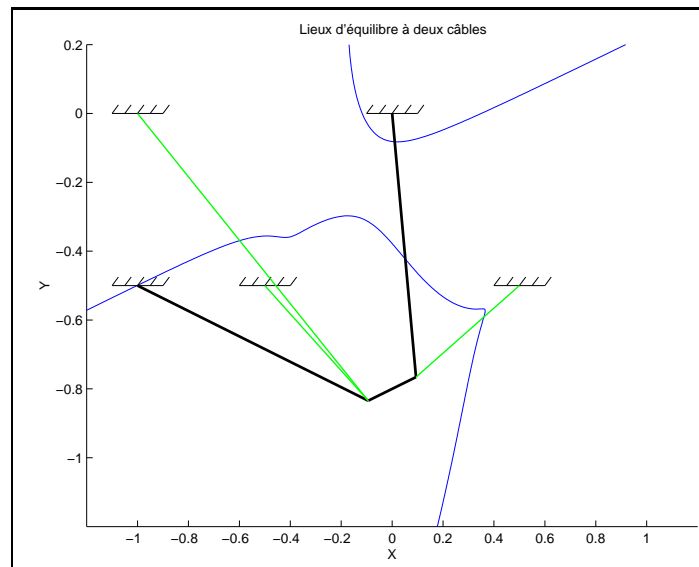
(b) Condition dynamique : $(5, 2)m/s^2, a_\tau = 2rad/s^2$

FIG. 3.10 – Les frontières d'équilibre avec câbles passifs à tension constante.

câbles à tension constante. Ces relations ont permis, par la suite, de tracer des exemples de lieux d'équilibre pour différents mécanismes. Il faut noter que ces lieux d'équilibre ne correspondent pas nécessairement à des conditions de tension dans les câbles. Aussi, des conditions vectorielles simples permettant de vérifier la condition de tension ont été présentées pour le cas 2 ddl. En ce qui concerne le cas 3 ddl, cette question n'a pas été

traitée. Une fois les courbes d'équilibre obtenues, il faut donc trouver les forces dans les deux câbles considérés pour l'équilibre et de vérifier qu'ils sont en tension.

Les frontières de l'espace atteignable global des mécanismes à câbles, formées des lieux de singularité et des lieux d'équilibre, dont il a été question tout au long de ce chapitre, permettent de définir l'espace atteignable. Avec les lieux de singularité et les lieux d'équilibre, un espace atteignable est simplement quantifié par la mesure de l'aire. Au chapitre suivant, il sera question de la quantification de l'aire de l'espace de travail dynamique des mécanismes à câbles.

Chapitre 4

Méthodes de calcul de l'espace atteignable : cas plan

Ce chapitre présente les méthodes de calcul de l'espace atteignable de manipulateurs plans. Ces méthodes diverses visent à mesurer une aire de travail de façon quantitative. Cela permet de définir des fonctions objectives visant à caractériser les performances d'un manipulateur. Les algorithmes présentés sont valides pour des mécanismes plans à 2 ddl et 3 ddl.

4.1 Calcul de l'aire exacte

Pour les types de mécanismes à câbles plans pour lesquels les équations exactes des frontières ont été trouvées et implantées, il est possible de calculer l'aire exacte de l'espace atteignable dynamique. L'une des façons d'effectuer ce calcul consiste à utiliser le théorème de Gauss, l'autre consiste simplement à utiliser le fait que les branches des fonctions existantes sont des courbes définies, et que conséquemment les segments des frontières sont des fonctions. Cela permet de trouver l'aire par sommation d'intégrales.

4.1.1 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet le calcul de l'aire de sections fermées continues. Comme il a été établi que les frontières de l'espace atteignable dynamique sont systématiquement des quadratiques, il est donc possible d'utiliser ce théorème pour calculer l'aire de cet espace. Le théorème de Gauss stipule que l'aire définie par une série de courbes définissant une section fermée s'exprime à l'aide du vecteur normal de cette courbe. Ainsi, pour une suite de N courbes ayant comme vecteur position \mathbf{s}_i et comme vecteur normal sortant de la surface \mathbf{n}_i , chacune sur un domaine $\delta\Omega_i$ et formant une surface fermée, l'aire S sera :

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\delta\Omega_i} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n}_i d\delta\Omega_i \quad (4.1)$$

Dans le cas plan, il a été démontré que les courbes de frontières sont des quadratiques [13]. Aussi, il est possible d'exprimer les segments de courbes par leur vecteur position et aussi de trouver les vecteurs normaux correspondants. Il faut ensuite écrire des expressions intégrales pour chacune des formes de quadratiques possibles. Les équations des lieux d'équilibre trouvées au chapitre 3 sont des expressions implicites ou polynomiales. Il peut être intéressant de constater qu'il existe une formulation paramétrique des différents types de quadratiques. Ainsi, les équations générales des paraboles, hyperboles et ellipses sont développées et les correspondances entre les équations implicites générales et celles-ci sont trouvées. Les expressions paramétriques des diverses formes

de quadratiques sont les suivantes (le paramètre est t) :

$$\text{parabole : } x = t \tag{4.2}$$

$$y = at^2 + (b - 2ax_o)t + ax_o^2 + bx_o + y_o$$

$$\text{ellipse : } x = r_1 \cos \phi \cos t - r_2 \sin \phi \sin t + x_o \tag{4.3}$$

$$y = r_1 \sin \phi \cos t + r_2 \cos \phi \sin t + y_o$$

$$\text{hyperbole : } x = \pm r_1 \cos \phi \cosh t - r_2 \sin \phi \sinh t + x_o \tag{4.4}$$

$$y = \pm r_1 \sin \phi \cosh t + r_2 \cos \phi \sinh t + y_o$$

Les formules paramétriques générales de l'ellipse (4.3) et de l'hyperbole (4.4) correspondent à la généralisation des formes paramétriques de base pour une orientation quelconque donnée par l'angle ϕ . Dans le cas de l'ellipse, il s'agit d'une forme fermée et $t = [0, 2\pi]$ décrit la totalité de la courbe. Dans le cas de l'hyperbole, le choix $+r_1$ donne la branche de droite de l'hyperbole, et le choix $-r_1$ la branche de gauche (par rapport à $\phi = 0$). Dans ce cas, il s'agit d'une forme ouverte et le paramètre t varie de $-\infty$ à $+\infty$ (la courbe décrivant à $\pm\infty$ une asymptote).

Pour chacune de ces formes de quadratique, il existe une équivalence par rapport à l'expression algébrique implicite générale des quadratiques $((y - ax - b)^2 - cx^2 - dx - e = 0)$. Ces relations d'équivalence sont développées en annexe B.1.

4.1.2 Sommation d'intégrales

Comme l'a notamment fait Barrette[13], il est en général possible de décomposer des expressions polynomiales de quadratiques en segments qui sont des fonctions ¹. Dans les cas où chaque segment de courbe est une fonction, il est alors possible d'utiliser simplement une sommation d'intégrales pour le calcul de l'aire. En effet, par définition, une fonction n'a qu'une image pour chaque abscisse. Aussi, une zone cartésienne fermée composée de segments de fonctions se définit par groupes de segments les uns au dessus

¹Un cas d'exception est le segment de droite vertical, qui n'est pas une fonction. Néanmoins, ce type de segment n'empêche pas l'utilisation de sommations d'intégrales comme on l'observe dans l'exemple à la figure 4.1.

des autres. Par des opérations booléennes sur ces groupes de segments, on obtient l'aire à l'intérieur de la zone.

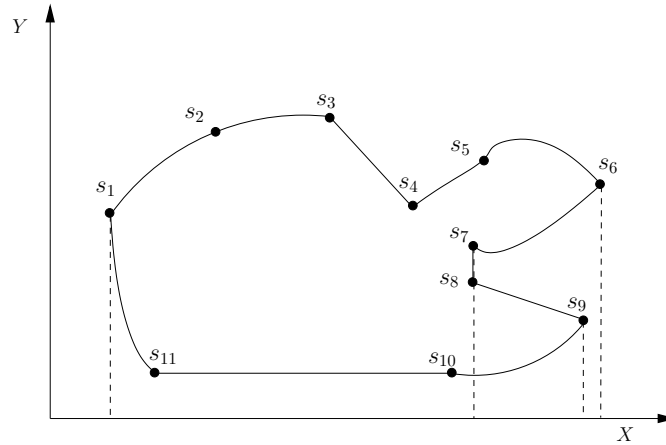


FIG. 4.1 – Illustration du principe de soustraction d'aires avec des fonctions.

On illustre ce principe à la figure 4.1. Soit onze segments qui relient les points s_1 à s_{11} entre eux pour former une aire fermée. Dans ce cas, l'aire de la zone totale S_t s'exprime en fonction des aires $S_{i,j}$ sous les segments i à j :

$$S_t = S_{1,6} - S_{6,7} + S_{8,9} - S_{9,1} \quad (4.5)$$

Il est à noter qu'à l'équation 4.5, $S_{9,1}$ représente les segments 9 – 10, 10 – 11 et 11 – 1. Ainsi, il est possible d'intégrer ce principe sous forme d'algorithme pour calculer l'aire d'une zone fermée formée de segments de fonctions.

4.1.3 Algorithme de découpe pour le croisement avec un espace limité

Dans le cas d'un mécanisme plan, il peut être utile de mesurer l'espace atteignable à orientation constante inscrit dans un espace plus restreint que l'espace atteignable total. Par exemple, on peut imaginer un mécanisme à câbles plan à l'extérieur d'une zone que le mécanisme peut physiquement atteindre (voir figure 4.2) ou d'une zone de travail utile.

Dans ce cas, un algorithme est développé pour permettre de calculer cet espace de travail utile. Par exemple, cela peut servir à comparer des mécanismes qui ne doivent

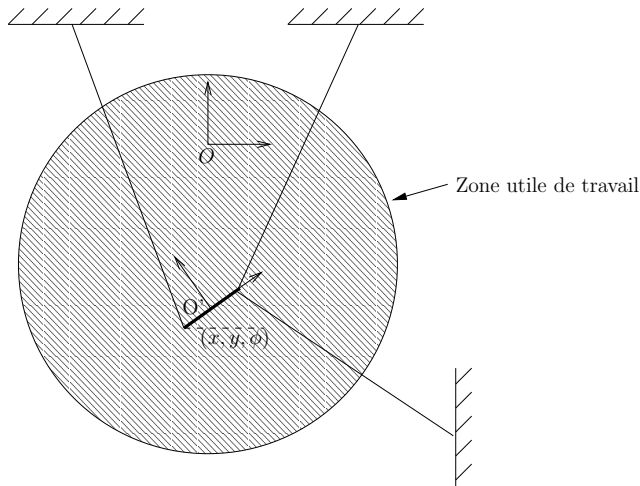


FIG. 4.2 – Illustration du calcul de l'espace dans une sous-zone utile.

travailler que dans un certain sous-domaine de leur espace atteignable global. Dans le cas d'un mécanisme à câbles plan, il est possible que l'espace de travail dynamique soit ouvert. Dans ce cas, il est indispensable d'imposer des limites physiques au débattement du mécanisme pour mesurer l'espace de travail dynamique.

L'algorithme a été développé pour un sous-espace circulaire, et pourrait être étendu à toute autre forme de sous-espace physique atteignable. L'algorithme peut être décrit comme suit :

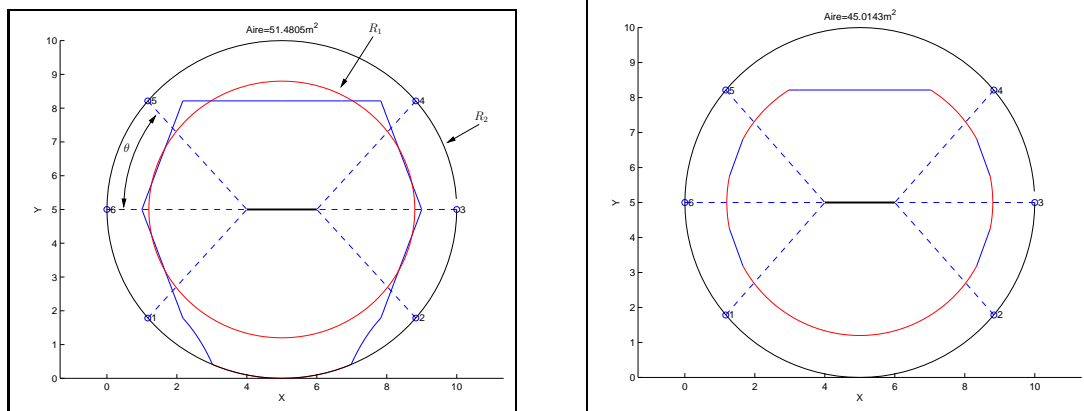
1. Trouver les intersections entre la forme considérée pour la zone utile de travail et les courbes définissant l'espace de travail.
2. Ordonner ces segments en vérifiant lesquels sont à l'intérieur et lesquels sont à l'extérieur entre chaque intersection de la zone de contour. Pour ce faire il faut d'abord tester les courbes frontières pour vérifier si les courbes forment une zone ouverte ou fermée.
 - (a) Dans le cas où les frontières sont ouvertes, il faut les fermer avec la forme de contour. Puis, de façon générale, il faut vérifier numériquement l'appartenance à l'espace de travail de chaque côté des courbes.
 - (b) Dans le cas où les frontières sont fermées, il devient trivial de savoir quelles zones sont à l'intérieur et quelles zones sont à l'extérieur de l'espace de travail. En effet, l'aire est nécessairement finie.
3. Ensuite, avec chaque segment formant le nouvel espace de travail dynamique à

Condition dynamique		Architecture	
Accélérations	$(a_x, a_y, a_\tau) = (5\frac{m}{s^2}, 2\frac{m}{s^2}, 1\frac{rad}{s^2})$	θ	45°
Orientation	20°	$R_2(\text{attache})$	5m
Masse	$10kg$	\mathbf{v}_i	$(-1, 0)$ ou $(1, 0)$
Inertie	$10kgm^2$	$R_1(\text{découpe})$	3.8m

TAB. 4.1 – Caractéristiques du mécanisme utilisé comme exemple avec l’algorithme de découpage.

mesurer, il est possible de calculer l’aire exacte de l’espace de travail.

L’exemple suivant illustre l’utilisation de cet algorithme pour trouver l’espace atteignable statique d’un mécanisme à 6 câbles actionnés. À la figure 4.3, l’espace atteignable statique est tracé pour un mécanisme à 6 câbles ayant les caractéristiques données au tableau 4.1.



(a) Espace atteignable et le cercle de découpe

(b) Espace atteignable inscrit dans un cercle

FIG. 4.3 – Illustration de l’algorithme de découpage(espace atteignable en régime statique).

On remarque qu’à la figure 4.3(a), un arc de cercle définit la limite de l’espace atteignable au bas du graphique. En considérant que la gravité agit en $-y$, l’espace atteignable statique est ouvert et infini vers le bas. Dans le cas présent, il a été considéré que l’espace doit être fini et inscrit dans le cercle qui définit les points d’attache.

À la figure 4.3(b), l’algorithme de découpe est utilisé pour calculer l’aire inscrite

dans un cercle d'un rayon de $3.8m$.

4.2 Découpage numérique avec tests vectoriels simplifiés

Pour mesurer l'aire de l'espace de travail il est aussi possible d'utiliser des tests vectoriels en plusieurs points. Il s'agit de mesurer l'aire par sommation de petites aires dont l'appartenance à l'espace de travail est vérifiée de façon vectorielle. Pour ce type de calcul numérique, et pour les types de calculs présentés à la section 4.3, il n'est pas présenté de méthode de découpage pour un sous-espace donné, car il est facile de spécifier les bornes à l'intérieur desquelles les tests sont faits. Bien entendu, pour ces mêmes deux sections, les découpages peuvent se faire de plusieurs façons. Ainsi, les algorithmes ont été développés pour un découpage radial et cartésien. La vérification de l'appartenance à l'espace de travail se fait comme suit :

1. Calcul numérique des forces dans les câbles pour toutes les combinaisons de n câbles (pour un mécanisme à 3 ddl plan $n = 3$) à l'équilibre.
2. S'il existe une combinaison de câbles avec des forces positives et finies, il est vérifié que la pose est à l'intérieur de l'espace de travail. Dans le cas contraire, il est admis que la pose considérée n'est pas dans l'espace de travail car aucune des combinaisons de câbles ne peut la générer.

La figure 4.4 illustre comment l'aire discrétisée approxime l'aire exacte. Il y est tracé le même espace de travail statique qu'à la section 4.1 pour les mêmes conditions, soit celles données au tableau 4.1. Il n'y a toutefois pas de limite de contour à $R_1 = 3.8m$. Aussi, dans ce cas, l'espace a été calculé à l'intérieur d'un cercle de $5m$ (R_2) en discrétisant de façon radiale en 40 points pour le rayon et 80 points entre 0 et 360° .

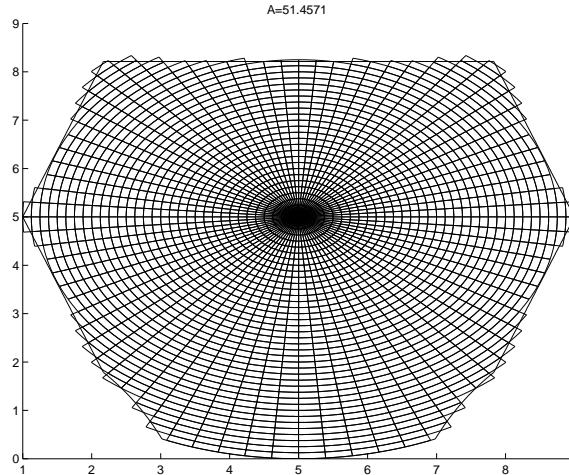


FIG. 4.4 – Illustration de l’aire mesurée par découpage numérique radial.

4.3 Découpage numérique progressif

Le calcul de l’espace vectoriel numérique par discrétisation de l’espace de travail peut être optimisé. En effet, dans le cas présent, les courbes frontières sont des quadratiques. Donc, il est certain que l’aire formera au maximum une zone fermée. Un algorithme par découpage numérique progressif est donc présenté. Les étapes de cet algorithme sont :

1. Discrétisation et tests vectoriels à faible résolution.
2. Identification des zones testées positives qui sont entourées de zones testées positives.
3. Marquage de ces zones pour ne plus les tester lors de passages à résolution supérieures et addition de leur aire.
4. Balayage à résolution supérieure et retour à l’étape 2 jusqu’à obtention de la résolution voulue.
5. Arrêt de la procédure.

Ainsi, l’aire totale est obtenue. On remarque une amélioration non négligeable de la vitesse de calcul de l’aire par rapport à la méthode décrite à la section 4.2. Le tableau 4.2 indique les temps de calcul pour chacune des méthodes avec un mécanisme témoin. Le même exemple que précédemment est illustré à la figure 4.5. La résolution numérique utilisée est la même.

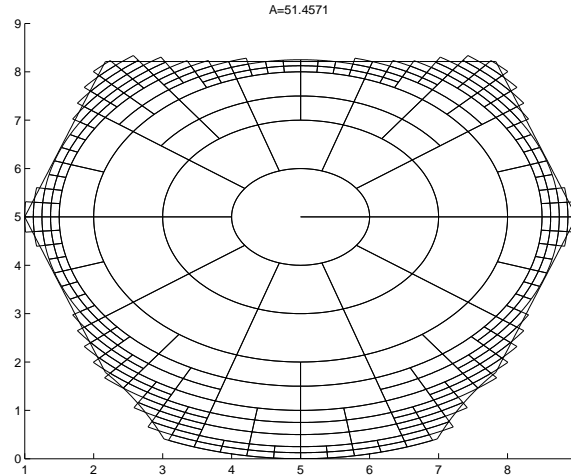


FIG. 4.5 – Illustration de l’aire mesurée par découpage numérique progressif radial.

4.4 Considérations générales

Les diverses méthodes de calcul de l’espace de travail sont maintenant comparées. Pour le cas témoin d’espace atteignable étudié dans ce chapitre, les temps de calcul sont comparés ².

Méthode	Temps de calcul	Potentiel de généralisation
Sommation d’intégrales	4.8 sec.	Difficile de traiter des courbes analytiques plus complexes
Discrétisation	51.5 sec.	Excellente
Discrétisation progressive	12.7 sec.	Excellente

TAB. 4.2 – Comparaison entre les méthodes de calcul de l’aire de l’espace atteignable.

D’abord, on remarque la grande rapidité de la méthode de calcul exact par sommation d’intégrales. Cependant, dans le contexte d’une optimisation, la méthode exacte est considérée instable. En effet, le calcul d’intersections entre des quadratiques très semblables peut provoquer la formation de dénominateurs très petits. Aussi, le développement de méthodes de calcul numériques pour le cas plan peut être étendu plus facilement pour des mécanismes comprenant des membrures passives et des mécanismes tridimensionnels dont les frontières analytiques sont des courbes plus complexes. Le

²Les temps suivants sont obtenus avec un processeur pentium 500 Mhz 512 Megs de RAM avec Windows XP et Matlab version 6.1.

choix de l'utilisation de l'algorithme de découpage numérique progressif est donc justifié par la facilité de sa généralisation à des mécanismes avec membrures passives plans et en trois dimensions.

Chapitre 5

Critères d'optimisation et optimisation : cas plan

Ce chapitre porte sur la définition de critères d'optimisation et sur la programmation d'optimisation. On justifie aussi les choix des masses et des propriétés physiques par rapport au développement d'un prototype. Des résultats et des discussions pour plusieurs critères d'optimisation sont exposés. On y trace aussi des exemples avec certains mécanismes.

5.1 Algorithme d'optimisation

Les algorithmes d'optimisation utilisés sont de type minimisation de fonctions non linéaires à plusieurs variables avec conditions frontières et contraintes. Les optimisations ont été effectuées avec le logiciel Matlab. Dans la plupart des cas, la fonction “fmincon” a été utilisée.

Pour faire une optimisation, il faut d'abord définir les critères d'optimisation qui seront utilisés. Des fonctions objectives sont donc développées. Plusieurs de ces fonctions tiendront compte de l'aire de l'espace de travail dynamique dont le calcul a été développé au chapitre précédent. Les variables à optimiser seront les positions des points d'attache.

Le calcul de l'aire de l'espace de travail dynamique est numérique, et procède par discrétisation. Il est important de tenir compte de ce fait dans le développement des fonctions d'optimisation. En effet, les fonctions objectives seront discrètes par rapport aux variables d'optimisation. Ainsi, les intervalles pour le calcul des gradients doivent être choisis en conséquence.

5.2 Critères d'optimisation

La compréhension de la cinématique, de la dynamique et des frontières de l'espace atteignable des mécanismes à câbles ainsi que les méthodes de calcul de l'espace de travail dynamique présentées dans les chapitres 1, 2, 3 et 4 sont maintenant utilisées pour la définition de critères de performance. Ces mêmes critères sont utilisés dans le but de définir des architectures intéressantes par optimisation. Les critères définis ici sont développés pour les mécanismes plans à 3 ddl. Ils pourraient éventuellement être adaptés à des mécanismes plans à 2 ddl en translation seulement.

5.2.1 Aire pondérée

L'un des aspects intéressants des mécanismes à câbles est le fait qu'ils permettent de grands débattements. Pour mettre cette caractéristique en relief il est possible d'op-

timiser l'aire de l'espace de travail dynamique. Ce critère consiste donc simplement en la mesure de l'aire à une orientation constante moyennée sur plusieurs conditions dynamiques. Il ne tient donc pas compte des orientations possibles de l'effecteur. Comme il a été expliqué au chapitre 4, l'aire est exprimée par une sommation d'aires dont l'appartenance à l'espace atteignable est vérifiée.

Soit A_i l'aire associée à la condition dynamique i , et $A_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}$ où A_{ij} est l'aire d'un élément discret j pour la condition dynamique i . L'évaluation de l'aire de l'espace atteignable 2d sur k conditions dynamiques s'exprime donc par :

$$\eta = \sum_{i=1}^k A_i \quad (5.1)$$

5.2.2 Mobilité ou volume atteignable plan

Le critère de la mobilité, ou du volume atteignable en 3 ddl donne une mesure du volume atteignable dans l'espace (X, Y, ϕ) . Par exemple, selon ce critère, un mécanisme ayant des plages d'orientation étendues sur un espace atteignable 2d est considéré comme intéressant. Comme l'espace atteignable dynamique varie selon les conditions dynamiques, un critère de mobilité moyenné sur plusieurs conditions dynamiques jugées intéressantes peut aussi être utilisé. Le critère de performance η s'exprime donc par un volume dans l'espace (X, Y, ϕ) de façon discrète approximé par une sommation de cubes numériques.

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{i=1}^k V_i \\ V_i &= \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} \Delta \phi_{ij} \end{aligned} \quad (5.2)$$

où V_i est un volume associé à la condition dynamique i , et Δx_{ij} , Δy_{ij} et $\Delta \phi_{ij}$ définissent les éléments discrets j associés à la condition dynamique i . L'algorithme développé pour quantifier le volume est sensiblement le même que celui utilisé pour

mesurer l'aire de l'espace de travail dynamique. On observe à la figure 5.1, que ce volume peut être composé de plusieurs volumes distincts. On y observe un volume autour de $\phi = 0$ et un autre autour de $\phi = 100^\circ$. On note aussi, comme on est dans le cas plan, il est considéré possible que les câbles se croisent et que la configuration soit quand même réalisable. Il faut aussi prendre note que les volumes observés ont une signification en absolu seulement. Les positions x , y ou ϕ sont simplement des coordonnées.

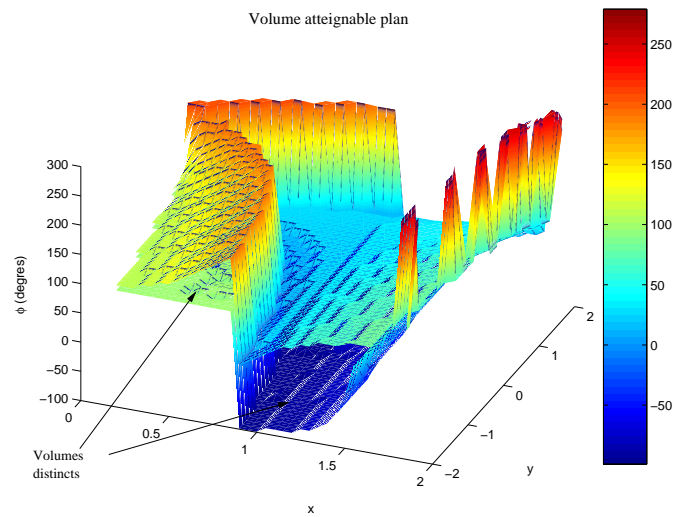


FIG. 5.1 – Illustration d'un volume en X, Y, ϕ

5.3 Méthodologie d'optimisation

Chacun des critères de performance développé précédemment peut être utilisé dans le cadre d'une optimisation. Dans le cadre de ce travail, la programmation est faite dans le logiciel matlab et la méthode d'optimisation est une optimisation non linéaire contrainte et bornée. Les critères précédents sont implantés sous forme de fonctions dépendantes des paramètres géométriques. Ces mêmes paramètres sont bornés à leurs valeurs réalisables et choisis arbitrairement. Au chapitre 4, plusieurs méthodes de calcul de l'aire ont été proposées. Il a été observé que les méthodes exactes sont instables numériquement, car elles impliquent des calculs d'intersections de quadratiques ou de polynômes de degré plus élevé dans le cas de mécanismes comprenant des membrures passives. Or, ces polynômes peuvent changer rapidement pour de petites variations des

paramètres. Aussi, les calculs des multiples intersections entre ces polynômes peuvent être complexes dans le cas de polynômes de degré élevé. On choisit donc d'utiliser les méthodes de calcul de l'espace atteignable numériques en discrétisant l'espace dans le domaine cartésien et angulaire. Par une telle méthode, toutefois, on obtient des fonctions discrètes et il est donc impératif de contrôler les niveaux de précision pour obtenir des pas d'itération suffisamment grands afin de faire varier la fonction discrète. Il s'agit donc d'un compromis entre la stabilité et la précision de calcul. On note aussi que les résultats des optimisations ne sont pas des optimums globaux, mais les meilleurs parmi les optimums locaux trouvés.

5.4 Modèle d'optimisation et justifications

On définit un modèle et des paramètres géométriques comme variables d'optimisation. Avec les critères choisis, il est alors possible d'obtenir des valeurs optimales pour chacun des paramètres libres à optimiser. La démarche présentée ne prétend pas donner un mécanisme à câble optimal absolu mais vise plutôt à démontrer comment certains critères d'optimisation s'appliquent aux mécanismes à câbles.

On choisit un modèle d'optimisation à 5 variables. L'architecture considérée ici l'est pour plusieurs raisons :

1. Une architecture à trois câbles (non redondante) est choisie pour simplifier le contrôle.
2. Un câble passif de type tension constante est intégré à l'architecture. Un tel câble permet d'induire des accélérations supérieures à la gravité vers le bas, et est moins restreignant qu'une liaison de type ressort avec de grandes élongations.
3. Le laboratoire utilise une structure de mécanisme à câble reconfigurable en forme de cube de deux mètres d'arêtes. Ainsi, la géométrie des paramètres d'optimisation est choisie pour s'intégrer facilement à cette structure, tel qu'illustré à la figure 5.2.

Ainsi, un modèle d'optimisation à cinq variables est développé. Quatre de ces variables sont reliées aux points d'attache fixes des câbles actifs et du câble passif. Le

cinquième paramètre définit la position du câble passif sur l'effecteur par rapport au centre de l'effecteur (ce paramètre peut prendre des valeurs entre $-0.1m$ et $0.1m$) . Les paramètres variables lors des optimisations sont les valeurs l_1 à l_5 telles que définies à la figure 5.2.

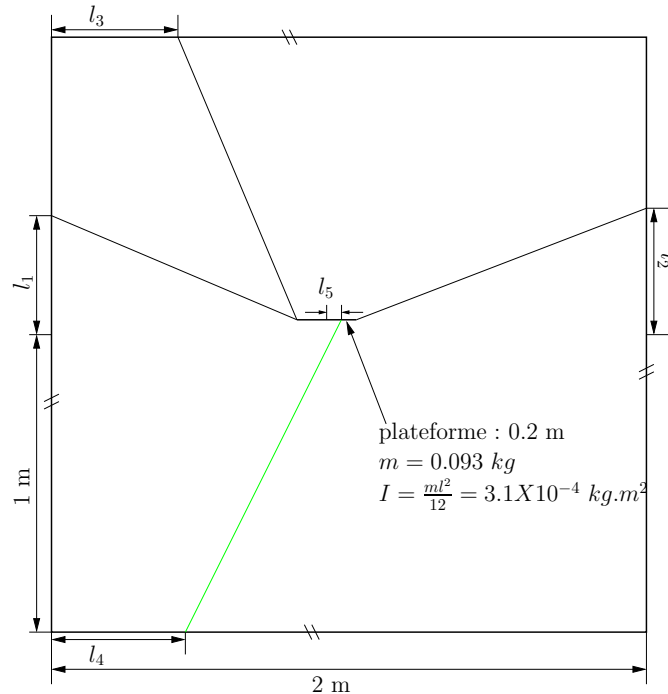


FIG. 5.2 – Illustration des paramètres architecturaux pour l'optimisation.

5.4.1 Critère de l'aire pondérée

On considère d'abord comme fonction à optimiser l'aire de l'espace de travail dynamique moyennée sur plusieurs conditions dynamiques. Pour la pondération, on choisit des conditions dynamiques variant entre $-5 g$ et $5 g$ en x et y , ainsi que des accélérations angulaires comprises entre -10 et $10 rad/s^2$. Comme la méthode d'optimisation est numérique, on essaie plusieurs valeurs initiales pour les optimisations. Les valeurs optimales de la fonction objective retenues sont celles qui sont les meilleures parmi les résultats obtenus pour les diverses valeurs initiales utilisées. On note aussi que pour cette optimisation, l'orientation nulle est choisie. Les résultats sont inscrits au tableau 5.1.

Le minimum retenu est donc le troisième optimum. Cette configuration, ainsi que

Point initial	Optimum local	Aire moyenne
(0, 0.8, 1, 1, -0.1)	(-0.5, -0.1, 0.5, 1.5, -0.1)	0,86 m ²
(1, 1, 1, 1, 0)	(-1, 2, 2, 2, 0.0823)	1,2 m ²
(-1, 1, 1, 1, 0)	(-0.8125, 1.375, 0.4375, 1.5625, 0.05625)	1.3 m ²

TAB. 5.1 – Résultats des optimisations avec aire pondérée.

son espace atteignable statique, sont représentés à la figure 5.3.

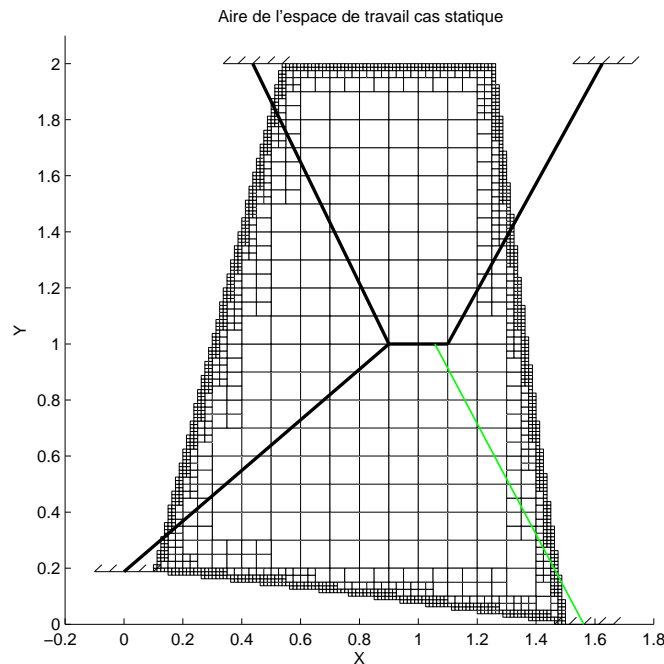


FIG. 5.3 – Le résultat de l'optimisation.

On note que le critère qui a été utilisé pour cette optimisation ne tient pas compte de l'espace atteignable en orientation ainsi que de la dextérité du mécanisme. Pour avoir une idée sommaire des caractéristiques de ce mécanisme, ces propriétés sont illustrées dans le cas statique à orientation nulle. On trace d'abord les courbes de dextérité du mécanisme (à orientation nulle) à la figure 5.4(a).

Soit les matrices A et B telles que définies à l'équation (1.3). Cette dextérité s'exprime ainsi :

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{(\|A^{-1}B\|)(\|B^{-1}A\|)} \quad (5.3)$$

Évidemment, en s'approchant des courbes de singularité, la dextérité diminue. Ce-

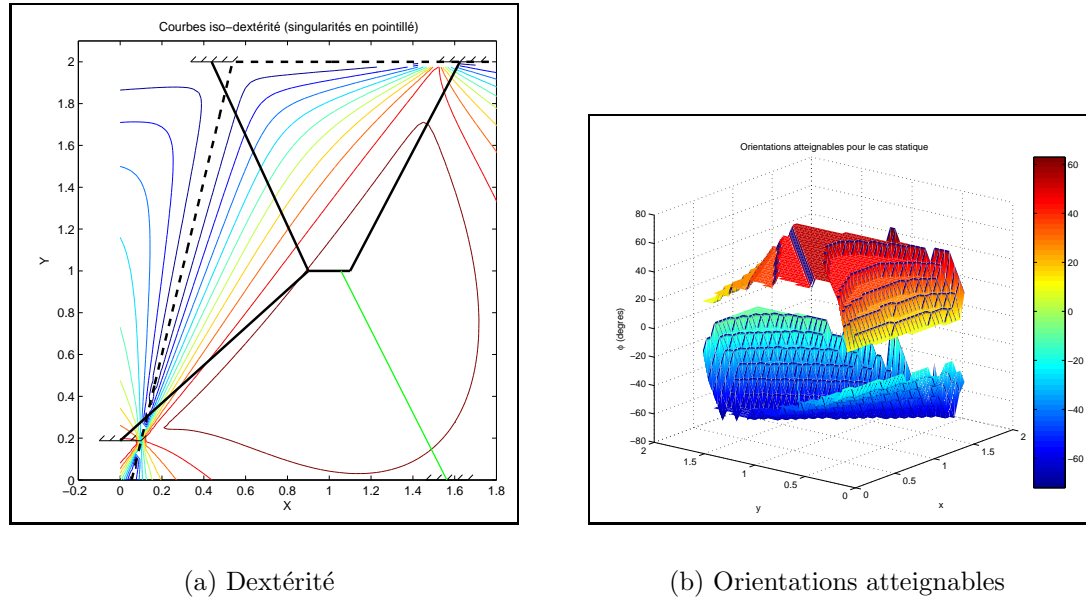


FIG. 5.4 – Caractéristiques du mécanisme obtenu par optimisation de l’aire de l’espace atteignable moyenne.

pendant, le mécanisme est jugé utilisable à partir de la dernière courbe iso-dextérité tracée près des lignes de singularité, lesquelles correspondent à une dextérité de 0.0212 (en utilisant la norme euclidienne). La différence de dextérité entre les courbes est de 0.0212. La dextérité est donc de 0.211 sur une grande partie de l’espace de travail statique. On trace ensuite les orientations atteignables dans la condition statique à orientation nulle à la figure figure 5.4(b). Il est observé que les plages d’orientation atteignables sont (pour le cas statique toujours) de $\pm 60^\circ$.

5.4.2 Critère de la mobilité pondérée

On considère ensuite la fonction objective suivante : la mobilité moyennée sur plusieurs conditions dynamiques. Pour la pondération, on choisit les mêmes conditions qu’à la section 5.4.1, soit des conditions dynamiques variant entre $-5 g$ et $5 g$ en x et y , ainsi que des accélérations angulaires comprises entre -10 et 10 rad/s^2 . Comme la méthode d’optimisation est numérique, on essaie encore une fois plusieurs valeurs initiales pour les optimisations. Les valeurs optimales de la fonction objective retenues sont celles qui sont les meilleures parmi les résultats obtenus pour les diverses valeurs initiales utilisées.

Point initial	Optimum local	Mobilité moyenne
$(0, 0.8, 1, 1, -0.1)$	$(1, 1, 0, 2, -0.1)$	3.235 rad.m^2
$(1, 1, 1, 1, 0)$	$(-1, 2, 2, 0, 0.1)$	3.822 rad.m^2
$(-1, 1, 1, 1, 0)$	$(-1, 2, 2, 1.7969, 0.1)$	4.494 rad.m^2

TAB. 5.2 – Résultats des optimisations avec mobilité pondérée.

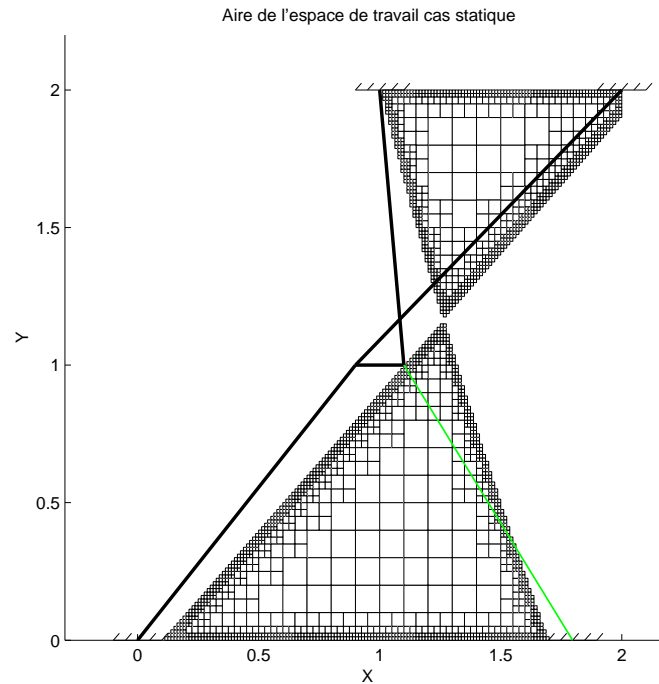


FIG. 5.5 – Le résultat de l'optimisation.

Avec ce mécanisme aussi, pour avoir une idée sommaire des caractéristiques, les courbes de dextérité à orientation nulle et l'espace atteignable en orientation sont illustrées dans le cas statique. La première observation, faite à la figure 5.5, est que l'espace atteignable statique de cette architecture est composée de deux zones distinctes. Cette propriété est liée au fait que deux câbles sont croisés à l'orientation de référence. On trace les courbes de dextérité du mécanisme (à orientation nulle) à la figure 5.6(a). Évidemment, encore une fois, en s'approchant des courbes de singularité, la dextérité diminue. L'architecture croisée des câbles fait qu'il y a une courbe de singularité diagonale qui sépare les deux zones de l'espace atteignable. Aussi, la dextérité est mauvaise sur une plus grande partie de l'espace atteignable. En effet, autour de la courbe de singularité on a des courbes de dextérité 0.0222 (avec la norme euclidienne) et chaque courbe de dextérité marque une augmentation 0.0222 de dextérité.

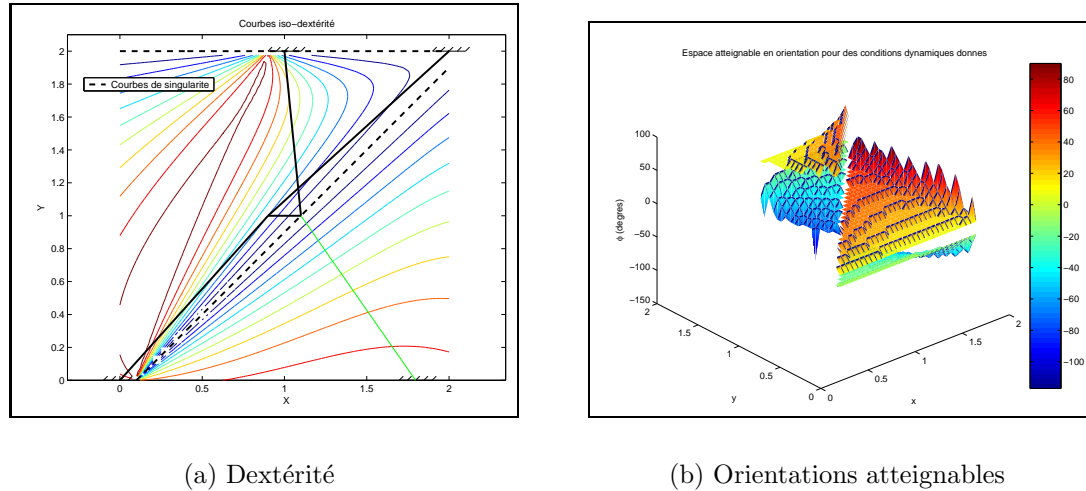


FIG. 5.6 – Caractéristiques du mécanisme obtenu par optimisation de l'aire de l'espace atteignable moyenne.

On trace ensuite les orientations atteignables dans la condition statique à orientation nulle à la figure 5.6(b). Il est observé que les plages d'orientation atteignables sont (pour le cas statique toujours) de $\pm 60^\circ$.

5.5 Commentaires sur les optimisations

Les optimisations présentées dans ce chapitre sont basées sur des critères simples, et l'utilisation de ces critères se veut simplement une démonstration de la façon dont ils peuvent être utilisés. Ainsi, une multitude d'autres critères de performance plus complexes peuvent se révéler plus appropriés dans le cadre d'un design de manipulateur à câbles. L'annexe C traite de critères de performance plus complexes, combinant par exemple l'aire et d'autres caractéristiques comme la dextérité.

Chapitre 6

Les frontières de l'espace atteignable : le cas tridimensionnel

Dans ce chapitre, il est question des équations exactes représentant les lieux de singularité et les lieux d'équilibre des manipulateurs à câbles spatiaux à 3 ddl en positionnement et à 6 ddl. On traite brièvement les frontières associées aux singularités, puis de façon plus détaillée, il est question des courbes d'équilibre des mécanismes sans liens passifs, avec liens passifs de type ressort et de type câble à tension constante. Comme dans le cas plan, on justifie le traitement du lien passif de type ressort car il s'agit d'un lien simple bien connu, et on traite le type de lien passif câble en tension constante car il permet un débattement intéressant, ainsi qu'une mise en oeuvre simple sur un prototype. Finalement, quelques exemples de lieux d'équilibre sont présentés pour des mécanismes à 3 et 6 ddl.

6.1 Frontières associées aux singularités

Comme c'est le cas pour les mécanismes plans, les frontières de singularités des manipulateurs à câbles, liées à la cinématique, sont les mêmes que celles des manipulateurs conventionnels à vérins. En ce qui concerne les mécanismes à 6 ddl, les lieux de singularité à orientation constante ont été traités ([11]) et correspondent à des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 (des cubiques). Les lieux de singularité à orientation générale s'expriment par des degrés plus élevés et plus difficiles à traiter. C'est aussi le cas pour les lieux d'équilibre. Ainsi, lorsqu'il est question de lieux d'équilibre, tout au long de ce chapitre, il est question de lieux d'équilibre à orientation constante.

6.2 Frontières d'équilibre

Contrairement aux frontières associées aux singularités, celles associées aux lieux d'équilibre dépendent des conditions dynamiques auxquelles un mécanisme est soumis. Les équations décrivant les lieux d'équilibre de mécanismes à câbles spatiaux à 6 ddl sans membrures passives ont été développées par Barrette[13]. Dans ce chapitre, ces mêmes relations sont traitées, mais avec une approche vectorielle ainsi que les relations décrivant les lieux d'équilibre de manipulateurs à câbles spatiaux à 3 ddl et 6 ddl pouvant comprendre des liens passifs de type ressort et câble à tension constante.

6.2.1 Mécanisme spatial à 3 ddl en positionnement

Les frontières d'équilibre potentielles d'un mécanisme à câble à 3 ddl sont des lieux d'équilibre à 2 câbles. Tout comme dans le cas de mécanismes plans à 3 ddl (tel qu'illustré au chapitre 2 à la section 2.2.2), il est possible de représenter les frontières d'équilibre par une pyramide dans l'espace des forces induites par les câbles. La formulation des relations décrivant les lieux d'équilibre dans l'espace tridimensionnel pour les mécanismes à 3 ddl spatiaux est donc semblable à celle qui décrit ces lieux pour les mécanismes plans à 3 ddl. De plus, la correspondance entre cet espace tridimensionnel des forces et le domaine physique cartésien est plus directe dans le cas spatial. L'approche utilisée pour définir les équations décrivant les lieux d'équilibre à 2 câbles des

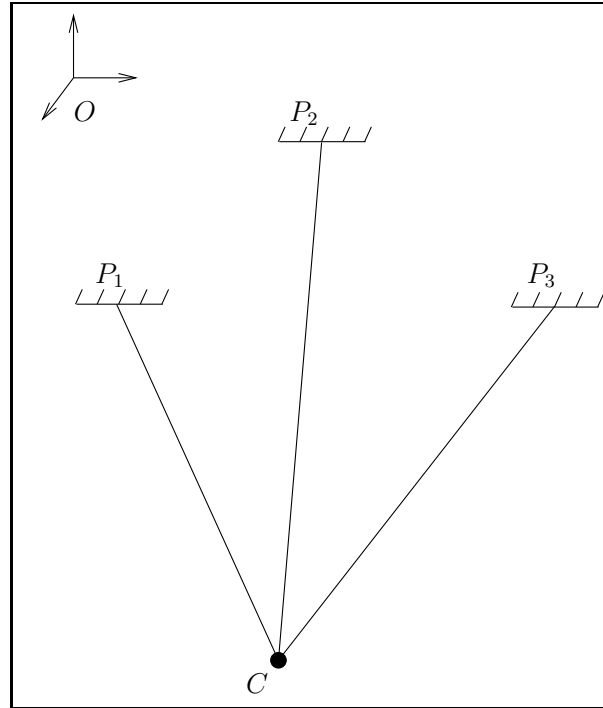


FIG. 6.1 – Illustration schématique d’un mécanisme spatial à 3-ddl en positionnement.

mécanismes à 3 ddl spatiaux est donc la même que celle utilisée pour les mécanismes plans à trois degrés de liberté.

Les configurations dans lesquelles l’effecteur est en équilibre à 2 câbles peuvent être exprimées de façon vectorielle. En effet, trois vecteurs sont dans un même plan quand le produit triple entre trois vecteurs est nul. Soit le vecteur \mathbf{p}_μ définissant la position du point d’attache du câble μ par rapport au repère fixe, et le vecteur \mathbf{c} définissant la position de l’effecteur par rapport au repère fixe. On définit le vecteur des efforts cartésiens voulus \mathbf{h} . Dans l’espace des forces cartésiennes, le vecteur des efforts cartésiens \mathbf{w}_μ que produit le câble μ à l’effecteur s’écrit (sa norme est arbitraire) :

$$\mathbf{w}_\mu = \mathbf{p}_\mu - \mathbf{c} \quad (6.1)$$

6.2.1.1 Mécanisme spatial à 3 ddl sans liaison passive

Pour un mécanisme à 3 ddl, les équations d’équilibre correspondant au duo de câbles μ et ν s’expriment donc simplement par :

$$(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h} = 0 \quad (6.2)$$

Dans le cas de mécanismes sans liaison passive, la relation (6.2) correspond toujours à des surfaces de degré 1 en (x, y, z) , c'est-à-dire à des plans. Il s'agit des configurations où un duo de câbles forme un plan parallèle au vecteur tridimensionnel des forces à induire à l'effecteur. Il est donc clair, dans ce cas, que seuls deux câbles suffisent à assurer l'équilibre dynamique.

6.2.1.2 Mécanisme spatial à 3 ddl avec ressorts (général)

Soit un mécanisme comprenant n ressorts de longueur libre l_k , avec $\rho_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{c}\|$ la longueur du câble passif k . La raideur du câble passif k est K_k . Pour un duo de câbles μ et ν , la relation décrivant les lieux d'équilibre est :

$$(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h}_e = 0 \quad (6.3)$$

avec

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k G_k \mathbf{w}_k \quad (6.4)$$

$$G_k = \frac{\rho_k - l_k}{\rho_k} \quad (6.5)$$

Cette relation correspond à des polynômes dont le degré maximal varie en fonction du nombre de liens passifs. Pour un mécanisme à N liens passifs, le degré maximal est vérifié par plusieurs exemples numériques pour N entre 1 et 5 et il correspond à $2^N(N+1)$. Des explications supplémentaires sur les expressions polynomiales correspondant aux relations vectorielles sont présentées à l'annexe D.

6.2.1.3 Mécanisme spatial à 3 ddl avec ressorts de longueur libre nulle

On considère maintenant le cas moins général de mécanismes comprenant des liens passifs de type ressorts à longueur libre nulle. Les équations d'équilibre correspondant aux duo de câbles μ et ν se simplifient alors. La relation d'équilibre est alors similaire à l'équation (6.3), mais avec :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) \quad (6.6)$$

Comme c'était le cas pour le mécanisme plan à 2 ddl (section 3.3) et le mécanisme plan à 3 ddl (section 3.4.3), la présence de ressorts à longueur libre nulle ne change pas le degré des courbes d'équilibre à deux câbles. Cette propriété est explicitée à l'annexe A à la section A.2.

6.2.1.4 Mécanisme spatial à 3 ddl avec câbles passifs à tension constante

Soit maintenant un mécanisme ayant N liaisons passives de type câbles à force constante F_k . Pour ce type de mécanisme, on obtient :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{\rho_k} \mathbf{w}_k \quad (6.7)$$

Comme dans le cas de ressorts à longueurs libres arbitraires, on obtient une relation à laquelle correspond un polynôme d'un degré $2^N(N + 1)$ qui est fonction du nombre N de liaisons passives.

6.2.2 Considérations générales sur les mécanismes spatiaux à 3 ddl

Pour tout type de mécanisme spatial à 3 ddl, avec ou sans lien passif, il est possible de représenter les lieux d'équilibre par une relation du type (6.3). Aussi, cette relation sera satisfaite dans trois cas :

1. Cas où $\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu = 0$. Ce cas correspond aux configurations où les deux câbles sont parallèles. Comme le mécanisme à 3 ddl spatial représente la position d'un point, cela implique que les câbles coïncident. Ainsi, ils induisent les mêmes accélérations cartésiennes à l'effecteur. Il s'agit donc d'une configuration où l'équation dégénère et n'est pas en équilibre proprement dit.
2. Cas où $\mathbf{h}_e = 0$. Pour un mécanisme sans liaison passive, où $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$ n'est pas fonction des positions cartésiennes, cela correspond au cas statique en apesanteur. Il s'agit donc d'une condition où le mécanisme est en équilibre statique. Pour les mécanismes avec des liens passifs, \mathbf{h}_e est fonction des positions cartésiennes. Ce cas correspond donc aux positions cartésiennes où les liens passifs produisent à eux seuls les accélérations voulues. Il s'agit donc, par exemple, dans le cas statique, des positions où le mécanisme est en équilibre statique avec un effort nul aux actionneurs.
3. Cas général où $(\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{h}_e = 0$. Correspond aux frontières d'équilibre proprement dites, c'est-à-dire aux endroits où deux membrures, qu'elles soient en tension ou en compression, suffisent à produire la condition dynamique voulue. Il faut donc ensuite établir les conditions pour lesquelles les 2 câbles considérés pour l'équilibre sont en tension.

6.2.3 Mécanisme spatial à 6 ddl

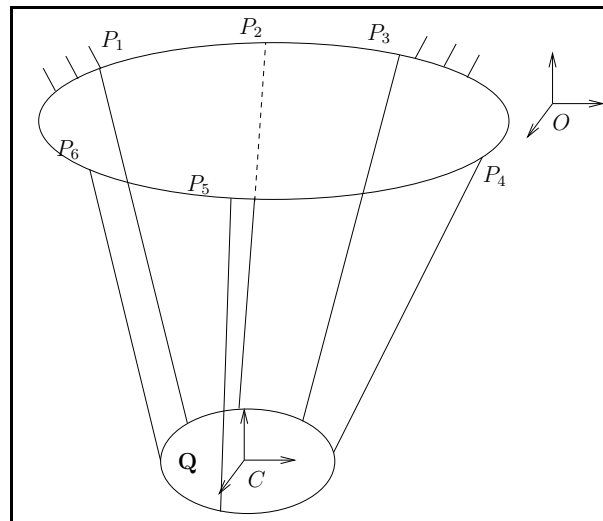


FIG. 6.2 – Illustration schématique d'un mécanisme spatial à 6 ddl.

Pour un mécanisme spatial à 6 ddl, les frontières d'équilibre potentielles sont des

lieux d'équilibre à 5 câbles. Contrairement aux cas de mécanismes à 3 ddl, il est impossible de représenter géométriquement les frontières d'équilibre par une pyramide tridimensionnelle. Comme cela a été expliqué au chapitre 2, les lieux d'équilibre peuvent être représentés dans l'espace des forces et moments induits par les câbles en six dimensions. L'approche utilisée pour définir les équations des lieux d'équilibre à 5 câbles est semblable à celle utilisée pour les mécanisme à trois degrés de liberté.

Les configurations dans lesquelles l'effecteur est en équilibre à 5 câbles peuvent être exprimées de façon vectorielle. Soit le concept d'hyper-plan étant défini comme un sous-espace vectoriel à cinq dimensions dans un espace à six dimensions. La condition d'équilibre à 5 câbles correspond aux configurations où le vecteur des forces voulues à l'effecteur \mathbf{h} est parallèle, c'est-à-dire dépendant de l'hyper-plan formé par les 5 vecteurs \mathbf{w}_i . Dans ce cas, l'extension en six dimensions du produit vectoriel tridimensionnel est utilisée pour produire un vecteur orthogonal aux 5 vecteurs définissant l'hyper-plan. Ensuite, comme c'est le cas en trois dimensions, le vecteur \mathbf{h} est parallèle à l'hyper-plan quand le produit scalaire du vecteur orthogonal à l'hyper-plan avec ce vecteur est nul.

L'extension en N dimensions du produit vectoriel est possible sur $N - 1$ vecteurs par le pseudo-tenseur Levi-Civita $\epsilon_{i,j,\dots,n}$ d'ordre N . Dans le cas 6ddl, le pseudo-tenseur ϵ_{ijklmn} se définit comme suit :

$$\epsilon_{ijklmn} = \begin{cases} 0 & \text{si deux des indices sont égaux;} \\ 1 & \text{si } ijklmn \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3, 4, 5, 6; \\ -1 & \text{si } ijklmn \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Par une sommation avec le tenseur Levi-Civita sur cinq vecteurs, on obtient un vecteur indépendant de ceux-ci. Soit l'espace en six dimensions des forces et des moments ayant comme base les vecteurs unitaires selon $(f_x, f_y, f_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z)$ que l'on définit comme étant $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$. De plus, soit le scalaire w_{ij} , étant la composante j du vecteur \mathbf{w}_i . Alors, un opérateur sur cinq vecteurs en six dimensions (\times^ϵ) produit un vecteur \mathbf{N}_p orthogonal aux cinq autres comme suit :

$$\mathbf{N}_p = \times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon = \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^6 w_{1i} w_{2j} w_{3k} w_{4l} w_{5m} \epsilon_{ijklmn} \mathbf{e}_n \quad (6.8)$$

Soit le vecteur \mathbf{v}_i définissant la position du point d'attache du câble i par rapport au repère mobile sur l'effecteur et le vecteur \mathbf{p}_i définissant la position de son point d'attache fixe. Le vecteur \mathbf{c} définit la position de l'origine du repère de l'effecteur par rapport au repère fixe et son orientation est définie par la matrice de rotation \mathbf{Q} . On définit aussi le vecteur des efforts cartésiens voulus \mathbf{h} . Dans l'espace des forces cartésiennes, on définit les composantes $\mathbf{w}_i = (\mathbf{f}_i, \boldsymbol{\tau}_i)^T$ du vecteur efforts cartésiens que produit le câble i à l'effecteur (sa norme est arbitraire et n'intervient pas dans les équations subséquentes) :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i &= \mathbf{p}_i - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\tau}_i &= (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i) \times \mathbf{f}\end{aligned}\tag{6.9}$$

6.2.3.1 Mécanisme spatial à 6 ddl sans liaison passive

Pour un mécanisme sans liaison passive, les forces à induire à l'effecteur \mathbf{h} sont directement induites par les câbles actionnés. L'équation des lieux d'équilibre à cinq câbles des câbles 1 à 5 s'exprime par :

$$\left(\times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon\right)^T \mathbf{h} = 0\tag{6.10}$$

Cette relation correspond à une expression polynomiale en x, y, z de degré 3.

6.2.3.2 Mécanisme spatial à 6-ddl avec liaisons passives

Pour un mécanisme avec liaisons passives, la relation donnant les lieux d'équilibre est équivalente à l'équation (6.10) en tenant compte toutefois des efforts engendrés par les articulations passives. Cela donne donc une relation du type (6.11), avec \mathbf{h}_e variant pour chaque type de liaison passive.

$$\left(\times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon\right)^T \mathbf{h}_e = 0\tag{6.11}$$

Le cas de ressorts ayant une longueur libre nulle est d'abord traité. On considère n ressorts dont la constante de raideur est K_k . Le vecteur indiquant leur point d'attache

fixe est \mathbf{p}_k et leur point d'attache sur le repère mobile de l'effecteur est donné par \mathbf{v}_k . On a alors la relation suivante qui donne les lieux d'équilibre :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k \mathbf{w}_k \quad (6.12)$$

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_k \\ (\mathbf{Q}\mathbf{v}_k) \times \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Pour des ressorts de longueur libre arbitraire l_k , avec $\rho_k = \|(\mathbf{p}_k - \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{v}_k)\|$ la longueur du câble passif k , on aura :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k G_k \mathbf{w}_k \quad (6.14)$$

$$G_k = \frac{\rho_k - l_k}{\rho_k} \quad (6.15)$$

Aussi, de façon semblable, on exprime la relation d'équilibre dans le cas de mécanismes ayant n membrures passives à tension constante F_k :

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{\rho_k} \mathbf{w}_k \quad (6.16)$$

Les formes polynomiales correspondant aux mécanismes à câble à 6 ddl comprenant des membrures passives ne sont pas traitées. Il est simplement noté que, pour plusieurs cas observés, les relations d'équilibre de mécanismes avec des ressorts à longueur libre nulle sont aussi des cubiques, et que les relations d'équilibre de mécanismes avec des liens passifs à tension constante ou ressorts à longueur libre arbitraire ont des degrés maximums 14, 32 et 72 pour respectivement 1, 2 et 3 liens passifs.

6.2.4 Considérations générales mécanismes spatial à 6 ddl

On a à peu de choses près les mêmes considérations par rapport aux équations d'équilibre à 5 câbles que par rapport aux lieux d'équilibre à deux câbles. On peut

toujours exprimer les lieux d'équilibre par une relation du type (6.11). Aussi, cette relation sera satisfaite dans trois cas :

1. Cas où $\times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon = 0$. Ce cas correspond aux configurations où les cinq câbles considérés pour l'équilibre ne sont pas indépendants. Il s'agit donc d'une configuration où l'équation dégénère et n'est pas en équilibre proprement dit.
2. Cas où $\mathbf{h}_e = 0$. Pour un mécanisme sans liaison passive, où $\mathbf{h}_e = \mathbf{h}$ n'est pas fonction des positions cartésiennes, ce cas arrive alors pour un équilibre statique en apesanteur. Pour les mécanismes avec des liens passifs, \mathbf{h}_e est fonction des positions cartésiennes. Ce cas survient donc quand les liens passifs produisent seuls les accélérations voulues. Il s'agit donc, par exemple, dans le cas statique, des positions où le mécanisme est en équilibre statique.
3. Cas général où $(\times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon)^T \mathbf{h}_e = 0$. Correspond aux frontières d'équilibre à proprement parler, c'est-à-dire aux endroits où une membrure suffit à produire la condition dynamique voulue, qu'elle soit en tension ou en compression. Pour ces courbes, il faut donc ensuite vérifier quelles zones correspondent à une tension dans les câbles. Ces zones sont les zones des lieux d'équilibre réels.

6.3 Exemples de frontières d'équilibre

On trace maintenant quelques exemples de lieux d'équilibre pour des mécanismes spatiaux. Tout au long de cette section, on ne considère que les câbles pour lesquels on calcul l'équilibre. Ainsi, pour des mécanismes à 3 ddl, on ne trace que deux câbles actionnés ainsi que les liens passifs. Aussi, pour des mécanismes à 6 ddl on considère 5 câbles actionnés pour l'équilibre. La démarche présentée pour trouver les relations définissant les lieux d'équilibre fait abstraction des conditions dynamiques (masse et inertie) de l'effecteur. Aussi, pour les exemples, des caractéristiques dynamiques sont choisies. Pour simplifier la notation, on considère que le centre de masse de l'effecteur est à l'origine du repère mobile.

Soit la matrice d'inertie \mathbf{I} , la masse m , le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, le vecteur accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ et le vecteur accélération cartésienne $\ddot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$. On a la condition dynamique \mathbf{h} voulue ainsi :

$$\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T \quad (6.17)$$

$$\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T & (\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^T \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

L'expression (6.17) désigne le cas 3 ddl et l'expression (6.18) le cas 6 ddl. Dans les expressions (6.17) et (6.18), \mathbf{g} désigne le vecteur d'accélération gravitationnelle terrestre.

6.3.1 Mécanismes à 3 ddl en positionnement

6.3.1.1 Avec ressorts à longueur libre nulle

Quelques exemples de tracés de frontières d'équilibre de mécanismes spatiaux à 3 ddl sont illustrés. Tout d'abord, on considère un mécanisme à 3 ddl avec ressorts à longueur libre nulle, ayant une architecture donnée au tableau 6.1. À la figure 6.3, on observe les frontières d'équilibre pour un cas statique et un cas dynamique. Les trois liens en rouge (qui sont vers le bas) correspondent aux liens passifs (ressorts) et les deux en noir aux câbles actionnés. On remarque que, tel qu'expliqué à la section 6.2.1.2, la surface à laquelle correspond les lieux d'équilibre est un plan.

6.3.1.2 Avec ressorts à longueur libre arbitraire

On considère maintenant des mécanismes spatiaux à 3 ddl avec ressorts à longueur libre arbitraire. L'architecture considérée (tableau 6.2) est la même que celle présentée au tableau 6.1 mis à part la longueur libre des ressorts. À la figure 6.4, les frontières d'équilibre sont montrées pour un cas statique et un cas dynamique. Sur cette figure, les câbles en rouge correspondent aux ressorts de longueur libre représentée par des sphères jaunes. Les câbles en noir sont les câbles actionnés. Dans le cas où il y a trois ressorts de longueur libre arbitraire, on obtient des relations en x, y, z de degré 32.

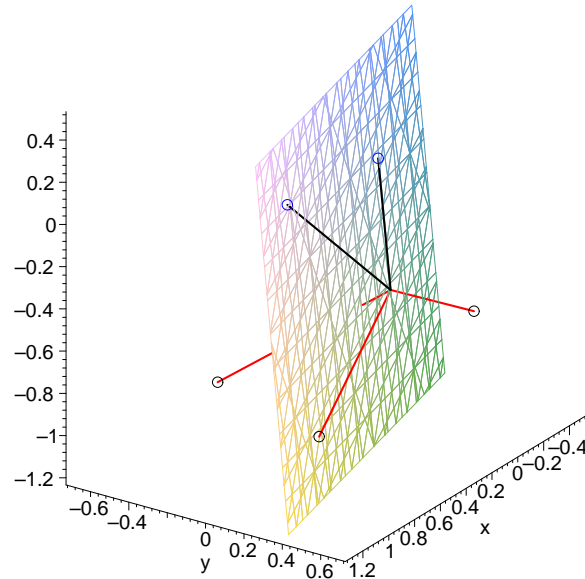
On observe aussi que ces courbes se rapprochent des courbes correspondantes au mécanisme avec des ressorts à longueur libre nulle. Ces courbes se rapprochent de plans quand les longueurs libres se rapprochent de zéro.

<i>Architecture</i>	
	\mathbf{p}_i
Câble actionné 1	(0, 0, 0)
Câble actionné 2	(1, 0.2, 0.2)
Ressort 1 (10 N/m)	(0, 0.5, -0.6)
Ressort 2 (5 N/m)	(0.5, -0.5, -1)
Ressort 3 (1 N/m)	(1.2, 0.5, -0.75)
<i>Conditions dynamiques</i>	
Masse effecteur	1 kg
Accélérations cas statique	nulles
Accélérations cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 5m/s^2, a_z = 10m/s^2$

TAB. 6.1 – Architecture avec des ressorts à longueur libre nulle (figure 6.3).

<i>Architecture</i>		
	\mathbf{p}_i	Longueur libre
Câble actionné 1	(0, 0, 0)	
Câble actionné 2	(1, 0.2, 0.2)	
Ressort 1 (10 N/m)	(0, 0.5, -0.6)	0.2m.
Ressort 2 (5 N/m)	(0.5, -0.5, -1)	0.1m.
Ressort 3 (1 N/m)	(1.2, 0.5, -0.75)	0.15m.
<i>Conditions dynamiques</i>		
Masse effecteur	1 kg	
Cas statique	nulles	
Cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 10m/s^2, a_z = 10m/s^2$	

TAB. 6.2 – Architecture avec des ressorts à longueur libre arbitraires (figure 6.4).



(a) Condition statique

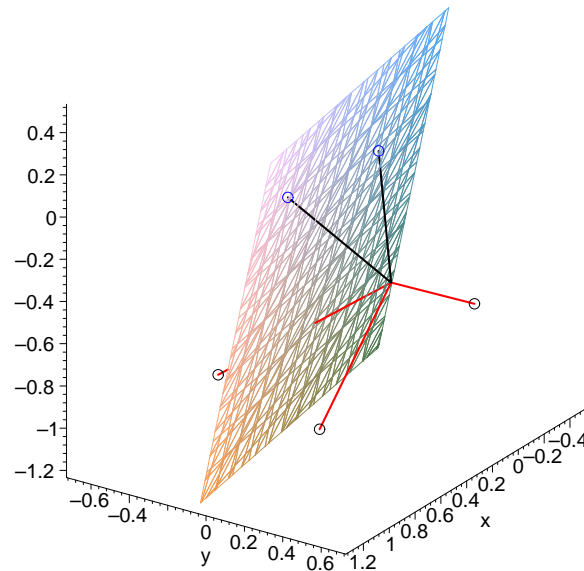
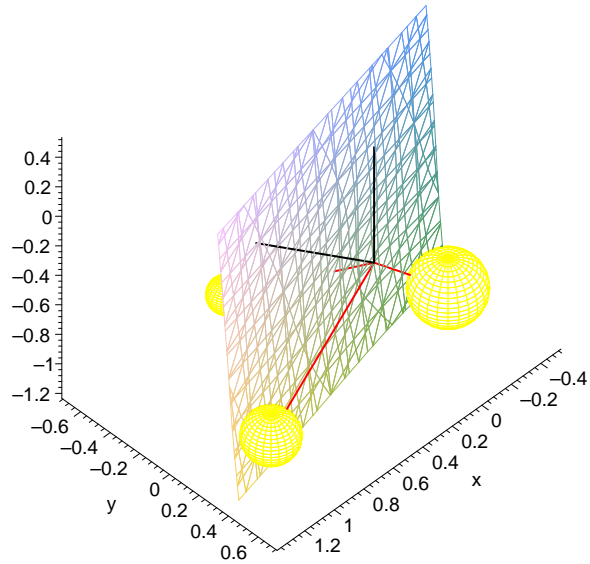
(b) Condition dynamique : $a_x = 5m/s^2, a_y = 10m/s^2, a_z = 10m/s^2$

FIG. 6.3 – Les frontières d'équilibre avec des ressorts à longueur libre nulle.

6.3.1.3 Avec câbles passifs à tension constante

Finalement on trace à la figure 6.5 des lieux d'équilibre de mécanismes spatiaux à 3 ddl avec câbles passifs à tension constante. L'architecture est illustrée au tableau 6.3.



(a) Condition statique

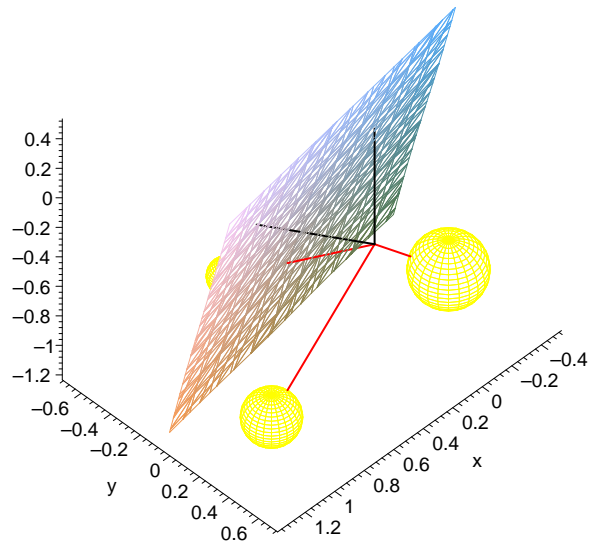
(b) Condition dynamique : $a_x = 5m/s^2, a_y = 10m/s^2, a_z = 10m/s^2$

FIG. 6.4 – Les frontières d'équilibre avec des ressorts à longueur libre arbitraire.

La même notation utilisée avec les liens passifs de type ressort est utilisée : les câbles en rouge correspondent aux câbles passifs et ceux en noir aux câbles actifs. Dans ce cas, la surface décrivant les lieux d'équilibre est équivalente à un polynôme de degré 32.

<i>Architecture</i>	
	\mathbf{P}_i
Câble actionné 1	(0, 0, 0)
Câble actionné 2	(1, 0.2, 0.2)
Lien passif 1 (10 N)	(0, 0.5, -0.6)
Lien passif 2 (5 N)	(0.5, -0.5, -1)
Lien passif 3 (1 N)	(1.2, 0.5, -0.75)
<i>Conditions dynamiques</i>	
Masse effecteur	1 kg
Accélérations cas statique	nulles
Accélérations cas dynamique	$a_x = 5m/s^2, a_y = 10m/s^2, a_z = 10m/s^2$

TAB. 6.3 – Architecture avec des liens passifs en tension.

6.3.2 Mécanismes à 6ddl

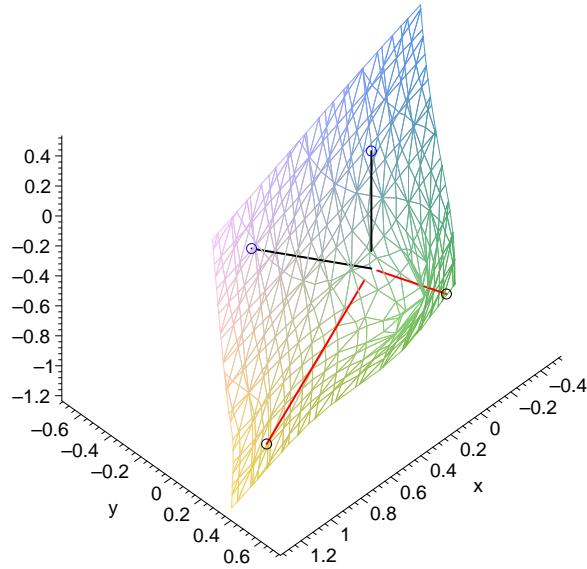
À la figure 6.6, on donne un exemple des lieux d'équilibre à cinq câbles pour un mécanisme à 6 ddl comprenant 3 câbles passifs de type ressort à longueur libre arbitraire. Les cinq câbles actionnés sont en noir (attachés à $z = 0$) et les trois câbles passifs sont en rouge (attachés en $z = -2$). L'architecture et les conditions reliées à ces tracés sont détaillées au tableau 6.4. Dans ce cas, ces courbes correspondent à un polynôme de degré 72.

6.4 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, des relations décrivant les lieux d'équilibre ont été présentées pour les mécanismes spatiaux à 3 et 6 ddl pouvant inclure des liens passifs de type ressort ou câble à tension constante. Ces lieux d'équilibre sont obtenus de façon vectorielle. Avec ces relations, on a tracé des exemples de lieux d'équilibre pour différents mécanismes. Comme c'est le cas pour les lieux d'équilibre plans, il faut noter que ces lieux ne correspondent pas nécessairement à des conditions de tension dans les câbles. Aussi, ces lieux correspondent à des zones d'équilibre s'il est vérifié que les forces dans les câbles sont des forces en tension.

<i>Liens actifs</i>				
	\mathbf{p}_i		\mathbf{v}_i	
Câble actionné 1	(1, 1, 0)		(0.1, 0.1, 0)	
Câble actionné 2	(-1, 1, 0)		(-0.1, 0.1, 0)	
Câble actionné 3	(-1, -1, 0)		(-0.1, -0.1, 0)	
Câble actionné 4	(1, -1, 0)		(0.1, -0.1, 0)	
Câble actionné 5	(0, 0, 0)		(0, 0, 0)	
<i>Liens passifs</i>				
	\mathbf{p}_k	\mathbf{v}_k	Raideur	Longueur libre
Ressort 1	(1, 1, -2)	(0.1, 0.1, 0)	100Nm	0.2m
Ressort 2	(-1, 1, -2)	(-0.1, 0.1, 0)	10Nm	0.1m
Ressort 3	(0, -1, -2)	(0, -0.1, 0)	50Nm	0.15m
<i>Caractéristiques dynamiques</i>				
Masse	5 (kg)			
Inertie	$I_{xx} = I_{yy} = 5, I_{zz} = 2, I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ (kgm ²)			
Orientation (Euler ZYZ)	$(\phi, \theta, \psi) = (10, 25, 15)$ degrés			
<i>Condition dynamique</i>				
Vitesse angulaire	$\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 2)$ (rad/s)			
Accélération angulaire	$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (0.5, 2, 1)$ (rad/s ²)			
Accélération cartésienne	$\ddot{\mathbf{c}} = (5, 10, 5)$ (m/s ²)			

TAB. 6.4 – Architecture d'un mécanisme spatial à 6 ddl (voir figure 6.6).



(a) Condition statique

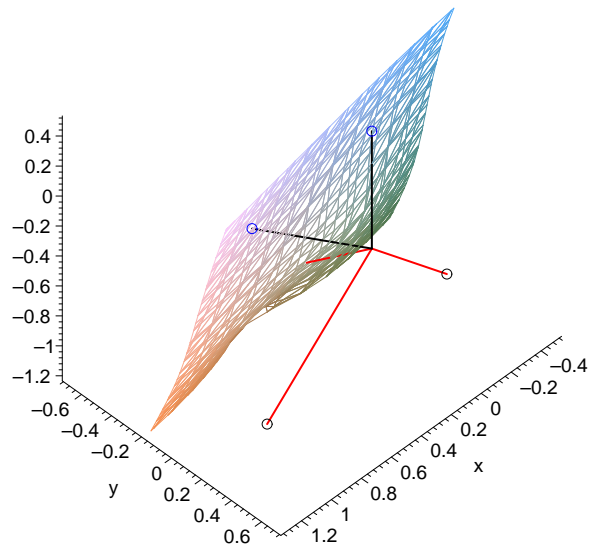
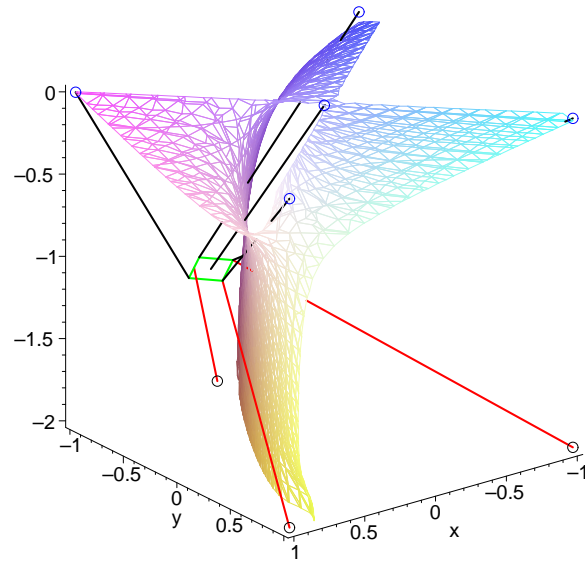
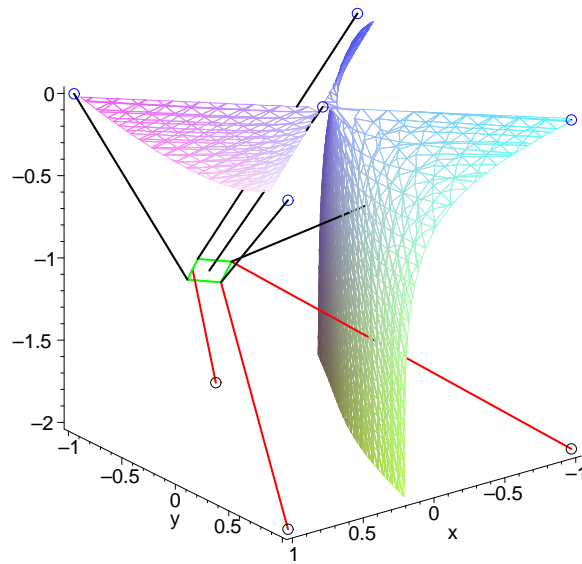
(b) Condition dynamique : $a_x = 5m/s^2, a_y = 10m/s^2, a_z = 10m/s^2$

FIG. 6.5 – Les frontières d'équilibre avec câbles passifs à tension constante.

L'espace atteignable dynamique d'un manipulateur à câbles spatial est, comme on le sait, délimité par des frontières d'équilibre et des frontières de singularité. Aussi, par la description analytique des frontières d'espaces atteignables de mécanismes généraux à câbles pouvant contenir des liens passifs, on vise d'abord une meilleure compréhension



(a) Condition statique



(b) Condition dynamique (tableau 6.4)

FIG. 6.6 – Les frontières d'équilibre avec des ressorts de longueur libre arbitraire.

de ces espaces, et éventuellement la description des frontières exactes de ces espaces atteignables globaux.

Chapitre 7

Méthodes de calcul de l'espace atteignable pour des mécanismes spatiaux

Ce chapitre présente les méthodes de calcul pour quantifier l'espace de travail de manipulateurs parallèles à câbles spatiaux. Ces méthodes visent à quantifier le potentiel de mobilité cartésienne et angulaire. Ces méthodes sont ensuite intégrées dans des fonctions objectives visant à caractériser les performances d'un manipulateur. Globalement, il s'agit des mêmes types d'algorithmes utilisés pour les mécanismes plans, généralisés dans l'espace tridimensionnel.

7.1 Calcul du volume de l'espace atteignable à orientation constante

Dans le chapitre 4, les méthodes de quantification de l'aire de l'espace de travail de mécanismes plans ont été discutées. Pour ces mécanismes à 3 ddl sans membrure passive, les frontières de l'espace atteignable sont des quadratiques. Dans le cas tridimensionnel à orientation constante, il s'agit plutôt de cubiques (cas sans membrure passive). Pour les mêmes raisons que dans le cas bidimensionnel, la méthode de calcul du volume de l'espace atteignable utilisée est un découpage numérique progressif. Néanmoins, l'annexe B.2 traite des courbes cubiques et du calcul de leurs intersections.

Ainsi, le calcul de l'espace atteignable à orientation constante utilisé pour un mécanisme général spatial est très semblable au calcul de l'aire de travail à orientation constante pour un mécanisme général plan. En effet, pour une discrétisation en couches dans une direction cartésienne (en Z par exemple), le problème revient à mesurer l'aire de l'espace de travail dynamique dans un plan perpendiculaire à cette coordonnée cartésienne Z .

Pour mesurer l'aire de l'espace de travail il est aussi possible d'utiliser des tests vectoriels en plusieurs points. Les tests vectoriels sont effectués comme suit :

- Calcul numérique des forces dans les câbles pour toutes les combinaisons de $n - 1$ câbles nécessaires à l'équilibre.
- S'il existe une combinaison de câbles avec des forces positives et finies, il est vérifié que la pose est à l'intérieur de l'espace de travail. Dans le cas contraire, il est admis que la pose considérée n'est pas dans l'espace de travail car elle ne peut être produite par aucune des combinaisons de câbles.

Tout comme dans le cas plan, le calcul de l'espace vectoriel numérique par discrétisation de l'espace de travail est optimisé. Pour chaque discrétisation d'une direction cartésienne donnée, le même algorithme que celui utilisé dans le cas plan peut donc être utilisé, soit :

1. Discrétisation et tests vectoriels à faible résolution.
2. Identification des zones testées positives qui sont entourées de zones testées positives.

3. Marquage de ces zones pour ne plus les tester lors de passages à résolution supérieure.
4. Balayage à résolution supérieure et retour à l'étape 2 jusqu'à obtention de la résolution voulue.
5. Arrêt de la procédure.

Ce faisant, chaque partie de l'aire est additionnée et l'aire totale est obtenue. La sommation du produit de cette aire par un intervalle discret donne le volume de l'espace de travail dynamique total.

7.2 Calcul du volume de l'espace atteignable en orientation à position constante

Pour des manipulateurs à 6 ddl, il est possible de représenter les plages d'orientation possibles pour une position donnée. Ces plages sont représentées en trois dimensions et sont appelées l'espace atteignable en orientation. Ces espaces peuvent aussi être quantifiés par discrétisation au même titre que l'espace de travail à orientation constante. Comme les algorithmes sont semblables à ceux utilisés pour le calcul de l'espace de travail dynamique à orientation constante, ceux-ci ne sont pas détaillés.

Les valeurs des axes peuvent être, par exemple, trois angles d'Euler. Pour l'exemple, la notation utilisée est une notation alternative, appelée notation *tilt and torsion*. Cette notation est généralement appropriée et plus significative pour des mécanismes parallèles, tel qu'il est expliqué dans [14]. On illustre un exemple de volume de l'espace de travail en orientation à la figure 7.1. L'angle de torsion est représenté par ρ . L'échelle des couleurs n'est pas indiqué pour cette représentation illustrative, et elle varie entre $\rho = -16$ et $\rho = 18$.

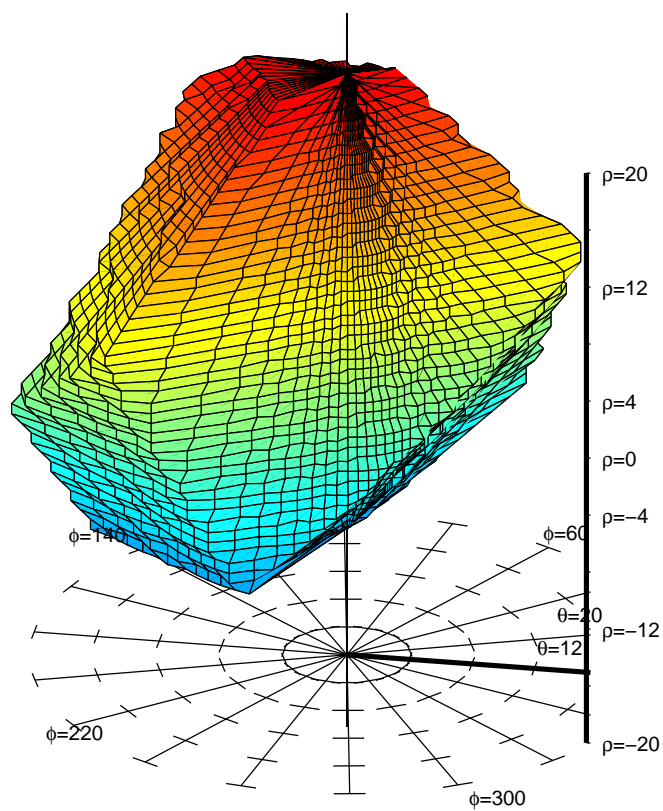


FIG. 7.1 – Espace atteignable dans l'espace des coordonnées angulaires *tilt and torsion*.

Chapitre 8

Critères d'optimisation et optimisation : cas spatial à 6 ddl

Ce chapitre porte sur la définition de critères d'optimisation et sur la programmation d'optimisations dans le cas spatial. On justifie aussi les choix des masses et des propriétés physiques par rapport au développement d'un prototype. Des résultats et des discussions sur les critères d'optimisation sont exposés.

8.1 Algorithme d'optimisation

Les algorithmes d'optimisation utilisés sont de type minimisation de fonctions non linéaires à plusieurs variables avec conditions frontières et contraintes d'égalité et d'inégalité. Les optimisations ont été faites en utilisant *Matlab*. La fonction *fmincon* est utilisée. Il s'agit du même type d'optimisation qu'au chapitre 5.

On définit d'abord des critères d'optimisation qui sont utilisés. Des fonctions objectives sont donc développées, basées notamment sur le calcul du volume de l'espace atteignable et de l'espace atteignable en orientation expliqué au chapitre 7. Les variables à optimiser seront les positions des points d'attache des câbles sur la base et sur la plate-forme.

Les méthodes de calcul du volume de l'espace atteignable dynamique procèdent par discrétisation. Aussi, les intervalles pour le calcul des gradients doivent être adaptés en conséquence.

8.2 Critères d'optimisation

La compréhension de la cinématique, de la dynamique et des frontières de l'espace atteignable des mécanismes à câbles et des méthodes de calcul de l'espace de travail dynamique expliqués dans les chapitres 1, 2, 6 et 7 sont maintenant utilisées pour la définition de critères de performance. Ces mêmes critères sont utilisés dans le but de définir des architectures intéressantes par optimisation. Les critères définis ici sont développés pour les mécanismes spatiaux à 6 ddl.

8.2.1 Volume de l'espace atteignable à orientation constante

Le volume de l'espace atteignable dynamique est associé à une condition dynamique donnée. Ainsi, pour une condition dynamique, il est possible de calculer le volume par discrétisation en couches, et de calculer le volume par une sommation de volumes dont l'appartenance à l'espace atteignable est vérifiée. Ainsi, pour une condition i , le volume

s'exprime :

$$\eta = V_i = \sum_{j=1}^n V_{ij} \quad (8.1)$$

où V_{ij} est simplement le volume associé à l'élément discret j .

8.2.2 Volume moyen de l'espace atteignable avec plusieurs conditions dynamiques

Il s'agit simplement de faire une moyenne des espaces atteignables obtenus pour plusieurs conditions dynamiques. Ainsi, pour une condition dynamique i , et une évaluation de volume sur k conditions dynamiques, le critère s'exprime donc par :

$$\eta = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n V_{ij} \quad (8.2)$$

8.3 Méthodologie d'optimisation

La méthodologie d'optimisation est la même que celle utilisée dans le cas plan. Ainsi, la programmation est faite dans le logiciel *Matlab* et la méthode d'optimisation est une optimisation non linéaire contrainte et bornée. Les critères précédents sont implantés sous forme de fonctions dépendantes des paramètres géométriques. Ces mêmes paramètres sont bornés à leurs valeurs réalisables et choisis arbitrairement. Comme le modèle architectural utilisé pour l'optimisation comprend des membrures passives et que les équations exactes décrivant les lieux d'équilibre de ce type de mécanisme correspondent à des polynômes de degré élevé, on choisit donc d'utiliser les méthodes de calcul de l'espace atteignable numériques en discrétisant l'espace dans le domaine cartésien. Par une telle méthode, toutefois, on obtient des fonctions discrètes et il est donc impératif de contrôler les niveaux de précision pour obtenir des pas d'itération suffisamment grands pour faire varier la fonction discrète. On note aussi que les résultats des optimisations ne sont pas des optimums globaux, mais les meilleurs parmi les

optimums locaux trouvés.

8.4 Modèle d'optimisation utilisé

On définit un modèle et des paramètres géométriques que l'on veut faire varier. Avec les critères choisis, il est alors possible d'obtenir des valeurs optimales pour chacun des paramètres libres à optimiser. La démarche présentée ne prétend pas donner un mécanisme à câble optimal absolu mais vise plutôt à démontrer comment certains critères d'optimisation s'appliquent aux mécanismes à câbles.

8.4.1 Géométrie du modèle d'optimisation

L'architecture considérée est justifiée par les raisons suivantes :

1. Une architecture à 6 câbles actionnés (non redondante) est choisie pour simplifier le contrôle.
2. Trois câbles passifs du type tension constante sont intégrés à l'architecture. Ces câbles ont pour but d'induire des accélérations supérieures à la gravité verticalement vers le bas, et sont beaucoup moins restrictifs qu'une liaison du type ressort lors de grandes elongations.
3. Le laboratoire utilise une structure de mécanisme à câble reconfigurable en forme de cube de deux mètres d'arête. Ainsi, la géométrie des paramètres d'optimisation est choisie pour s'intégrer facilement à cette structure. Ces paramètres sont décrits aux figures 8.1 et 8.2.
4. Le dimensionnement de l'effecteur est fixé et les paramètres des points d'attache sont choisis en fonction du prototype réel et des types d'attache choisies (figure 8.2(c)).

Ainsi, un modèle d'optimisation à 3 variables est développé. La première (p_1) est reliée aux points d'attache fixes des câbles actifs, la seconde (p_2) est un angle qui décrit les points d'attache des liens actifs sur la plate-forme, et la troisième (p_3) est liée à la

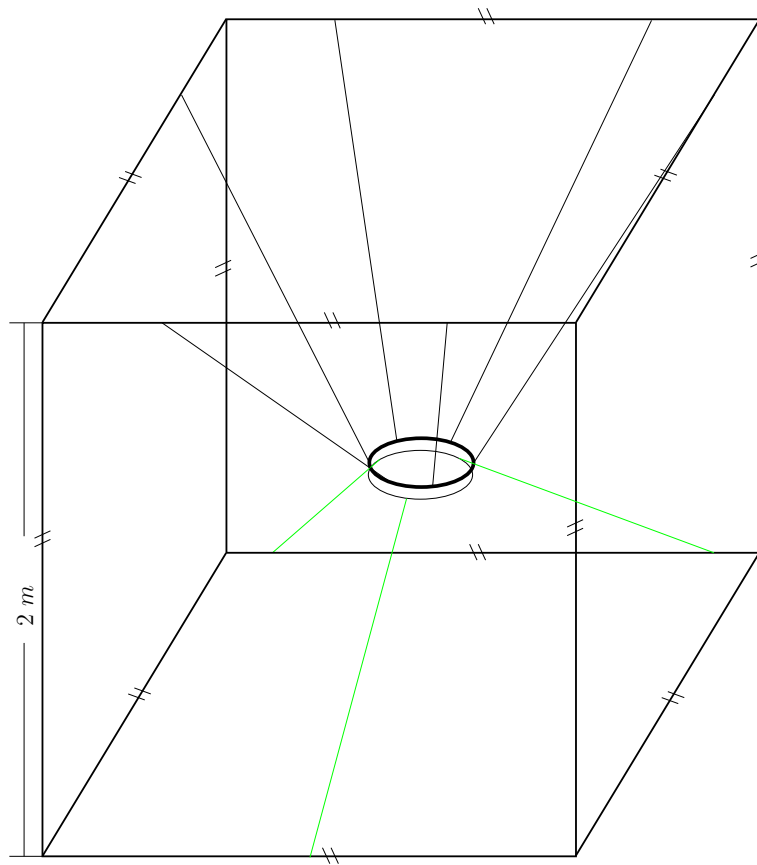
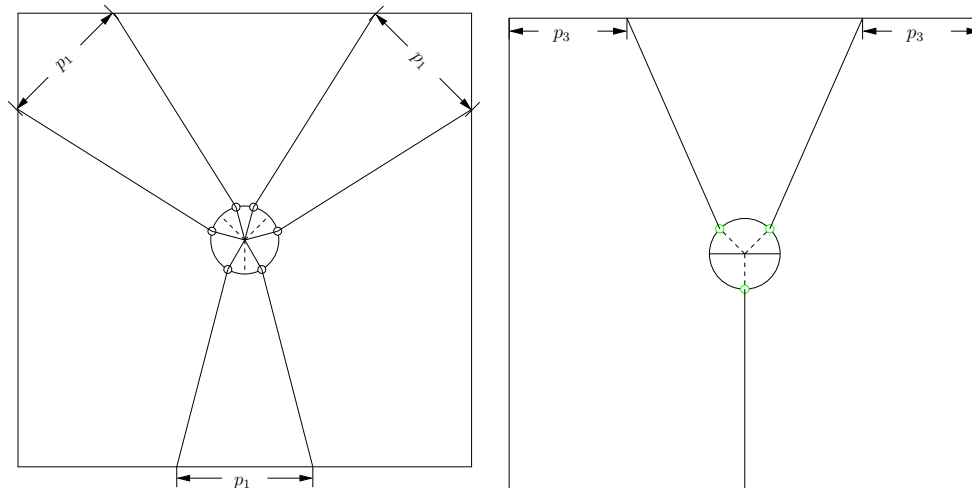
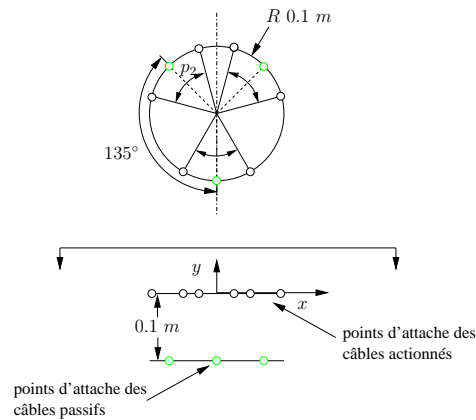


FIG. 8.1 – Vue d'ensemble de la géométrie du mécanisme à câbles à 6ddl spatial.



(a) Les câbles actionnés

(b) Les câbles passifs



(c) L'effecteur

FIG. 8.2 – Représentation géométrique des variables d'optimisation p_1 , p_2 et p_3 .

position d'attache de deux des trois câbles passifs. Le choix des variables est justifié par le fait qu'un mécanisme à câble, tel qu'il a été expliqué précédemment, est équivalent cinématiquement à un mécanisme à vérins conventionnel. Aussi, les architectures de mécanismes à vérins à 6 ddl les plus utilisées dans le monde sont des plate-formes de Gough-Stewart du type SSM, acronyme des termes anglais *Simplified Symmetric Manipulator* abondamment employé dans la littérature ([9]). Ce type de manipulateur possède les caractéristiques suivantes :

- La base et la plate-forme sont toutes les deux coplanaires.

- La base et la plate-forme sont symétriques le long d'un axe.

Les variables d'optimisation choisies permettent donc de conserver ces deux propriétés par souci de simplification cinématique.

8.4.2 Les caractéristiques dynamiques de la plate-forme et des liens passifs

Les dimensions et les caractéristiques physiques de l'effecteur sont fixées. Le modèle de l'effecteur est illustré à la figure 8.3. On pose la densité $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$ qui correspond à l'aluminium. Aussi, on choisit $R_i = 0.08m, R_o = 0.1m$ et $h = 0.002m$. L'effecteur possède donc la masse m et les inerties I_x, I_y, I_z suivantes (exprimées dans le repère mobile) :

$$\begin{aligned}
 m &= \rho \pi h (R_o^2 - R_i^2) = 0.0611 kg & (8.3) \\
 I_z &= \frac{1}{2} m (R_o^2 + R_i^2) = 5.008 e^{-4} kgm^2 \\
 I_x &= I_y = m \left(\frac{(\frac{h}{2})^2}{3} + \frac{R_o^2 + R_i^2}{4} \right) = 2.5042 e^{-4} kgm^2
 \end{aligned}$$

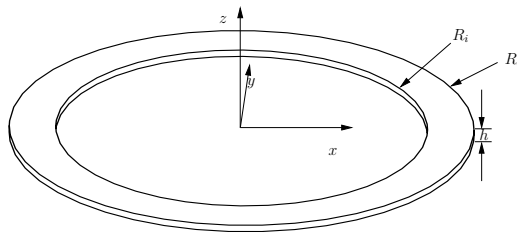


FIG. 8.3 – Les dimensions de l'effecteur considéré pour le calcul des propriétés dynamiques.

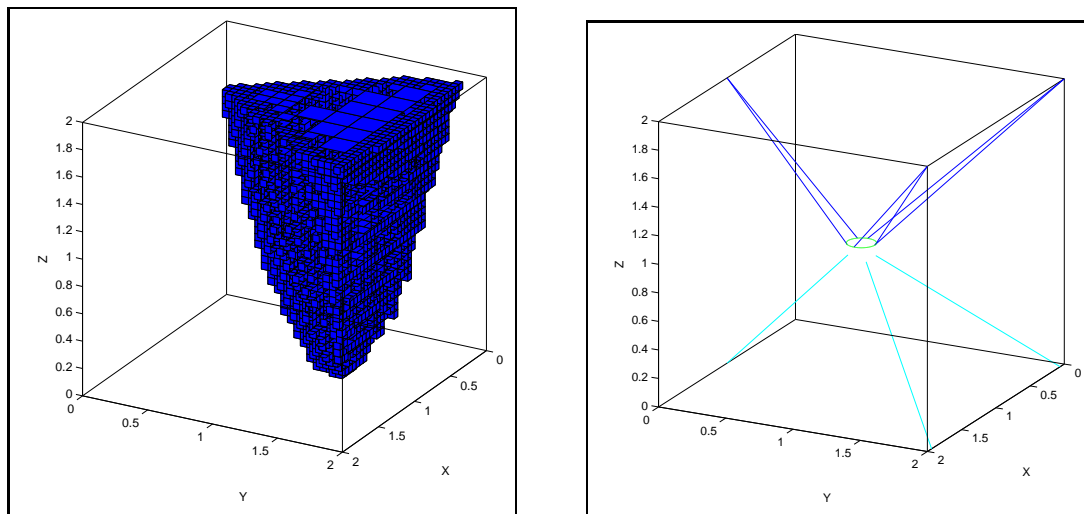
Point initial	Optimum local	Volume
(0.5, 45, 0.5)	(0, 95, 1)	1.03 m^3
(0.7, 70, 0.7)	(0, 95, 0.1)	1.196 m^3
(1, 40, 1)	(1.4, 6.338, 1)	0.478 m^3
(0.5, 45, -0.5)	(0, 95, 0.0616)	1.202 m^3

TAB. 8.1 – Résultats des optimisations du volume statique à orientation de référence.

Aussi, les 3 câbles passifs en tension constante sont de tension égale à une valeur de $20mg = 1.222N$, c'est-à-dire qu'ils induisent à eux seuls une accélération approximative vers le bas de $6g$.

8.4.2.1 Critère du volume

On optimise le mécanisme selon son volume d'espace atteignable statique à orientation de référence. Les résultats selon quelques valeurs initiales des paramètres sont indiqués au tableau 8.1. Sur ce tableau, il est clair que les optimums locaux des optimisations 2 et 4 sont très près. Le meilleur résultat est tout de même obtenu avec le point initial (0.5, 45, -0.5). Le volume de l'espace atteignable et la géométrie de cette architecture sont respectivement illustrés aux figures 8.4(a) et 8.4(b).



(a) Volume de l'espace atteignable

(b) Géométrie de la configuration

FIG. 8.4 – Le mécanisme obtenu par optimisation du volume de l'espace atteignable statique.

Point initial	Optimum local	Volume moyen
(0.5, 45, 0.5)	(0, 95, 0)	0.6545 m^3
(0.7, 70, 0.7)	(0, 95, 0.912)	0.6249 m^3
(1, 40, 1)	(1, 0, 1)	0.1843 m^3
(0.5, 45, -0.5)	(0, 95, -0.7497)	0.4581 m^3

TAB. 8.2 – Résultats des optimisations du volume moyenné à orientation nulle.

8.4.2.2 Critère du volume pondéré

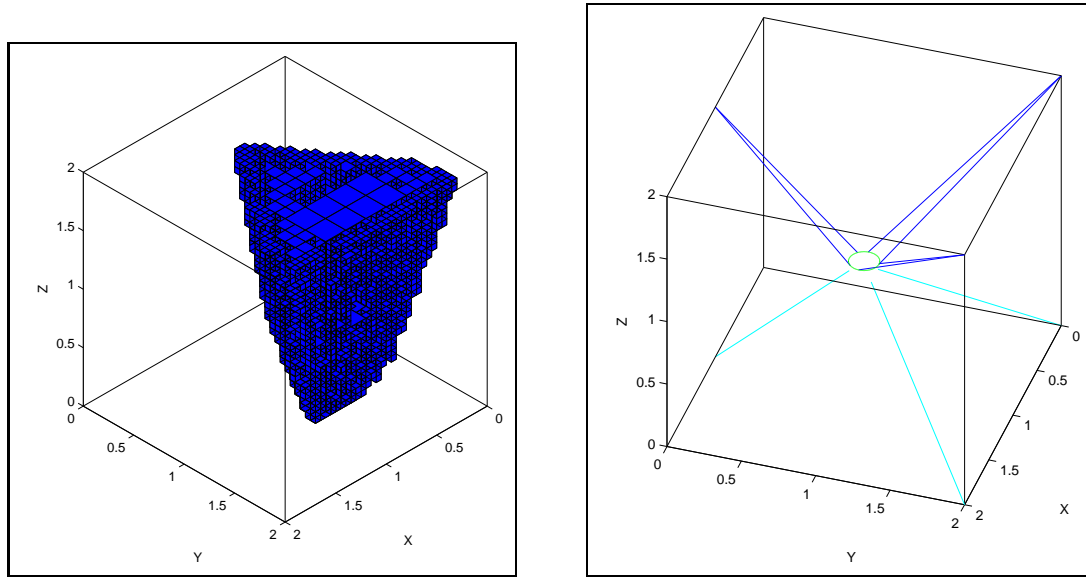
On considère ensuite la fonction objective qui est l'espace atteignable à orientation de référence moyenné sur 27 conditions dynamiques. Soient (A_x, A_y, A_z) les accélérations cartésiennes en x, y, z , soient $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ les vitesses angulaires (rad/sec) exprimées par rapport au repère fixe et $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ les accélérations angulaires. Les 27 conditions dynamiques sont définies par la boucle :

- Pour $(A_x, A_y, A_z) = (-5g, -5g, -5g), (0, 0, 0), (5g, 5g, 5g)$,
- Pour $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (-5, -5, -5), (0, 0, 0), (5, 5, 5)$,
- Pour $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (-1, -1, -1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)$, calculer le volume de l'espace atteignable.

Les résultats selon quelques valeurs initiales des paramètres sont indiqués au tableau 8.2. Il est vérifié que le meilleur résultat est obtenu avec le point initial (0.5, 45, -0.5). La configuration résultante optimale est très semblable à celle de l'optimisation précédente. Le volume de l'espace atteignable et la géométrie de cette architecture sont respectivement illustrés aux figures 8.5(a) et 8.5(b).

8.5 Commentaires sur les optimisations

Les optimisations présentées dans ce chapitre sont basées sur des critères simples, et l'utilisation de ces critères se veut simplement une démonstration de leur application possible dans une situation réelle. Ainsi, une multitude d'autres critères de performance plus complexes peuvent se révéler plus appropriés dans le cadre d'un design de manipulateur à câbles. L'annexe C traite de critères plus complexes pour des mécanismes à



(a) Volume de l'espace atteignable

(b) Géométrie de la configuration

FIG. 8.5 – Le mécanisme obtenu par optimisation du volume de l'espace atteignable moyenné.

câbles spatiaux. Par exemple, utilisant le volume de l'espace atteignable en orientation et d'autres caractéristiques comme la dextérité.

Conclusion

Les objectifs visés par cette étude ont été atteints. Aux chapitres 1 et 2 on a présenté les définitions de base, la cinématique et la dynamique des manipulateurs à câbles, et expliqué en quoi l'unilatéralité d'actionnement des câbles engendre des différences majeures dans la nature de l'espace atteignable de tels mécanismes.

En considérant ces différences fondamentales, on a ensuite, au chapitre 3, étudié les lieux d'équilibre des manipulateurs plans à 2 et 3 ddl. Cette étude a été faite avec une approche vectorielle, et de façon générale pour des mécanismes comprenant des liens passifs du type ressorts à longueur libre arbitraire, et câbles à tension constante. Aussi, l'étude ces types de liaisons passives est justifiée. Le ressort est un lien passif connu, et a été étudié, dans le cas longueur libre nulle, dans [13]. Le lien du type câble à tension constante est, lui, simple à implanter et offre, en pratique, plus de débattement que les ressorts.

La même approche vectorielle a été utilisée dans le cas de mécanismes spatiaux à 3 et 6 ddl au chapitre 6. On a étudié des mécanismes comprenant les mêmes types de liens passifs que dans le cas bidimensionnel. Cette approche permet d'exprimer simplement les équations d'équilibre, et peut permettre une compréhension plus intuitive. Ainsi, cela a permis de montrer de façon très simple la nature linéaire des lieux d'équilibre de mécanismes plans à 2 ddl et spatiaux à 6 ddl comprenant un nombre arbitraire de ressorts de longueur libre nulle (annexe A).

L'étude des équations analytiques correspondant aux lieux d'équilibre des mécanismes à câbles comprenant des membrures passives a montré qu'il était difficile de calculer de façon analytique l'aire ou le volume (pour le cas bidimensionnel et tridimensionnel respectivement) de l'espace atteignable. Cela implique en effet des calculs d'intersections entre des polynômes de degré élevé (qui augmente avec le nombre de liens passifs). C'est pourquoi on a ensuite utilisé des méthodes numériques pour calculer des aires/volumes des espaces atteignables (chapitre 4 pour le cas bidimensionnel et chapitre 7 pour le cas tridimensionnel). Une méthode numérique par découpage progressif a d'ailleurs été développée pour augmenter de façon significative la rapidité des calculs. Finalement, aux chapitres 5 et 8 (respectivement pour les cas 2d et 3d), on a proposé des critères d'optimisation et des modèles d'optimisation de mécanismes à câbles. Ces optimisations ont permis de présenter des exemples de mécanismes à câbles intéressants dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Comme il est mentionné au chapitre 8, un prototype de mécanisme à câbles a été développé. Les analyses développées dans ce mémoire ont permis de faire quelques essais d'architectures intéressantes. Bien qu'ayant peu poussé l'analyse pratique de ces architectures, les résultats permettent d'entrevoir des applications intéressantes.

Les perspectives de recherches futures en ce qui a trait aux mécanismes à câbles sont nombreuses. D'abord, au plan de la recherche fondamentale, il serait intéressant d'étudier de façon analytique les expressions des lieux d'équilibre pour vérifier les zones de tension (équilibre effectif) et de compression que décrivent les courbes d'équilibre développées. Ensuite, il serait pertinent de pousser l'analyse des expressions vectorielles décrivant les lieux d'équilibre. Cela pourrait permettre, par exemple, de trouver certains types de liaisons passives entraînant des lieux d'équilibre très simples, ou certaines conditions dans lesquelles des liaisons passives permettent des comportements dynamiques intéressants.

Ensuite, dans le domaine du design, il serait intéressant de développer des outils d'analyse architecturale de manipulateurs à câbles, permettant de faciliter le développement et en considérant leurs caractéristiques fondamentales.

Bibliographie

- [1] Abdullah, B. A., Agrawal, S. K., “Cable Suspended Robots : Design, Planning and Control”, *Proceeding of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation* Washington, DC, May 2002, p.4275-4280.
- [2] Tatsuo, A., Kei, Y., Yahushi, M., Kenji, I., Kunio, M., Noriho, K., “A Hybrid Drive Parallel Arm for Heavy Material Handling”, *IEEE Robotics and Automation*, March 2002, p.45-54.
- [3] Albus, J., Bostelman, R., Dagalakis N., “The NIST Robocrane”, *Journal of Robotic Systems* 1993, vol. 10, n^o 5, p.709-724.
- [4] Lafourcade, P., Llibre, M., Reboulet C., “Design of Parallel Wire-Driven Manipulator for Wind Tunnels”, *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Québec City, Qc, Canada, Oct 2002, p.187-194.
- [5] Fattah, A., Agrawal, S.K., “Design of Cable-Suspended Planar Parallel Robots for an Optimal Workspace”, *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Québec City, Qc, Canada, Oct 2002, p. 195-2002
- [6] Ebert-Uphoff, I., Gosselin, C.M., “Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators”, Quebec City, QC, Canada, Oct 2002, 359 pages.

- [7] Cone, L., "Skycam : An Aerial Robotic Camera System", *Byte*, October 1995, pp.122-132.
- [8] Kawamura, S., Choe, W., Tanaka, S., Pandian, S., "Development of an Ultrahigh Speed Robot FALCON using Wire Drive System", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nagoya, Japan, Mai 1995, p.215-220.
- [9] Merlet, J.-P., "Les robots parallèles", Hermès, 2^e éd., 1997.
- [10] Sefrioui, J. et Gosselin, C. M., "On the Quadratic Nature of the Singularity Curves of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, 1995, vol. 30, n^o 4, p. 533-551.
- [11] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C. M., "Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform", *International Journal of Robotics Research*, March 2000, vol. 19, n^o 3, p. 271-288.
- [12] Barrette, G. et Gosselin, C. M., "Kinematic Analysis and Design of Planar Parallel Mechanisms Actuated with Cables", *Comptes-rendus de la 26th ASME Biennial Mechanisms Conference*, Baltimore, États-Unis, septembre, 2000.
- [13] Barrette, G., "Analyse des mécanismes parallèles actionnés par câbles", Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, octobre, 2000.
- [14] Bonev, I., Zlatanov, D. et Gosselin, C.M., 2002, "Advantages of Modified Euler Angles in the Design and Control of PKMs", *Parallel Kinematic Machines International Conference (PKS 2002)*, Chemnitz, Germany, p. 171-188.
- [15] Gosselin, C.M. et Angeles, J., 1990, "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains", *IEEE Transactions on robotics and Automation*, Vol.6, No. 3, p. 281-290.
- [16] Gosselin, C.M., "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators", *ASME Journal of Mechanical Design*, September 1990, Vol.112, p. 331-336
- [17] Gosselin, C., Lavoie, E. Toutant, P., "An Efficient Algorithm for the Graphical Representation of the Three-Dimensional Workspace of Parallel Manipulators", *Proceedings of the 22nd ASME Mechanisms Conference*, September 1992, Vol. 1, p. 323,328
- [18] Gough, V.E. et Whitehall, S.G., 1962, "Universal tire test machine", *Proceeding 9th Int. Technical Congress F.I.S.I.T.A.*, vol. 117, p.117-135.

Annexe A

La nature linéaire de certaines courbes d'équilibre

Cette annexe démontre la nature de certaines frontières d'équilibre. Ainsi, on discute du degré connu de certains types de mécanismes à câbles avec ou sans liens passifs de types ressorts à longueur libre nulle.

A.1 Mécanisme à 2ddl avec des ressorts de longueur libre nulle

A.1.1 Mécanisme avec ressorts de longueur libre nulle

Cet section détaille le passage, au chapitre 3, de l'équation (3.3) à l'équation (3.6). Soit la condition où la longueur libre de tous les ressorts est nulle. On a alors :

$$(\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c})^T \mathbf{E} \mathbf{h}_{e1} = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\mathbf{h}_{e1} = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) \quad (\text{A.2})$$

Cette relation provient de la relation d'équilibre :

$$\alpha (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) + \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) - \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Étant donné que \mathbf{c} est indépendant des indices de la sommation, cette relation est équivalente à

$$\mathbf{c} \left(-\alpha - \sum_{k=1}^n K_k \right) + \sum_{k=1}^n K_k \mathbf{p}_k + \alpha (\mathbf{p}_\mu) - \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.4})$$

On pose $\tau = -\alpha - \sum_{k=1}^n K_k$. Alors, on a :

$$\tau \mathbf{c} + \sum_{k=1}^n K_k \mathbf{p}_k - \left(\tau + \sum_{k=1}^n K_k \right) \mathbf{p}_\mu - \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\tau (\mathbf{c} - \mathbf{p}_\mu) + \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_\mu) - \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.6})$$

D'où découle directement la relation :

$$(\mathbf{c} - \mathbf{p}_\mu)^T \mathbf{E} \mathbf{h}_{e2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\mathbf{h}_{e2} = \mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_\mu) \quad (\text{A.8})$$

Cette relation indique que les positions cartésiennes \mathbf{c} des lieux d'équilibre à 1 câble se situent sur une droite, car la relation (A.8) est satisfaite quand le vecteur $\mathbf{c} - \mathbf{p}_\mu$ est parallèle au vecteur \mathbf{h}_{e2} , et ce dernier est indépendant des positions cartésiennes.

A.2 Mécanisme à 3 ddl spatial avec des ressorts de longueur libre nulle

A.2.1 Mécanisme à 3 ddl spatial sans liens passifs

Dans cette section, la nature linéaire des lieux d'équilibre à 2 câbles des mécanismes à 3 ddl spatiaux est expliquée. Comme cela a été expliqué dans le chapitre 6, à la section 6.2, il est intuitif qu'un vecteur cartésien des forces à induire à l'effecteur soit en équilibre avec un duo de câbles lorsqu'il tombe dans le plan formé par ces deux câbles. Ce fait est montré ici vectoriellement. La relation (6.2), qui exprime la condition d'équilibre entre le duo de câbles μ et ν s'écrit également :

$$((\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) \times (\mathbf{p}_\nu - \mathbf{c}))^T \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Aussi, par distribution, on peut écrire

$$\begin{aligned} ((\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) \times \mathbf{p}_\nu - (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) \times \mathbf{c})^T \mathbf{h} &= 0 \\ (-\mathbf{p}_\nu \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{c}))^T \mathbf{h} &= 0 \\ (-\mathbf{p}_\nu \times \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{p}_\mu - \mathbf{c} \times \mathbf{c})^T \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Et comme $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = 0$, la nature linéaire de l'équation est claire :

$$(\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu + \mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu))^T \mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.11})$$

A.2.2 Mécanisme à 3 ddl spatial avec des ressorts à longueur libre nulle

La nature linéaire des lieux d'équilibre à 2 câbles des mécanismes à 3 ddl spatiaux avec un nombre arbitraire de ressorts à longueur libre nulle est expliquée. Au chapitre 6, la relation (6.3), qui exprime la condition d'équilibre entre le duo de câbles μ et ν s'écrit également :

$$(\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu + \mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu))^T (\mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c})) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Aussi, par distribution, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu)^T \mathbf{h} - (\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu)^T \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu))^T \mathbf{h} \\ - \mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu)^T \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) = 0 \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu))^T \sum_{k=1}^n K_k \mathbf{c} = 0$, il est possible de constater la nature linéaire de l'équation :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu)^T \mathbf{h} - (\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu)^T \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu))^T \mathbf{h} \\ - \mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu)^T \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k) = 0 \\ (\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_\nu)^T (\mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k (\mathbf{p}_k - \mathbf{c})) + \mathbf{c} \times (\mathbf{p}_\mu - \mathbf{p}_\nu)^T (\mathbf{h} - \sum_{k=1}^n K_k \mathbf{p}_k) = 0 \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Annexe B

Remarques sur les quadratiques et les cubiques

Dans le cadre d'investigations sur les diverses façons d'exprimer des polynômes de degré 2 et 3, lesquels peuvent décrire les lieux d'équilibre des mécanismes à câbles, certains travaux ont été faits. Ainsi, cette annexe traite de travaux reliés aux quadratiques et aux cubiques. Il y est d'abord expliqué la démarche qui permet de trouver les expressions paramétriques des quadratiques suivantes : ellipses générales et hyperboles générales. Ensuite, on discute des méthodes de calcul des intersections entre des cubiques et entre des cubiques et des quadratiques.

B.1 Forme paramétrique des ellipses et des hyperboles

Dans le cadre de la programmation d'algorithmes visant à calculer l'espace atteignable de mécanismes à câbles plans, on a considéré la possibilité d'utiliser les formes paramétriques des équations quadratiques. On présente ici les démarches qui ont été complétées dans cette analyse. La démarche, dans le cas de l'ellipse, est détaillée. La résolution du problème a été complétée et vérifiée dans plusieurs cas. Cependant, l'analyse de la signification des multiples branches de solution du système d'équation n'a pas été traitée. Comme les procédures sont très semblables, la démarche, dans le cas de l'hyperbole est plus résumée. Les expressions paramétriques décrivant les quadratiques du type ellipse et hyperbole sont bien connues. Soit t le paramètre utilisé. Ces formes paramétriques sont :

$$\text{ellipse : } \begin{aligned} x &= r_1 \cos \phi \cos t - r_2 \sin \phi \sin t + x_o \\ y &= r_1 \sin \phi \cos t + r_2 \cos \phi \sin t + y_o \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\text{hyperbole : } \begin{aligned} x &= \pm r_1 \cos \phi \cosh t - r_2 \sin \phi \sinh t + x_o \\ y &= \pm r_1 \sin \phi \cosh t + r_2 \cos \phi \sinh t + y_o \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Pour chacun de ces types de quadratique, il est possible de résoudre un système d'équation qui donne la correspondance entre les formes paramétriques et la forme algébrique générale des quadratiques suivantes :

$$(y - ax - b)^2 - cx^2 - dx - e = 0 \quad (\text{B.3})$$

Ces relations sont développées dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole.

B.1.1 Ellipse

Ainsi, les formules générales paramétriques de l'ellipse correspondent à la généralisation des formes paramétriques de base pour une orientation quelconque donnée par

l'angle ϕ . Dans le cas de l'ellipse, il s'agit d'une forme fermée et $t = [0, 2\pi]$ décrit la totalité de la courbe.

B.1.1.1 Méthode de résolution

Soit une ellipse centrée ayant ses axes principaux orientés selon l'ordonnée et l'abscisse. La représentation implicite qui donne la relation entre l'abscisse x_1 et l'ordonnée y_1 est :

$$\frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{y_1^2}{r_2^2} = 1 \quad (\text{B.4})$$

ou, de façon alternative,

$$x_1^2 r_2^2 + y_1^2 r_1^2 = r_1^2 r_2^2 \quad (\text{B.5})$$

Pour une ellipse générale, c'est-à-dire aux axes principaux orientés avec un angle ϕ , et au centre (x_o, y_o) , on fait la substitution suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= (y - y_o) \sin \phi + (x - x_o) \cos \phi \\ y_1 &= (y - y_o) \cos \phi - (x - x_o) \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Une fois la substitution faite, on obtient une équation du type :

$$P_a x^2 + P_b y^2 + P_c x + P_d y + P_e xy + P_f = 0 \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\begin{aligned} P_a &= r_1^2 - r_1^2 \cos^2 \phi + r_2^2 \cos^2 \phi \\ P_b &= r_2^2 + r_1^2 \cos^2 \phi - r_2^2 \cos^2 \phi \\ P_c &= 2r_1^2 \sin \phi y_o \cos \phi - 2r_2^2 \cos^2 \phi x_o + 2r_1^2 x_o \cos \phi - 2r_2^2 \sin \phi y_o \cos \phi - 2r_1^2 x_o \\ P_d &= -2r_1^2 \cos^2 \phi y_o + 2r_2^2 y_o \cos^2 \phi - 2r_2^2 y_o - 2r_2^2 \sin \phi \cos \phi x_o + 2r_1^2 \sin \phi \cos \phi x_o \\ P_e &= -2r_1^2 \sin \phi \cos \phi + 2r_2^2 \sin \phi \cos \phi \\ P_f &= -r_2^2 y_o^2 \cos^2 \phi + r_1^2 x_o^2 - r_1^2 x_o^2 \cos^2 \phi - 2r_1^2 \sin \phi y_o \cos \phi x_o + 2r_2^2 \sin \phi y_o \cos \phi x_o \\ &\quad + r_2^2 y_o^2 + r_1^2 \cos^2 \phi y_o^2 + r_2^2 \cos^2 \phi x_o^2 \end{aligned}$$

On obtient donc un polynôme de degré 2 en x, y , pouvant décrire une ellipse quelconque, mais avec des coefficients $(x_o, y_o, \phi, r_1, r_2)$ qui sont les mêmes que ceux de l'expression paramétrique de l'équation de l'ellipse (équations (B.3)). Il est ensuite possible

de trouver les conditions qui font correspondre les coefficients de l'équation quadratique générale (B.3), soit les coefficients (a, b, c, d, e) . On procède donc ainsi :

- On normalise le coefficient P_b de (B.7) en divisant tous les termes par P_b . Note : le cas exceptionnel ou $P_b = 0$ ne peut être traité de cette façon. Ce cas n'a pas été traité. Il arrive par exemple lorsque $\phi = 0$ et que l'ellipse est un cercle de rayon unitaire $r_1 = r_2 = 1$.
- On solutionne le système formé des 5 équations correspondantes aux équivalences des coefficients des formes (B.7) normalisé pour P_b , et (B.3), en considérant les coefficients devant $(x^2, x, y, xy, 1)$. On a donc 5 équations et 5 inconnues $(x_o, y_o, \phi, r_1, r_2)$.

Le système à résoudre n'est pas linéaire, mais il est résolvable. Avec le logiciel *Maple*, par exemple, il est possible d'obtenir des solutions pour $(x_o, y_o, \phi, r_1, r_2)$. Les correspondances entre les formes d'équations quadratiques obtenues sont :

$$\begin{aligned}
 x_o &= \frac{-d}{2c} \\
 y_o &= \frac{2bc - ad}{2c} \\
 r_1 &= -\frac{\sqrt{2}E}{4c} \\
 r_2 &= -\frac{\sqrt{2}B}{4c} \\
 \phi &= \arctan(C, D)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

avec les constantes B, C, D, E suivantes :

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{-(4ec - d^2)(-c + A + 1 + a^2)} \\
 C &= \frac{-2a(4ec - d^2)}{(B + E)(B - E)F} \\
 D &= \frac{-1}{2}F \\
 E &= \sqrt{(4ec - d^2)(c + A - 1 - a^2)}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Lesquelles dépendent finalement des constantes suivantes :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\frac{c^2 + 1 - 2a^2c - cA + 2c + a^4 + a^2A - A + 2a^2}{c^2 + 2c - 2a^2c + 1 + 2a^2 + a^4}} \\ A &= \sqrt{c^2 + 2c - 2a^2c + 1 + 2a^2 + a^4} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.1.1.2 Exemple

Soit une ellipse donc l'équation implicite est donnée par :

$$(y - 2x - 1)^2 + x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (\text{B.11})$$

Les valeurs des coefficients (voir équation (B.3)) sont donc $c = 1, a = 2, b = 1, d = 3, e = 1$. En utilisant (B.8), on trouve (à 7 chiffres significatifs) :

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{3}{2} \\ y_o &= 4 \\ r_1 &= 0.7467341 \\ r_2 &= 4.352285 \\ \phi &= 2.748894 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ainsi, en injectant les valeurs des coefficients de (B.12) dans la relation (B.2), on obtient la même ellipse que celle donnée par la relation (B.11), soit l'ellipse illustrée à la figure B.1.

B.1.2 Hyperbole

Les formules générales paramétriques de l'hyperbole données par l'équation (B.3) correspondent à la généralisation des formes paramétriques de base pour une orientation quelconque donnée par l'angle ϕ . Le choix $+r_1$ donne la branche de droite de l'hyperbole, et le choix $-r_1$ la branche de gauche (par rapport à $\phi = 0$). Dans ce cas, il s'agit d'une

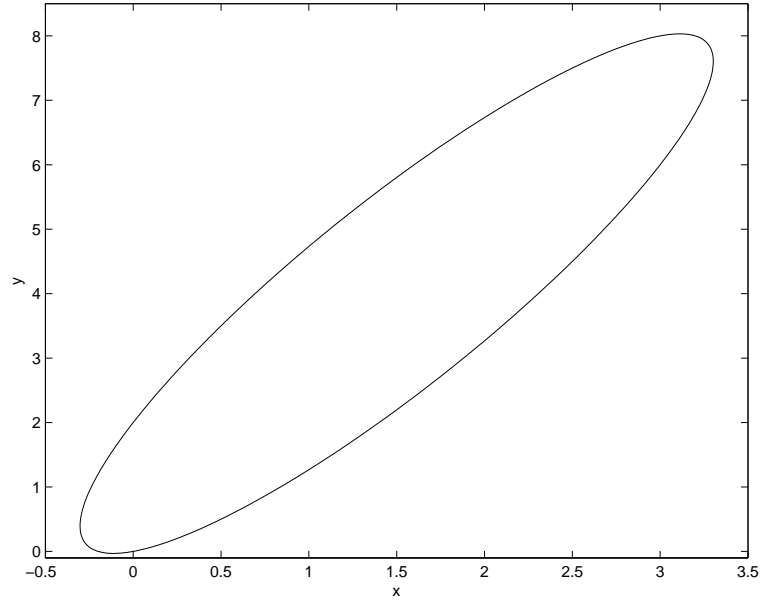


FIG. B.1 – Ellipse dont l'équation est mise sous forme paramétrique.

forme ouverte et le paramètre t varie de $-\infty$ à $+\infty$ (la courbe décrivant à $\pm\infty$ une asymptote). Comme c'était le cas avec l'ellipse, il existe une équivalence par rapport à l'expression algébrique implicite générale (B.3) et la forme paramétrique.

B.1.2.1 Méthode de résolution

La méthode de résolution, dans le cas de l'hyperbole, est semblable à celle utilisée pour l'ellipse. Ainsi, les détails de la démarche ne sont pas nécessaires. Soit une hyperbole centrée ayant ses axes principaux orientés selon l'ordonnée et l'abscisse. La représentation implicite qui donne la relation entre l'abscisse x_1 et l'ordonnée y_1 est :

$$\frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{y_1^2}{r_2^2} = 1 \quad (\text{B.13})$$

ou, de façon alternative,

$$x_1^2 r_2^2 - y_1^2 r_1^2 = r_1^2 r_2^2 \quad (\text{B.14})$$

Pour une hyperbole générale, c'est-à-dire aux axes principaux orientés avec un angle

ϕ , et au centre (x_o, y_o) , on fait la substitution :

$$\begin{aligned} x_1 &= (y - y_o) \sin \phi + (x - x_o) \cos \phi \\ y_1 &= (y - y_o) \cos \phi - (x - x_o) \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Une fois la substitution faite, on obtient une équation du type :

$$P_a x^2 + P_b y^2 + P_c x + P_d y + P_e xy + P_f = 0 \quad (\text{B.16})$$

La suite de la démarche est la même que celle utilisée à la section (B.1.1) et n'est pas explicitée ici. Les relations permettant de passer de la forme polynomiale de l'hyperbole à la forme paramétrique sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{-d}{2c} \\ y_o &= \frac{2bc - ad}{2c} \\ r_1 &= -\frac{\sqrt{2}B}{4c} \\ r_2 &= -\frac{\sqrt{2}C}{4c} \\ \phi &= \arctan(D, E) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

avec les constantes B, C, D, E suivantes :

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{(-A + c - a^2 - 1)(4ec - d^2)} \\ C &= \sqrt{-(A + c - a^2 - 1)(4ec - d^2)} \\ D &= \frac{a}{FA} \\ E &= \frac{F}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Lesquelles dépendent finalement des constantes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{c^2 - 2ca^2 + 2c + a^4 + 2a^2 + 1} \\ F &= \sqrt{\frac{c^2 - 2a^2c + 2c + a^4 + 2a^2 + 1 + cA - a^2A + A}{A^2}} \end{aligned}$$

B.1.2.2 Exemple

Soit maintenant une hyperbole dont l'équation implicite est donnée par :

$$(y - 2x - 3)^2 - x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (\text{B.19})$$

Les valeurs des coefficients (voir équation (B.3)) sont donc $c = 1, a = 2, b = 3, d = 3, e = 1$. En utilisant (B.17), on trouve (à 7 chiffres significatifs) :

$$\begin{aligned} x_o &= \frac{-3}{2} \\ y_o &= 0 \\ r_1 &= \pm 2.301105 \\ r_2 &= 0.5432172 \\ \phi &= 1.017221 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Ainsi, en injectant les valeurs des coefficients de (B.20) dans la relation (B.3), on obtient la même hyperbole que celle donnée par la relation (B.19), soit l'hyperbole illustrée à la figure B.2. Le choix du signe de r_1 donne la branche de l'hyperbole.

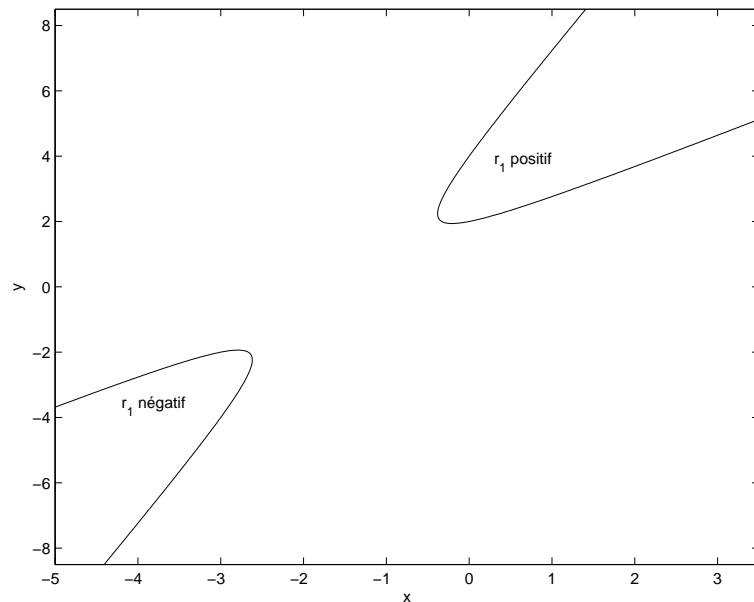


FIG. B.2 – Hyperbole dont l'équation est mise sous forme paramétrique.

B.2 Calcul des intersections des cubiques

Cette section expose une méthode pour trouver les intersections entre deux cubiques. Un algorithme numérique utilisant le résultant par résolution dialytique (aussi appelé déterminant de la matrice de Sylvester) est développé. Soit deux polynômes de degré 3, F et G , ayant pour variables x et y . L'algorithme se décrit comme suit :

1. Construction du polynôme P_r résultant formé des deux cubiques. Celui-ci est de degré 9, car il peut y avoir jusqu'à 9 intersections entre deux cubiques. Ce polynôme permet de trouver les intersections selon une seule variable des cubiques, soit y par exemple.
2. Extractions des racines de P_r . Elles correspondent aux coordonnées y des intersections.
3. Pour chaque racine réelle trouvée, injecter cette valeur dans F et G et trouver les 3 racines correspondantes pour chaque cubique.
4. Vérifier, pour chaque racine réelle de F et G , si les coordonnées x correspondent. Quand c'est le cas, la coordonnée x au point d'intersection y a été trouvée.

L'étape la plus délicate de la procédure est l'étape 4. En effet, si deux racines sont trop près l'une de l'autre, il ne faut pas les méprendre. Ainsi, un algorithme par critère de précision progressif est développé. Il s'agit d'utiliser une très grande précision pour considérer deux racines correspondantes, et de diminuer la précision jusqu'à ce qu'on trouve la coordonnée x correspondante.

B.2.1 Exemples

On utilise maintenant l'algorithme développé dans *Matlab* pour tracer l'intersection entre des cubiques. Soit les cubiques F et G ayant chacun les 10 coefficients suivants :

$$\begin{aligned} F_1x^3 + F_2y^3 + F_3x^2y + F_4xy^2 + F_5x^2 + F_6y^2 + F_7xy + F_8x + F_9y + F_{10} &= 0 \\ G_1x^3 + G_2y^3 + G_3x^2y + G_4xy^2 + G_5x^2 + G_6y^2 + G_7xy + G_8x + G_9y + G_{10} &= 0 \end{aligned}$$

On considère les coefficients suivants :

$$(F_1, F_2, \dots, F_{10}) = (4, 1, 2, 2, 0, 0, 0, -600, -260, 0)$$

$$(G_1, G_2, \dots, G_{10}) = (-2, 2, 1, -5, 0, 0, 0, 512, -256, 0)$$

Les polynômes ainsi que leurs intersections sont illustrés à la figure B.3. Dans ce cas, il y a le nombre maximum d'intersections entre deux cubiques, soit neuf intersections. Les points d'intersections sont :

Intersection	(x, y)
1	$(0, 0)$
2	$(4.9787, 15.0451)$
3	$(-4.9787, -15.0451)$
4	$(-3.9148, 10.4251)$
5	$(-11.5436, 7.1794)$
6	$(10.9706, 7.0408)$
7	$(3.9148, -10.4251)$
8	$(11.5436, -7.1794)$
9	$(-10.9706, -7.0408)$

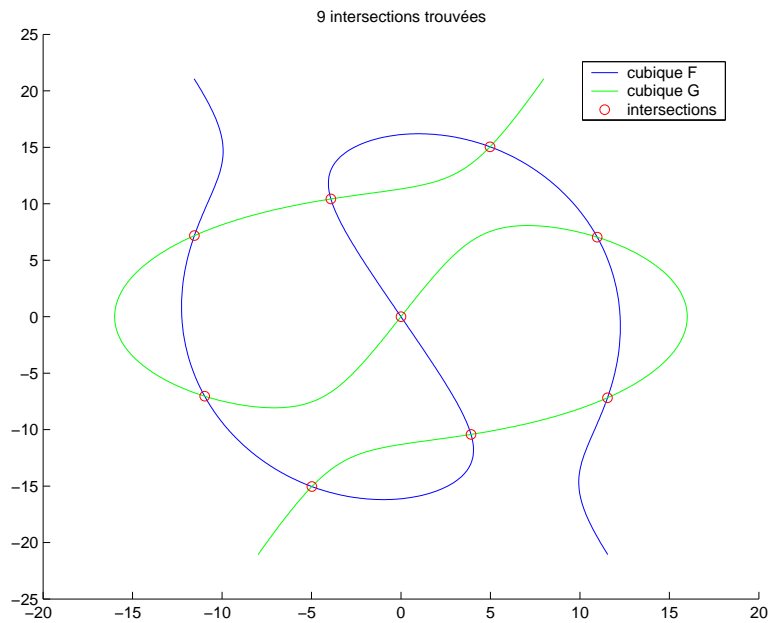


FIG. B.3 – Premier exemple d'intersections entre deux cubiques.

Soit maintenant un autre exemple avec les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}(F_1, F_2, \dots, F_{10}) &= (0.1, 0, 0, 0, 5, 20, 14, 16, 28, 23) \\ (G_1, G_2, \dots, G_{10}) &= (0.1, 0.25, 1.1, 5, 7, 15, 4, 15, 20, 20)\end{aligned}$$

Les polynômes ainsi que leurs intersections sont illustrés à la figure B.4. Dans ce cas, il y a 3 intersections. Deux seulement sont visibles sur le graphique étant donné la proximité relative de deux d'entre elles. Les points d'intersections sont :

Intersection	(x, y)
1	$1e^6(-0.0755, 1.4935)$
2	$(-23.2016, 8.0090)$
3	$(-50.8165, -1.4066)$

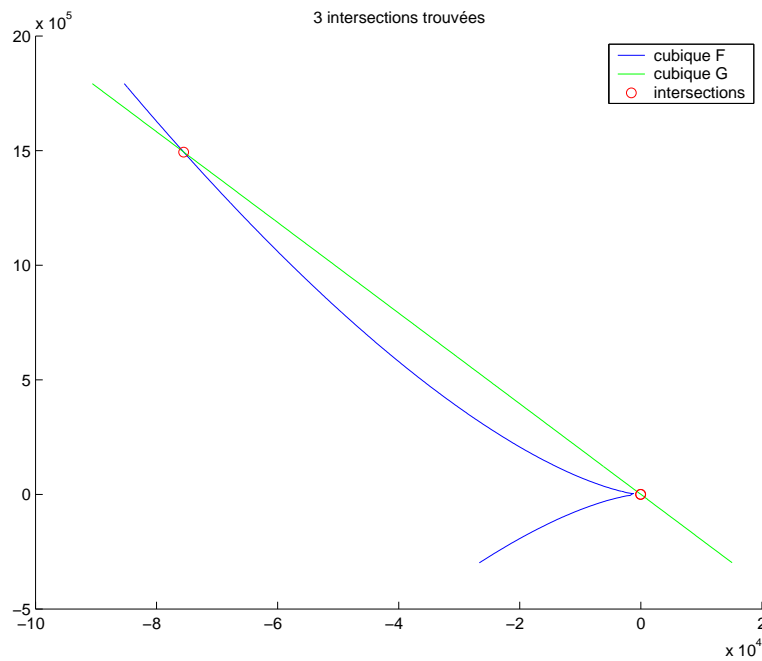


FIG. B.4 – Second exemple d'intersections entre deux cubiques.

Annexe C

Critères de performance des mécanismes à câbles

Dans cette annexe il est question de critères de performance pour des mécanismes à câbles potentiels non inclus dans le mémoire. Il est question de critères combinant plusieurs caractéristiques dont la dextérité. Aussi, un indice de performance spécifique aux mécanismes à câbles appelé l'indice de jeu dynamique est présenté et discuté, et ce, dans le cas de mécanismes plans et spatiaux.

C.1 Mécanismes à câbles plans

C.1.1 Indice de jeu dynamique

Dans le cas d'un mécanisme à câbles plans, il a été expliqué dans le chapitre 2 que les lieux de singularité et d'équilibre peuvent être visualisés par une pyramide. Cette pyramide s'écroule dans le cas de frontières de singularité et le vecteur \mathbf{h} est sur l'une des faces quand le triplet de câbles est en équilibre à deux câbles. On sait qu'il existe une mesure du degré d'effondrement de la pyramide : la dextérité. Aussi, dans le cas d'un mécanisme à câbles, il y a lieu d'introduire une mesure de la proximité du vecteur \mathbf{h} d'une des faces de la pyramide. Cette mesure quantifie à quel point une condition dynamique correspondant à une configuration et à une pose du mécanisme est flexible, c'est-à-dire à quel point elle peut varier instantanément. C'est pourquoi cette mesure est appelée ici l'indice de jeu dynamique. Cet indice, donc, peut aussi être utilisé comme critère ou alternativement parmi des critères combinés dans le cadre d'une optimisation. Cette mesure est simplement un angle donné soit en radian soit en degré. Une configuration qui a un indice de jeu dynamique nul correspond donc à une configuration sur une frontière d'équilibre, au même titre qu'une configuration (indépendante de la condition dynamique toutefois) qui a une dextérité nulle correspond à une configuration sur une frontière de singularité. L'indice de jeu dynamique étant l'angle minimal entre le vecteur \mathbf{h} et une face de la pyramide, il est relié implicitement à la dimension de la pyramide, donc à la dextérité. La figure C.1 illustre, pour un triplet de câbles, les angles ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 à considérer pour établir l'indice de jeu dynamique. Ainsi, l'indice de jeu dynamique absolu correspondant sera la valeur minimale parmi les trois angles.

Pour une configuration dynamique et une orientation donnée, l'indice de jeu dynamique s'exprime par $\min(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, en posant que le produit \mathbf{w}_{jk} correspond au plan utilisé pour l'angle ψ_i :

$$\begin{aligned}\psi_i &= \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\mathbf{w}_{jk} \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \\ \mathbf{w}_{jk} &= \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k\|}\end{aligned}\tag{C.1}$$

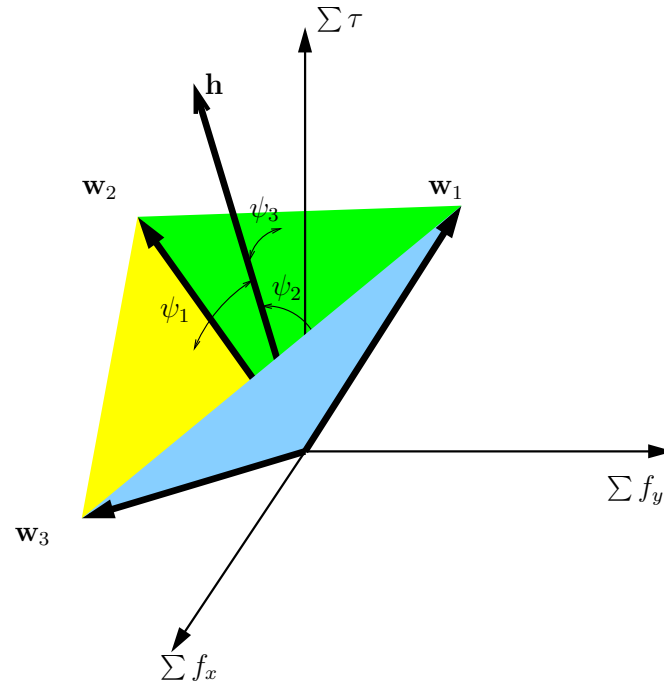


FIG. C.1 – Illustration des angles à considérer pour l'indice de jeu dynamique.

On note que la relation (C.1) s'applique dans les cas où le vecteur \mathbf{h} en question est dans l'espace de travail dynamique. Alors, si $\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k < 0$ il faut changer le signe du produit vectoriel pour s'assurer d'obtenir l'angle voulu. De façon alternative, il est possible de prendre strictement comme résultat $0^\circ < \phi_i < 180^\circ$. L'angle $\min(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ est une mesure intéressante car elle illustre la proximité des conditions dynamiques d'équilibre. Par contre, il est clair, pour une condition dynamique donnée, que cette mesure augmente avec une pyramide qui s'effondre. Étant éloquente sur certains aspects de la dynamique, elle ne peut toutefois pas être une mesure de performance à elle seule comme la dextérité par exemple. Il est d'ailleurs proposé, à la section suivante, des critères combinés utilisant cette mesure.

C.1.2 Indices combinés avec la dextérité

Selon les caractéristiques recherchées sur un mécanisme, les critères de performance décrits au chapitre 5 et le critère de l'indice de jeu dynamique peuvent être combinés à d'autres propriétés de performance comme le conditionnement du mécanisme. Il est possible de définir des critères qui sont des combinaisons des critères étayés et de la dextérité moyenne du mécanisme comme :

- Produit de l'aire pondérée avec la dextérité moyenne.
- Produit de l'indice de jeu dynamique avec la dextérité moyenne.
- Produit de la mobilité pondérée dynamiquement avec la dextérité moyenne.

C.2 Mécanismes à câbles spatiaux

C.2.1 Indice de jeu dynamique

De façon similaire au mécanisme plan, il a été expliqué dans le chapitre 2 que les lieux de singularité et d'équilibre d'un mécanisme à câbles spatial peuvent être visualisés par une hyper-pyramide. Cette pyramide s'écroule dans le cas de frontières de singularité et le vecteur \mathbf{h} est sur l'une des faces quand un groupe de 5 câbles est en équilibre. Tout comme dans le cas plan, on veut introduire une mesure de la proximité du vecteur \mathbf{h} d'une des faces de la pyramide. Cette mesure se veut une quantification de la proximité d'une condition dynamique de l'équilibre, c'est pourquoi on l'appelle, tout comme dans le cas plan, l'indice de jeu dynamique. Il est difficile d'imaginer un angle dans un espace en six dimensions. Une mesure, qui n'est pas un angle, est proposée. Cette mesure s'appuie sur les propriétés du produit scalaire, lequel est valide pour des espaces vectoriels à six dimensions. Soit une combinaison i de 5 câbles (câbles i_j , $j = 1..5$) formant un hyper-plan Ω_i , illustré à la figure C.2. Avec les 5 vecteurs \mathbf{w}_j formant le plan Ω_i , il est possible d'obtenir un vecteur linéairement indépendant \mathbf{n}_i en utilisant l'opérateur \times^ϵ défini au chapitre 6 à l'équation (6.8) :

$$\mathbf{n}_i = \times_{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5}^\epsilon \quad (\text{C.2})$$

Pour chaque combinaison i de 5 câbles, la mesure de proximité est $\min(|\Theta_i|)$ avec

$$\Theta_i = \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}_i}{\|\mathbf{h}\| \|\mathbf{n}_i\|} \quad (\text{C.3})$$

On a donc $\Theta_i = 1$ pour un éloignement maximum du vecteur \mathbf{h} par rapport au plan Ω_i , et $\Theta_i = 0$ quand \mathbf{h} est dans le plan Ω_i . Cette mesure est applicable seulement pour des configurations à l'intérieur de l'espace atteignable (ou à la limite en équilibre

à 5 câbles), comme c'est le cas avec la mesure de l'indice de jeu dynamique avec des mécanismes plans. Aussi, par extension au cas plan, il faut s'attendre à ce que $\min(\Theta_i)$ augmente avec une pyramide qui s'effondre. Étant éloquente sur certains aspects de la dynamique, elle ne peut toutefois pas être une mesure de performance à elle seule dans la même mesure que la dextérité. Il est d'ailleurs proposé, à la section suivante, des critères combinés utilisant cette mesure.

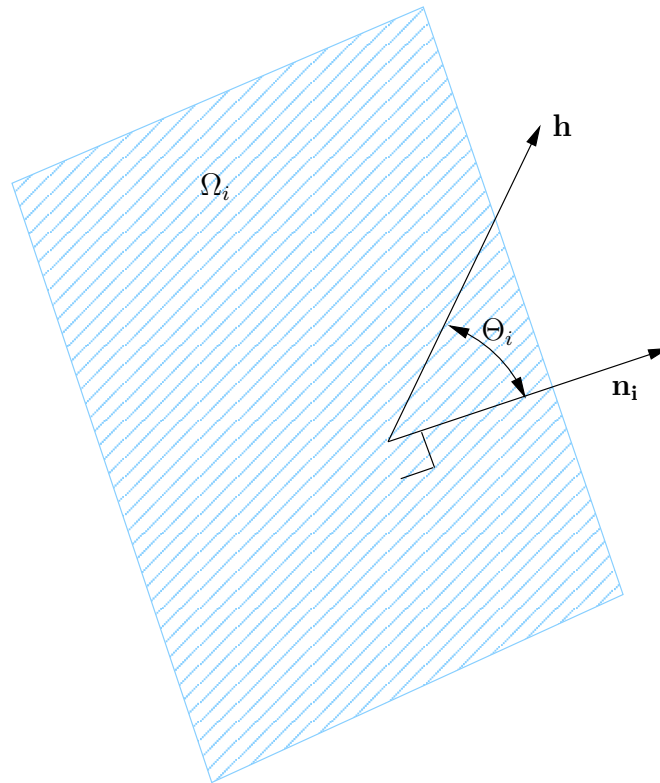


FIG. C.2 – Illustration de la mesure proposée de l'indice de jeu dynamique.

C.2.2 Autres indices de performance

Tout comme dans le cas plan, il peut donc être pertinent de décrire des critères de performance combinés. On peut considérer comme critère l'équivalent du volume atteignable détaillé au chapitre 5 pour les mécanismes plans. Cette mesure, appelée la mobilité ici, est la sommation des volumes atteignables en orientation pour plusieurs positions cartésiennes. Ceci pour une seule ou plusieurs conditions dynamiques. Contrairement au cas plan, où il est possible de considérer des câbles qui se croisent, il faut cependant intégrer aux volumes atteignables en orientation des algorithmes pour

éviter les croisements de câbles.

Aussi, il est possible de définir des critères mixtes qui sont des combinaisons des critères expliqués et de la dextérité moyenne du mécanisme comme :

- Produit du volume pondéré avec la dextérité moyenne.
- Produit de l'indice de jeu dynamique avec la dextérité moyenne.
- Produit de la mobilité pondérée dynamiquement avec la dextérité moyenne.

Annexe D

Tableau récapitulatif des degrés des polynômes d'équilibre

Cette section résume les analyses faites par rapport au degré des polynômes d'équilibre. On a regroupé sous forme de tableaux les différents résultats obtenus dans [13] et dans le cadre de ce mémoire.

D.1 Tableau récapitulatif sur les degrés des polynômes

Le tableau D.1 montre le degré des polynômes correspondant aux types de manipulateurs à câbles étudiés. Ce tableau montre des degrés de polynômes qui ont été vérifiés de façon analytique.

Type de mécanisme	Membrure(s) passive(s)	Degré maximum
Plan à 2 ddl	Aucune	1
Plan à 2 ddl	N ressort(s) de longueur libre nulle	1
Plan à 3 ddl	Aucune	2
Plan à 3 ddl	N ressort(s) de longueur libre nulle	2
Spatial à 3 ddl	Aucune	1
Spatial à 3 ddl	N ressort(s) de longueur libre nulle	1
Spatial à 6 ddl	Aucune	3
Spatial à 6 ddl	N ressort(s) de longueur libre nulle	3

TAB. D.1 – Degrés de polynômes vérifiés de façon analytique.

Tel qu'expliqué au chapitres 4 et 6, les relations exprimant les lieux d'équilibre de mécanismes comprenant des liens passifs de type ressorts à longueur libre arbitraire ou câble à tension constante correspondent à des polynômes dont le degré est une fonction du nombre de membrures passives. Avec ces deux types de liens passifs, les degrés des polynômes ont été trouvés dans quelques cas de façon numérique. On observe pour tous les cas vérifiés que les degrés sont les mêmes pour N liens passifs du type ressorts à longueur libre arbitraire ou N liens passifs du type câble à tension constante. Le tableau D.2 illustre les relations observées en fonction du nombre de membrures passives (soit des ressorts de longueur libre arbitraire, soit des câbles de tension constante, mais vérifiés avec N liens passifs de même nature). La procédure utilisée pour retrouver les formes polynomiales à partir des relations implicites découlant des équations vectorielles consiste à isoler successivement les racines carrées des expressions pour les faire disparaître. Ceci peut être fait manuellement, ou de façon automatisée.

Type de mécanisme	Vérifié pour	Degré maximum
Plan à 2 ddl	$N = 1, 2, 3, 4$	$2^N(N + 1)$
Plan à 3 ddl	$N = 1, 2, 3$	$2^N(N + 2)$
Spatial à 3 ddl	$N = 1, 2, 3$	$2^N(N + 1)$
Spatial à 6 ddl	$N = 1, 2, 3$	$2^N(N + 6)$

TAB. D.2 – Degrés de polynômes vérifiés de façon numérique pour N liens passifs.

Aussi, une routine *Maple*, qui permet d’automatiser le processus, est présentée. Je tiens à remercier Carl Devore (devore@math.udel.edu), de l’Université du Delaware, qui a programmé cette routine et l’a publiée sur le groupe de discussion ”comp.soft-sys.math.maple”. Cette routine ne se veut pas fonctionnelle pour :

- Des expressions contenant des racines carrées dans des racines carrées ($\sqrt{x + \sqrt{y}}$ par exemple).
- Des expressions contenant des racines d’ordre supérieure à 2 qui deviennent carrées pendant les étapes de résolution de la routine.

Voici le code source de la routine *Maple* :

```

RemoveSqrt := proc(Ex : :algebraic)
local ex, Sqrts, S, s, rt, oth, r, rad, Sqrt;
  ex := expand(numer(Ex));
  Sqrts := [ListTools : -Categorize]((s, t) → op(1, s) = op(1, t),
    [select(x → denom(op(2, x)) = 2, indets(ex, ‘^’))]);
  for S in Sqrts do
    rad := op(1, S1);
    Sqrt := indets(ex, satisfies(s → s : : ‘^’ and op(1, s) = rad and denom(op(2, s)) = 2))
    ;
    rt := 0;
    oth := ex;
    for s in Sqrt do
      r, oth := selectremove(has, oth, s); rt := rt + subs(s = rad(op(2, s)-1/2), r)
    end do;
    ex := expand(rad * rt2 - oth2)
  end do;
  ex
end proc

```