

GUILLAUME BARRETTE

**ANALYSE DES MÉCANISMES PARALLÈLES ACTIONNÉS
PAR CÂBLES**

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

OCTOBRE 2000

© Guillaume Barrette, 2000

Résumé

Ce mémoire présente une étude générale des manipulateurs parallèles actionnés par câbles pouvant comporter des ressorts. Les équations de vitesse ont été dérivées et les forces dans les câbles sont obtenues grâce au principe du travail virtuel et à la programmation quadratique. Ensuite, une analyse détaillée de l'espace atteignable est effectuée. Puisque la forme de cet espace dépend des accélérations à l'effecteur, on doit maintenant parler d'espace dynamique. Il est démontré que pour pouvoir bénéficier pleinement de tous ses degrés de liberté, un mécanisme doit être à actionnement redondant. Il est aussi démontré que l'espace atteignable peut être considéré comme l'union des sous-espaces correspondant à chacun des sous-manipulateurs non redondants du mécanisme. Les frontières de l'espace atteignable sont de deux types: les lieux d'équilibre impliquant un nombre de câbles correspondant au nombre de degrés de liberté moins un et les lieux de singularité. On constate que les lieux d'équilibre à deux câbles d'un manipulateur plan sans ressort décrivent une hyperbole, une parabole ou une droite. Finalement, un algorithme de détermination analytique de l'espace atteignable à orientation constante d'un manipulateur plan est proposé. Un exemple de détermination de l'espace atteignable d'un mécanisme plan à six câbles est fourni.

Guillaume Barrette

Clément Gosselin

Avant-propos

La petite histoire...

Quand j'étais plus jeune, les robots me fascinaient et je m'imaginai faire de la robotique quand je serais plus grand... mais j'étais loin de m'attendre à ça. Me voilà maintenant plus ou moins grand et j'étudie la robotique: plus de yeux, plus de bras, que des équations et des matrices.

La décision d'entreprendre une maîtrise fut pour moi assez facile quand j'eus terminé mon baccalauréat; puisque c'était toujours vers la fin des cours que mon plus fort intérêt apparaissait, j'ai réalisé que je devais aller plus loin.

J'ai donc contacté quelques professeurs et j'ai finalement abouti au bureau de Clément, que je n'avais alors jamais rencontré. Après lui avoir énuméré mes intérêts (la dynamique, la géométrie et les maths) ainsi que mes faiblesses (l'informatique), il a choisi de me faire confiance et m'a proposé un projet vraiment intéressant grâce auquel j'ai pu me dépasser et obtenir beaucoup de satisfaction personnelle.

Les remerciements...

J'aimerais tout particulièrement remercier mon directeur de recherche, le professeur Clément Gosselin, qui m'a proposé un projet fort captivant, m'a soutenu financièrement et, surtout, a su me faire cheminer dans mes recherches tout en me donnant l'impression que toutes ces bonnes idées venaient de moi. En plus d'être le meilleur enseignant que j'ai rencontré durant mes études universitaires, par sa pédagogie, son dévouement ainsi que la profondeur de ses connaissances scientifiques, Clément est aussi un directeur de recherche incomparable par son encadrement, sa disponibilité et la mise à la disposition de ses étudiants d'un matériel informatique très performant. Merci et bravo !

Un gros merci à mes parents qui m'ont permis d'achever des études universitaires en n'ayant pas à me soucier du toit et du couvert; merci aussi pour leur relecture de ce mémoire, sur le plan de la langue bien entendu. Merci d'être ce que vous êtes !

Merci aussi aux membres du laboratoire de robotique qui m'ont aidé et qui ont été une compagnie très agréable durant ces deux années de maîtrise. Merci à Rémi et Boris pour leur soutien informatique indispensable: pour m'avoir répété maintes et maintes fois comment supprimer le fichier lock de .netscape, comment arrêter une application qui ne répondait plus, etc. Merci à Rémi de m'avoir encouragé à utiliser XEmacs comme éditeur de \LaTeX pour la rédaction de mon mémoire: quel plaisir à utiliser et quel temps gagné au bout du compte. Merci à Boris pour sa présence attentionnée à tous les membres du lab. Merci à Ilian pour la révision de la version anglaise de mon article et pour ses nombreux conseils. Merci au logiciel Matlab. Merci à Frank, Simon et Thierry pour les quelques midis à jouer au soccer durant le dernier été de ma maîtrise. Merci à Boris, Vincent, Bernard et Dimiter pour toutes nos heures de bridge.

Merci à Denis Rancourt et Meyer Nahon pour leur correction attentive de mon dépôt initial et pour leurs commentaires constructifs.

Je tiens aussi à remercier parents et amis qui ont eu le courage et la patience de m'écouter leur raconter mon projet et ses avancements. Merci à tous ceux qui avaient plus hâte que moi de voir la fin de cette maîtrise et qui m'ont incité à terminer dans un délai raisonnable en me demandant un nombre incalculable de fois durant les deux dernières sessions si j'avais enfin terminé; je répondais toujours qu'il ne me fallait plus qu'une autre petite semaine afin de peaufiner mon mémoire à mon goût.

Un peu de conscience...

Finalement, je tiens à m'excuser pour tout le papier que j'ai utilisé pour la réalisation de ce mémoire. J'ai fait des efforts quotidiens pour minimiser mon utilisation du papier et j'aimerais tant que tous en fassent autant. Je crois que la qualité de l'avenir dépend des gestes du présent, même anodins.

On n'hérite pas de la terre de nos ancêtres, on emprunte celle de nos descendants.

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iv
Liste des figures	vii
Introduction	1
1 Notions de base et notation utilisée	3
1.1 Généralités	3
1.2 Système plan ($d = 3$)	5
1.3 Système spatial ($d = 6$)	6
1.4 Définitions	7
2 Cinématique du système	8
2.1 Dérivation des équations de vitesse	8
2.2 Système plan ($d = 3$)	10
2.3 Système spatial ($d = 6$)	11
3 Dynamique du système	12
3.1 Dérivation des équations de force	12
3.2 Forces dans les câbles	15
4 Espace atteignable	20
4.1 Description générale de l'espace atteignable	20

4.2	Description détaillée de l'espace atteignable	21
4.2.1	Espace atteignable d'un manipulateur plan	22
4.2.2	Espace atteignable d'un manipulateur spatial	25
4.2.3	Espace atteignable d'un manipulateur à d degrés de liberté	27
4.3	Frontières de l'espace atteignable	27
4.3.1	Équilibre à deux câbles d'un manipulateur plan	28
4.3.1.1	Équilibre à deux câbles d'un mécanisme sans ressort ($n = k$)	29
4.3.1.2	Équilibre à deux câbles d'un mécanisme avec ressort ($n > k$)	32
4.3.2	Équilibre à cinq câbles d'un manipulateur spatial	33
4.3.3	Singularités	34
5	Détermination analytique des frontières de l'espace atteignable à orientation constante d'un mécanisme plan actionné par câbles	36
5.1	Description générale de la méthode	37
5.2	Description détaillée de l'algorithme	37
5.2.1	Création des quadratiques	37
5.2.2	Division des quadratiques en sections	40
5.2.3	Validation des sections	43
5.2.3.1	Validation des sections d'équilibre à deux câbles	44
5.2.3.2	Validation des sections de singularité	45
5.3	Détermination de l'espace atteignable d'un mécanisme plan à six câbles	55
	Conclusion	60
	Bibliographie	63
A	Lieux d'équilibre à deux câbles à orientation constante d'un mécanisme plan	65
A.1	Mécanisme plan sans ressort	66
A.1.1	Équation des lieux d'équilibre sous sa forme générale	66
A.1.2	Méthode de résolution	67
A.2	Mécanisme plan avec ressort	68
A.2.1	Équation des lieux d'équilibre sous sa forme générale	68
A.2.2	Méthode de résolution	70
B	Nature quadratique des lieux d'équilibre à deux câbles à orientation constante d'un mécanisme plan	72

B.1	Considérations générales	72
B.2	Équilibre statique	75
B.3	Équilibre dynamique quelconque	80
B.3.1	Accélération linéaire de l'effecteur	80
B.3.2	Accélération angulaire de l'effecteur	81
C	Lieux de singularité à orientation constante d'un mécanisme plan	83
D	Forme explicite d'une quadratique	87
D.1	Les quatre formes explicites	88
D.2	Identification et calcul de chacune des formes explicites	89
E	Classification des quadratiques	92
E.1	$\eta = 5 \rightarrow y = ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + e}$	93
E.1.1	$c < 0$	94
E.1.2	$c = 0$	94
E.1.3	$c > 0$	95
E.2	$\eta = 4 \rightarrow y = ax + b + \frac{c}{x+d}$	96
E.3	$\eta = 3 \rightarrow y = ax^2 + bx + c$	96
E.4	$\eta = 1 \rightarrow x = a$	96
F	Intersection(s) entre deux quadratiques	97
G	Lieux d'équilibre à cinq câbles à orientation constante d'un mécanisme spatial	103
G.1	Méthode de résolution	104
G.2	Équation des lieux d'équilibre à cinq câbles sous sa forme générale . . .	104

Liste des figures

1.1	Architecture spatiale quelconque pour laquelle $n = 5$ et $k = 4$	4
1.2	Notation pour la liaison i d'un mécanisme plan.	5
1.3	Notation pour la liaison i d'un mécanisme spatial.	6
3.1	Manipulateur plan à six câbles.	16
3.2	Trajectoire 1: intérieur de l'espace atteignable.	18
3.3	Forces dans les actionneurs: trajectoire 1.	18
3.4	Trajectoire 2: extérieur de l'espace atteignable.	19
3.5	Forces dans les actionneurs: trajectoire 2.	19
4.1	Pyramide formée par trois des vecteurs directeurs.	22
4.2	Disposition non polyvalente des six vecteurs directeurs.	25
4.3	Paramétrisation linéaire de l'équilibre à deux câbles.	29
4.4	Lieux d'équilibre à deux câbles.	30
4.5	Trois hyperboles d'équilibre à deux câbles.	31
4.6	Lieux de singularité d'un mécanisme plan à trois câbles.	35
4.7	Les quatre courbes quadratiques d'un mécanisme plan à trois câbles.	35

5.1	Cas où deux des vecteurs directeurs sont colinéaires.	49
5.2	Plan normal à \mathbf{n}_3	51
5.3	Deux des quatre composantes du vecteur direction \mathbf{d}	53
5.4	Plan normal à \mathbf{n}_1	54
5.5	Frontières potentielles de l'espace atteignable.	55
5.6	Frontières potentielles pour les câbles 1, 3 et 5.	56
5.7	Sous-espace des câbles 1, 3 et 5.	56
5.8	Espace atteignable [$\phi = 0^\circ$, équilibre statique].	57
5.9	Espace atteignable [$\phi = -15^\circ$, $\ddot{x} = 2m/s^2$, $\ddot{y} = -12m/s^2$].	57
5.10	Espace atteignable [$\phi = 25^\circ$, $\ddot{x} = 7m/s^2$, $\ddot{\phi} = -5rad/s^2$].	58
5.11	Espace atteignable [$\phi = 20^\circ$, $\ddot{x} = 4m/s^2$, $\ddot{\phi} = -10rad/s^2$].	58
5.12	Espace atteignable [$\phi = -10^\circ$, $\ddot{x} = -25m/s^2$, $\ddot{\phi} = -10rad/s^2$].	59
5.13	Espace atteignable [$\phi = 40^\circ$, $\ddot{\phi} = 5rad/s^2$].	59
B.1	Manipulateur plan à deux actionneurs ($k = 2$).	73
B.2	Force appliquée par deux actionneurs.	73
B.3	Équilibre statique d'un manipulateur plan à deux câbles.	75

Introduction

Plusieurs études ont été effectuées sur des manipulateurs parallèles de toutes sortes [1] mais très peu d'entre elles impliquaient des manipulateurs actionnés par câbles. Pourtant, les avantages de ce type d'actionnement sont nombreux et incontournables [2]. Premièrement, les câbles permettent une amplitude de mouvement incomparable par rapport aux actionneurs plus couramment utilisés, comme les vérins, et occupent un espace très limité lorsqu'enroulés sur une bobine. Ensuite, les câbles étant utilisés en tension uniquement, ceux-ci sont, pour une même tâche, beaucoup plus légers que la plupart des actionneurs conventionnels; ils ajoutent ainsi une inertie presque négligeable aux systèmes où de grandes accélérations sont nécessaires. Les câbles sont aussi moins coûteux que des vérins. Ils sont de plus très souples et constituent donc une sorte de protection naturelle lors d'une interférence ou d'une collision.

Les câbles offrent des avantages certains mais ils impliquent aussi deux particularités majeures à considérer sérieusement. Tout d'abord, l'unilatéralité de l'actionnement qu'impose l'utilisation des câbles engendre un espace atteignable différant considérablement de l'espace atteignable qui aurait caractérisé un manipulateur de géométrie semblable actionné de façon conventionnelle. En effet, cet espace atteignable ne dépend plus des longueurs limites des actionneurs mais plutôt de leur incapacité à reprendre une compression; il s'agit donc de trouver les configurations où les efforts à l'effecteur sont transmis sans qu'aucun des câbles ne doive pousser. La seconde caractéristique à laquelle on doit porter une attention particulière découle directement de la première.

Le fait que les câbles travaillent en tension seulement implique que l'on doit utiliser la redondance d'actionnement si on veut contrôler pleinement¹ tous les degrés de liberté. Cette situation survient dans le cas des manipulateurs où les accélérations selon tous les degrés de liberté sont requises, les simulateurs de mouvement par exemple. Pour bénéficier pleinement des 6 degrés de liberté d'un simulateur, il faut donc utiliser au moins 7 câbles; et encore faut-il que ces câbles soient disposés efficacement. La redondance d'actionnement a pour conséquence d'engendrer des forces internes considérables si le contrôle n'est pas efficace, et celui-ci est justement plus difficile à réaliser. Malgré ce désavantage marqué sur le plan du contrôle, la redondance d'actionnement a cependant un bon côté: en ajoutant des actionneurs supplémentaires on réduit grandement ou élimine complètement les lieux de singularité à l'intérieur de l'espace atteignable.

L'utilisation de ressorts permet de réduire les forces dans les câbles en diminuant les effets de la gravité en mode statique ou en coopérant avec les câbles dans les directions où les plus grandes accélérations sont requises.

C'est pour toutes ces raisons que les manipulateurs parallèles actionnés par câbles doivent être considérés et étudiés avec attention. Divers travaux sur ce type de manipulateur ont d'ailleurs été faits au cours des dernières années. Mentionnons, entre autres, des grues multidimensionnelles [3, 4], un robot ultra-rapide [5], une caméra aérienne [6], un système de mesure de configuration de manipulateur [7], un système virtuel d'entraînement sportif [8], et diverses autres études fondamentales [9, 2, 10].

Cependant, aucune analyse systématique des manipulateurs parallèles actionnés par câbles ne semble avoir été faite jusqu'à maintenant. Ce mémoire constitue donc une étude fondamentale et systématique des manipulateurs de ce type. Il présente une approche générale pour analyser ce type de mécanisme, surtout en ce qui concerne la détermination de l'espace atteignable.

¹Le plein contrôle des degrés de liberté signifie que tout jeu d'efforts peut être appliqué à l'effecteur.

Chapitre 1

Notions de base et notation utilisée

Ce chapitre présente les notions de base sur les manipulateurs parallèles actionnés par câbles et la notation utilisée tout au long de ce mémoire. Il fournit aussi quelques définitions utiles.

1.1 Généralités

Un manipulateur parallèle actionné par câbles est constitué d'un corps mobile, l'effecteur, relié à la base par n liaisons (k liaisons actives, des câbles, et $n - k$ liaisons passives, des ressorts) dans un environnement à d degrés de liberté. Ces k câbles dont on contrôle la longueur et, indirectement, la tension permettent d'actionner l'effecteur dans son environnement; le nombre de câbles nécessaires afin de contrôler tous les degrés de liberté sera établi au chapitre 4.

$$n \text{ liaisons} \rightarrow \begin{cases} k \text{ câbles,} \\ n - k \text{ ressorts} \end{cases}$$

Ces n liaisons ont des points d'attache P_1 à P_n sur la base et V_1 à V_n sur l'effecteur (figure 1.1). Le point P_i est défini par le vecteur \mathbf{p}_i , exprimé dans le repère fixe lié à la base, tandis que le point V_i est défini par le vecteur \mathbf{v}_i , exprimé dans le repère mobile lié à l'effecteur et dont l'origine est au centre de masse de celui-ci. La position de l'origine du repère mobile, C , est définie par le vecteur \mathbf{c} . L'orientation du repère mobile par rapport au repère fixe est exprimée par l'angle ϕ pour un système plan ou par la matrice orthogonale \mathbf{Q} pour un système spatial. La notation associée à la $i^{\text{ème}}$ liaison du mécanisme est montrée à la figure 1.2 pour un système plan et à la figure 1.3 pour un système spatial.

N.B. On ne se préoccupe pas ici de la façon dont l'actionnement sera effectué en pratique; on suppose que le point d'ancrage P_i de chaque câble sur la base est fixe.

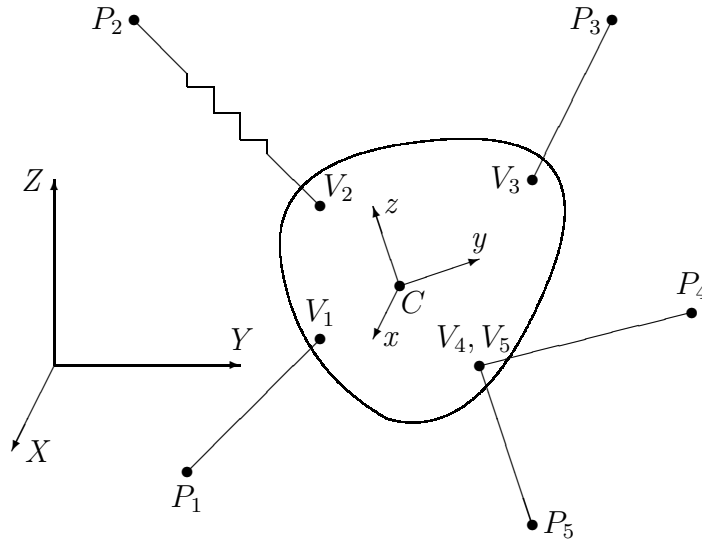


Figure 1.1: Architecture spatiale quelconque pour laquelle $n = 5$ et $k = 4$.

Dans ce mémoire, on utilise les unités du système international (SI). Ainsi, si aucune spécification n'est fournie, temps, longueurs, masses, moments d'inertie, forces et moments de force sont mesurés en seconde (s), mètre (m), kilogramme (kg), kilogramme-mètre carré ($kg \cdot m^2$), Newton (N) et Newton-mètre ($N \cdot m$) respectivement. Pour les angles, il sera toujours précisé ponctuellement si les degrés ou les radians sont utilisés.

De plus, dans ce mémoire, une lettre minuscule en caractère gras désignera toujours un vecteur, tandis qu'une majuscule en caractère gras désignera une matrice. Aussi, mis à part certains paramètres utilisés ponctuellement, chaque symbole sera associé jusqu'à la toute fin à l'entité qu'il désigne. Par exemple, d , n et k désigneront respectivement le nombre de degrés de liberté, le nombre de liaisons et le nombre de câbles d'un mécanisme.

1.2 Système plan ($d = 3$)

Pour un système plan (figure 1.2), l'axe Y du repère fixe est considéré vertical (parallèle au champ gravitationnel) et la notation suivante est utilisée:

- \mathbf{p}_i : vecteur position du point P_i (composantes a_i et b_i dans le repère fixe)
- \mathbf{v}_i : vecteur position du point V_i (composantes x_i et y_i dans le repère mobile)
- \mathbf{c} : vecteur position du point C , origine du repère mobile
(composantes x et y dans le repère fixe)
- ϕ : angle d'orientation du repère mobile par rapport au repère fixe
- ρ_i : distance entre P_i et V_i (longueur de la liaison i)

La configuration de l'effecteur est entièrement définie par le vecteur \mathbf{c} et l'angle ϕ .

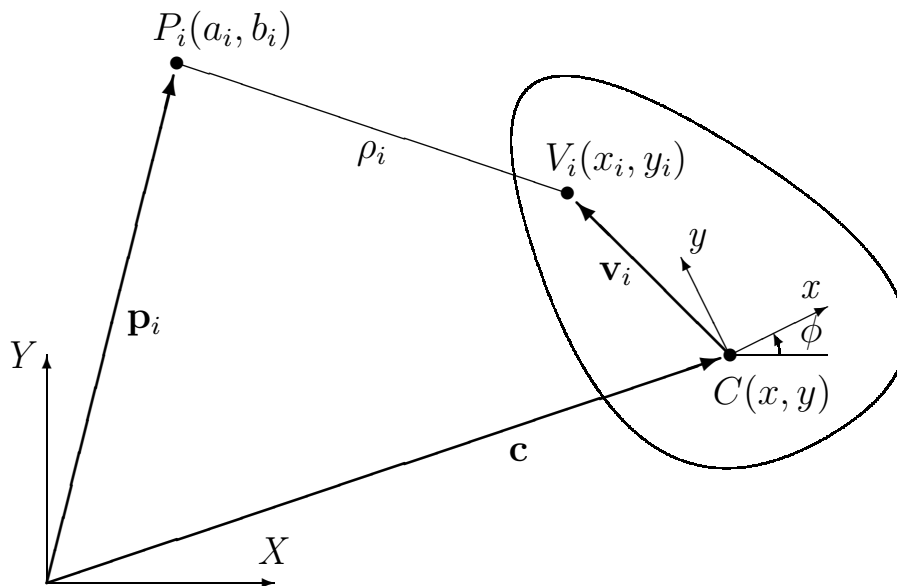


Figure 1.2: Notation pour la liaison i d'un mécanisme plan.

1.3 Système spatial ($d = 6$)

Pour un système spatial (figure 1.3), l'axe Z du repère fixe est considéré vertical et la notation suivante est utilisée:

- \mathbf{p}_i : vecteur position du point P_i (composantes a_i , b_i et c_i dans le repère fixe)
- \mathbf{v}_i : vecteur position du point V_i (composantes x_i , y_i et z_i dans le repère mobile)
- \mathbf{c} : vecteur position du point C , origine du repère mobile
(composantes x , y et z dans le repère fixe)
- \mathbf{Q} : matrice d'orientation du repère mobile par rapport au repère fixe
- ρ_i : distance entre P_i et V_i (longueur de la liaison i)

La configuration de l'effecteur est entièrement définie par le vecteur \mathbf{c} et la matrice \mathbf{Q} .

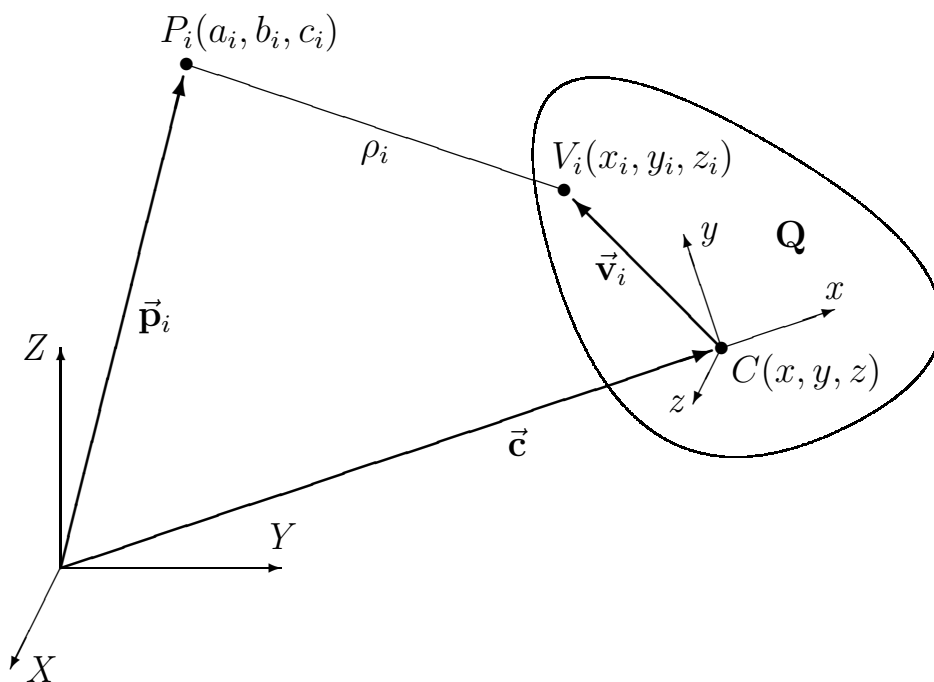


Figure 1.3: Notation pour la liaison i d'un mécanisme spatial.

1.4 Définitions

Les définitions suivantes sont introduites pour faciliter la compréhension du texte du mémoire; certaines d'entre elles seront clarifiées au moment approprié.

EFFECTEUR : Organe terminal d'un mécanisme, d'un robot ou d'un manipulateur.

MÉCANISME PARALLÈLE : Mécanisme dont l'effecteur et la base sont reliés par plusieurs chaînes cinématiques.

REDONDANCE D'ACTIONNEMENT : Un mécanisme est dit à actionnement redondant lorsqu'il possède plus d'actionneurs que de degrés de liberté.

CONFIGURATION : État d'un mécanisme ou position de tous les corps de ce mécanisme. La configuration d'un mécanisme est définie par ses variables articulaires et ses variables cartésiennes.

SINGULARITÉ : Dégénérescence de la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses à l'effecteur d'un manipulateur.

CONFIGURATION SINGULIÈRE : Configuration d'un mécanisme pour laquelle celui-ci est en singularité.

CONDITIONS DYNAMIQUES : Ensemble des accélérations linéaires et angulaires de l'effecteur. Les conditions dynamiques sont définies par trois paramètres dans le plan $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\phi})$, et six dans l'espace $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \dot{\omega})$ où ω est le vecteur tridimensionnel des vitesses angulaires de l'effecteur par rapport aux trois axes respectifs du repère fixe.

ESPACE ATTEIGNABLE DYNAMIQUE : Ensemble des configurations du mécanisme permettant de générer les conditions dynamiques requises tout en maintenant les câbles en tension.

CONFIGURATION POLYVALENTE : Configuration dans laquelle le mécanisme peut résister à tout jeu d'efforts externes ou générer tout jeu d'accélération à l'effecteur.

Chapitre 2

Cinématique du système

Dans ce chapitre, les relations entre les vitesses des actionneurs et les vitesses de l'effecteur sont établies pour les mécanismes parallèles plans et spatiaux actionnés par câbles.

2.1 Dérivation des équations de vitesse

On part de l'expression de ρ_i , la longueur du câble i , puis on développe:

$$\begin{aligned}\rho_i &= \| (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i) \| , \\ \rho_i^2 &= (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i) , \\ \rho_i^2 &= \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{p}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i + \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i , \\ \rho_i^2 &= \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i - 2\mathbf{p}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{v}_i + \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i .\end{aligned}\tag{2.1}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient, pour chaque actionneur:

$$\rho_i \dot{\rho}_i = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v}_i, \quad (2.2)$$

où $\dot{\rho}_i$ est le taux de variation de la longueur de la liaison i .

L'équation (2.2) représente un système à n équations qui peut être exprimé sous la forme matricielle suivante:

$$\mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{B} \mathbf{t}, \quad (2.3)$$

où $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ est le vecteur des vitesses articulaires, \mathbf{t} est le vecteur des vitesses de l'effecteur, comprenant les translations et les rotations, et où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont les matrices jacobiennes du système. On a

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & \dot{\rho}_2 & \dots & \dot{\rho}_n \end{bmatrix}^T, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \rho_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \rho_n \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{A}_a)_{k \times k} = \text{diag} [\rho_1 \dots \rho_k], \quad (\mathbf{A}_r)_{(n-k) \times (n-k)} = \text{diag} [\rho_{k+1} \dots \rho_n],$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n-1}^T \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix}_{n \times d} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_a)_{k \times d} \\ (\mathbf{B}_r)_{(n-k) \times d} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

où d est le nombre de degrés de liberté du manipulateur et où les indices a et r réfèrent respectivement aux *actionneurs* et aux *ressorts*.

Les rangées \mathbf{b}^T de la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{t} étant différents pour un système plan et un système spatial, ceux-ci sont définis aux deux sections suivantes.

2.2 Système plan ($d = 3$)

Dans un espace à deux dimensions, la matrice de rotation est

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

et sa dérivée par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E} \mathbf{Q} \dot{\phi} \quad (2.8)$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'équation (2.2) devient donc:

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q} \mathbf{v}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \dot{\phi} - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}_i^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \dot{\phi}, \\ \rho_i \dot{\rho}_i &= (\mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{c} - \mathbf{p}_i)^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La rangée \mathbf{b}_i^T de la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{t} de (2.3) sont les suivants:

$$\mathbf{b}_{i \ 1 \times 3}^T = \left[(\mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \quad ((\mathbf{c} - \mathbf{p}_i)^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{v}_i) \right], \quad (2.10)$$

$$\mathbf{t}_{3 \times 1} = \left[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\phi} \right]^T. \quad (2.11)$$

2.3 Système spatial ($d = 6$)

Dans un espace à trois dimensions, la matrice de rotation \mathbf{Q} est une matrice 3×3 orthogonale. Elle peut être constituée à partir des invariants naturels de la rotation qu'elle représente ou à partir des trois angles d'Euler. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} \quad (2.12)$$

avec

$$\text{vect}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\omega}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des trois composantes principales de la vitesse angulaire de l'effecteur par rapport aux trois axes respectifs du repère de base.

L'équation (2.2) devient donc:

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}_i) - \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{p}_i^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}_i), \\ \rho_i \dot{\rho}_i &= (\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i \times (\mathbf{c} - \mathbf{p}_i))^T \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

La rangée \mathbf{b}_i^T de la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{t} de (2.3) sont les suivants:

$$\mathbf{b}_{i \ 1 \times 6}^T = \left[(\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_i)^T \quad (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i \times (\mathbf{c} - \mathbf{p}_i))^T \right], \quad (2.14)$$

$$\mathbf{t}_{6 \times 1} = \left[\dot{\mathbf{c}}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T \right]^T = \left[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \right]^T. \quad (2.15)$$

Chapitre 3

Dynamique du système

À partir des équations de vitesse obtenues au chapitre précédent, sont établies dans ce chapitre les relations entre les efforts articulaires et les efforts dynamiques à l'effecteur.

3.1 Dérivation des équations de force

Selon le principe du travail virtuel, on peut écrire

$$-\mathbf{f}^T \delta \boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{x} \quad (3.1)$$

avec

$$\mathbf{f}^T = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n]$$

où f_i est la tension dans la liaison i et où $\boldsymbol{\rho}$ et \mathbf{x} sont respectivement le vecteur des longueurs des câbles et le vecteur des coordonnées cartésiennes (position et orientation) de l'effecteur.

Dans le cas plan,

$$\mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T & I\ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où F_x , F_y et τ sont les forces et le couple appliqués par l'ensemble des câbles et ressorts sur l'effecteur, \mathbf{g} est le vecteur d'accélération gravitationnelle et pointe dans la direction négative de l'axe Y (on considère un plan parallèle à la gravité), $\ddot{\mathbf{c}}$ et $\ddot{\phi}$ sont respectivement le vecteur d'accélération linéaire et le scalaire d'accélération angulaire du centre de masse de l'effecteur et, enfin, m et I sont respectivement la masse de l'effecteur et le moment d'inertie de celui-ci par rapport à son centre de masse.

Dans le cas spatial,

$$\mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{g})^T & (\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^T \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

où F_x , F_y , F_z , τ_x , τ_y et τ_z sont les forces et couples appliqués par l'ensemble des câbles et ressorts sur l'effecteur, \mathbf{g} est le vecteur d'accélération gravitationnelle, $\ddot{\mathbf{c}}$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ sont respectivement les vecteurs d'accélération linéaire et d'accélération angulaire du centre de masse de l'effecteur et, enfin, m et \mathbf{I} sont respectivement la masse de l'effecteur et le tenseur d'inertie de celui-ci par rapport à son centre de masse.

De l'équation (2.3), on peut écrire

$$\delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\delta\mathbf{x} \quad (3.4)$$

En substituant cette équation dans (3.1), on obtient

$$-\mathbf{f}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\delta\mathbf{x} = \mathbf{e}^T\delta\mathbf{x} \quad (3.5)$$

Puisque cette dernière équation doit être satisfaite pour tout vecteur de déplacement cartésien $\delta\mathbf{x}$, on peut écrire

$$-\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-T}\mathbf{f} = \mathbf{e} \quad (3.6)$$

Des équations (2.5) et (2.6) on sait que

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a^T & \mathbf{B}_r^T \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A}^{-T} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

et on peut alors décomposer le membre de gauche de (3.6) de la façon suivante:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{f} = \mathbf{B}_a^T \mathbf{A}_a^{-1} \mathbf{f}_a + \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{f}_r \quad (3.9)$$

où \mathbf{f}_a est le vecteur des forces dans les câbles et \mathbf{f}_r , le vecteur des forces dans les ressorts. L'équation (3.6) devient donc

$$-\mathbf{B}_a^T \mathbf{A}_a^{-1} \mathbf{f}_a + \mathbf{e}_r = \mathbf{e}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{e}_r = -\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{f}_r \quad (3.11)$$

où \mathbf{e}_r est le vecteur des efforts, forces et moments, appliqués par l'ensemble des ressorts sur l'effecteur.

Si les conditions dynamiques et la configuration sont données, les vecteurs \mathbf{e} , \mathbf{f}_r et \mathbf{e}_r sont connus et on obtient finalement une équation de la forme

$$\mathbf{W} \mathbf{f}_a = \mathbf{h} \quad (3.12)$$

avec

$$\mathbf{W}_{d \times k} = -\mathbf{B}_a^T \mathbf{A}_a^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_{d \times 1} = \mathbf{e} - \mathbf{e}_r \quad (3.13)$$

Les éléments de \mathbf{h} correspondent donc aux forces et moments que doivent générer les câbles sur l'effecteur; ces efforts servent à induire les accélérations désirées à l'effecteur et à reprendre les efforts engendrés par les ressorts.

3.2 Forces dans les câbles

Pour obtenir \mathbf{f}_a , soit les forces dans les câbles, on doit solutionner l'équation (3.12); deux situations surviennent:

- Cas isostatique ($k = d$)

La solution est unique et est obtenue par

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}. \quad (3.14)$$

- Cas hyperstatique ($k > d$)

Il existe une infinité de solutions.

On choisira la solution à norme minimale. Celle-ci permet de minimiser la norme de \mathbf{f}_a et est obtenue par

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{W}^I \mathbf{h}, \quad (3.15)$$

où \mathbf{W}^I est l'inverse généralisée (ou pseudo-inverse) de \mathbf{W} , soit

$$\mathbf{W}^I = \mathbf{W}^T (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1}. \quad (3.16)$$

Cette solution ne garantit en rien que les composantes de \mathbf{f}_a seront positives, c'est-à-dire la tension dans les câbles.

Le problème à solutionner en réalité est donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{sous} \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbf{f}_a^T \mathbf{f}_a, \\ \mathbf{W}\mathbf{f}_a = \mathbf{h} \quad (\text{eq. 3.12}), \\ \mathbf{f}_{ai} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{array} \right. \right. \quad (3.17)$$

La résolution de ce problème est possible grâce à la programmation quadratique [11, 12]. Cette technique permet justement d'optimiser une certaine fonction quadratique tout en respectant une série de contraintes, d'égalités et d'inégalités. Dans le cas présent, la fonction à minimiser est la norme du vecteur des forces dans les câbles et les contraintes à respecter sont l'équation d'équilibre (3.12) et le fait que la force dans chacun des câbles doit être positive ou nulle.

Voici un exemple de calcul des forces dans les câbles par la norme minimale et par la programmation quadratique pour deux trajectoires circulaires à orientation constante. Le manipulateur utilisé pour ces calculs, montré à la figure 3.1, a une masse de 10 kg , un moment d'inertie par rapport à son centre de masse de $10\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ et son architecture est définie à l'équation (3.18). Ces deux trajectoires sont définies par le centre et le rayon d'un cercle ainsi que l'angle (en radians) de la position de l'effecteur sur ce cercle et ses dérivées premières et secondes, soit θ , ω et α respectivement. L'expression analytique de la progression de l'angle θ en fonction du temps est présentée à l'équation (3.19).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_1 &= [1 \ 0]^T, & \mathbf{p}_2 &= [9 \ 0]^T, & \mathbf{p}_3 &= [10 \ 5]^T, \\
 \mathbf{p}_4 &= [9 \ 10]^T, & \mathbf{p}_5 &= [1 \ 10]^T, & \mathbf{p}_6 &= [0 \ 5]^T, \\
 \mathbf{v}_1 &= [-1 \ 0]^T, & \mathbf{v}_2 &= [1 \ 0]^T, & \mathbf{v}_3 &= [1 \ 0]^T, \\
 \mathbf{v}_4 &= [1 \ 0]^T, & \mathbf{v}_5 &= [-1 \ 0]^T, & \mathbf{v}_6 &= [-1 \ 0]^T.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

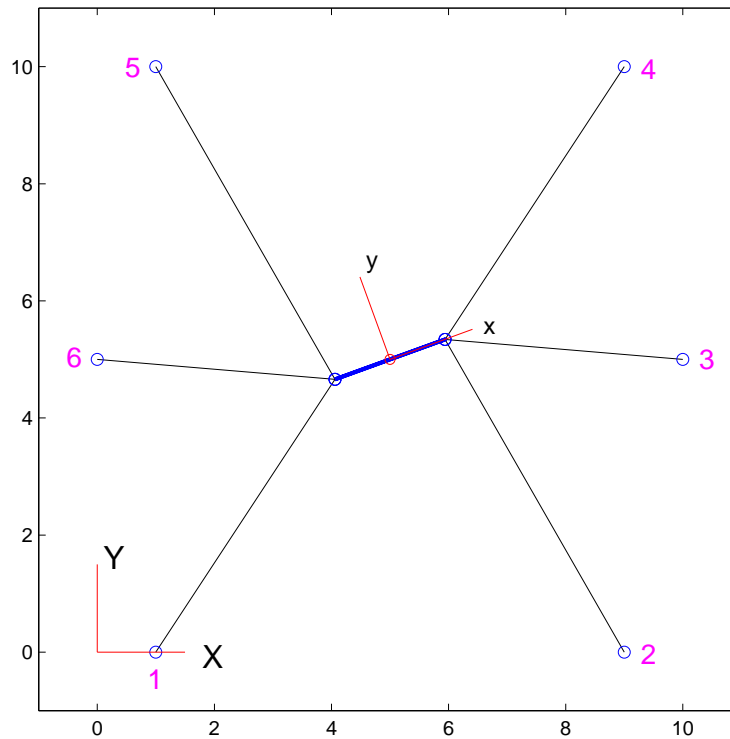


Figure 3.1: Manipulateur plan à six câbles.

$$\theta(t) = At^5 + Bt^4 + Ct^3 \quad (3.19)$$

avec

$$A = 12\pi / t_f^5, \quad B = -30\pi / t_f^4, \quad C = 20\pi / t_f^3$$

où θ est exprimé en radians et t_f est le temps total de la trajectoire.

La première trajectoire (figure 3.2), centrée en $(5, 5)$, est complètement à l'intérieur de l'espace atteignable tandis que la seconde trajectoire (figure 3.4), centrée en $(1, 5)$, débute et se termine à l'intérieur de l'espace atteignable mais en sort entre $t \approx 1,7 s$ et $t \approx 1,9 s$ puis entre $t \approx 2,5 s$ et $t \approx 3,3 s$. Pour chacune des deux trajectoires, une orientation ϕ de 0° , un cercle de $2 m$ de rayon et un temps total t_f de $5 s$ ont été utilisés.

Les figures 3.3 et 3.5 montrent la progression des forces dans les actionneurs calculées par la programmation quadratique et par la norme minimale pour ces deux trajectoires respectivement. On constate que la programmation quadratique permet de minimiser la norme du vecteur des forces tout en gardant celles-ci positives, lorsque la configuration le permet. On remarque aussi que, ce faisant, lorsque l'effecteur s'approche de la frontière de l'espace atteignable, dans la seconde trajectoire, des forces très grandes sont nécessaires dans les seuls câbles qui peuvent travailler en tension pour ces configurations. Pour les configurations à l'extérieur de l'espace atteignable, certaines forces doivent être négatives pour respecter les équations d'égalité et la programmation quadratique ne donne alors plus de résultats satisfaisants. La norme minimale, quant à elle, ne perçoit pas cette transition car elle utilise tous les actionneurs sans contrainte de signe.

La programmation quadratique permet donc de vérifier si une configuration appartient à l'espace atteignable et de calculer, s'il y a lieu, les tensions correspondantes. Cependant, elle ne permet pas de prédire cet espace atteignable.

Dans quels cas existe-t-il une solution ? Pour quelles configurations tous les câbles travaillent-ils en tension ? Le chapitre 4 répond à ces questions.

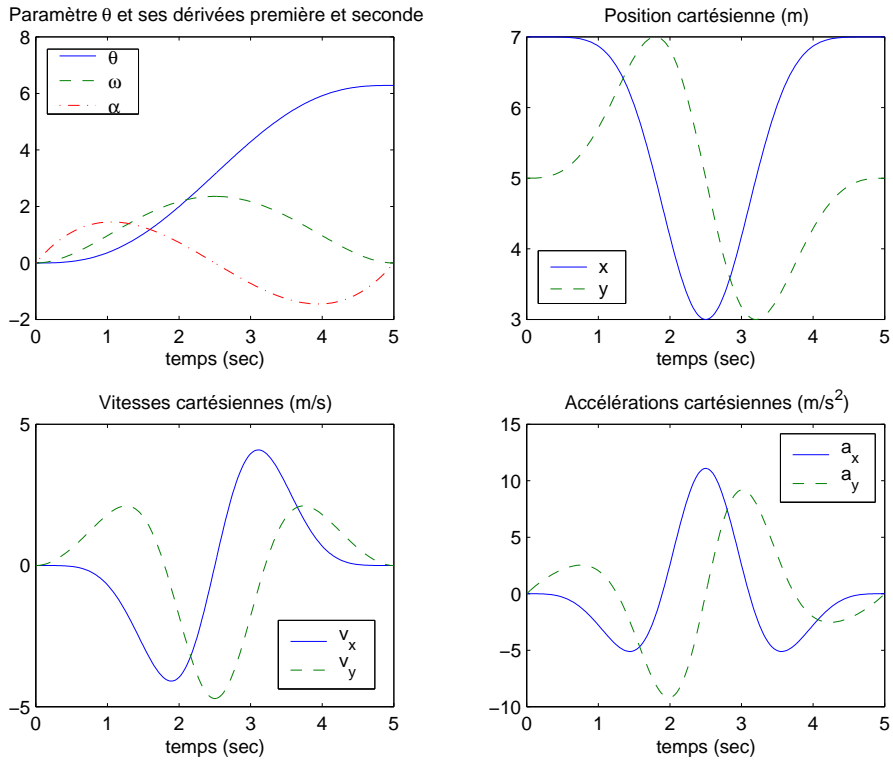


Figure 3.2: Trajectoire 1: intérieur de l'espace atteignable.

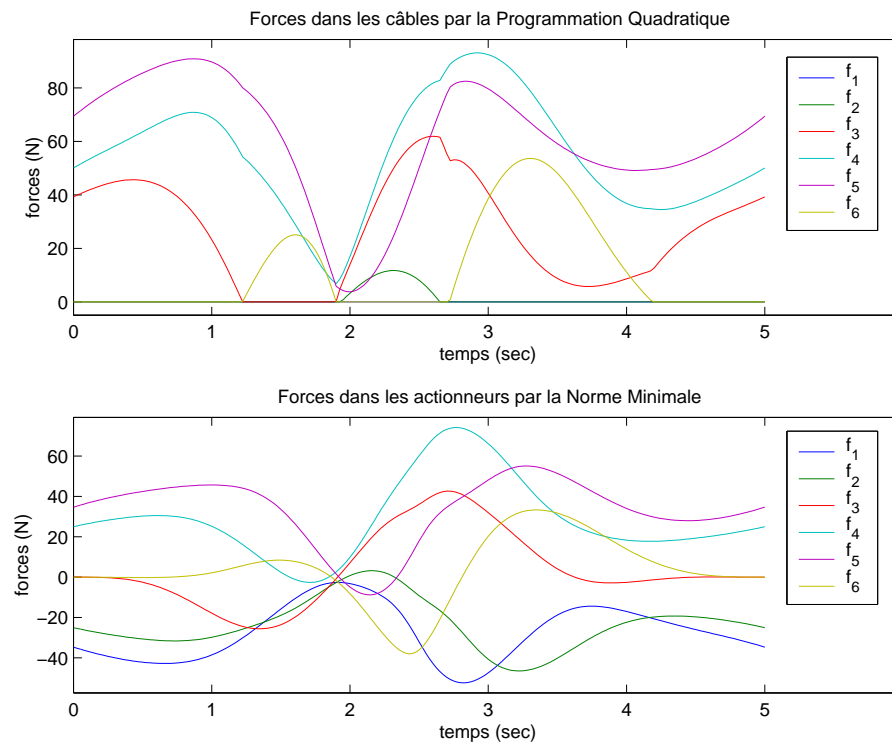


Figure 3.3: Forces dans les actionneurs: trajectoire 1.

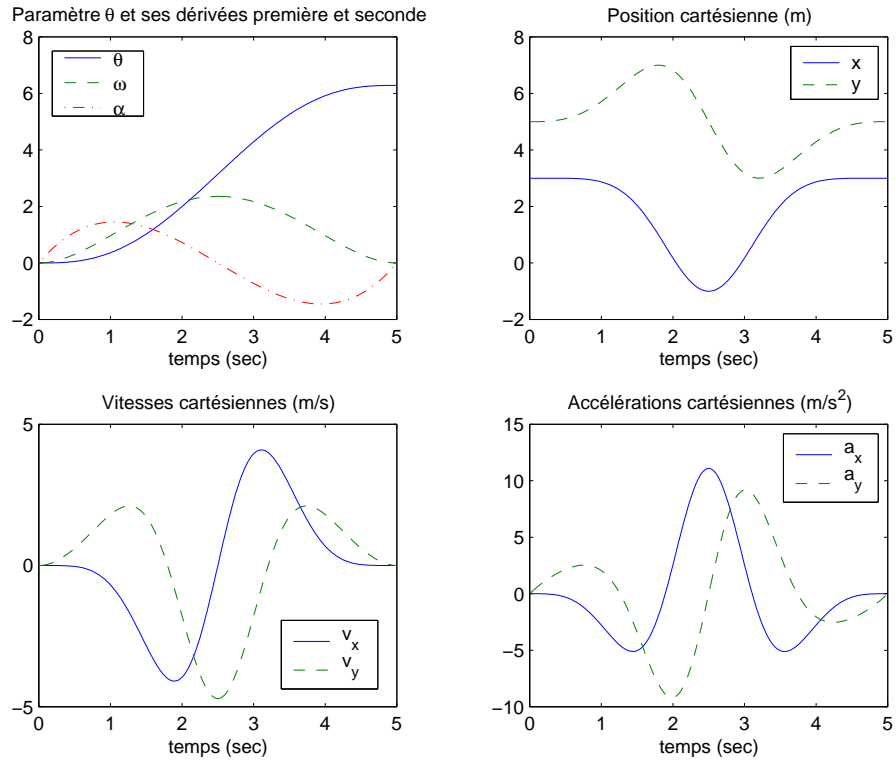


Figure 3.4: Trajectoire 2: extérieur de l'espace atteignable.

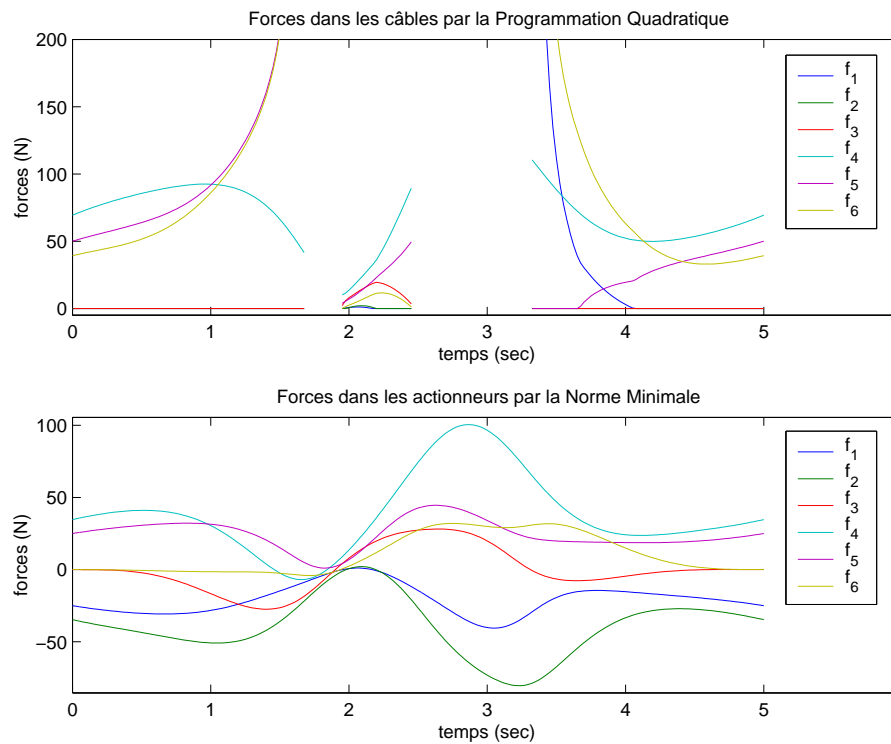


Figure 3.5: Forces dans les actionneurs: trajectoire 2.

Chapitre 4

Espace atteignable

Ce chapitre présente une analyse systématique de l'espace atteignable des manipulateurs parallèles plans et spatiaux actionnés par câbles.

4.1 Description générale de l'espace atteignable

Pour les manipulateurs parallèles conventionnels, l'espace atteignable dépend des limites des actionneurs et des lieux de singularité [13, 14]. Pour les manipulateurs parallèles actionnés par câbles cependant, l'ensemble des configurations que peut atteindre l'effecteur dépend surtout du fait que les câbles ne travaillent qu'en tension.

Définition: L'espace atteignable d'un manipulateur parallèle actionné par câbles est l'ensemble des configurations du mécanisme pour lesquelles tous les câbles impliqués travaillent en tension afin de produire sur l'effecteur les conditions dynamiques requises.

Autrement dit, l'espace atteignable comprend toutes les configurations pour lesquelles il existe au moins une combinaison de câbles (certains câbles peuvent être au repos) permettant d'engendrer à l'effecteur les accélérations désirées.

Puisque pour un manipulateur parallèle actionné par câbles, contrairement aux manipulateurs conventionnels, l'espace atteignable dépend des accélérations à l'effecteur, on doit maintenant parler d'espace dynamique. L'espace atteignable en mode statique ne constitue alors qu'un cas particulier d'espace dynamique pour lequel les accélérations sont nulles.

4.2 Description détaillée de l'espace atteignable

L'équation (3.12), soit $\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{h}$, peut être réécrite de la façon suivante:

$$f_1\mathbf{w}_1 + f_2\mathbf{w}_2 + \dots + f_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} + f_k\mathbf{w}_k = \mathbf{h} \quad f_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k) \quad (4.1)$$

où f_i est la force dans le i^e câble et \mathbf{w}_i est la i^e colonne de la matrice \mathbf{W} ; ces vecteurs \mathbf{w} seront dorénavant appelés *vecteurs directeurs*. Pour alléger l'écriture, les forces dans les câbles ne seront désormais plus identifiées par \mathbf{f}_a mais plutôt par \mathbf{f} , l'indice a étant omis. Tel que décrit au chapitre précédent, les éléments de \mathbf{h} sont les forces et moments de force appliqués par l'ensemble des câbles actionnés sur l'effecteur.

Puisque les câbles ne peuvent pas travailler en compression, les coefficients f_1 à f_k de (4.1) doivent tous être positifs ou nuls. L'espace atteignable est donc l'ensemble des configurations pour lesquelles le vecteur \mathbf{h} peut être obtenu par la somme vectorielle des vecteurs \mathbf{w} , mais en utilisant uniquement des coefficients positifs ou nuls.

Considérons tout d'abord un mécanisme plan, pour lequel la compréhension de la démarche qui va suivre et la visualisation des concepts sont beaucoup plus faciles.

4.2.1 Espace atteignable d'un manipulateur plan

Dans le cas d'un manipulateur plan, pour qu'une configuration appartienne à l'espace atteignable, les vecteurs directeurs \mathbf{w} et le vecteur \mathbf{h} correspondant à cette configuration doivent respecter la règle suivante: \mathbf{h} se trouve à l'intérieur (ou sur une des faces) d'au moins une des pyramides triangulaires (figure 4.1) formées par chacune des combinaisons de trois des vecteurs directeurs dans l'espace virtuel des efforts appliqués par les câbles sur l'effecteur; les trois dimensions de cet espace sont la somme des forces selon l'axe X , la somme des forces selon l'axe Y et la somme des moments de force, appliqués par les câbles sur l'effecteur.

La figure 4.1 est une représentation des quatre vecteurs directeurs \mathbf{w}_1 à \mathbf{w}_4 et du vecteur \mathbf{h} d'un manipulateur quelconque à quatre câbles dans cet espace virtuel des efforts. Les vecteurs directeurs pivotent, de façon continue, autour de l'origine des axes de cet espace au cours d'un changement de configuration du mécanisme. La configuration correspondant à la disposition des vecteurs illustrée appartient à l'espace atteignable puisque le vecteur \mathbf{h} se trouve à l'intérieur de la pyramide formée par les vecteurs \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_3 et \mathbf{w}_4 .

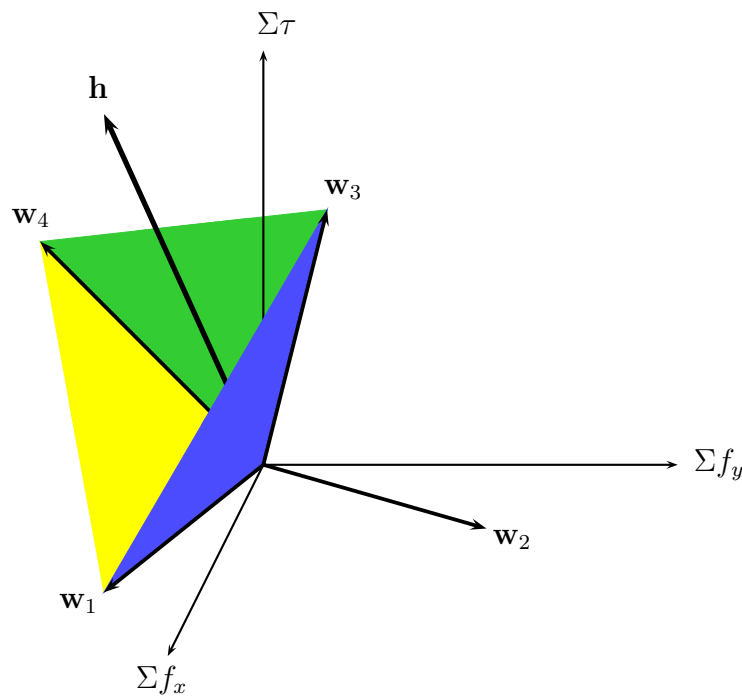


Figure 4.1: Pyramide formée par trois des vecteurs directeurs.

Le vecteur directeur \mathbf{w}_i d'un manipulateur plan est de la forme suivante:

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\rho_i} \begin{bmatrix} A_i - x \\ B_i - y \\ C_i x + D_i y + E_i \end{bmatrix}, \quad \rho_i = \sqrt{(A_i - x)^2 + (B_i - y)^2}, \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{aligned} A_i &= a_i + y_i \sin \phi - x_i \cos \phi, \\ B_i &= b_i - x_i \sin \phi - y_i \cos \phi, \\ C_i &= x_i \sin \phi + y_i \cos \phi, \\ D_i &= y_i \sin \phi - x_i \cos \phi, \\ E_i &= -a_i[x_i \sin \phi + y_i \cos \phi] + b_i[x_i \cos \phi - y_i \sin \phi]. \end{aligned}$$

On remarque, d'après la forme de ρ_i (la longueur du câble i), que les deux premiers éléments de \mathbf{w}_i forment un vecteur unitaire. Ceci est cohérent puisque \mathbf{w}_i constitue une des colonnes de la matrice Jacobienne et ses deux premiers éléments sont des cosinus directeurs et ne font que distribuer la force du câble i selon les axes x et y . Dans le cas d'un manipulateur spatial, ce sont les trois premiers éléments de \mathbf{w}_i qui formeront un vecteur unitaire.

On constate que, pour une configuration donnée, afin que l'équation (4.1) soit respectée quel que soit le vecteur \mathbf{h} , c'est-à-dire afin que le vecteur \mathbf{h} puisse être obtenu, quel qu'il soit, par une somme vectorielle quelconque des vecteurs directeurs en utilisant uniquement des coefficients positifs, au moins quatre vecteurs directeurs doivent être disponibles et ceux-ci doivent être disposés de manière à couvrir l'ensemble des directions dans l'espace virtuel des efforts; ces quatre vecteurs pointeront, par exemple, vers les quatre sommets d'un tétraèdre régulier centré à l'origine. Ceci revient à dire que pour un manipulateur parallèle plan actionné par câbles, afin qu'il soit possible de contrôler pleinement tous ses degrés de liberté dans une configuration donnée, celui-ci doit comporter au moins quatre câbles et ceux-ci doivent être disposés de façon efficace pour cette configuration. Comme il a été mentionné dans l'introduction, le plein contrôle des degrés de liberté signifie que tout jeu d'efforts peut être généré à l'effecteur.

Pour le reste de ce mémoire, une telle configuration pour laquelle tout jeu d'accélération peut être imposé à l'effecteur sera qualifiée de polyvalente. On constate que toute configuration polyvalente appartient nécessairement à l'espace atteignable, quelles que soient les conditions dynamiques requises.

N.B. La découverte de ces configurations polyvalentes ne fait pas l'objet de ce mémoire; celles-ci ne sont présentées que pour aider à la compréhension de la démarche.

Il est très peu probable, voire impossible, que toutes les configurations d'un mécanisme puissent bénéficier d'une telle répartition polyvalente des câbles, c'est-à-dire garantissant le plein contrôle de tous les degrés de liberté, sans quoi l'espace atteignable de ce mécanisme ne serait défini que par les limites de ses articulations. Aussi, l'utilisation de câbles supplémentaires permettra, entre autres, d'augmenter le nombre de configurations pour lesquelles le manipulateur bénéficiera d'un tel avantage.

Ainsi, pour plusieurs configurations d'un manipulateur plan, malgré un nombre de câbles supérieur à quatre, les vecteurs directeurs ne couvriront pas l'ensemble des directions dans l'espace virtuel des efforts. Pour une telle configuration non polyvalente, ces vecteurs seront tous situés du même côté d'un plan passant par l'origine du système d'axes de cet espace, comme à la figure 4.2. Dans cette illustration, les vecteurs directeurs forment une pyramide à quatre faces (\mathbf{w}_2 , \mathbf{w}_3 , \mathbf{w}_4 et \mathbf{w}_5 définissent quatre plans qui constituent les faces de la pyramide; \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_6 et \mathbf{h} sont à l'intérieur) et le vecteur \mathbf{h} doit absolument se trouver à l'intérieur de cette pyramide afin que les accélérations requises à l'effecteur puissent être appliquées par les câbles.

On peut observer à partir de la figure 4.2 que peu importe la position du vecteur \mathbf{h} à l'intérieur de la pyramide à quatre faces, celui-ci se trouve aussi à l'intérieur d'au moins une des pyramides triangulaires correspondant à une combinaison de trois vecteurs directeurs (\mathbf{w}_4 , \mathbf{w}_5 et \mathbf{w}_6 dans cette illustration). Cela revient à dire que chaque configuration de l'espace atteignable peut être réalisée par seulement trois câbles. Ceci ne garantit pas que cette combinaison de trois câbles sera optimale en ce qui concerne les forces mais seulement que toute configuration de l'espace atteignable peut être atteinte en utilisant seulement trois câbles. On peut en conclure que l'espace atteignable est l'union des sous-espaces réalisables par chacune des combinaisons de trois câbles. Cette constatation est cruciale pour les développements subséquents.

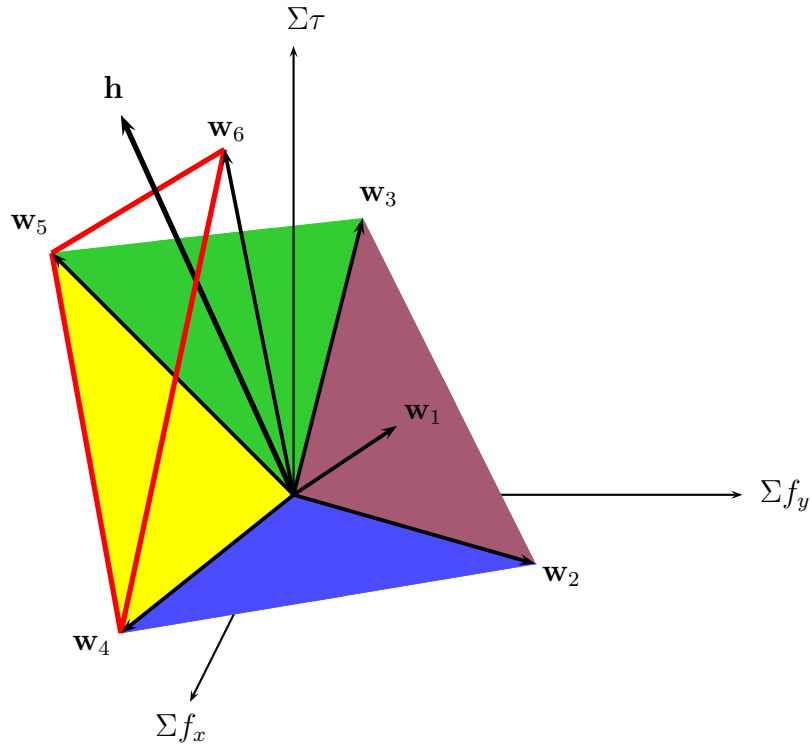


Figure 4.2: Disposition non polyvalente des six vecteurs directeurs.

4.2.2 Espace atteignable d'un manipulateur spatial

Bien que la visualisation d'entités géométriques soit impossible dans un espace à six dimensions, les concepts construits dans la section précédente peuvent tout de même être étendus aux manipulateurs spatiaux.

Dans le cas des manipulateurs spatiaux, les vecteurs directeurs \mathbf{w} , le vecteur \mathbf{h} et l'espace virtuel des efforts ont six dimensions, lesquelles sont la somme des forces et des moments de force appliqués par les câbles sur l'effecteur selon les axes x , y et z .

Pour qu'une configuration appartienne à l'espace atteignable, les vecteurs directeurs et le vecteur \mathbf{h} correspondant à cette configuration doivent respecter la règle suivante: \mathbf{h} doit se trouver à l'intérieur (ou sur une des faces) d'au moins une des hyper-pyramides à six faces formées par chacune des combinaisons de six des vecteurs directeurs dans cet espace virtuel des efforts.

Ainsi, par analogie avec les manipulateurs plans, pour que le vecteur \mathbf{h} puisse être obtenu, quelle que soit son orientation, par une somme vectorielle quelconque des

vecteurs directeurs, au moins sept de ces vecteurs doivent être disponibles et ceux-ci doivent couvrir de façon adéquate l'ensemble des directions dans cet espace virtuel. Ceci revient à dire que pour qu'il soit possible de contrôler tous les degrés de liberté d'un manipulateur parallèle spatial actionné par câbles, il faut que celui-ci comporte au moins sept câbles et ceux-ci doivent être disposés de façon efficace.

Comme dans le cas des manipulateurs plans, toute configuration polyvalente appartient nécessairement à l'espace atteignable.

On peut aussi affirmer, encore par analogie, que chaque configuration de l'espace atteignable d'un manipulateur spatial parallèle actionné par câbles peut être réalisée par seulement six câbles; ceci ne garantit pas que cette combinaison de six câbles sera optimale en ce qui concerne les forces. On peut en conclure que l'espace atteignable est l'union des sous-espaces réalisables par chacune des combinaisons de six câbles.

Le vecteur directeur \mathbf{w}_i d'un manipulateur spatial est de la forme suivante:

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\rho_i} \begin{bmatrix} A_i - x \\ B_i - y \\ C_i - z \\ D_i y + E_i z + F_i \\ G_i x + H_i z + I_i \\ J_i x + K_i y + L_i \end{bmatrix}, \quad \rho_i = \sqrt{(A_i - x)^2 + (B_i - y)^2 + (C_i - z)^2}, \quad (4.3)$$

avec

$$\begin{aligned} A_i &= a_i - q_{xi}, & G_i &= -q_{zi}, \\ B_i &= b_i - q_{yi}, & H_i &= q_{xi}, \\ C_i &= c_i - q_{zi}, & I_i &= a_i q_{zi} - c_i q_{xi}, \\ D_i &= q_{zi}, & J_i &= q_{yi}, \\ E_i &= -q_{yi}, & K_i &= -q_{xi}, \\ F_i &= -b_i q_{zi} + c_i q_{yi}, & L_i &= -a_i q_{yi} + b_i q_{xi}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_{xi} &= \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_i, \\ q_{yi} &= \mathbf{q}_2^T \mathbf{v}_i, \\ q_{zi} &= \mathbf{q}_3^T \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

où \mathbf{q}_j^T est la rangée j de la matrice de rotation \mathbf{Q} et \mathbf{v}_i est le vecteur position du

point d'ancrage du câble i sur l'effecteur (chapitre 1); les q_{xi} , q_{yi} et q_{zi} sont donc les coordonnées de ce point d'ancrage dans le repère de base. On remarque encore ici que les trois premiers éléments de \mathbf{w}_i forment un vecteur unitaire.

4.2.3 Espace atteignable d'un manipulateur à d degrés de liberté

On peut résumer et généraliser les concepts établis aux deux sous-sections précédentes de la façon suivante.

Un manipulateur à d degrés de liberté doit posséder au moins $d + 1$ câbles afin qu'il soit possible de contrôler pleinement tous ses degrés de liberté dans une configuration donnée, et, de plus, les câbles doivent être disposés de façon efficace pour cette configuration.

Toute configuration bénéficiant d'une telle répartition des câbles, c'est-à-dire permettant le plein contrôle de tous les degrés de liberté, appartient à l'espace atteignable.

De plus, chaque configuration de l'espace atteignable d'un manipulateur parallèle à d degrés de liberté actionné par câbles peut être atteinte en utilisant seulement d câbles. Pour des conditions dynamiques données, son espace atteignable est donc l'union des sous-espaces correspondant à chacune des combinaisons de d câbles.

4.3 Frontières de l'espace atteignable

Lorsque l'on s'intéresse à l'espace atteignable d'un mécanisme, c'est en réalité les frontières de cet espace que l'on cherche à obtenir.

Une configuration polyvalente (définie à la section 4.2.1), bien qu'elle appartienne à l'espace atteignable, n'appartiendra jamais à la frontière de cet espace. En effet, pour une légère variation, quelle qu'elle soit, par rapport à une telle configuration, le vecteur \mathbf{h} pourra toujours être obtenu par une somme vectorielle de trois des vecteurs directeurs.

La figure 4.2 permet de visualiser les deux seules façons pour le manipulateur de traverser une frontière de son espace atteignable lors d'un changement de configuration.

Une frontière est traversée de la première façon lorsque l'une des faces de la pyramide vient croiser le vecteur \mathbf{h} et de la deuxième lorsque que la pyramide s'ouvre et que les seuls vecteurs directeurs capables de produire \mathbf{h} deviennent coplanaires, \mathbf{h} devenant le seul vecteur de son côté du plan ou de l'hyper-plan formé par ces vecteurs directeurs.

Pour un manipulateur plan, une situation évidente pour laquelle celui-ci se trouve sur l'une des frontières de son espace atteignable peut donc être décrite à l'aide de la pyramide de la figure 4.2 encore une fois: le vecteur \mathbf{h} doit se trouver sur une des faces de cette pyramide (un des quatre plans en couleur). Le vecteur \mathbf{h} peut alors être constitué par seulement deux des vecteurs \mathbf{w} et, dans ce cas, le système se trouve en situation d'équilibre à deux câbles (section 4.3.1). Les conditions géométriques et mathématiques complètes sont fournies à la section 5.2.3.1.

Le deuxième type de frontière est abordé à la section 4.3.3. Le cas du manipulateur spatial est traité à la section 4.3.2.

4.3.1 Équilibre à deux câbles d'un manipulateur plan

Pour cet équilibre, l'équation (4.1) devient

$$f_\mu \mathbf{w}_\mu + f_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{h} \quad (4.4)$$

où les indices μ et ν réfèrent aux deux câbles impliqués dans l'équilibre.

Puisque seules les directions des vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν , et non pas leurs normes, ont une incidence sur les lieux de l'équilibre à deux câbles, on peut omettre ρ_μ et ρ_ν de (4.2); la longueur d'un câble n'a pas d'influence sur les efforts qu'il engendre sur l'effecteur. L'équilibre peut être représenté par la combinaison linéaire suivante:

$$\alpha \mathbf{w}_\mu^* + (1 - \alpha) \mathbf{w}_\nu^* = \lambda \mathbf{h} \quad (4.5)$$

où

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad \lambda \geq 0,$$

avec

$$\mathbf{w}_i^* = \mathbf{w}_i / \rho_i. \quad (4.6)$$

Le paramètre α effectue une somme linéaire des vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν tandis que le paramètre λ ajuste la longueur de \mathbf{h} à celle de $\{\alpha\mathbf{w}_\mu^* + (1 - \alpha)\mathbf{w}_\nu^*\}$. La figure 4.3 permet de visualiser cette paramétrisation.

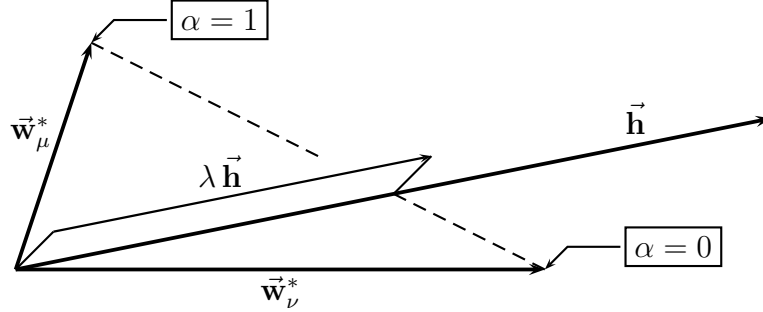


Figure 4.3: Paramétrisation linéaire de l'équilibre à deux câbles.

Considérons d'abord le cas pour lequel $n = k$, c'est-à-dire que le mécanisme ne comporte aucun ressort.

4.3.1.1 Équilibre à deux câbles d'un mécanisme sans ressort ($n = k$)

Pour un mécanisme sans ressort $\mathbf{h} = \mathbf{e}$ et l'équation (4.5) devient

$$\alpha\mathbf{w}_\mu^* + (1 - \alpha)\mathbf{w}_\nu^* = \lambda\mathbf{e} \quad (4.7)$$

où

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad \lambda \geq 0,$$

et on obtient le système de trois équations suivant:

$$\alpha(A_\mu - x) + (1 - \alpha)(A_\nu - x) = \lambda F_x, \quad (4.8)$$

$$\alpha(B_\mu - y) + (1 - \alpha)(B_\nu - y) = \lambda F_y, \quad (4.9)$$

$$\alpha(C_\mu x + D_\mu y + E_\mu) + (1 - \alpha)(C_\nu x + D_\nu y + E_\nu) = \lambda \tau. \quad (4.10)$$

En éliminant α et λ on obtient, pour une orientation constante de l'effecteur, une relation en x et y (annexe A); celle-ci représente une hyperbole (dans la majorité des cas), une parabole, ou alors une ou deux droites. L'annexe B explique en détail la nature quadratique des lieux d'équilibre à deux câbles.

L'avantage de cette paramétrisation linéaire (équation (4.5)) tenait dans la correspondance possible entre les limites physiques des lieux d'équilibre à deux câbles et les valeurs limites du paramètre α . Malheureusement, en résolvant pour $\{x, \alpha\}$ ou pour $\{y, \alpha\}$, les valeurs de x et y correspondant aux valeurs limites de α , soit 0 et 1, ne sont pas toujours les limites de la section recherchée de la courbe mais plutôt les positions où la force dans un et un seul des deux câbles subit un changement de signe. Ceci est dû au fait que l'élimination de λ ne respecte pas nécessairement le signe de celui-ci.

La figure 4.4 représente les lieux d'équilibre à deux câbles correspondant aux câbles 2 et 3 d'un mécanisme à trois câbles dont l'architecture est présentée à l'équation (4.11), pour un angle de rotation ϕ de 20° et une accélération de l'effecteur de $2 m/s^2$ dans la direction positive de l'axe X .

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= [3 \ 0]^T, & \mathbf{p}_2 &= [10 \ 10]^T, & \mathbf{p}_3 &= [0 \ 8]^T, \\ \mathbf{v}_1 &= [-1 \ -1]^T, & \mathbf{v}_2 &= [2 \ -1]^T, & \mathbf{v}_3 &= [-2 \ 2]^T. \end{aligned} \quad (4.11)$$

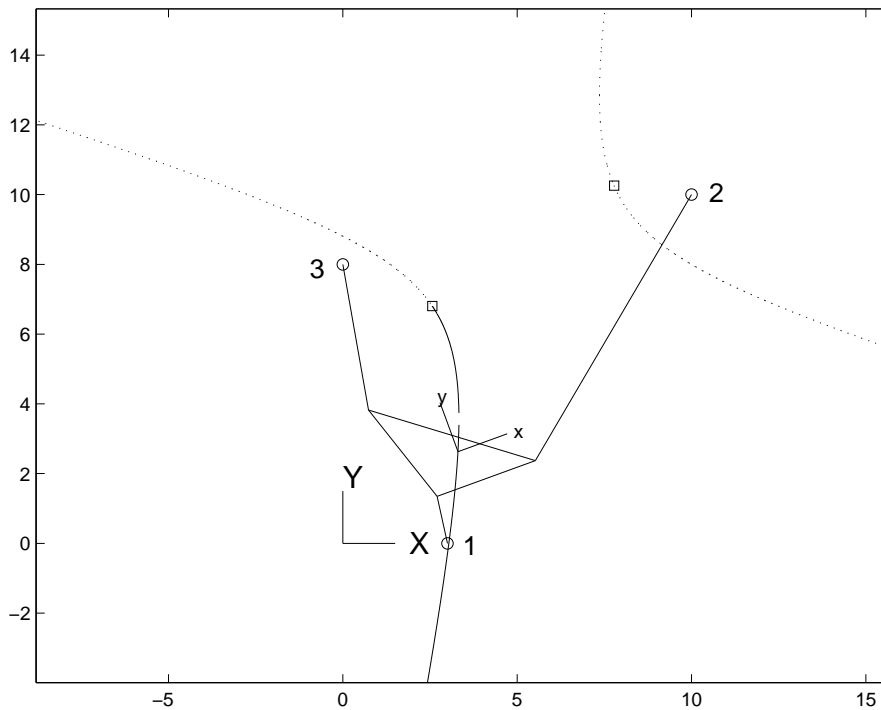


Figure 4.4: Lieux d'équilibre à deux câbles.

La ligne continue est la partie utile de la courbe (hyperbole), c'est-à-dire la partie où les deux câbles impliqués dans l'équilibre peuvent travailler en tension. Les carrés (\square) indiquent les positions correspondant aux valeurs limites du paramètre α . La façon de déterminer la partie utile de la courbe des lieux d'équilibre à deux câbles sera abordée à la section 5.2.3.1.

La figure 4.5 illustre les trois hyperboles d'équilibre à deux câbles du même mécanisme pour la même orientation mais sans accélération; ici encore, les lignes continues sont les parties utiles des lieux d'équilibre à deux câbles. On remarque, grâce à cette figure, que ceux-ci ne délimitent aucune zone fermée, et puisque l'espace atteignable devrait représenter une partie limitée du plan XY , il faut donc en déduire que les lieux d'équilibre à deux câbles ne constituent pas le seul type de frontière. En effet, tel que mentionné précédemment, il existe un deuxième type de frontière; celui-ci est traité à la section 4.3.3.

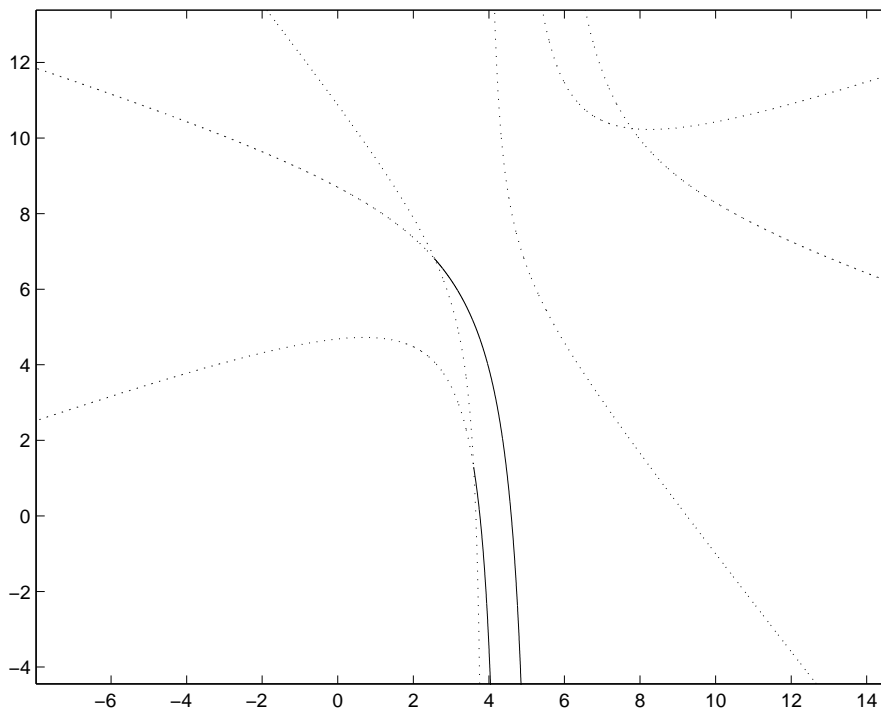


Figure 4.5: Trois hyperboles d'équilibre à deux câbles.

4.3.1.2 Équilibre à deux câbles d'un mécanisme avec ressort ($n > k$)

Pour un mécanisme avec ressort, la résolution des équations (4.8), (4.9) et (4.10) n'est pas possible et, puisque la forme de (4.5) ne permet pas de trouver les bornes par le paramètre α , on utilise tout simplement l'équation paramétrique suivante:

$$\alpha \mathbf{w}_\mu^* + \lambda \mathbf{w}_\nu^* = \mathbf{e} - \mathbf{e}_r \quad (4.12)$$

avec

$$\mathbf{e}_r = \sum_{j=1}^{n-k} \mathbf{u}_j K_j (\rho_{k+j} - l_j)$$

où \mathbf{u}_j est la j^e colonne de la jacobienne $-\mathbf{B}_r^T \mathbf{A}_r^{-1}$ de \mathbf{e}_r (équation (3.11)) correspondant au ressort j (liaison $k+j$) et K_j , ρ_{k+j} et l_j sont respectivement la raideur, la longueur et la longueur libre de ce ressort. Les vecteurs \mathbf{u} jouent le même rôle et sont de la même forme que les vecteurs directeurs \mathbf{w} (équation (4.2)) mais ils correspondent aux ressorts. Ici encore on utilise des vecteurs directeurs de normes quelconques \mathbf{w}_μ^* et \mathbf{w}_ν^* . En ce qui concerne les vecteurs \mathbf{u} cependant, les normes doivent être conservées car la force exercée par chacun des ressorts dépend directement de sa longueur.

On obtient le système de trois équations suivant:

$$\alpha(A_\mu - x) + \lambda(A_\nu - x) = F_x - \sum_{j=1}^{n-k} (A_{k+j} - x) K_j (\rho_{k+j} - l_j) / \rho_{k+j} , \quad (4.13)$$

$$\alpha(B_\mu - y) + \lambda(B_\nu - y) = F_y - \sum_{j=1}^{n-k} (B_{k+j} - y) K_j (\rho_{k+j} - l_j) / \rho_{k+j} , \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \alpha(C_\mu x + D_\mu y + E_\mu) + \lambda(C_\nu x + D_\nu y + E_\nu) \\ = \tau - \sum_{j=1}^{n-k} (C_{k+j} x + D_{k+j} y + E_{k+j}) K_j (\rho_{k+j} - l_j) / \rho_{k+j} , \end{aligned} \quad (4.15)$$

où les coefficients A à E sont définis à l'équation (4.2).

Pour un mécanisme avec ressort, et pour une orientation constante de l'effecteur, la résolution (annexe A) n'a été possible que pour des longueurs libres nulles des ressorts, soit

$$l_j = 0 , \quad j = 1, \dots, n - k .$$

4.3.2 Équilibre à cinq câbles d'un manipulateur spatial

Par analogie avec le manipulateur plan, le manipulateur spatial sera dans une configuration appartenant à la frontière de son espace atteignable quand le vecteur \mathbf{h} correspondant se trouvera sur une des faces de l'hyper-pyramide, c'est-à-dire sur un des hyperplans formés par cinq des vecteurs directeurs définissant cette hyper-pyramide dans son espace virtuel à six dimensions. Le vecteur \mathbf{h} peut alors être constitué par seulement cinq des vecteurs \mathbf{w} et, dans ce cas, le système se trouve en situation d'équilibre à cinq câbles.

Cet équilibre peut être représenté par la combinaison linéaire suivante:

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{w}_3 + \alpha_4 \mathbf{w}_4 + \alpha_5 \mathbf{w}_5 = \mathbf{h} \quad (4.16)$$

où les indices 1 à 5 réfèrent aux cinq câbles impliqués dans l'équilibre. Les paramètres α_1 à α_5 effectuent une somme linéaire des vecteurs \mathbf{w} .

Puisque seules les directions des vecteurs directeurs \mathbf{w} ont une incidence sur les lieux de l'équilibre à cinq câbles, et non pas leurs normes, on peut omettre ρ_i de (4.3). Pour un mécanisme sans ressort, on obtient alors le système de six équations suivant:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \alpha_i (A_i - x) &= F_x , \\ \Sigma \alpha_i (B_i - y) &= F_y , \\ \Sigma \alpha_i (C_i - z) &= F_z , \\ \Sigma \alpha_i (D_i y + E_i z + F_i) &= \tau_x , \\ \Sigma \alpha_i (G_i x + H_i z + I_i) &= \tau_y , \\ \Sigma \alpha_i (J_i x + K_i y + L_i) &= \tau_z . \end{aligned} \right| \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.17)$$

où les coefficients A à L sont définis à l'équation (4.3).

Pour une orientation constante de l'effecteur, la résolution de ce système d'équations permet d'obtenir une relation de degré 3 en x, y et z (annexe G); celle-ci décrit une surface dans l'espace représentant les lieux d'équilibre à cinq câbles d'un manipulateur spatial.

Le calcul de l'équation des lieux d'équilibre à cinq câbles d'un manipulateur parallèle spatial comprenant un ou plusieurs ressorts n'a pas été effectué dans le cadre de ce mémoire.

4.3.3 Singularités

Le second type de frontière de l'espace atteignable d'un manipulateur parallèle actionné par câbles a été abordé au début de la section 4.3. Comme il fut alors mentionné, pour une configuration appartenant à ce type de frontière, le vecteur \mathbf{h} se retrouve seul d'un des côtés du plan ou de l'hyper-plan défini par les vecteurs directeurs qui permettraient de constituer \mathbf{h} dans la configuration voisine appartenant à l'espace atteignable. Le manipulateur est donc en singularité puisque les seuls vecteurs directeurs utiles sont coplanaires. Les lieux de singularité correspondant à des sous-manipulateurs à d câbles constituent donc le deuxième type de frontière. Les conditions géométriques et mathématiques complètes permettant d'identifier ce type de frontière, pour les manipulateurs plans, sont fournies à la section 5.2.3.2.

De plus, comme il a été démontré à la section 4.2, l'espace atteignable est l'union des sous-espaces de chacune des combinaisons de d câbles. Ainsi, il est tout à fait logique de pouvoir considérer comme frontière potentielle, chacune des courbes représentant les lieux de singularité correspondant à chacune de ces combinaisons.

Les lieux de singularité des ces sous-manipulateurs à d câbles sont identiques à ceux des manipulateurs composés d'actionneurs conventionnels: dans le cas plan, ils peuvent être représentés par des quadratiques [15], alors que dans le cas spatial, ils correspondent à des cubiques [16].

La figure 4.6 est un exemple de lieux de singularité représentant une ellipse, pour le même mécanisme à trois câbles que celui présenté précédemment (équation (4.11)) avec $\phi = -15^\circ$ et $\ddot{x} = -4 m/s^2$. La figure 4.7, quant à elle, montre les quatre quadratiques, soit trois hyperboles d'équilibre à deux câbles et une ellipse de singularité, constituant les frontières potentielles de l'espace atteignable du même mécanisme pour un équilibre statique et un angle de rotation nul.

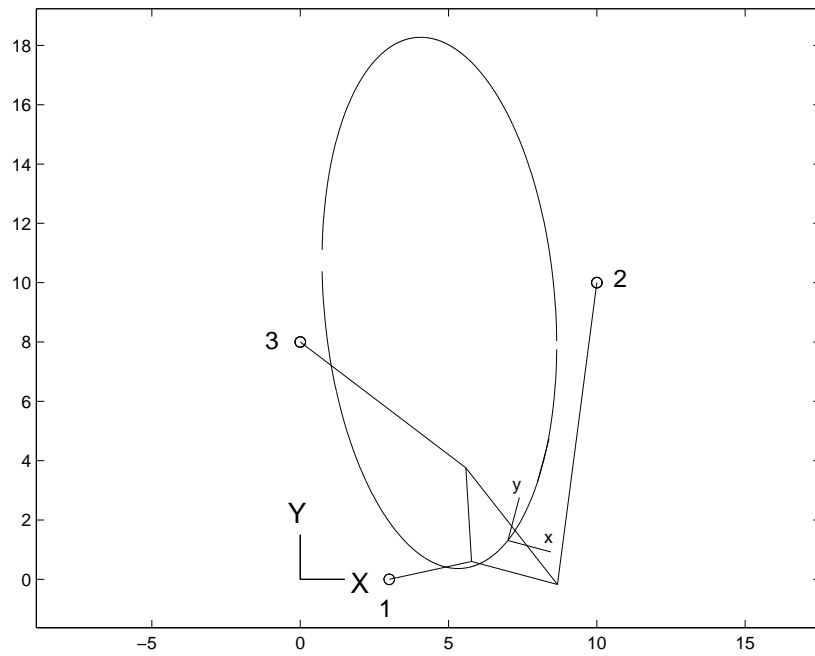


Figure 4.6: Lieux de singularité d'un mécanisme plan à trois câbles.

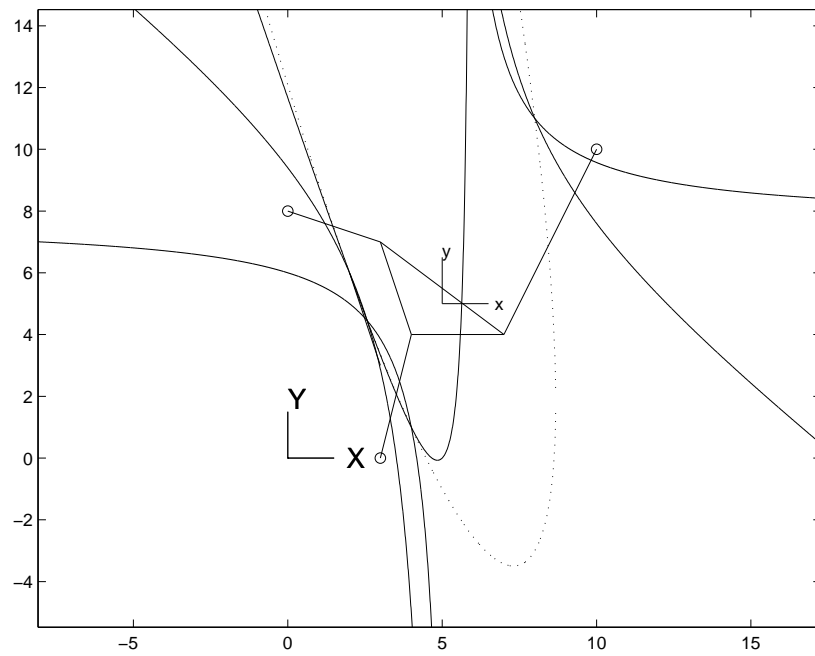


Figure 4.7: Les quatre courbes quadratiques d'un mécanisme plan à trois câbles.

Chapitre 5

Détermination analytique des frontières de l'espace atteignable à orientation constante d'un mécanisme plan actionné par câbles

Ce chapitre décrit la procédure permettant de déterminer analytiquement les frontières de l'espace atteignable à orientation constante d'un mécanisme plan actionné par câbles. Il comprend un aperçu général de la méthode puis une description détaillée de l'algorithme de calculs.

5.1 Description générale de la méthode

La méthode analytique de détermination des frontières de l'espace atteignable à orientation constante d'un manipulateur parallèle plan actionné par câbles proposée dans ce mémoire est simple. En voici un aperçu général. La première étape consiste en la création de chaque quadratique d'équilibre à deux câbles correspondant à chaque combinaison de deux câbles et de chaque quadratique de singularité correspondant à chaque combinaison de trois câbles; ces courbes sont les frontières potentielles de l'espace atteignable. On intersecte ensuite toutes ces courbes, deux à deux, pour former un ensemble de sections de courbes. On teste finalement chacune des sections ainsi créées afin de déterminer lesquelles constituent les frontières recherchées. La validation des sections est accomplie grâce à des conditions mathématiques simples.

Chaque section est testée en son point médian, c'est-à-dire le point milieu d'une section linéaire ou le point d'une section quelconque dont l'abscisse correspond à la moyenne des abscisses des bornes de cette section. Ce point sera, en général, assez éloigné des extrémités de la section et, par conséquent, assez distant d'une section voisine ayant une extrémité commune. Si la section est infinie, on choisit un point arbitraire suffisamment loin de la borne finie, s'il en existe une.

5.2 Description détaillée de l'algorithme

Voici maintenant, de façon plus détaillée, l'algorithme de calcul des frontières de l'espace atteignable d'un manipulateur parallèle plan actionné par câbles.

5.2.1 Création des quadratiques

Le but de cette étape est la création d'une série de quadratiques Ψ . Chacune de ces quadratiques sera représentée par un ensemble de huit paramètres comme le suivant:

$$\Psi = \{\eta, a, b, c, d, e, t, \psi\}, \quad (5.1)$$

où le premier paramètre, η , indique le nombre de coefficients de la forme explicite de cette quadratique (annexe D), les cinq paramètres suivants, a, b, c, d et e , sont les coefficients de la forme explicite de la quadratique (les coefficients superflus valent 0) et le septième, t , spécifie le type de la quadratique (annexe E). Le dernier paramètre, ψ , regroupe l'information concernant la combinaison de câbles d'où provient la quadratique; cette information sera utile lors du processus de validation des sections (section 5.2.3).

1. Génération des quadratiques

Calcul des quadratiques d'équilibre à deux câbles (annexe A) correspondant à chaque combinaison de deux câbles et des quadratiques de singularité (annexe C) correspondant à chaque combinaison de trois câbles sous la forme générale suivante:

$$E_1x^2 + E_2y^2 + E_3xy + E_4x + E_5y + E_6 = 0. \quad (5.2)$$

En ce qui concerne le calcul des quadratiques d'équilibre à deux câbles, on devrait négliger les combinaisons de deux câbles dont le point d'attache sur l'effecteur est commun. En général, l'équilibre impliquant ces deux câbles sera impossible. De la même façon, on doit négliger les combinaisons de trois câbles dont le point d'attache sur l'effecteur est commun lors du calcul des quadratiques de singularité. De plus, les lieux d'équilibre pour lesquels $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j = \lambda(\mathbf{Q}\mathbf{v}_i - \mathbf{Q}\mathbf{v}_j)$, c'est-à-dire la droite passant par les points d'attache sur la base des deux câbles impliqués dans l'équilibre est parallèle à celle passant par les points d'attache correspondants sur l'effecteur, devraient être représentés par une simple droite. En effet, la quadratique calculée pour ce doublet de câbles dégénère en deux droites dont l'une passe par leurs points d'attache respectifs sur la base; cette dernière doit être éliminée (voir le cas particulier de la section B.2). En pratique, ces lieux d'équilibre correspondent soit au cas où $y_s = 0$ de la section E.1.3, soit au cas particulier du point 2 de la section D.2. On doit identifier laquelle des deux droites passe par les deux points d'attache sur la base puis on l'élimine.

N.B. Pour certaines conditions dynamiques ou pour certaines architectures où la position du centre de masse par rapport aux deux points d'attache sur l'effecteur est particulière, l'équilibre à deux câbles sera impossible à réaliser (voir l'annexe B).

2. Forme explicite

Transformation de chacune des quadratiques sous la forme explicite correspondante (annexe D).

Voici les quatre formes explicites de quadratique.

$$\eta = 5, \quad y = ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + e}$$

$$\eta = 4, \quad y = ax + b + \frac{c}{x + d}$$

$$\eta = 3, \quad y = ax^2 + bx + c$$

$$\eta = 1, \quad x = a$$

Le paramètre η représente le nombre de coefficients de l'équation.

3. Classification des quadratiques

Identification du type de chaque quadratique et division de certaines d'entre elles en deux quadratiques plus simples (annexe E).

Voici les sept types de quadratiques.

- TYPE 1 : Ellipse
- TYPE 2 : Parabole oblique ou horizontale
- TYPE 3 : Parabole verticale ou droite non verticale
- TYPE 4 : Hyperbole dont les deux branches sont une au-dessus de l'autre
- TYPE 5 : Hyperbole avec discontinuité en x
- TYPE 6 : Hyperbole avec asymptote verticale
- TYPE 7 : droite verticale

4. Élimination des doublons

Fusion de quadratiques de même forme explicite et de même type, c'est-à-dire dont la norme du vecteur des différences des coefficients correspondants, les paramètres a à e de Ψ , est plus petite qu'une certaine limite ε (dans l'algorithme utilisé, $\varepsilon = 10^{-7}$) et dont les paramètres η et t de l'une sont respectivement identiques à ceux de l'autre.

Deux quadratiques Ψ_μ et Ψ_ν seront donc fusionnées si

$$\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\lambda} < \varepsilon^2 \quad , \quad \eta_\mu = \eta_\nu \quad , \quad t_\mu = t_\nu \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[a_\mu - a_\nu \quad b_\mu - b_\nu \quad c_\mu - c_\nu \quad d_\mu - d_\nu \quad e_\mu - e_\nu \right]^T .$$

N.B. On doit conserver, dans le paramètre ψ de l'équation (5.1), toutes les combinaisons de câbles correspondant à chacune des quadratiques fusionnées lors de cette étape. Cette information doit aussi être conservée au cours de la division des quadratiques en sections (section 5.2.2).

5.2.2 Division des quadratiques en sections

Le but de cette étape est de générer une série de sections de quadratique Ω . Chacune de ces sections sera définie par un ensemble de douze paramètres comme le suivant:

$$\Omega = \{\eta, a, b, c, d, e, \psi, \delta, \zeta_{min}, \xi_{min}, \zeta_{max}, \xi_{max}\} \quad (5.4)$$

où les sept premiers paramètres sont les mêmes que pour Ψ et

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta = 5 \text{ et } \Omega \text{ provient de la branche du haut (+),} \\ -1 & \text{si } \eta = 5 \text{ et } \Omega \text{ provient de la branche du bas (-),} \\ 0 & \text{autrement } (\eta \neq 5), \end{cases} \quad (5.5)$$

autrement dit, si $\eta = 5$, la section sera portée par l'équation

$$y = ax + b + \delta \sqrt{cx^2 + dx + e}. \quad (5.6)$$

ξ_{min} et ξ_{max} sont respectivement les coordonnées principales des bornes minimale et maximale de la section. La coordonnée principale correspond à la variable indépendante de la forme explicite de la quadratique: une abscisse si $\eta \neq 1$ et une ordonnée si $\eta = 1$. Finalement, ζ_{min} et ζ_{max} sont les types de bornes rencontrées et prennent les valeurs suivantes:

$$\zeta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_i \text{ est finie,} \\ 1 & \text{si } \xi_i \text{ est une asymptote verticale } (\eta = 4), \\ 2 & \text{si la section n'est pas bornée à cette extrémité.} \end{cases}$$

ζ sera utile à la détermination du point médian et lors de la représentation graphique de la section.

1. Intersection des quadratiques deux à deux (annexe F).

Chacune des intersections correspondant à une quadratique est représentée par un ensemble de deux paramètres comme le suivant:

$$\Lambda = \{\xi, \delta\} \quad (5.7)$$

où ξ est la coordonnée principale de l'intersection et où δ est le même qu'à l'équation (5.5) et prend la valeur 1, -1 ou 0 selon que $\eta = 5$ et que l'intersection appartient à la branche du haut de la quadratique ou à celle du bas.

2. Points limites

Pour les quadratiques de forme $\eta = 4$ ou $\eta = 5$, on ajoute aux points d'intersection obtenus précédemment (étape 1), des points limites correspondant à l'asymptote verticale si $\eta = 4$ et aux racines réelles de la courbe limitative si $\eta = 5$, soit r_1 et r_2 de la section E.1. L'ensemble de ces points, points d'intersection et points limites, sont les points de discontinuité d'une quadratique.

3. Séparation des points de discontinuité des branches du haut et du bas (si $\eta = 5$)

Les points limites doivent à la fois faire partie des points de discontinuité des branches du haut et du bas.

4. Élimination des doublons

Fusion de deux points de discontinuité confondus d'une quadratique ou d'une branche de quadratique (dans l'algorithme utilisé, deux points de discontinuité distants de moins de 10^{-6} sont considérés comme confondus). On doit bien faire attention à conserver les points limites et à ne pas comparer deux points de discontinuité appartenant à deux branches différentes.

5. Ordonnement des points de discontinuité

Les points de discontinuité de chaque quadratique, ou de chaque branche, sont classés en ordre croissant de leur coordonnée principale.

6. Création des sections

Pour chaque type de quadratique, on créera un nombre de sections directement relié au nombre de points d'intersections i de celle-ci.

- TYPE 1 : Ellipse
On crée $i + 2$ sections, toutes finies.
- TYPE 2 : Parabole oblique ou horizontale
On crée $i + 2$ sections; les deux sections extrêmes ne sont bornées qu'à une extrémité.
- TYPE 3 : Parabole verticale ou droite non verticale
On crée $i + 1$ section(s). Si $i = 0$, la section est infinie; si $i > 0$, les deux sections extrêmes ne sont bornées qu'à une extrémité.
- TYPE 4 : Hyperbole sans discontinuité en x
On crée $i + 2$ sections. Si $i = 0$, les deux sections sont infinies; si $i = 1$, une section est infinie et les deux autres ne sont bornées qu'à une extrémité; et finalement, si $i > 1$, trois ou quatre des sections ont, au plus, une borne finie, selon que les intersections sont sur une seule branche de la quadratique ou sur les deux.
- TYPE 5 : Hyperbole avec discontinuité en x
On crée $i + 4$ sections; les quatre sections extrêmes ne sont bornées qu'à une extrémité.
- TYPE 6 : Hyperbole avec asymptote verticale
On crée $i + 2$ sections; deux des sections possèdent une borne asymptotique et les deux sections extrêmes, les mêmes si $i = 0$, ne sont bornées qu'à une extrémité.
- TYPE 7 : droite verticale
On crée $i + 1$ section(s). Si $i = 0$, la section est infinie et, si $i > 0$, les deux sections extrêmes ne sont bornées qu'à une extrémité.

5.2.3 Validation des sections

Avant d'élaborer sur la validation des sections, il est important de mettre en lumière une particularité liée au point médian d'une section, puisque c'est en ce point que celle-ci sera testée. Les sections ayant été créées en intersectant chaque quadratique avec chacune des autres, le point médian d'une section ne présentera jamais à la fois des caractéristiques d'équilibre à deux câbles et de singularité. Cette particularité a les conséquences géométriques suivantes pour les vecteurs directeurs.

- Équilibre à deux câbles

Le vecteur \mathbf{h} est dans le plan défini par deux des vecteurs directeurs.

Aucun autre vecteur directeur ne peut se retrouver dans ce même plan, sans quoi cela correspondrait aussi à une singularité.

- Singularité

Trois vecteurs directeurs sont coplanaires.

\mathbf{h} ne peut être aussi coplanaire avec ces trois vecteurs, sans quoi cela correspondrait aussi à un équilibre à deux câbles.

Exception: \mathbf{h} sera nécessairement coplanaire à ces trois vecteurs directeurs si ceux-ci sont colinéaires. Ce cas implique que deux des câbles sont confondus; une disposition appropriée des points d'attache des câbles permettra d'éviter une telle situation. Si toutefois ce cas survient, il est démontré à la section 5.2.3.2 qu'une telle section n'appartiendra jamais à l'espace atteignable et qu'on devra la rejeter.

Les assertions précédentes sont d'une importance cruciale pour la validation des sections.

Point important, si la section provient d'une quadratique fusionnée à l'étape 4 de la section 5.2.1, les conditions énumérées aux deux sous-sections suivantes devront être vérifiées pour chaque combinaison de câbles correspondant à cette quadratique. Une section sera acceptée si au moins une de ses combinaisons vérifie ces conditions.

Autre point important, les égalités de ces conditions doivent être vérifiées avec une certaine marge d'erreur ε . Par exemple, $\chi = a$ doit être interprété comme $|\chi - a| < \varepsilon$ et $\chi \geq a$ comme $\chi \geq a - \varepsilon$. Dans l'algorithme utilisé, la marge d'erreur est de 10^{-9} .

5.2.3.1 Validation des sections d'équilibre à deux câbles

La validité d'une section d'équilibre à deux câbles est vérifiée, en son point médian, par les deux conditions nécessaires et suffisantes suivantes.

Premièrement, pour appartenir à la frontière de l'espace atteignable, la section doit appartenir à la partie de la quadratique où les deux câbles travaillent en tension. Géométriquement, ceci signifie que le vecteur \mathbf{h} doit se trouver dans le secteur angulaire défini par les deux vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν auxquels correspond la section, comme à la figure 4.3. Mathématiquement, cette condition peut être représentée par la relation suivante:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_{\mu\nu}^T \boldsymbol{\lambda}_{\mu h} > 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mu\nu}^T \boldsymbol{\lambda}_{h\nu} > 0 & \quad (5.8) \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mu\nu} &= \mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mu h} &= \mathbf{w}_\mu \times \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\lambda}_{h\nu} &= \mathbf{h} \times \mathbf{w}_\nu \end{aligned}$$

Deuxièmement, pour que la section soit valide, celle-ci doit correspondre à une des faces de la pyramide et non à un doublet de vecteurs directeurs définissant un secteur angulaire à l'intérieur de la pyramide. Par exemple, pour la configuration correspondant à la figure 4.2, la section provenant de l'équilibre impliquant les câbles 2 et 3 sera acceptée tandis que celle correspondant plutôt aux câbles 1 et 2 sera rejetée. Géométriquement, ceci signifie que tous les autres vecteurs directeurs doivent se trouver du même côté du plan formé par les deux vecteurs directeurs correspondant aux deux câbles impliqués dans l'équilibre. Cette condition peut être écrite mathématiquement de la façon suivante:

$$\left| \sum_{i=1}^k \text{signe} \left((\mathbf{w}_\mu \times \mathbf{w}_\nu)^T \mathbf{w}_i \right) \right| = k - 2 \quad (i \neq \mu, i \neq \nu) \quad (5.9)$$

où k est le nombre de câbles du mécanisme.

Comme il a été vu à la section 4.3, une configuration polyvalente ne fait jamais partie de la frontière de l'espace atteignable. Aussi, la deuxième condition remplit bien son rôle à ce sujet car elle rejette toute section dont le point médian correspond à une configuration polyvalente. En effet, pour une telle configuration, il n'existe aucun plan tel que tous les vecteurs directeurs se trouvent du même côté de celui-ci.

5.2.3.2 Validation des sections de singularité

La validité d'une section de singularité est un peu plus complexe à visualiser mais les conditions géométriques et mathématiques qui la décrivent restent simples.

Ce type de frontière est rencontré lorsque trois des vecteurs directeurs sont coplanaires; ceux-ci correspondent aux trois câbles en singularité du mécanisme.

Soit μ , ν et ς les numéros des ces trois vecteurs directeurs coplanaires, et soit $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\varsigma}$ et $\gamma_{\nu\varsigma}$ les cosinus respectifs des angles entre chacune des combinaisons de deux de ces trois vecteurs directeurs coplanaires;

$$\gamma_{ij} = \cos \theta_{ij} = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j}{|\mathbf{w}_i| |\mathbf{w}_j|} \quad (5.10)$$

où θ_{ij} est l'angle entre \mathbf{w}_i et \mathbf{w}_j .

Voici les deux conditions géométriques que doit respecter une section pour appartenir à la frontière de l'espace atteignable. Pour le point médian de cette section:

1. \mathbf{h} doit être seul de son côté du plan défini par ces trois vecteurs directeurs, tous les autres vecteurs directeurs se trouvant de l'autre côté ou dans ce plan.

Il sera établi plus loin que pour que la section puisse appartenir à la frontière de l'espace atteignable, les trois vecteurs doivent être distincts (équation (5.15)), garantissant ainsi l'existence de ce plan.

Mathématiquement, cette condition s'écrit:

$$\text{signe}(\mathbf{w}_i^T \mathbf{n}_1) \leq 0, \quad i = 1 \dots k, \quad i \neq \mu, \nu \text{ et } \varsigma \quad (5.11)$$

où \mathbf{n}_1 est la normale au plan de \mathbf{w}_μ , \mathbf{w}_ν et \mathbf{w}_ς , pointant du même côté de ce plan que \mathbf{h} , soit

$$\mathbf{n}_1 = s \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j \quad s = \text{signe}(\mathbf{h}^T \boldsymbol{\lambda})$$

où i et j correspondent aux indices du γ dont la valeur absolue est la plus petite, garantissant que \mathbf{w}_i et \mathbf{w}_j ne sont pas colinéaires.

N.B. \mathbf{n}_1 est le même que celui de la figure 5.1 présentée plus loin.

2. Ces trois vecteurs directeurs doivent tendre à se refermer autour de \mathbf{h} pour un déplacement infinitésimal de l'effecteur d'un des deux côtés de la section.

Pour cela, les trois vecteurs doivent définir un secteur angulaire d'au moins 180° . En effet, dans le cas où ces trois vecteurs seraient répartis sur moins de 180° , aucun déplacement infinitésimal de ceux-ci ne créera une pyramide contenant \mathbf{h} sauf si celui-ci était coplanaire au départ; tel qu'établi au début de la section 5.2.3, ce cas ne surviendra jamais au point médian car il constitue un croisement avec un équilibre à deux câbles. Une condition mathématique efficace qui vérifie que les vecteurs sont répartis sur au moins 180° est

$$\gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\varsigma} + \gamma_{\nu\varsigma} \leq -1. \quad (5.12)$$

Cette seconde condition mérite d'être clarifiée; celle-ci se subdivise en deux cas.

L'angle du secteur est plus grand que 180°

$$\gamma_{\mu\nu} \neq -1, \quad \gamma_{\mu\varsigma} \neq -1, \quad \gamma_{\nu\varsigma} \neq -1. \quad (5.13)$$

Les trois vecteurs sont distincts.

Ce cas valide toujours la section car pour un déplacement de l'effecteur hors de la singularité, les trois vecteurs n'étant plus coplanaires, ceux-ci devront nécessairement former une pyramide d'un des deux côtés du plan qu'ils définissaient dans la configuration singulière, selon le côté de la section vers lequel se déplace l'effecteur; tout vecteur de ce côté du plan sera à l'intérieur de cette pyramide.

L'équation (5.23) démontrera que le comportement des vecteurs directeurs pour une direction donnée de déplacement de l'effecteur sera l'inverse de leur comportement pour la direction opposée.

L'angle du secteur est exactement 180°

$$\gamma_{\mu\nu} = -1 \quad \text{ou} \quad \gamma_{\mu\varsigma} = -1 \quad \text{ou} \quad \gamma_{\nu\varsigma} = -1 \quad (5.14)$$

Deux des vecteurs sont colinéaires et opposés.

Le cas où les trois vecteurs seraient colinéaires sera rejeté a priori car la seule façon de quitter cette configuration vers l'intérieur de l'espace atteignable serait par un équilibre à deux câbles; ce genre de croisement n'est pas possible au point médian d'une section. Ainsi, seules les sections pour lesquelles les trois vecteurs coplanaires sont distincts doivent être considérées. Si les trois vecteurs sont distincts, aucun des γ ne vaudra 1, soit

$$\gamma_{\mu\nu} \neq 1, \quad \gamma_{\mu\varsigma} \neq 1, \quad \gamma_{\nu\varsigma} \neq 1. \quad (5.15)$$

Pour vérifier si les trois vecteurs coplanaires tendent à se refermer autour de \mathbf{h} pour une des deux directions de déplacement, il faut utiliser les dérivées de ceux-ci par rapport au déplacement de l'effecteur.

La dérivée partielle de \mathbf{w}_i par rapport à une variable quelconque θ est

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial(\mathbf{w}_i \rho_i)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho_i} \right) \mathbf{w}_i \rho_i \quad (5.16)$$

et, après simplification, les dérivées partielles de \mathbf{w}_i par rapport à x et y sont respectivement

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial x} = \frac{1}{\rho_i} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ C_i \end{bmatrix} + \frac{(A_i - x) \mathbf{w}_i}{\rho_i^2}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial y} = \frac{1}{\rho_i} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ D_i \end{bmatrix} + \frac{(B_i - y) \mathbf{w}_i}{\rho_i^2}, \quad (5.18)$$

où \mathbf{w}_i , ρ_i et les coefficients A_i à D_i sont définis à l'équation (4.2).

Pour un déplacement unitaire de l'effecteur dans une direction perpendiculaire à la section et une pente m au point médian, les déplacements en x et y seront respectivement

$$\Delta x = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad (5.19)$$

$$\Delta y = \mp \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad (5.20)$$

où le choix de signe signifie que l'effecteur peut quitter la section d'un côté ou de l'autre.

Pour une section verticale, ces déplacements seront plutôt

$$\Delta x = \pm 1, \quad (5.21)$$

$$\Delta y = 0. \quad (5.22)$$

La dérivée de \mathbf{w}_i par rapport au temps pour un déplacement de l'effecteur perpendiculairement à la section sera donc

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \lambda \left(\Delta x \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial y} \right) \quad (5.23)$$

où λ est un facteur qui dépend de la vitesse du déplacement.

La vitesse du déplacement étant arbitraire, seule la direction importe; on peut simplifier cette expression en posant $\lambda = \sqrt{m^2 + 1}$ pour une section non verticale et $\lambda = 1$ pour une section verticale. On obtient donc, selon le cas:

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \pm \left(m \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial y} \right) \quad (5.24)$$

ou

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \pm \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial x}. \quad (5.25)$$

La figure 5.1 aidera à visualiser la procédure subséquente. Dans cette figure, les trois vecteurs \mathbf{w}_i sont les vecteurs directeurs coplanaires (\mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν étant colinéaires), les $\dot{\mathbf{w}}_i$ sont les dérivées respectives de ces trois vecteurs par rapport au temps pour un déplacement de l'effecteur perpendiculairement à la section, \mathbf{n}_1 est la normale au plan de ces trois vecteurs (du même côté de ce plan que \mathbf{h}), \mathbf{n}_2 est la normale au plan défini par \mathbf{w}_μ , \mathbf{w}_ν et \mathbf{n}_1 (du même côté de ce plan que \mathbf{w}_ζ) et \mathbf{n}_3 est la normale au plan défini par \mathbf{n}_1 et \mathbf{h} (si \mathbf{n}_1 et \mathbf{h} sont confondus, on posera $\mathbf{n}_3 = \mathbf{w}_\mu$, tel que décrit plus loin). Comme toujours, \mathbf{h} est le vecteur des forces et moment que doivent appliquer les câbles sur l'effecteur; il ne sera pas nécessairement du même côté du plan de normale \mathbf{n}_2 que sur cette illustration.

On utilise les dérivées des trois vecteurs directeurs pour savoir dans quelles directions respectives et avec quelle amplitude relative se déplaceront ceux-ci dans l'espace virtuel des efforts pour le déplacement de l'effecteur.

Pour caractériser le comportement des vecteurs \mathbf{w}_i , trois autres paramètres doivent aussi être définis: les angles β_1 , β_2 et β_3 . On appellera β_1 , l'angle entre \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν dans

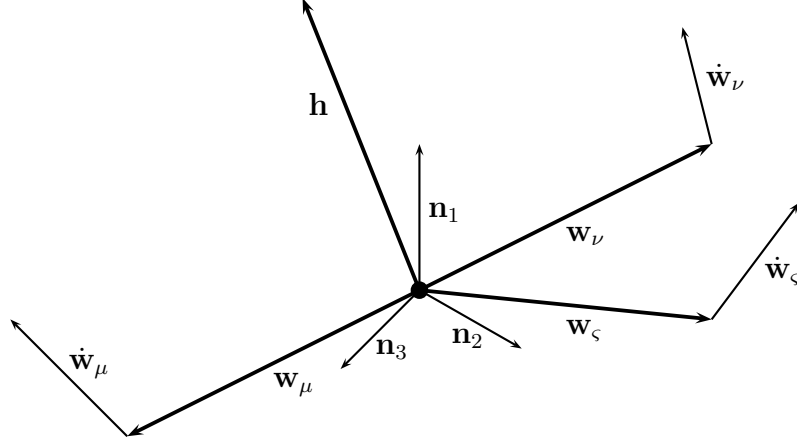


Figure 5.1: Cas où deux des vecteurs directeurs sont colinéaires.

le plan comprenant \mathbf{n}_1 , du côté de \mathbf{n}_1 , β_2 , l'angle entre ces deux mêmes vecteurs dans le plan comprenant \mathbf{n}_2 , du côté de \mathbf{n}_2 , et β_3 , l'angle entre \mathbf{w}_ζ et \mathbf{n}_1 . Pour la configuration de la figure 5.1, β_1 et β_2 valent 180° et β_3 vaut 90° .

Avant de poursuivre, voici la notation qui sera utilisée pour les projections des vecteurs. On utilisera $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pour désigner la projection de \mathbf{u} sur \mathbf{v} et $\varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pour désigner la projection de \mathbf{u} perpendiculairement à \mathbf{v} , c'est-à-dire dans un plan normal à \mathbf{v} . La relation entre $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $\varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est la suivante:

$$\varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}. \quad (5.26)$$

On utilisera aussi des projections inverses identifiées par $\varphi^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $\varphi_n^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. On entend par projection inverse, une projection dont le vecteur résultant constitue l'hypoténuse du triangle rectangle au lieu du côté adjacent à l'angle entre \mathbf{u} et \mathbf{v} ; le vecteur obtenu est dans la même direction que le vecteur résultant d'une projection régulière mais sa norme est plus grande que le vecteur à projeter. L'expression mathématique de la projection inverse d'un vecteur \mathbf{u} quelconque est

$$\varphi^{-1}(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \varphi(\mathbf{u})} \quad (5.27)$$

où $\varphi^{-1}(\mathbf{u})$ représente $\varphi^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ou $\varphi_n^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, selon le cas, et $\varphi(\mathbf{u})$ représente la projection régulière correspondante de \mathbf{u} ($\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ou $\varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ respectivement).

Pour que la relation entre les dérivées soit représentative, on utilisera les dérivées normalisées des vecteurs \mathbf{w}_μ , \mathbf{w}_ν et \mathbf{w}_ζ . On divisera donc chaque dérivée par la norme

du vecteur \mathbf{w} correspondant et on obtiendra finalement la dérivée normalisée suivante:

$$\dot{\mathbf{w}}_i^* = \frac{\dot{\mathbf{w}}_i}{|\mathbf{w}_i|}. \quad (5.28)$$

La dérivée normalisée d'un vecteur est un indice vectoriel de la vitesse de rotation de ce vecteur au moment où l'effecteur quitte la section. La vitesse de rotation instantanée $\dot{\theta}_i$ d'un vecteur \mathbf{w}_i est tout simplement la norme de la composante de $\dot{\mathbf{w}}_i^*$ normale à \mathbf{w}_i ; la composante de $\dot{\mathbf{w}}_i^*$ parallèle à \mathbf{w}_i n'a pas d'impact sur la vitesse de rotation. On a donc:

$$\dot{\theta}_i = \left| \wp_n(\dot{\mathbf{w}}_i^*, \mathbf{w}_i) \right|. \quad (5.29)$$

Cette vitesse de rotation est selon un axe perpendiculaire à $\dot{\mathbf{w}}_i^*$ et \mathbf{w}_i .

On peut aussi calculer la vitesse de rotation de ce vecteur autour de la normale \mathbf{n}_1 ou \mathbf{n}_2 en prenant la composante de $\wp_n(\dot{\mathbf{w}}_i^*, \mathbf{w}_i)$ perpendiculaire à cette normale. Par exemple, la vitesse de rotation autour de \mathbf{n}_1 sera:

$$\dot{\theta}_i(\mathbf{n}_1) = \left| \wp(\dot{\mathbf{w}}_i^*, \mathbf{n}_2) \right|. \quad (5.30)$$

On peut donc utiliser les dérivées normalisées pour analyser le mouvement des trois vecteurs.

On distingue deux types de comportement des vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν .

- \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν restent coplanaires avec \mathbf{n}_2 ($\dot{\beta}_1 = 0$)

Cela signifie que les projections sur \mathbf{n}_1 des dérivées normalisées respectives de \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν sont égales et opposées:

$$\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu^*, \mathbf{n}_1) = -\wp(\dot{\mathbf{w}}_\nu^*, \mathbf{n}_1). \quad (5.31)$$

Dans ce cas, les trois vecteurs directeurs ne pouvant rester coplanaires, \mathbf{w}_ζ quitte forcément le plan ($\wp(\dot{\mathbf{w}}_\zeta, \mathbf{n}_1) \neq 0$). Pour un déplacement de l'effecteur, si β_2 augmente, la section sera acceptée si β_3 diminue: les trois vecteurs se referment autour de \mathbf{h} . Si β_2 diminue et β_3 augmente, la section est aussi acceptée car cela correspond au déplacement opposé. Mathématiquement, la condition est la suivante:

$$s \mathbf{w}_\zeta^{*T} \mathbf{n}_1 < 0 \quad (5.32)$$

$$s = \text{signe} \left(\left(\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu^*, \mathbf{n}_2) + \wp(\dot{\mathbf{w}}_\nu^*, \mathbf{n}_2) \right)^T \mathbf{n}_2 \right)$$

où s permet de tenir compte des deux directions possibles de déplacement; s vaut 1 si β_2 diminue et -1 s'il augmente.

- \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν ne restent pas coplanaires avec \mathbf{n}_2 ($\dot{\beta}_1 \neq 0$)

$$\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu^*, \mathbf{n}_1) \neq -\wp(\dot{\mathbf{w}}_\nu^*, \mathbf{n}_1) \quad (5.33)$$

Dans ce cas, $\dot{\beta}_3$ n'intervient plus dans la validation de la section. La validation dépend alors du vecteur direction \mathbf{d} du déplacement de l'intersection entre le segment φ , reliant les pointes des vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν , et le plan défini par \mathbf{n}_1 et \mathbf{h} au moment où l'effecteur commence à se déplacer: pour une diminution de β_1 , c'est-à-dire $\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu^*, \mathbf{n}_1) + \wp(\dot{\mathbf{w}}_\nu^*, \mathbf{n}_1) > 0$, \mathbf{h} doit être compris entre \mathbf{d} et la projection de \mathbf{n}_2 dans le plan normal à \mathbf{n}_3 (figure 5.2). Si β_1 augmente, on choisit le déplacement opposé.

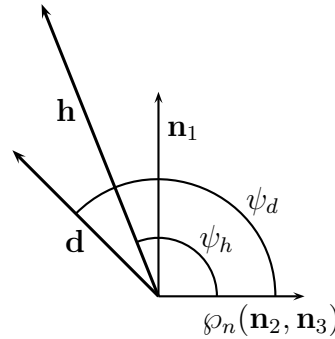


Figure 5.2: Plan normal à \mathbf{n}_3 .

Pour que la section soit valide, il faut donc que l'angle ψ_h entre \mathbf{h} et cette projection de \mathbf{n}_2 soit plus petit que l'angle ψ_d entre \mathbf{d} et cette même projection. Puisque ces angles seront toujours entre 0 et 180 degrés pour le déplacement approprié de l'effecteur, on peut tout aussi bien comparer les cosinus de ces angles:

$$\cos(\psi_h) < \cos(\psi_d) \quad (5.34)$$

$$\frac{\mathbf{h}^T \wp_n(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}{|\mathbf{h}| |\wp_n(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)|} < s \frac{\mathbf{d}^T \wp_n(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}{|\mathbf{d}| |\wp_n(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)|} \quad (5.35)$$

où s permet de choisir le déplacement approprié; s vaut 1 si β_1 diminue et -1 s'il augmente.

Après simplification, on obtient finalement:

$$\mathbf{h}_u^T \wp_n(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) < s \mathbf{d}_u^T \wp_n(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \quad (5.36)$$

$$s = \text{signe} \left(\left(\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu^*, \mathbf{n}_1) + \wp(\dot{\mathbf{w}}_\nu^*, \mathbf{n}_1) \right)^T \mathbf{n}_1 \right)$$

où \mathbf{h}_u et \mathbf{d}_u sont les vecteurs unitaires correspondant à \mathbf{h} et \mathbf{d} .

Il existe une situation qui fait un peu exception mais qui peut facilement être analysée: le cas où le vecteur \mathbf{h} est perpendiculaire à \mathbf{n}_2 . Dans ce cas, la normale \mathbf{n}_3 serait parallèle à \mathbf{n}_2 et le processus décrit précédemment ne fonctionnerait pas. La vérification de la validité d'une telle section est pourtant très simple: il suffit que β_2 augmente quand β_1 diminue, et vice versa, pour qu'elle soit valide, c'est-à-dire que le produit des s respectifs des équations (5.32) et (5.36) soit égal à -1 . On peut aussi utiliser l'équation (5.36) en procédant comme si \mathbf{h} était parallèle à \mathbf{n}_1 , c'est-à-dire en posant $\mathbf{n}_3 = \mathbf{w}_\mu$ et en remplaçant \mathbf{h} par \mathbf{n}_1 dans cette équation.

Le vecteur direction \mathbf{d} est calculé de la manière suivante. L'effet du mouvement des vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν sur le déplacement de l'intersection entre le segment φ et le plan normal à \mathbf{n}_3 peut être décomposé en quatre composantes indépendantes associées à chacune des quatre projections des vecteurs $\dot{\mathbf{w}}_\mu$ et $\dot{\mathbf{w}}_\nu$ sur \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 . Ce vecteur direction \mathbf{d} sera donc la somme vectorielle de ces quatre composantes:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\mu 1} + \mathbf{d}_{\mu 2} + \mathbf{d}_{\nu 1} + \mathbf{d}_{\nu 2} \quad (5.37)$$

où \mathbf{d}_{ij} représente l'effet sur \mathbf{d} de la composante de $\dot{\mathbf{w}}_i$ parallèle à \mathbf{n}_j .

La figure 5.3 permet de visualiser l'effet des deux composantes de $\dot{\mathbf{w}}_\mu$ (\mathbf{n}_1 a été déplacé pour ne pas interférer avec $\mathbf{d}_{\mu 1}$). On doit remarquer que les dérivées non normalisées sont utilisées ici. L'effet de $\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu, \mathbf{n}_1)$, représenté par $\mathbf{d}_{\mu 1}$, est tout simplement une réduction de celui-ci par un certain facteur λ qui tient compte des longueurs respectives des vecteurs \mathbf{w}_μ et \mathbf{w}_ν .

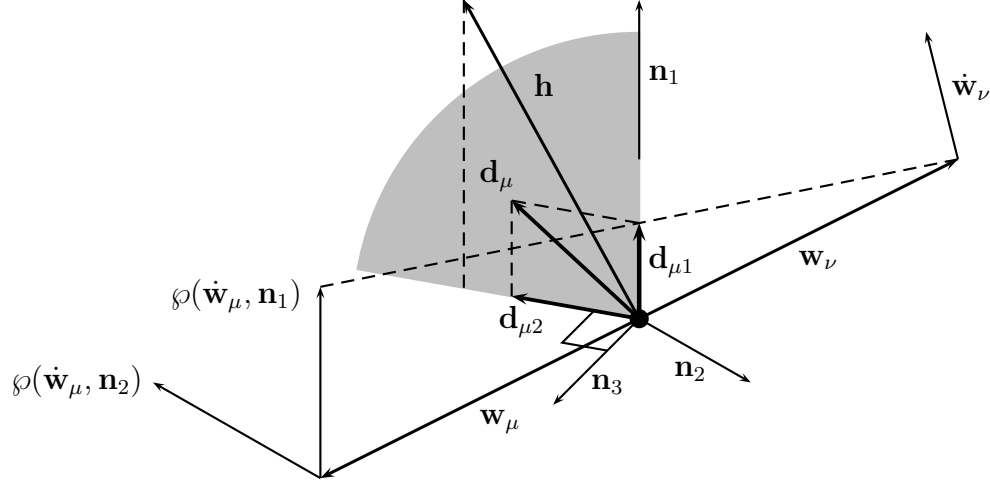


Figure 5.3: Deux des quatre composantes du vecteur direction \mathbf{d} .

L'effet de $\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu, \mathbf{n}_2)$ est plus évident dans la figure 5.4: $\mathbf{d}_{\mu 2}$ est aussi une réduction de $\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu, \mathbf{n}_2)$ par le même facteur λ mais celle-ci doit subir une projection inverse sur le plan normal à \mathbf{n}_3 . On a donc:

$$\mathbf{d}_{\mu 1} = \lambda \wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu, \mathbf{n}_1), \quad (5.38)$$

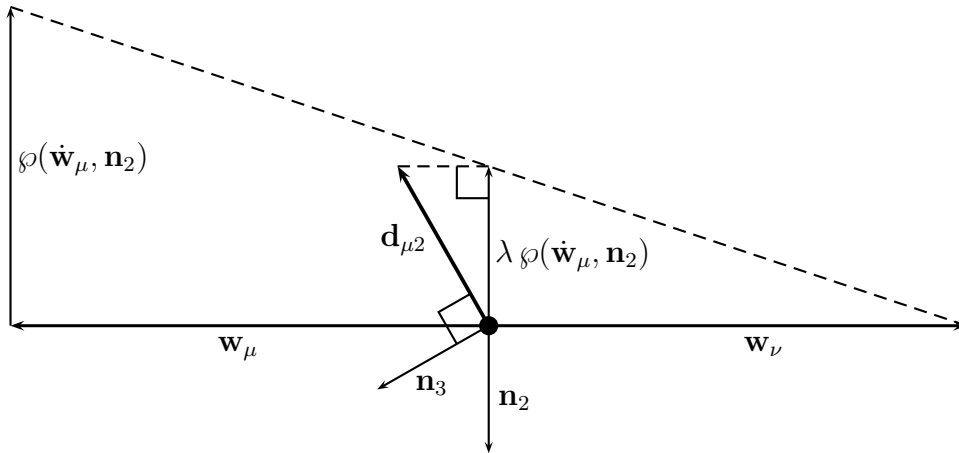
$$\mathbf{d}_{\mu 2} = \wp_n^{-1}(\lambda \wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu, \mathbf{n}_2), \mathbf{n}_3) = \lambda \wp_n^{-1}(\wp(\dot{\mathbf{w}}_\mu, \mathbf{n}_2), \mathbf{n}_3), \quad (5.39)$$

avec

$$\lambda = \frac{|\mathbf{w}_\nu|}{|\mathbf{w}_\mu| + |\mathbf{w}_\nu|}.$$

Le principe est le même pour les composantes $\mathbf{d}_{\nu 1}$ et $\mathbf{d}_{\nu 2}$, associées à $\dot{\mathbf{w}}_\nu$, sauf que le numérateur de λ est la norme de \mathbf{w}_μ au lieu de celle de \mathbf{w}_ν . En substituant les expressions des \mathbf{d}_{ij} dans l'équation (5.37), en remplaçant ensuite \mathbf{w}_μ par $\mathbf{w}_\mu^* |\mathbf{w}_\mu|$ et \mathbf{w}_ν par $\mathbf{w}_\nu^* |\mathbf{w}_\nu|$, puis en éliminant les facteurs communs (la norme de \mathbf{d} n'ayant aucune importance), on obtient finalement une expression du vecteur direction \mathbf{d} qui dépend des dérivées normalisées:

$$\mathbf{d} = \wp(\mathbf{w}_\mu^*, \mathbf{n}_1) + \wp_n^{-1}(\wp(\mathbf{w}_\mu^*, \mathbf{n}_2), \mathbf{n}_3) + \wp(\mathbf{w}_\nu^*, \mathbf{n}_1) + \wp_n^{-1}(\wp(\mathbf{w}_\nu^*, \mathbf{n}_2), \mathbf{n}_3). \quad (5.40)$$

Figure 5.4: Plan normal à \mathbf{n}_1 .

Résumé Vu la complexité de la démarche de validation des sections de singularité, un résumé s'impose. Pour que la section soit acceptée, les trois vecteurs coplanaires doivent être distincts (équation (5.15)) et définir un secteur angulaire d'au moins 180° (équation (5.12)). De plus, \mathbf{h} doit être seul de son côté du plan de ces trois vecteurs (équation (5.11)). Ensuite, si l'angle de ce secteur est exactement 180° (équation (5.13)), la section est automatiquement acceptée; sinon (équation (5.14)), les conditions suivantes interviennent pour vérifier que les trois vecteurs se déploient bien autour de \mathbf{h} . Si les deux vecteurs colinéaires se déplacent dans un plan contenant \mathbf{n}_2 (équation (5.31)), l'angle β_3 doit diminuer quand l'angle β_2 augmente et vice versa (équation (5.32)); sinon (équation (5.33)), le segment reliant les pointes de ces deux vecteurs doit se déplacer entre \mathbf{h} et la projection inverse de \mathbf{n}_2 dans le plan normal à \mathbf{n}_3 quand l'angle β_1 diminue et vice versa (équation (5.36)). Voici la démarche sous la forme d'un algorithme.

1. (5.15) et (5.12);
2. (5.11);
3.
 - soit (5.13) \rightarrow section acceptée;
 - soit (5.14);
 - soit (5.31), si (5.32) \rightarrow section acceptée;
 - soit (5.33), si (5.36) \rightarrow section acceptée.

5.3 Détermination de l'espace atteignable d'un mécanisme plan à six câbles

Voici maintenant un exemple complet de détermination de l'espace atteignable du mécanisme montré à la figure 3.1 dont l'effecteur est une barre de 2 m de long, de masse de 10 kg et de moment d'inertie de 10 kg m² par rapport à son centre de masse.

Les lignes continues et discontinues réfèrent respectivement aux lieux d'équilibre à deux câbles et aux lieux de singularité.

La figure 5.5 montre l'ensemble des quadratiques générées par la première étape de la procédure (section 5.2.1). Les figures 5.6 et 5.7 montrent respectivement les quadratiques associées au sous-système constitué des câbles 1, 3 et 5 et l'espace atteignable correspondant. Les figures 5.8 à 5.13 illustrent l'espace atteignable du mécanisme complet pour diverses orientations et divers jeux d'accéléérations.

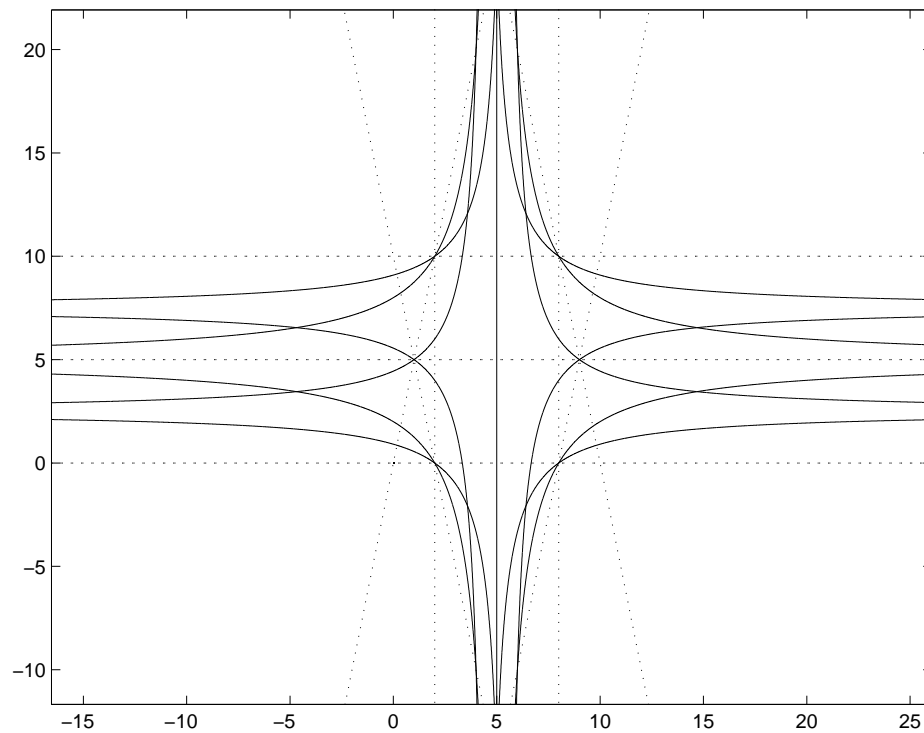


Figure 5.5: Frontières potentielles de l'espace atteignable.

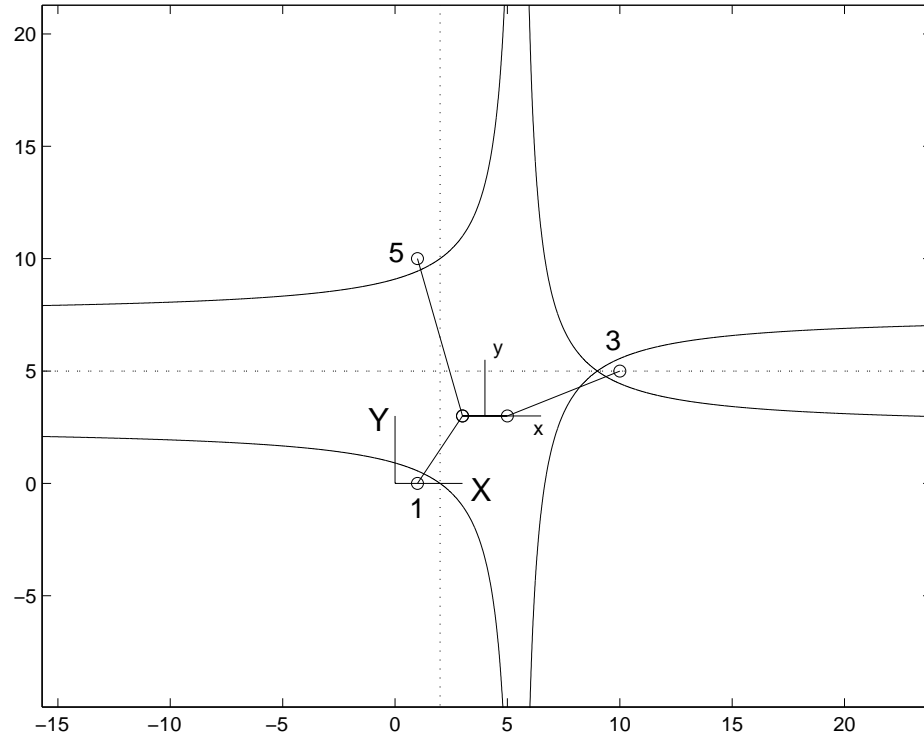


Figure 5.6: Frontières potentielles pour les câbles 1, 3 et 5.

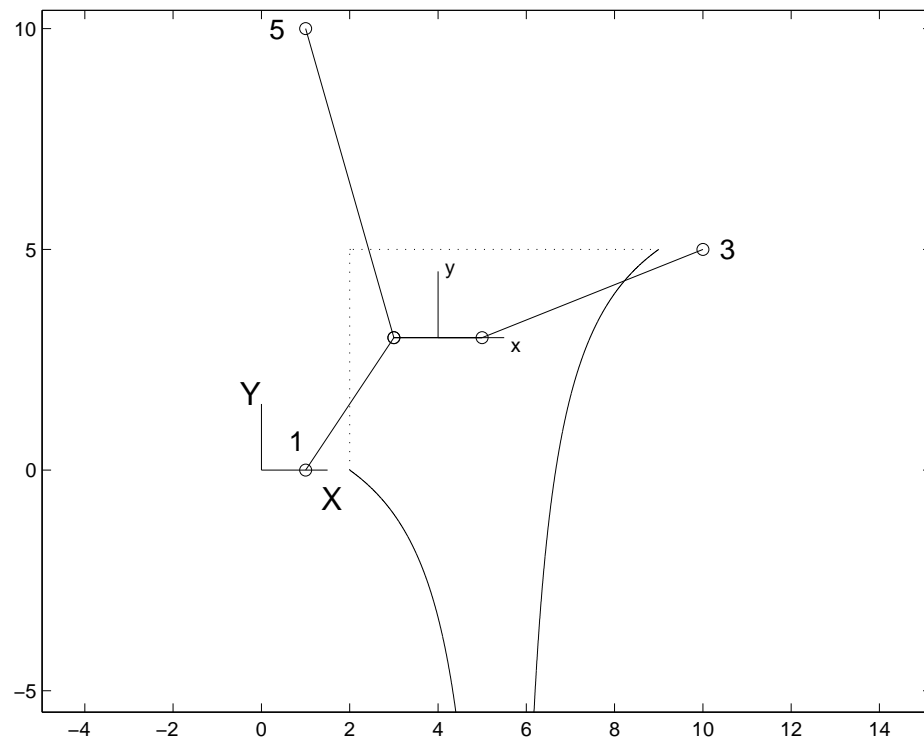


Figure 5.7: Sous-espace des câbles 1, 3 et 5.

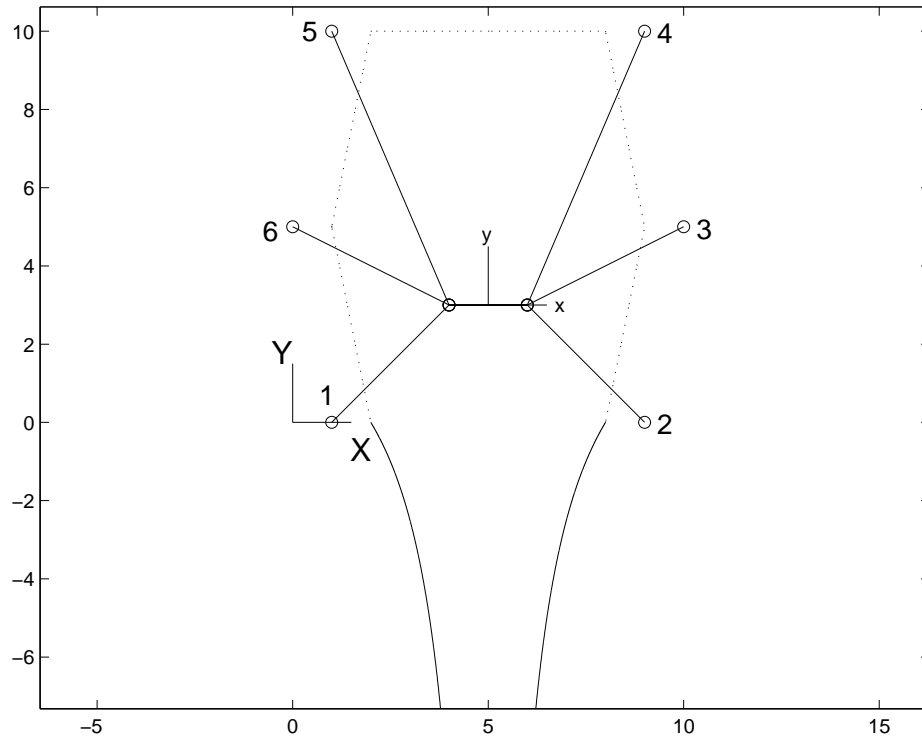


Figure 5.8: Espace atteignable [$\phi = 0^\circ$, équilibre statique].

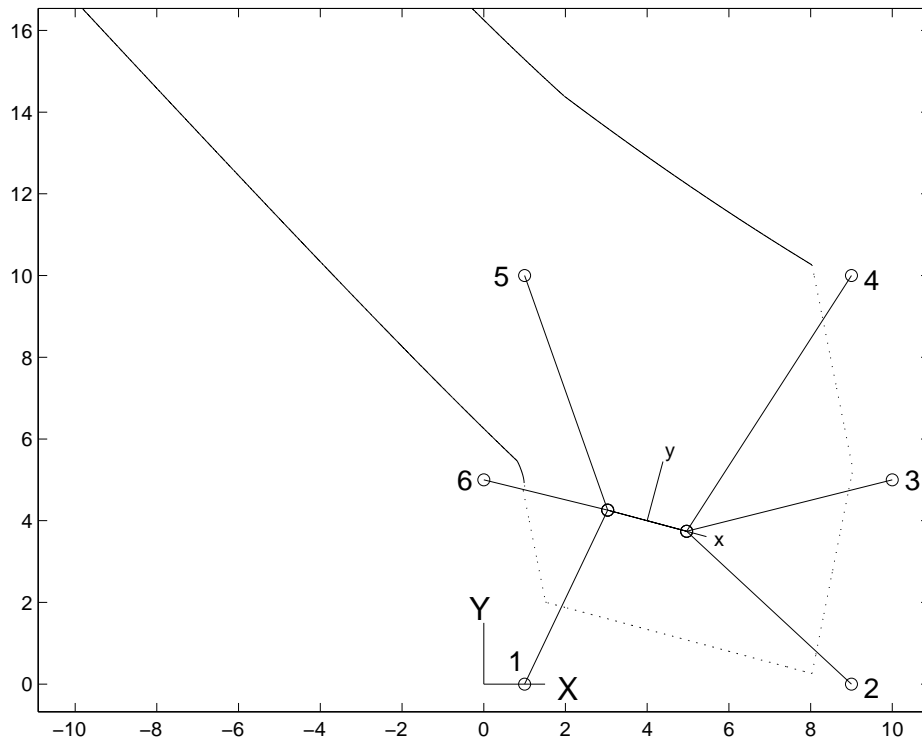


Figure 5.9: Espace atteignable [$\phi = -15^\circ$, $\ddot{x} = 2m/s^2$, $\ddot{y} = -12m/s^2$].

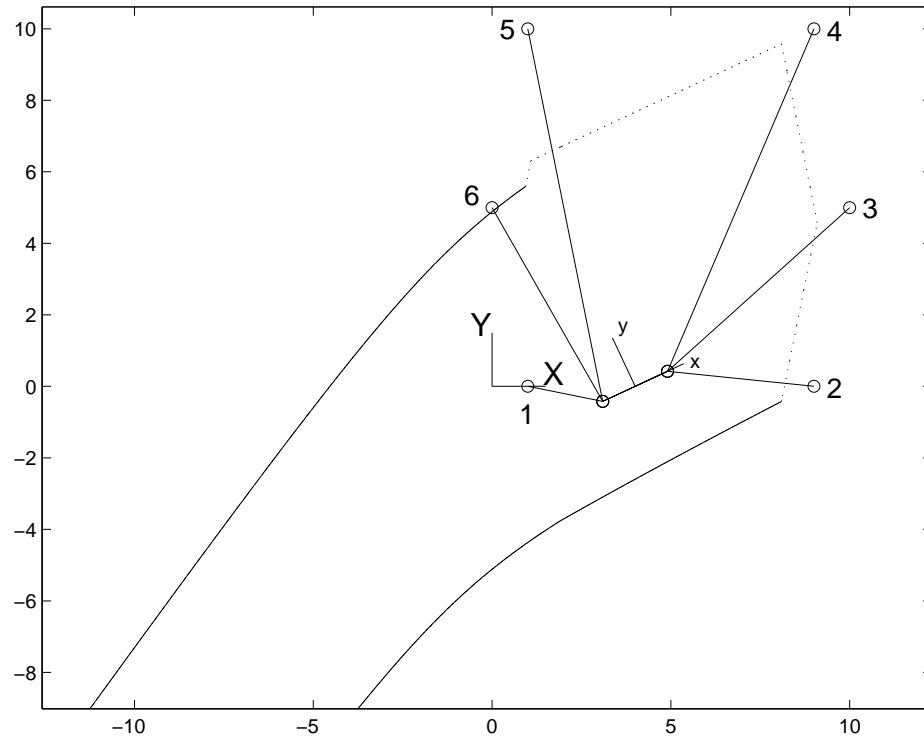


Figure 5.10: Espace atteignable [$\phi = 25^\circ$, $\ddot{x} = 7m/s^2$, $\ddot{\phi} = -5rad/s^2$].

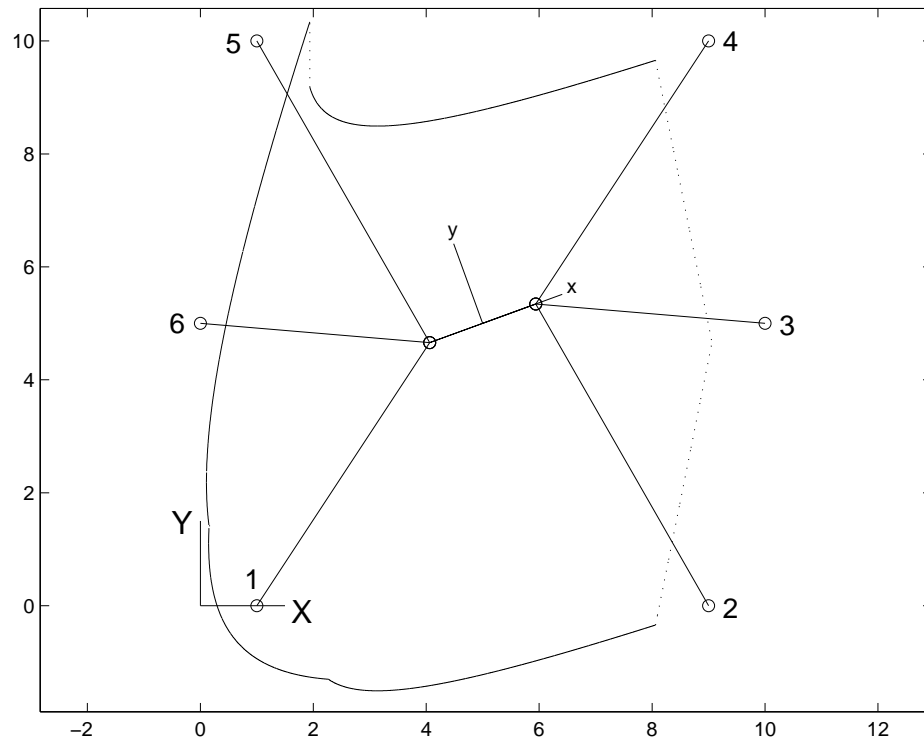


Figure 5.11: Espace atteignable [$\phi = 20^\circ$, $\ddot{x} = 4m/s^2$, $\ddot{\phi} = -10rad/s^2$].

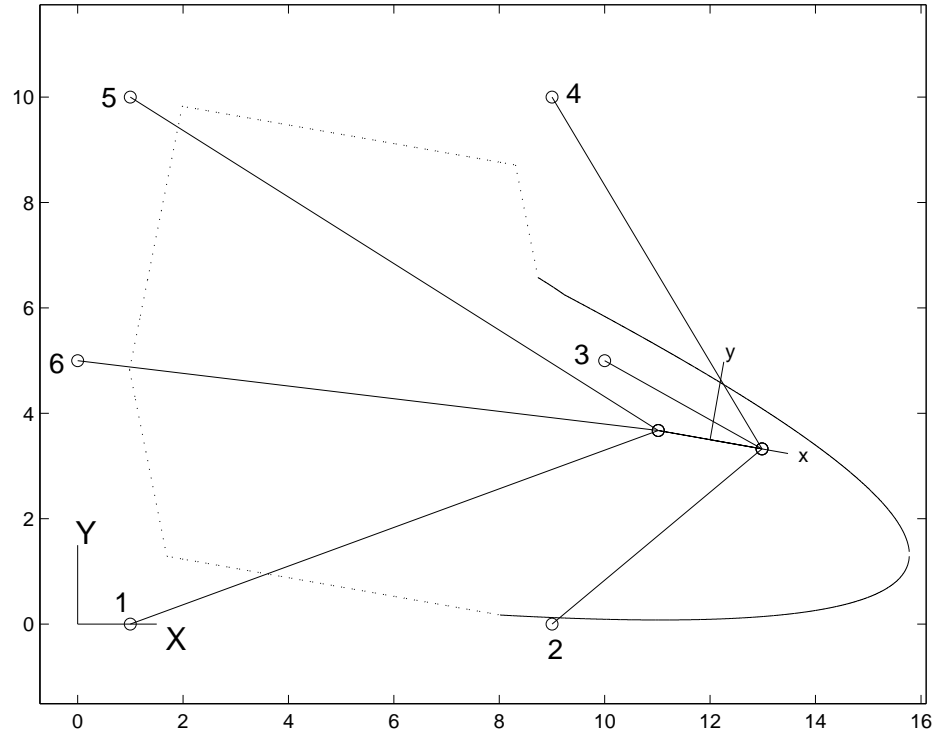


Figure 5.12: Espace atteignable [$\phi = -10^\circ$, $\ddot{x} = -25\text{m/s}^2$, $\ddot{\phi} = -10\text{rad/s}^2$].

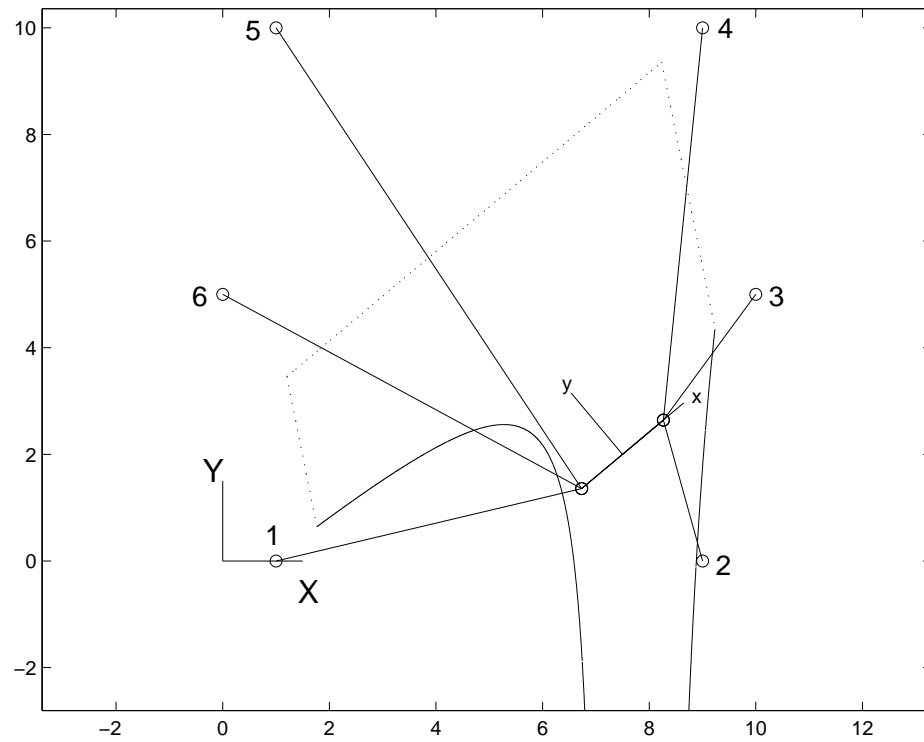


Figure 5.13: Espace atteignable [$\phi = 40^\circ$, $\ddot{\phi} = 5\text{rad/s}^2$].

Conclusion

Le but des travaux de maîtrise présentés dans ce mémoire était l'étude systématique des manipulateurs parallèles actionnés par câbles, plans et spatiaux. Les notions de base et la notation utilisée ont été l'objet du chapitre 1. L'étude cinématique de ces mécanismes a été élaborée au chapitre 2. Les équations de force ont été dérivées au chapitre 3 et il y a été vu que l'utilisation de la programmation quadratique était un moyen de calculer les forces dans les câbles pour les manipulateurs redondants car elle permet de minimiser la norme du vecteur des forces tout en respectant les équations d'équilibre et des contraintes d'inégalité, à savoir que les forces dans les câbles doivent être positives. La programmation quadratique rend donc possible la résolution du système de l'équation (3.17). Le calcul des forces pour deux trajectoires circulaires a servi de démonstration.

Puisque la programmation quadratique ne permet pas de déterminer pour quelles configurations les câbles travaillent en tension pour des conditions dynamiques données, une analyse détaillée de l'espace atteignable a été effectuée et celle-ci est présentée au chapitre 4. L'espace atteignable d'un manipulateur parallèle actionné par câbles dépend des conditions dynamiques, c'est-à-dire les accélérations de l'effecteur, et le concept d'espace atteignable dynamique a ainsi été introduit. L'espace atteignable d'un tel mécanisme est donc l'ensemble des configurations pour lesquelles les accélérations désirées sont induites à l'effecteur en autant que les câbles impliqués dans cet équilibre dynamique travaillent en tension. Il a été démontré à la section 4.2 que pour qu'une

configuration d'un manipulateur appartienne à son espace atteignable, le vecteur \mathbf{h} doit pouvoir être obtenu par une somme vectorielle des vecteurs directeurs en utilisant seulement des coefficients positifs ou nuls. Ceci revient à dire que le vecteur \mathbf{h} doit se trouver à l'intérieur d'au moins une des pyramides formées par chacune des combinaisons de d vecteurs directeurs dans l'espace virtuel des efforts sur l'effecteur. Il a aussi été démontré que pour qu'une configuration d'un manipulateur soit polyvalente, c'est-à-dire qu'elle permette d'imposer tout jeu d'efforts à l'effecteur, le manipulateur doit être redondant et les câbles doivent être disposés de façon efficace; une telle configuration appartiendra toujours à l'espace atteignable du manipulateur, peu importe les conditions dynamiques. La pyramide de la figure 4.2 a permis de conclure que l'espace atteignable est l'union des sous-espaces correspondant aux sous-manipulateurs à d câbles.

La section 4.3 décrit les frontières de l'espace atteignable. On y montre que ces frontières sont de deux types: les lieux d'équilibre à d câbles et les lieux de singularité. Les équations de ces lieux sont obtenues; pour le manipulateur plan sans ressort ($k = n$), les lieux d'équilibre à deux câbles décrivent une hyperbole, une parabole ou droite. Il fut aussi montré que les configurations polyvalentes n'appartiennent jamais à la frontière de l'espace atteignable.

Un algorithme de détermination analytique des frontières de l'espace atteignable à orientation constante d'un manipulateur parallèle plan actionné par câbles est présenté au chapitre 5. La méthode simple que cet algorithme utilise comporte trois étapes principales. On crée d'abord chacune des quadratiques d'équilibre à deux câbles ainsi que chacune des quadratiques de singularité correspondant à chacun des sous-systèmes à trois câbles. On calcule ensuite toutes les intersections entre ces courbes et on les divise en sections. On teste finalement chacune des sections afin de déterminer lesquelles constituent les frontières de l'espace atteignable.

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont donc permis une meilleure compréhension des manipulateurs parallèles actionnés par câbles, surtout en ce qui concerne la description de l'espace atteignable et la détermination analytique de celui-ci dans le cas des manipulateurs plans. Les principaux résultats ont été publiés dans [17] pour des mécanismes plans.

Bien que les objectifs de recherche visés par cette maîtrise aient été atteints, différentes avenues seraient à envisager pour la poursuite de ces travaux. Il serait intéressant de déterminer l'espace atteignable pour une plage donnée des conditions dynamiques afin de, par exemple, concevoir un simulateur de mouvement permettant une gamme d'accélération désirées dans son espace de travail. L'obtention des courbes d'équilibre à deux câbles d'un manipulateur plan comprenant des ressorts dont les longueurs libres sont non nulles serait un avancement important. Finalement, la détermination analytique de l'espace atteignable d'un mécanisme spatial serait sans doute l'objectif ultime.

Bibliographie

- [1] Merlet, J.-P., *Les robots parallèles*, Hermès, 2^e éd., 1997.
- [2] Landsberger, S. E. et Sheridan, T. B., “A Minimal, Minimal Linkage: The Tension-Compression Parallel Link Manipulator”, *Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, p. 81–88, 1993.
- [3] Higuchi, T., Ming, A., et Jiang-yu, J., “Application of Multi-Dimensional Wire Cranes in Construction”, *Comptes-rendus du 5th Symposium on Robotics in Construction*, p. 661–668, Tokyo, Japon, 6-8 juin, 1988.
- [4] Albus, J., Bostelman, R., et Dagalakis, N., “The NIST Robocrane”, *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, n^o 5, p. 709–724, 1993.
- [5] Kawamura, S., Choe, W., Tanaka, S., et Pandian, S., “Development of an Ultrahigh Speed Robot FALCON using Wire Drive System”, *Comptes-rendus de la 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 215–220, Nagoya, Japon, 25-27 mai, 1995.
- [6] Cone, L. L., “Skycam: An Aerial Robotic Camera System”, *Byte*, p. 122–132, octobre, 1985.
- [7] Jeong, J. W., Kim, S. H., et Kwak, Y. K., “Kinematics and workspace analysis of a parallel wire mechanism for measuring a robot pose”, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, p. 825–841, 1999.
- [8] Morizono, T., Kurahashi, K., et Kawamura, S., “Realization of a Virtual Sports Training System with Parallel Wire Mechanism”, *Comptes-rendus de la 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 3025–3030, Albuquerque, Nouveau-Mexique, États-Unis, avril, 1997.

- [9] Ming, A. et Higuchi, T., “Study on Multiple Degree-of-Freedom Positioning Mechanism Using Wires (Part 2) - Development of a Planar Completely Restrained Positioning Mechanism”, *International Journal of Japan Society for Precision Engineering*, vol. 28, n° 3, p. 235–242, septembre, 1994.
- [10] Takeda, Y. et Funabashi, H., “Kinematic Synthesis of Spatial In-Parallel Wire-Driven Mechanism with Six Degrees of Freedom with High Force Transmissibility”, *Comptes-rendus de la 26th ASME Biennial Mechanisms Conference*, Baltimore, États-Unis, septembre, 2000.
- [11] Nahon, M., *Optimization of Force Distribution in Redundantly-Actuated Robotic Systems*, Ph.D. Thesis, Université McGill, Montréal, Canada, février, 1991.
- [12] Goldfarb, D. et Idnani, A., “A Numerically Stable Dual Method for Solving Strictly Convex Quadratic Programs”, *Mathematical Programming*, vol. 27, n° 1, p. 1–33, 1983.
- [13] Gosselin, C. M., “Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators”, *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 112, p. 331–336, septembre, 1990.
- [14] Gosselin, C., Lavoie, E., et Toutant, P., “An Efficient Algorithm for the Graphical Representation of the Three-Dimensional Workspace of Parallel Manipulators”, *Comptes-rendus de la 22nd ASME Mechanisms Conference*, vol. 1, p. 323–328, Phoenix, États-Unis, septembre, 1992.
- [15] Sefrioui, J. et Gosselin, C. M., “On the Quadratic Nature of the Singularity Curves of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators”, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, n° 4, p. 533–551, 1995.
- [16] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C. M., “Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform”, *International Journal of Robotics Research*, vol. 19, n° 3, p. 271–288, mars, 2000.
- [17] Barrette, G. et Gosselin, C. M., “Kinematic Analysis and Design of Planar Parallel Mechanisms Actuated with Cables”, *Comptes-rendus de la 26th ASME Biennial Mechanisms Conference*, Baltimore, États-Unis, septembre, 2000.

Annexe A

Lieux d'équilibre à deux câbles à orientation constante d'un mécanisme plan

Cette annexe donne les coefficients de la forme générale de l'équation des lieux d'équilibre à deux câbles à orientation constante d'un mécanisme plan. La première section traite des mécanismes sans ressort et la seconde des mécanismes comportant des ressorts dont les longueurs libres sont nulles.

Chacune des sections détaille d'abord chacun des coefficients de l'équation d'équilibre et démontre ensuite la démarche de résolution aboutissant à ces coefficients.

A.1 Mécanisme plan sans ressort

A.1.1 Équation des lieux d'équilibre sous sa forme générale

$$T_1 x^2 + T_2 y^2 + T_3 xy + T_4 x + T_5 y + T_6 = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$T_1 = F_y [(y_1 - y_2) \cos \phi + (x_1 - x_2) \sin \phi] \quad (\text{A.2})$$

$$T_2 = F_x [(x_1 - x_2) \cos \phi + (y_2 - y_1) \sin \phi] \quad (\text{A.3})$$

$$T_3 = F_x [(y_2 - y_1) \cos \phi + (x_2 - x_1) \sin \phi] \\ + F_y [(x_2 - x_1) \cos \phi + (y_1 - y_2) \sin \phi] \quad (\text{A.4})$$

$$T_4 = F_x [(y_1 b_2 - b_1 y_2) \cos \phi + (b_2 x_1 - b_1 x_2) \sin \phi] \\ + F_y [(a_2 + a_1)(y_2 - y_1) + b_1 x_1 - b_2 x_2] \cos \phi \\ + [b_2 y_2 - b_1 y_1 + (a_1 + a_2)(x_2 - x_1)] \sin \phi + y_1 x_2 - x_1 y_2 \\ + \tau [(y_1 - y_2) \cos \phi + (x_1 - x_2) \sin \phi + b_2 - b_1] \quad (\text{A.5})$$

$$T_5 = F_x [(b_1 + b_2)(x_2 - x_1) - a_2 y_2 + a_1 y_1] \cos \phi \\ + [a_1 x_1 - a_2 x_2 + (b_1 + b_2)(y_1 - y_2)] \sin \phi - y_1 x_2 + x_1 y_2 \\ + F_y [(x_1 a_2 - a_1 x_2) \cos \phi + (a_1 y_2 - y_1 a_2) \sin \phi] \\ + \tau [(x_2 - x_1) \cos \phi + (y_1 - y_2) \sin \phi + a_1 - a_2] \quad (\text{A.6})$$

$$T_6 = C_x F_x + C_y F_y + C_\tau \tau \quad (\text{A.7})$$

où

$$C_x = [(b_2 - b_1)(y_1 x_2 + x_1 y_2) + (a_1 - a_2)(y_1 y_2 - x_1 x_2)] \cos^2 \phi \\ + [(a_1 - a_2)(x_1 y_2 + y_1 x_2) + (b_2 - b_1)(x_1 x_2 - y_1 y_2)] \sin \phi \cos \phi \\ + [b_2(b_1 x_1 - a_1 y_1) + b_1(a_2 y_2 - b_2 x_2)] \cos \phi \\ + [b_1(b_2 y_2 + a_2 x_2) - b_2(b_1 y_1 + a_1 x_1)] \sin \phi \\ + x_2(b_1 y_1 + a_1 x_1) - x_1(b_2 y_2 + a_2 x_2) \\ C_y = [(a_2 - a_1)(y_1 x_2 + x_1 y_2) + (b_1 - b_2)(x_1 x_2 - y_1 y_2)] \cos^2 \phi \\ + [(b_2 - b_1)(x_1 y_2 + y_1 x_2) + (a_1 - a_2)(y_1 y_2 - x_1 x_2)] \cos \phi \sin \phi \\ + [a_2(a_1 y_1 - b_1 x_1) + a_1(b_2 x_2 - a_2 y_2)] \cos \phi \\ + [a_2(b_1 y_1 + a_1 x_1) - a_1(b_2 y_2 + a_2 x_2)] \sin \phi$$

$$\begin{aligned}
& +y_2(a_1x_1 + b_1y_1) - y_1(b_2y_2 + a_2x_2) \\
C_\tau &= (a_1y_2 + x_1b_2 - y_1a_2 - b_1x_2) \cos \phi \\
& + (b_1y_2 - x_1a_2 + a_1x_2 - y_1b_2) \sin \phi \\
& + a_2b_1 - x_1y_2 - a_1b_2 + y_1x_2
\end{aligned}$$

A.1.2 Méthode de résolution

On part des équations (4.8), (4.9) et (4.10), soit

$$\begin{aligned}
\alpha(A_1 - x) + (1 - \alpha)(A_2 - x) &= \lambda F_x, \\
\alpha(B_1 - y) + (1 - \alpha)(B_2 - y) &= \lambda F_y, \\
\alpha(C_1x + D_1y + E_1) + (1 - \alpha)(C_2x + D_2y + E_2) &= \lambda \tau.
\end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 désignent les deux câbles impliqués dans l'équilibre.

On isole d'abord λ dans chacune des trois équations précédentes:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\alpha(A_1 - x) + (1 - \alpha)(A_2 - x)}{F_x}, \\
\lambda &= \frac{\alpha(B_1 - y) + (1 - \alpha)(B_2 - y)}{F_y}, \\
\lambda &= \frac{\alpha(C_1x + D_1y + E_1) + (1 - \alpha)(C_2x + D_2y + E_2)}{\tau}.
\end{aligned}$$

On égale ensuite à tour de rôle la première et la deuxième de ces équations avec la troisième et on solutionne pour α . On trouve

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(A_2 - x)\tau - (C_2x + D_2y + E_2)F_x}{(A_2 - A_1)\tau + (C_1x + D_1y + E_1 - C_2x - D_2y - E_2)F_x}, \\
\alpha &= \frac{(B_2 - y)\tau - (C_2x + D_2y + E_2)F_y}{(B_2 - B_1)\tau + (C_1x + D_1y + E_1 - C_2x - D_2y - E_2)F_y}.
\end{aligned}$$

On égale finalement ces deux équations puis on regroupe les facteurs de x^2, y^2, xy, x, y et les termes constants pour obtenir les coefficients T_1 à T_6 .

A.2 Mécanisme plan avec ressort

A.2.1 Équation des lieux d'équilibre sous sa forme générale

Les lieux d'équilibre à deux câbles avec ressort sont représentés par l'équation de degré 3 suivante:

$$T_1 x^3 + T_2 y^3 + T_3 x^2 y + T_4 x y^2 + T_5 x^2 + T_6 y^2 + T_7 x y + T_8 x + T_9 y + T_{10} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Dans l'expression des coefficients T_1 à T_{10} , l'indice i fait référence au i^e ressort, K_i est la raideur de ce ressort, les coefficients A à E sont définis à l'équation (4.2).

$$T_1 = C_2(C_2 - C_1)Fy + C_2 \sum_{i=1}^{n-k} [(C_1 - C_2)B_{k+i} + (B_2 - B_1)C_{k+i} + B_1C_2 - B_2C_1]K_i \quad (\text{A.9})$$

$$T_2 = D_2(D_1 - D_2)Fx + D_2 \sum_{i=1}^{n-k} [(D_2 - D_1)A_{k+i} + (A_1 - A_2)D_{k+i} + A_2D_1 - A_1D_2]K_i \quad (\text{A.10})$$

$$T_3 = C_2(C_1 - C_2)Fx + [(D_2 - D_1)C_2 + (C_2 - C_1)D_2]Fy + \sum_{i=1}^{n-k} \begin{bmatrix} C_2(C_2 - C_1)A_{k+i} \\ + [(D_1 - D_2)C_2 + (C_1 - C_2)D_2]B_{k+i} \\ + [(A_1 - A_2)C_2 + (B_2 - B_1)D_2]C_{k+i} \\ + C_2(B_2 - B_1)D_{k+i} \\ + (A_2C_1 - A_1C_2 + B_1D_2 - B_2D_1)C_2 \\ + (B_1C_2 - B_2C_1)D_2 \end{bmatrix} K_i \quad (\text{A.11})$$

$$T_4 = [(D_1 - D_2)C_2 + (C_1 - C_2)D_2]Fx + D_2(D_2 - D_1)Fy + \sum_{i=1}^{n-k} \begin{bmatrix} [(D_2 - D_1)C_2 + (C_2 - C_1)D_2]A_{k+i} \\ + D_2(D_1 - D_2)B_{k+i} + D_2(A_1 - A_2)C_{k+i} \\ + [(A_1 - A_2)C_2 + (B_2 - B_1)D_2]D_{k+i} \\ + (A_2D_1 - A_1D_2)C_2 \\ + (A_2C_1 - A_1C_2 + B_1D_2 - B_2D_1)D_2 \end{bmatrix} K_i \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned}
T_5 &= C_2(B_1C_2 - B_2C_1)Fx + C_2(B_1 - B_2)\tau \\
&+ \left[(A_2C_1 - A_1C_2 + E_2 - E_1)C_2 + (C_2 - C_1)E_2 \right] Fy \\
&+ \sum_{i=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} C_2(B_2C_1 - B_1C_2)A_{k+i} \\ + \left[(A_1C_2 - A_2C_1 + E_1 - E_2)C_2 + (C_1 - C_2)E_2 \right] B_{k+i} \\ + \left[(A_2B_1 - A_1B_2)C_2 + (B_2 - B_1)E_2 \right] C_{k+i} \\ + C_2(B_2 - B_1)E_{k+i} \\ + (B_1E_2 - B_2E_1)C_2 + (B_1C_2 - B_2C_1)E_2 \end{array} \right] K_i \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_6 &= \left[(B_1D_2 - B_2D_1 + E_1 - E_2)D_2 + (D_1 - D_2)E_2 \right] Fx \\
&+ D_2(A_2D_1 - D_2A_1)Fy + (A_2D_2 - D_2A_1)\tau \\
&+ \sum_{i=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} \left[(B_2D_1 - B_1D_2 + E_2 - E_1)D_2 + (D_2 - D_1)E_2 \right] A_{k+i} \\ + D_2(A_1D_2 - A_2D_1)B_{k+i} \\ + \left[(A_2B_1 - A_1B_2)D_2 + (A_1 - A_2)E_2 \right] D_{k+i} \\ + D_2(A_1 - A_2)E_{k+i} + (A_2E_1 - A_1E_2)D_2 \\ + (A_2D_1 - A_1D_2)E_2 \end{array} \right] K_i \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 &= \left[(B_1D_2 - B_2D_1 + E_1 - E_2)C_2 + (B_1C_2 - B_2C_1)D_2 + (C_1 - C_2)E_2 \right] Fx \\
&+ \left[(A_2D_1 - A_1D_2)C_2 + (A_2C_1 - A_1C_2 + E_2 - E_1)D_2 + (D_2 - D_1)E_2 \right] Fy \\
&+ \left[(B_1 - B_2)D_2 + (A_2 - A_1)C_2 \right] \tau \\
&+ \sum_{i=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} \left[(B_2D_1 - B_1D_2 + E_2 - E_1)C_2 \right. \\ \quad \left. + (B_2C_1 - B_1C_2)D_2 + (C_2 - C_1)E_2 \right] A_{k+i} \\ + \left[(A_1D_2 - A_2D_1)C_2 + (D_1 - D_2)E_2 \right. \\ \quad \left. + (A_1C_2 - A_2C_1 + E_1 - E_2)D_2 \right] B_{k+i} \\ + \left[(A_2B_1 - A_1B_2)D_2 + (A_1 - A_2)E_2 \right] C_{k+i} \\ + \left[(A_2B_1 - A_1B_2)C_2 + (B_2 - B_1)E_2 \right] D_{k+i} \\ + \left[(A_1 - A_2)C_2 + (B_2 - B_1)D_2 \right] E_{k+i} \\ + (A_2E_1 - A_1E_2)C_2 + (B_1E_2 - B_2E_1)D_2 \\ + (A_2C_1 - A_1C_2 + B_1D_2 - B_2D_1)E_2 \end{array} \right] K_i \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_8 = & \left[(B_1 E_2 - B_2 E_1) C_2 + (B_1 C_2 - B_2 C_1) E_2 \right] Fx \\
& + \left[(A_2 E_1 - A_1 E_2) C_2 + (A_2 C_1 - A_1 C_2 + E_2 - E_1) E_2 \right] Fy \\
& + \left[(A_1 B_2 - A_2 B_1) C_2 + (B_1 - B_2) E_2 \right] \tau \\
& + \sum_{i=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} \left[(B_2 E_1 - B_1 E_2) C_2 + (B_2 C_1 - B_1 C_2) E_2 \right] A_{k+i} \\ + \left[(A_1 E_2 - A_2 E_1) C_2 \right. \\ \quad \left. + (A_1 C_2 - A_2 C_1 + E_1 - E_2) E_2 \right] B_{k+i} \\ + E_2 (A_2 B_1 - B_2 A_1) C_{k+i} \\ + \left[(A_2 B_1 - A_1 B_2) C_2 + (B_2 - B_1) E_2 \right] E_{k+i} \\ \left. + (B_1 E_2 - B_2 E_1) E_2 \right] K_i \end{array} \right] \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_9 = & \left[(B_1 E_2 - B_2 E_1) D_2 + (B_1 D_2 - B_2 D_1 + E_1 - E_2) E_2 \right] Fx \\
& + \left[(A_2 E_1 - A_1 E_2) D_2 + (A_2 D_1 - A_1 D_2) E_2 \right] Fy \\
& + \left[(A_1 B_2 - A_2 B_1) D_2 + (A_2 - A_1) E_2 \right] \tau \\
& + \sum_{i=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} \left[(B_2 E_1 - B_1 E_2) D_2 \right. \\ \quad \left. + (B_2 D_1 - B_1 D_2 + E_2 - E_1) E_2 \right] A_{k+i} \\ + \left[(A_1 E_2 - A_2 E_1) D_2 + (A_1 D_2 - A_2 D_1) E_2 \right] B_{k+i} \\ + E_2 (A_2 B_1 - B_2 A_1) D_{k+i} \\ + \left[(A_2 B_1 - A_1 B_2) D_2 + (A_1 - A_2) E_2 \right] E_{k+i} \\ \left. + (A_2 E_1 - A_1 E_2) E_2 \right] K_i \end{array} \right] \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{10} = & E_2 (B_1 E_2 - B_2 E_1) Fx + E_2 (A_2 E_1 - A_1 E_2) Fy + E_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \tau \\
& + E_2 \sum_{i=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} (B_2 E_1 - B_1 E_2) A_{k+i} + (A_1 E_2 - A_2 E_1) B_{k+i} \\ + (A_2 B_1 - A_1 B_2) E_{k+i} \end{array} \right] K_i \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

A.2.2 Méthode de résolution

On part des équations (4.13), (4.14) et (4.15), soit

$$\alpha(A_1 - x) + \lambda(A_2 - x) = F_x - \sum_{j=1}^{n-k} (A_j^* - x) K_j (\rho_{k+j} - l) / \rho_{k+j} ,$$

$$\begin{aligned}
\alpha(B_1 - y) + \lambda(B_2 - y) &= F_y - \sum_{j=1}^{n-k} (B_j^* - y)K_j(\rho_{k+j} - l)/\rho_{k+j} , \\
\alpha(C_1x + D_1y + E_1) + \lambda(C_2x + D_2y + E_2) \\
&= \tau - \sum_{j=1}^{n-k} (C_j^*x + D_j^*y + E_j^*)K_j(\rho_{k+j} - l)/\rho_{k+j} .
\end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 désignent les deux câbles impliqués dans l'équilibre.

On isole d'abord λ dans chacune des trois équations précédentes:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{F_x - \alpha(A_1 - x) - \sum_{j=1}^{n-k} (A_j^* - x)K_j(\rho_{k+j} - l)/\rho_{k+j}}{A_2 - x} \\
\lambda &= \frac{F_y - \alpha(B_1 - y) - \sum_{j=1}^{n-k} (B_j^* - y)K_j(\rho_{k+j} - l)/\rho_{k+j}}{B_2 - y} \\
\lambda &= \frac{\tau - \alpha(C_1x + D_1y + E_1) - \sum_{j=1}^{n-k} (C_j^*x + D_j^*y + E_j^*)K_j(\rho_{k+j} - l)/\rho_{k+j}}{C_2x + D_2y + E_2}
\end{aligned}$$

On égale ensuite à tour de rôle la première et la deuxième de ces équations avec la troisième et on solutionne pour α . On trouve

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(C_2x + D_2y + E_2)F_x - (A_2 - x)\tau + S_j}{(A_1 - x)(C_2x + D_2y + E_2) - (A_2 - x)(C_1x + D_1y + E_1)}, \\
\text{avec } S_j &= \sum_{j=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} (C_j^*x + D_j^*y + E_j^*)(A_2 - x) \\ -(C_2x + D_2y + E_2)(A_j^* - x) \end{array} \right] K_j \frac{\rho_{k+j} - l}{\rho_{k+j}}, \\
\alpha &= \frac{(C_2x + D_2y + E_2)F_y - (B_2 - y)\tau + S_j}{(B_1 - y)(C_2x + D_2y + E_2) - (B_2 - y)(C_1x + D_1y + E_1)}, \\
\text{avec } S_j &= \sum_{j=1}^{n-k} \left[\begin{array}{l} (C_j^*x + D_j^*y + E_j^*)(B_2 - y) \\ -(C_2x + D_2y + E_2)(B_j^* - y) \end{array} \right] K_j \frac{\rho_{k+j} - l}{\rho_{k+j}}.
\end{aligned}$$

On égale finalement ces deux dernières équations puis on regroupe les facteurs de $x^3, y^3, x^2y, xy^2, x^2, y^2, xy, x, y$ et les termes constants pour obtenir les coefficients T_1 à T_{10} .

Annexe B

Nature quadratique des lieux d'équilibre à deux câbles à orientation constante d'un mécanisme plan

Cette annexe donne une explication géométrique de la nature quadratique (hyperbole, parabole ou droite) des lieux d'équilibre à deux câbles à orientation constante d'un mécanisme plan.

B.1 Considérations générales

Les lieux d'équilibre à deux câbles d'un mécanisme plan représentent l'ensemble des configurations pour lesquelles ce mécanisme est en équilibre en utilisant seulement deux des k câbles dont il dispose.

Un mécanisme plan comportant seulement deux actionneurs ne pourra être en équilibre que pour un ensemble limité de configurations. Pour une orientation donnée, cet équilibre ne sera donc atteint que pour certaines positions bien particulières de son plan de travail.

Deux actionneurs agissent sur l'effecteur comme une force \mathbf{r} appliquée au point d'intersection P_I entre ces deux actionneurs ou leurs prolongements respectifs (figure B.1). La grandeur et la direction de cette force dépendent de la force dans chaque actionneur, celle-ci étant en fait la résultante vectorielle des forces appliquées par chacun des deux actionneurs (figure B.2).

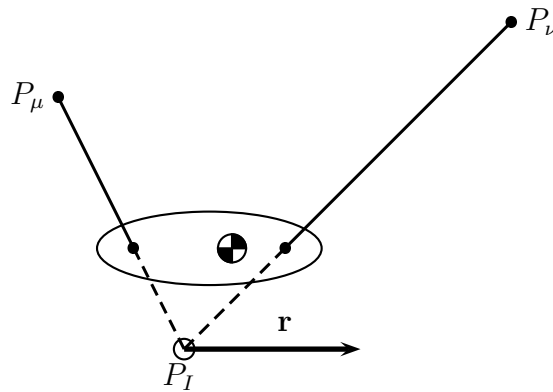


Figure B.1: Manipulateur plan à deux actionneurs ($k = 2$).

Pour des actionneurs conventionnels, cette force \mathbf{r} pourra être dans toute direction; pour des câbles cependant, puisque ceux-ci ne peuvent travailler qu'en tension, la direction de cette force devra être comprise entre eux, c'est-à-dire dans le secteur angulaire décrit par les deux câbles, comme sur la figure B.2.

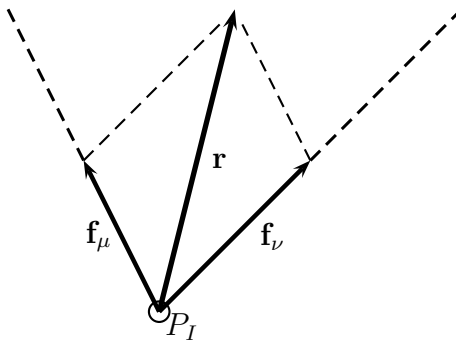


Figure B.2: Force appliquée par deux actionneurs.

On observe, pour la configuration de la figure B.1, que seul un ensemble limité de conditions dynamiques peuvent être réalisées, selon la direction et la grandeur de \mathbf{r} . Pour la force \mathbf{r} illustrée, puisque la seule autre force sur l'effecteur est l'attraction terrestre, celui-ci subit des accélérations de $|\mathbf{r}|/m$ vers la droite et de g vers le bas, où m et g sont respectivement la masse de l'effecteur et l'accélération gravitationnelle, ainsi qu'une accélération angulaire dans le sens anti-horaire de $|\mathbf{r}|\lambda/I$, où I et λ sont respectivement le moment d'inertie de l'effecteur par rapport à son centre de masse et la distance entre \mathbf{r} et ce centre de masse. On constate aussi que pour que l'accélération angulaire de l'effecteur soit nulle, il faut que le centre de masse de celui-ci soit sur la droite porteuse de \mathbf{r} et que, dans ce cas, pour la configuration montrée, l'effecteur doit absolument subir une accélération horizontale puisque \mathbf{r} n'est pas vertical.

Le lecteur doit noter que, à moins d'autres indications, les mots *horizontal* et *vertical* désigneront respectivement des directions perpendiculaire et parallèle au champ gravitationnel.

On peut en conclure qu'il existe une relation bien claire entre les trois composantes d'accélération de l'effecteur pour une configuration donnée, ou alors, il existe un nombre limité de configurations pour lesquelles des conditions dynamiques données peuvent être réalisées.

En réalité, l'ensemble des conditions dynamiques possibles pour une configuration donnée dépend uniquement de la position du point d'intersection P_I par rapport au centre de masse. Cela revient à dire que pour trouver l'ensemble des configurations pour lesquelles un équilibre dynamique quelconque peut être atteint, il faut trouver l'ensemble des configurations pour lesquelles la position de P_I par rapport au centre de masse est appropriée. Pour l'équilibre statique par exemple, il faut donc que le centre de masse de l'effecteur soit sur la même droite verticale que le point d'intersection P_I .

On doit remarquer que, pour des actionneurs conventionnels, l'ensemble des configurations pour lesquelles l'équilibre statique peut être atteint est le même que si l'effecteur subit une accélération linéaire verticale puisque dans ce cas, l'effet d'une telle accélération est de modifier la grandeur apparente de la gravité, c'est-à-dire la force verticale exercée par ceux-ci sur l'effecteur. Si les deux actionneurs sont des câbles, cela ne sera vrai que si $\ddot{y} > -g$, c'est-à-dire si cette accélération permet à ceux-ci de travailler en

tension. À cause de sa simplicité, le cas de l'équilibre statique est traité en premier lieu.

B.2 Équilibre statique

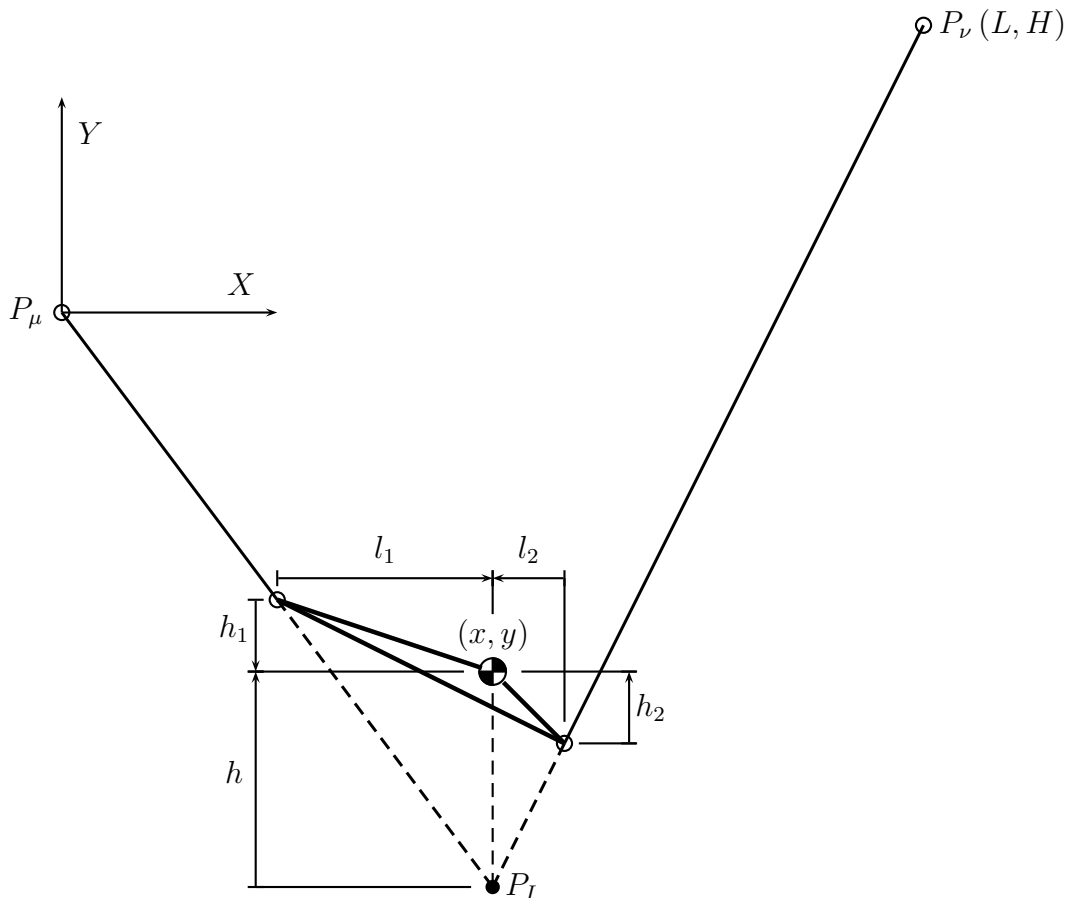


Figure B.3: Équilibre statique d'un manipulateur plan à deux câbles.

La figure B.3 illustre une configuration d'un mécanisme à deux câbles pour laquelle l'équilibre statique est possible. Sur cette figure, l'origine du repère coïncide avec le point P_μ (pour simplifier les résultats), le point P_ν est situé en (L, H) et les dimensions désignées par des flèches ont les signes appropriés dans ce repère. Puisque pour une orientation donnée de l'effecteur l_1, l_2, h_1 et h_2 sont des constantes, pour toutes les configurations respectant la règle de l'équilibre statique, c'est-à-dire dont le centre de masse et le point P_I sont sur la même verticale, les deux égalités géométriques suivantes,

établies à partir de triangles rectangles semblables, seront vérifiées:

$$\frac{l_1}{h - h_1} = \frac{x}{h - y}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{-l_2}{h - h_2} = \frac{L - x}{h - y + H} \quad (\text{B.2})$$

où x et y désignent la position du centre de masse de l'effecteur.

En isolant h dans l'une de ces deux équations, en substituant sa valeur dans la seconde, puis en isolant y , on obtient une quadratique de la forme :

$$T_1 x^2 + T_3 xy + T_4 x + T_5 y + T_6 = 0 \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\begin{aligned} T_1 &= h_2 - h_1, & T_3 &= l_1 - l_2, & T_4 &= l_2 H + (L + l_2) h_1 - (L + l_1) h_2, \\ T_5 &= -l_1 L, & T_6 &= (h_2 L - l_2 H) l_1. \end{aligned}$$

Cette équation représente l'ensemble des positions (x, y) du centre de masse pour lesquelles l'équilibre statique peut être atteint.

Pour faciliter l'identification des différents cas, les mêmes coefficients que ceux de l'équation (D.5) ont été utilisés; on remarque que le terme en y^2 est absent et que la forme explicite (annexe D) de cette équation ne sera jamais à cinq coefficients (point 1 de la section D.2).

Différents cas particuliers surviennent.

- $l_1 \neq l_2$

Ce cas est le plus fréquent; $T_3 \neq 0$ et l'équation (B.3) peut être ramenée à la forme suivante (voir le point 2 de la section D.2):

$$y = ax + b + \frac{c}{x + d} \quad (\text{B.4})$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{h_1 - h_2}{l_1 - l_2}, & b &= \frac{l_1 h_2 - h_1 l_2 - (H - aL) l_2}{l_1 - l_2}, \\ c &= \frac{(l_1 - l_2 - L)(H - aL) l_1 l_2}{(l_1 - l_2)^2}, & d &= \frac{l_1 L}{l_2 - l_1}. \end{aligned}$$

Cette équation est celle d'une hyperbole possédant une asymptote verticale en $x = -d$ et une asymptote oblique (possiblement horizontale) selon $y = ax + b$.

On constate, par l'expression de a , que la pente de cette asymptote oblique sera la même que celle du segment qui joint les deux points d'attache de l'effecteur et, par l'expression de d , que la position de l'asymptote verticale par rapport aux deux points d'attache sur la base, soit P_μ et P_ν , est dans la même proportion que la position horizontale du centre de masse par rapport aux deux points d'attache sur l'effecteur. Autrement dit, si le centre de masse est aux deux tiers de la distance horizontale entre les deux points d'attache sur l'effecteur, l'asymptote verticale sera située aux deux tiers de la distance horizontale entre les points d'attache sur la base.

Si les deux actionneurs sont des câbles, seule la partie de l'hyperbole où les deux actionneurs travaillent en tension sera utile. Si l'on considère les deux points de cette hyperbole pour lesquels un des câbles a une longueur nulle, soit (l_1, h_1) et $(L+l_2, H+h_2)$, ceux-ci divisent l'hyperbole en quatre sections; l'une de ces quatre sections constituera la partie utile, s'il en existe une (voir Exceptions à la page suivante). La détermination de cette partie utile est détaillée à la section 5.2.3.1. Dans le cas de la figure B.3, la partie utile de l'hyperbole est la section située sous la droite $y = h_1$ et à gauche de l'asymptote verticale.

Cas particulier: $H - aL = 0$

La pente du segment joignant les points d'attache sur l'effecteur est la même que celle du segment joignant les points d'attache sur la base. Dans ce cas, le coefficient c de l'équation (B.4) est nul et l'hyperbole dégénère en deux droites selon les deux asymptotes, soit $y = ax + b$ et $x = -d$ (voir le cas particulier du point 2 de la section D.2).

Seule la droite verticale devra être considérée comme lieux d'équilibre car la droite oblique, puisque pour toute configuration de celle-ci les deux actionneurs sont colinéaires, représente un ensemble de configurations singulières pour tous les sous-mécanismes à trois câbles comprenant ces deux câbles.

Si les deux actionneurs sont des câbles, seule la partie de la droite verticale située sous la droite oblique, c'est-à-dire sous $y = -ad + b$, permet l'équilibre.

Exceptions:

Pour certaines configurations où l_1 et l_2 sont de même signe, il existe des situations où aucune section de l'hyperbole, ou de la droite verticale, ne permettra l'équilibre à deux câbles. Ceci survient, plus spécifiquement, lorsque $a = H/L$, lorsque $l_1, l_2 > 0$ et $a > H/L$ ou lorsque $l_1, l_2 < 0$ et $a < H/L$.

- $l_1 = l_2$

Les deux points d'attache sur l'effecteur sont sur la même droite verticale; dans ce cas $T_3 = 0$ et l'équation (B.3) devient

$$T_1x^2 + T_4x + T_5y + T_6 = 0. \quad (\text{B.5})$$

- $l_1 = l_2 = 0$

Dans ce cas $T_5 = T_6 = 0$ et on obtient une équation de la forme:

$$ax^2 + bx = 0 \quad (\text{B.6})$$

avec

$$a = h_2 - h_1, \quad b = (h_1 - h_2)L.$$

Cette équation est vérifiée pour $x = 0$ et pour $x = L$ et représente donc deux droites verticales. Ces deux droites sont en réalité des lieux d'équilibre à un seul câble.

Si $L = 0$, les deux points d'attache sur la base sont aussi sur la même verticale et ces deux droites sont confondues.

- $l_1 = l_2 \neq 0$

- * $L = 0$

Les deux points d'attache sur la base sont sur la même droite verticale; dans ce cas $T_5 = 0$ et on obtient une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{B.7})$$

avec

$$a = h_1 - h_2, \quad b = (h_2 - h_1 - H)l_1, \\ c = Hl_1^2.$$

Cette équation est vérifiée pour

$$x = \frac{(h_1 - h_2 + H)l_1 \pm (h_1 - h_2 - H)l_1}{2(h_1 - h_2)} \quad (\text{B.8})$$

et, après simplification, les deux racines de l'équation sont:

$$x_1 = l_1, \quad x_2 = \frac{l_1 H}{h_1 - h_2}$$

La première de ces deux racines est une solution uniquement mathématique et représente l'ensemble des configurations où les quatre points d'attache sont sur la même droite verticale, c'est-à-dire les deux câbles sont colinéaires. L'ensemble de ces configurations représente des lieux de singularité pour tous les sous-mécanismes à trois câbles comprenant les deux présents câbles et ne sera pas réalisable en pratique sauf dans le cas particulier où $l_1 = l_2 = 0$, c'est-à-dire le centre de masse aussi sur cette droite; cependant, ce cas est déjà couvert par l'item précédent.

La seconde racine est donc la seule à considérer ici mais l'équilibre statique pour l'ensemble de ces configurations n'est possible que pour un mécanisme à actionnement conventionnel; des câbles ne permettent pas cet équilibre.

* $L \neq 0$

Dans ce cas $T_5 \neq 0$ et l'équation (B.3) peut être ramenée à la forme

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{B.9})$$

avec

$$a = \frac{h_2 - h_1}{l_1 L}, \quad b = \frac{h_1 - h_2}{l_1} + \frac{H + h_1 - h_2}{L},$$

$$c = h_2 - \frac{l_1 H}{L}.$$

Cette équation est celle d'une parabole dont l'axe de symétrie est vertical et situé en $x = -b/(2a)$.

Si les deux actionneurs sont des câbles, seule la partie de la parabole où les deux actionneurs travaillent en tension sera utile. Si l'on considère les deux points de cette parabole pour lesquels un des câbles a une longueur nulle, soit (l_1, h_1) et $(L + l_2, H + h_2)$, ceux-ci divisent la parabole en trois

sections: une section finie, entre ces points, et deux infinies, de part et d'autre. Seule la section finie pourra être la partie utile de la parabole, et ce, seulement si $a > 0$, c'est-à-dire lorsque la parabole est infinie vers le haut. Sur les deux sections infinies, les forces dans les actionneurs sont nécessairement de signes opposés. La détermination de cette partie utile est détaillée à la section 5.2.3.1.

B.3 Équilibre dynamique quelconque

La transposition de la démarche précédente au cas général de l'équilibre dynamique quelconque est triviale. Considérons tout d'abord les lieux d'équilibre à deux câbles pour une accélération linéaire de l'effecteur uniquement.

B.3.1 Accélération linéaire de l'effecteur

Dans le cas statique, la seule force à reprendre par les actionneurs était l'attraction gravitationnelle terrestre. Considérons maintenant une accélération linéaire de l'effecteur.

Comme il fut mentionné à la fin de la section B.1, pour des actionneurs conventionnels, si l'accélération subie par l'effecteur est parallèle à la force de gravité, les configurations pour lesquelles l'équilibre sera possible seront les mêmes que pour l'équilibre statique.

Si maintenant l'effecteur doit subir une accélération linéaire quelconque dont la composante perpendiculaire à la gravité est non nulle, la position du point P_I par rapport au centre de masse de l'effecteur devra être telle que le segment joignant ces deux points est parallèle à la force exercée par les câbles sur l'effecteur.

Pour les actionneurs, la force nécessaire pour accélérer l'effecteur avec une intensité donnée et dans une direction donnée revient au même que de reprendre une force équivalente dans la direction opposée. Ceci revient à dire que le cas où une accélération quelconque est imposée à l'effecteur peut être considéré comme un cas statique dont la gravité apparente vue par les câbles est modifiée, en intensité et en orientation; la pente de cette gravité apparente sera $(\ddot{y} + g)/\ddot{x}$ (g est positif). De cette affirmation,

on peut immédiatement conclure que les différents cas établis à la section B.2 seront les mêmes pour le cas dynamique à accélération linéaire en ajustant la direction de la gravité perçue par les câbles.

Cet ajustement implique, toujours en se référant à la figure B.3, que le système d'axe doit être réorienté¹ de façon à ce que l'axe Y pointe dans la direction opposée de cette gravité modifiée, et, encore ici, les dimensions l_1 et l_2 doivent être parallèles à l'axe X tandis que h , h_1 et h_2 sont parallèles à Y . De plus, le mot vertical, utilisé à plusieurs reprises pour désigner une direction parallèle à la gravité, garde sa signification en tenant compte du fait que la direction de la gravité a possiblement changé.

B.3.2 Accélération angulaire de l'effecteur

La transposition des résultats obtenus aux sections B.2 et B.3.1 à des cas d'équilibre dynamique quelconque est très simple.

Si l'ensemble des configurations permettant d'imposer une accélération linéaire donnée à l'effecteur correspond aux configurations pour lesquelles le point P_I et le centre de masse ont la même abscisse, l'axe des Y étant bien entendu parallèle à la gravité apparente perçue par les actionneurs, l'ensemble des configurations permettant d'imposer une accélération angulaire quelconque, en plus de la même accélération linéaire, correspondra aux configurations pour lesquelles la différence λ entre les abscisses respectives du point P_I et du centre de masse sera constante; cette constante sera la distance nécessaire pour générer le moment de force requis à l'effecteur, soit $\lambda = P_{Ix} - x = \tau/|\mathbf{r}|$ où P_{Ix} , x et τ sont respectivement les abscisses du point P_I et du centre de masse et, le moment de force requis (positif dans le sens anti-horaire).

Cela revient tout à fait au même que de chercher les lieux d'équilibre à accélération linéaire, sans accélération angulaire, pour un effecteur dont le centre de masse est déplacé parallèlement à l'axe X d'une distance équivalente. (L'équation obtenue ne serait pas la même bien sûr puisque celle-ci exprime la position du centre de masse

¹L'utilisation d'un repère dont aucun des axes n'est parallèle au champ gravitationnel est sans nul doute très peu pratique; cependant, le but de cette annexe n'est pas la dérivation des équations des lieux d'équilibre à deux câbles mais bien l'explication géométrique de la nature de ceux-ci. L'obtention de ces équations est l'objet de la section 4.3.1.1 et de l'annexe A.

et que celui-ci a été déplacé sur l'effecteur; un simple changement de coordonnées permettrait alors de retrouver l'équation recherchée pour la position réelle du centre de masse, soit $x = x' - \lambda$ où x' est l'abscisse du centre de masse déplacé, associé à la nouvelle équation, et λ représente ce déplacement du centre de masse. Quoi qu'il en soit, ces deux équations exprimeraient les mêmes positions de l'effecteur.)

N.B. Il est bien clair que si cette nouvelle position du centre de masse résulte en la coïncidence avec l'un des cas d'exception de l'item « $l_1 \neq l_2$ » de la section B.2, ou au cas où $a < 0$ de l'item « $L \neq 0$ » de la même section, l'équilibre dynamique ne sera pas possible.

Par exemple, les configurations permettant d'imposer des accélérations de $g/2 \text{ m/s}^2$ horizontalement (axe X positif) et $mg/I \text{ rad/s}^2$ en rotation, dans le sens anti-horaire (g est la grandeur de l'accélération gravitationnelle), sur un effecteur ayant une masse m et un moment d'inertie I par rapport à son centre de masse, sont les mêmes que celles permettant d'imposer la même accélération horizontale, sans accélération angulaire, sur un effecteur semblable dont le centre de masse est déplacé d'un mètre dans la direction de l'accélération.

Les quadratiques représentant les lieux d'équilibre à deux câbles pour des conditions dynamiques quelconques sont donc de même nature que celles obtenues à la section B.2.

Annexe C

Lieux de singularité à orientation constante d'un mécanisme plan

Cette annexe détaille les six coefficients de la forme générale d'une quadratique de singularité d'un mécanisme plan pour une orientation ϕ donnée présentée à l'équation (C.1). Chacun de ces six coefficients T_i est subdivisé en d'autres sous-coefficients S_i associés aux différentes fonctions trigonométriques.

Cette équation a été obtenue en égalant à zéro le déterminant de la matrice \mathbf{B} définie aux équations (2.6) et (2.10).

$$T_1 x^2 + T_2 y^2 + T_3 xy + T_4 x + T_5 y + T_6 = 0 \quad (\text{C.1})$$

- Facteurs de x^2

$$T_1 = S_4 \cos \phi + S_5 \sin \phi \quad (\text{C.2})$$

$$S_4 = (b_3 - b_2)y_1 + (b_1 - b_3)y_2 + (b_2 - b_1)y_3 \quad (\text{C.3})$$

$$S_5 = (b_3 - b_2)x_1 + (b_1 - b_3)x_2 + (b_2 - b_1)x_3 \quad (\text{C.4})$$

- Facteurs de y^2

$$T_2 = S_4 \cos \phi + S_5 \sin \phi \quad (\text{C.5})$$

$$S_4 = (a_3 - a_2)x_1 + (a_1 - a_3)x_2 + (a_2 - a_1)x_3 \quad (\text{C.6})$$

$$S_5 = (a_2 - a_3)y_1 + (a_3 - a_1)y_2 + (a_1 - a_2)y_3 \quad (\text{C.7})$$

- Facteurs de xy

$$T_3 = S_4 \cos \phi + S_5 \sin \phi \quad (\text{C.8})$$

$$S_4 = (b_2 - b_3)x_1 + (a_2 - a_3)y_1 + (b_3 - b_1)x_2 \\ + (a_3 - a_1)y_2 + (b_1 - b_2)x_3 + (a_1 - a_2)y_3 \quad (\text{C.9})$$

$$S_5 = (a_2 - a_3)x_1 + (b_3 - b_2)y_1 + (a_3 - a_1)x_2 \\ + (b_1 - b_3)y_2 + (a_1 - a_2)x_3 + (b_2 - b_1)y_3 \quad (\text{C.10})$$

- Facteurs de x

$$T_4 = S_1 \cos^2 \phi + S_3 \cos \phi \sin \phi + S_4 \cos \phi + S_5 \sin \phi + S_6 \quad (\text{C.11})$$

$$S_1 = \left[(a_1 - a_2)x_2 + (b_1 - b_2)y_2 + (a_3 - a_1)x_3 + (b_3 - b_1)y_3 \right] x_1 \\ + \left[(b_1 - b_2)x_2 + (a_2 - a_1)y_2 + (b_3 - b_1)x_3 + (a_1 - a_3)y_3 \right] y_1 \\ + \left[(a_2 - a_3)x_3 + (b_2 - b_3)y_3 \right] x_2 + \left[(b_2 - b_3)x_3 + (a_3 - a_2)y_3 \right] y_2 \quad (\text{C.12})$$

$$S_3 = \left[(b_1 - b_2)x_2 + (a_2 - a_1)y_2 + (b_3 - b_1)x_3 + (a_1 - a_3)y_3 \right] x_1$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(a_2 - a_1)x_2 + (b_2 - b_1)y_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (b_1 - b_3)y_3 \right] y_1 \\
& + \left[(b_2 - b_3)x_3 + (a_3 - a_2)y_3 \right] x_2 + \left[(a_3 - a_2)x_3 + (b_3 - b_2)y_3 \right] y_2 \quad (C.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 = & (b_1 b_3 - b_1 b_2)x_1 + (a_1 b_2 + a_3 b_2 - a_1 b_3 - a_2 b_3)y_1 \\
& + (b_1 b_2 - b_2 b_3)x_2 + (a_2 b_3 - a_2 b_1 + a_1 b_3 - a_3 b_1)y_2 \\
& + (b_2 b_3 - b_1 b_3)x_3 + (a_3 b_1 + a_2 b_1 - a_3 b_2 - a_1 b_2)y_3 \quad (C.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_5 = & (a_1 b_2 + a_3 b_2 - a_1 b_3 - a_2 b_3)x_1 + (b_1 b_2 - b_1 b_3)y_1 \\
& + (a_2 b_3 - a_2 b_1 + a_1 b_3 - a_3 b_1)x_2 + (b_2 b_3 - b_1 b_2)y_2 \\
& + (a_3 b_1 + a_2 b_1 - a_3 b_2 - a_1 b_2)x_3 + (b_1 b_3 - b_2 b_3)y_3 \quad (C.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_6 = & \left[(a_2 - a_1)x_2 + (b_2 - b_3)y_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (b_2 - b_3)y_3 \right] x_1 \\
& + \left[(b_3 - b_1)x_2 + (b_1 - b_2)x_3 \right] y_1 \\
& + \left[(a_3 - a_2)x_3 + (b_3 - b_1)y_3 \right] x_2 + (b_1 - b_2)x_3 y_2 \quad (C.16)
\end{aligned}$$

• Facteurs de y

$$T_5 = S_1 \cos^2 \phi + S_3 \cos \phi \sin \phi + S_4 \cos \phi + S_5 \sin \phi + S_6 \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned}
S_1 = & \left[(b_2 - b_1)x_2 + (a_1 - a_2)y_2 + (b_1 - b_3)x_3 + (a_3 - a_1)y_3 \right] x_1 \\
& + \left[(a_1 - a_2)x_2 + (b_1 - b_2)y_2 + (a_3 - a_1)x_3 + (b_3 - b_1)y_3 \right] y_1 \\
& + \left[(b_3 - b_2)x_3 + (a_2 - a_3)y_3 \right] x_2 + \left[(a_2 - a_3)x_3 + (b_2 - b_3)y_3 \right] y_2 \quad (C.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 = & \left[(a_1 - a_2)x_2 + (b_1 - b_2)y_2 + (a_3 - a_1)x_3 + (b_3 - b_1)y_3 \right] x_1 \\
& + \left[(b_1 - b_2)x_2 + (a_2 - a_1)y_2 + (b_3 - b_1)x_3 + (a_1 - a_3)y_3 \right] y_1 \\
& + \left[(a_2 - a_3)x_3 + (b_2 - b_3)y_3 \right] x_2 + \left[(b_2 - b_3)x_3 + (a_3 - a_2)y_3 \right] y_2 \quad (C.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 = & (a_2 b_1 - a_3 b_2 - a_3 b_1 + a_2 b_3)x_1 + (a_1 a_3 - a_1 a_2)y_1 \\
& + (a_3 b_2 - a_1 b_2 - a_1 b_3 + a_3 b_1)x_2 + (a_1 a_2 - a_2 a_3)y_2 \\
& + (a_1 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_2 b_3)x_3 + (a_2 a_3 - a_1 a_3)y_3 \quad (C.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_5 = & (a_1 a_3 - a_1 a_2)x_1 + (a_3 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_1 - a_2 b_3)y_1 \\
& + (a_1 a_2 - a_2 a_3)x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1 - a_3 b_2 + a_1 b_2)y_2 \\
& + (a_2 a_3 - a_1 a_3)x_3 + (a_2 b_3 + a_2 b_1 - a_1 b_3 - a_1 b_2)y_3 \quad (C.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_6 = & \left[(a_3 - a_1)y_2 + (a_1 - a_2)y_3 \right] x_1 \\
& + \left[(a_2 - a_3)x_2 + (b_2 - b_1)y_2 + (a_2 - a_3)x_3 + (b_1 - b_3)y_3 \right] y_1 \\
& + (a_1 - a_2)y_3 x_2 + \left[(a_3 - a_1)x_3 + (b_3 - b_2)y_3 \right] y_2 \quad (C.22)
\end{aligned}$$

- Termes constants

$$T_6 = S_1 \cos^2 \phi + S_3 \cos \phi \sin \phi + S_4 \cos \phi + S_5 \sin \phi + S_6 \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} S_1 = & \left[(a_2 a_3 + b_1 b_3 - b_2 b_3 - a_1 a_3) x_2 + (a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_3 b_1 - a_1 b_3) y_2 \right. \\ & \left. + (a_1 a_2 + b_2 b_3 - b_1 b_2 - a_2 a_3) x_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3) y_3 \right] x_1 \\ & + \left[(a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_3 b_1 - a_1 b_3) x_2 + (b_2 b_3 - a_2 a_3 + a_1 a_3 - b_1 b_3) y_2 \right. \\ & \left. + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3) x_3 + (a_2 a_3 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - b_2 b_3) y_3 \right] y_1 \\ & + \left[(a_1 a_3 - b_1 b_3 + b_1 b_2 - a_1 a_2) x_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_2 + a_1 b_3 - a_2 b_1) y_3 \right] x_2 \\ & + \left[(a_3 b_1 - a_1 b_2 + a_1 b_3 - a_2 b_1) x_3 \right. \\ & \left. + (b_1 b_3 - b_1 b_2 - a_1 a_3 + a_1 a_2) y_3 \right] y_2 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned} S_3 = & \left[(a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_3 b_1 - a_1 b_3) x_2 + (b_2 b_3 - a_2 a_3 + a_1 a_3 - b_1 b_3) y_2 \right. \\ & \left. + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3) x_3 + (a_2 a_3 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - b_2 b_3) y_3 \right] x_1 \\ & + \left[(b_2 b_3 - a_2 a_3 + a_1 a_3 - b_1 b_3) x_2 + (a_3 b_1 + a_1 b_3 - a_3 b_2 - a_2 b_3) y_2 \right. \\ & \left. + (a_2 a_3 + b_1 b_2 - a_1 a_2 - b_2 b_3) x_3 + (a_3 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_3) y_3 \right] y_1 \\ & + \left[(a_3 b_1 - a_1 b_2 + a_1 b_3 - a_2 b_1) x_3 + (b_1 b_3 - b_1 b_2 - a_1 a_3 + a_1 a_2) y_3 \right] x_2 \\ & + \left[(b_1 b_3 - b_1 b_2 - a_1 a_3 + a_1 a_2) x_3 \right. \\ & \left. + (a_1 b_2 - a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_2 b_1) y_3 \right] y_2 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned} S_4 = & \left[(a_3 b_2 - a_2 b_3) b_1 + (b_2 - b_1) x_2 y_3 + \left((b_1 - b_3) x_3 + (a_3 - a_2) y_3 \right) y_2 \right] x_1 \\ & + \left[(a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + \left((b_3 - b_2) x_3 + (a_1 - a_3) y_3 \right) x_2 + (a_2 - a_1) y_2 x_3 \right] y_1 \\ & + (a_1 b_3 - a_3 b_1) b_2 x_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 y_2 \\ & + (a_2 b_1 - a_1 b_2) b_3 x_3 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 y_3 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned} S_5 = & \left[(a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_1 - a_2) y_3 x_2 + \left((a_3 - a_1) x_3 + (b_3 - b_2) y_3 \right) y_2 \right] x_1 \\ & + \left[(a_2 b_3 - a_3 b_2) b_1 + \left((a_2 - a_3) x_3 + (b_1 - b_3) y_3 \right) x_2 + (b_2 - b_1) y_2 x_3 \right] y_1 \\ & + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 x_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) b_2 y_2 \\ & + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 x_3 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) b_3 y_3 \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} S_6 = & \left[(a_1 a_3 - a_2 a_3) x_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_2) y_2 + (a_2 a_3 - a_1 a_2) x_3 + (a_2 b_3 - a_1 b_2) y_3 \right] x_1 \\ & + \left[(a_3 b_1 - a_2 b_3) x_2 + (b_1 b_3 - b_2 b_3) y_2 + (a_3 b_2 - a_2 b_1) x_3 + (b_2 b_3 - b_1 b_2) y_3 \right] y_1 \\ & + \left[(a_1 a_2 - a_1 a_3) x_3 + (a_2 b_1 - a_1 b_3) y_3 \right] x_2 \\ & + \left[(a_1 b_2 - a_3 b_1) x_3 + (b_1 b_2 - b_1 b_3) y_3 \right] y_2 \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Annexe D

Forme explicite d'une quadratique

Cette annexe décrit de façon détaillée la transformation d'une quadratique de sa forme générale à sa forme explicite. Un paramètre η est associé à chacune des quatre formes explicites possibles; celui-ci représente le nombre de coefficients de l'équation correspondant à cette forme.

La section D.1 énumère les quatre différentes formes explicites d'une quadratique selon son paramètre η et la section D.2 montre les détails des calculs et la valeur des coefficients correspondant à chacune des quatre formes.

D.1 Les quatre formes explicites

- $\eta = 5$

$$y = ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + e} \quad (\text{D.1})$$

Cette équation, selon la valeur des coefficients sous le radical, peut être celle d'une ellipse, d'une parabole, d'une hyperbole, d'une droite ou de deux droites. Chacun des différents types de quadratique obtenus de cette équation est présentée de façon plus détaillée à l'annexe E.

- $\eta = 4$

$$y = ax + b + \frac{c}{x + d} \quad (\text{D.2})$$

Cette équation est celle d'une hyperbole centrée en $(-d, -dx + b)$ dont les équations des asymptotes sont $x = -d$ et $y = ax + b$. L'allure de cette hyperbole dépend de la valeur du coefficient c . Si on numérote, de façon giratoire, les quatre secteurs du plan définis par les deux asymptotes, le premier étant au-dessus de l'asymptote oblique et à droite de l'asymptote verticale, les deux branches de l'hyperbole sont situées dans les secteurs 1 et 3 si $c > 0$ et dans les secteurs 2 et 4 si $c < 0$. Si $c = 0$, cas limite, l'hyperbole dégénère en deux droites selon les deux asymptotes.

- $\eta = 3$

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{D.3})$$

Cette équation est celle d'une parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe Y ou, si $a = 0$, celle d'une droite de pente b .

- $\eta = 1$

$$x = a \quad (\text{D.4})$$

Cette équation est celle d'une droite verticale.

D.2 Identification et calcul de chacune des formes explicites

La forme générale d'une quadratique est la suivante:

$$T_1 x^2 + T_2 y^2 + T_3 xy + T_4 x + T_5 y + T_6 = 0. \quad (\text{D.5})$$

On peut transformer cette équation en regroupant d'abord les termes par puissance de y :

$$T_2 y^2 + (T_3 x + T_5) y + (T_1 x^2 + T_4 x + T_6) = 0. \quad (\text{D.6})$$

On cherche ensuite à isoler y afin d'obtenir une forme explicite; celle-ci dépend de la valeur des coefficients T_i . Quatre cas sont possibles.

1. $\forall T_i \neq 0$ (cas général)

On solutionne (D.6) pour y , soit

$$y = \frac{-(T_3 x + T_5) \pm \sqrt{(T_3 x + T_5)^2 - 4T_2(T_1 x^2 + T_4 x + T_6)}}{2T_2},$$

puis on obtient une équation de la forme $\eta = 5$, soit

$$y = ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + e} \quad (\text{D.7})$$

dont les coefficients sont:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{T_3}{2T_2}, & b &= -\frac{T_5}{2T_2}, & c &= \frac{T_3^2}{4T_2^2} - \frac{T_1}{T_2}, \\ d &= \frac{T_3 T_5}{2T_2^2} - \frac{T_4}{T_2}, & e &= \frac{T_5^2}{4T_2^2} - \frac{T_6}{T_2}. \end{aligned}$$

2. $T_2 = 0, T_3 \neq 0$

On isole y dans (D.6)

$$y = -\frac{T_1x^2 + T_4x + T_6}{(T_3x + T_5)},$$

puis on obtient une équation de la forme $\eta = 4$, soit

$$y = ax + b + \frac{c}{x + d} \quad (\text{D.8})$$

dont les coefficients sont:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{T_1}{T_3}, & b &= -ad - \frac{T_4}{T_3}, \\ c &= -bd - \frac{T_6}{T_3}, & d &= \frac{T_5}{T_3}. \end{aligned}$$

Cas particulier : $c = 0$

L'hyperbole dégénère en deux droites selon les asymptotes.

Dans ce cas, l'équation (D.5) peut être écrite sous la forme

$$A(y - B) = 0 \quad (\text{D.9})$$

où

$$A = T_3x + T_5 \quad B = -ax - b$$

Cette équation est vérifiée pour $y = B$ et pour $A = 0$ et on obtient donc deux droites dont les équations sont:

$$y = ax + b \quad (\text{D.10})$$

$$x = -d \quad (\text{D.11})$$

où les coefficients a, b et d sont ceux de l'équation (D.8).

3. $T_2 = T_3 = 0$, $T_5 \neq 0$

On isole y dans (D.6)

$$y = -\frac{T_1x^2 + T_4x + T_6}{T_5},$$

puis on obtient une équation de la forme $\eta = 3$, soit

$$y = ax^2 + bx + c \tag{D.12}$$

dont les coefficients sont:

$$a = -\frac{T_1}{T_5}, \quad b = -\frac{T_4}{T_5}, \quad c = -\frac{T_6}{T_5}.$$

4. $T_2 = T_3 = T_5 = 0$

L'équation (D.6) est réduite à

$$T_1x^2 + T_4x + T_6 = 0.$$

- $T_1 \neq 0$

On trouve les racines pour obtenir deux équations de la forme $\eta = 1$, soit

$$x = a_1 \quad \text{et} \quad x = a_2 \tag{D.13}$$

où

$$a_1 = \frac{-T_4 + \sqrt{T_4^2 - 4T_1T_6}}{2T_1},$$

$$a_2 = \frac{-T_4 - \sqrt{T_4^2 - 4T_1T_6}}{2T_1}.$$

- $T_1 = 0$

On isole x pour obtenir une équation de la forme $\eta = 1$, soit

$$x = -\frac{T_6}{T_4}. \tag{D.14}$$

Annexe E

Classification des quadratiques

Cette annexe classe les quadratiques selon sept différents types et scinde certaines d'entre elles en deux quadratiques plus simples. Cette classification est effectuée dans le but de faciliter la division ultérieure des quadratiques en sections explicites, c'est-à-dire des sections continues pour lesquelles l'image de chaque abscisse est unique ou des segments verticaux.

Selon sa forme explicite (annexe D) et la valeur de ses coefficients, le type de chaque quadratique est identifié et la valeur correspondante est attribuée au paramètre t (le 7^e coefficient de l'équation (5.1)).

Voici la liste des sept différents types de quadratiques avec les caractéristiques des sections explicites correspondantes; celles-ci proviennent de la division selon les points limites correspondant au type de la quadratique, c'est-à-dire l'asymptote verticale d'une quadratique de forme explicite $\eta = 4$ ou les racines réelles de la courbe limitative d'une quadratique de forme explicite $\eta = 5$. Les bornes mentionnées sont relatives aux abscisses. Pour chaque type, la forme explicite d'origine est aussi mentionnée (entre parenthèses).

- TYPE 1 : Ellipse ($\eta = 5$)
2 sections finies
- TYPE 2 : Parabole oblique ou horizontale ($\eta = 5$)
2 sections dont chacune possède une seule borne finie
- TYPE 3 : Parabole verticale ou droite non verticale ($\eta = 3, 4$ ou 5)
1 section infinie
- TYPE 4 : Hyperbole dont les deux branches sont une au-dessus de l'autre ($\eta = 5$)
2 sections infinies
- TYPE 5 : Hyperbole avec discontinuité en x ($\eta = 5$)
4 sections dont chacune possède une seule borne finie
- TYPE 6 : Hyperbole avec asymptote verticale ($\eta = 4$)
2 sections dont chacune possède une seule borne finie; celle-ci est asymptotique
- TYPE 7 : droite verticale ($\eta = 1$ ou 4)
1 section verticale infinie

N.B. Dans cette annexe, l'axe Y est supposé vertical.

$$\mathbf{E.1} \quad \eta = 5 \quad \rightarrow \quad y = ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + e}$$

La quadratique à cinq coefficients comporte deux branches en raison du choix de signe (\pm) devant le radical. Le type d'une telle quadratique dépend de l'allure de

la courbe que représentent les trois coefficients sous le radical; cette dernière peut être une parabole ou une droite. Cette courbe, soit $cx^2 + dx + e$, sera appelée la courbe limitative; la quadratique ne sera définie que pour la plage de x où cette courbe est positive.

Si $c \neq 0$, la courbe limitative est une parabole dont les coordonnées du sommet sont (x_s, y_s) et dont les racines sont r_1 et r_2 .

$$x_s = \frac{-d}{2c} \quad , \quad y_s = e - \frac{d^2}{4c}$$

$$r_1 = \frac{-d}{2c} - \left| \frac{\sqrt{d^2 - 4ce}}{2c} \right| \quad , \quad r_2 = \frac{-d}{2c} + \left| \frac{\sqrt{d^2 - 4ce}}{2c} \right|$$

Si $c = 0$, la courbe limitative est une droite de pente d .

E.1.1 $c < 0$

La courbe limitative est une parabole vers le bas dont l'ordonnée du sommet est positive. La quadratique est donc une ellipse définie sur $x = [r_1, r_2]$ et centrée en $(x_s, ax_s + b)$.

On assigne donc le type 1 à cette quadratique.

N.B. Le cas où $y_s \leq 0$ n'est jamais rencontré car la quadratique ne serait pas définie.

E.1.2 $c = 0$

La courbe limitative est une droite dont la valeur d de la pente définira le type de la quadratique.

- $d \neq 0$

La courbe limitative est une droite de pente d qui croise l'axe des abscisses en $r = -e/d$. La quadratique est donc une parabole d'axe de symétrie oblique définie sur $x = [r, +\infty$ si $d > 0$, ou sur $x = -\infty, r]$ si $d < 0$.

On assigne donc le type 2 à cette quadratique.

- $d = 0$

La courbe limitative est une droite horizontale et la quadratique est donc constituée de deux droites de pente a (une seule droite si $e = 0$).

On crée donc une ou deux quadratiques de type 3.

N.B. Le cas où $e < 0$ n'est jamais rencontré car la quadratique ne serait pas définie.

E.1.3 $c > 0$

La courbe limitative est une parabole vers le haut dont la valeur de l'ordonnée du sommet définira le type de la quadratique.

- $y_s < 0$

Le sommet de la parabole est situé sous l'axe des x et la quadratique est donc une hyperbole définie sur $x = -\infty, r_1]$ et $x = [r_2, +\infty$.

On assigne donc le type 5 à cette quadratique.

- $y_s = 0$

Le sommet de la parabole est situé exactement sur l'axe des x et la quadratique est donc constituée de deux droites s'intersectant en $(x_s, ax_s + b)$ et dont les équations sont

$$y = (a + \sqrt{c})x + (b + \frac{d}{2\sqrt{c}}) \quad (\text{E.1})$$

$$y = (a - \sqrt{c})x + (b - \frac{d}{2\sqrt{c}}) \quad (\text{E.2})$$

On crée donc deux quadratiques de type 3.

- $y_s > 0$

Le sommet de la parabole est situé au-dessus de l'axe des x et la quadratique est donc une hyperbole centrée en $(x_s, ax_s + b)$ dont les deux branches sont une au-dessus de l'autre et continues en x .

On assigne donc le type 4 à cette quadratique.

$$\mathbf{E.2} \quad \eta = 4 \quad \rightarrow \quad y = ax + b + \frac{c}{x+d}$$

- $c \neq 0$

La quadratique est une hyperbole centrée en $(-d, -dx + b)$ et dont les équations des deux asymptotes, une verticale et une oblique, sont:

$$y = ax + b \tag{E.3}$$

$$x = -d \tag{E.4}$$

On assigne donc le type 6 à cette quadratique.

- $c = 0$

Dans ce cas, l'hyperbole dégénère en deux droites selon les asymptotes (voir la section D.1). Ces deux droites sont donc définies par les équations (E.3) et (E.4).

On crée donc une quadratique de type 3 et une de type 7.

$$\mathbf{E.3} \quad \eta = 3 \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$$

La quadratique à trois coefficients est continue en x et peut être une parabole dont l'axe de symétrie est vertical ou une droite de pente b , si $a = 0$.

On assigne donc le type 3 à cette quadratique.

$$\mathbf{E.4} \quad \eta = 1 \quad \rightarrow \quad x = a$$

La quadratique à un coefficient est une droite verticale.

On assigne donc le type 7 à cette quadratique.

Annexe F

Intersection(s) entre deux quadratiques

Cette annexe explicite la méthode de calcul des intersections entre deux quadratiques exprimées sous forme explicite (voir l'annexe D).

Le calcul des points d'intersection entre deux quadratiques dépend de la forme explicite de chacune de celles-ci. Chacune des différentes combinaisons sera donc analysée.

Les racines réelles du polynôme obtenu (quadrique, cubique ou quadratique), s'il y a lieu, donneront les abscisses des points d'intersection; on substituera chacune de ces abscisses dans l'une ou l'autre des deux équations de départ pour obtenir les ordonnées correspondantes.

Les quatre différentes formes explicites d'une quadratique sont:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \eta = 5, \quad y = ax + b \pm \sqrt{cx^2 + dx + e} \\
 (2) \quad & \eta = 4, \quad y = ax + b + \frac{c}{x + d} \\
 (3) \quad & \eta = 3, \quad y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \\
 (4) \quad & \eta = 1, \quad x = x_1
 \end{aligned}$$

Voici l'analyse des différentes combinaisons.

- (1) avec (1)

On part de

$$y = a_1x + b_1 \pm \sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} = a_2x + b_2 \pm \sqrt{c_2x^2 + d_2x + e_2},$$

on isole le radical de droite

$$(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2 \pm \sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} = \pm \sqrt{c_2x^2 + d_2x + e_2},$$

on élève au carré de part et d'autre

$$\left\{ \begin{array}{l} [(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]^2 + c_1x^2 + d_1x + e_1 \\ \pm 2[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]\sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} \end{array} \right\} = c_2x^2 + d_2x + e_2,$$

on isole le radical et ses facteurs

$$\begin{aligned}
 & [(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]^2 + c_1x^2 + d_1x + e_1 - (c_2x^2 + d_2x + e_2) \\
 & = \pm 2\sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1}[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)],
 \end{aligned}$$

on élève au carré à nouveau

$$\begin{aligned}
 & \left\{ [(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]^2 + c_1x^2 + d_1x + e_1 - (c_2x^2 + d_2x + e_2) \right\}^2 \\
 & = 4(c_1x^2 + d_1x + e_1)[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]^2,
 \end{aligned}$$

puis on regroupe les termes pour finalement obtenir une quadrique en x :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0, \quad (\text{F.1})$$

$$\begin{aligned} A &= [(a_1 - a_2)^2 - c_1 - c_2]^2 - 4c_1c_2, \\ B &= 2(c_1 - c_2)(d_1 - d_2) - 2(a_1 - a_2)^2(d_1 + d_2) \\ &\quad + 4[(a_1 - a_2)^3 + (a_2 - a_1)(c_1 + c_2)](b_1 - b_2), \\ C &= -2(b_1 - b_2)^2(c_1 + c_2) + 2[3(b_1 - b_2)^2 - e_1 - e_2](a_1 - a_2)^2 \\ &\quad + 2(e_1 - e_2)(c_1 - c_2) + (d_1 - d_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)(d_1 + d_2), \\ D &= 2(e_1 - e_2)(d_1 - d_2) + 4(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)[(b_1 - b_2)^2 - e_1 - e_2] \\ &\quad - 2(d_1 + d_2)(b_1 - b_2)^2, \\ E &= [(b_1 - b_2)^2 - e_1 - e_2]^2 - 4e_1e_2. \end{aligned}$$

- (1) avec (2)

On part de

$$y = a_1x + b_1 \pm \sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x + d_2},$$

on isole le radical et on élève au carré

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} &= (a_2 - a_1)x + b_2 - b_1 + \frac{c_2}{x + d_2}, \\ c_1x^2 + d_1x + e_1 &= \left[(a_2 - a_1)x + b_2 - b_1 + \frac{c_2}{x + d_2} \right]^2, \end{aligned}$$

puis on regroupe les termes pour finalement obtenir une quadrique en x :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0, \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} A &= (a_2 - a_1)^2 - c_1, \\ B &= 2d_2[(a_2 - a_1)^2 - c_1] + 2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) - d_1, \\ C &= 2d_2[2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) - d_1] + d_2^2[(a_2 - a_1)^2 - c_1] \\ &\quad + 2c_2(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)^2 - e_1, \\ D &= d_2^2[2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) - d_1] + 2d_2[(b_2 - b_1)^2 - e_1] \end{aligned}$$

$$+2c_2[d_2(a_2 - a_1) + b_2 - b_1],$$

$$E = d_2^2[(b_2 - b_1)^2 - e_1] + 2d_2c_2(b_2 - b_1) + c_2^2.$$

- (1) avec (3)

On part de

$$y = a_1x + b_1 \pm \sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} = a_2x^2 + b_2x + c_2,$$

on isole le radical et on élève au carré

$$\pm \sqrt{c_1x^2 + d_1x + e_1} = a_2x^2 + (b_2 - a_1)x + c_2 - b_1,$$

$$c_1x^2 + d_1x + e_1 = [a_2x^2 + (b_2 - a_1)x + c_2 - b_1]^2,$$

puis on regroupe les termes pour finalement obtenir une quadrique en x :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0, \tag{F.3}$$

$$A = a_2^2,$$

$$B = 2a_2(b_2 - a_1),$$

$$C = (a_1 - b_2)^2 - c_1 + 2a_2(c_2 - b_1),$$

$$D = 2(a_1 - b_2)(b_1 - c_2) - d_1,$$

$$E = (b_1 - c_2)^2 - e_1.$$

- (2) avec (2)

On part de

$$y = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x + d_1} = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x + d_2},$$

on distribue les dénominateurs

$$(a_1x + b_1)(x + d_1)(x + d_2) + c_1(x + d_2) = (a_2x + b_2)(x + d_1)(x + d_2) + c_2(x + d_1),$$

puis on regroupe les termes pour finalement obtenir une cubique en x :

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \quad (\text{F.4})$$

$$A = a_1 - a_2,$$

$$B = b_1 - b_2 + (a_1 - a_2)(d_1 + d_2),$$

$$C = (a_1 - a_2)d_1d_2 + (b_1 - b_2)(d_1 + d_2) + c_1 - c_2,$$

$$D = (b_1 - b_2)d_1d_2 + c_1d_2 - c_2d_1.$$

- (2) avec (3)

On part de

$$y = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x + d_1} = a_2x^2 + b_2x + c_2,$$

on distribue le dénominateur

$$(a_1x + b_1)(x + d_1) + c_1 = (a_2x^2 + b_2x + c_2)(x + d_1),$$

et on regroupe les termes pour finalement obtenir une cubique:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \quad (\text{F.5})$$

$$A = -a_2,$$

$$B = a_1 - a_2d_1 - b_2,$$

$$C = (a_1 - b_2)d_1 + b_1 - c_2,$$

$$D = (b_1 - c_2)d_1 + c_1.$$

- (3) avec (3)

On part de

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

et on regroupe les termes pour obtenir une quadratique:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{F.6}$$

$$A = a_1 - a_2,$$

$$B = b_1 - b_2,$$

$$C = c_1 - c_2.$$

\tag{F.7}

- (1), (2) ou (3) avec (4)

On substitue tout simplement les abscisses de la droite de (4) dans l'équation explicite de (1), (2) ou (3) afin d'obtenir, s'il en existe, les ordonnées correspondantes.

N.B. La recherche d'intersections entre deux quadratiques de forme explicite (4), c'est-à-dire deux droites verticales, ne doit évidemment pas être entreprise.

Annexe G

Lieux d'équilibre à cinq câbles à orientation constante d'un mécanisme spatial

Cette annexe détaille les vingt coefficients de la forme générale de la cubique représentant la surface des lieux d'équilibre à cinq câbles à orientation constante d'un mécanisme spatial. Chacun des vingt coefficients est subdivisé de façon à présenter les facteurs respectifs des forces et moments de force selon chacun des axes.

G.1 Méthode de résolution

On part du système d'équations (4.17), soit

$$\alpha_1(A_1 - x) + \alpha_2(A_2 - x) + \alpha_3(A_3 - x) + \alpha_4(A_4 - x) + \alpha_5(A_5 - x) = F_x, \quad (\text{G.1})$$

$$\alpha_1(B_1 - y) + \alpha_2(B_2 - y) + \alpha_3(B_3 - y) + \alpha_4(B_4 - y) + \alpha_5(B_5 - y) = F_y, \quad (\text{G.2})$$

$$\alpha_1(C_1 - z) + \alpha_2(C_2 - z) + \alpha_3(C_3 - z) + \alpha_4(C_4 - z) + \alpha_5(C_5 - z) = F_z, \quad (\text{G.3})$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(D_1y + E_1z + F_1) + \alpha_2(D_2y + E_2z + F_2) + \alpha_3(D_3y + E_3z + F_3) \\ + \alpha_4(D_4y + E_4z + F_4) + \alpha_5(D_5y + E_5z + F_5) = \tau_x, \quad (\text{G.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(G_1y + H_1z + I_1) + \alpha_2(G_2y + H_2z + I_2) + \alpha_3(G_3y + H_3z + I_3) \\ + \alpha_4(G_4y + H_4z + I_4) + \alpha_5(G_5y + H_5z + I_5) = \tau_y, \quad (\text{G.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(J_1y + K_1z + L_1) + \alpha_2(J_2y + K_2z + L_2) + \alpha_3(J_3y + K_3z + L_3) \\ + \alpha_4(J_4y + K_4z + L_4) + \alpha_5(J_5y + K_5z + L_5) = \tau_z. \quad (\text{G.6}) \end{aligned}$$

On résoud le système constitué de cinq des équations précédentes puis on substitue les α_1 à α_5 ainsi obtenus dans l'équation restante. On regroupe ensuite les termes par puissance de x, y et z .

G.2 Équation des lieux d'équilibre à cinq câbles sous sa forme générale

$$\begin{aligned} T_1x^3 + T_2y^3 + T_3z^3 + T_4x^2y + T_5x^2z + T_6xy^2 + T_7xz^2 \\ + T_8y^2z + T_9yz^2 + T_{10}xyz + T_{11}x^2 + T_{12}y^2 + T_{13}z^2 \\ + T_{14}xy + T_{15}xz + T_{16}yz + T_{17}x + T_{18}y + T_{19}z + T_{20} = 0 \quad (\text{G.7}) \end{aligned}$$

Les coefficients T_1 à T_{20} sont maintenant présentés; chacun d'eux est développé sous forme d'une sommation dans laquelle

$$\epsilon_{ijklm} = \begin{cases} 0 & \text{si deux des indices sont \u00e9gaux;} \\ 1 & \text{si } ijklm \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3, 4, 5; \\ -1 & \text{si } ijklm \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Pour les termes ne comportant que quatre coefficients, on suppose l'indice manquant \u00e0 la fin. Par exemple, pour le terme $ABCD$, on imagine $A_i B_j C_k D_l X_m$ o\u00f9 X est un coefficient imaginaire et m est l'indice manquant.

- Facteurs de x^3

$$T_1 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} -(J_i G_j C_k F_l) F_y \\ +(J_i G_j B_k F_l) F_z \\ -(J_i G_j B_k C_l) \tau_x \end{bmatrix} \quad (\text{G.8})$$

- Facteurs de y^3

$$T_2 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} (D_i K_j C_k I_l) F_x \\ -(A_i D_j K_k I_l) F_z \\ +(A_i D_j K_k C_l) \tau_y \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

- Facteurs de z^3

$$T_3 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} -(B_i L_j H_k E_l) F_x \\ +(A_i L_j H_k E_l) F_y \\ -(A_i B_j H_k E_l) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.10})$$

- Facteurs de x^2y

$$T_4 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} (J_i G_j D_k B_l C_m + J_i G_j C_k F_l) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} G_i K_j C_k F_l + J_i D_j C_k I_l \\ + G_i D_j L_k C_l + J_i G_j A_k D_l C_m \end{array} \right) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} G_i B_j K_k F_l + G_i D_j B_k L_l - J_i D_j B_k I_l \\ - J_i G_j A_k F_l - J_i G_j A_k D_l B_m \\ + (J_i G_j A_k C_l - G_i B_j K_k C_l) \tau_x \\ - (J_i B_j D_k C_l) \tau_y \\ - (G_i D_j B_k C_l) \tau_z \end{array} \right) F_z \end{array} \right] \quad (\text{G.11})$$

- Facteurs de x^2z

$$T_5 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} (J_i G_j B_k C_l E_m - J_i G_j B_k F_l) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} J_i C_j I_k E_l + G_i L_j C_k E_l - J_i A_j G_k F_l \\ + J_i C_j H_k F_l - J_i G_j A_k C_l E_m \end{array} \right) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} G_i B_j L_k E_l - J_i B_j I_k E_l \\ - J_i B_j H_k F_l + J_i G_j A_k B_l E_m \\ + (J_i A_j G_k B_l - J_i B_j C_k H_l) \tau_x \\ + (J_i B_j C_k E_l) \tau_y \\ - (G_i B_j C_k E_l) \tau_z \end{array} \right) F_z \end{array} \right] \quad (\text{G.12})$$

- Facteurs de xy^2

$$T_6 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} - \left(\begin{array}{l} G_i K_j C_k F_l + G_i D_j L_k C_l \\ + J_i D_j C_k I_l + G_i D_j B_k K_l C_m \end{array} \right) F_x \\ + (A_i G_j D_k K_l C_m - D_i K_j C_k I_l) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} A_i G_j K_k F_l - D_i B_j K_k I_l - J_i A_j D_k I_l \\ - A_i G_j D_k L_l - A_i G_j B_k D_l K_m \\ + (G_i A_j K_k C_l) \tau_x \\ + (J_i A_j D_k C_l + D_i B_j K_k C_l) \tau_y \\ + (A_i G_j D_k C_l) \tau_z \end{array} \right) F_z \end{array} \right] \quad (\text{G.13})$$

- Facteurs de xz^2

$$T_7 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + \left(\begin{array}{l} J_i B_j I_k E_l - G_i B_j L_k E_l \\ + J_i B_j H_k F_l + J_i B_j C_k H_l E_m \end{array} \right) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} G_i A_j L_k E_l - J_i A_j H_k F_l - J_i A_j I_k E_l \\ + L_i C_j H_k E_l - J_i A_j C_k H_l E_m \\ + (J_i A_j B_k H_l E_m + B_i L_j H_k E_l) \end{array} \right) F_y \\ + (J_i A_j B_k H_l E_m + B_i L_j H_k E_l) F_z \\ - (J_i A_j B_k H_l) \tau_x \\ + (J_i A_j B_k E_l) \tau_y \\ + (A_i G_j B_k E_l - B_i C_j H_k E_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.14})$$

- Facteurs de y^2z

$$T_8 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + \left(\begin{array}{l} D_i L_j C_k H_l - K_i C_j I_k E_l - K_i C_j H_k F_l \\ - B_i D_j K_k I_l + B_i D_j K_k C_l H_m \end{array} \right) F_x \\ + (A_i D_j K_k I_l - A_i D_j K_k C_l H_m) F_y \\ - \left(\begin{array}{l} A_i K_j I_k E_l + A_i D_j L_k H_l \\ + A_i K_j H_k F_l + A_i D_j B_k K_l H_m \end{array} \right) F_z \\ - (A_i K_j C_k H_l) \tau_x \\ + (A_i K_j C_k E_l - A_i B_j D_k K_l) \tau_y \\ + (A_i D_j C_k H_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.15})$$

- Facteurs de yz^2

$$T_9 = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} - \left(\begin{array}{l} B_i K_j I_k E_l + L_i C_j H_k E_l + B_i D_j L_k H_l \\ + B_i K_j H_k F_l + B_i K_j C_k H_l E_m \end{array} \right) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} A_i K_j I_k E_l + A_i D_j L_k H_l \\ + A_i K_j H_k F_l + A_i K_j C_k H_l E_m \end{array} \right) F_y \\ + (A_i B_j K_k H_l E_m - A_i L_j H_k E_l) F_z \\ - (A_i B_j K_k H_l) \tau_x \\ + (A_i B_j K_k E_l) \tau_y \\ + (A_i C_j H_k E_l - A_i D_j B_k H_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.16})$$

- Facteurs de xyz

$$T_{10} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + \left(\begin{array}{l} J_i D_j B_k I_l - J_i C_j H_k F_l - J_i C_j I_k E_l \\ + G_i B_j D_k L_l - G_i B_j K_k F_l - J_i L_j C_k E_l \\ + G_i B_j H_k C_l E_m - J_i D_j B_k C_l H_m \end{array} \right) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} J_i A_j D_k I_l + K_i C_j H_k F_l + K_i C_j I_k E_l \\ + A_i G_j D_k L_l - A_i G_j K_k F_l - D_i L_j C_k H_l \\ - G_i A_j K_k C_l E_m - J_i A_j D_k C_l H_m \end{array} \right) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} B_i K_j I_k E_l + J_i A_j H_k F_l + J_i A_j I_k E_l \\ + B_i K_j H_k F_l - D_i B_j L_k H_l - G_i A_j L_k E_l \\ + J_i A_j D_k B_l H_m - G_i A_j B_k K_l E_m \end{array} \right) F_z \\ + (J_i A_j C_k H_l + G_i A_j B_k K_l + B_i K_j C_k H_l) \tau_x \\ + (J_i A_j B_k D_l - J_i A_j C_k E_l - B_i K_j C_k E_l) \tau_y \\ + (A_i G_j B_k D_l - A_i G_j C_k E_l - B_i D_j C_k H_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.17})$$

- Facteurs de x^2

$$T_{11} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + (J_i G_j B_k C_l F_m) F_x \\ + (G_i L_j C_k F_l + J_i C_j I_k F_l - J_i G_j A_k C_l F_m) F_y \\ + (G_i B_j L_k F_l - J_i B_j I_k F_l + J_i G_j A_k B_l F_m) F_z \\ - (J_i G_j A_k B_l C_m + J_i B_j C_k I_l + G_i B_j L_k C_l) \tau_x \\ + (J_i B_j C_k F_l) \tau_y \\ - (G_i B_j C_k F_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.18})$$

- Facteurs de y^2

$$T_{12} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + (D_i L_j C_k I_l - K_i C_j I_k F_l + B_i D_j K_k C_l I_m) F_x \\ - (A_i D_j K_k C_l I_m) F_y \\ + (A_i B_j D_k K_l I_m - A_i K_j I_k F_l - A_i D_j L_k I_l) F_z \\ - (A_i K_j C_k I_l) \tau_x \\ + (A_i K_j C_k F_l + A_i D_j L_k C_l + A_i D_j B_k K_l C_m) \tau_y \\ + (A_i D_j C_k I_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.19})$$

- Facteurs de z^2

$$T_{13} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} -(B_i L_j I_k E_l + B_i L_j H_k F_l + B_i L_j C_k H_l E_m) F_x \\ +(A_i L_j I_k E_l + A_i L_j H_k F_l + A_i L_j C_k H_l E_m) F_y \\ +(A_i B_j L_k H_l E_m) F_z \\ -(A_i B_j L_k H_l) \tau_x \\ +(A_i B_j L_k E_l) \tau_y \\ -(A_i B_j I_k E_l + A_i B_j H_k F_l + A_i B_j C_k H_l E_m) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.20})$$

- Facteurs de xy

$$T_{14} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} + \left(\begin{array}{l} G_i B_j K_k C_l F_m - J_i C_j I_k F_l - G_i L_j C_k F_l \\ + J_i B_j D_k C_l I_m - G_i D_j B_k L_l C_m \end{array} \right) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} K_i C_j I_k F_l - D_i L_j C_k I_l - G_i A_j K_k C_l F_m \\ - J_i A_j D_k C_l I_m - G_i A_j D_k L_l C_m \end{array} \right) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} B_i K_j I_k F_l - G_i A_j L_k F_l - D_i B_j L_k I_l \\ + G_i A_j B_k D_l L_m + J_i A_j I_k F_l \\ + J_i A_j D_k B_l I_m - G_i A_j B_k K_l F_m \end{array} \right) F_z \\ +(J_i A_j C_k I_l + G_i A_j L_k C_l + G_i A_j B_k K_l C_m + B_i K_j C_k I_l) \tau_x \\ -(J_i A_j D_k B_l C_m + J_i A_j C_k F_l + B_i K_j C_k F_l + B_i D_j L_k C_l) \tau_y \\ +(G_i A_j D_k B_l C_m + G_i A_j C_k F_l + D_i B_j C_k I_l) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.21})$$

- Facteurs de xz

$$T_{15} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + \left(\begin{array}{l} G_i B_j L_k C_l E_m + J_i B_j I_k F_l - G_i B_j L_k F_l \\ + J_i B_j C_k H_l F_m + J_i B_j C_k I_l E_m \end{array} \right) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} G_i A_j L_k F_l - J_i A_j I_k F_l + L_i C_j H_k F_l \\ - G_i A_j L_k C_l E_m + L_i C_j I_k E_l \\ - J_i A_j C_k H_l F_m - J_i A_j C_k I_l E_m \end{array} \right) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} B_i L_j H_k F_l + B_i L_j I_k E_l - G_i A_j B_k L_l E_m \\ + J_i A_j B_k I_l E_m + J_i A_j B_k H_l F_m \end{array} \right) F_z \\ + (G_i A_j B_k L_l - J_i A_j B_k I_l + J_i A_j B_k C_l H_m + B_i L_j C_k H_l) \tau_x \\ + (J_i A_j B_k F_l - J_i A_j B_k C_l E_m - B_i L_j C_k E_l) \tau_y \\ + (G_i A_j B_k C_l E_m - G_i A_j B_k F_l - B_i C_j I_k E_l - B_i C_j H_k F_l) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.22})$$

- Facteurs de yz

$$T_{16} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \left[\begin{array}{l} + \left(\begin{array}{l} D_i B_j L_k I_l - B_i K_j I_k F_l - L_i C_j H_k F_l \\ - D_i B_j L_k C_l H_m - L_i C_j I_k E_l \\ - B_i K_j C_k H_l F_m - B_i K_j C_k I_l E_m \end{array} \right) F_x \\ + \left(\begin{array}{l} A_i K_j I_k F_l + A_i D_j L_k I_l - A_i D_j L_k C_l H_m \\ + A_i K_j C_k H_l F_m + A_i K_j C_k I_l E_m \end{array} \right) F_y \\ + \left(\begin{array}{l} A_i B_j K_k H_l F_m - A_i L_j H_k F_l - A_i L_j I_k E_l \\ + A_i B_j K_k I_l E_m - A_i D_j B_k L_l H_m \end{array} \right) F_z \\ + (A_i B_j K_k C_l H_m - A_i L_j C_k H_l - A_i B_j K_k I_l) \tau_x \\ + (A_i B_j K_k F_l - A_i B_j D_k L_l - A_i B_j K_k C_l E_m + A_i L_j C_k E_l) \tau_y \\ + (A_i C_j H_k F_l + A_i C_j I_k E_l + A_i B_j D_k I_l - A_i B_j D_k C_l H_m) \tau_z \end{array} \right] \quad (\text{G.23})$$

- Facteurs de x

$$T_{17} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} +(G_i B_j L_k C_l F_m + J_i B_j C_k I_l F_m) F_x \\ +(L_i C_j I_k F_l - J_i A_j C_k I_l F_m - G_i A_j L_k C_l F_m) F_y \\ +(J_i A_j B_k I_l F_m - G_i A_j B_k L_l F_m + B_i L_j I_k F_l) F_z \\ +(J_i A_j B_k C_l I_m + G_i A_j B_k L_l C_m + B_i L_j C_k I_l) \tau_x \\ -(J_i A_j B_k C_l F_m + B_i L_j C_k F_l) \tau_y \\ +(G_i A_j B_k C_l F_m - B_i C_j I_k F_l) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.24})$$

- Facteurs de y

$$T_{18} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} +(B_i D_j L_k C_l I_m - L_i C_j I_k F_l - B_i K_j C_k I_l F_m) F_x \\ +(A_i K_j C_k I_l F_m - A_i D_j L_k C_l I_m) F_y \\ +(A_i B_j K_k I_l F_m + A_i B_j D_k L_l I_m - A_i L_j I_k F_l) F_z \\ +(A_i B_j K_k C_l I_m - A_i L_j C_k I_l) \tau_x \\ +(A_i L_j C_k F_l - A_i B_j K_k C_l F_m - A_i B_j D_k L_l C_m) \tau_y \\ +(A_i C_j I_k F_l - A_i B_j D_k C_l I_m) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.25})$$

- Facteurs de z

$$T_{19} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} -(B_i L_j I_k F_l + B_i L_j C_k H_l F_m + B_i L_j C_k I_l E_m) F_x \\ +(A_i L_j I_k F_l + A_i L_j C_k H_l F_m + A_i L_j C_k I_l E_m) F_y \\ +(A_i B_j L_k H_l F_m + A_i B_j L_k I_l E_m) F_z \\ +(A_i B_j L_k C_l H_m - A_i B_j L_k I_l) \tau_x \\ +(A_i B_j L_k F_l - A_i B_j L_k C_l E_m) \tau_y \\ -(A_i B_j I_k F_l + A_i B_j C_k I_l E_m + A_i B_j C_k H_l F_m) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.26})$$

- Termes constants

$$T_{20} = \sum_{i,j,k,l,m=1}^5 \epsilon_{ijklm} \begin{bmatrix} -(B_i L_j C_k I_l F_m) F_x + (A_i L_j C_k I_l F_m) F_y \\ +(A_i B_j L_k I_l F_m) F_z + (A_i B_j L_k C_l I_m) \tau_x \\ -(A_i B_j L_k C_l F_m) \tau_y - (A_i B_j C_k I_l F_m) \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{G.27})$$