

IRINA NARCIS CONSTANTINESCU

**DÉTERMINATION DE RÉGIONS EXEMPTES DE  
SINGULARITÉS POUR DES MÉCANISMES PARALLÈLES  
PLANS ET SPHÉRIQUES À 3 DEGRÉS DE LIBERTÉ**

Mémoire présenté

à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

MARS 2004

# Résumé

Dans ce mémoire on présente une méthode générale et des algorithmes détaillés qui permettent de déterminer des régions exemptes de singularités pour des mécanismes parallèles plans et sphériques à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. La méthode proposée est celle des extrémums, complétée par des substitutions trigonométriques qui introduisent les limites de l'espace de travail directement dans l'expression analytique du déterminant de la jacobienne. Par conséquent, les nouvelles variables sont définies partout dans l'espace. Des algorithmes basés sur cette méthode, qui vérifient la présence des singularités dans une hyper-boîte de l'espace de travail sont développés. Également, des algorithmes additionnels sont conçus pour valider, par une vérification visuelle, les procédures de détection, en discrétisant tout l'espace de travail. Les algorithmes sont mis en pratique dans l'espace tri-dimensionnel et sont aussi adaptés pour les cas plans, quand une des coordonnées cartésiennes est constante. Ils sont appliqués pour deux types d'architectures différentes à 3 ddl, plane et sphérique, chacune ayant une géométrie générale. La procédure développée vérifie avec succès et d'une façon rapide l'existence de singularités dans n'importe quelle boîte définie dans l'espace de travail.

---

Irina Narcis Constantinescu

---

Clément Gosselin-Directeur

# Avant-propos

Les premiers remerciements sont adressés à mon directeur de recherche, monsieur Clément Gosselin, qui m’a permis de faire une maîtrise sous sa direction et pour la confiance qu’il m’a accordée tout au long de ces deux années. Je le remercie sincèrement pour sa gentillesse, pour son soutien, ses conseils, sa patience, sa compréhension, pour tout. J’ai eu la chance d’être conduite dans le monde de la robotique par un homme extraordinaire. Merci beaucoup Monsieur Clément Gosselin !

Je veux remercier mon amie Corina. Sans elle je n’aurais jamais eu le courage de commencer la maîtrise. Ses écoutes, ses conseils, son aide, m’ont beaucoup motivée. “Sarut-mâna Corina !”

Je remercie Dimiter Zlatanov pour son aide sur toutes les parties de la thèse et pour ses conseils pertinents sur mon projet. Je remercie Boris Mayer St-Onge pour les longues discussions sur mon projet et pour son aide dans le laboratoire pendant ma maîtrise. Tout compte fait, je veux remercier tous mes collègues de cet exceptionnel laboratoire de robotique, qui ont contribué d’une manière ou d’une autre, à ma formation, peut-être sans s’en rendre compte.

D’une façon personnelle, je veux remercier mes amis qui n’étaient pas liés au projet mais qui m’ont encouragée toujours et m’ont offert du support moral : Amélie, Bruno, Céline, Just, Laura, Loredana, Marise, Martine, Matteo, Monica, Olivera, Pascal – la liste peut continuer sans aucun doute. Je remercie tous.

Je dédie ce mémoire à mes chers parents, qui, même de loin, ont été toujours à mes côtés avec leur soutien et leurs encouragements, à mon frère et à B1 pour leur soutien moral et affectif.

# Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	viii
Liste des symboles	x
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Manipulateurs . . . . .	1
1.2 Singularités des manipulateurs . . . . .	6
1.3 Objectif de la thèse — Zones exemptes des singularités . . . . .	8
1.4 Structure du mémoire . . . . .	9
<b>2 Algorithme de détection des singularités dans un espace de travail donné</b>	<b>11</b>
2.1 Classification des singularités . . . . .	12
2.1.1 Singularités de type <i>I</i> . . . . .	12
2.1.2 Singularités de type <i>II</i> . . . . .	13
2.2 Présentation de l'algorithme . . . . .	14
2.2.1 Algorithme pour un manipulateur parallèle à 6 ddl . . . . .	15
2.2.2 Algorithme pour les manipulateurs parallèles à 3 ddl . . . . .	18
2.2.3 Algorithme avec une coordonnée constante . . . . .	23

2.3	Validation de l'algorithme . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Application pour un manipulateur plan</b>	<b>27</b>
3.1	Les manipulateurs plans parallèles à 3 ddl . . . . .	28
3.2	Expression analytique des lieux de singularités . . . . .	29
3.3	Mise en oeuvre de l'algorithme . . . . .	32
3.3.1	Mise en oeuvre pour une orientation constante . . . . .	37
3.4	Validation de l'algorithme - Exemples . . . . .	40
3.4.1	Exemple 1 - Manipulateur plan simplifié . . . . .	40
3.4.2	Exemple 2 - Manipulateur plan général . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Application pour un manipulateur sphérique</b>	<b>49</b>
4.1	Les manipulateurs parallèles sphériques . . . . .	50
4.2	Calcul des jacobiniennes sous forme invariante . . . . .	51
4.3	Expression analytique des lieux de singularités . . . . .	53
4.3.1	Les angles d'Euler . . . . .	53
4.3.2	Les angles Tilt & Torsion . . . . .	55
4.3.3	Détermination des lieux de singularités . . . . .	57
4.3.3.1	Détermination des lieux de singularités avec les angles d'Euler . . . . .	58
4.3.3.2	Détermination des lieux de singularités avec les angles T&T . . . . .	59
4.4	Mise en oeuvre de l'algorithme . . . . .	60
4.4.1	Mise en oeuvre de l'algorithme — angles d'Euler . . . . .	60
4.4.2	Mise en oeuvre de l'algorithme — angles T&T . . . . .	64
4.4.3	Mise en oeuvre de l'algorithme pour une torsion constante . . . . .	69
4.5	Validation de l'algorithme — Exemples . . . . .	70
4.5.1	Exemple 1 . . . . .	71
4.5.2	Exemple 2 . . . . .	73
4.5.3	Exemple 3 . . . . .	76
4.6	Validation de l'algorithme pour une torsion constante — Exemples . . . . .	78
	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>Schéma logique de l'algorithme pour les manipulateurs parallèles à 3 ddl</b>	<b>88</b>

<b>B</b>	<b>Coefficients <math>N_j</math> et <math>E_i</math> pour les lieux de singularités</b>	<b>93</b>
	( $j = 1 \dots 25$ et $i = 1 \dots 6$ )	
B.1	Les coefficients $N_j, j = 1 \dots 25$ . . . . .	94
B.2	Les coefficients $E_i, i = 1 \dots 6$ . . . . .	97
<b>C</b>	<b>Programmes pour la détection de singularités dans une hyper-boîte,</b>	
	<b><math>\mathcal{H}</math>, et dans une section, <math>\mathcal{D}</math>, de l'espace de travail</b>	<b>101</b>
C.1	Programme final pour la détection de singularités dans une hyper-boîte $\mathcal{H}$	102
C.2	Programme final pour la détection de singularités dans un rectangle $\mathcal{D}$	110
<b>D</b>	<b>Les termes de la matrice jacobienne <math>\mathbf{J}</math> obtenus avec les angles d'Euler</b>	
	<b>et les angles <i>Tilt&amp;Torsion</i></b>	<b>114</b>
D.1	Les termes $j_{ik}, i, k = 1, 2, 3$ de la jacobienne $\mathbf{J}$ , en utilisant les angles	
	d'Euler . . . . .	115
D.2	Les termes $j_{ik}, i, k = 1, 2, 3$ de la jacobienne $\mathbf{J}$ , en utilisant les angles	
	<i>Tilt&amp;Torsion</i> . . . . .	116

# Liste des tableaux

3.1	Degrés des variables dans $\Delta_P = \Delta_P(x, y, \phi)$ . . . . .	33
3.2	Degrés des variables dans $\Delta_P = \Delta_P(x, y, T)$ . . . . .	33
3.3	Degrés des variables dans $\Delta_P = \Delta_P(\alpha, \beta, \gamma)$ . . . . .	34
3.4	Degrés des variables dans les fonctions $P_\alpha, P_\beta$ et $P_\gamma$ . . . . .	35
3.5	Degrés des variables dans $\Delta_P = \Delta_P(x, y)$ . . . . .	38
3.6	Degrés des variables dans $\Delta_P = \Delta_P(\alpha, \beta)$ . . . . .	38
3.7	Degrés des variables dans les fonctions $P_\alpha$ et $P_\beta$ . . . . .	39
3.8	Paramètres géométriques du manipulateur plan simplifié. . . . .	41
3.9	Paramètres géométriques du manipulateur plan général. . . . .	44
4.1	Degrés des variables dans $\det(\mathbf{J}_E) = \Delta_E(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . . . . .	60
4.2	Degrés des variables dans $\Delta_E = \Delta_E(T_1, T_2, T_3)$ . . . . .	61
4.3	Degrés des variables dans $\Delta_E = \Delta_E(\alpha, \beta, \gamma)$ . . . . .	62
4.4	Degrés des variables pour les fonctions $G_\alpha, G_\beta$ et $G_\gamma$ . . . . .	63
4.5	Degrés des variables dans $G_\alpha$ et $G_\beta$ , après l'élimination de $\sin \gamma$ . . . . .	64
4.6	Degrés des variables dans $\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(\phi_1, \phi_2, \sigma)$ . . . . .	64
4.7	Degrés des variables dans $\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(T_1, T_2, T_3)$ . . . . .	65
4.8	Degrés des variables dans $\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(\alpha, \beta, \gamma)$ . . . . .	65
4.9	Degrés des variables dans les fonctions $H_\alpha, H_\beta$ et $H_\gamma$ . . . . .	66
4.10	Degrés des variables dans $H_\alpha$ et $H_\beta$ après l'élimination de $\sin \gamma$ . . . . .	67
4.11	Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple. . . . .	68
4.12	Limites de l'espace de travail du manipulateur sphérique. . . . .	68
4.13	Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple 1. . . . .	71

4.14 Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple 2. . .	73
4.15 Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple 3. . .	76
4.16 Limites de l'espace de travail du manipulateur sphérique — torsion constante. . . . .	78

# Liste des figures

1.1	Robot PUMA 500. . . . .	2
1.2	Photo d'origine de la plate-forme de Gough. . . . .	3
1.3	Photo du simulateur de vol (reproduit avec la permission de CAE Électronique Ltée). . . . .	4
2.1	Manipulateur parallèle général à 6 ddl. . . . .	16
2.2	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_0^{3D}$ . . . . .	20
2.3	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_\alpha^{3D}$ . . . . .	20
2.4	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_\beta^{3D}$ . . . . .	21
2.5	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_\gamma^{3D}$ . . . . .	21
2.6	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{3D}$ . . . . .	22
2.7	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{3D}$ . . . . .	22
2.8	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^{3D}$ . . . . .	23
2.9	Représentation graphique du système $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{3D}$ . . . . .	23
2.10	Représentation graphique des systèmes $\mathcal{S}_0^{2D}$ et $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{2D}$ . . . . .	24
2.11	Représentation graphique des systèmes $\mathcal{S}_\alpha^{2D}$ et $\mathcal{S}_\beta^{2D}$ . . . . .	25
3.1	Manipulateur parallèle plan à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. . . . .	28
3.2	Manipulateur parallèle plan à 3 ddl - notation vectorielle. . . . .	30
3.3	Les coniques non dégénérées . . . . .	32
3.4	Manipulateur parallèle plan simplifié. . . . .	40
3.5	Surface des singularités pour le manipulateur plan simplifié. . . . .	41
3.6	Manipulateur simplifié - discrétisation 3D. . . . .	42
3.7	Courbe des singularités pour le manipulateur plan simplifié, $\phi = \phi_{max}$ . . . . .	42

3.8	Manipulateur simplifié - discrétisation 2D pour $\phi = \phi_{max}$ . . . . .	43
3.9	Surface des singularités pour le manipulateur plan général. . . . .	44
3.10	Manipulateur général – discrétisation 3D. . . . .	45
3.11	Courbe des singularités pour le manipulateur plan général, $\phi = \phi_{max}$ . . . . .	46
3.12	Manipulateur général – discrétisation 2D pour $\phi = \phi_{max}$ (1 <sup>re</sup> partie). . . . .	46
3.12	Manipulateur général – discrétisation 2D pour $\phi = \phi_{max}$ (2 <sup>e</sup> partie). . . . .	47
3.12	Manipulateur général – discrétisation 2D pour $\phi = \phi_{max}$ (3 <sup>e</sup> partie). . . . .	48
4.1	Manipulateur parallèle sphérique à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques — représentation schématique. . . . .	50
4.2	Manipulateur sphérique — notation vectorielle. . . . .	52
4.3	La convention <i>ZYZ</i> pour les angles d'Euler : a) précession et nutation, b) spin. . . . .	54
4.4	Les deux rotations successives pour les angles Tilt & Torsion : a) tilt, b) torsion. . . . .	56
4.5	Le manipulateur sphérique à 3 ddl dans la configuration initiale. . . . .	58
4.6	Méthode graphique — exemple. . . . .	69
4.7	Surface des singularités pour le manipulateur sphérique — exemple 1. . . . .	71
4.8	Manipulateur sphérique — discrétisation 3D — exemple 1. . . . .	72
4.9	Surface des singularités pour le manipulateur sphérique — exemple 2. . . . .	73
4.10	Manipulateur sphérique — discrétisation 3D — exemple 2. . . . .	75
4.11	Surface des singularités pour le manipulateur sphérique — exemple 3. . . . .	76
4.12	Manipulateur sphérique — discrétisation 3D — exemple 3. . . . .	77
4.13	Manipulateur sphérique — courbes des singularités pour $\sigma = 0$ . . . . .	78
4.14	Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour $\sigma = 0$ (1 <sup>re</sup> partie). . . . .	79
4.14	Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour $\sigma = 0$ (2 <sup>e</sup> partie). . . . .	80
4.15	Manipulateur sphérique — courbes des singularités pour $\sigma = \frac{\pi}{3}$ . . . . .	81
4.16	Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour $\sigma = \frac{\pi}{3}$ (1 <sup>re</sup> partie). . . . .	81
4.16	Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour $\sigma = \frac{\pi}{3}$ (2 <sup>e</sup> partie). . . . .	82
A.1	Schéma logique pour la détection des singularités — 1 <sup>re</sup> partie. . . . .	89
A.1	Schéma logique pour la détection des singularités — 2 <sup>e</sup> partie. . . . .	90
A.1	Schéma logique pour la détection des singularités — 3 <sup>e</sup> partie. . . . .	91
A.1	Schéma logique pour la détection des singularités — 4 <sup>e</sup> partie. . . . .	92

# Liste des symboles

$\mathbf{J}$	Matrice jacobienne
$\Delta, \det \mathbf{J}$	Déterminant de la jacobienne
$j_{ik}$	Éléments de la matrice jacobienne
PGD	Problème géométrique direct
PGI	Problème géométrique inverse
$\mathcal{H}$	L'hyper boîte de l'espace de travail
$\mathcal{H}_i$	$i$ -ième partie de l'hyper boîte de l'espace de travail
$\mathcal{D}$	Section de l'hyper boîte de l'espace de travail
$\theta$	Vecteur des coordonnées articulaires
$\mathbf{c}$	Vecteur des coordonnées cartésiennes
$f$	Déterminant de la jacobienne — fonction finale
$\Delta_{6D}$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur à 6 ddl
$\mathcal{S}^{6D}$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur à 6 ddl
$\Delta_{3D}$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur à 3 ddl
$\mathcal{S}^{3D}$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur à 3 ddl
$\Delta_{2D}$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur à 2 ddl
$\mathcal{S}^{2D}$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur à 2 ddl

$\Delta_P, \det \mathbf{J}_P$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur plan à 3 ddl
$\Delta$	Discriminant de la quadratique
$\mathcal{H}^P$	L'hyper boîte de l'espace de travail pour un manipulateur plan
$\mathbf{g}$	Vecteur de la géométrie de manipulateur
$\mathbf{l}$	Vecteur des limites de l'espace de travail
$\mathbf{l}_{Mm}$	Vecteur des limites moyennes de l'espace de travail
$p$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur plan — fonction finale
$\mathcal{S}^P$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur plan
$\mathcal{S}^{oc}$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur plan, pour une orientation constante
$\mathcal{D}^{oc}$	Section de l'espace de travail pour un manipulateur plan, pour une orientation constante
$\Delta_E, \det \mathbf{J}_E$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur manipulateur sphérique, en utilisant la paramétrisation : angles d'Euler
$g$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur sphérique — fonction finale (angles d'Euler)
$\mathcal{S}^E$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur sphérique, en utilisant la paramétrisation : angles d'Euler
$\Delta_{TT}, \det \mathbf{J}_{TT}$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur manipulateur sphérique, en utilisant la paramétrisation : angles Tilt&Torsion
$h$	Déterminant de la jacobienne pour un manipulateur sphérique — fonction finale (T&T)
$\mathcal{S}^{TT}$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur sphérique (T&T)
$\mathcal{H}^{TT}$	L'hyper boîte de l'espace de travail pour un manipulateur sphérique (T&T)
$\mathcal{Z}_i$	Zones approximatives qui bornent les intersections (solutions) — méthode demigraphique
$\mathbf{s}_i$	Solutions exactes obtenues par la méthode demigraphique
$\mathcal{S}^{tc}$	Système qui donne les extrémums pour un manipulateur sphérique, pour une torsion constante (T&T)
$\mathcal{D}^{tc}$	L'hyper boîte de l'espace de travail pour un manipulateur sphérique, pour une torsion constante (T&T)

# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre les manipulateurs sériels, parallèles et hybrides sont introduits et on expose leurs avantages et désavantages. On décrit brièvement les configurations singulières et leur importance. On passe en revue les différents travaux d'autres chercheurs sur les singularités des manipulateurs parallèles. À la fin de ce chapitre, on présente le plan de ce mémoire.

### 1.1 Manipulateurs

La majorité des manipulateurs existants sont des machines marquées d'un caractère anthropomorphe. Un robot est une machine destinée à reproduire certaines actions ou tâches habituellement effectuées par les humains. Le mot *robot* est apparu pour la

première fois, en 1920, dans une pièce de théâtre écrite par l’auteur tchèque Karel Capek. En tchèque, *robota* veut dire *travail forcé*.

Une définition du mot manipulateur donnée par la norme ISO 8373 intitulée «Robots manipulateurs industriels - Vocabulaire» (1994) s’énonce comme suit : *Un manipulateur est une machine, un mécanisme constitué normalement d’une série de segments qui sont reliés par une articulation assurant une rotation ou une translation relative entre segments, dont le but est de prendre et déplacer des objets (pièces ou outils) avec plusieurs degrés de liberté. Il peut être commandé par un opérateur, une unité de commande électronique ou un système logique (dispositif à cames, relais, câbles, etc.).*

Une définition du mot robot donnée par le R.I.A (Robot Institute of America) se lit : *“Un robot est un manipulateur multifonctionnel reprogrammable, conçu pour déplacer par des mouvements variables programmés, des pièces, des outils ou des instruments spécialisés, de manière à exécuter des tâches”.*

La plupart des robots industriels actuels sont de type sériel. La structure mobile d’un manipulateur sériel est une chaîne ouverte, formée d’une succession de segments, reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté. Chaque articulation est commandée par un moteur qui est placé dans l’articulation, ou sur un des segments précédents (dans ce cas on a besoin d’un mécanisme qui assure la transmission entre l’actionneur et l’articulation considérée). Un robot sériel très répandu dans l’industrie pour effectuer des tâches répétitives, comme l’assemblage, la soudure, le stockage, l’inspection, etc., est le robot PUMA (voir figure 1.1).



FIG. 1.1 – Robot PUMA 500.

Pendant l'ascension et le développement des robots sériels, l'attention des ingénieurs a été attirée par des manipulateurs parallèles, comme une alternative aux structures sérielles.

Une définition des manipulateurs parallèles donnée par Merlet [1] est : *Un robot parallèle est un mécanisme à chaîne cinématique fermée, constitué d'un organe terminal à  $n$  degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par des chaînes cinématiques indépendantes*. Chacune de ces chaînes compte deux segments articulés, l'articulation entre eux étant à un seul degré de liberté. La motorisation s'effectue par  $n$  actionneurs simples, un pour chaque chaîne.

Un des exemples les plus connus est la *plate-forme Gough-Stewart*, un manipulateur parallèle à 6 ddl avec des actionneurs prismatiques (voir figure 2.1). Ce mécanisme a été conçu par un ingénieur anglais, Gough, en 1947, pour tester des pneus à l'aide d'une plate-forme mobile (voir figure 1.2).

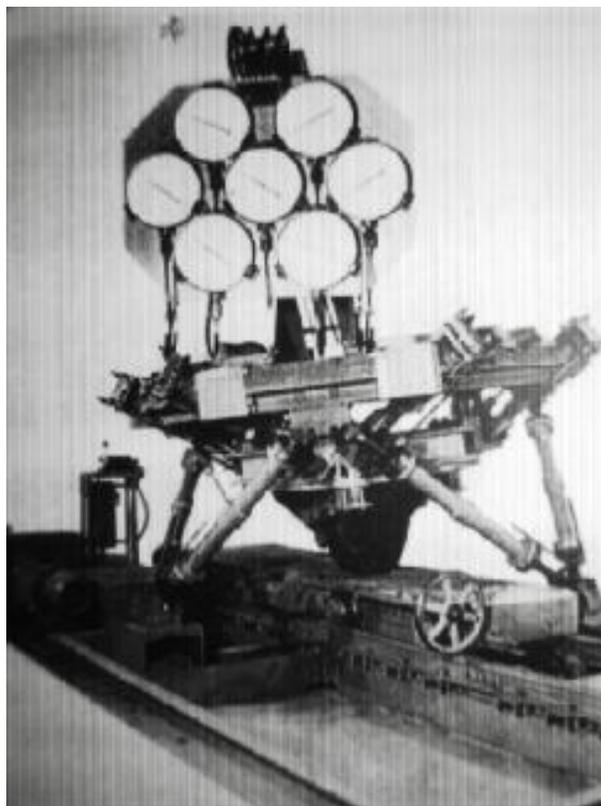


FIG. 1.2 – Photo d'origine de la plate-forme de Gough.

Quelques années plus tard (1965), un autre ingénieur anglais, Stewart, a proposé une architecture semblable, comme plate-forme de génération de mouvements pour un simulateur de vol. La grande majorité des simulateurs de vol modernes utilisent la plate-forme de Gough-Stewart pour la génération de mouvements (voir figure 1.3).



FIG. 1.3 – Photo du simulateur de vol (reproduit avec la permission de CAE Électronique Ltée).

Les avantages des robots parallèles sont [2] :

- capacité de charge élevée ;
- possibilité de mouvements à haute dynamique (accélérations élevées) ;
- rigidité mécanique élevée ;
- faible masse mobile ;
- fréquence propre élevée, donc peu d’erreur de répétabilité due à une oscillation incontrôlée de la structure mobile,
- possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe ou très proche de celle-ci ; cette particularité a les conséquences positives suivantes :
  1. grand choix de moteurs et de réducteurs par le fait que leur masse joue peu de rôle dans l’inertie du manipulateur,
  2. simplification importante des problèmes de liaisons entre les moteurs, les capteurs et le contrôleur (câblage plus simple et plus fiable),

3. facilite le refroidissement des actionneurs, donc diminution des problèmes de précision dus aux dilatations et à une puissance potentielle élevée,
  4. facilite l'isolation des moteurs de l'espace de travail pour des activités en atmosphère propre ou avec risque de déflagration ou encore pour les applications nécessitant des lavages à grande eau,
- facilité d'intégration des capteurs ;
  - construction mécanique modulaire, simplicité de fabrication et possibilité de série par la présence de plusieurs composants identiques sur un robot ;
  - effet limité des tolérances de fabrication sur la précision ; cette propriété fait des robots parallèles de bons candidats pour la micro-manipulation.

Par rapport aux robots sériels, les inconvénients des robots parallèles peuvent être résumés de la façon suivante :

- volume de travail limité,
- modèles géométriques parfois difficiles à déterminer,
- pas de trajectoire *naturelle* facilitant des opérations telles que l'insertion,
- *présence de singularités qui conduisent à une perte de contrôle de la structure mobile*, voire à une détérioration de la mécanique,
- couplage fortement variable entre les différentes chaînes cinématiques ; cette particularité peut compliquer le réglage ; le surdimensionnement des actionneurs est une solution pour contourner cette difficulté.

En reliant tous les atouts des manipulateurs sériels et parallèles et en minimisant leurs défauts, un nouveau type de manipulateur a été développé, le manipulateur hybride.

Les manipulateurs hybrides consistent en une structure sérielle, dans laquelle on intègre une ou plusieurs boucles fermées. En fonction des tâches désirées, avec une structure hybride, on peut trouver un "équilibre" entre les avantages et les désavantages des deux structures principales : sérielles et parallèles. Par exemple, une structure sérielle est caractérisée par une rigidité faible et d'un grand espace de travail. En ajoutant une ou plusieurs structures parallèles, la rigidité du système augmente et même si l'espace de travail diminue, il reste assez grand et, dans certains cas, comparable à celui d'un manipulateur sériel.

Dans la suite de ce mémoire on étudie seulement les *manipulateurs parallèles*.

## 1.2 Singularités des manipulateurs

D'après Zlatanov, [3, 4], une configuration d'un manipulateur est *régulière*, si deux conditions sont satisfaites :

1. les vitesses des actionneurs (vélocités d'entrée), déterminent toutes les vélocités du mécanisme, y compris les vélocités de la plate-forme ;
2. les vitesses contrôlées de la plate-forme (vélocités de sortie) déterminent toutes les vélocités du mécanisme, y compris les vélocités des actionneurs.

Autrement, la configuration est *singulière*.

Une classification de singularités a été faite par Gosselin et Angeles en 1990 [5]. Celle-ci a été ultérieurement détaillée par Zlatanov et al [3, 6]. Dans ce mémoire, on étudie seulement les singularités de type *II* [5] ou RO [3, 6], qui peuvent se produire à l'intérieur de l'espace atteignable. Ce sont des configurations où, même si les actionneurs sont bloqués, l'effecteur peut subir un mouvement infinitésimal.

Ces configurations singulières sont associées à des postures particulières de l'organe terminal où la rigidité naturelle des robots parallèles subit une grande détérioration [1]. Il est très important d'analyser les singularités, puisque la rigidité du système s'annule localement et le système devient incontrôlable.

L'analyse des configurations singulières utilise des outils mathématiques différents. On peut les diviser en deux groupes : (i) les méthodes géométriques telles que la théorie des visseurs et la géométrie de Grassmann ; (ii) les méthodes analytiques.

Pour trouver les conditions géométriques qui conduisent à des configurations singulières pour les manipulateurs parallèles spatiaux, Merlet a utilisé une approche géométrique, la géométrie de Grassmann [7]. Quand le nombre de degrés de liberté du manipulateur augmente, les expressions analytiques pour les lieux de singularités deviennent très complexes. Pour cette raison, d'autres auteurs, [3, 4, 6], ont proposé des méthodes basées sur la théorie des visseurs, qui peuvent décrire les lieux de singularités, sans avoir besoin d'obtenir des expressions analytiques.

Plusieurs chercheurs ont étudié les configurations singulières en analysant l'expression du déterminant de la jacobienne. En utilisant la méthode du déterminant, Sefrioui et Gosselin ont étudié les configurations singulières pour les manipulateurs plans à 3 ddl [8], et aussi pour les manipulateurs parallèles sphériques avec actionneurs prismatiques à 3 ddl [9]. Ils ont obtenu les expressions analytiques pour les lieux de singularités et aussi la représentation graphique de ceux-ci. Dans [10], Sefrioui a démontré que l'étude faite dans le cas du manipulateur sphérique avec actionneurs prismatiques à 3 ddl, peut s'appliquer au cas du manipulateur parallèle spatial découplé à 6 ddl. Le problème pour le manipulateur spatial général à 6 ddl n'a pas pu être réalisé par la méthode du déterminant.

En utilisant une méthode qui consiste à décomposer le déterminant par les cofacteurs de la première ligne, Mayer St-Onge, [11, 12], a réussi à obtenir l'expression analytique du déterminant de la matrice jacobienne, pour les manipulateurs spatiaux généraux à 6 ddl. De plus, il a obtenu une représentation graphique des lieux de singularités dans l'espace cartésien afin de les superposer graphiquement à l'espace de travail. La méthode utilisée consiste en un développement cascadié du déterminant. L'avantage d'utiliser cette méthode est que le développement du déterminant est divisé en plusieurs étapes intermédiaires où apparaissent des simplifications importantes.

On sait que, en utilisant la méthode du déterminant, les lieux de singularités pour un mécanisme parallèle sont donnés par les racines de  $\det(\mathbf{J}) = 0$ . En augmentant le nombre de degrés de liberté du mécanisme, l'expression analytique du déterminant devient plus complexe.

## 1.3 Objectif de la thèse — Zones exemptes des singularités

L'objectif de ce travail est de permettre la détection de régions exemptes de singularités dans les espaces de travail des mécanismes parallèles plans et sphériques à 3 degrés de liberté.

Une *zone exempte de singularités*, est une région de l'espace de travail où il n'y a pas de pose de l'effecteur qui correspond à une configuration singulière.

Il est très difficile, et souvent très dangereux, de manipuler un mécanisme dans une zone de singularités ou dans son voisinage. On perd le contrôle du mécanisme, les mouvements de celui-ci (surtout de l'effecteur) peuvent devenir imprévisibles, ce qui peut mettre en danger le matériel et les humains. Donc, il est important d'éviter les singularités et en pratique on préfère opérer dans des zones sûres, où il n'y a aucun risque de perte de stabilité. Ainsi, il est normal de rechercher des régions de l'espace de travail sans singularités.

En outre, une des caractéristiques les plus importantes pour n'importe quel manipulateur, est la présence ou l'absence des singularités dans l'espace de travail recommandé. Par conséquent, il est très utile d'avoir une méthode pour la détection de poses singulières dans un espace de travail donné.

La détermination exacte de lieux de singularités peut-être compliquée et difficile, surtout si le nombre de degrés de liberté est élevé. Ces calculs ne sont pas nécessaires si l'on recherche des espaces de travail libres de singularités, plutôt que la géométrie exacte des surfaces.

On n'a pas besoin de représenter les lieux de singularités, on a besoin seulement d'une réponse à la question : *Est-ce que l'espace de travail qu'on analyse représente une zone exempte des singularités ou non ?* La réponse est : *oui* ou *non*.

Dans ce mémoire on présente une méthode qui vérifie la présence des singularités dans une hyper-boîte  $\mathcal{H}$  de l'espace de travail d'un robot parallèle.

En 1997, Merlet [13], propose des algorithmes qui vérifient certaines caractéristiques pour les robots parallèles, en utilisant la méthode des extrémums. L’algorithme utilise la méthode des extrémums [13] avec des substitutions additionnelles. Au lieu de chercher les racines du déterminant de la jacobienne, c’est-à-dire les singularités elles-mêmes, on trouve les *extrémums* de cette fonction. Une singularité existe, si et seulement si, il existe des valeurs extrêmes avec des signes différents. Dans ce mémoire, l’algorithme utilisé a été appliqué et vérifié pour le manipulateur plan parallèle à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques ainsi que pour le manipulateur sphérique à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. La procédure vérifie d’une façon rapide l’existence de singularités dans n’importe quelle boîte définie dans l’espace de travail.

## 1.4 Structure du mémoire

Ce mémoire est divisé en cinq parties :

Le premier chapitre introduit les manipulateurs sériels et parallèles, on donne leurs définitions et on compare les avantages et désavantages existants. On passe en revue aussi les travaux faits par d’autres auteurs sur le sujet des singularités pour les manipulateurs parallèles. À la fin de ce chapitre, on présente le plan de ce mémoire.

Le chapitre 2 rappelle les définitions des singularités données par des différents auteurs, [3] et [5]. On présente (en général) l’algorithme pour la détection des singularités dans une hyper-boîte  $\mathcal{H}$ . En utilisant le même principe, pour valider l’algorithme de détection des singularités, on en développe un autre, qui nous donne la surface des singularités. Celle-ci est comparée avec la surface des singularités obtenue d’une façon analytique. On divise l’hyper-boîte,  $\mathcal{H}$ , dans plusieurs petites boîtes,  $\mathcal{H}_i$ . Pour chacune d’elles, on applique l’algorithme de détection.

Dans le troisième chapitre, on met en pratique l’algorithme pour un manipulateur parallèle plan à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. Brièvement, on introduit les problèmes géométriques direct (*PGD*) et inverse (*PGI*). On obtient l’expression de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  sous une forme invariante. On met en pratique l’algorithme pour une orientation constante. La validation de l’algorithme est faite pour deux géométries différentes, pour une orientation constante ou variable.

Dans le chapitre 4, on étudie un manipulateur sphérique à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. Les PGD et PGI sont présentés. Les matrices jacobiennes sont données sous une forme invariante, en utilisant deux paramétrisations de l'orientations : les angles d'Euler et les angles Tilt & Torsion [14]. Les deux paramétrisations sont présentées et analysées. On développe l'algorithme de détection des singularités pour un espace de travail donné, l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$ . Un algorithme similaire de détection des singularités est développé pour une torsion constante (dans ce cas, l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  devient un rectangle  $\mathcal{D}$ ). Pour vérifier l'algorithme précédent, on discrétise l'espace de travail  $\mathcal{H}$  (ou  $\mathcal{D}$ ), et on obtient des surfaces (ou des courbes) similaires à celles obtenues par des méthodes numériques.

Dans le dernier chapitre, on résume notre contribution pour la détection des singularités pour les manipulateurs parallèles, et on expose les perspectives de recherche ouvertes par ce travail.

## Chapitre 2

# Algorithme de détection des singularités dans un espace de travail donné

Dans ce chapitre on présente une classification générale des singularités pour les manipulateurs parallèles. On présente aussi l'algorithme de détection des singularités dans un espace de travail défini comme une hyper-boîte  $\mathcal{H}$ . L'algorithme proposé est basé sur la méthode des extrémums [13]. En utilisant le même principe, dans la dernière section du chapitre on présente un algorithme similaire qui a été développé pour la visualisation de la surface des singularités. Dans ce cas, l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  est divisée en  $n^3$  petites boîtes, c'est-à-dire on discrétise l'espace de travail. L'algorithme de détection des singularités est appliqué pour chacune des petites boîtes. À la fin on compare la surface des singularités obtenue avec la méthode de discrétisation et la surface obtenue d'une façon classique. Ceci nous permet de valider l'algorithme pour la détection des singularités, dans n'importe quel espace de travail donné.

## 2.1 Classification des singularités

Soit un manipulateur parallèle à  $n$  degrés de liberté. Soit  $\boldsymbol{\theta}$ , le vecteur des coordonnées articulaires et soit  $\mathbf{c}$ , le vecteur des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &= [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \\ \mathbf{c} &= [c_1, c_2, \dots, c_n]^T\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $\theta_i$  (l'entrée) représente une longueur dans le cas d'une articulation prismatique ou un angle dans le cas d'une articulation rotoïde, et  $c_i$  (la sortie) représente une coordonnée cartésienne quelconque (de position ou orientation).

Les deux vecteurs  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\mathbf{c}$  sont liés par un système d'équations algébriques non-linéaires (qui représente les contraintes géométriques) et qui est écrit dans l'équation suivante :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{c}) = \mathbf{0}\tag{2.2}$$

où  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul de dimension  $n$ . En dérivant l'équation (2.2) par rapport au temps on obtient :

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}.$$

où

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{c}} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\tag{2.3}$$

et  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{J}$  sont des matrices Jacobiennes, de dimension  $n \times n$ , qui dépendent de la configuration du manipulateur. Les composantes des vecteurs  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  et  $\dot{\mathbf{c}}$  sont les vitesses d'entrée et de sortie, respectivement.

Gosselin et Angeles [5] ont établi une classification des singularités des chaînes cinématiques fermées à partir de l'équation (2.3). Une classification encore plus détaillée a été établie par Zlatanov et al. [3].

### 2.1.1 Singularités de type *I*

Le premier type de singularité apparaît quand la matrice jacobienne  $\mathbf{K}$  est singulière, c'est-à-dire quand

$$\det(\mathbf{K}) = 0.\tag{2.4}$$

Ce type de singularité se produit à la limite de l'espace de travail. C'est le cas des vecteurs  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  non nuls et pour lesquels le vecteur des vitesses cartésiennes  $\dot{\mathbf{c}}$  peut être nul. Donc, l'effecteur est immobile même si les actionneurs ne sont pas bloqués totalement (ils peuvent subir des mouvements infinitésimaux). Pour ce type de singularité, on dit que l'effecteur perd un ou plusieurs ddl.

D'après Zlatanov et al. [3], l'homologue de ce type de singularité, est RI – *Redundant Input* (Entrée Redondante).

### 2.1.2 Singularités de type II

Le deuxième type de singularité apparaît quand la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est singulière, c'est-à-dire quand

$$\det(\mathbf{J}) = 0. \quad (2.5)$$

Ce type de singularité se produit à l'intérieur de l'espace atteignable. Il existe alors des vecteurs  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  nuls pour lesquels le vecteur des vitesses cartésiennes  $\dot{\mathbf{c}}$  peut-être non nul. Alors, l'effecteur peut subir des mouvements infinitésimaux, même si les actionneurs sont bloqués. Un (ou plusieurs) ddl est (sont) incontrôlable(s) et la rigidité du manipulateur est perdue. Les singularités de type II sont les plus importantes dans la conception et l'utilisation des manipulateurs parallèles. Elles sont connues aussi sous le nom de RO – *Redundant Output* (Sortie Redondante), conformément à la classification raffinée faite par Zlatanov et al. [3].

Dans une configuration singulière de type RI une entrée non-nulle,  $\dot{\boldsymbol{\theta}} \neq 0$ , peut produire une sortie nulle,  $\dot{\mathbf{c}} = 0$ , et pour différents vecteurs d'entrée on obtient la même sortie. Dans le cas de singularité RO, un vecteur de sortie non-nul peut exister même s'il n'y a aucune entrée.

Dans la conception de robots parallèles il est très important de détecter la présence de singularités dans l'espace de travail donné.

En général, les singularités de type II sont plus néfastes, comparées aux singularités de type I, parce que dans celles-ci on perd le contrôle du mécanisme. Les singularités

de type  $I$  ont été déjà étudiées par Gosselin et Angeles [15], les expressions analytiques pour le déterminant de la jacobienne, sont assez simples. Par contre, les expressions analytiques pour les singularités de type  $II$  sont très compliquées et parfois c'est très difficile d'obtenir l'expression analytique du déterminant de la jacobienne  $\mathbf{J}$ , noté par  $\Delta = \det(\mathbf{J})$ .

## 2.2 Présentation de l'algorithme

Pour la conception et l'utilisation des robots parallèles, il est très important de savoir s'il y a une singularité dans l'espace de travail désiré. L'objectif de la thèse est de réaliser un algorithme qui peut détecter les singularités d'un mécanisme parallèle dans une partie de l'espace de travail. Dans certains cas, les équations qui donnent les lieux de singularités sont très compliquées et difficiles à identifier (analytiquement ou graphiquement).

Pour résoudre cet inconvénient, on propose un sous-ensemble borné de l'espace de travail, plus précisément, l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$ .

$$\mathcal{H} = \{c_{imin} \leq c_i \leq c_{imax}, i = 1, \dots, n\},$$

où  $c_{imin}$  et  $c_{imax}$  sont des valeurs limite des variables qui caractérisent la pose de l'effecteur.

L'algorithme utilise la méthode des extrémums [13] avec des substitutions additionnelles. Au lieu de chercher les racines du déterminant de la jacobienne, c'est-à-dire les singularités elles-mêmes, on trouve les *extrémums* de cette fonction. Une singularité existe, si et seulement si, il existe des valeurs extrêmes avec des signes différents.

Pour vérifier si une fonction continue  $f$  ( $f = \det(\mathbf{J})$ ) peut-être égale à zéro, il suffit d'établir si elle change de signe. Par conséquent, il est suffisant de vérifier le signe des extrémums de  $f$ . Si une fonction,  $f$ , est définie pour toutes les valeurs de ses variables  $u_i, i = 1, \dots, n$ , les extrémums sont les minimums et les maximums locaux, donnés par les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Cependant, en présence de bornes sur les variables, il est possible que les valeurs extrêmes de la fonction s'obtiennent pour une valeur limite d'au moins une des variables. Donc, il est désirable de trouver une substitution qui exprime  $f$  en fonction de variables non bornées.

Pour un robot à  $n$  degrés de liberté, avec un espace de travail  $nD$ -dimensionnel,  $\mathcal{H}$ , (2.6) est un système non-linéaire avec  $n$  équations et  $n$  inconnues. Les solutions de ce système sont les minimums et les maximums locaux. Toutefois, un extrémum peut être obtenu pour une valeur limite d'une des variables  $u_i$ . Pour ne pas considérer les bornes des variables séparément, il est désirable de faire une substitution qui va exprimer  $f$  en fonction de variables illimitées. À cet effet on utilise la substitution trigonométrique proposée par Merlet [13]. Des substitutions additionnelles sont présentées d'une façon détaillée dans les chapitres 3 et 4.

### 2.2.1 Algorithme pour un manipulateur parallèle à 6 ddl

On considère le manipulateur parallèle général à 6 ddl, illustré à la figure 2.1. Il est constitué d'une plate-forme mobile  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , de 6 vérins linéaires de longueurs variables  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , et d'une base  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ . La patte  $i$  lie les points  $P_i$  et  $B_i$ . Elle est attachée à la base (point  $B_i$ ) avec une articulation de Cardan passive et à la plate-forme (point  $P_i$ ) avec une articulation sphérique. La position et l'orientation de la plate-forme sont contrôlées en variant les longueurs des vérins. La base et la plate-forme ont des formes géométriques quelconques. L'analyse des singularités et leurs représentation graphique pour les mécanismes parallèles à 6 ddl ont été étudiées par Mayer St-Onge [11, 12], en développant l'expression de  $\det(\mathbf{J})$ . Le déterminant de la Jacobienne est une fonction des 6 variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (la position),  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  (l'orientation), notée par  $\Delta_{6D} = \det(\mathbf{J}_{6D})$ . Toutes ces variables ont des contraintes imposées par :

$$\begin{aligned} x_{min} \leq x \leq x_{max}, \quad y_{min} \leq y \leq y_{max}, \quad z_{min} \leq z \leq z_{max}, \\ \phi_{1min} \leq \phi_1 \leq \phi_{1max}, \quad \phi_{2min} \leq \phi_2 \leq \phi_{2max}, \quad \phi_{3min} \leq \phi_3 \leq \phi_{3max}, \end{aligned}$$

qui définissent l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$ .

La position de la plate-forme  $(x, y, z)$  est exprimée à l'aide des nouvelles variables,

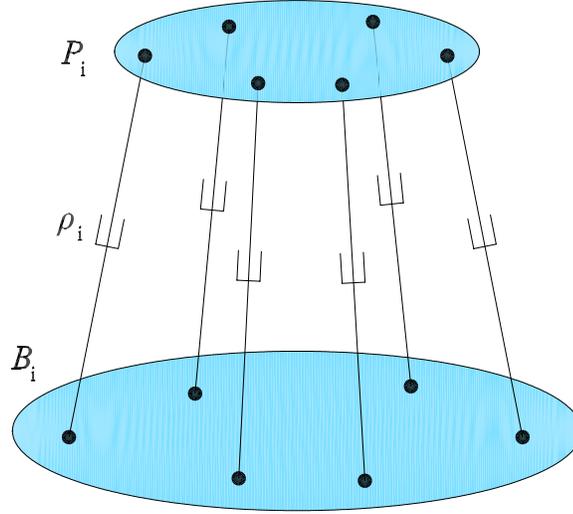


FIG. 2.1 – Manipulateur parallèle général à 6 ddl.

$\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , définies pour tout l'intervalle et données par les transformations suivants :

$$\begin{aligned} x &= x_{min} + \frac{1 + \sin \alpha}{2}(x_{max} - x_{min}) , \\ y &= y_{min} + \frac{1 + \sin \beta}{2}(y_{max} - y_{min}) , \\ z &= z_{min} + \frac{1 + \sin \gamma}{2}(z_{max} - z_{min}) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'orientation de la plate-forme  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , avant la transformation de variables bornées en variables non-bornées, exige une transformation préliminaire (pour simplifier les calculs ultérieurs). On introduit les variables  $T_i = \tan \frac{\phi_i}{2}$ , et on substitue :

$$\sin \phi_i = \frac{2T_i}{1 + T_i^2} \quad \text{et} \quad \cos \phi_i = \frac{1 - T_i^2}{1 + T_i^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Les nouvelles variables,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , sont bornées par :

$$T_{1min} \leq T_1 \leq T_{1max}, \quad T_{2min} \leq T_2 \leq T_{2max}, \quad T_{3min} \leq T_3 \leq T_{3max},$$

où

$$T_{imin} = \tan \frac{\phi_{imin}}{2}, \quad T_{imax} = \tan \frac{\phi_{imax}}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Une fois que les sinus et cosinus des angles sont substitués avec les tangentes des demi-angles, on peut faire la substitution pour introduire les variables illimitées  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  et  $\gamma^*$

au lieu de nos variables bornées.

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_{1min} + \frac{1 + \sin \alpha^*}{2} (T_{1max} - T_{1min}) , \\
T_2 &= T_{2min} + \frac{1 + \sin \beta^*}{2} (T_{2max} - T_{2min}) , \\
T_3 &= T_{3min} + \frac{1 + \sin \gamma^*}{2} (T_{3max} - T_{3min}) .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Le déterminant de la jacobienne  $\Delta_{6D}$  qui était en fonction de 6 variables bornées  $x, y, z, \theta, \phi, \psi$ , devient une fonction de 6 variables non-bornées  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ . En effet, on va considérer comme variables les sinus de ces angles :  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma, \sin \alpha^*, \sin \beta^*, \sin \gamma^*$ .

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{J}_{6D}) &= \Delta_{6D} = \Delta_{6D}(x, y, z, \theta, \phi, \psi) = \Delta_{6D}(x, y, z, T_1, T_2, T_3) = \\
&= \Delta_{6D}(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma, \sin \alpha^*, \sin \beta^*, \sin \gamma^*) = \\
&= f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) .
\end{aligned}$$

Dans les variables  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ ,  $\mathcal{H}$  devient tout l'espace 6-dimensionnel. Dans l'espace de sinus ( $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma, \sin \alpha^*, \sin \beta^*, \sin \gamma^*$ ),  $\mathcal{H}$  est un hyper-cube avec sommets  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ .

Le système (2.6), pour les extrémums du  $\Delta_{6D}$ , devient :

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_4} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_6} = 0. \tag{2.10}$$

Il est équivalent au système  $\mathcal{S}^{6D}$  :

$$\mathcal{S}^{6D} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = F_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} = F_\beta \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} = F_\gamma \cos \gamma = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha^*} = F_{\alpha^*} \cos \alpha^* = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \beta^*} = F_{\beta^*} \cos \beta^* = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma^*} = F_{\gamma^*} \cos \gamma^* = 0 \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Chaque équation du système  $\mathcal{S}^{6D}$  est factorisée en deux autres, donc, il est équivalent à  $2^6$  sous-systèmes :

$$\mathcal{S}^{6D} = \mathcal{S}_0^{6D} \cup \mathcal{S}_\alpha^{6D} \cup \dots \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma\alpha^*\beta^*\gamma^*}^{6D}. \quad (2.12)$$

Chacun des sous-systèmes donne les extrémums sauf quand les cosinus de toutes les variables  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$  sont constants et égaux à zéro.

Du point de vue géométrique, les sous-systèmes représentent soit l'intérieur de l'hyper-boîte (6-dimensionnel), soit une paire de hyper-faces (5-dimensionnelles), etc., et le dernier sous-système  $\mathcal{S}_0^{6D}$  donne les 64 sommets de  $\mathcal{H}$ .

Les solutions du système  $\mathcal{S}^{6D}$ , qui satisfont les contraintes imposées par les nouvelles variables, sont substituées dans la fonction initiale,  $\Delta_{6D}$ , et on calcule le signe de cette fonction. Une fois qu'un changement de signe est détecté, le programme s'arrête et il nous signale qu'il y a une singularité dans  $\mathcal{H}$ . Si pour tous les extrémums dans l'hyper-boîte, le signe de la fonction est le même, on conclut qu'il n'y a aucune singularité dans l'espace de travail imposé.

Une explication plus détaillée et plus visuelle est présentée pour le cas d'un manipulateur parallèle à 3 ddl, qui est analysé dans la section 2.2.2.

## 2.2.2 Algorithme pour les manipulateurs parallèles à 3 ddl

Dans cette thèse, l'algorithme a été mis en oeuvre et vérifié pour deux mécanismes parallèles à 3 ddl, le manipulateur plan parallèle et le manipulateur sphérique. Ceci est décrit dans les chapitres 3 et 4.

Pour vérifier l'existence des singularités dans l'hyper-boîte,  $\mathcal{H}$  on vérifie le changement du signe du déterminant de la jacobienne  $\det(\mathbf{J}_{3D})$ , noté par  $\Delta_{3D}$ .

Dans les deux cas étudiés, le déterminant de la jacobienne est une fonction de 3 variables limitées  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ( $x$ ,  $y$  et  $\phi$  pour le manipulateur plan et  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  où  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\sigma$  pour le manipulateur sphérique). Donc, les équations finales forment un système,  $\mathcal{S}^{3D}$ , de 3 équations avec 3 inconnues :

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0. \quad (2.13)$$

Les variables  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (les coordonnées cartésiennes de la plate-forme), peuvent être données par la position d'un point et/ou par l'orientation de la plate-forme. Si les  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des angles, avant de faire la substitution pour transformer les variables bornées ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ) en des variables non-bornées ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), il faut faire la substitution préliminaire, c'est-à-dire transformer les sinus et les cosinus en tangentes des demi-angles (voir 2.2.1). Finalement, on fait la substitution :

$$\begin{cases} u_1 = u_{1min} + \frac{1 + \sin \alpha}{2}(u_{1max} - u_{1min}) \\ u_2 = u_{2min} + \frac{1 + \sin \beta}{2}(u_{2max} - u_{2min}) \\ u_3 = u_{3min} + \frac{1 + \sin \gamma}{2}(u_{3max} - u_{3min}) \end{cases} \quad (2.14)$$

Après avoir fait ce changement,  $\Delta_{3D}$  devient une fonction de trois nouvelles variables illimitées  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (plus précisément, on travaille avec les sinus de ces variables),

$$\det(\mathbf{J}_{3D}) = \Delta_{3D} = \dots = \Delta_{3D}(u_1, u_2, u_3) = \Delta_{3D}(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour le système  $\mathcal{S}^{3D}$  on obtient :

$$\mathcal{S}^{3D} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = F_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} = F_\beta \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} = F_\gamma \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Ainsi, l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  devient un cube (de volume 8) centré dans l'espace tri-dimensionnel des  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  et  $\sin \gamma$  (voir figures 2.2—2.9).

Chacune des trois équations du système  $\mathcal{S}^{3D}$  est factorisée en deux autres. Ainsi, on obtient  $2^3 = 8$  sous-systèmes.

$$\mathcal{S}^{3D} = \mathcal{S}_0^{3D} \cup \mathcal{S}_\alpha^{3D} \cup \mathcal{S}_\beta^{3D} \cup \mathcal{S}_\gamma^{3D} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{3D} \cup \mathcal{S}_{\beta\gamma}^{3D} \cup \mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{3D} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{3D} \quad (2.16)$$

Elles représentent l'intérieur de l'hyper-boîte, les 6 faces, les 12 arêtes et les 8 sommets de l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$ .

Le premier système  $\mathcal{S}_0^{3D}$  représente les valeurs des extrémums sur les sommets de l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  (voir figure 2.2).

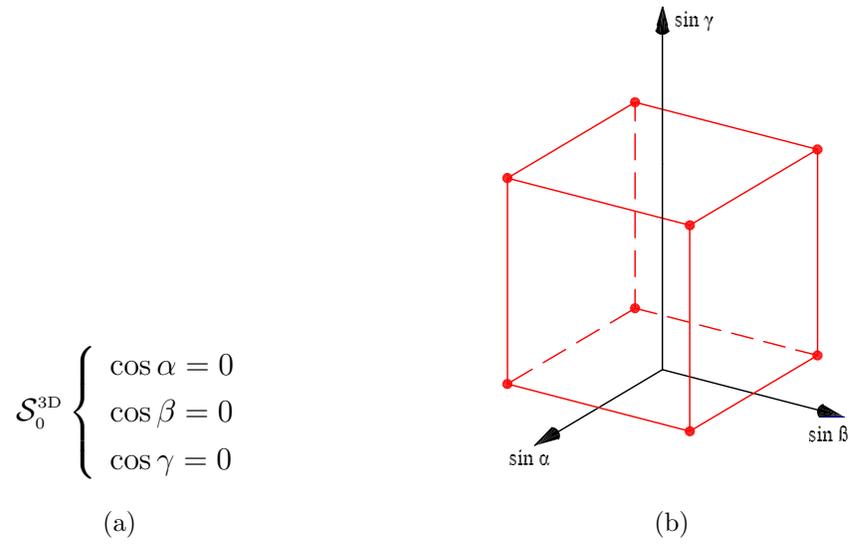


FIG. 2.2 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_0^{3D}$

Les sous-systèmes  $\mathcal{S}_\alpha^{3D}$ ,  $\mathcal{S}_\beta^{3D}$ ,  $\mathcal{S}_\gamma^{3D}$  sont pour les extrémums sur les arêtes (12) de l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  (voir figures 2.3, 2.4, 2.5).

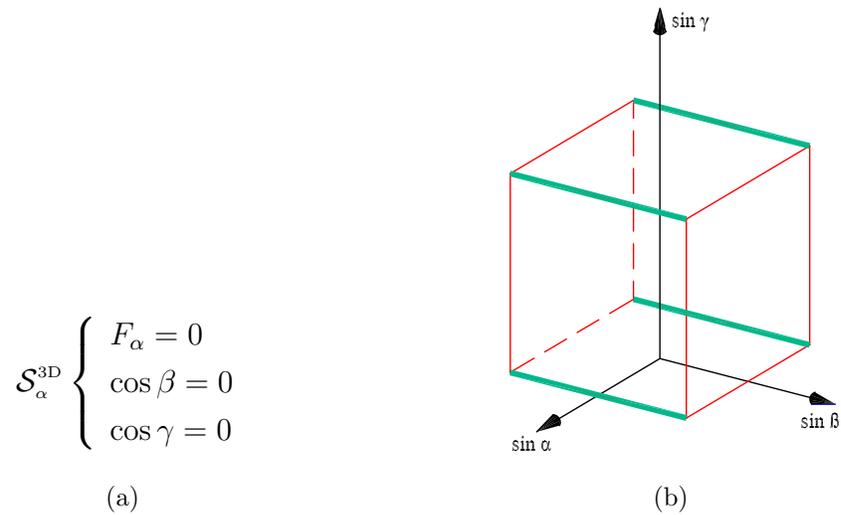
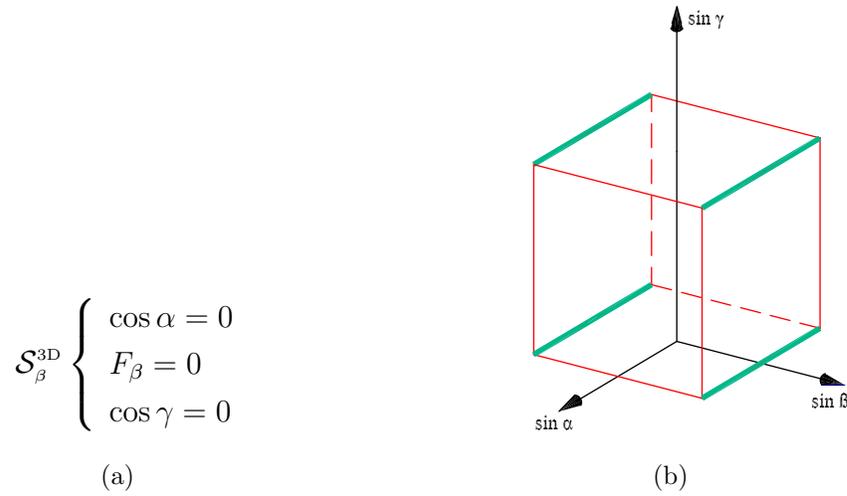
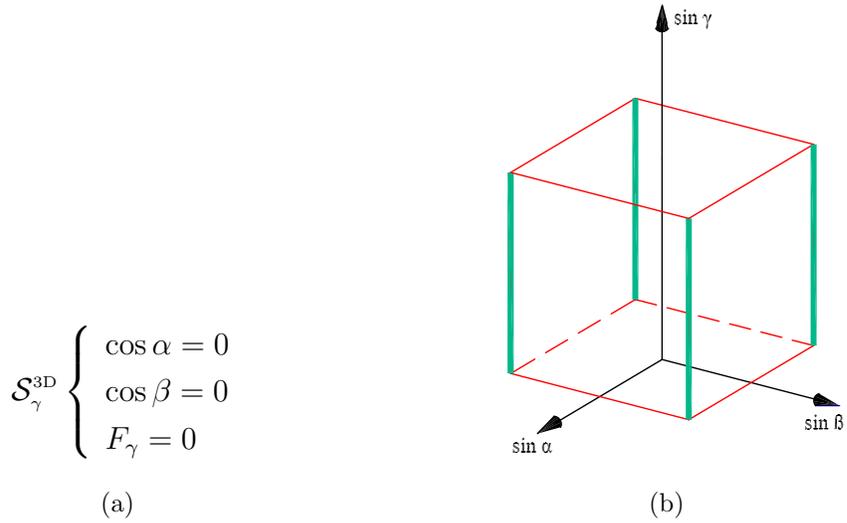


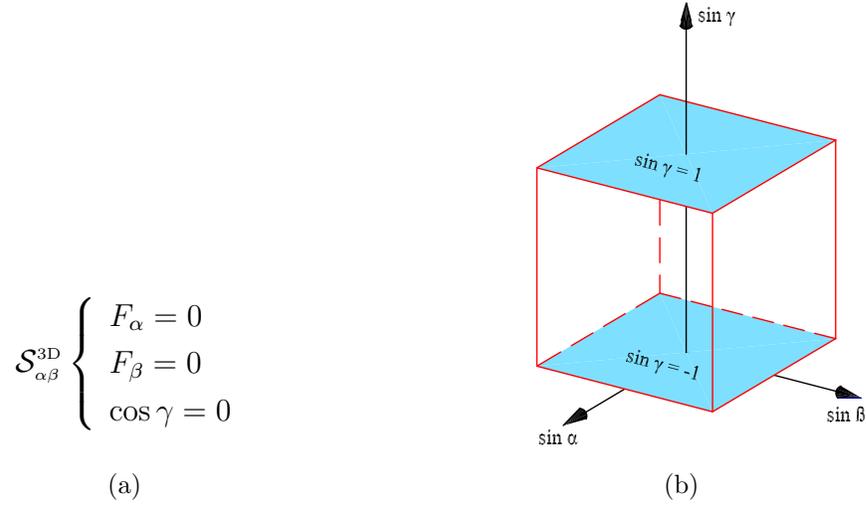
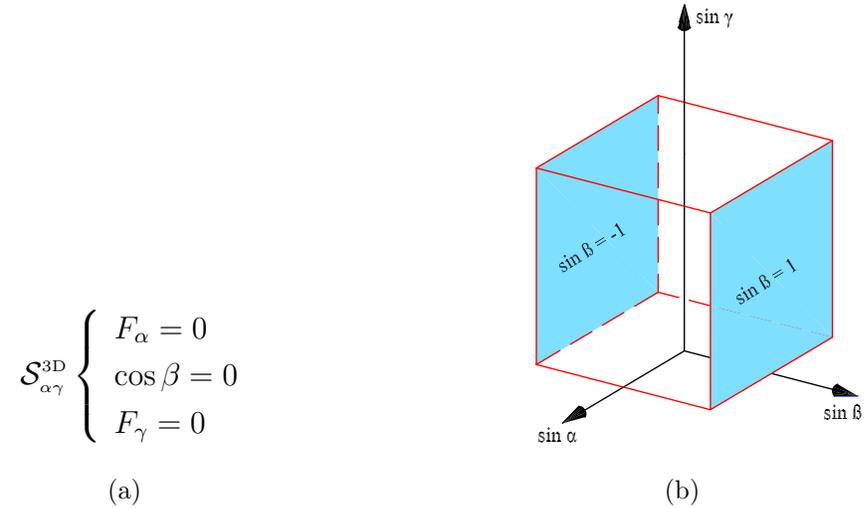
FIG. 2.3 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_\alpha^{3D}$

FIG. 2.4 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_\beta^{3D}$ FIG. 2.5 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_\gamma^{3D}$ 

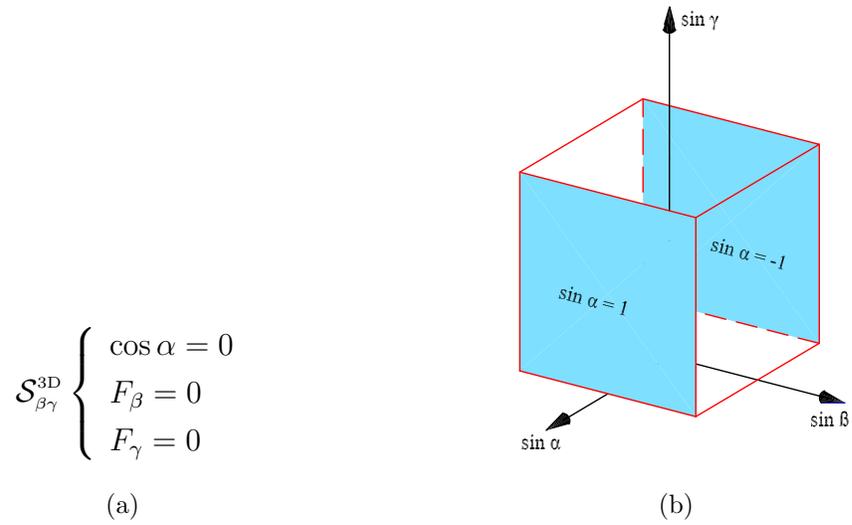
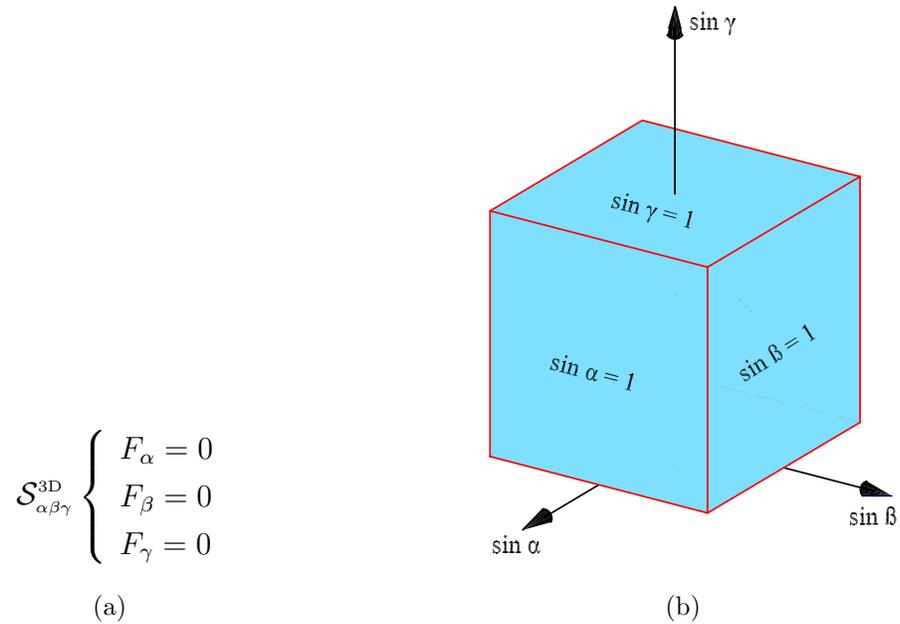
Les 3 sous-systèmes  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{3D}$ ,  $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{3D}$ ,  $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^{3D}$  donnent les extrêmes sur les faces (6) de l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  (voir figures 2.6, 2.7, 2.8).

Par exemple, le sous-système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{3D}$  (figure 2.6), détermine les extrêmes sur les 2 faces pour lesquelles  $\cos \gamma = 0$ , c'est-à-dire  $\sin \gamma = u_{3min} = -1$  et  $\sin \gamma = u_{3max} = 1$ .

Finalement, le dernier sous-système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{3D}$  définit les extrêmes dans l'intérieur de l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  (voir figure 2.9).

FIG. 2.6 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{3D}$ FIG. 2.7 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{3D}$ 

Si une singularité est détectée pour un sous-système, il est inutile de considérer les autres, autrement dit, une fois détectée une singularité n'importe où dans l'espace de travail, on n'a pas besoin d'explorer toute la boîte, on s'arrête. Donc on commence avec le sous-système le plus simple,  $\mathcal{S}_0^{3D}$ . Dans ce cas les solutions sont  $\sin \alpha = \pm 1$ ,  $\sin \beta = \pm 1$ ,  $\sin \gamma = \pm 1$ . On les substitue dans le  $\det(\mathbf{J})$  et on calcule le signe du  $\Delta_{3D}$ . Quand il y a une variation de signe, le programme s'interrompt, car il a détecté une singularité dans l'espace de travail donné. Sinon, il continue avec les autres systèmes. Si à la fin les signes de tous les extrémums sont les mêmes, l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  est sans singularités. Le schéma logique est illustré à l'annexe A.

FIG. 2.8 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^{3D}$ FIG. 2.9 – Représentation graphique du système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{3D}$ 

### 2.2.3 Algorithme avec une coordonnée constante

Si une des coordonnées cartésiennes (un angle qui caractérise l'orientation ou une des coordonnées qui nous donnent la position), est constante, le problème est réduit à la vérification de la présence de singularités dans un rectangle  $\mathcal{D}$ .

Dans ce cas, le système a 2 ddl et le déterminant suit les transformations suivantes :

$$\det(\mathbf{J}_{2D}) = \Delta_{2D} = \dots = \Delta_{2D}(u_1, u_2) = \Delta_{2D}(\sin \alpha, \sin \beta) = f(\alpha, \beta).$$

Le système  $\mathcal{S}^{3D}$  devient  $\mathcal{S}^{2D}$  donné par :

$$\mathcal{S}^{2D} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = F_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} = F_\beta \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

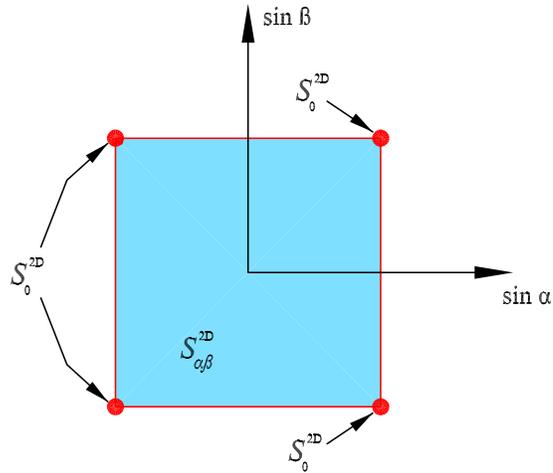
et il est équivalent à  $2^2 = 4$  sous-systèmes :

$$\mathcal{S}^{2D} = \mathcal{S}_0^{2D} \cup \mathcal{S}_\alpha^{2D} \cup \mathcal{S}_\beta^{2D} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{2D}. \quad (2.18)$$

Le système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{2D}$  pour les extrémums à l'intérieur du rectangle  $\mathcal{D}$ , les systèmes  $\mathcal{S}_\alpha^{2D}$  et  $\mathcal{S}_\beta^{2D}$  donnent les valeurs extrêmes sur les arêtes du rectangle et le dernier système,  $\mathcal{S}_0^{2D}$ , vérifie les sommets. La correspondance entre les sous-systèmes et l'espace de travail  $\mathcal{D}$  est illustrée aux figures 2.10 et 2.11.

$$\mathcal{S}_0^{2D} \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \beta = 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{2D} \begin{cases} F_\alpha = 0 \\ F_\beta = 0 \end{cases}$$

(a)

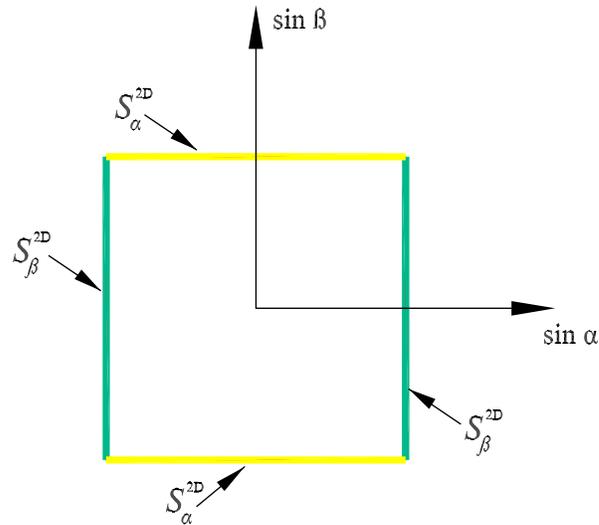


(b)

FIG. 2.10 – Représentation graphique des systèmes  $\mathcal{S}_0^{2D}$  et  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{2D}$

$$\mathcal{S}_\alpha^{2D} \begin{cases} F_\alpha = 0 \\ \cos \beta = 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}_\beta^{2D} \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ F_\beta = 0 \end{cases}$$

(a)



(b)

FIG. 2.11 – Représentation graphique des systèmes  $\mathcal{S}_\alpha^{2D}$  et  $\mathcal{S}_\beta^{2D}$ 

Pour détecter les singularités, on analyse le signe du déterminant de la jacobienne. On cherche les extrémums de la fonction, premièrement sur les sommets, après sur les arêtes et finalement (si nécessaire) à l'intérieur du rectangle  $\mathcal{D}$ . Après avoir calculé les extrémums pour le premier système, on les remplace dans la fonction initiale  $\Delta_{2D}$ , et on observe la variation du signe de la fonction. Aussitôt que le signe change, on s'arrête, c'est-à-dire on a trouvé (au moins) une singularité, sinon on continue avec les autres sous-systèmes. Si à la fin le signe reste le même, on conclut qu'il n'y a aucune singularité dans le rectangle donné, donc l'espace de travail analysé représente une zone exempte de singularités.

## 2.3 Validation de l'algorithme

Quand on analyse la présence de singularités pour une machine réelle, il est important d'être sûr que la méthode de détection des singularités fonctionne sans erreurs.

Un algorithme additionnel a été conçu pour valider, par une vérification visuelle, l'algorithme de détection quand la dimension de problème (le nombre de ddl) est trois ou moins.

Dans ce but, pour un robot à 3 ddl, on discrétise l'espace de travail, c'est-à-dire l'hyper-boîte  $\mathcal{H}$  est divisée en  $n^3$  petites boîtes  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, n^3$ . Pour chaque  $\mathcal{H}_i$  on met en pratique l'algorithme présenté dans la section 2.2. Si l'on trouve une singularité dans une des petites boîtes, on l'ajoute à l'image discretisée de la surface des singularités. La comparaison avec le graphique de la surface, obtenue par d'autres méthodes, nous permet de valider l'algorithme proposé.

Pour des géométries différentes, la procédure est décrite avec plus de détail dans les sections 3.4 et 4.5 et illustrée par les figures 3.9, 3.10 et 4.7, 4.8.

Pour valider l'algorithme dans un rectangle  $\mathcal{D}$ , on utilise la même idée que pour une hyper boîte 3-dimensionnelle. On divise l'espace de travail,  $\mathcal{D}$  en  $n^2$  petits rectangles  $\mathcal{D}_i$  et on met en pratique l'algorithme présenté dans la section 2.2 (modifié pour le cas particulier avec une variable  $u_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) pour chacun de ces petits rectangles. Si le programme trouve (au moins) une singularité pour un rectangle, il va l'ajouter au graphique. Une fois que "la courbe" (formée de petits rectangles) est tracée, il ne reste qu'à la comparer avec la courbe des singularités obtenue par des méthodes classiques (voir figures 3.11, 3.12 et 4.13, 4.14).

Si l'on analyse un robot à 4 ddl ou plus on peut utiliser la méthode de validation sur des sections de l'espace de travail. Par exemple, pour un manipulateur à 4 ddl, les paires d'hyper-faces correspondent à des boîtes tri-dimensionnelles.

# Chapitre 3

## Application pour un manipulateur plan

Dans ce chapitre on considère des manipulateurs plans à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. Les problèmes géométriques direct (PGD) et inverse (PGI) sont présentés. On développe l'algorithme de détection de singularités dans un espace de travail donné. En outre, on présente l'algorithme de vérification, en discrétisant tout l'espace de travail, qui valide en effet l'algorithme précédent. Le but de la deuxième procédure est d'obtenir la forme des surfaces (ou des courbes) des singularités et de les comparer avec les surfaces des singularités obtenues par d'autres méthodes, présentées dans la littérature.

### 3.1 Les manipulateurs plans parallèles à 3 ddl

Les manipulateurs plans parallèles à 3 ddl ont été étudiés en détail par différents auteurs [8, 10, 15, 16]. Le premier mécanisme pour lequel on a mis en oeuvre l'algorithme de détection de singularités est le manipulateur plan parallèle à 3 ddl avec actionneurs prismatiques, qui est illustré à la figure 3.1 Il possède une plate-forme mobile,  $P_1P_2P_3$ ,

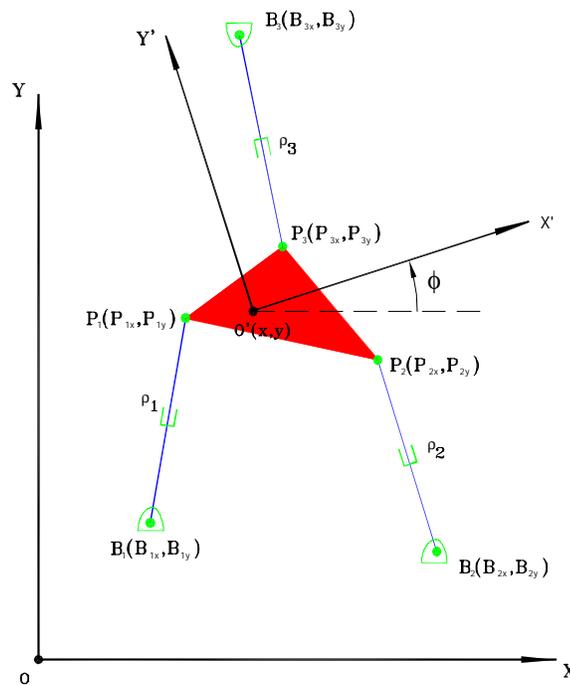


FIG. 3.1 – Manipulateur parallèle plan à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques.

et une base fixe,  $B_1B_2B_3$ . Les actionneurs linéaires de longueurs variables  $\rho_i$  lient les points  $P_i$  et  $B_i$ , où  $i = 1, 2, 3$ . Les pattes sont attachées à la base et à la plate-forme avec des articulations rotoïdes. La variation des longueurs  $\rho_i$  permet de positionner  $(x, y)$  et d'orienter ( $\phi$ ) la plate-forme dans le plan  $P_1P_2P_3$ .

Comme on l'a mentionné dans l'introduction de ce mémoire, pour les manipulateurs parallèles, il est difficile de résoudre le problème géométrique direct et de donner des solutions explicites. Pour le manipulateur analysé dans ce chapitre, on sait que le PGD peut admettre jusqu'à 6 solutions. Le problème consiste à déterminer les coordonnées cartésiennes de la plate-forme  $\mathbf{c}$  (dans le cas étudié  $\mathbf{c} = [x, y, \phi]$ , c'est-à-dire les coor-

données qui donnent la position  $(x, y)$  et l'orientation  $\phi$ ) en fonction des coordonnées articulaires  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  (les longueurs des vérins). Pour le manipulateur étudié, le PGD est donné par un système de trois équations non-linéaires avec trois inconnues.

Le problème géométrique inverse, PGI, consiste à déterminer les coordonnées articulaires,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , pour des coordonnées cartésiennes données (dans le cas analysé,  $x, y, \phi$ ). Le PGI est simple à résoudre. Si les liaisons actionnées sont toutes des liaisons prismatiques, le PGI admet une seule solution.

### 3.2 Expression analytique des lieux de singularités

Pour obtenir les expressions analytiques des lieux de singularités, d'abord, on doit obtenir les matrices Jacobiennes. À cet effet, on résoud le problème géométrique inverse, c'est-à-dire on exprime les longueurs des trois vérins  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  (les variables articulaires) en fonction des coordonnées cartésiennes de l'effecteur dans l'espace  $x, y$  et  $\phi$ . On définit un repère fixe lié à la base,  $OXY$ , et un repère mobile,  $O'X'Y'$ , lié à la plate-forme. Les coordonnées cartésiennes de la plate-forme mobile sont données par la position  $(x, y)$  de l'origine du repère mobile  $O'$  par rapport au point fixe  $O$  et par l'orientation  $\phi$  du repère mobile par rapport au repère fixe. Les coordonnées des points  $B_i$  dans le repère fixe sont  $(B_{ix}, B_{iy})$  et les coordonnées des points  $P_i$ , dans le repère mobile sont données par  $(P'_{ix}, P'_{iy})$ . Les vecteurs  $\mathbf{p}'_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont définis comme  $\mathbf{p}'_i = [ P'_{ix} \ P'_{iy} ]^T$  et  $\mathbf{b}_i = [ B_{ix} \ B_{iy} ]^T$ . On définit le vecteur de translation  $\mathbf{t} = [ x \ y ]^T$  et la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  comme :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

qui transforme le repère mobile  $O'X'Y'$  au repère fixe  $OXY$ . Pour trouver les matrices jacobiniennes, on écrit des relations vectorielles pour chaque patte  $i$  du manipulateur en utilisant la notation donnée à la figure 3.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Les longueurs des vérins sont données par :

$$\rho_i^2 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = (\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

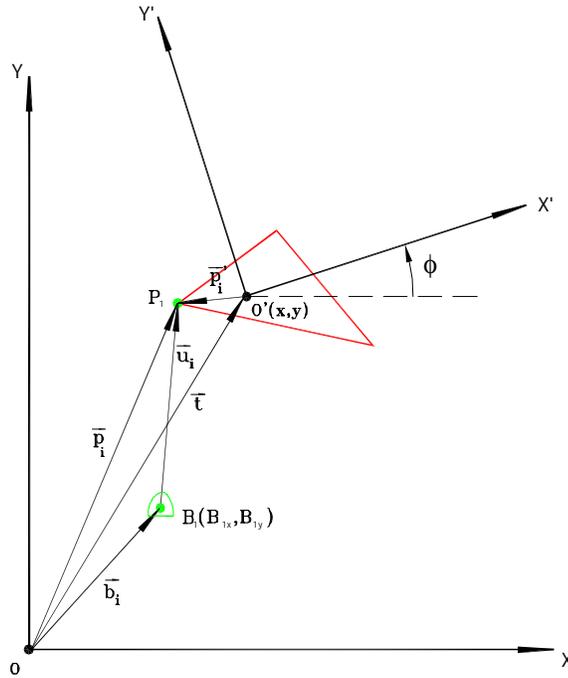


FIG. 3.2 – Manipulateur parallèle plan à 3 ddl - notation vectorielle.

En dérivant l'équation (3.1) par rapport au temps, on obtient :

$$2\dot{\rho}_i\rho_i = 2(\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{t}} + 2(\mathbf{t} - \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{p}'_i \quad (3.2)$$

où

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{Q} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (3.2) peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\rho}_i\rho_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{p}'_i = \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{t}} + \dot{\phi}\mathbf{u}_i^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_i \quad (3.3)$$

et on obtient :

$$\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\rho}}$$

où

$$\mathbf{s} = [\dot{\phi} \quad \dot{x} \quad \dot{y}]^T, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3]^T$$

et

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_1) & \mathbf{u}_1^T \\ (\mathbf{u}_2^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_2) & \mathbf{u}_2^T \\ (\mathbf{u}_3^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{p}'_3) & \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix}$$

Pour trouver les configurations singulières de type *II*, on doit calculer les racines du déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ , noté par  $\Delta_P = \det(\mathbf{J}_P)$ .

L'expression analytique pour les lieux de singularités est :

$$\det(\mathbf{J}_P) = \Delta_P = \Delta_P(x, y, \phi) = E_1x^2 + E_2y^2 + E_3xy + E_4x + E_5y + E_6 = 0, \quad (3.4)$$

où les coefficients  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , sont fonctions de la géométrie du manipulateur (c'est-à-dire les coefficients  $N_j$ ,  $j = 1, \dots, 25$ ) et de l'orientation de la plate-forme (angle  $\phi$ ), tel que présenté dans [16] :

$$\begin{aligned} E_1 &= N_1 \cos \phi + N_2 \sin \phi \\ E_2 &= N_3 \cos \phi + N_4 \sin \phi \\ E_3 &= N_5 \cos \phi + N_6 \sin \phi \\ E_4 &= N_7 \cos^2 \phi + N_8 \sin^2 \phi + N_9 \sin \phi \cos \phi + N_{10} \cos \phi + N_{11} \sin \phi \\ E_5 &= N_{12} \cos^2 \phi + N_{13} \sin^2 \phi + N_{14} \sin \phi \cos \phi + N_{15} \cos \phi + N_{16} \sin \phi \\ E_6 &= N_{17} \cos^3 \phi + N_{18} \sin^3 \phi + N_{19} \sin \phi \cos^2 \phi + N_{20} \sin^2 \phi \cos \phi + \\ &\quad N_{21} \cos^2 \phi + N_{22} \sin^2 \phi + N_{23} \sin \phi \cos \phi + N_{24} \cos \phi + N_{25} \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'expression des coefficients  $N_j$  est disponible dans [16] et aussi à l'annexe B.1. Pour une orientation constante, c'est-à-dire l'angle  $\phi = \text{const}$ , on obtient une équation quadratique.

Les courbes algébriques du deuxième degré sont aussi connues sous le nom des sections coniques, car elles sont obtenues comme les sections d'un cône de révolution intersecté par un plan. Les quadratiques non-dégénérées, pour lesquelles  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  ne sont pas tous zéro, sont obtenues quand le plan n'intersecte pas le sommet du cône. En fonction du discriminant  $\Delta = 4E_1E_2 - E_3^2$ , on a trois cas non-dégénérées :

1.  $\Delta > 0$ , la courbe est une ellipse,
2.  $\Delta = 0$ , la courbe est une parabole,
3.  $\Delta < 0$ , la courbe est une hyperbole,

qui sont illustrés à la figure 3.3.

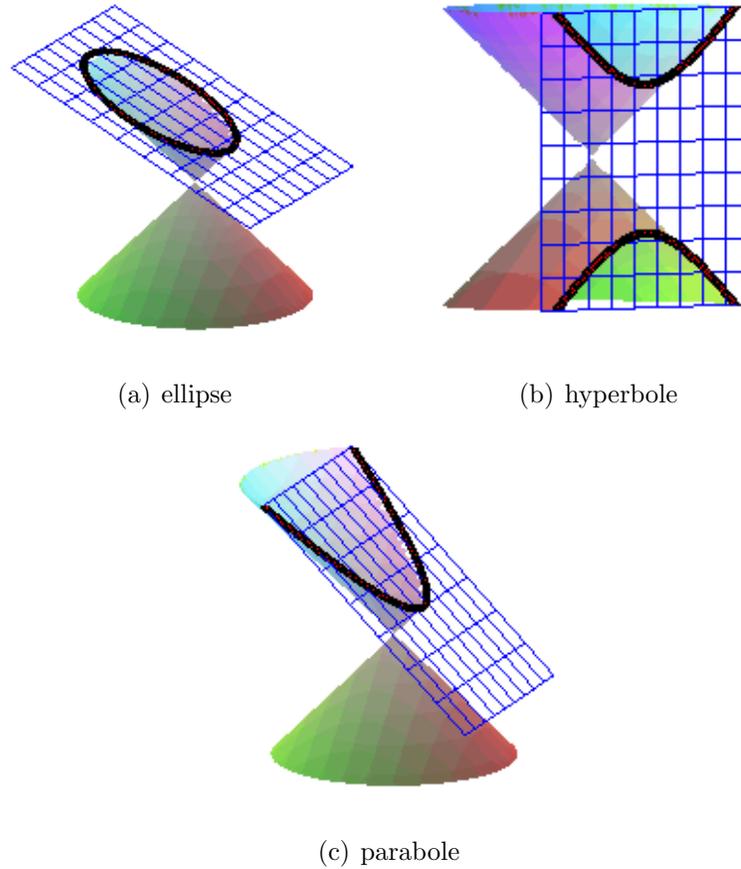


FIG. 3.3 – Les coniques non dégénérées

### 3.3 Mise en oeuvre de l'algorithme

Pour les manipulateurs plans parallèles à 3 ddl, l'algorithme a été présenté et expliqué sous la forme graphique dans le chapitre 2, (section 2.2.2) et sous la forme schématique dans l'annexe A.

Pour vérifier l'existence de singularités dans un espace de travail donné, défini comme une hyper-boîte tri-dimensionnelle  $\mathcal{H}^P$ , on vérifie le changement de signe du déterminant de la jacobienne.

L'équation (3.4) (qui décrit les lieux de singularités pour le manipulateur étudié) est le point initial de notre algorithme,

$$\det(\mathbf{J}_P) = \Delta_P = \Delta_P(x, y, \sin \phi, \cos \phi).$$

Le déterminant  $\Delta_P$  est une fonction des variables  $x, y, \sin \phi, \cos \phi$ . Le degré pour chacune de ces variables est illustré dans le tableau 3.1.

variables	$x$	$y$	$\sin \phi$	$\cos \phi$
degrés dans $\Delta_P$	2	2	3	3

TAB. 3.1 – Degrés des variables dans  $\Delta_P = \Delta_P(x, y, \phi)$ .

Le premier changement de variables consiste à éliminer  $\sin \phi$  et  $\cos \phi$  et les remplacer par la tangente du demi-angle  $\tan \frac{\phi}{2}$ , en utilisant les substitutions :

$$\sin \phi = \frac{2T}{1+T^2} \quad \text{et} \quad \cos \phi = \frac{1-T^2}{1+T^2}, \quad \text{où} \quad T = \tan \frac{\phi}{2}. \quad (3.6)$$

À ce moment, les variables  $x, y$  et  $\phi$ , sont devenues  $x, y$  et  $T$  et le degré de chacune de ces variables est donné dans le tableau 3.2.

variables	$x$	$y$	$T$
degrés dans $\Delta_P$	2	2	6

TAB. 3.2 – Degrés des variables dans  $\Delta_P = \Delta_P(x, y, T)$ .

Pour le moment, on travaille avec des variables bornées, et il est possible qu'une valeur extrême de la fonction soit obtenue pour une valeur limite d'une des variables. Donc, il est désirable de trouver une substitution qui exprime  $f$  en fonction de variables non bornées. On définit trois autres variables  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  [13] :

$$\begin{aligned} x &= x_{min} + \frac{1 + \sin \alpha}{2}(x_{max} - x_{min}) \\ y &= y_{min} + \frac{1 + \sin \beta}{2}(y_{max} - y_{min}) \\ T &= T_{min} + \frac{1 + \sin \gamma}{2}(T_{max} - T_{min}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, T_{min}$  et  $T_{max}$  sont les limites de la boîte  $\mathcal{H}^P$ . Pour simplifier l'expression analytique, on effectue une nouvelle substitution en fonction des limites de l'espace de travail :

$$\begin{aligned} x &= x_M + x_m \sin \alpha \\ y &= y_M + y_m \sin \beta \\ T &= T_M + T_m \sin \gamma \end{aligned} \quad (3.8)$$

où

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{x_{max} - x_{min}}{2} & \text{et} & \quad x_M = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \\ y_m &= \frac{y_{max} - y_{min}}{2} & \text{et} & \quad y_M = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \\ T_m &= \frac{T_{max} - T_{min}}{2} & \text{et} & \quad T_M = \frac{T_{max} + T_{min}}{2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quoique les nouvelles variables soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , en pratique on travaille seulement avec  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  et  $\sin \gamma$ . Ces substitutions ont les avantages suivants :

- avec les variables  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , l'espace de travail est sans limites ;
- les nouvelles variables (les sinus de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ) ont des valeurs comprises dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

La dernière substitution introduit les variables définies partout dans l'espace, sans changer le degré des variables. Ceci est illustré dans le tableau 3.3.

variables	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$
degrés dans $\Delta_p$	2	0	2	0	6	0

TAB. 3.3 – Degrés des variables dans  $\Delta_p = \Delta_p(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Ces trois étapes de substitutions peuvent être décrites ensemble de la façon suivante :

$$\Delta_p = \Delta_p(x, y, \phi) = \Delta_p(x, y, T) = \Delta_p(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma) = p(\alpha, \beta, \gamma).$$

Après avoir fait tous les changements de variables nécessaires, on poursuit l'algorithme présenté au chapitre 2, section 2.2.2 en cherchant les extrémums du  $\det(\mathbf{J}_p)$  en fonction des trois nouvelles variables  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Le résultat est un système non-linéaire  $\mathcal{S}^{3D} = \mathcal{S}^P$  de trois équations avec trois inconnues.

$$\mathcal{S}^P \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = P_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \beta} = P_\beta \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \gamma} = P_\gamma \cos \gamma = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Les degrés de chacune des variables pour  $P_\alpha$ ,  $P_\beta$  et  $P_\gamma$  sont indiqués dans le tableau 3.4 :

variables	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$
degrés dans $P_\alpha$	1	0	1	0	6	0
degrés dans $P_\beta$	1	0	1	0	6	0
degrés dans $P_\gamma$	2	0	2	0	5	0

TAB. 3.4 – Degrés des variables dans les fonctions  $P_\alpha$ ,  $P_\beta$  et  $P_\gamma$ .

Le système  $\mathcal{S}^P$  est équivalent à 8 sous-systèmes qui ont été déjà présentés dans le chapitre 2.

$$\mathcal{S}^P = \mathcal{S}_0^P \cup \mathcal{S}_\alpha^P \cup \mathcal{S}_\beta^P \cup \mathcal{S}_\gamma^P \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^P \cup \mathcal{S}_{\beta\gamma}^P \cup \mathcal{S}_{\alpha\gamma}^P \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^P. \quad (3.11)$$

Ceux-ci définissent les extrémums :

- à l'intérieur de l'hyper boîte :  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^P$ ,
- sur les faces :  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^P$ ,  $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^P$ ,  $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^P$ ,
- sur les arêtes :  $\mathcal{S}_\alpha^P$ ,  $\mathcal{S}_\beta^P$ ,  $\mathcal{S}_\gamma^P$ ,
- les valeurs sur les sommets :  $\mathcal{S}_0^P$ .

On vérifie le signe de la fonction : d'abord, sur les sommets, après sur les arêtes, ensuite sur les faces et à la fin dans l'intérieur de la boîte. Quand la procédure trouve un signe différent, elle s'arrête, car on sait qu'il existe (au moins) une singularité.

Par exemple, pour vérifier sur les sommets, on résoud le système,  $\mathcal{S}_0^P$ ,

$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm 1 \\ \sin \beta = \pm 1 \\ \sin \gamma = \pm 1 \end{cases}$$

on substitue les solutions dans la fonction initiale,  $\Delta_P$  et on observe la variation du signe. On prend toutes les combinaisons possibles pour les trois variables ( $2^3 = 8$ ) et on compare leur signe initial avec le signe obtenu pour la première combinaison (par exemple  $\{\sin \alpha = 1, \sin \beta = 1, \sin \gamma = 1\}$ ).

Si l'on ne trouve pas de variation de signe sur les sommets on considère les arêtes. On vérifie les systèmes  $\mathcal{S}_\alpha^P$ ,  $\mathcal{S}_\beta^P$ ,  $\mathcal{S}_\gamma^P$ , un après l'autre, et on observe les signes. Le sous-système  $\mathcal{S}_\alpha^P$  est réduit à une équation  $P_\alpha = 0$ , où le degré de  $\sin \alpha$  est 1. Les deux autres variables  $\sin \beta$  et  $\sin \gamma$  ont des valeurs  $\pm 1$ . Pour le système  $\mathcal{S}_\beta^P$  le degré du polynôme,

$P_\beta$ , en  $\sin \beta$  est aussi petit, 1, et les valeurs de  $\sin \alpha$  et  $\sin \gamma$  sont  $\pm 1$ , tandis que pour le sous-système  $\mathcal{S}_\gamma^P$ , le degré de la variable  $\sin \gamma$  dans  $P_\gamma$  est 6.

On considère successivement les systèmes  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^P$ ,  $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^P$ ,  $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^P$ . Le premier,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^P$  est un système linéaire de 2 équations avec 2 inconnues,  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$ . Par contre, les deux autres sous-systèmes sont non-linéaires : une des variables ( $\sin \alpha$  ou  $\sin \beta$ ) a le degré 1, tandis que l'autre ( $\sin \gamma$ ) a le degré 6.

Si l'on arrive à étudier l'intérieur de la boîte, les extrémums nous sont donnés en résolvant le système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^P$ , qui est un système non-linéaire avec 3 équations et 3 inconnues. Les premières 2 équations du système sont des équations linéaires en  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$  et elles peuvent être écrites de la façon montrée à l'équation (3.12).

$$\begin{cases} P_\alpha = 0, \\ P_\beta = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A \sin \alpha + B \sin \beta + C = 0, \\ D \sin \alpha + E \sin \beta + F = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

En traitant le sous-système non-linéaire séparément, on obtient la solution  $\{\sin \alpha, \sin \beta\}$  (donnée à (3.13)), en fonction de la troisième variable  $\sin \gamma$  (qui est incluse dans les coefficients  $E_i$ ,  $i = 1 \dots 6$ , donnés à l'annexe B.2), la géométrie du système, qui est représentée par le vecteur  $\mathbf{g} = [b_{1x}, b_{1y}, b_{2x}, b_{2y}, b_{3x}, b_{3y}, p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{2x}, p'_{2y}, p'_{3x}, p'_{3y}]$ , et les limites moyennes de l'espace de travail, caractérisées par le vecteur  $\mathbf{l}_{Mm}$ , qui sont en fonction des limites de l'espace de travail représentées par le vecteur  $\mathbf{l}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{Mm} &= [x_M, x_m, y_M, y_m, T_M, T_m], \\ \mathbf{l} &= [x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, T_{min}, T_{max}]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{2E_2E_4 - E_5E_3 - E_3^2x_M + 4x_ME_1E_2}{x_m(E_3^2 - 4E_1E_2)} \\ \sin \beta = \frac{2E_1E_5 - E_4E_3 - E_3^2y_M + 4y_ME_1E_2}{y_m(E_3^2 - 4E_1E_2)} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le dénominateur sera nul lorsque la courbe des singularités, pour une orientation constante, est une parabole ( $\Delta = E_3^2 - 4E_1E_2 = 0$ , voir figure 3.3). Ce cas est considéré séparément par l'algorithme. La solution du système est substituée dans la troisième

équation de  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^P$ ,  $P_\gamma = P(\sin \gamma, \mathbf{g}, \mathbf{l}_{Mm}) = 0$ . On obtient un polynôme de degré 13 en  $\sin \gamma$  :

$$P_\gamma = \sum_{k=1}^{14} C_k \sin^{(14-k)} \gamma \quad (3.14)$$

où  $C_k$  avec  $k = 1, \dots, 14$ , sont des coefficients dépendants de la géométrie du robot et des limites de l'espace de travail. Les solutions du polynôme de degré 13, doivent être réelles et dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . Après avoir résolu numériquement l'équation (3.14), en tenant compte de ses contraintes, on remplace les solutions,  $\sin \gamma$ , dans le système linéaire (3.13) ( $E_i$  sont en fonction de  $\sin \gamma$ —voir l'annexe B.2) et on calcule les solutions pour les deux autres variables,  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$ , qui doivent être dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . Finalement, on obtient les solutions du système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^P$  et on les substitue dans  $\Delta_P$  pour examiner le signe. Si l'on constate une variation, une singularité existe dans l'espace de travail.

Il a été observé que le temps nécessaire pour vérifier une hyper-boîte  $\mathcal{H}^P$ , peut varier entre :

- un temps minimum  $t = 0.04$  s, après avoir vérifié seulement les sommets ;
- un temps maximum  $t = 18.015$  s, quand il est nécessaire de résoudre tous les sous-systèmes.

Le programme final est montré à l'annexe C.1.

### 3.3.1 Mise en oeuvre pour une orientation constante

Pour le cas où une des coordonnées cartésiennes est constante, un algorithme a été présenté au chapitre 2, section 2.2.3. Dans ce cas, le déterminant de la jacobienne est une expression quadratique. En fonction du discriminant  $\Delta$  de l'équation, on peut avoir les trois cas illustrés à la figure 3.3.

Pour vérifier l'existence de singularités dans un espace de travail donné comme un rectangle  $\mathcal{D}^{oc}$ , on regarde le signe du déterminant  $\Delta_P$  qui est maintenant en fonction de deux variables :  $x$  et  $y$ .

$$\det(\mathbf{J}_P) = \Delta_P = \Delta_P(x, y).$$

Avant de chercher les extrémums on fait des substitutions qui transforment les variables bornées en variables non-bornées. On définit les variables  $\alpha$  et  $\beta$  partout dans l'espace,

tel que :

$$\begin{aligned} x &= x_{min} + \frac{1 + \sin \alpha}{2} (x_{max} - x_{min}) \\ y &= y_{min} + \frac{1 + \sin \beta}{2} (y_{max} - y_{min}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ , sont les limites du rectangle  $\mathcal{D}^{oc}$ .

On effectue une substitution supplémentaire pour simplifier les calculs :

$$\begin{aligned} x &= x_M + x_m \sin \alpha \\ y &= y_M + y_m \sin \beta \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \quad \text{et} \quad x_M = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \\ y_m &= \frac{y_{max} - y_{min}}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le changement de variables peut-être présenté de la manière suivante :

$$\det(\mathbf{J}_p) = \Delta_p = \Delta_p(x, y) = \Delta_p(\sin \alpha, \sin \beta) = p(\alpha, \beta).$$

Les degrés des variables sont les mêmes que pour une orientation variable et sont illustrés dans les tableaux suivants :

variables	$x$	$y$
degrés dans $\Delta_p$	2	2

TAB. 3.5 – Degrés des variables dans  $\Delta_p = \Delta_p(x, y)$ .

variables	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$
degrés dans $\Delta_p$	2	0	2	0

TAB. 3.6 – Degrés des variables dans  $\Delta_p = \Delta_p(\alpha, \beta)$ .

En suivant l'algorithme présenté au chapitre 2, section 2.2.3, on cherche les extrémums de la fonction  $\Delta_p = \Delta_p(\alpha, \beta)$ , en dérivant partiellement par rapport aux nouvelles variables  $\alpha$  et  $\beta$ . Le résultat est le système  $\mathcal{S}^{2D}$  de deux équations avec deux inconnues :

$$\mathcal{S}^{oc} \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \alpha} = P_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \beta} = P_\beta \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Les degrés de chacune des variable pour  $P_\alpha$  et  $P_\beta$  sont donnés dans le tableau 3.7.

variables	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$
degrés dans $P_\alpha$	1	0	1	0
degrés dans $P_\beta$	1	0	1	0

TAB. 3.7 – Degrés des variables dans les fonctions  $P_\alpha$  et  $P_\beta$ .

Le système  $\mathcal{S}^{\text{oc}}$  est équivalent à 4 sous-systèmes qui ont été mis en évidence au chapitre 2, section 2.2.3.

$$\mathcal{S}^{\text{oc}} = \mathcal{S}_0^{\text{oc}} \cup \mathcal{S}_\alpha^{\text{oc}} \cup \mathcal{S}_\beta^{\text{oc}} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{oc}}. \quad (3.19)$$

Pour détecter les singularités dans le rectangle  $\mathcal{D}^{\text{oc}}$ , on substitue les solutions  $\{\sin \alpha, \sin \beta\}$  dans la fonction initiale et on analyse son signe. Aussitôt qu'on trouve un signe différent, le programme s'arrête et il nous signale qu'il y a une singularité dans l'espace de travail donné. On commence avec les sommets, c'est-à-dire le système  $\mathcal{S}_0^{\text{oc}}$  qui a les solutions :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm 1 \\ \sin \beta = \pm 1 \end{cases}$$

On substitue les quatre solutions dans le déterminant de la jacobienne,  $\Delta_P$ , et on compare le signe de la fonction avec le signe initial (obtenu après avoir substitué dans la fonction initiale une des solutions, par exemple  $\{\sin \alpha = 1, \sin \beta = 1\}$ ). Si le signe est différent, il y a (au moins) une singularité et on s'arrête, sinon on continue avec les arêtes (les systèmes  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{oc}}$  et  $\mathcal{S}_\beta^{\text{oc}}$ ) et finalement (si c'est le cas) avec l'intérieur du rectangle, donc le système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{oc}}$ . Pour une orientation constante,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{oc}}$  est un système linéaire en  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$ , le même système (3.13) comme dans la section 3.3, sauf que, dans ce cas, les coefficients  $E_i$ ,  $i = 1 \dots 6$ , sont constants (dépendants de la géométrie du manipulateur,  $\mathbf{g}$ , et de l'orientation de la plate-forme,  $\phi = \text{const}$ ).

Il a été observé que le temps nécessaire pour vérifier un rectangle  $\mathcal{D}^{\text{oc}}$ , peut varier entre :

- un temps minimum  $t = 0.01$  s, après avoir vérifié seulement les sommets, donc un seul sous-système ;
- un temps maximum  $t = 0.06$  s, quand il est nécessaire de résoudre tous les quatre sous-systèmes.

Le programme final est présenté dans l'annexe C.2.

### 3.4 Validation de l'algorithme - Exemples

Dans cette section on présente deux exemples de manipulateurs plans :

1. un manipulateur simplifié qui est illustré à la figure 3.4,
2. un manipulateur général qui est illustré à la figure 3.1.

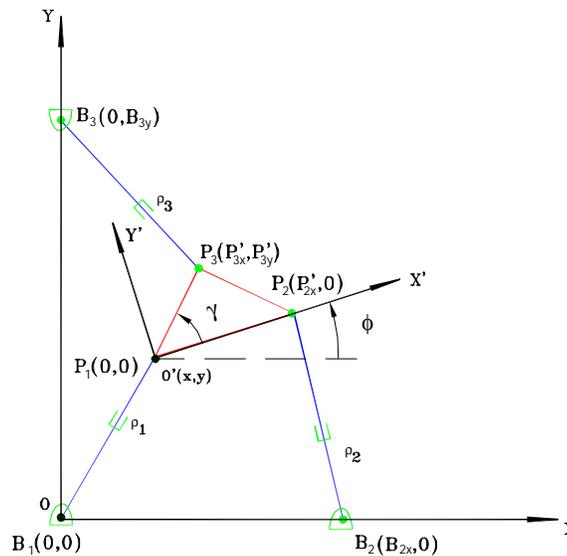


FIG. 3.4 – Manipulateur parallèle plan simplifié.

#### 3.4.1 Exemple 1 - Manipulateur plan simplifié

Les paramètres géométriques (représentés par le vecteur  $\mathbf{g}$ ) pour le manipulateur plan simplifié sont donnés dans le tableau 3.8.

Pour un espace de travail limité par

$$x_{min} = -20, x_{max} = 20, y_{min} = -20, y_{max} = 20, \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \frac{\pi}{4},$$

et où

$$T_{min} = \tan \frac{\phi_{min}}{2}, T_{max} = \tan \frac{\phi_{max}}{2}.$$

$i$	$B_{ix}$	$B_{iy}$	$P'_{ix}$	$P'_{iy}$
1	0	0	0	0
2	15.91	0	17.04	0
3	0	10	13.2364	16.097

TAB. 3.8 – Paramètres géométriques du manipulateur plan simplifié.

La surface des singularités obtenue en utilisant la fonction *implicitplot3d* du logiciel *Maple*, est représentée à la figure 3.5.

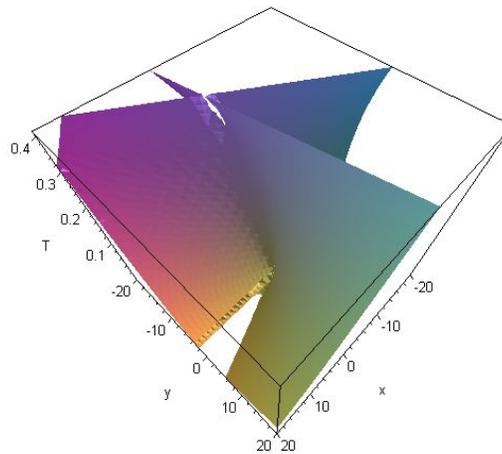


FIG. 3.5 – Surface des singularités pour le manipulateur plan simplifié.

La figure 3.6 présente les surfaces obtenues pour différents niveaux de discrétisation en vérifiant la présence de singularités à l'intérieur des boîtes élémentaires à l'aide de l'algorithme présenté ici. Quand le réseau de discrétisation devient de plus en plus fin, l'image obtenue s'approche du graphique illustré à la figure 3.5.

Le temps nécessaire pour valider l'algorithme est long et dépend du niveau de discrétisation, car il augmente avec le nombre de petites boîtes.

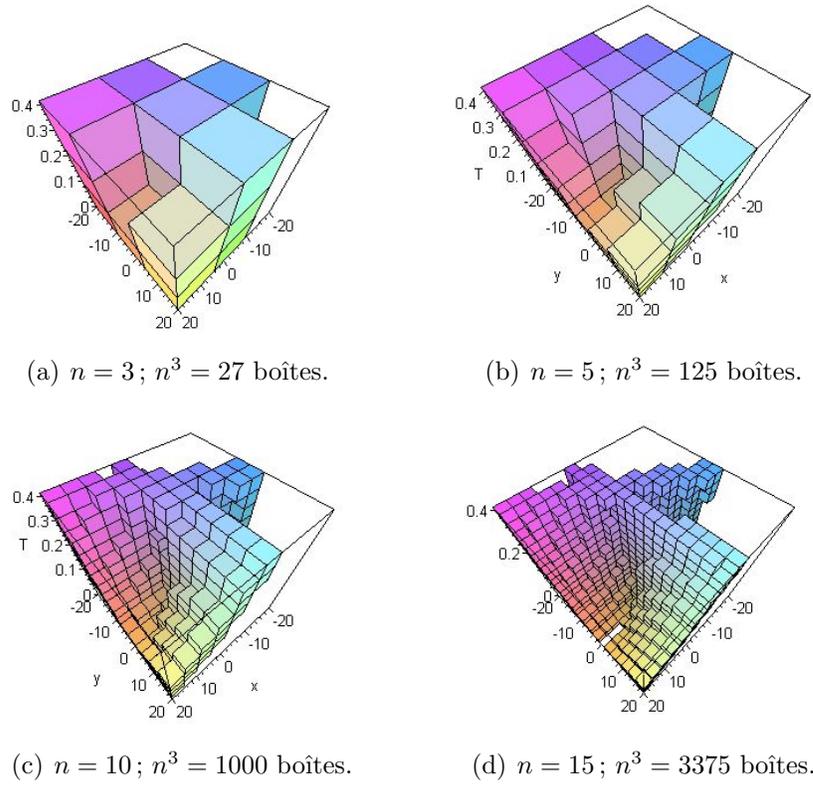


FIG. 3.6 – Manipulateur simplifié - discrétisation 3D.

On peut utiliser le même algorithme pour vérifier une section de l'espace de travail (voir chapitre 2, section 2.2.3 et chapitre 3, section 3.3.1). Par exemple, pour une orientation constante, on examine les extrémums dans un rectangle. Pour une orientation  $\phi = \phi_{max}$ , la courbe des singularités réelle est représentée à la figure 3.7.

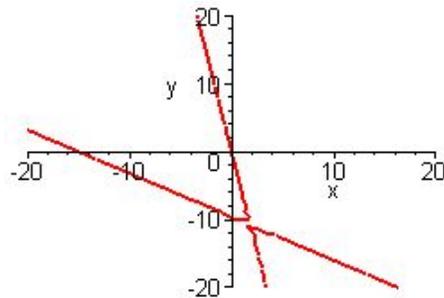


FIG. 3.7 – Courbe des singularités pour le manipulateur plan simplifié,  $\phi = \phi_{max}$ .

De la même façon, on présente à la figure 3.8 les différentes étapes de discrétisation, (cette fois 2D) et après avoir analysé toutes les sous-figures, on constate que l'image formée par les petits rectangles s'approche de la courbe des singularités de la figure 3.7.

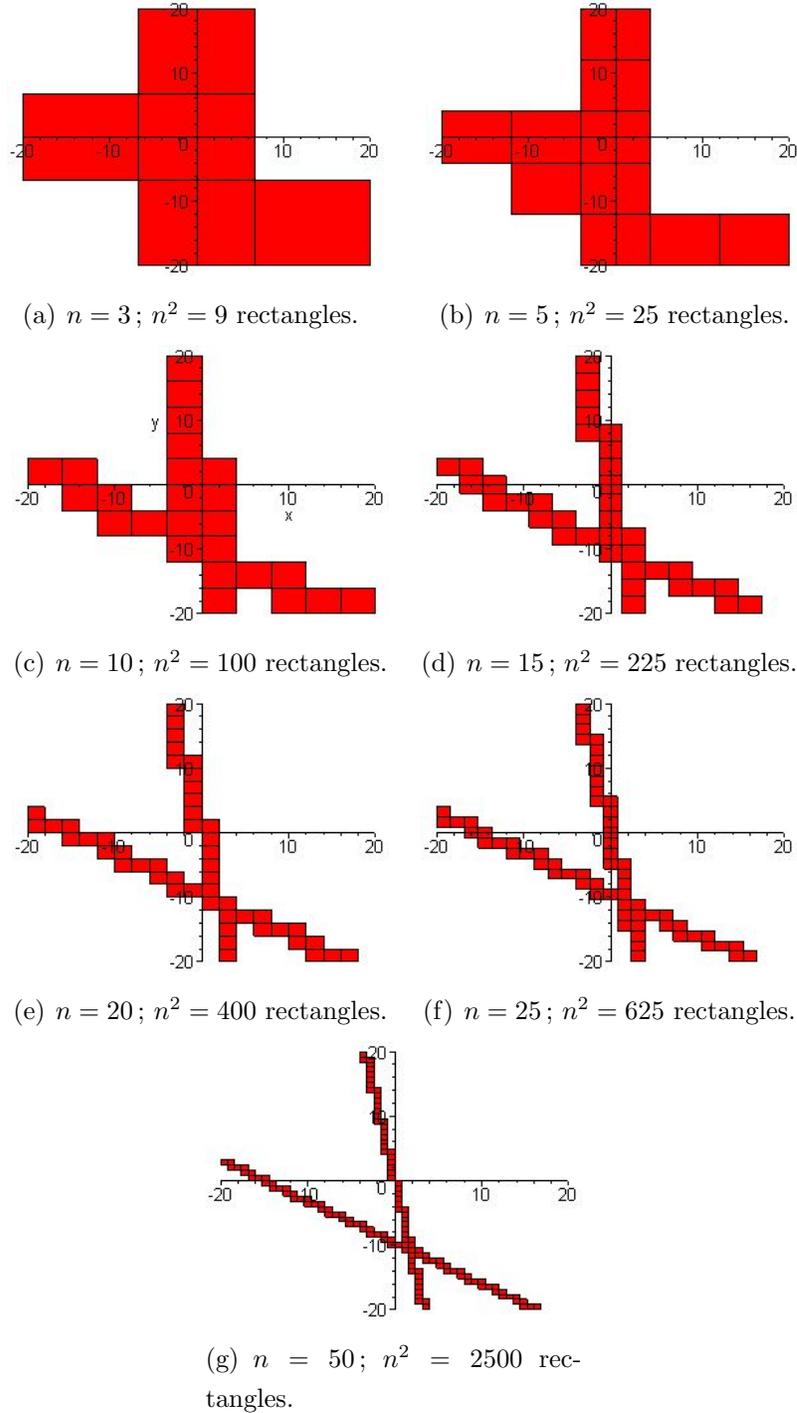


FIG. 3.8 – Manipulateur simplifié - discrétisation 2D pour  $\phi = \phi_{max}$ .

### 3.4.2 Exemple 2 - Manipulateur plan général

Les paramètres géométriques pour le manipulateur plan général sont donnés dans le tableau 3.9.

$i$	$B_{ix}$	$B_{iy}$	$P'_{ix}$	$P'_{iy}$
1	3.78	4.34	-4.83	-3.19
2	34.47	-3.78	12.04	-3.19
3	16.233	34.76	8.23	12.09

TAB. 3.9 – Paramètres géométriques du manipulateur plan général.

L'espace de travail est limité par

$$x_{min} = -50, x_{max} = 50, y_{min} = -50, y_{max} = 50, \phi_{min} = 0, \phi_{max} = \frac{\pi}{4},$$

et où

$$T_{min} = \tan \frac{\phi_{min}}{2}, T_{max} = \tan \frac{\phi_{max}}{2}.$$

La surface des singularités, obtenue par *implicitplot* est représentée à la figure 3.9.

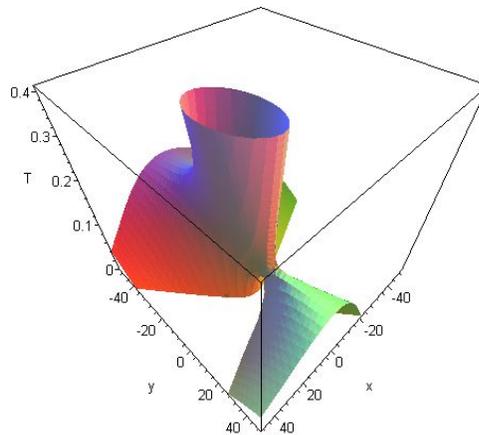
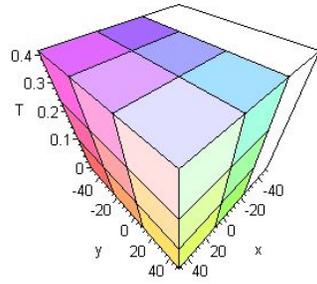


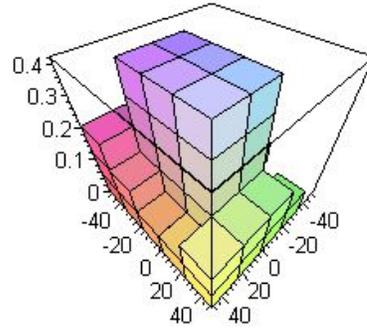
FIG. 3.9 – Surface des singularités pour le manipulateur plan général.

La figure 3.10 présente les pas successifs de discrétisation 3D pour le manipulateur parallèle plan général. Même si les temps pour vérifier les surfaces sont très élevés (ils

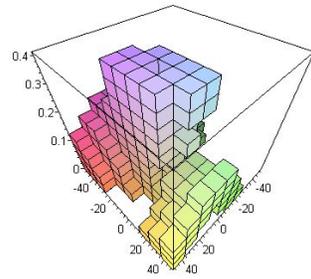
augmentent avec le pas de discrétisation), cette opération a été faite seulement une fois pour valider l'algorithme. Le but de cette opération est simplement de vérifier la validité de l'algorithme. En pratique, l'algorithme sera utilisé sur seulement une ou quelques boîtes à la fois pour trouver des zones exemptes de singularités.



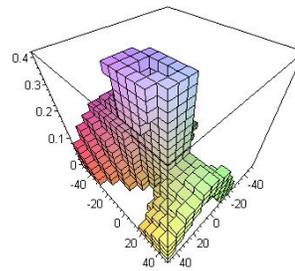
(a)  $n = 3$ ;  $n^3 = 27$  boîtes.



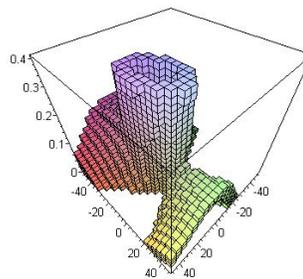
(b)  $n = 5$ ;  $n^3 = 125$  boîtes.



(c)  $n = 10$ ;  $n^3 = 1000$  boîtes.



(d)  $n = 15$ ;  $n^3 = 3375$  boîtes.



(e)  $n = 25$ ;  $n^3 = 15625$  boîtes.

FIG. 3.10 – Manipulateur général – discrétisation 3D.

Pour une orientation constante  $\phi = \phi_{max}$ , la courbe des singularités obtenue par des méthodes classiques est représentée à la figure 3.11. En discrétisant l'espace de travail donné, (le rectangle  $\mathcal{D}^{oc}$ ), dans des petits rectangles et en mettant en pratique l'algorithme de détection de singularités pour chacun de ces petits rectangles, pour des pas de discrétisation différents, on obtient à la fin du programme l'allure de la courbe des singularités qui est très proche à la courbe originale. (voir 3.11 et 3.12 k). L'approche est illustrée à la figure 3.12.

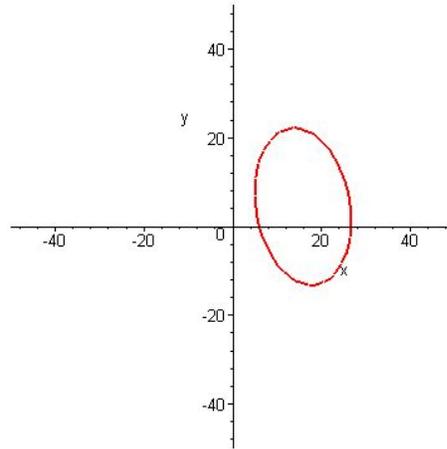


FIG. 3.11 – Courbe des singularités pour le manipulateur plan général,  $\phi = \phi_{max}$ .

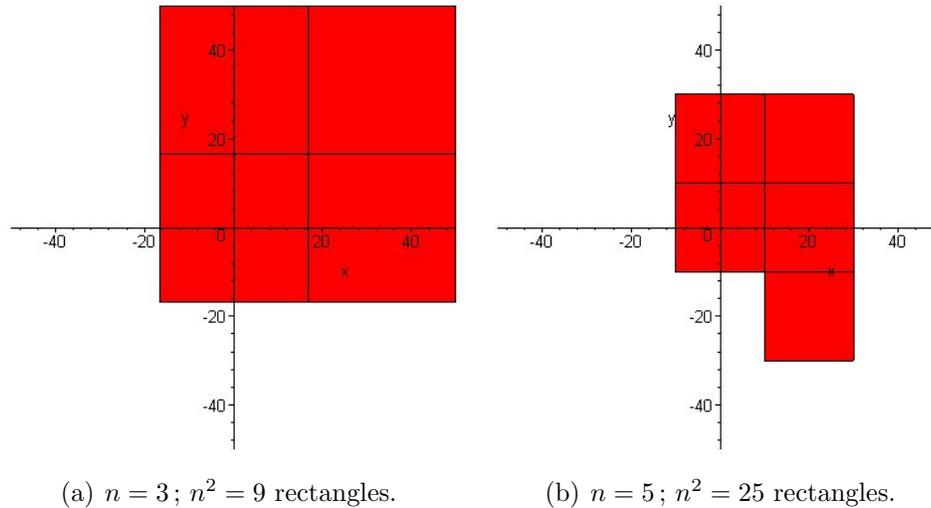
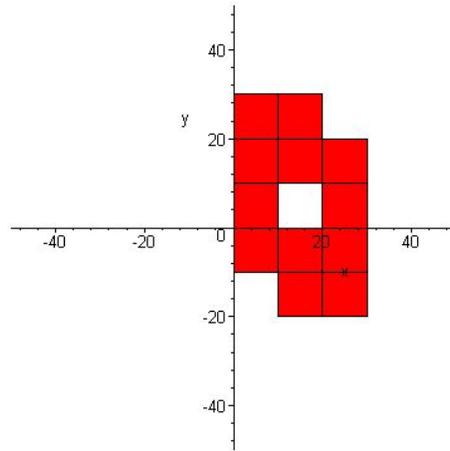
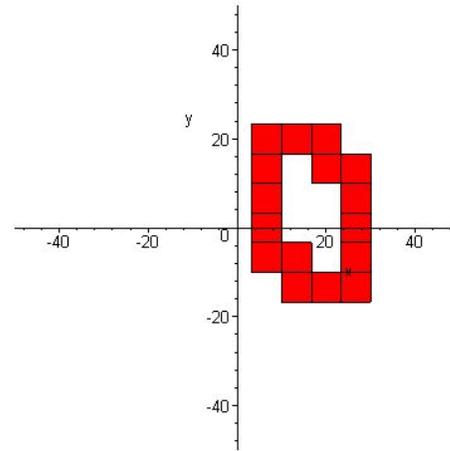
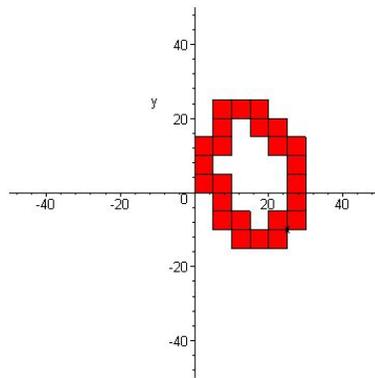
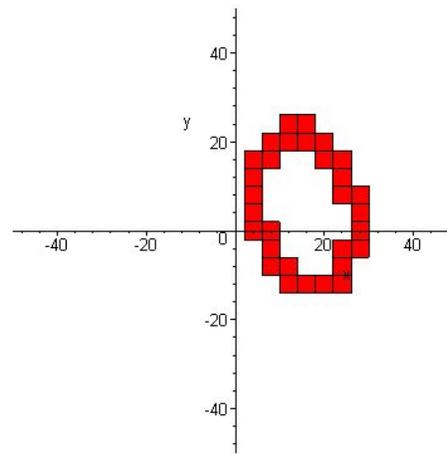
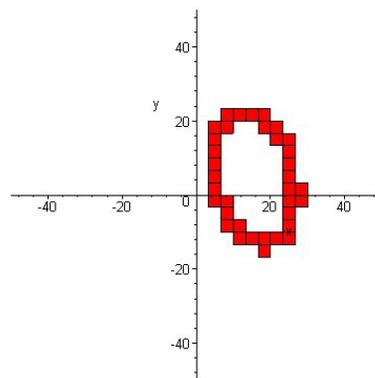
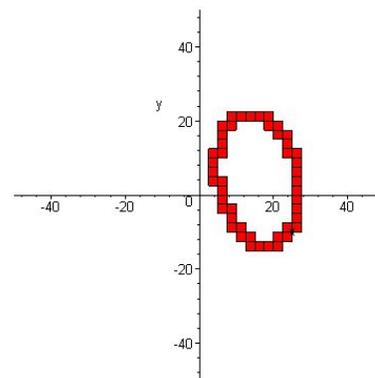
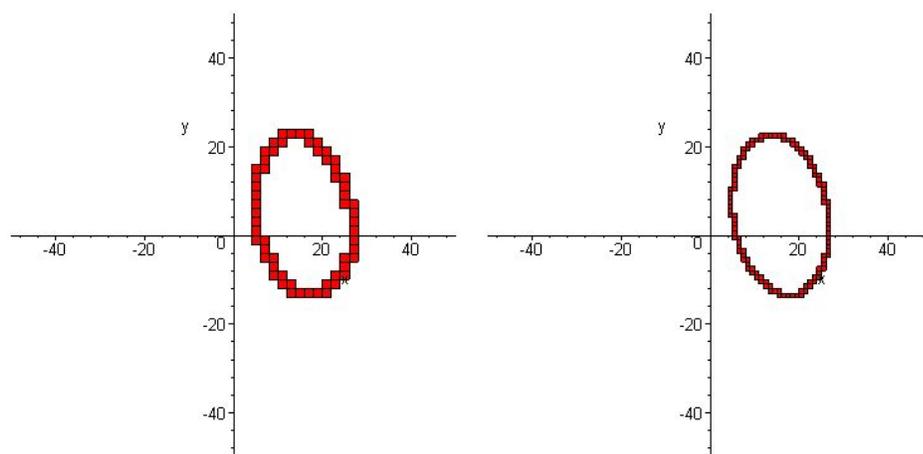


FIG. 3.12 – Manipulateur général – discrétisation 2D pour  $\phi = \phi_{max}$  (1<sup>re</sup> partie).

(d)  $n = 10$ ;  $n^2 = 100$  rectangles.(e)  $n = 15$ ;  $n^2 = 225$  rectangles.(f)  $n = 20$ ;  $n^2 = 400$  rectangles.(g)  $n = 25$ ;  $n^2 = 625$  rectangles.(h)  $n = 30$ ;  $n^2 = 9005$  rectangles.(i)  $n = 40$ ;  $n^2 = 1600$  rectangles.FIG. 3.12 – Manipulateur général – discrétisation 2D pour  $\phi = \phi_{max}$  (2<sup>e</sup> partie).



(j)  $n = 50$ ;  $n^2 = 2500$  rectangles.

(k)  $n = 100$ ;  $n^2 = 10000$  rectangles.

FIG. 3.12 – Manipulateur général – discrétisation 2D pour  $\phi = \phi_{max}$  (3<sup>e</sup> partie).

# Chapitre 4

## Application pour un manipulateur sphérique

Dans ce chapitre on considère des manipulateurs parallèles sphériques à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. On présente brièvement les problèmes géométriques direct (PGD) et inverse (PGI) et on exprime les matrices jacobiennes sous une forme invariante. Dans le cadre du problème géométrique inverse, on obtient l'expression analytique des lieux de singularités en utilisant deux paramétrisations de l'orientation : les *angles d'Euler* et les *angles Tilt & Torsion*. Les deux méthodes sont présentées, analysées et comparées. Comme dans le chapitre 3, on développe un algorithme de détection de singularités dans un espace de travail donné. En discrétisant tout l'espace de travail, on présente l'algorithme de vérification, qui valide l'algorithme précédent, en obtenant des allures des surfaces (courbes) des singularités similaires à celles obtenues par d'autres méthodes numériques.

## 4.1 Les manipulateurs parallèles sphériques

Un manipulateur parallèle sphérique à 3 ddl permet à la plate-forme d'effectuer des rotations arbitraires autour d'un de ses points qui reste immobile. L'application la plus évidente d'un tel manipulateur est la construction d'un poignet de robot. Il existe plusieurs autres applications possibles comme, par exemple, des mécanismes pour orienter des panneaux solaires, des télescopes, des caméras, etc.

Un des exemples les plus connus est l'Oeil Agile [17, 18]. C'est un mécanisme parallèle sphérique à 3 ddl de type  $3\text{-}RRR$  (avec des actionneurs rotoïdes) qui a été développé pour l'orientation rapide d'une caméra. Son architecture mécanique permet d'atteindre de très grandes vitesses opérationnelles.

Dans ce chapitre on développe un algorithme pour la détection de singularités pour les manipulateurs parallèles sphériques à 3 ddl avec une patte passive et des actionneurs prismatiques. Un exemple de manipulateur de cette classe est illustré schématiquement à la figure 4.1.

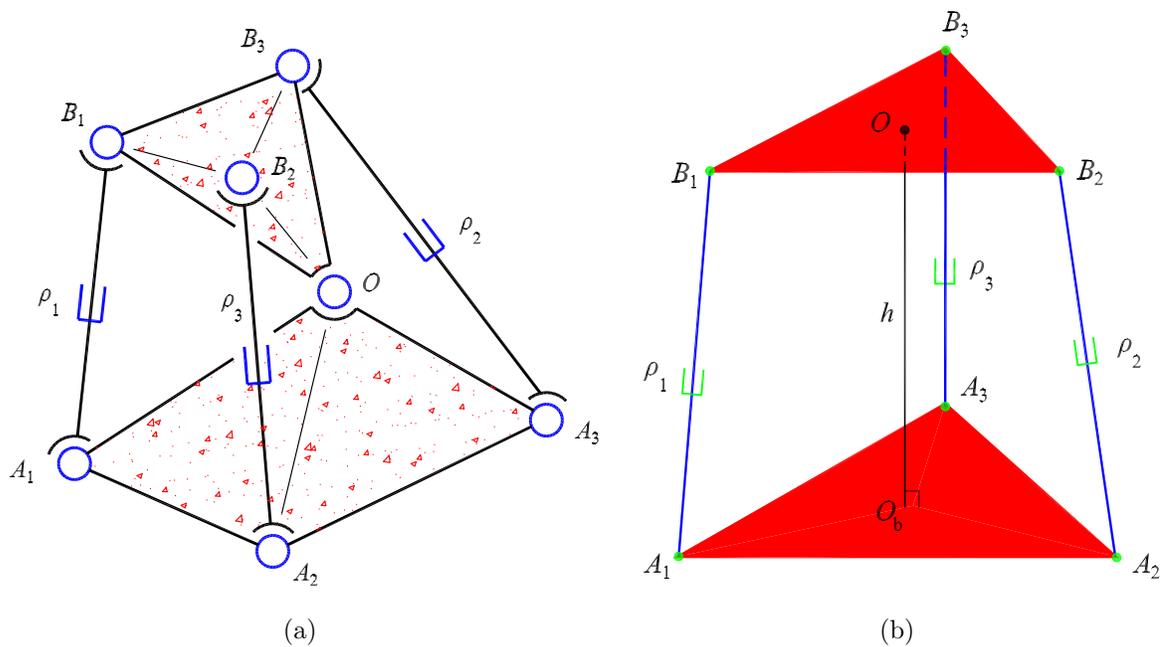


FIG. 4.1 – Manipulateur parallèle sphérique à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques — représentation schématique.

La plate-forme mobile,  $OB_1B_2B_3$ , est connectée à la base fixe,  $OA_1A_2A_3$ , par une articulation sphérique au point  $O$ . Les actionneurs linéaires de longueurs variables,  $\rho_i$ , lient les points  $A_i$  et  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La variation de ces longueurs permet d'orienter la plate-forme mobile,  $OB_1B_2B_3$ , autour du point  $O$ . Les liaisons sur la plate-forme sont sphériques, tandis que celles sur la base sont des cardans. Le point  $O_b$  est la projection de  $O$  dans le plan  $A_1A_2A_3$ . La distance  $OO_b = h$  représente un des paramètres géométriques du manipulateur.

Les problèmes géométriques direct, PGD, et inverse, PGI, ont été étudiés par plusieurs chercheurs [9], [10]. Le PGD consiste à déterminer l'orientation de la plate-forme  $\mathbf{Q}$  en fonction des coordonnées articulaires  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  (les longueurs des vérins). Le PGD admet un maximum de 8 solutions. Le problème géométrique inverse, PGI, consiste à déterminer les coordonnées articulaires,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , pour une orientation de la plate-forme donnée,  $\mathbf{Q}$ . Le PGI est simple à résoudre et dans le cas étudié (les liaisons actionnées sont prismatiques), le PGI admet une seule solution.

## 4.2 Calcul des jacobiennes sous forme invariante

Dans cette sous-section on détermine les expressions des matrices Jacobiennes  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  (voir chapitre 2) sous forme invariante.

On choisit deux repères :  $\mathcal{R}$ , est fixé à la base, tandis que  $\mathcal{R}'$  est attaché à la plate-forme mobile. Puisque la rotation de la plate-forme s'effectue autour du point  $O$ , ce point est l'origine commune des deux repères. Le changement de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$ , se fait par une matrice de rotation,  $\mathbf{Q}$ .

Pour obtenir les expressions des matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$ , on définit les vecteurs,  $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$ ,  $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{OB_i}$  et  $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{A_iB_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , représentés à la figure 4.2. Les vecteurs  $\mathbf{r}_i$  sont variables, tandis que  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont constants dans les repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , respectivement. On peut écrire les équations vectorielles :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

ainsi que

$$\rho_i = \|\mathbf{r}_i\|, \quad i = 1, 2, 3.$$

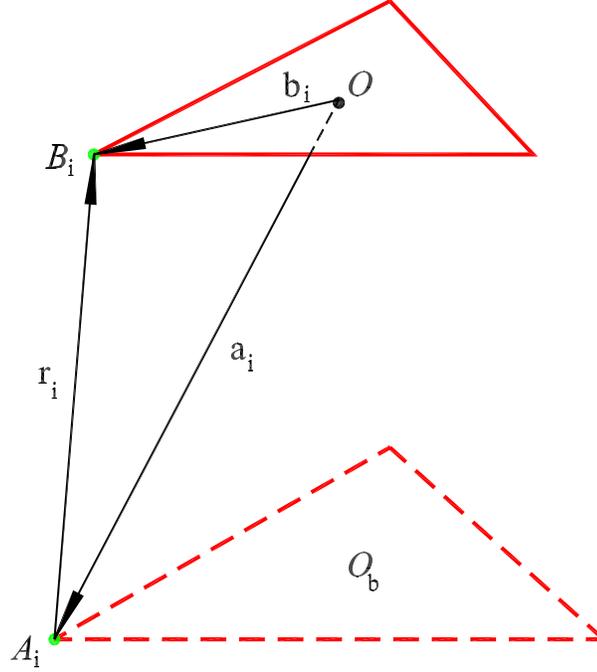


FIG. 4.2 – Manipulateur sphérique — notation vectorielle.

Donc, en prenant le carré du module de chaque membre de l'équation (4.1), on a :

$$\rho_i^2 = \|\mathbf{a}_i\|^2 + \|\mathbf{b}_i\|^2 - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_i . \quad (4.2)$$

En dérivant l'équation (4.2) par rapport au temps, on obtient :

$$2\rho_i \dot{\rho}_i = -2\mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{b}}_i . \quad (4.3)$$

Le vecteur  $\mathbf{b}_i$ , dans le repère  $\mathcal{R}$ , est donné par :

$$[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}} = \mathbf{Q}[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}'} . \quad (4.4)$$

Puisque le vecteur  $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}'}$  est constant, l'équation (4.3) devient :

$$\rho_i \dot{\rho}_i = -[\mathbf{a}_i]_{\mathcal{R}}^T \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}'} . \quad (4.5)$$

Également, on sait que

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} , \quad (4.6)$$

où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le tenseur de vitesse angulaire. En substituant (4.6) dans l'équation (4.4) on obtient :

$$\dot{\mathbf{b}}_i = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{b}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i ,$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur de la vitesse angulaire et l'équation (4.5) devient maintenant :

$$\rho_i \dot{\rho}_i = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \cdot \boldsymbol{\omega} . \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) peut être écrite sous une forme matricielle :

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{r}} ,$$

où

$$\dot{\mathbf{r}} = [ \dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3 ]^T ,$$

et

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)^T \\ (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2)^T \\ (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)^T \end{bmatrix} , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} . \quad (4.8)$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont les jacobiennes du manipulateur.

On s'intéresse aux singularités du robot de type *II* [5], c'est-à-dire des singularités de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ .

## 4.3 Expression analytique des lieux de singularités

Dans cette section on obtient la condition analytique pour les singularités de la matrice  $\mathbf{J}$ . On utilise deux paramétrisations de l'orientation : les angles d'Euler *ZYZ* et les angles *Tilt & Torsion*.

### 4.3.1 Les angles d'Euler

En général, pour amener un corps rigide dans une orientation arbitraire, on a besoin d'une seule rotation par rapport à un point fixe (*théorème d'Euler*). On peut décomposer cette rotation en trois rotations élémentaires successives autour des axes prédéterminés. Les angles associés à ces rotations élémentaires s'appellent les angles d'Euler et forment un triplet qui représente la rotation globale. Il y a 12 conventions possibles pour les angles d'Euler : *XYZ*, *XZY*, *YXZ*, *YZX*, *ZXY*, *ZYX*, *XYX*, *XZX*,

$YXY$ ,  $YZY$ ,  $ZXZ$  et  $ZYZ$ . En robotique, la convention la plus utilisée est  $ZYZ$ , et les trois angles qui correspondent aux rotations sont : la *précession*,  $\phi_1$  ; la *nutation*,  $\phi_2$  ; et le *spin*,  $\phi_3$ . Ces rotations sont illustrées à la figure 4.3 et sont définies en trois étapes :

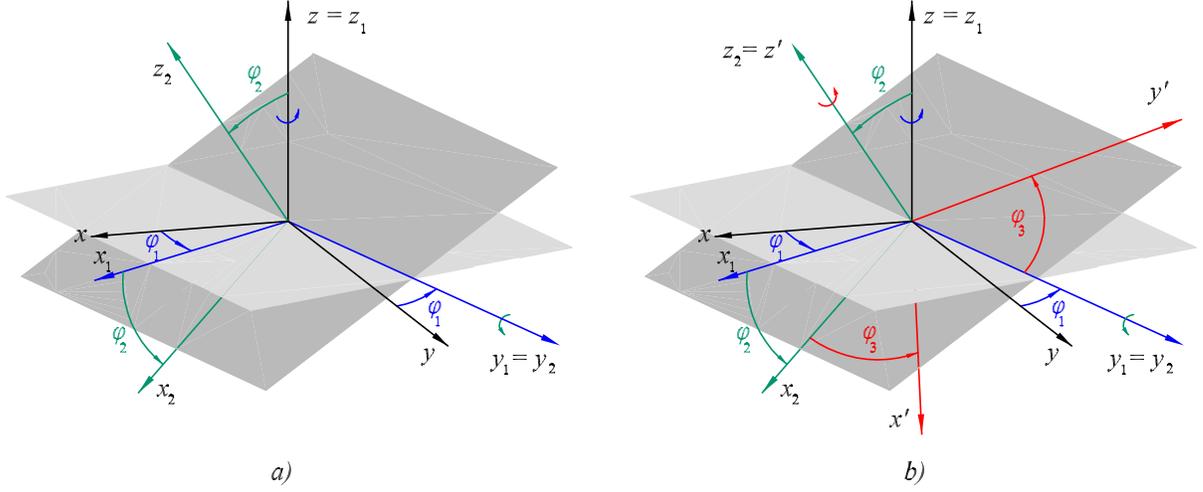


FIG. 4.3 – La convention  $ZYZ$  pour les angles d'Euler : a) précession et nutation, b) spin.

1. D'abord, on tourne le corps rigide d'un angle  $\phi_1$  autour de l'axe  $z$  :  
 $(x, y, z) \implies (x_1, y_1, z_1 = z)$ . La matrice de rotation  $\mathbf{R}_z(\phi_1)$  est :

$$\mathbf{R}_z(\phi_1) = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.9)$$

2. Ensuite, on fait une rotation d'un angle  $\phi_2$  autour du nouvel axe  $y_1$  :  
 $(x_1, y_1, z_1 = z) \implies (x_2, y_2 = y_1, z_2)$ . La matrice de rotation est donné par :

$$\mathbf{R}_y(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{bmatrix}; \quad (4.10)$$

3. Finalement, on tourne le corps d'un angle  $\phi_3$  autour de l'axe  $z_2$  :  
 $(x_2, y_2 = y_1, z_2) \implies (x', y', z' = z_2)$ . La matrice de rotation  $\mathbf{R}_z(\phi_3)$  est :

$$\mathbf{R}_z(\phi_3) = \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Par conséquent, la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  peut être écrite comme le produit de trois rotations successives autour des axes  $Oz$ ,  $Oy$  et  $Oz$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2)\mathbf{R}_z(\phi_3), \quad (4.12)$$

ou sous une forme matricielle :

$$\mathbf{R}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{bmatrix} c_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\phi_3} - s_{\phi_1}s_{\phi_3} & -c_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\phi_3} - s_{\phi_1}c_{\phi_3} & c_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ s_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\phi_3} + c_{\phi_1}s_{\phi_3} & -s_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\phi_3} + c_{\phi_1}c_{\phi_3} & s_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ -s_{\phi_2}c_{\phi_3} & s_{\phi_2}s_{\phi_3} & c_{\phi_2} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

où  $c_{\phi_i}$  et  $s_{\phi_i}$  désignent respectivement le cosinus et le sinus de l'angle  $\phi_i$ .

### 4.3.2 Les angles Tilt & Torsion

Certains auteurs [14] ont introduit les angles d'Euler modifiés, appelés les angles Tilt & Torsion (T&T). Du point de vue géométrique, les nouveaux angles sont plus intuitifs et directs. De plus, il y a plusieurs applications où la position de l'outil se définit seulement par le *tilt*, la *torsion* restant constante.

En utilisant cette nouvelle paramétrisation, une orientation arbitraire est obtenue en seulement deux étapes. D'abord, on amène l'axe  $Oz$  dans  $Oz_{12} = Oz'$  par une seule rotation (non-précédée d'une précession), en tournant le corps rigide autour d'un axe  $a$  (*axe tilt*) d'un angle  $\phi_2$ . Ensuite, pour obtenir l'orientation finale désirée,  $Ox'y'z'$ , il faut simplement tourner autour de l'axe  $Oz'$ , d'un angle  $\sigma$  (l'endspin ou la torsion).

Donc, la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  est définie par 2 rotations successives :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_a(\phi_2)\mathbf{R}_z(\sigma). \quad (4.14)$$

Il faut noter que la première rotation, le tilt, n'est pas la même que la précession suivie par la nutation,

$$\mathbf{R}_a(\phi_2) \neq \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2), \quad (4.15)$$

et l'axe tilt n'est pas (nécessairement) un axe du repère rigide. Par conséquent, l'angle  $\sigma$  n'est pas le même que l'angle  $\phi_3$ . En effet,  $\sigma = \phi_3 + \phi_1$ .

Pour situer l'*axe tilt* on a besoin d'un angle  $\phi_1$  qui a la même valeur que l'angle de précession  $\phi_1$  de la convention  $ZYZ$ . L'angle  $\phi_1$  représente l'angle entre l'axe  $Ox$  et la

projection de l'axe  $Oz'$  dans le plan  $Oxy$ . On définit le plan  $\mathcal{T}$ , le *plan du tilt*, qui est perpendiculaire à l'axe  $a$  et qui contient les axes  $Oz_1, Oz_2, Oz'$ . L'angle  $\phi_2$  est égal à la nutation. Les angles T&T sont illustrés à la figure 4.4.

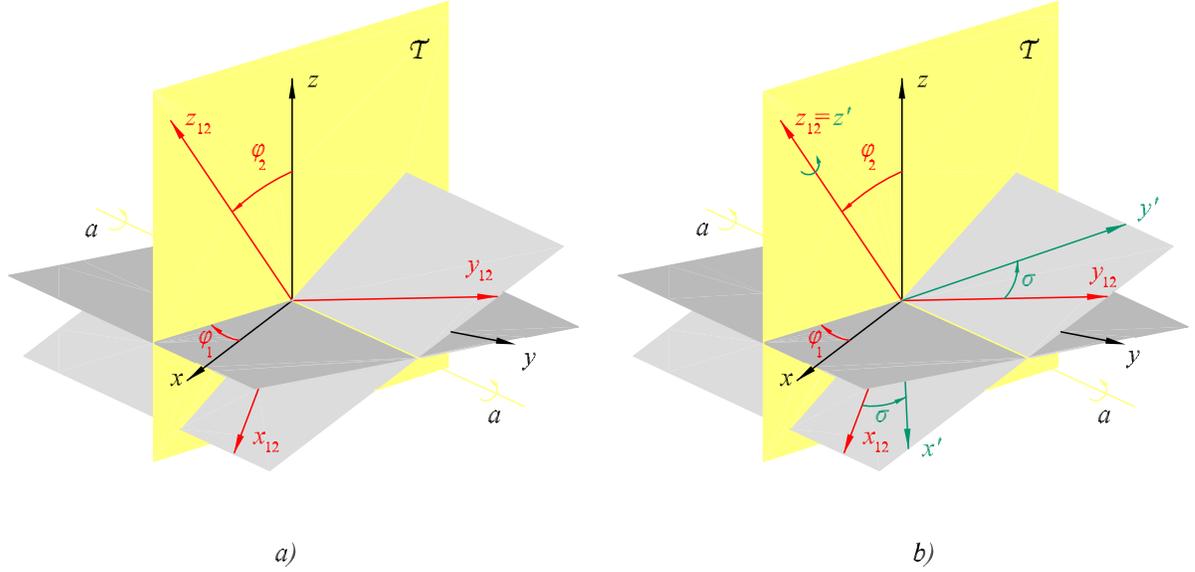


FIG. 4.4 – Les deux rotations successives pour les angles Tilt & Torsion : a) tilt, b) torsion.

Cependant, si l'on veut écrire la matrice de rotation  $\mathbf{R}_a(\phi_2)$ , on doit seulement la décomposer en trois rotations successives comme :

$$\mathbf{R}_a(\phi_2) = \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2)\mathbf{R}_z(-\phi_1). \quad (4.16)$$

La relation (4.14) devient :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2)\mathbf{R}_z(-\phi_1)\mathbf{R}_z(\sigma) = \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2)\mathbf{R}_z(\sigma - \phi_1), \quad (4.17)$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{R}(\phi_1, \phi_2, \sigma) = \begin{bmatrix} c_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\sigma-\phi_1} - s_{\phi_1}s_{\sigma-\phi_1} & -c_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\sigma-\phi_1} - s_{\phi_1}c_{\sigma-\phi_1} & c_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ s_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\sigma-\phi_1} + c_{\phi_1}s_{\sigma-\phi_1} & -s_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\sigma-\phi_1} + c_{\phi_1}c_{\sigma-\phi_1} & s_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ -s_{\phi_2}c_{\sigma-\phi_1} & s_{\phi_2}s_{\sigma-\phi_1} & c_{\phi_2} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

L'équation (4.17) nous amène à la conclusion que les angles Tilt & Torsion  $(\phi_1, \phi_2, \sigma)$  sont équivalents aux angles d'Euler  $(\phi_1, \phi_2, \sigma - \phi_1)$  dans la convention  $ZYZ$ , autrement dit, le spin,  $\phi_3$ , est remplacé par l'angle  $\sigma - \phi_1$ . Il est bien connu qu'une orientation donnée peut-être spécifiée par au moins deux triplets d'angles d'Euler. Pour éviter cette sorte d'ambiguïté, on établit des limites pour les nouveaux angles :

- pour l’azimuth,  $\phi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ;
- pour le tilt,  $\phi_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$ ;
- pour la torsion,  $\sigma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

### 4.3.3 Détermination des lieux de singularités

Pour obtenir les lieux de singularités de type  $II$ , dans cette section, on exprime la matrice  $\mathbf{J}$  en fonction des paramètres géométriques du robot. L’expression de la jacobienne sous une forme invariante a déjà été obtenue dans la section 4.2.

On définit trois repères :

- le repère fixe auxiliaire,  $\mathcal{R}_b = O_b x_b y_b z_b$ , attaché à la base et pour lequel l’axe  $O_b x_b$  passe par  $A_1$  et l’axe  $O_b y_b$  est dans le plan  $A_1 A_2 A_3$ .
- le repère fixe,  $\mathcal{R} = Oxyz$ , dont les axes sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}_b$ ;
- le repère mobile,  $\mathcal{R}' = Ox'y'z'$ , qui est attaché à la plate-forme. Dans la position initiale,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  coïncident.

Les repères sont illustrés à la figure 4.5. Les coordonnées du point  $A_i$  dans le repère  $\mathcal{R}_b$  sont données par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1]_{\mathcal{R}_b} &= [\overrightarrow{O_b A_1}]_{\mathcal{R}_b} = [w_1, 0, 0], \\ [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{R}_b} &= [\overrightarrow{O_b A_2}]_{\mathcal{R}_b} = [w_2, u_2, 0], \\ [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{R}_b} &= [\overrightarrow{O_b A_3}]_{\mathcal{R}_b} = [w_3, u_3, 0]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puisque la matrice jacobienne est donnée dans le repère  $\mathcal{R}$ , il faut passer du repère  $\mathcal{R}_b$  au repère  $\mathcal{R}$ . Les coordonnées des points  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , (en effet, les vecteurs  $\mathbf{a}_i$ ) dans le repère  $\mathcal{R}$  sont données par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{O_b A_1}]_{\mathcal{R}} = [w_1, 0, -h], \\ [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{O_b A_2}]_{\mathcal{R}} = [w_2, u_2, -h], \\ [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{O_b A_3}]_{\mathcal{R}} = [w_3, u_3, -h]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Les coordonnées des points  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dans le repère  $\mathcal{R}'$  sont :

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{R}'} &= [\overrightarrow{O B_1}]_{\mathcal{R}'} = [x_1, 0, 0], \\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{R}'} &= [\overrightarrow{O B_2}]_{\mathcal{R}'} = [x_2, y_2, 0], \\ [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{R}'} &= [\overrightarrow{O B_3}]_{\mathcal{R}'} = [x_3, y_3, 0]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Le changement de repère de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  se fait par une matrice,  $\mathbf{Q}$ , de rotation autour du

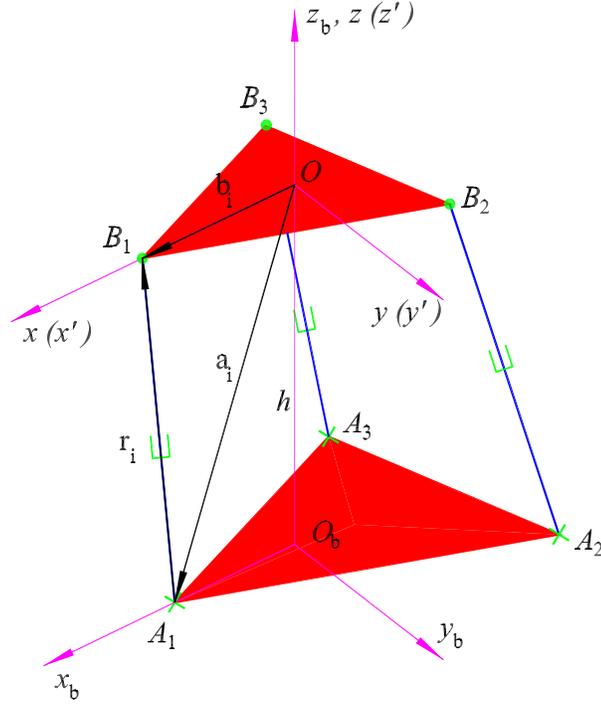


FIG. 4.5 – Le manipulateur sphérique à 3 ddl dans la configuration initiale.

point  $O$ , qui peut-être paramétrisée soit par les angles d'Euler,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , soit par les angles Tilt & Torsion,  $\phi_1, \phi_2, \sigma$ .

#### 4.3.3.1 Détermination des lieux de singularités avec les angles d'Euler

La matrice de changement de repère de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  est exprimée par les angles d'Euler :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_E(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2)\mathbf{R}_z(\phi_3). \quad (4.22)$$

La forme exacte de  $\mathbf{R}_E$  est donnée à l'équation (4.13).

On écrit les coordonnées des points  $B_i, i = 1, 2, 3$ , (les vecteurs  $\mathbf{b}_i$ ) dans le repère  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{OB_1}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{R}_E[\overrightarrow{OB_1}]_{\mathcal{R}'}, \\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{OB_2}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{R}_E[\overrightarrow{OB_2}]_{\mathcal{R}'}, \\ [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{OB_3}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{R}_E[\overrightarrow{OB_3}]_{\mathcal{R}'}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les expressions des vecteurs  $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, 3$ , dans le repère  $\mathcal{R}$ , sont données à (4.20). Il nous reste seulement à les substituer dans la forme invariante de la jacobienne. On obtient l'expression de la matrice  $\mathbf{J} = \{j_{ik}\}$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , comme une fonction de  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ . Les éléments,  $j_{ik}, i, k = 1, 2, 3$ , sont donnés à l'annexe D.1.

Les lieux de singularités de type  $II$  sont donnés par :

$$\det(\mathbf{J}) = 0. \quad (4.24)$$

L'expression analytique du déterminant de la jacobienne est une fonction des trois variables : les angles  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , et implicitement de la géométrie du manipulateur représentée par le vecteur constant  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} = [w_1, w_2, w_3, u_2, u_3, h, x_1, x_2, x_3, y_2, y_3]$ ,

$$\det(\mathbf{J}_E) = \Delta_E = \Delta_E(\phi_1, \phi_2, \phi_3).$$

#### 4.3.3.2 Détermination des lieux de singularités avec les angles T&T

Dans cette section, on obtient les lieux de singularités dans le même repère,  $\mathcal{R}$ , mais en utilisant les angles Tilt&Torsion,  $\phi_1, \phi_2$  et  $\sigma$ .

La matrice de rotation  $\mathbf{R}_{TT}$  est définie par deux rotations consécutives, dont la première, autour de l'axe  $a$ , est équivalente à trois autres rotations successives (voir relation 4.16). Ainsi, la rotation  $\mathbf{Q}$  qui est aussi la matrice de changement de repère de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  est :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{TT}(\phi_1, \phi_2, \sigma - \phi_1) = \mathbf{R}_z(\phi_1)\mathbf{R}_y(\phi_2)\mathbf{R}_z(\sigma - \phi_1). \quad (4.25)$$

Sous une forme matricielle, l'expression est donnée par (4.18). On écrit les vecteurs  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  dans le repère  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{OB_1}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{R}_{TT}[\overrightarrow{OB_1}]_{\mathcal{R}'} , \\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{OB_2}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{R}_{TT}[\overrightarrow{OB_2}]_{\mathcal{R}'} , \\ [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{R}} &= [\overrightarrow{OB_3}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{R}_{TT}[\overrightarrow{OB_3}]_{\mathcal{R}'} . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Les vecteurs  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont donnés par (4.20).

En substituant  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  dans (4.8), on obtient l'expression de la matrice jacobienne,  $\mathbf{J}_{TT}$ , dans le repère  $\mathcal{R}$  en fonction des angles Tilt & Torsion. Les éléments de cette matrice,  $j_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, 3$  sont donnés à l'annexe D.2.

Pour déterminer l'expression analytique des lieux de singularités, il faut calculer les racines du  $\det(\mathbf{J}_{TT})$ . L'expression analytique du déterminant est une fonction de trois variables, les angles  $\phi_1, \phi_2, \sigma$ , et des paramètres constants qui définissent la géométrie du manipulateur,  $\mathbf{g}$ .

$$\det(\mathbf{J}_{TT}) = \Delta_{TT} = \Delta_{TT}(\phi_1, \phi_2, \sigma).$$

On utilise cette fonction comme point de départ de l'algorithme de détection de singularités.

## 4.4 Mise en oeuvre de l'algorithme

L'algorithme de détection de singularités est présenté dans le chapitre 2, (section 2.2.2) et sous une forme schématique à l'annexe A. L'algorithme a été mis en oeuvre pour le manipulateur parallèle plan avec des actionneurs prismatiques à 3 ddl (chapitre 3).

Le but de cet algorithme est de détecter les singularités dans un espace de travail donné, défini comme une hyper-boîte tri-dimensionnelle  $\mathcal{H}$ . La méthode utilisée consiste à vérifier le signe du déterminant de la jacobienne. Si le signe change il y a (au moins) une singularité dans l'espace de travail donné. Si le signe reste le même il n'y a aucune singularité dans la boîte  $\mathcal{H}$ .

Dans les deux sous-sections qui suivent, on analyse l'algorithme en utilisant les angles d'Euler et les angles Tilt&Torsion.

### 4.4.1 Mise en oeuvre de l'algorithme — angles d'Euler

On commence avec l'expression analytique du  $\det(\mathbf{J}_E)$ . Le déterminant de la jacobienne est en fonction des trois variables  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  et implicitement de la géométrie du manipulateur (le vecteur  $\mathbf{g}$ ).

$$\Delta_E = \Delta_E(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

Les degrés des variables sont données dans le tableau 4.1.

variables	$\sin \phi_1$	$\cos \phi_1$	$\sin \phi_2$	$\cos \phi_2$	$\sin \phi_3$	$\cos \phi_3$
degrés dans $\Delta_E$	2	1	2	1	1	1

TAB. 4.1 – Degrés des variables dans  $\det(\mathbf{J}_E) = \Delta_E(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$

Les variables  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont bornées :

$$\phi_{1min} \leq \phi_1 \leq \phi_{1max}, \quad \phi_{2min} \leq \phi_2 \leq \phi_{2max}, \quad \phi_{3min} \leq \phi_3 \leq \phi_{3max}.$$

En suivant l'algorithme, le premier changement de variables élimine les  $\sin \phi_i$  et  $\cos \phi_i$  et les remplace par la tangente du demi-angle,  $\tan \frac{\phi_i}{2}$ ,  $i = 1, 2, 3$  :

$$\sin \phi_i = \frac{2T_i}{1 + T_i^2} \quad \text{et} \quad \cos \phi_i = \frac{1 - T_i^2}{1 + T_i^2}, \quad (4.27)$$

$$\text{où } T_i = \tan \frac{\phi_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

On obtient une nouvelle paramétrisation pour le déterminant :

$$\Delta_E = \Delta_E(T_1, T_2, T_3).$$

Le degré pour chacune des nouvelles variables  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , est donné dans le tableau 4.2.

variables	$T_1$	$T_2$	$T_3$
degrés dans $\Delta_E$	4	4	2

TAB. 4.2 – Degrés des variables dans  $\Delta_E = \Delta_E(T_1, T_2, T_3)$

Les contraintes pour les variables vont changer :

$$T_{1min} \leq T_1 \leq T_{1max}, \quad T_{2min} \leq T_2 \leq T_{2max}, \quad T_{3min} \leq T_3 \leq T_{3max}.$$

Il est possible que les valeurs extrêmes de la fonction s'obtiennent pour une valeur limite (au moins) d'une des variables. Il est donc désirable de trouver une substitution qui exprime  $\Delta_E$  en fonction d'autres variables qui ne sont pas bornées. Dans ce but, on définit les variables  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (voir [13]), par :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{1min} + \frac{1 + \sin \alpha}{2} (T_{1max} - T_{1min}), \\ T_2 &= T_{2min} + \frac{1 + \sin \beta}{2} (T_{2max} - T_{2min}), \\ T_3 &= T_{3min} + \frac{1 + \sin \gamma}{2} (T_{3max} - T_{3min}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pour simplifier l'expression analytique, on effectue une nouvelle substitution en fonction des limites moyennes de l'espace de travail :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{1M} + T_{1m} \sin \alpha , \\ T_2 &= T_{2M} + T_{2m} \sin \beta , \\ T_3 &= T_{3M} + T_{3m} \sin \gamma , \end{aligned} \quad (4.29)$$

où

$$\begin{aligned} T_{1m} &= \frac{T_{1max} - T_{1min}}{2} & \text{et} & \quad T_{1M} = \frac{T_{1max} + T_{1min}}{2} , \\ T_{2m} &= \frac{T_{2max} - T_{2min}}{2} & \text{et} & \quad T_{2M} = \frac{T_{2max} + T_{2min}}{2} , \\ T_{3m} &= \frac{T_{3max} - T_{3min}}{2} & \text{et} & \quad T_{3M} = \frac{T_{3max} + T_{3min}}{2} . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Par conséquent, les nouvelles variables  $\alpha, \beta, \gamma$  ne sont pas bornées et sont définies partout dans l'espace de travail. En pratique on travaille avec les variables  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  et  $\sin \gamma$ , bornées dans  $[-1, 1]$  :

$$\Delta_E = \Delta_E(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma).$$

Le degré de chacune des variables est donné dans le tableau 4.3.

variables	$\sin \alpha$	$\sin \beta$	$\sin \gamma$
degrés dans $\Delta_E$	4	4	2

TAB. 4.3 – Degrés des variables dans  $\Delta_E = \Delta_E(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Les trois étapes de substitution peuvent être décrites ensemble de la façon suivante :

$$\Delta_E = \Delta_E(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \Delta_E(T_1, T_2, T_3) = \Delta_E(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma) = g(\alpha, \beta, \gamma).$$

On dénote la fonction finale des variables  $\alpha, \beta, \gamma$  par  $g$ . En suivant le schéma logique de l'annexe A, on cherche les extrémums de la fonction  $g(\alpha, \beta, \gamma)$ . Le résultat est un système non-linéaire de trois équations avec trois inconnues :

$$\mathcal{S}^E \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \alpha} &= G_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} &= G_\beta \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \gamma} &= G_\gamma \cos \gamma = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.31)$$

Les degrés de chacune des variables dans  $G_\alpha$ ,  $G_\beta$  et  $G_\gamma$  sont indiqués dans le tableau 4.4 :

variables	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$
degrés dans $G_\alpha$	3	0	4	0	2	0
degrés dans $G_\beta$	4	0	3	0	2	0
degrés dans $G_\gamma$	4	0	4	0	1	0

TAB. 4.4 – Degrés des variables pour les fonctions  $G_\alpha$ ,  $G_\beta$  et  $G_\gamma$ .

Le système  $\mathcal{S}^E$  est équivalent à huit sous-systèmes (voir le chapitre 2) :

$$\mathcal{S}^E = \mathcal{S}_0^E \cup \mathcal{S}_\alpha^E \cup \mathcal{S}_\beta^E \cup \mathcal{S}_\gamma^E \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^E \cup \mathcal{S}_{\beta\gamma}^E \cup \mathcal{S}_{\alpha\gamma}^E \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^E \quad (4.32)$$

On trouve les solutions des sous-systèmes et on substitue les solutions dans la fonction initiale,  $g$ , pour analyser son signe. Pour vérifier le signe de la fonction on vérifie d'abord les sommets,  $\mathcal{S}_0^E$ , puis les arêtes,  $\mathcal{S}_\alpha^E$ ,  $\mathcal{S}_\beta^E$ ,  $\mathcal{S}_\gamma^E$ , ensuite les faces,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^E$ ,  $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^E$ ,  $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^E$  et finalement l'intérieur de la boîte,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^E$ . Quand la procédure trouve un signe différent, elle s'arrête, car on sait qu'il existe (au moins) une singularité.

Si, après avoir vérifié les premiers sept sous-systèmes, on n'a rien trouvé on vérifie le dernier (voir figure 2.9), qui représente l'intérieur de la boîte. Pour trouver les extrémums en  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^E$  on analyse les degrés de chacune des variables pour chaque équation en utilisant le tableau 4.4. Puisque la troisième équation est linéaire en  $\sin \gamma$ , on exprime  $\sin \gamma$  en fonction de  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$  :

$$\sin \gamma = \frac{\sum_{i,j=1}^5 A_i B_j \sin^{(5-i)} \alpha \sin^{(5-j)} \beta}{\sum_{i,j=1}^5 C_i D_j \sin^{(5-i)} \alpha \sin^{(5-j)} \beta}, \quad (4.33)$$

où les coefficients  $A_i$ ,  $B_j$ ,  $C_i$ ,  $D_j$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$ , dépendent de la géométrie du manipulateur et des limites de l'espace de travail.

En substituant  $\sin \gamma$  dans les deux premières équations, on obtient un système non-linéaire avec deux équations et deux inconnues :  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$ . Les degrés des ces deux variables dans les fonctions  $G_\alpha$  et  $G_\beta$  sont donnés dans le tableau 4.5.

variables	$\sin \alpha$	$\sin \beta$
degrés dans $G_\alpha$	11	12
degrés dans $G_\beta$	12	11

TAB. 4.5 – Degrés des variables dans  $G_\alpha$  et  $G_\beta$ , après l'élimination de  $\sin \gamma$ .

Le système non-linéaire est trop complexe pour une résolution directe. En pratique, on peut utiliser une méthode graphique. D'abord on détermine si le système a au moins une solution pour  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$  dans l'intervalle  $[-1,1]$  (ceci peut se faire en utilisant la fonction *fsolve* du logiciel *Maple*). Ensuite, on trace les courbes définies par les équations  $G_\alpha = 0$  et  $G_\beta = 0$  et on détermine visuellement les zones,  $\mathcal{Z}_i$ , de l'intersection des graphiques. Dans chaque  $\mathcal{Z}_i$  on trouve la position exacte d'intersection. Après avoir trouvé toutes les paires  $(\sin \alpha, \sin \beta)$ , il nous reste à les remplacer dans l'équation (4.33) et à trouver  $\sin \gamma$ . Pour vérifier si le signe du déterminant change, il faut substituer le triplet  $(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma)$  dans la fonction  $g$ . La procédure est exemplifiée dans la section prochaine pour les angles Tilt&Torsion.

D'après nos essais pour différentes géométries du manipulateur, on n'a jamais besoin de calculer les solutions du dernier système, car les surfaces des singularités ne sont pas fermées. Théoriquement, il est nécessaire de chercher les extrémums à l'intérieur de la boîte si et seulement si les surfaces des singularités sont fermées.

#### 4.4.2 Mise en oeuvre de l'algorithme — angles T&T

L'expression analytique du déterminant de la jacobienne,  $\det(\mathbf{J}_{\text{TT}}) = \Delta_{\text{TT}}$ , est en fonction de trois variables,  $\phi_1, \phi_2, \sigma$ , (l'azimuth, le tilt et la torsion) ainsi que des paramètres géométriques,  $\mathbf{g}$ ,

$$\Delta_{\text{TT}} = \Delta_{\text{TT}}(\phi_1, \phi_2, \sigma).$$

Les degrés pour ces variables sont donnés dans le tableau 4.6.

variables	$\sin \phi_1$	$\cos \phi_1$	$\sin \phi_2$	$\cos \phi_2$	$\sin \sigma$	$\cos \sigma$
degrés dans $\Delta_{\text{TT}}$	3	1	2	1	1	1

TAB. 4.6 – Degrés des variables dans  $\Delta_{\text{TT}} = \Delta_{\text{TT}}(\phi_1, \phi_2, \sigma)$

Les trois variables sont bornées par :

$$\phi_{1min} \leq \phi_1 \leq \phi_{1max}, \quad \phi_{2min} \leq \phi_2 \leq \phi_{2max}, \quad \sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}.$$

Pour éliminer les sinus et les cosinus, on utilise la substitution avec la tangente du demi-angle comme à l'équation (4.27) (le spin,  $\phi_3$  devient la torsion,  $\sigma$ ) :

$$\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(T_1, T_2, T_3) .$$

Les nouvelles variables sont  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  et leur degré sont donnés dans le tableau 4.7.

variables	$T_1$	$T_2$	$T_3$
degrés dans $\Delta_{TT}$	6	4	2

TAB. 4.7 – Degrés des variables dans  $\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(T_1, T_2, T_3)$ .

Les contraintes sont :

$$T_{1min} \leq T_1 \leq T_{1max}, \quad T_{2min} \leq T_2 \leq T_{2max}, \quad T_{3min} \leq T_3 \leq T_{3max}.$$

Pour éliminer les cas où on peut obtenir des valeurs extrêmes pour les limites, on passe à la dernière substitution, basée sur l'idée de Merlet [13] dans laquelle on introduit des nouvelles variables sans limites  $\alpha, \beta, \gamma$  voir (4.28). Pour simplifier les expressions analytiques on utilise les relations (4.29) et (4.30). En réalité, on travaille avec les sinus de nos nouvelles variables :

$$\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma).$$

Les degrés sont donnés dans le tableau 4.9.

variables	$\sin \alpha$	$\sin \beta$	$\sin \gamma$
degrés dans $\Delta_{TT}$	6	4	2

TAB. 4.8 – Degrés des variables dans  $\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Les étapes de substitutions sont décrites de la façon suivante :

$$\Delta_{TT} = \Delta_{TT}(\phi_1, \phi_2, \sigma) = \Delta_{TT}(T_1, T_2, T_3) = \Delta_{TT}(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma) = h(\alpha, \beta, \gamma).$$

En cherchant les extrémums du  $\Delta_{\text{TT}}$ , on dérive la fonction  $h(\alpha, \beta, \gamma)$  par rapport à ses variables. Comme résultat on a un système non-linéaire de trois équations avec trois inconnues.

$$\mathcal{S}^{\text{TT}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial \alpha} = H_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \beta} = H_\beta \cos \beta = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \gamma} = H_\gamma \cos \gamma = 0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Le degré de chacune des variables dans  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  et  $H_\gamma$  est indiqué dans le tableau 4.9.

variables	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$
degrés dans $H_\alpha$	5	0	4	0	2	0
degrés dans $H_\beta$	6	0	3	0	2	0
degrés dans $H_\gamma$	6	0	4	0	1	0

TAB. 4.9 – Degrés des variables dans les fonctions  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  et  $H_\gamma$ .

Le système  $\mathcal{S}^{\text{TT}}$  est équivalent à huit sous-systèmes qui correspondent aux :

- sommets,  $\mathcal{S}_0^{\text{TT}}$  ;
- arêtes,  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{TT}}$ ,  $\mathcal{S}_\beta^{\text{TT}}$ ,  $\mathcal{S}_\gamma^{\text{TT}}$  ;
- faces,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{TT}}$ ,  $\mathcal{S}_{\beta\gamma}^{\text{TT}}$ ,  $\mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{\text{TT}}$  ;
- l'intérieur,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{\text{TT}}$ .

$$\mathcal{S}^{\text{TT}} = \mathcal{S}_0^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_\alpha^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_\beta^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_\gamma^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_{\beta\gamma}^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{\text{TT}} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{\text{TT}} \quad (4.35)$$

Le problème de vérification de l'existence de singularités dans un espace de travail donné est réduit à chercher les extrémums et les substituer dans  $\Delta_{\text{TT}}$  pour examiner la variation de son signe. On procède méthodiquement, en commençant avec les sommets. L'intérieur de la boîte est analysé si et seulement si les surfaces des singularités sont fermées (voir le schéma de l'algorithme présenté à l'annexe A).

Les sous-systèmes pour les sommets et les arêtes sont simples et faciles à résoudre. En passant aux faces, les équations deviennent plus complexes. Pour trouver les extrémums sur les faces, on utilise la méthode d'élimination dialytique, appelée aussi la méthode de Sylvester [19] qui consiste à réduire un système d'équations non-linéaires avec plusieurs

variables à une équation avec une seule inconnue. En pratique, on utilise la méthode pour des systèmes d'équations relativement petits, car le degré du polynôme résultant augmente exponentiellement avec le nombre et le degré des équations. Une fois que le degré explose, beaucoup de racines parasites sont introduites et doivent être éliminées. Par exemple, pour une torsion constante,  $T_3 = \text{const}$ , les degrés pour  $\sin \alpha$  sont 6 et 5, et pour  $\sin \beta$  sont 3 et 4 (voir tableau 4.9). Pour résoudre ce système on élimine une des variables,  $\sin \beta$  (le degré le plus petit) et on obtient l'équation (4.36) en  $\sin \alpha$ , équation de degré 39,

$$\sum_{i=1}^{40} C_i \sin^{(40-k)} \alpha = 0, \quad (4.36)$$

où  $C_i$ ,  $i = 1 \dots 40$ , sont des coefficients qui dépendent de la géométrie du manipulateur et des limites de l'espace de travail. Après avoir trouvé les solutions pour  $\sin \alpha$ , on trouve les solutions pour  $\sin \beta$  et on garde seulement les solutions qui vérifient en totalité le système initial. Autrement dit on élimine toutes les solutions non-pertinentes qui ont été introduites par la méthode dyalytique. Finalement, on substitue toutes les solutions valides trouvées dans  $h$  et on examine la variation du signe.

Si l'on arrive à vérifier l'intérieur de la boîte, il faut résoudre le système  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{\text{TT}}$ . La dernière équation du système,  $H_\gamma = 0$ , est linéaire en  $\sin \gamma$ , donc on l'exprime en fonction des deux autres variables,  $\sin \alpha$  et  $\sin \beta$ ,

$$\sin \gamma = \frac{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 A_i B_j \sin^{(7-i)} \alpha \sin^{(5-j)} \beta}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 C_i D_j \sin^{(7-i)} \alpha \sin^{(5-j)} \beta}. \quad (4.37)$$

En substituant  $\sin \gamma$  dans les deux autres équations,  $H_\alpha = 0$  et  $H_\beta = 0$ , le degré du système augmente (voir le tableau 4.10).

variables	$\sin \alpha$	$\sin \beta$
degrés dans $H_\alpha$	17	11
degrés dans $H_\beta$	18	12

TAB. 4.10 – Degrés des variables dans  $H_\alpha$  et  $H_\beta$  après l'élimination de  $\sin \gamma$ .

Pour résoudre ce système, on met en pratique la méthode graphique. L'utilisation de la méthode dyalytique n'est pas possible à cause du degré élevé (430) du polynôme final.

### Exemple — méthode graphique

On prend un manipulateur sphérique avec la géométrie donnée dans le tableau 4.11.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$u_2$	$u_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_2$	$y_3$	$h$
1.6	-1.1	-0.9	1.2	-1	1	-0.8	-0.1	0	-0.5	1.5

TAB. 4.11 – Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple.

Les limites de l'espace de travail sont données dans le tableau 4.12.

$\phi_{1min}$	$\phi_{1max}$	$\phi_{2min}$	$\phi_{2max}$	$\phi_{3min}$	$\phi_{3max}$
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

TAB. 4.12 – Limites de l'espace de travail du manipulateur sphérique.

D'abord, on représente les courbes définies par  $H_\alpha$  et  $H_\beta$ , dans le plan des deux variables  $\sin \alpha$  ( $s_a$ ) et  $\sin \beta$  ( $s_b$ ) (voir figure 4.6). On détermine les zones approximatives,  $\mathcal{Z}_i$ , d'intersection des courbes. Autrement dit, on choisit des zones rectangulaires, qui bornent les intersections.

Ensuite, on cherche les solutions exactes du système,  $\mathbf{s}_i = (s_{\alpha i}, s_{\beta i})$ , pour  $(\sin \alpha, \sin \beta)$  dans chaque  $\mathcal{Z}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  d'une façon très rapide avec la fonction *fsolve* du logiciel *Maple*. Pour trouver les valeurs de  $\sin \gamma$ , on substitue toutes les paires,  $\mathbf{s}_i$ , trouvées, dans l'équation (4.37).

Il a été observé que le temps nécessaire pour vérifier une boîte  $\mathcal{H}^{\text{TT}}$ , peut varier entre :

- un temps minimum  $t = 0,581$  s, après avoir vérifié seulement les sommets et
- un temps maximum  $t = 3,6399$  min, quand il est nécessaire de résoudre tous les sous-systèmes (dans le cas où  $\mathcal{S}_{\alpha\beta\gamma}^{\text{TT}}$  n'a aucune solution pour les contraintes imposés).

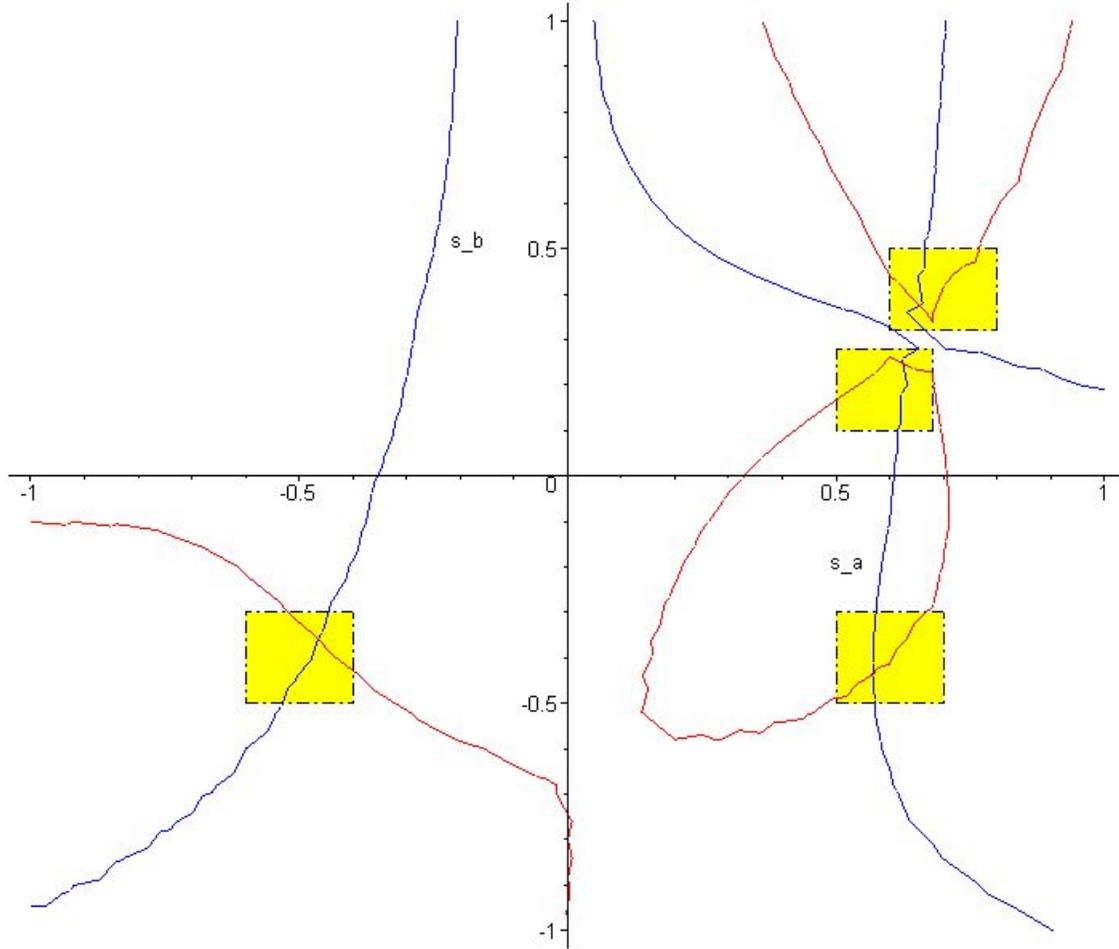


FIG. 4.6 – Méthode graphique — exemple.

#### 4.4.3 Mise en oeuvre de l'algorithme pour une torsion constante

Pour une torsion constante, la section de la boîte  $\mathcal{H}^{\text{TT}}$  est un rectangle,  $\mathcal{D}^{\text{tc}}$ . Dans ce cas, l'expression du déterminant de la jacobienne,  $\Delta_{\text{TT}}$ , devient moins complexe et dépend seulement de deux variables : l'azimuth,  $\phi_1$  et le tilt,  $\phi_2$ .

Pour vérifier s'il y a des singularités dans  $\mathcal{D}^{\text{tc}}$ , on suit la même séquence de substitutions, comme à la section 4.4.2 :

$$\det(\mathbf{J}_{\text{TT}}) = \Delta_{\text{TT}} = \Delta_{\text{TT}}(\phi_1, \phi_2) = \Delta_{\text{TT}}(T_1, T_2) = \Delta_{\text{TT}}(\sin \alpha, \sin \beta) = h(\alpha, \beta).$$

Dans toutes ces étapes de transformation, les degrés des variables restent les mêmes comme dans les tableaux 4.6, 4.7 et 4.9.

Pour trouver les extrémums de la fonction  $h$ , on dérive par rapport aux variables,  $\alpha$  et  $\beta$ , et on obtient :

$$\mathcal{S}^{\text{tc}} \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \alpha} = H_\alpha \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \beta} = H_\beta \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Les degrés des variables dans  $H_\alpha$  et  $H_\beta$  sont donnés dans le tableau 4.10.

Le système  $\mathcal{S}^{\text{tc}}$  est équivalent à quatre sous-systèmes :

$$\mathcal{S}^{\text{tc}} = \mathcal{S}_0^{\text{tc}} \cup \mathcal{S}_\alpha^{\text{tc}} \cup \mathcal{S}_\beta^{\text{tc}} \cup \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{tc}}, \quad (4.39)$$

- sommets,  $\mathcal{S}_0^{\text{tc}}$  ;
- arêtes,  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{tc}}$ ,  $\mathcal{S}_\beta^{\text{tc}}$  ;
- l'intérieur du rectangle,  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{tc}}$ .

Pour vérifier l'existence de singularités dans  $\mathcal{D}^{\text{tc}}$ , on suit les étapes de l'algorithme décrit dans le chapitre 2, section 2.2.3. Donc, on commence avec le système le plus simple,  $\mathcal{S}_0^{\text{tc}}$ . On substitue les solutions  $\{\sin \alpha, \sin \beta\} = \{1, 1\}$ ,  $\{1, -1\}$ ,  $\{-1, 1\}$ ,  $\{-1, -1\}$ , dans  $h(\alpha, \beta)$  et on examine son signe. S'il reste le même, on continue avec les autres sous-systèmes,  $\mathcal{S}_\alpha^{\text{tc}}$ ,  $\mathcal{S}_\beta^{\text{tc}}$ , et finalement avec  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\text{tc}}$ . Aussitôt qu'on trouve un signe différent, le programme s'arrête et signale qu'il y a une singularité dans l'espace de travail donné.

Il a été observé que le temps nécessaire pour vérifier un rectangle  $\mathcal{D}^{\text{tc}}$ , peut varier entre :

- un temps minimum de  $t = 0,09$  s, quand on vérifie seulement les sommets ; et
- un temps maximum de  $t = 4,466$  s, quand on vérifie tout le  $\mathcal{D}^{\text{tc}}$ .

## 4.5 Validation de l'algorithme — Exemples

Dans cette section on présente la validation de l'algorithme pour trois exemples de géométries différentes du manipulateur parallèle sphérique avec des actionneurs prismatiques, où le déterminant de la jacobienne,  $\Delta_{\text{TT}}$ , a été obtenu en utilisant les angles Tilt & Torsion.

### 4.5.1 Exemple 1

Les paramètres géométriques du manipulateur sont donnés dans les tableaux 4.13.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$u_2$	$u_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_2$	$y_3$	$h$
1.6	-1.1	-0.9	1.2	-1	1	-0.6	-0.2	1	-0.5	1.2

TAB. 4.13 – Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple 1.

Les limites de l'espace de travail sont données dans le tableau 4.12.

La surface des singularités pour la géométrie présentée dans le tableau 4.13, est donnée à la figure 4.7.

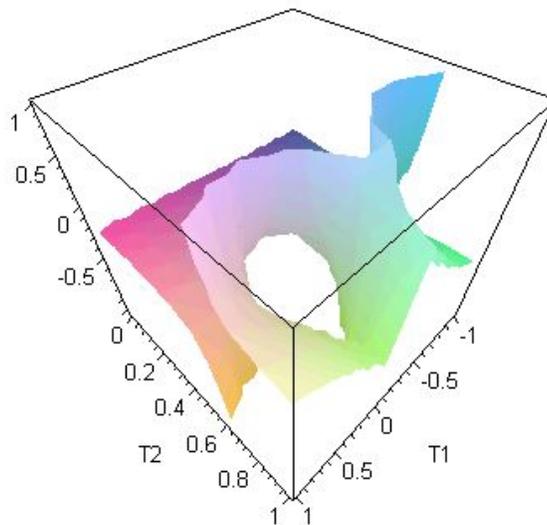


FIG. 4.7 – Surface des singularités pour le manipulateur sphérique — exemple 1.

La figure 4.8 présente la surface des singularités obtenue pour différents niveaux de discrétisation en appliquant l'algorithme présenté à la section 4.4.2 pour chaque boîte élémentaire,  $\mathcal{H}_i^{\text{TT}}$ . Quand le réseau de discrétisation devient de plus en plus fin, l'image obtenue s'approche du graphique obtenu en utilisant la fonction *implicitplot3d* du logiciel *Maple*, figure 4.7.

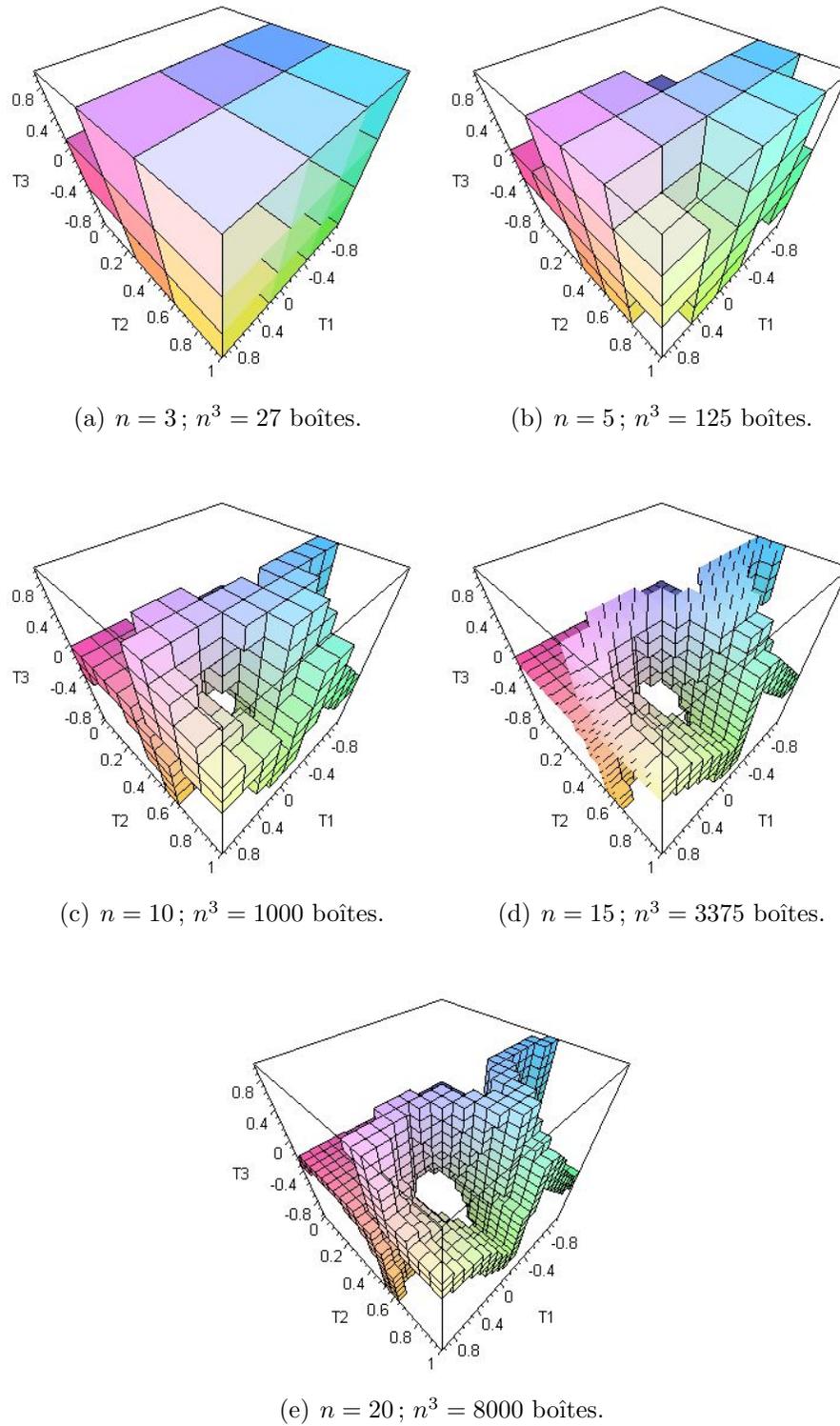


FIG. 4.8 – Manipulateur sphérique — discrétisation 3D — exemple 1.

Le temps nécessaire pour valider l'algorithme dépend du niveau de discrétisation et il augmente avec le nombre de petites boîtes. Même si le temps est très long, il ne faut pas oublier que la vérification est faite seulement une fois pour valider l'algorithme. Si la surface des singularités intersecte moins de boîtes, le temps augmente.

### 4.5.2 Exemple 2

Les paramètres géométriques du manipulateur sont donnés dans les tableaux 4.14.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$u_2$	$u_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_2$	$y_3$	$h$
1.6	-1.1	-0.9	1.2	-1	1	-0.6	-0.2	1	-0.5	1.4

TAB. 4.14 – Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple 2.

Les limites de l'espace de travail sont données dans le tableau 4.12.

La surface des singularités pour cette géométrie est représentée à la figure 4.9.

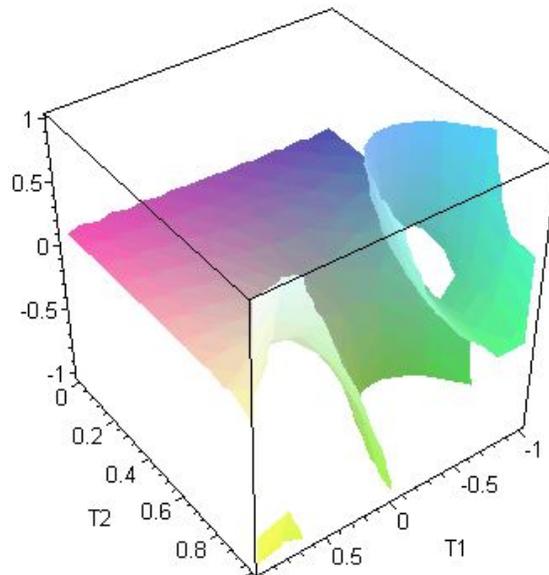


FIG. 4.9 – Surface des singularités pour le manipulateur sphérique — exemple 2.

En discrétisant l'hyper-boîte  $\mathcal{H}^{\text{TT}}$  en plusieurs petites boîtes, on obtient le réseau 3D (voir figure 4.10). Quand le réseau devient de plus en plus raffiné, la surface des singularités formée des petites boîtes,  $\mathcal{H}_i^{\text{TT}}$ , s'approche de plus en plus de la surface des singularités représentée à la figure 4.9.

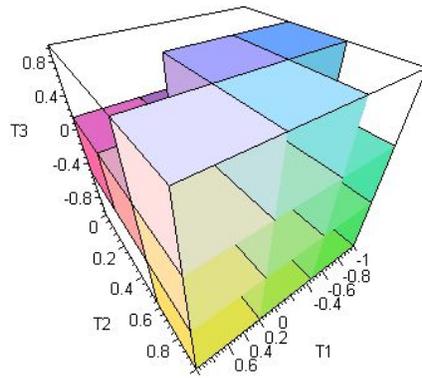
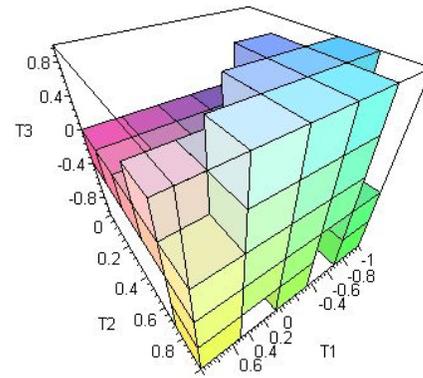
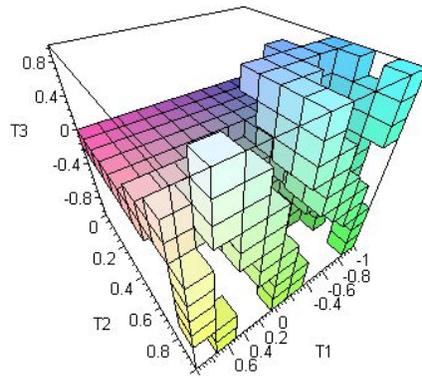
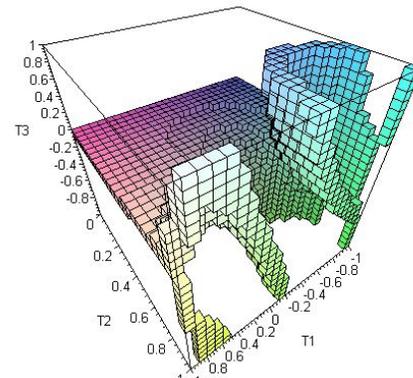
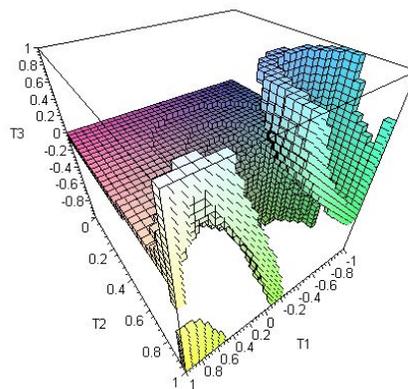
(a)  $n = 3$ ;  $n^3 = 27$  boîtes.(b)  $n = 5$ ;  $n^3 = 125$  boîtes.(c)  $n = 10$ ;  $n^3 = 1000$  boîtes.(d)  $n = 25$ ;  $n^3 = 12625$  boîtes.(e)  $n = 30$ ;  $n^3 = 27000$  boîtes.

FIG. 4.10 – Manipulateur sphérique — discrétisation 3D — exemple 2.

### 4.5.3 Exemple 3

Les paramètres géométriques du manipulateur sont donnés dans les tableaux 4.15.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$u_2$	$u_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_2$	$y_3$	$h$
1.6	-1.1	-0.9	1.2	-1	1	-0.8	-0.1	0	-0.5	1.5

TAB. 4.15 – Paramètres géométriques du manipulateur sphérique — exemple 3.

Les limites de l'espace de travail sont données dans le tableau 4.12.

La surface des singularités pour cette géométrie est représentée à la figure 4.11.

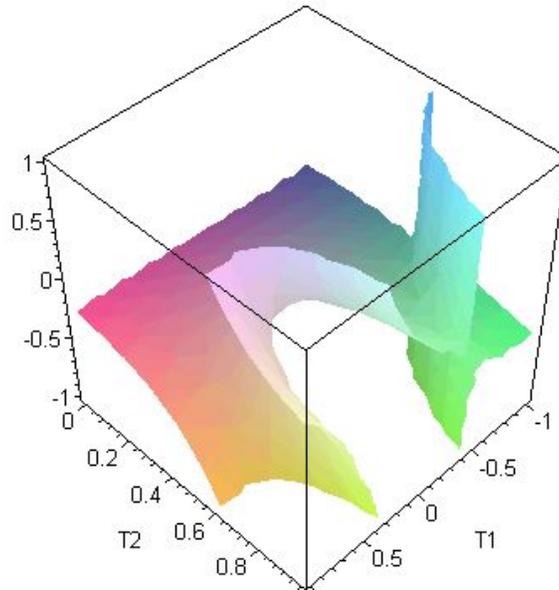


FIG. 4.11 – Surface des singularités pour le manipulateur sphérique — exemple 3.

Le réseau 3D obtenu à la suite de la discrétisation de l'espace de travail est illustré à la figure 4.12

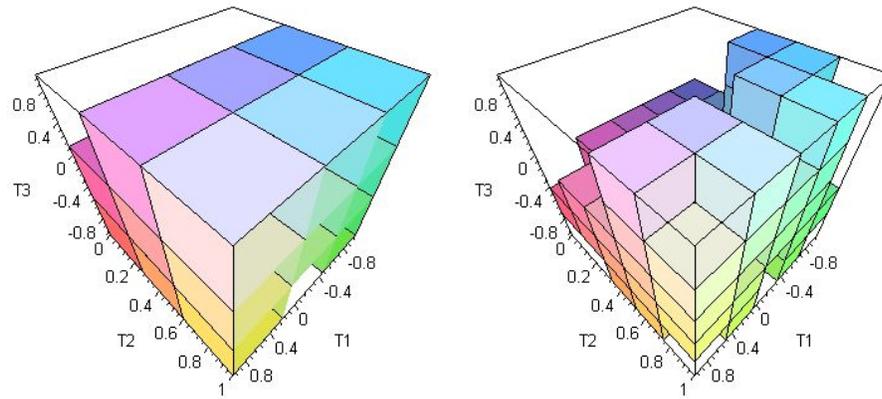
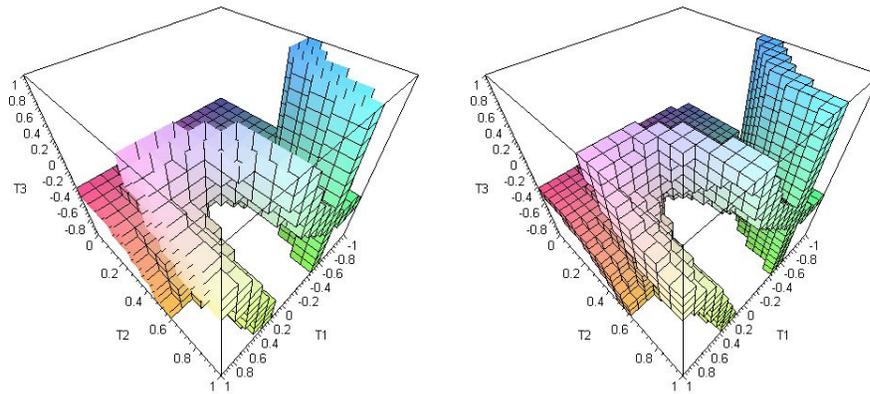
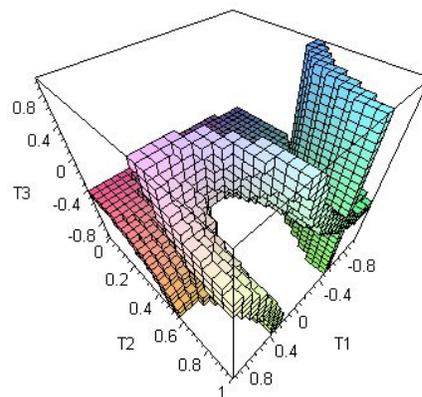
(a)  $n = 3$ ;  $n^3 = 27$  boîtes.(b)  $n = 5$ ;  $n^3 = 125$  boîtes.(c)  $n = 15$ ;  $n^3 = 3375$  boîtes.(d)  $n = 20$ ;  $n^3 = 8000$  boîtes.(e)  $n = 25$ ;  $n^3 = 12625$  boîtes.

FIG. 4.12 – Manipulateur sphérique — discrétisation 3D — exemple 3.

## 4.6 Validation de l'algorithme pour une torsion constante — Exemples

Dans cette section on présente la validation de l'algorithme pour une torsion constante. La vérification consiste dans l'étude du signe de  $\det(\mathbf{J}_{\mathbf{TT}}) = \Delta_{\mathbf{TT}}(\alpha, \beta)$  dans chaque rectangle  $\mathcal{D}_i^{\text{tc}}$ .

Par exemple, pour la géométrie donnée dans le tableau 4.13 et pour les limites de l'espace de travail données dans le tableau 4.16,

$\phi_{1min}$	$\phi_{1max}$	$\phi_{2min}$	$\phi_{2max}$
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

TAB. 4.16 – Limites de l'espace de travail du manipulateur sphérique — torsion constante.

la courbe des singularités pour une torsion,  $\sigma = 0$ , est montrée à la figure 4.13.

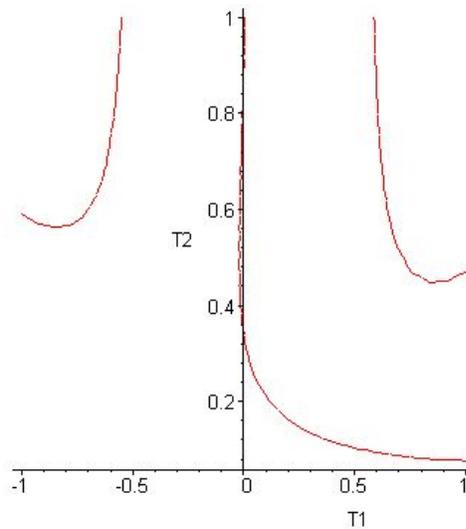
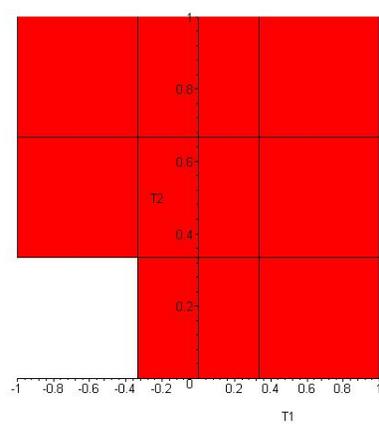


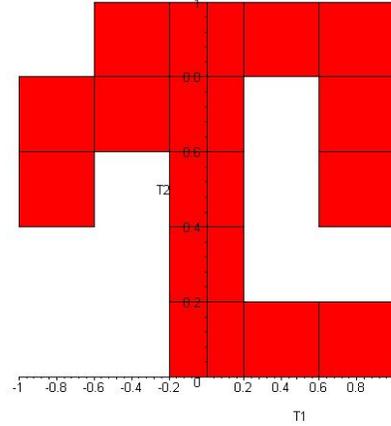
FIG. 4.13 – Manipulateur sphérique — courbes des singularités pour  $\sigma = 0$ .

Quand  $h(\alpha, \beta)$  change de signe, le rectangle,  $\mathcal{D}_i^{\text{tc}}$ , est ajouté sur le graphique — réseau 2D.

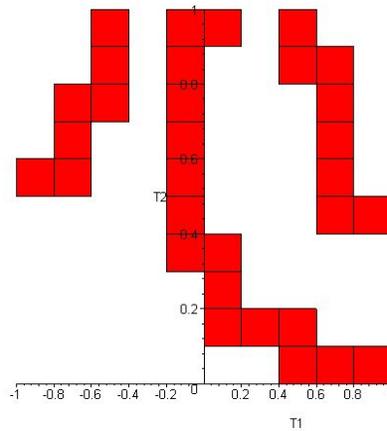
Les différentes étapes de discrétisation 2D, pour une torsion,  $\sigma = 0$ , sont illustrées à la figure 4.14.



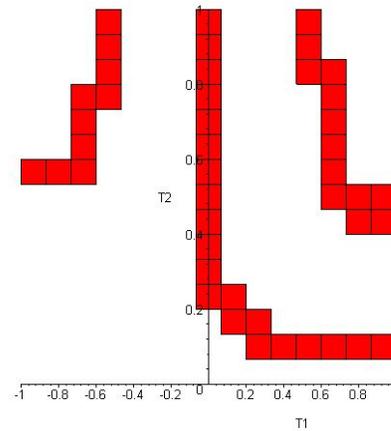
(a)  $n = 3$ ;  $n^2 = 9$  rectangles.



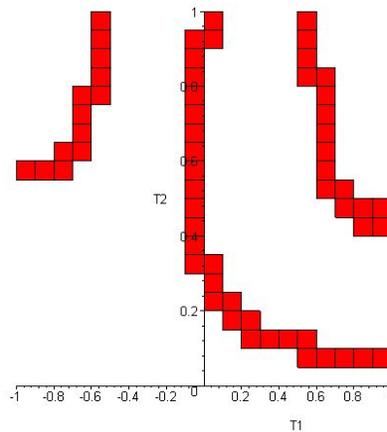
(b)  $n = 5$ ;  $n^2 = 25$  rectangles.



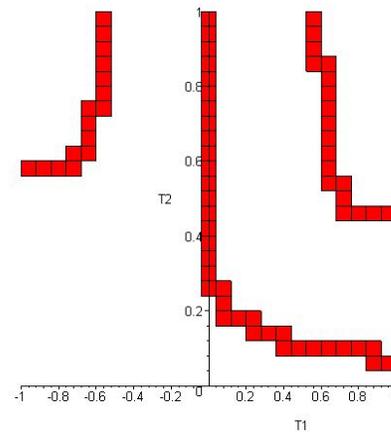
(c)  $n = 10$ ;  $n^2 = 100$  rectangles.



(d)  $n = 15$ ;  $n^2 = 225$  rectangles.

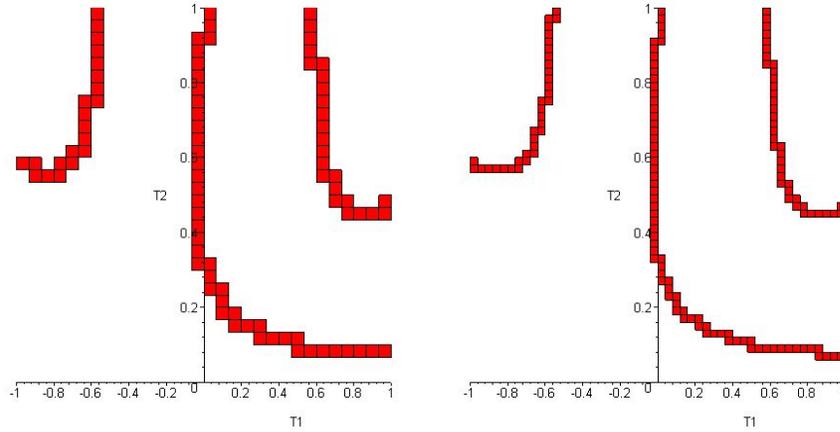
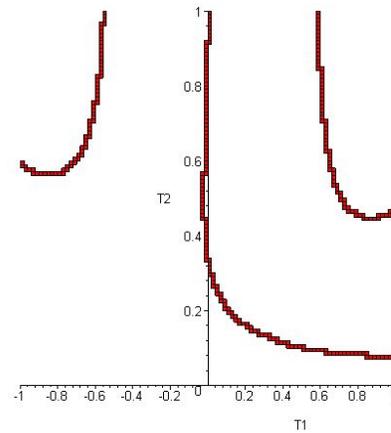


(e)  $n = 20$ ;  $n^2 = 400$  rectangles.



(f)  $n = 25$ ;  $n^2 = 625$  rectangles.

FIG. 4.14 – Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour  $\sigma = 0$  (1<sup>re</sup> partie).

(g)  $n = 30$ ;  $n^2 = 900$  rectangles.(h)  $n = 50$ ;  $n^2 = 2500$  rectangles.(i)  $n = 100$ ;  $n^2 = 10000$  rectangles.FIG. 4.14 – Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour  $\sigma = 0$  (2<sup>e</sup> partie).

Pour la même géométrie du manipulateur, et pour une torsion  $\sigma = \frac{\pi}{3}$ , le réseau 2D est illustré à la figure 4.16 et la courbe des singularités est montrée à la figure 4.15.

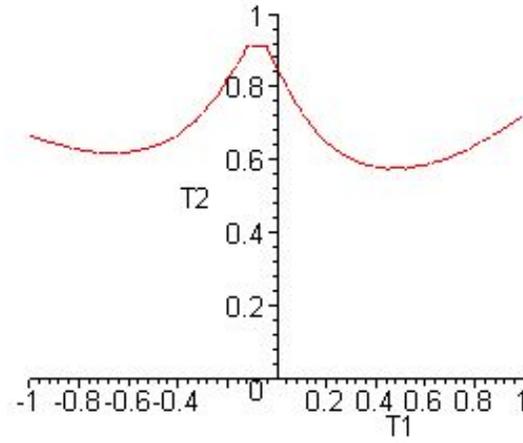


FIG. 4.15 – Manipulateur sphérique — courbes des singularités pour  $\sigma = \frac{\pi}{3}$ .

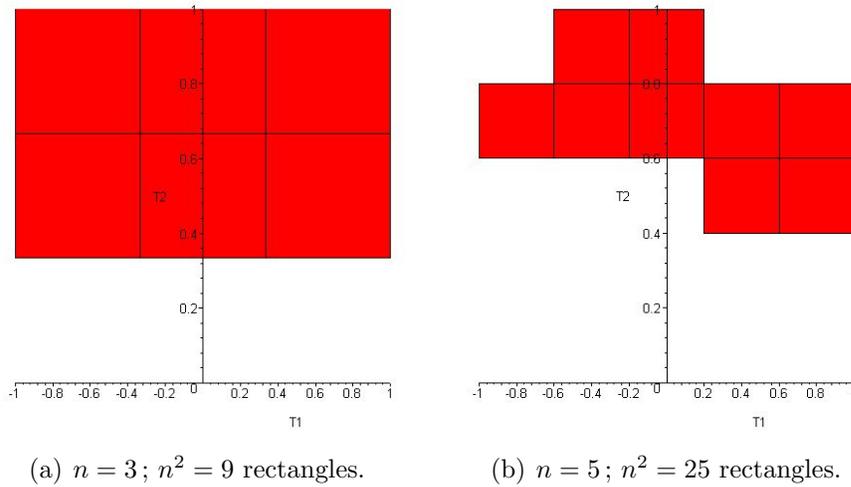
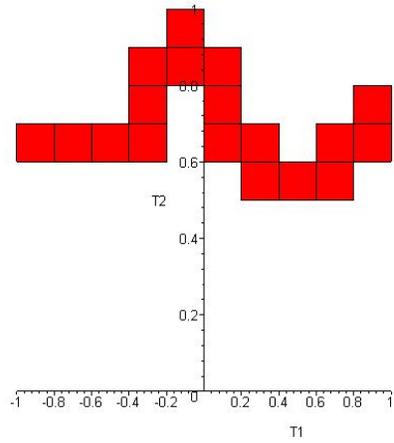
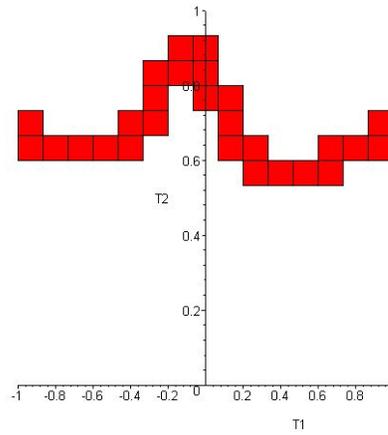
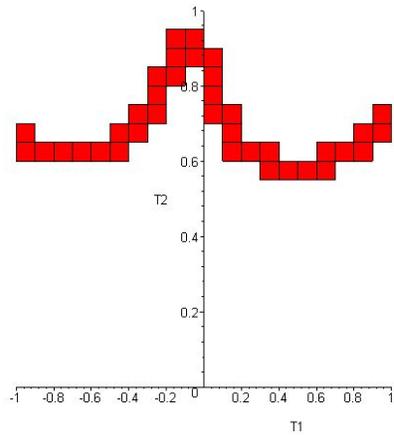
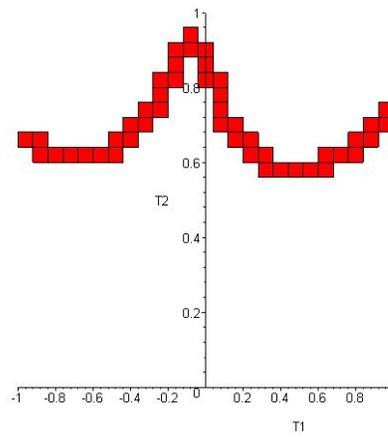
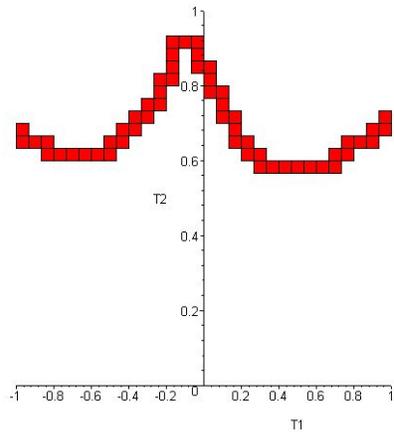
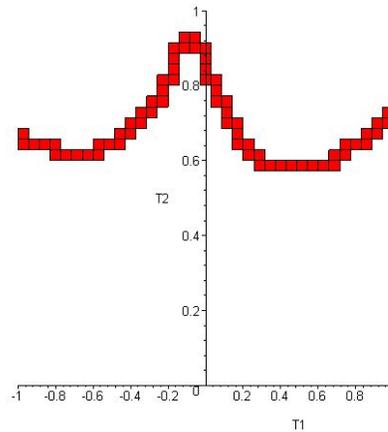


FIG. 4.16 – Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour  $\sigma = \frac{\pi}{3}$  (1<sup>re</sup> partie).

(d)  $n = 10$ ;  $n^2 = 100$  rectangles.(e)  $n = 15$ ;  $n^2 = 225$  rectangles.(f)  $n = 20$ ;  $n^2 = 400$  rectangles.(g)  $n = 25$ ;  $n^2 = 625$  rectangles.(h)  $n = 30$ ;  $n^2 = 900$  rectangles.(i)  $n = 35$ ;  $n^2 = 1225$  rectangles.FIG. 4.16 – Manipulateur sphérique — discrétisation 2D pour  $\sigma = \frac{\pi}{3}$  (2<sup>e</sup> partie).

# Conclusion

Le sujet de ce mémoire est l'analyse des zones de l'espace de travail d'un manipulateur parallèle en vue de la détection des singularités. Le travail apporte une contribution à la conception et l'utilisation des robots parallèles. Il est très important de savoir si pendant son fonctionnement, le manipulateur entre dans des configurations singulières. Donc, il est nécessaire, depuis la phase de conception, de détecter de façon certaine la présence de singularités dans l'espace de travail.

Les principales contributions de ce travail à l'étude des singularités sont décrites succinctement dans les quatre paragraphes suivants.

La méthode générale utilisée est celle des *extrémums*, qui consiste à vérifier le signe du déterminant de la jacobienne, sans avoir besoin de calculer les racines de ce déterminant. La méthode élimine la nécessité de trouver et de visualiser les lieux de singularités.

Plusieurs étapes cascadées de substitutions sont introduites. Parmi elles, il y a des *substitutions trigonométriques* qui introduisent les limites de l'espace de travail directement dans l'expression du déterminant de la jacobienne, sans nécessiter des équations supplémentaires. Comme conséquence, les nouvelles variables sont *illimitées*. Un schéma logique a été conçu pour l'algorithme général de détection pour n'importe quel manipulateur parallèle à 3 ddl.

Des *algorithmes détaillés* de détection ont été développés à partir de la méthode générale et mis en oeuvre pour deux types d'architectures à 3 ddl. Pour chacune, la géométrie est *générale*, l'utilisateur pouvant introduire tous les paramètres. De plus, les algorithmes proposés sont illustrés géométriquement d'une façon très intuitive et sont *précis et rapides*. Un choix opportun de l'ordre de résolution des sous-systèmes finaux est nécessaire pour avoir un temps de réponse très court. Dans le cas où une des coordonnées cartésiennes est constante, les algorithmes ont été adaptés pour des sections de l'espace de travail.

Des *algorithmes additionnels* détaillés ont été conçus pour valider, par une *vérification visuelle*, les algorithmes de détection, en discrétisant tout l'espace de travail. Ils ont été mis en pratique dans l'espace tri-dimensionnel et aussi adaptés pour les cas plans.

Tous ces résultats sont présentés dans les chapitres 2 à 4.

La méthode générale a été présentée dans le chapitre 2 pour un manipulateur à  $n$  ddl, ensuite décrite brièvement en ajoutant les substitutions cascadées pour un manipulateur à 6 ddl et détaillée finalement pour une architecture à 3 ddl. Une présentation générale de l'algorithme de vérification a été faite dans la dernière section du chapitre. La validation peut être faite aussi pour certaines sections de l'espace de travail.

Dans le chapitre 3, en suivant le trajet direct du schéma logique, un algorithme de détection des singularités a été développé pour un manipulateur parallèle plan à 3 ddl avec des actionneurs prismatiques. La procédure a été adaptée pour être appliquée dans le cas d'une orientation constante. L'ordre de résolution des 8 sous-systèmes résultants, après les substitutions nécessaires, est très important. En considérant plusieurs géométries différentes, on a remarqué que, d'habitude, si des singularités existent, celles-ci sont détectées par l'évaluation de la fonction sur les sommets. Donc, le premier sous-système à résoudre est celui des sommets, qui est le plus simple et a un temps de réponse très court. L'algorithme de validation a été mis en oeuvre pour des géométries différentes du manipulateur. Il a été aussi adopté pour valider l'algorithme pour une certaine section de l'espace de travail.

Dans le chapitre 4, la deuxième architecture générale sur laquelle l'algorithme de détection des singularités a été appliqué a été étudiée. Pour une géométrie quelconque du manipulateur sphérique avec des actionneurs prismatiques à 3 ddl, on a utilisé pour

la première fois la paramétrisation Tilt&Torsion, afin d'obtenir des expressions moins compliquées pour la jacobienne et son déterminant. Malgré cela, les équations du dernier sous-système sont très complexes et, si des solutions existent, elles n'ont pu être résolues que par une méthode graphique. Cependant, après de nombreuses expériences, il n'a jamais été nécessaire de trouver les solutions de ce sous-système. Il est donc conjecturé (mais pas démontré) que la solution de ce sous-système n'est pas nécessaire en pratique.

Le but final de ce travail, c'est-à-dire de permettre la détection de régions exemptes de singularités dans les espaces de travail des mécanismes parallèles à 3 degrés de liberté, a été atteint. En conséquence, ce travail donne une réponse sûre à la question posée dans l'introduction : Est-ce que l'espace de travail qu'on analyse représente une zone exempte de singularités ou non ?

## Perspectives

Pour un travail futur, on prévoit plusieurs voies.

D'abord, l'algorithme de détection des singularités peut être adapté pour des géométries spécifiques des manipulateurs. Dans certains cas, où la géométrie possède certaines symétries, il est possible que les équations puissent être simplifiées et que le temps de calcul pour chercher des zones exemptes des singularités soit beaucoup diminué.

Un autre facteur très important qui influence le temps de réponse est la nature du lieu des singularités. Si l'ensemble des singularités n'a aucune composante connexe bornée dans l'espace des coordonnées de l'effecteur, il est inutile d'analyser l'intérieur de l'hyper-boîte qui correspond au sous-système d'équations le plus complexe. En effet, dans ce cas, la présence de singularités serait forcément annoncée sur la frontière de la boîte (les sommets, les arêtes, etc). Jusqu'à maintenant, avec de multiples essais, on n'a jamais rencontré un cas où la vérification de l'intérieur de la boîte tri-dimensionnelle a été requise. Donc, l'étude de la géométrie des surfaces des singularités pour les robots analysés peut simplifier l'algorithme.

La dernière voie de recherche consiste à mettre en oeuvre l'algorithme pour des manipulateurs parallèles à 4 ddl ou plus. Cette tâche sera beaucoup simplifiée si l'on peut démontrer que l'ensemble des singularités n'a aucune composante bornée pour l'architecture spécifique étudiée.

# Bibliographie

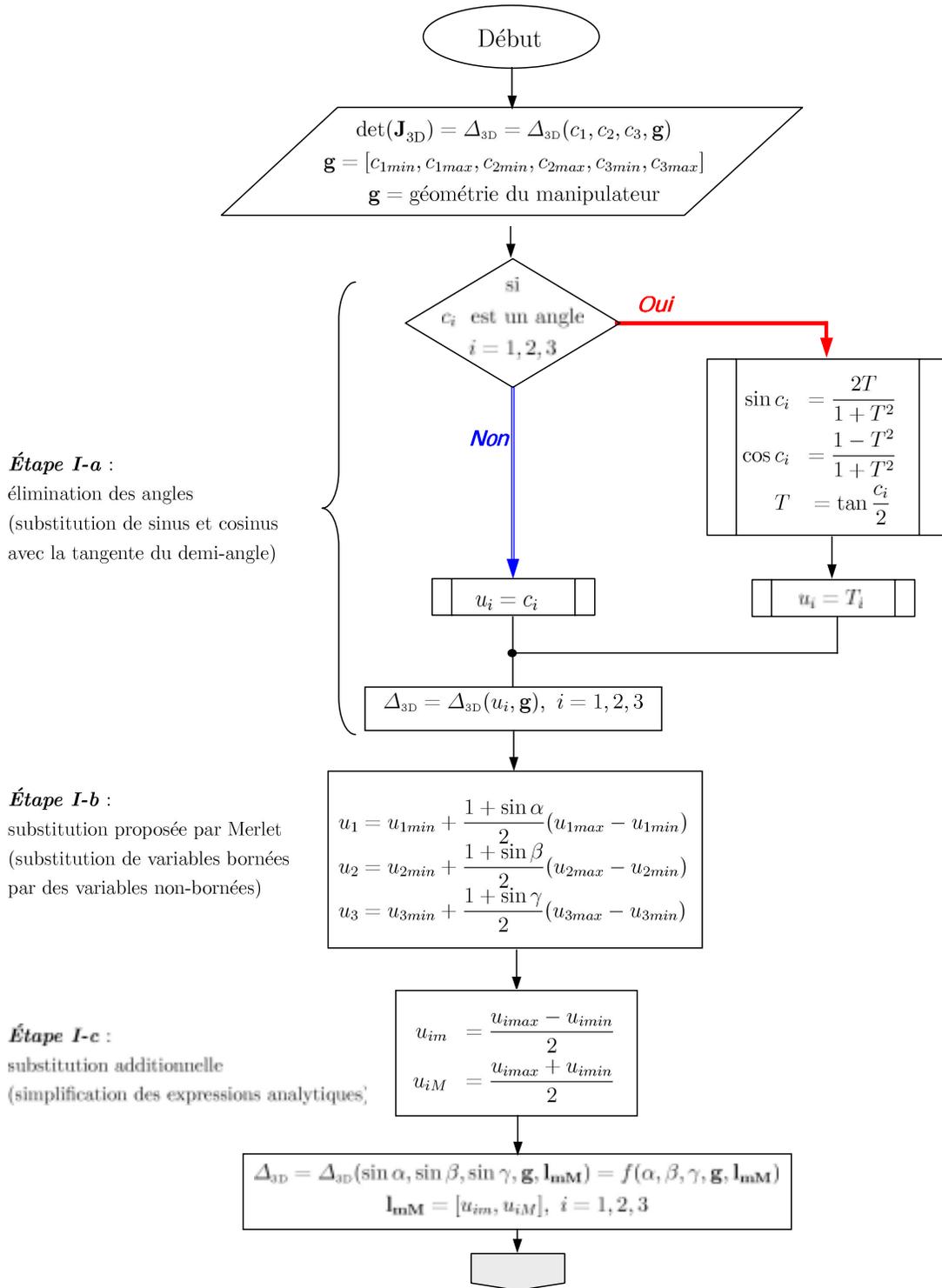
- [1] Merlet, J-P., (1990), ‘Les Robots parallèles’, *Traité des nouvelles Technologies*, Série Robotique, Editions Hermès, Paris, France.
- [2] <http://dmtwww.epfl.ch/isr/lrp/Definitions/definitions.html>
- [3] Zlatanov, D., Fenton, R.G. and Benhabib, B., (1994), ‘Singularity analysis of mechanism and robots via a velocity-equation model of the instantaneous kinematics’, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '94)*, San Diego, CA, pp. 986-992, May 8-13.
- [4] Zlatanov, D., Benhabib, B., Fenton, R.G., (1994), “Velocity and singularity analysis of Hybrid Chain Manipulators”. Proc. of the 23rd Biennial Mechanism Conference, DE-Vol.72, pp.467-476.
- [5] Gosselin, C.M. et Angeles, J., (1990), ‘Singularity analysis of closed-loop kinematic chains’, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol.6., No.3, pp. 281-290
- [6] Zlatanov, D., (1998), “Generalized Singularity Analysis of Mechanisms”. Ph.D. thesis, University of Toronto.
- [7] Merlet, J.-P., (1989), ‘Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry’, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 8, No 5, pp. 45–56.
- [8] Sefrioui, J. et Gosselin, C.M., (1994), ‘On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators’, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 30, No. 4, pp. 533–551.

- [9] Sefrioui, J. et Gosselin, C.M., (1994), 'Étude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques avec actionneurs prismatiques', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 4, pp. 559–579.
- [10] Sefrioui, J., (1992), 'Problème géométrique direct et lieux de singularité des manipulateurs parallèles', Projet de recherche au doctorat.
- [11] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M., (1996), 'Singularity analysis and representation of spatial six-dof parallel manipulators', *Proceedings of the 5th Recent Advances in Robot Kinematics*, pp. 389–398.
- [12] Mayer St-Onge, B., (1997) 'Étude et représentation des lieux de singularités de la plate-forme de Gough-Stewart', Projet de recherche à la maîtrise.
- [13] Merlet J-P., (1997) 'Estimation efficace des caractéristiques de robots parallèles : Extrémums des raideurs et des coordonnées, vitesses, forces articulaires et Singularités dans un espace de travail en translation', Rapport de recherche, # 3243, INRIA.
- [14] Bonev, I. and Jaha Ryu, (1999), 'Orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators', *Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences*, September 12-15, 1999, Las Vegas, Nevada.
- [15] Gosselin, C.M. et Angeles, J., (1988), 'The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator', *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol 110, No 1, pp. 331-336
- [16] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M., (1997) 'Problème géométrique direct et lieux de singularité des manipulateurs parallèles plans à 3ddl', Rapport de recherche, Université Laval.
- [17] Gosselin, C. and Jean-Francois Hamel, (1994), 'The agile eye : a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device', *Comptes-Rendus de la IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, pp. 781–786.
- [18] Gosselin, C., St-Pierre, E., et Gagné, M., (1996), 'On the development of the agile eye : mechanical design, control issues and experimentation', *IEEE Robotics and Automation Society Magazine*, Vol. 3, No. 4, pp. 29–37.
- [19] Angeles, J., (1997), 'Fundamentals of Robotic Mechanical Systems : Theory, Methods and Algorithms', *Mechanical Engineering Series*, Springer-Verlag.

# Annexe A

## Schéma logique de l'algorithme pour les manipulateurs parallèles à 3 ddl

Le schéma logique sur lequel est basé l'algorithme de détection des singularités dans un espace de travail borné est donné dans cette annexe. Il est détaillé étape par étape dans les 4 parties suivantes.

FIG. A.1 – Schéma logique pour la détection des singularités — 1<sup>re</sup> partie.

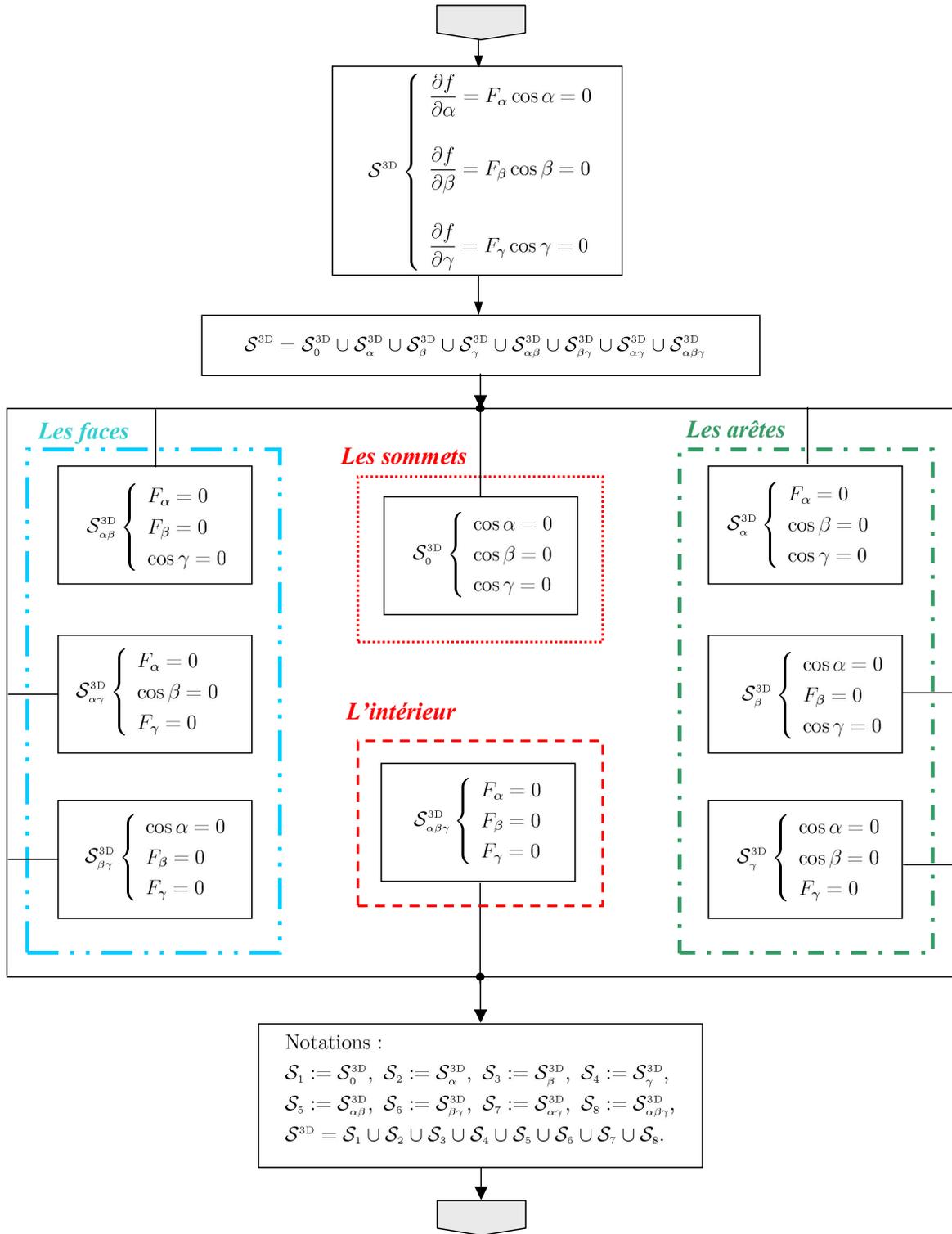


FIG. A.1 – Schéma logique pour la détection des singularités — 2<sup>e</sup> partie.

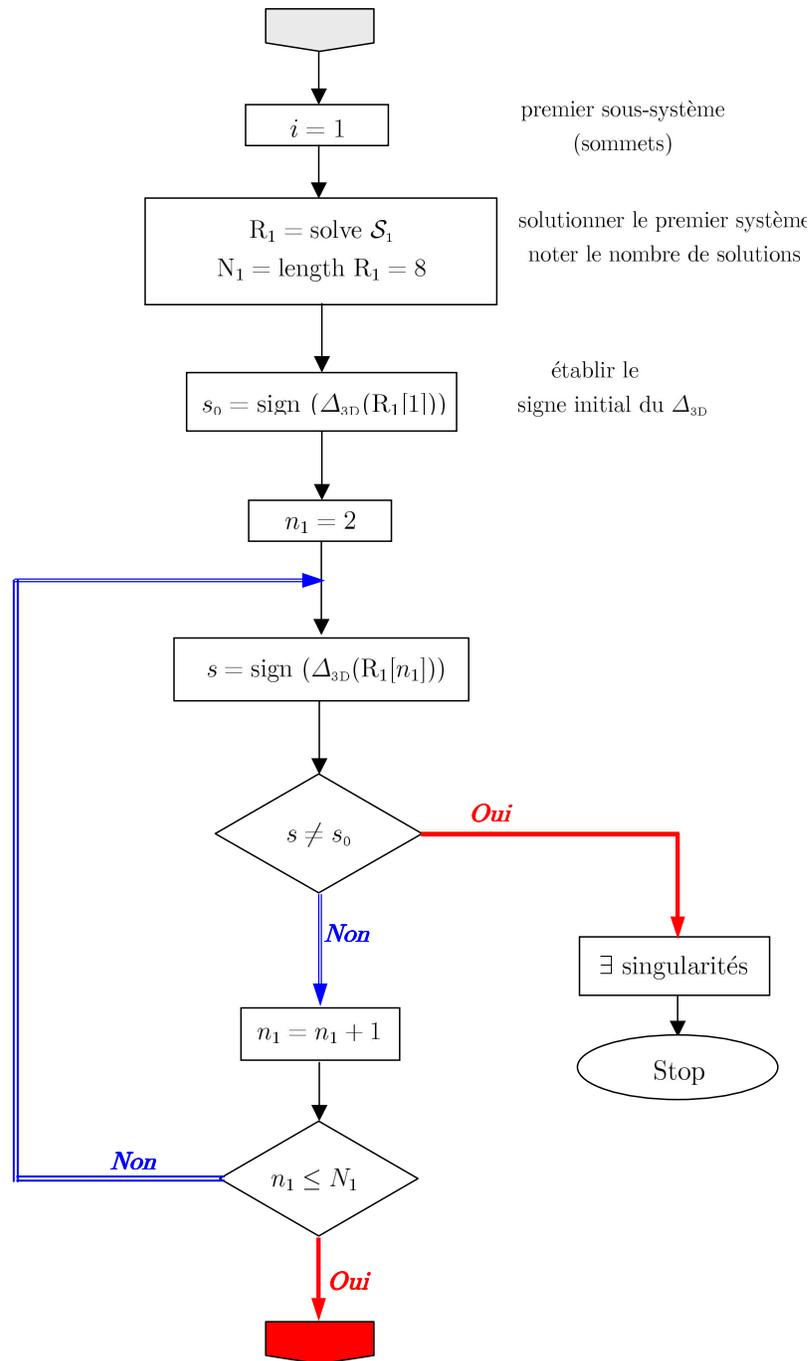


FIG. A.1 – Schéma logique pour la détection des singularités — 3<sup>e</sup> partie.

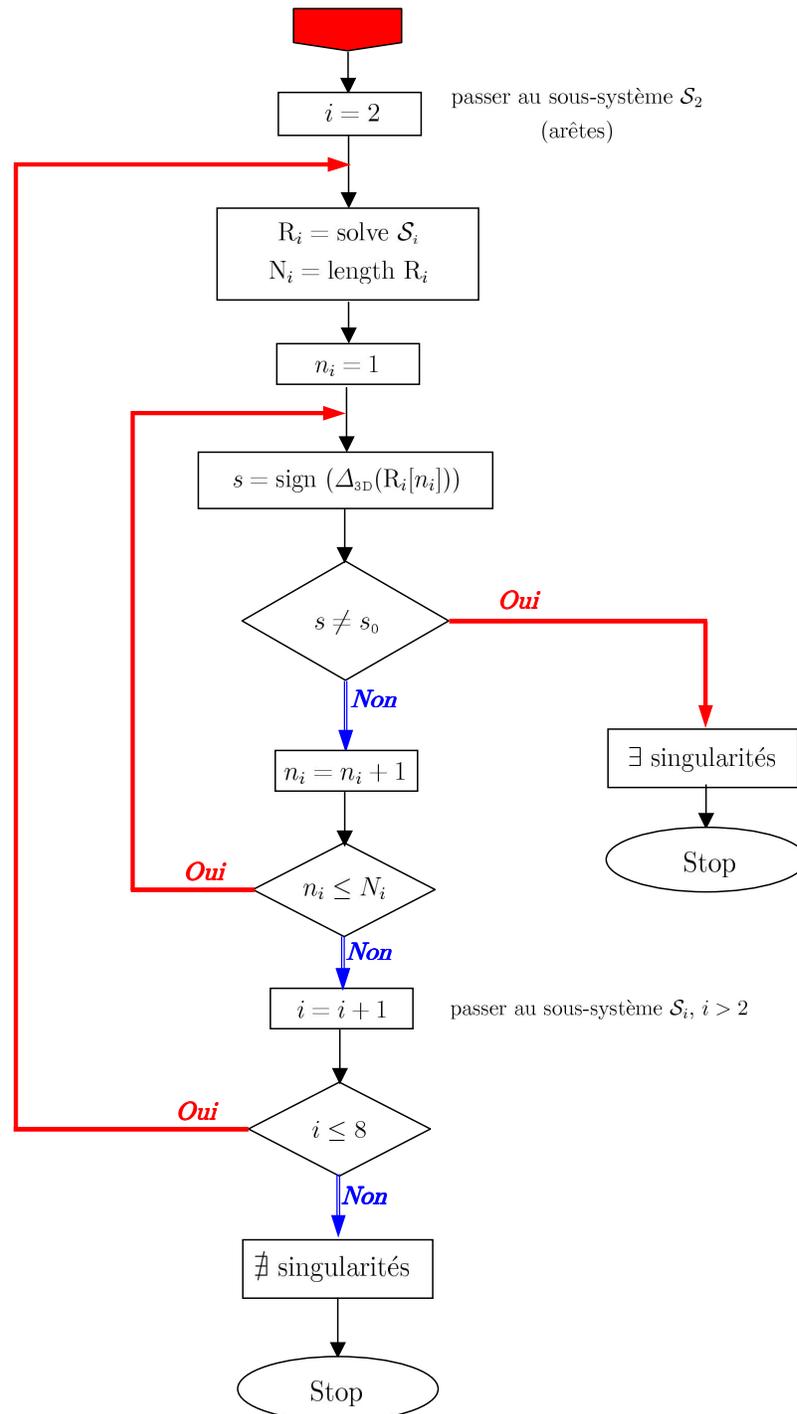


FIG. A.1 – Schéma logique pour la détection des singularités — 4<sup>e</sup> partie.

# Annexe B

## Coefficients $N_j$ et $E_i$ pour les lieux de singularités

( $j = 1 \dots 25$  et  $i = 1 \dots 6$ )

Dans la première partie de cette annexe, on présente les coefficients  $N_j$ ,  $j = 1 \dots 25$ , définis à l'équation (3.5) qui dépendent de la géométrie du manipulateur choisi. On définit le vecteur  $\mathbf{g}$ , qui représente les paramètres architecturaux du robot. Dans le cas du manipulateur plan, la géométrie est représentée par  $\mathbf{g} = [b_{1x}, b_{1y}, b_{2x}, b_{2y}, b_{3x}, b_{3y}, p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{2x}, p'_{2y}, p'_{3x}, p'_{3y}]$ , et dans le cas du manipulateur sphérique, elle est représentée par  $\mathbf{g} = [w_1, w_2, w_3, u_2, u_3, h, x_1, x_2, x_3, y_2, y_3]$ .

Dans la deuxième partie, on présente les coefficients  $E_i$  définis à l'équation (3.4) (donnés en B.2),  $i = 1 \dots 6$ , qui sont en fonction de  $N_j$ ,  $j = 1 \dots 25$  (donnés en B.1), du vecteur  $\mathbf{l}_{\mathbf{mM}} = [x_M, x_m, y_M, y_m, T_M, T_m]$  (qui dépend du vecteur  $\mathbf{l} = [x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, T_{min}, T_{max}]$  (qui représente les limites de l'espace de travail) et de la troisième nouvelle variable  $\sin(\gamma)$  (qui dérive de l'orientation de la plate-forme  $\phi$ ). Les relations entre les composantes des vecteurs  $\mathbf{l}_{\mathbf{mM}}$  et  $\mathbf{l}$ , sont données dans la section 3.3.

## B.1 Les coefficients $N_j$ , $j = 1 \dots 25$

$$\begin{aligned}
N_1 &= b_{2y} p'_{3y} - p'_{2y} b_{3y} - b_{1y} p'_{3y} + p'_{1y} b_{3y} + b_{1y} p'_{2y} - p'_{1y} b_{2y} \\
N_2 &= b_{2y} p'_{3x} - p'_{2x} b_{3y} - b_{1y} p'_{3x} + p'_{1x} b_{3y} + b_{1y} p'_{2x} - p'_{1x} b_{2y} \\
N_3 &= b_{1x} p'_{2x} - b_{1x} p'_{3x} - b_{2x} p'_{1x} + b_{2x} p'_{3x} - b_{3x} p'_{2x} + b_{3x} p'_{1x} \\
N_4 &= b_{1x} p'_{3y} - b_{1x} p'_{2y} - b_{2x} p'_{3y} + b_{2x} p'_{1y} + b_{3x} p'_{2y} - b_{3x} p'_{1y} \\
N_5 &= -b_{2y} p'_{3x} + p'_{2x} b_{3y} + b_{1y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{3y} - b_{1y} p'_{2x} + p'_{1x} b_{2y} + b_{1x} p'_{3y} - b_{1x} p'_{2y} \\
&\quad - b_{2x} p'_{3y} + b_{2x} p'_{1y} + b_{3x} p'_{2y} - b_{3x} p'_{1y} \\
N_6 &= b_{2y} p'_{3y} - p'_{2y} b_{3y} - b_{1y} p'_{3y} + p'_{1y} b_{3y} + b_{1y} p'_{2y} - p'_{1y} b_{2y} + b_{1x} p'_{3x} - b_{1x} p'_{2x} \\
&\quad - b_{2x} p'_{3x} + b_{2x} p'_{1x} + b_{3x} p'_{2x} - b_{3x} p'_{1x} \\
N_7 &= p'_{2y} b_{3x} p'_{3y} - p'_{2y} b_{3y} p'_{3x} - b_{2x} p'_{2y} p'_{3y} + b_{2y} p'_{2x} p'_{3y} - p'_{1y} b_{3x} p'_{3y} + p'_{1y} b_{3y} p'_{3x} \\
&\quad + b_{1x} p'_{1y} p'_{3y} - b_{1y} p'_{1x} p'_{3y} + p'_{1y} b_{2x} p'_{2y} - p'_{1y} b_{2y} p'_{2x} - b_{1x} p'_{1y} p'_{2y} + b_{1y} p'_{1x} p'_{2y} \\
&\quad + p'_{1x} b_{2y} p'_{3y} - p'_{1x} p'_{2y} b_{3y} - p'_{2x} b_{1y} p'_{3y} + p'_{2x} p'_{1y} b_{3y} + p'_{3x} b_{1y} p'_{2y} - p'_{3x} p'_{1y} b_{2y} \\
N_8 &= -p'_{1x} p'_{2y} b_{3y} + p'_{2x} b_{3x} p'_{3x} + p'_{2x} b_{3y} p'_{3y} - b_{2x} p'_{2x} p'_{3x} - b_{2y} p'_{2y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{3x} p'_{3x} \\
&\quad - p'_{1x} b_{3y} p'_{3y} + b_{1x} p'_{1x} p'_{3x} + b_{1y} p'_{1y} p'_{3x} + p'_{1x} b_{2x} p'_{2x} + p'_{1x} b_{2y} p'_{2y} - b_{1x} p'_{1x} p'_{2x} \\
&\quad - b_{1y} p'_{1y} p'_{2x} - p'_{3x} p'_{1y} b_{2y} + p'_{2x} p'_{1y} b_{3y} + p'_{3x} b_{1y} p'_{2y} - p'_{2x} b_{1y} p'_{3y} + p'_{1x} b_{2y} p'_{3y} \\
N_9 &= p'_{2x} b_{3x} p'_{3y} + p'_{2y} b_{3x} p'_{3x} + p'_{2y} b_{3y} p'_{3y} - b_{2x} p'_{2x} p'_{3y} - p'_{2x} b_{3y} p'_{3x} - p'_{1y} b_{3x} p'_{3x} \\
&\quad - p'_{1y} b_{3y} p'_{3y} - b_{2x} p'_{2y} p'_{3x} + b_{2y} p'_{2x} p'_{3x} - b_{2y} p'_{2y} p'_{3y} - p'_{1x} b_{3x} p'_{3y} + p'_{1x} b_{3y} p'_{3x} \\
&\quad + b_{1y} p'_{1x} p'_{2x} - b_{1y} p'_{1y} p'_{2y} + b_{1x} p'_{1x} p'_{3y} + b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} - b_{1y} p'_{1x} p'_{3x} + b_{1y} p'_{1y} p'_{3y} \\
&\quad + p'_{1x} b_{2x} p'_{2y} - p'_{1x} b_{2y} p'_{2x} + p'_{1y} b_{2x} p'_{2x} + p'_{1y} b_{2y} p'_{2y} - b_{1x} p'_{1x} p'_{2y} - b_{1x} p'_{1y} p'_{2x} \\
N_{10} &= -b_{2y} b_{3x} p'_{3y} + b_{2y} b_{3y} p'_{3x} + b_{2x} p'_{2y} b_{3y} + b_{1y} b_{3x} p'_{3y} - b_{2y} p'_{2x} b_{3y} - b_{1y} b_{3y} p'_{3x} \\
&\quad - b_{1x} p'_{1y} b_{3y} + b_{1y} p'_{1x} b_{3y} - b_{1y} b_{2x} p'_{2y} + b_{1y} b_{2y} p'_{2x} + b_{1x} p'_{1y} b_{2y} - b_{1y} p'_{1x} b_{2y} \\
&\quad + b_{1x} p'_{2y} b_{3y} - b_{2x} p'_{1y} b_{3y} + b_{2x} b_{1y} p'_{3y} - b_{3x} b_{1y} p'_{2y} + b_{3x} p'_{1y} b_{2y} - b_{1x} b_{2y} p'_{3y} \\
N_{11} &= -b_{2y} b_{3x} p'_{3x} - b_{2y} b_{3y} p'_{3y} + b_{2x} p'_{2x} b_{3y} + b_{1y} b_{3x} p'_{3x} + b_{2y} p'_{2y} b_{3y} + b_{1y} b_{3y} p'_{3y} \\
&\quad - b_{1x} p'_{1x} b_{3y} - b_{1y} p'_{1y} b_{3y} - b_{1y} b_{2x} p'_{2x} - b_{1y} b_{2y} p'_{2y} + b_{1x} p'_{1x} b_{2y} + b_{1y} p'_{1y} b_{2y} \\
&\quad - b_{1x} b_{2y} p'_{3x} + b_{1x} p'_{2x} b_{3y} - b_{2x} p'_{1x} b_{3y} - b_{3x} b_{1y} p'_{2x} + b_{3x} p'_{1x} b_{2y} + b_{2x} b_{1y} p'_{3x} \\
N_{12} &= p'_{1x} b_{3x} p'_{3y} - p'_{1x} b_{3y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{2x} p'_{2y} + p'_{1x} b_{2y} p'_{2x} - b_{1x} p'_{2y} p'_{3x} - p'_{2x} b_{3x} p'_{3y} \\
&\quad + p'_{2x} b_{3y} p'_{3x} + b_{1x} p'_{1y} p'_{2x} + b_{1x} p'_{2x} p'_{3y} - b_{1y} p'_{1x} p'_{2x} + b_{2x} p'_{2y} p'_{3x} - b_{2y} p'_{2x} p'_{3x} \\
&\quad - b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} + b_{1y} p'_{1x} p'_{3x} + b_{2x} p'_{1y} p'_{3x} - b_{2x} p'_{1x} p'_{3y} - b_{3x} p'_{1y} p'_{2x} + b_{3x} p'_{1x} p'_{2y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{13} = & -b_{1x} p'_{2y} p'_{3x} - p'_{1y} b_{3x} p'_{3x} + p'_{1y} b_{2x} p'_{2x} + p'_{1y} b_{2y} p'_{2y} - p'_{1y} b_{3y} p'_{3y} + b_{1x} p'_{2x} p'_{3y} \\
& + p'_{2y} b_{3x} p'_{3x} + p'_{2y} b_{3y} p'_{3y} - b_{1x} p'_{1x} p'_{2y} - b_{1y} p'_{1y} p'_{2y} - b_{2x} p'_{1x} p'_{3y} + b_{2x} p'_{1y} p'_{3x} \\
& + b_{3x} p'_{1x} p'_{2y} - b_{3x} p'_{1y} p'_{2x} - b_{2x} p'_{2x} p'_{3y} - b_{2y} p'_{2y} p'_{3y} + b_{1x} p'_{1x} p'_{3y} + b_{1y} p'_{1y} p'_{3x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{14} = & p'_{1x} b_{3x} p'_{3x} + b_{2y} p'_{2x} p'_{3y} + p'_{2y} b_{3x} p'_{3y} - p'_{1y} b_{3x} p'_{3y} + p'_{1y} b_{3y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{2y} p'_{2y} \\
& + p'_{1x} b_{3y} p'_{3y} - p'_{1x} b_{2x} p'_{2x} + b_{1x} p'_{1x} p'_{2x} + b_{1y} p'_{1y} p'_{2x} - p'_{2y} b_{3y} p'_{3x} + p'_{1y} b_{2x} p'_{2y} \\
& - p'_{1y} b_{2y} p'_{2x} - p'_{2x} b_{3x} p'_{3x} - p'_{2x} b_{3y} p'_{3y} - b_{1x} p'_{1y} p'_{2y} + b_{1y} p'_{1x} p'_{2y} + b_{2x} p'_{2x} p'_{3x} \\
& + b_{2y} p'_{2y} p'_{3x} - b_{1x} p'_{1x} p'_{3x} + b_{1x} p'_{1y} p'_{3y} - b_{1y} p'_{1x} p'_{3y} - b_{1y} p'_{1y} p'_{3x} - b_{2x} p'_{2y} p'_{3y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{15} = & b_{1x} b_{2y} p'_{3x} - b_{1x} p'_{2x} b_{3y} + b_{2x} p'_{1x} b_{3y} + b_{3x} b_{1y} p'_{2x} - b_{3x} p'_{1x} b_{2y} - b_{2x} b_{1y} p'_{3x} \\
& - b_{1x} b_{3x} p'_{3y} + b_{1x} b_{2x} p'_{2y} - b_{1x} b_{2y} p'_{2x} + b_{2x} b_{3x} p'_{3y} + b_{1x} b_{3y} p'_{3x} + b_{2x} b_{1y} p'_{1x} \\
& - b_{2x} b_{3y} p'_{3x} - b_{2x} b_{1x} p'_{1y} - b_{3x} b_{1y} p'_{1x} - b_{3x} b_{2x} p'_{2y} + b_{3x} b_{2y} p'_{2x} + b_{3x} b_{1x} p'_{1y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{16} = & b_{1x} p'_{2y} b_{3y} - b_{2x} p'_{1y} b_{3y} + b_{2x} b_{1y} p'_{3y} - b_{3x} b_{1y} p'_{2y} + b_{3x} p'_{1y} b_{2y} - b_{1x} b_{2y} p'_{3y} \\
& + b_{2x} b_{3x} p'_{3x} - b_{1x} b_{3y} p'_{3y} - b_{1x} b_{3x} p'_{3x} + b_{1x} b_{2x} p'_{2x} + b_{1x} b_{2y} p'_{2y} - b_{2x} b_{1y} p'_{1y} \\
& + b_{2x} b_{3y} p'_{3y} - b_{2x} b_{1x} p'_{1x} + b_{3x} b_{1y} p'_{1y} - b_{3x} b_{2x} p'_{2x} - b_{3x} b_{2y} p'_{2y} + b_{3x} b_{1x} p'_{1x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{17} = & p'_{1x} p'_{2y} b_{3x} p'_{3y} - p'_{1x} p'_{2y} b_{3y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{2x} p'_{2y} p'_{3y} + p'_{1x} b_{2y} p'_{2x} p'_{3y} - p'_{2x} p'_{1y} b_{3x} p'_{3y} \\
& + p'_{2x} p'_{1y} b_{3y} p'_{3x} + p'_{2x} b_{1x} p'_{1y} p'_{3y} - p'_{2x} b_{1y} p'_{1x} p'_{3y} + p'_{3x} p'_{1y} b_{2x} p'_{2y} - p'_{3x} p'_{1y} b_{2y} p'_{2x} \\
& - p'_{3x} b_{1x} p'_{1y} p'_{2y} + p'_{3x} b_{1y} p'_{1x} p'_{2y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{18} = & -p'_{1y} p'_{2x} b_{3x} p'_{3x} - p'_{1y} p'_{2x} b_{3y} p'_{3y} + p'_{1y} b_{2x} p'_{2x} p'_{3x} + p'_{1y} b_{2y} p'_{2y} p'_{3x} + p'_{2y} p'_{1x} b_{3x} p'_{3x} \\
& + p'_{2y} p'_{1x} b_{3y} p'_{3y} - p'_{2y} b_{1x} p'_{1x} p'_{3x} - p'_{2y} b_{1y} p'_{1y} p'_{3x} - p'_{3y} p'_{1x} b_{2x} p'_{2x} - p'_{3y} p'_{1x} b_{2y} p'_{2y} \\
& + p'_{3y} b_{1x} p'_{1x} p'_{2x} + p'_{3y} b_{1y} p'_{1y} p'_{2x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{19} = & -p'_{1y} p'_{2x} b_{3x} p'_{3x} - p'_{1y} p'_{2x} b_{3y} p'_{3y} + p'_{1y} b_{2x} p'_{2x} p'_{3x} + p'_{1y} b_{2y} p'_{2y} p'_{3x} + p'_{2y} p'_{1x} b_{3x} p'_{3x} \\
& + p'_{2y} p'_{1x} b_{3y} p'_{3y} - p'_{2y} b_{1x} p'_{1x} p'_{3x} - p'_{2y} b_{1y} p'_{1y} p'_{3x} - p'_{3y} p'_{1x} b_{2x} p'_{2x} - p'_{3y} p'_{1x} b_{2y} p'_{2y} \\
& + p'_{3y} b_{1x} p'_{1x} p'_{2x} + p'_{3y} b_{1y} p'_{1y} p'_{2x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{20} = & p'_{1x} p'_{2y} b_{3x} p'_{3y} - p'_{1x} p'_{2y} b_{3y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{2x} p'_{2y} p'_{3y} + p'_{1x} b_{2y} p'_{2x} p'_{3y} - p'_{2x} p'_{1y} b_{3x} p'_{3y} \\
& + p'_{2x} p'_{1y} b_{3y} p'_{3x} + p'_{2x} b_{1x} p'_{1y} p'_{3y} - p'_{2x} b_{1y} p'_{1x} p'_{3y} + p'_{3x} p'_{1y} b_{2x} p'_{2y} - p'_{3x} p'_{1y} b_{2y} p'_{2x} \\
& - p'_{3x} b_{1x} p'_{1y} p'_{2y} + p'_{3x} b_{1y} p'_{1x} p'_{2y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{21} = & -b_{3x} p'_{1x} b_{2y} p'_{3y} + p'_{1x} b_{2y} b_{3y} p'_{3x} + p'_{1x} b_{2x} p'_{2y} b_{3y} - p'_{1x} b_{2y} p'_{2x} b_{3y} - b_{1x} p'_{2y} b_{3x} p'_{3y} \\
& + b_{1x} p'_{2y} b_{3y} p'_{3x} + b_{1x} b_{2x} p'_{2y} p'_{3y} - b_{1x} b_{2y} p'_{2x} p'_{3y} + b_{3x} b_{1y} p'_{2x} p'_{3y} - b_{1y} p'_{2x} b_{3y} p'_{3x} \\
& - b_{1x} p'_{1y} p'_{2x} b_{3y} + b_{1y} p'_{1x} p'_{2x} b_{3y} + b_{2x} p'_{1y} b_{3x} p'_{3y} - b_{2x} p'_{1y} b_{3y} p'_{3x} - b_{2x} b_{1x} p'_{1y} p'_{3y} \\
& + b_{2x} b_{1y} p'_{1x} p'_{3y} - b_{2x} b_{1y} p'_{3x} p'_{2y} + b_{1y} p'_{3x} b_{2y} p'_{2x} + b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} b_{2y} - b_{1y} p'_{1x} p'_{3x} b_{2y} \\
& - b_{2x} p'_{1y} b_{3x} p'_{2y} + b_{3x} p'_{1y} b_{2y} p'_{2x} + b_{3x} b_{1x} p'_{1y} p'_{2y} - b_{3x} b_{1y} p'_{1x} p'_{2y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{22} &= b_{3x} p'_{1y} b_{2y} p'_{3x} + p'_{1y} b_{2y} b_{3y} p'_{3y} - p'_{1y} b_{2x} p'_{2x} b_{3y} - p'_{1y} b_{2y} p'_{2y} b_{3y} - b_{1x} p'_{2x} b_{3x} p'_{3x} \\
&\quad - b_{1x} p'_{2x} b_{3y} p'_{3y} + b_{1x} b_{2x} p'_{2x} p'_{3x} + b_{1x} b_{2y} p'_{2y} p'_{3x} - b_{3x} b_{1y} p'_{2y} p'_{3x} - b_{1y} p'_{2y} b_{3y} p'_{3y} \\
&\quad + b_{1x} p'_{1x} p'_{2y} b_{3y} + b_{1y} p'_{1y} p'_{2y} b_{3y} + b_{2x} p'_{1x} b_{3x} p'_{3x} + b_{2x} p'_{1x} b_{3y} p'_{3y} - b_{2x} b_{1x} p'_{1x} p'_{3x} \\
&\quad - b_{2x} b_{1y} p'_{1y} p'_{3x} + b_{2x} b_{1y} p'_{3y} p'_{2x} + b_{1y} p'_{3y} b_{2y} p'_{2y} - b_{1x} p'_{1x} p'_{3y} b_{2y} - b_{1y} p'_{1y} p'_{3y} b_{2y} \\
&\quad - b_{2x} p'_{1x} b_{3x} p'_{2x} - b_{3x} p'_{1x} b_{2y} p'_{2y} + b_{3x} b_{1x} p'_{1x} p'_{2x} + b_{3x} b_{1y} p'_{1y} p'_{2x} \\
N_{23} &= p'_{1y} b_{2y} p'_{2x} b_{3y} + p'_{2y} b_{1y} b_{3y} p'_{3x} + p'_{2x} b_{1y} b_{3y} p'_{3y} - b_{1x} p'_{2y} b_{3x} p'_{3x} + b_{3x} b_{1y} p'_{1y} p'_{2y} \\
&\quad + b_{1x} b_{2x} p'_{2y} p'_{3x} - p'_{1x} b_{2y} b_{3x} p'_{3x} - p'_{1x} b_{2y} b_{3y} p'_{3y} + p'_{1x} b_{2x} p'_{2x} b_{3y} - p'_{1y} b_{2x} p'_{2y} b_{3y} \\
&\quad + p'_{1x} b_{2y} p'_{2y} b_{3y} - p'_{1y} b_{2y} b_{3y} p'_{3x} + p'_{1y} b_{2y} b_{3x} p'_{3y} - b_{1x} p'_{2x} b_{3x} p'_{3y} + b_{1x} p'_{2x} b_{3y} p'_{3x} \\
&\quad - b_{1x} p'_{2y} b_{3y} p'_{3y} + b_{1x} b_{2x} p'_{2x} p'_{3y} - p'_{2x} b_{1y} p'_{1y} b_{3y} - b_{1x} b_{2y} p'_{2x} p'_{3x} + b_{1x} b_{2y} p'_{2y} p'_{3y} \\
&\quad + p'_{2x} b_{1y} b_{3x} p'_{3x} - p'_{2x} b_{1x} p'_{1x} b_{3y} - p'_{2y} b_{1y} p'_{1x} b_{3y} + b_{2x} p'_{1x} b_{3x} p'_{3y} + p'_{3y} b_{1y} b_{2x} p'_{2y} \\
&\quad - b_{2x} b_{1x} p'_{1y} p'_{3x} - b_{2x} p'_{1x} b_{3y} p'_{3x} + b_{2x} p'_{1y} b_{3x} p'_{3x} + b_{2x} p'_{1y} b_{3y} p'_{3y} - b_{2x} b_{1x} p'_{1x} p'_{3y} \\
&\quad - p'_{2y} b_{1y} b_{3x} p'_{3y} + p'_{2y} b_{1x} p'_{1y} b_{3y} + p'_{3y} b_{1y} p'_{1x} b_{2y} - b_{3x} p'_{1x} b_{2x} p'_{2y} + b_{3x} p'_{1x} b_{2y} p'_{2x} \\
&\quad + b_{2x} b_{1y} p'_{1x} p'_{3x} - b_{2x} b_{1y} p'_{1y} p'_{3y} - p'_{3x} b_{1y} b_{2x} p'_{2x} - p'_{3x} b_{1y} b_{2y} p'_{2y} + p'_{3x} b_{1x} p'_{1x} b_{2y} \\
&\quad + p'_{3x} b_{1y} p'_{1y} b_{2y} - p'_{3y} b_{1y} b_{2y} p'_{2x} - p'_{3y} b_{1x} p'_{1y} b_{2y} - b_{3x} p'_{1y} b_{2x} p'_{2x} - b_{3x} p'_{1y} b_{2y} p'_{2y} \\
&\quad + b_{3x} b_{1x} p'_{1x} p'_{2y} + b_{3x} b_{1x} p'_{1y} p'_{2x} - b_{3x} b_{1y} p'_{1x} p'_{2x} \\
N_{24} &= b_{1x} b_{2y} p'_{2x} b_{3y} + b_{2x} b_{1x} p'_{1y} b_{3y} + b_{2x} b_{1y} b_{3y} p'_{3x} + b_{3x} b_{1y} p'_{1x} b_{2y} - b_{2x} b_{1y} p'_{1x} b_{3y} \\
&\quad - b_{1x} b_{2y} b_{3y} p'_{3x} - b_{1x} b_{2x} p'_{2y} b_{3y} + b_{1x} b_{2y} b_{3x} p'_{3y} - b_{2x} b_{1y} b_{3x} p'_{3y} + b_{3x} b_{1y} b_{2x} p'_{2y} \\
&\quad - b_{3x} b_{1y} b_{2y} p'_{2x} - b_{3x} b_{1x} p'_{1y} b_{2y} \\
N_{25} &= b_{1x} b_{2y} b_{3y} p'_{3y} + b_{1x} b_{2y} b_{3x} p'_{3x} - b_{1x} b_{2x} p'_{2x} b_{3y} - b_{1x} b_{2y} p'_{2y} b_{3y} - b_{2x} b_{1y} b_{3x} p'_{3x} \\
&\quad - b_{2x} b_{1y} b_{3y} p'_{3y} + b_{2x} b_{1x} p'_{1x} b_{3y} + b_{2x} b_{1y} p'_{1y} b_{3y} + b_{3x} b_{1y} b_{2x} p'_{2x} + b_{3x} b_{1y} b_{2y} p'_{2y} \\
&\quad - b_{3x} b_{1x} p'_{1x} b_{2y} - b_{3x} b_{1y} p'_{1y} b_{2y}
\end{aligned}$$

## B.2 Les coefficients $E_i$ , $i = 1 \dots 6$

$$E_1 = -\frac{-N_1 + N_1 T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 N_1 T_m \sin \gamma T_M + N_1 T_M^2 - 2 N_2 T_m \sin \gamma - 2 N_2 T_M}{1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2}$$

$$E_2 = -\frac{-N_3 + N_3 T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 N_3 T_m \sin \gamma T_M + N_3 T_M^2 - 2 N_4 T_m \sin \gamma - 2 N_4 T_M}{1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2}$$

$$E_3 = -\frac{-N_5 + N_5 T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 N_5 T_m \sin \gamma T_M + N_5 T_M^2 - 2 N_6 T_m \sin \gamma - 2 N_6 T_M}{1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2}$$

$$E_4 = \frac{N_7 + N_{10} + 4 N_7 T_m^3 \sin^3 \gamma T_M + 6 N_7 T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 + 4 N_7 T_m \sin \gamma T_M^3 +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\frac{8 N_8 T_m \sin \gamma T_M - 6 N_9 T_m^2 \sin^2 \gamma T_M - 6 N_9 T_m \sin \gamma T_M^2 -}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\frac{4 N_{10} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M - 6 N_{10} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 - 4 N_{10} T_m \sin \gamma T_M^3 - 2 N_7 T_M^2 +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\frac{N_7 T_M^4 + N_8 T_M^2 + N_9 T_M - 2 N_9 T_M^3 - N_{10} T_M^4 + 2 N_{11} T_M + 2 N_{11} T_M^3 +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\frac{6 N_{11} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M + 2 N_{11} T_m^3 \sin^3 \gamma - 2 N_7 T_m^2 \sin^2 \gamma + N_7 T_m^4 \sin^4 \gamma +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\frac{4 N_8 T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 N_9 T_m \sin \gamma - 2 N_9 T_m^3 \sin^4 \gamma - N_{10} T_m^4 \sin^4 \gamma +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\frac{2 N_{11} T_m \sin \gamma - 4 N_7 T_m \sin \gamma T_M + 6 N_{11} T_m \sin \gamma T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
E_5 = & \frac{N_{12} + N_{15} + N_{12} T_m^4 \sin^4 \gamma - 2 N_{12} T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 N_{16} T_m \sin \gamma + 2 N_{16} T_m^3 \sin^3 \gamma -}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{8 N_{15} T_m^4 \sin^4 \gamma + 2 N_{14} T_m \sin \gamma + 4 N_{13} T_m^2 \sin^2 \gamma + 4 N_{12} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{6 N_{12} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 + 4 N_{12} T_m \sin \gamma T_M^3 + 8 N_{13} T_m \sin \gamma T_M -}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{6 N_{14} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M - 6 N_{14} T_m \sin \gamma T_M^2 - 4 N_{15} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M -}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{6 N_{15} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 - 4 N_{15} T_m \sin \gamma T_M^3 + 6 N_{16} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{6 N_{16} T_m \sin \gamma T_M^2 - 4 N_{15} T_m \sin \gamma T_M^3 + 6 N_{16} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{6 N_{16} T_m \sin \gamma T_M^2 - 2 N_{12} T_m^2 + N_{12} T_M^4 + N_{13} T_M^2 + 2 N_{14} T_M^4 - 2 N_{14} T_M^3 -}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
& \frac{N_{15} T_M^4 + 2 N_{16} T_M + 2 N_{16} T_M^3 - 4 N_{12} T_m \sin \gamma T_M - 2 N_{14} T_m^3 \sin^3 \gamma}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^2} \\
E_6 = & \frac{4 N_{24} T_m \sin \gamma T_M^3 + 6 N_{24} T_m^5 \sin^5 \gamma T_M + 15 N_{24} T_m^4 \sin^4 \gamma T_M^2 +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{20 N_{24} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M^3 + 15 N_{24} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^4 + 6 N_{24} T_m \sin \gamma T_M^5 +}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-12 N_{25} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M - 12 N_{25} T_m \sin \gamma T_M^2 - 10 N_{25} T_m^4 \sin^4 \gamma T_M}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-4 N_{22} T_m^2 \sin^2 \gamma + 4 N_{20} T_m^4 \sin^4 \gamma - N_{17} - N_{21} - N_{24} + N_{17} T_m^6 \sin^6 \gamma}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{4 N_{19} T_m^3 \sin^3 \gamma - N_{21} T_m^6 \sin^6 \gamma - 2 N_{25} T_m \sin \gamma + N_{21} T_m^4 \sin^4 \gamma + N_{21} T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{N_{24} T_m^6 \sin^6 \gamma + 2 N_{23} T_m^5 \sin^5 \gamma - 2 N_{19} T_m \sin \gamma - 2 N_{25} T_m^5 \sin^5 \gamma N_{24} T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-3 N_{17} T_m^4 \sin^4 \gamma - 4 N_{25} T_m^3 \sin^3 \gamma + 3 N_{17} T_m^2 \sin^2 \gamma + N_{24} T_m^4 \sin^4 \gamma N_{24} T_M^6}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-8 N_{18} T_m^3 \sin^3 \gamma - 4 N_{20} T_m^2 \sin^2 \gamma - N_{24} T_m^2 \sin^2 \gamma - 2 N_{19} T_m^5 \sin^5 \gamma - 2 N_{25} T_M}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-4 N_{22} T_m^4 \sin^4 \gamma - 2 N_{23} T_m \sin \gamma (\delta) + 3 N_{17} T_M^2 - 3 N_{17} T_M^4 + N_{17} T_M^6}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-8 N_{18} T_M^3 - 2 N_{19} T_M + 4 N_{19} T_M^3 - 2 N_{19} T_M^5 - 4 N_{20} T_M^2 + 4 N_{20} T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{N_{21} T_M^4 - N_{21} T_M^6 - 4 N_{22} T_M^2 - 4 N_{22} T_M^4 - 2 N_{23} T_M + 2 N_{23} T_M^5 - N_{24} T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-4 N_{25} T_M^3 - 2 N_{25} T_M^5 - 12 N_{17} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M N_{21} T_m^2 \sin^2 \gamma - 20 N_{25} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^3}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-18 N_{17} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 - 12 N_{17} T_m \sin \gamma T_M^3 + 6 N_{17} T_m^5 \sin^5 \gamma T_M}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{15 N_{17} T_m^4 \sin^4 \gamma T_M^2 + 20 N_{17} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M^3 + 15 N_{17} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6 N_{17} T_m \sin \gamma T_M^5 - 24 N_{18} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M - 24 N_{18} T_m \sin \gamma T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{12 N_{19} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M + 12 N_{19} T_m \sin \gamma T_M^2 - 10 N_{19} T_m^4 \sin^4 \gamma T_M}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-20 N_{19} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M^2 - 20 N_{19} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^3 - 10 N_{19} T_m \sin \gamma T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} \\
& \frac{-8 N_{20} T_m \sin \gamma T_M + 16 N_{20} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M + 24 N_{20} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{16 N_{20} T_m \sin \gamma T_M^3 + 2 N_{21} T_m \sin \gamma T_M + 4 N_{21} T_m^3 (\sin \gamma)^3 T_M + 4 N_{21} T_m \sin \gamma T_M^3}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{6 N_{17} T_m \sin \gamma T_M + 6 N_{21} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 - 6 N_{21} T_m^5 \sin^5 \gamma T_M - 20 N_{25} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-15 N_{21} T_m^4 \sin^4 \gamma T_M^2 - 20 N_{21} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M^3 - 15 N_{21} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-6 N_{21} T_m \sin \gamma T_M^5 - 16 N_{22} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M - 24 N_{22} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-8 N_{22} T_m \sin \gamma T_M - 16 N_{22} T_m \sin \gamma T_M^3 + 10 N_{23} T_m^4 \sin^4 \gamma T_M}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{20 N_{23} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M^2 + 20 N_{23} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^3 + 10 N_{23} T_m \sin \gamma T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} + \\
& \frac{-2 N_{24} T_m \sin \gamma T_M + 4 N_{24} T_m^3 \sin^3 \gamma T_M + 6 N_{24} T_m^2 \sin^2 \gamma T_M^2 - 10 N_{25} T_m \sin \gamma T_M^4}{(1 + T_m^2 \sin^2 \gamma + 2 T_m \sin \gamma T_M + T_M^2)^3} .
\end{aligned}$$

# Annexe C

## Programmes pour la détection de singularités dans une hyper-boîte, $\mathcal{H}$ , et dans une section, $\mathcal{D}$ , de l'espace de travail

Les programmes finaux pour la détection des singularités dans une hyper-boîte,  $\mathcal{H}$  ou dans un rectangle,  $\mathcal{D}$ , ont été faits dans le logiciel *Maple*. On a développé des procédures propres ayant comme but la façon la plus rapide de détecter des singularités dans un espace de travail 3D ou dans une section 2D, pour n'importe quelle géométrie donnée du manipulateur parallèle à 3 ddl. Dans la première partie de cette annexe, le programme final pour la détection de singularités dans  $\mathcal{H}$  est donné, bien que dans la deuxième partie contient le même programme adapté pour un rectangle,  $\mathcal{D}$ .

## C.1 Programme final pour la détection de singularités dans une hyper-boîte $\mathcal{H}$

*programme pour la détection de singularités dans un espace de travail donné comme une hyper-boîte (3D)*

```

> restart:with(plots):with(plottools):Digits:=30:with(linalg):
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/intrare.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/limits.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/coefN.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/equation_diff.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz1.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_x_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz2.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_x_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_y_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz3.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_y_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_T_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz4.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_T_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_caz5.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz5.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_caz6.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz6.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_caz7.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/eq_caz7.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas1_MPP.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas2_MPP.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas3_MPP.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas4_MPP.m";

```

```

> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas5_MPP.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas6_MPP.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas7_MPP.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas8_MPP.m";

```

*le premier sous-système S1*

```

> lista_signes_cas8_sommets:=proc_cas8_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmin,Tmax);
      lista_signes_cas8_sommets := [1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1]

```

*calculer le signe initial*

```

> semn_init:=lista_signes_cas8_sommets[1];
      semn_init := 1
> cnt:=0:

```

*vérifier la présence des singularités sur les sommets*

```

> for k from 2 to nops(lista_signes_cas8_sommets) do
> if lista_signes_cas8_sommets[k]<>semn_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes des sommets,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt:=cnt+1:
> if(cnt=nops(lista_signes_cas8_sommets))then
> mesaj:="NU";
> fi: fi: od:

```

*passer aux autres sous-systèmes (les arêtes, les faces et l'intérieur de la boîte)*

```

> if mesaj="NU" then
> print("on vérifie les arêtes suivantes, c'est-à-dire le cas 7");
> lista_signes_cas7_yT:=proc_cas7_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmin,Tmax);
> if nops(lista_signes_cas7_yT[1])<>0 then
> cnt1:=0:
> for j from 1 to nops(lista_signes_cas7_yT) do
> if lista_signes_cas7_yT[j]<>semm_init then
> mesaj="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour les arêtes-cas7,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt1:=cnt1+1:
> if cnt1=nops(lista_signes_cas7_yT) then
> mesaj="NU";
> print("on va vérifier d'autres arêtes, donc on analyse le cas6_xT");
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas7_yT[1])=0 then
> lista_signes_cas6_xT:=proc_cas6_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmin,Tmax);
> if nops(lista_signes_cas6_xT[1])<>0 then
> cnt2:=0:
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas6_xT) do
> if lista_signes_cas6_xT[i]<>semm_init then
> mesaj="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour les arêtes-cas6,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas6_xT) then

```

```

> mesaj:="NU";
> print("on va vérifier les valeurs extrêmes
> sur les dernières arêtes de la boîte,
> donc le cas5");
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas6_xT[1])=0 then
> lista_signes_cas5_xy:=proc_cas5_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmin,Tmax);
> if nops(lista_signes_cas5_xy[1])<>0 then
> cnt2:=0;:
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas5_xy) do
> if lista_signes_cas5_xy[i]<>semm_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour les arêtes,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas5_xy) then
> mesaj:="NU";
> print("on va vérifier les valeurs extrêmes
> sur les 6 faces de la boîte; on commence avec le cas4");
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas5_xy[1])=0 then
> lista_signes_cas4_Tmin:=proc_cas4_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmin);
> if nops(lista_signes_cas4_Tmin[1])<>0 then
> cnt2:=0;
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas4_Tmin) do
> if lista_signes_cas4_Tmin[i]<>semm_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour la face T=Tmin,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors

```

```

> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas4_Tmin) then
> mesaj:="NU";
> print("on va vérifier les valeurs extrêmes sur
> les dernières 5 faces de la boîte; on continue avec le cas4-Tmax");
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas4_Tmin[1])=0 then
> lista_signes_cas4_Tmax:=proc_cas4_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmax);
> if nops(lista_signes_cas4_Tmax[1])<>0 then
> cnt2:=0;:
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas4_Tmax) do
> if lista_signes_cas4_Tmax[i]<>semm_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour la face T=Tmax,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas4_Tmax) then
> mesaj:="NU";
> print("on va vérifier les valeurs extrêmes sur
> les dernières 4 faces de la boîte; on continue avec le cas3-ymin");
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas4_Tmax[1])=0 then
> lista_signes_cas3_ymin:=proc_cas3_MPP(xmin,xmax,Tmin,Tmax,ymin);
> if nops(lista_signes_cas3_ymin[1])<>0 then
> cnt2:=0;:
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas3_ymin) do

```

```

> if lista_signes_cas3_ymin[i]<>semn_init then
>   mesaj:="DA";
>   print("pour les valeurs extrêmes pour la face y=ymin,
>   les signes de la fonction initiale sont différents, alors
>   il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
>   break;
> else
>   cnt2:=cnt2+1:
>   if cnt2=nops(lista_signes_cas3_ymin) then
>     mesaj:="NU";
>     print("on va vérifier les valeurs extrêmes sur
>     les dernières 3 faces de la boîte; on continue avec le cas3-ymin");
>     fi:fi:od:fi:
>     if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas3_ymin[1])=0 then
>       lista_signes_cas3_ymin:=proc_cas3_MPP(xmin,xmax,Tmin,Tmax,ymin);
>       if nops(lista_signes_cas3_ymin[1])<>0 then
>         cnt2:=0;:
>         for i from 1 to nops(lista_signes_cas3_ymin) do
>           if lista_signes_cas3_ymin[i]<>semn_init then
>             mesaj:="DA";
>             print("pour les valeurs extrêmes pour la face y=ymin,
>             les signes de la fonction initiale sont différents, alors
>             il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
>             break;
>           else
>             cnt2:=cnt2+1:
>             if cnt2=nops(lista_signes_cas3_ymin) then
>               mesaj:="NU";
>               print("on va vérifier les valeurs extrêmes
>               sur les dernières 2 faces de la boîte; on continue avec le cas2-xmin");
>               fi:fi: od: fi:
>               if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas3_ymin[1])=0 then

```

```

> lista_signes_cas2_xmin:=proc_cas2_MPP(ymin,ymax,Tmin,Tmax,xmin);
> if nops(lista_signes_cas2_xmin[1])<>0 then
> cnt2:=0;;
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas2_xmin) do
> if lista_signes_cas2_xmin[i]<>semm_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour la face x=xmin,
> les signes de la fonction initiale sont différents,
> alors il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas2_xmin) then
> mesaj:="NU";
> print("on va vérifier les valeurs extrêmes
> sur la dernière faces de la boîte: le cas2-xmin");
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas2_xmin[1])=0 then
> lista_signes_cas2_xmax:=proc_cas2_MPP(ymin,ymax,Tmin,Tmax,xmax);
> if nops(lista_signes_cas2_xmax[1])<>0 then
> cnt2:=0;;
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas2_xmax) do
> if lista_signes_cas2_xmax[i]<>semm_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour la face x=xmax,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas2_xmax) then
> mesaj:="NU";

```

```

> print("on va vérifier les valeurs extrêmes
> dans l'intérieur de la boîte: le cas1");
> fi:fi: od: fi:
> if nops(lista_signes_cas2_xmax[1])=0 or mesaj="NU" then
> lista_signes_cas1:=proc_cas1_MPP(xmin,xmax,ymin,ymax,Tmin,Tmax);
> if nops(lista_signes_cas1[1])<>0 then
> cnt3:=0;:
> for l from 1 to nops(lista_signes_cas1) do
> if lista_signes_cas1[l]<>semm_init then
> mesaj="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour l'intérieur de la boîte,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt3:=cnt3+1:
> if cnt3=nops(lista_signes_cas1) then
> mesaj="NU";
> print("il n'y a pas des singularités dans l'espace de travail donné
> (les signes sont les mêmes)");
> fi:fi: od:
> else
> print("il n'y a pas des singularités dans l'espace de travail donné
> (il n'y a pas des solutions du système pour le cas1 ");
> fi:fi:fi:fi:fi:fi:fi:fi:fi:fi:

```

*le temps nécessaire obtenu pour vérifier la présence des singularités dans un espace de travail borné 3D*

```

> time()-st;

```

## C.2 Programme final pour la détection de singularités dans un rectangle $\mathcal{D}$

*programme pour la détection de singularités dans un espace de travail donné comme un rectangle (2D)*

```
> restart:with(linalg):Digits:=30:
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/intrare.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/limits.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/coefN.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/equation_diff_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/g_initial_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/sol_sys_cas1_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/sol_sys_cas2_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/sol_sys_cas3_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas1_MPP_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas2_MPP_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas3_MPP_ct.m";
> read "C:/projet_master/maple/merlet/MPP/proc_cas4_MPP_ct.m";
> phi_ct:=phimax:
> st := time():
```

*le premier sous-système  $S1$*

```
> lista_signes_cas4_sommets:=proc_cas4_MPP_ct(xmin,xmax,ymin,ymax,phi_ct);
      lista_signes_cas4_sommets := [-1, -1, -1, -1]
```

*calculer le signe initial*

```
> semn_init:=lista_signes_cas4_sommets[1];
      semn_init := -1
> cnt:=0:
```

*vérifier la présence des singularités sur les sommets*

```

> for k from 2 to nops(lista_signes_cas4_sommets) do
> if lista_signes_cas4_sommets[k]<>semn_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes des sommets,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt:=cnt+1:
> if(cnt=nops(lista_signes_cas4_sommets)) then
> mesaj:="NU";
> fi: fi:od:

```

*passer aux autres sous-systèmes (les arêtes et l'intérieur du rectangle)*

```

> if mesaj="NU" then
> print("on vérifie les arêtes; on commence avec le cas 3");
> lista_signes_cas3:=proc_cas3_MPP_ct(xmin,xmax,ymin,ymax,phi_ct);
> if nops(lista_signes_cas3[1])<>0 then
> cnt1:=0;
> for j from 1 to nops(lista_signes_cas3) do
> if lista_signes_cas3[j]<>semn_init then
> mesaj:="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour les arêtes-cas3,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt1:=cnt1+1:
> if cnt1=nops(lista_signes_cas3_yT) then
> mesaj:="NU";
> print("on va vérifier les autres 2 arêtes, c'est-à-dire cas2");

```

```

> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas3[1])=0 then
> lista_signes_cas2:=proc_cas2_MPP_ct(xmin,xmax,ymin,ymax,phi_ct);
> if nops(lista_signes_cas2[1])<>0 then
> cnt2:=0:
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas2) do
> if lista_signes_cas2[i]<>semn_init then
> mesaj="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes pour ses arêtes,
> les signes de la fonction initiale sont différents, alors
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:
> if cnt2=nops(lista_signes_cas2) then
> mesaj="NU";
> print("on va vérifier les valeursextrêmes à l'intérieur du rectangle,
> donc on analyse le dernier cas, le cas1".)
> fi:fi: od: fi:
> if mesaj="NU" or nops(lista_signes_cas2[1])=0 then
> lista_signes_cas1:=proc_cas1_MPP_ct(xmin,xmax,ymin,ymax,phi_ct);
> if nops(lista_signes_cas1[1])<>0 then
> cnt2:=0:
> for i from 1 to nops(lista_signes_cas1) do
> if lista_signes_cas1[i]<>semn_init then
> mesaj="DA";
> print("pour les valeurs extrêmes à l'intérieur du rectangle,
> les signes de la fonction initiale, alors sont différents,
> il y a au moins une singularité dans l'espace de travail donné");
> break;
> else
> cnt2:=cnt2+1:

```

```
> if cnt2=nops(lista_signes_cas1) then
> mesaj:="NU";
> print("il n'y a pas des singularités dans l'espace de travail donné
> (les signes sont les mêmes)");
> fi:fi:od:fi:fi:fi:fi:
```

*le temps nécessaire obtenu pour vérifier la présence des singularités  
dans un espace de travail borné 2D*

```
> time()-st;
```

## Annexe D

### Les termes de la matrice jacobienne J obtenus avec les angles d'*Euler* et les angles *Tilt&Torsion*

Dans cette annexe on présente les éléments de la matrice jacobienne,  $\mathbf{J}$ , obtenus par deux paramétrisations de l'orientation différentes. L'annexe est divisée dans deux parties. Dans la première partie, on présente les expressions des termes de la matrice, en utilisant les angles d'Euler, bien que dans la deuxième partie les expressions sont obtenues en utilisant les angles Tilt&Torsion.

## D.1 Les termes $j_{ik}$ , $i, k = 1, 2, 3$ de la jacobienne $\mathbf{J}$ , en utilisant les angles d'*Euler*

$$j_{11} = hx_1 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_3)$$

$$j_{12} = -hx_1 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_3) + w_1 x_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3$$

$$j_{13} = w_1 x_1 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_3)$$

$$j_{21} = u_2 (-x_2 \sin \phi_2 \cos \phi_3 + y_2 \sin \phi_2 \sin \phi_3) + hx_2 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_3) + \\ hy_2 (-\sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 + \cos \phi_1 \cos \phi_3)$$

$$j_{22} = -h (x_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_3) + y_2 (-\cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 - \sin \phi_1 \cos \phi_3)) - \\ w_2 (-x_2 \sin \phi_2 \cos \phi_3 + y_2 \sin \phi_2 \sin \phi_3)$$

$$j_{23} = w_2 (x_2 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_3) + y_2 (-\sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 + \cos \phi_1 \cos \phi_3)) - \\ u_2 (x_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_3) + y_2 (-\cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 - \sin \phi_1 \cos \phi_3))$$

$$j_{31} = u_3 (-x_3 \sin \phi_2 \cos \phi_3 + y_3 \sin \phi_2 \sin \phi_3) + hx_3 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_3) + \\ hy_3 (-\sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 + \cos \phi_1 \cos \phi_3)$$

$$j_{32} = -h (x_3 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_3) + y_3 (-\cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 - \sin \phi_1 \cos \phi_3)) - \\ w_3 (-x_3 \sin \phi_2 \cos \phi_3 + y_3 \sin \phi_2 \sin \phi_3)$$

$$j_{33} = w_3 (x_3 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_3) + y_3 (-\sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 + \cos \phi_1 \cos \phi_3)) - \\ u_3 (x_3 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_3) + y_3 (-\cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 - \sin \phi_1 \cos \phi_3))$$

## D.2 Les termes $j_{ik}$ , $i, k = 1, 2, 3$ de la jacobienne $\mathbf{J}$ , en utilisant les angles *Tilt&Torsion*

$$j_{11} = hx_1 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - \cos \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{12} = -hx_1 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) + \sin \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1)) + x_1 w_1 \sin \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1)$$

$$j_{13} = w_1 x_1 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - \cos \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{21} = u_2 (-x_2 \sin \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - y_2 \sin \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1)) + hx_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - hx_2 \cos \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1) + hy_2 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1) + \cos \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{22} = -hx_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi) + \sin \phi_1 \sin (-\sigma + \phi)) + hy_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1) - hy_2 \sin \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1) - w_2 (-x_2 \sin \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - y_2 \sin \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{23} = w_2 x_2 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - \cos \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1)) + w_2 y_2 (\cos \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1) - \sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1)) + u_2 x_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - \sin \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1)) + u_2 y_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1) - \sin \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{31} = u_3 (-x_3 \sin \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - y_3 \sin \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1)) + hx_3 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - hx_3 \cos \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1) + hy_3 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1) + \cos \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{32} = -hx_3 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi) + \sin \phi_1 \sin (-\sigma + \phi)) + hy_3 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1) - hy_3 \sin \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1) - w_3 (-x_3 \sin \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - y_3 \sin \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1))$$

$$j_{33} = w_3 x_3 (\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - \cos \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1)) + w_3 y_3 (\cos \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1) - \sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1)) + u_3 x_3 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (-\sigma + \phi_1) - \sin \phi_1 \sin (-\sigma + \phi_1)) + u_3 y_3 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin (-\sigma + \phi_1) - \sin \phi_1 \cos (-\sigma + \phi_1))$$