

JEAN-FRANÇOIS ALLAN

**ANALYSE DYNAMIQUE DE MÉCANISMES
PARALLÈLES À 3 ET 4 DEGRÉS DE LIBERTÉ**

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

NOVEMBRE 2001

Résumé

Ce mémoire présente l'analyse dynamique de 3 nouveaux mécanismes : un mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté, un mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté et un mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté. Pour chacun de ceux-ci, dont l'architecture a été élaborée dans le but de concevoir un simulateur de vol offrant de bonnes performances, nous avons établi le modèle géométrique, les équations de position, de vitesse et d'accélération, la modélisation des différents corps et le calcul des efforts aux actionneurs avec l'utilisation du principe du travail virtuel. Une seconde méthode pour le calcul des couples aux moteurs, soit l'approche classique de Newton-Euler, est également utilisée pour le mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté. Afin de vérifier les résultats obtenus, un bilan d'énergie et le logiciel de simulation dynamique ADAMS sont utilisés.

Jean-François Allan

Clément M. Gosselin

Table des matières

Résumé	i
Table des matières	ii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Introduction	1
1 Mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté	4
1.1 Modèle géométrique	4
1.1.1 Contraintes du MPS3DDL	6
1.2 Problème géométrique inverse	7
1.3 Équations de vitesse	10
1.3.1 Vérification des matrices jacobiennes	13
1.4 Équations d'accélération	14
1.5 Portion passive du MPS3DDL	16
1.6 Dynamique	18
1.6.1 Modélisation	18
1.6.2 Principe du travail virtuel	19
1.6.2.1 Forces et moments exercés au CDM de chaque corps	19
1.6.2.2 Déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps	21
1.6.3 Approche de Newton-Euler	23

1.6.3.1	Système d'équations	24
1.6.4	Bilan d'énergie	25
1.7	Exemple de résultats	26
1.8	Simulation dynamique sous ADAMS	31
2	Mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté	36
2.1	Modèle géométrique	36
2.1.1	Géométrie de la base	39
2.1.2	Géométrie de la plate-forme	40
2.1.3	Géométrie des membres proximaux	41
2.1.4	Géométrie des membres distaux	43
2.2	Problème géométrique inverse	45
2.3	Équations de vitesse	46
2.4	Équations d'accélération	50
2.5	Dynamique	51
2.5.1	Modélisation	51
2.5.1.1	Membres proximaux	52
2.5.1.2	Membres distaux	52
2.5.1.3	Tiges de longueur l	55
2.5.1.4	Plate-forme	56
2.5.1.5	Actionneur prismatique	57
2.5.2	Principe du travail virtuel	58
2.5.2.1	Forces et moments exercés au CDM de chaque corps	58
2.5.2.2	Déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps	59
2.6	Exemple de résultats	61
2.7	Simulation dynamique sous ADAMS	67
3	Mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté	71
3.1	Modèle géométrique	71
3.1.1	Géométrie de l'oeil agile	72
3.1.1.1	Géométrie de la plate-forme de l'oeil agile	73
3.1.1.2	Géométrie des membres distaux	75
3.1.2	Géométrie des stabilisateurs	76

3.1.3	Géométrie du mécanisme de translation	80
3.1.4	Géométrie de la plate-forme du mécanisme hybride	82
3.2	Problème géométrique inverse	82
3.2.1	PGI du mécanisme de l'oeil agile	82
3.2.2	PGI du mécanisme de translation	83
3.3	Équations de vitesse	83
3.3.1	Équations de vitesse du mécanisme de l'oeil agile	83
3.3.2	Équations de vitesse du mécanisme de translation	85
3.3.3	Combinaison des équations de vitesse	86
3.4	Équations d'accélération	87
3.5	Dynamique	88
3.5.1	Modélisation	88
3.5.1.1	Modélisation de l'oeil agile	89
3.5.1.2	Modélisation des stabilisateurs	89
3.5.1.3	Modélisation du mécanisme de translation	92
3.5.1.4	Modélisation de la plate-forme du mécanisme hybride	93
3.5.2	Principe du travail virtuel	94
3.5.2.1	Forces et moments exercés au CDM de chaque corps	94
3.5.2.2	Déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps	95
3.6	Exemple de résultats	97
3.7	Simulation dynamique sous ADAMS	103
	Conclusion	107
	Références	110
	A Modélisation des corps du MPS3DDL	112
A.1	Membrures	112
A.2	Solide 1	113
A.3	Solide 2	116
	B DCL des corps du MPS3DDL	120
B.1	DCL des membrures	120
B.2	DCL du solide 1	124
B.3	DCL du solide 2	126

C	Modélisation des corps du MPS4DDL	129
C.1	Tiges de longueur l	129
C.2	Plate-forme	130
C.3	Actionneur prismatique	133
D	Modélisation des corps du MHS4DDL	136
D.1	Stabilisateurs	136
D.2	Mécanisme de translation	137
D.3	Plate-forme du mécanisme hybride	139

Liste des tableaux

4.1	Résumé des principales caractéristiques des mécanismes.	107
-----	---	-----

Liste des figures

1.1	Mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté.	5
1.2	Mécanisme à 6 barres (dans le plan xz).	7
1.3	Mécanisme à 5 barres (dans le plan yz).	8
1.4	Mécanisme plan à 2 ddl.	16
1.5	Mécanisme parallèle à 3 degrés de liberté non surcontraint.	24
1.6	Allure du mécanisme parallèle spatial à 3 ddl.	27
1.7	Trajectoire du centre de la plate-forme.	28
1.8	Évolution des positions articulaires.	28
1.9	Évolution des vitesses articulaires.	29
1.10	Évolution des accélérations articulaires.	29
1.11	Évolution des couples articulaires.	30
1.12	Bilan d'énergie.	30
1.13	Exemple de résultats pour une trajectoire donnée avec ADAMS.	33
1.14	Couple au moteur 1.	34
1.15	Couple au moteur 2.	34

1.16	Couple au moteur 3.	35
2.1	Architecture du mécanisme sphérique à 4 degrés de liberté.	37
2.2	Chaîne cinématique i reliant la base à l'effecteur.	38
2.3	Base du mécanisme sphérique à 4 ddl.	39
2.4	Plate-forme du mécanisme sphérique à 4 ddl.	41
2.5	Membre proximal.	42
2.6	Membre distal.	43
2.7	Configurations spéciales.	49
2.8	Repère local du membre distal.	53
2.9	Allure du mécanisme parallèle sphérique à 4 ddl.	61
2.10	Modélisation des membres proximaux et distaux.	62
2.11	Trajectoire du centre de la plate-forme.	64
2.12	Évolution des positions articulaires.	64
2.13	Évolution des vitesses articulaires.	65
2.14	Évolution des accélérations articulaires.	65
2.15	Couples ou forces requis aux actionneurs.	66
2.16	Bilan d'énergie.	66
2.17	Exemple de résultats pour une trajectoire donnée avec ADAMS.	68
2.18	Couple au moteur 1.	69
2.19	Couple au moteur 2.	69
2.20	Couple au moteur 3.	70
2.21	Force à l'actionneur prismatique.	70
3.1	Architecture du mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté.	73
3.2	Plate-forme de l'oeil agile.	74

3.3	Membre distal.	75
3.4	Géométrie des stabilisateurs.	77
3.5	Mécanisme de translation à 1 ddl.	81
3.6	Allure du mécanisme parallèle sphérique à 4 ddl.	98
3.7	Trajectoire du centre de la plate-forme et orientations.	100
3.8	Évolution des coordonnées articulaires.	100
3.9	Évolution des vitesses articulaires.	101
3.10	Évolution des accélérations articulaires.	101
3.11	Couples requis aux moteurs.	102
3.12	Bilan d'énergie.	102
3.13	Exemple de résultats pour une trajectoire donnée avec ADAMS.	104
3.14	Couple au moteur 1.	105
3.15	Couple au moteur 2.	105
3.16	Couple au moteur 3.	106
3.17	Couple au moteur 4.	106
A.1	Solide 1.	114
A.2	Solide 2.	117
B.1	DCL du corps 1.	121
B.2	DCL du corps 7.	123
B.3	DCL du solide 1.	125
B.4	DCL du solide 2.	126
C.1	Modélisation de la plate-forme.	130
C.2	Modélisation de l'actionneur prismatique.	133

Introduction

Depuis les années soixante, avec le développement de l'industrie aéronautique, l'utilisation des mécanismes parallèles a commencé à se faire plus fréquente avec la venue du mécanisme de Gough-Stewart à 6 degrés de liberté pour la création des premiers simulateurs de vol. Toutefois, ce n'est que depuis les années quatre-vingt que les mécanismes parallèles attirent fortement l'attention des chercheurs. Ceci a donc permis, dans les dernières années, la mise au point de nouveaux mécanismes dont les applications sont tout à fait intéressantes [1].

Or, au Laboratoire de robotique de l'Université Laval, l'un des projets de recherche consiste à concevoir un simulateur de vol offrant de bonnes performances et qui offre de faibles coûts de fabrication et d'opération par rapport aux simulateurs de vol existants. Puisque les simulateurs de vol commerciaux actuels les plus populaires demeurent ceux qui ont une architecture basée sur le mécanisme de Gough-Stewart, il serait intéressant d'observer d'autres architectures qui permettraient de conserver un bon niveau de performance tout en réduisant les coûts.

Par ailleurs, les travaux réalisés par Pouliot, Gosselin et Nahon [2] ont permis de révéler que, dans la majorité des cas, un mécanisme à 3 degrés de liberté est en mesure de produire une simulation de mouvement qui est de qualité comparable à celle produite par un mécanisme de Gough-Stewart à 6 degrés de liberté. Or, avec moins de degrés de liberté, on requiert moins d'actionneurs et de chaînes cinématiques entre la base et la plate-forme mobile, ce qui contribue à réduire les coûts de fabrication et d'opération

avec un design approprié. De plus, comme les travaux de Zlatanov et Gosselin [3] le soulignent, les simulateurs de vol actuels ne peuvent produire une bonne simulation de mouvement en translation verticale, notamment appelée le *heave*. Ainsi, lors de la conception d'un nouveau simulateur de vol, il serait intéressant de combler cette lacune.

En comparant plusieurs types d'architectures et en en remodelant de nouvelles afin d'obtenir les degrés de liberté désirés pour la création d'un éventuel simulateur de vol, 3 nouveaux mécanismes sont sélectionnés. Il est à noter que la mise au point de l'architecture de ceux-ci est le résultat d'une collaboration avec plusieurs membres du Laboratoire de robotique de l'Université Laval, soit l'implication de Clément Gosselin, Dimiter Zlatanov, Boris Mayer St-Onge, Ilian Bonev, Thierry Laliberté et Pascal Dufour. Globalement, ces mécanismes offrent comme mouvement à la plate-forme une translation verticale en plus de 2 ou 3 degrés de liberté en rotation. Avec un chapitre de ce mémoire qui est dédié à chacun de ces mécanismes, ceux-ci sont

- un mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté (chapitre 1);
- un mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté (chapitre 2);
- un mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté (chapitre 3).

Concernant le mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté, il s'agit d'une toute nouvelle architecture qui s'inspire, à son origine, des degrés de liberté donnés au *Heave-Pitch-Roll Platform* présentée en [2]. Pour ce qui est du mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté, il est un dérivé de l'*oeil agile* (un mécanisme sphérique à 3 degrés de liberté bien étudié [4 à 11]) pouvant en plus effectuer une translation verticale. Notons que la cinématique de ce nouveau mécanisme a été étudiée grâce à une approche basée sur les visseurs et les torseurs en [3]. Pour ce qui est du mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté, il s'agit de la combinaison en série de l'*oeil agile* sur lequel on retrouve un mécanisme de translation (similaire au mécanisme plan RRRP présenté dans un exemple d'application en [12]), qui active une seconde plate-forme.

Une fois les 3 nouvelles architectures établies, dans une optique visant le contrôle du simulateur [9, 11], il est nécessaire de connaître les équations reliées au mouvement, c'est-à-dire qu'il faut établir les équations de position (résolution du problème géométrique inverse [13]), de vitesse et d'accélération afin de connaître les relations entre le mouvement des actionneurs et les degrés de liberté de la plate-forme [14]. De plus,

pour contrôler le mouvement du simulateur avec un terme prédictif, il faut résoudre le problème dynamique inverse [15] qui consiste à prescrire l'évolution des positions, vitesses ou accélérations articulaires afin de déterminer l'évolution des couples ou forces articulaires nécessaires pour produire ce mouvement.

Pour le premier mécanisme étudié au chapitre 1, deux méthodes sont employées pour le calcul des couples : l'approche classique de Newton-Euler [6, 7] et l'utilisation de principe du travail virtuel [16 à 18]. En analysant la procédure de ces deux approches qui mènent aux mêmes résultats, on se rend compte que l'utilisation du principe du travail virtuel est une méthode plus rapide, moins coûteuse au niveau des calculs (pour un mécanisme composé de nombreux corps, Newton-Euler requiert l'inversion d'un système d'équations de très grande taille [5]) et qui permet d'avoir une meilleure compréhension des interrelations entre les différents paramètres qui influencent les résultats. Pour ces raisons, les mécanismes des chapitres 2 et 3 sont uniquement traités avec le principe du travail virtuel.

D'autre part, au niveau des 3 chapitres, une méthode très efficace pour vérifier l'exactitude des couples ou forces obtenus aux actionneurs est d'effectuer un bilan d'énergie [6]. De plus, une seconde vérification est effectuée avec le logiciel de simulation dynamique ADAMS. Ainsi, en vérifiant de différentes façons les résultats découlant des équations de la cinématique et de la dynamique, on s'assure qu'aucune erreur ne s'est glissée à l'intérieur des équations développées. Donc, à toute fin pratique, les chapitres 1, 2 et 3 présentent une analyse dynamique complète pour chacun des nouveaux mécanismes qui représentent de bons candidats pour la réalisation d'un simulateur de vol ayant une toute nouvelle architecture.

Chapitre 1

Mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté

1.1 Modèle géométrique

Le mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté (noté MPS3DDL) se compose d'un mécanisme à 6 barres $A_1B_1C_1C_2B_2A_2$ (dont le mouvement est limité au plan xz) couplé par l'intermédiaire d'une articulation sphérique en C_3 à un mécanisme à 5 barres $A_3B_3C_4B_4A_4$ (mouvement seulement possible dans le plan yz).

La figure 1.1 montre l'architecture du MPS3DDL avec ses principaux paramètres. La plate-forme du MPS3DDL, dont le centre est O' , est contrôlée avec les 3 moteurs situés sur la base en A_1 , A_2 et A_3 . En A_4 , on retrouve une articulation *passive* qui sert principalement à assurer la stabilité du mouvement des membrures A_3B_3 , B_3D et DC_3 dans le plan yz . Un repère fixe \mathcal{R}_{xyz} d'origine O est fixé sur la base formée par

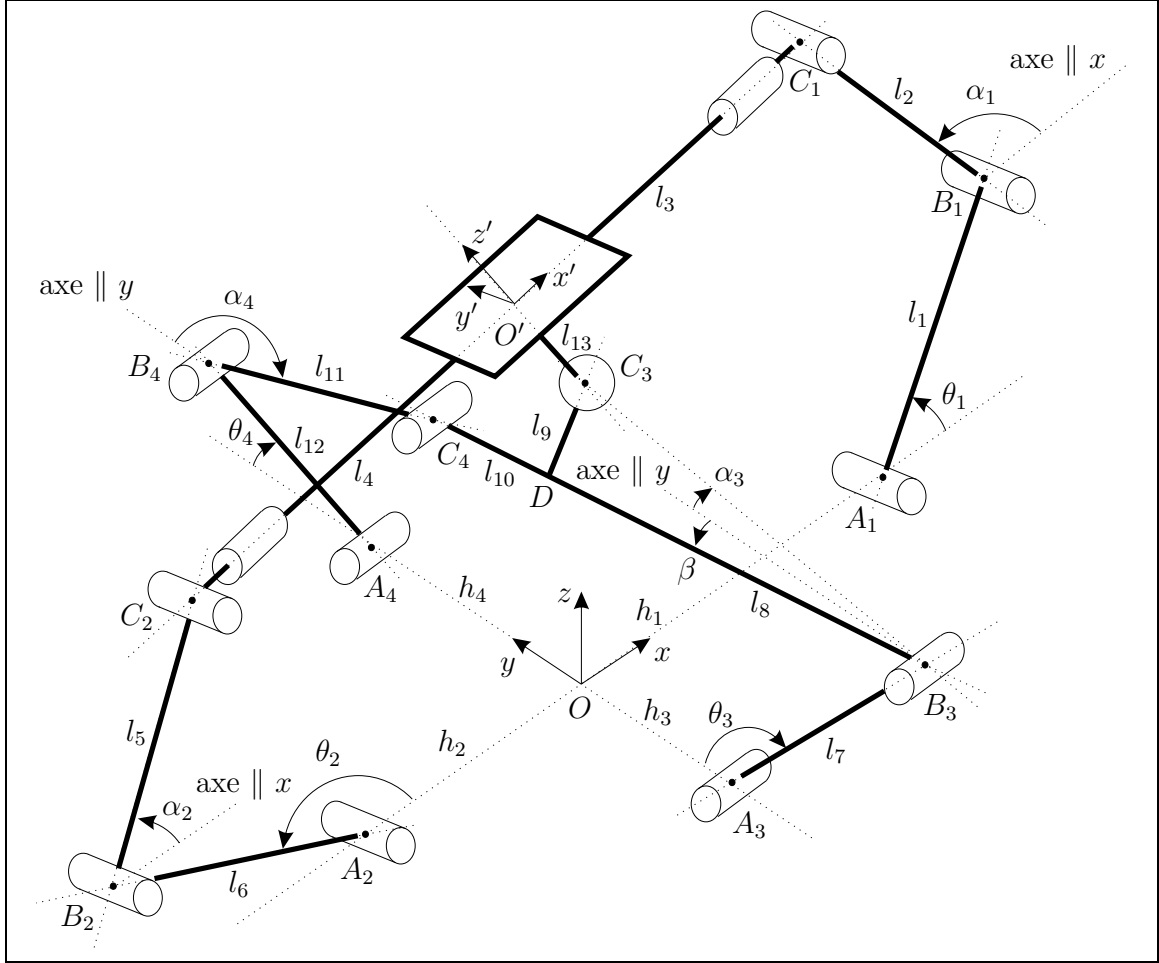


FIG. 1.1 – Mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté.

l'emplacement dans le plan xy des points A_1 à A_4 . Avec la distance h_i séparant chaque articulation A_i du point O , on établit les vecteurs suivants

$$\mathbf{a}_1 = [h_1, 0, 0]^T \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a}_2 = [-h_2, 0, 0]^T \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a}_3 = [0, -h_3, 0]^T \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a}_4 = [0, h_4, 0]^T \quad (1.4)$$

Un repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ est attaché au centre de la plate-forme O' . Les axes x' et z' suivent respectivement la direction de $O'C_1$ et C_3O' . Pour représenter l'orientation de la plate-forme, une matrice de rotation $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_x \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_z$ est utilisée où les angles d'Euler

autour de x , y et z sont respectivement ϕ , θ et ψ . Donc, la matrice \mathbf{Q} est

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Pour indiquer la position de la plate-forme, on utilise le vecteur OO' , noté \mathbf{p} , suivant

$$\mathbf{p} = [x, y, z]^T \quad (1.6)$$

1.1.1 Contraintes du MPS3DDL

En établissant le point O' , on peut localiser les points C_1 , C_2 et C_3 avec l'expression suivante

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

où

$$[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{R}'} = [l_3, 0, 0]^T \quad (1.8)$$

$$[\mathbf{c}_2]_{\mathcal{R}'} = [-l_4, 0, 0]^T \quad (1.9)$$

$$[\mathbf{c}_3]_{\mathcal{R}'} = [0, 0, -l_{13}]^T \quad (1.10)$$

Or, puisque le mécanisme à 5 barres ne peut sortir du plan yz , la coordonnée en x de C_3 est nulle. Donc, à partir de l'équation (1.7) où $i = 3$, on tire que

$$x = l_{13} \sin \theta \quad (1.11)$$

De manière similaire, étant donné que le mécanisme à 6 barres ne peut sortir du plan xz , la coordonnée en y de C_1 , C_2 et O' est nulle. Ainsi, en partant de l'équation (1.7) avec $i = 1$ ou $i = 2$, on trouve la relation suivante

$$\tan \psi = -\tan \phi \sin \theta \quad (1.12)$$

De cette façon, la position et l'orientation de la plate-forme, définie par le vecteur $\boldsymbol{\eta}$, est obtenue en indiquant la valeur de z , ϕ et θ puisque

$$\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T = [l_{13} \sin \theta, 0, z, \phi, \theta, \text{atan}(-\tan \phi \sin \theta)]^T \quad (1.13)$$

1.2 Problème géométrique inverse

La résolution du problème géométrique inverse (PGI) va permettre de trouver les angles θ_1 à θ_4 au niveau de la base qui correspondent à une certaine position et orientation de la plate-forme. Avec l'aide des figures 1.2 et 1.3 qui indiquent la géométrie des mécanismes à 6 barres et à 5 barres, on se rend compte qu'il s'agit de résoudre le PGI de 4 mécanismes plans à 2 degrés de liberté chacun où A_i et C_i sont connus.

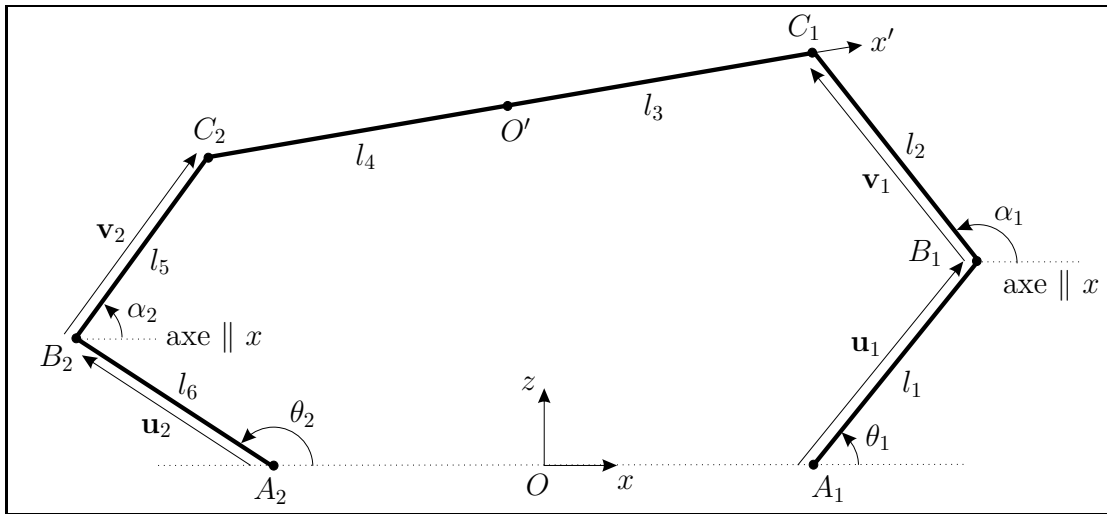


FIG. 1.2 – Mécanisme à 6 barres (dans le plan xz).

Toutefois, pour localiser C_4 (voir la figure 1.3), il faut calculer l'angle β puisque le positionnement de la partie passive dépend seulement de l'emplacement des points A_3 , B_3 et C_3 . En associant un repère \mathcal{R}_1 $x_1y_1z_1$ dont l'origine O_1 coïncide avec le point C_3 , l'axe z_1 suit la direction de DC_3 et l'axe y_1 suit la direction de B_3C_4 (l'axe y_1 est donc orienté selon un angle β avec l'axe y), on établit que le vecteur OC_4 est

$$\mathbf{c}_4 = \mathbf{c}_3 + \mathbf{Q}_1[\mathbf{c}_4]_{\mathcal{R}_1} \quad (1.14)$$

avec

$$[\mathbf{c}_4]_{\mathcal{R}_1} = [0, l_{10}, -l_9]^T \quad (1.15)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\beta_1 = \text{atan}(l_9/l_8) \quad (1.17)$$

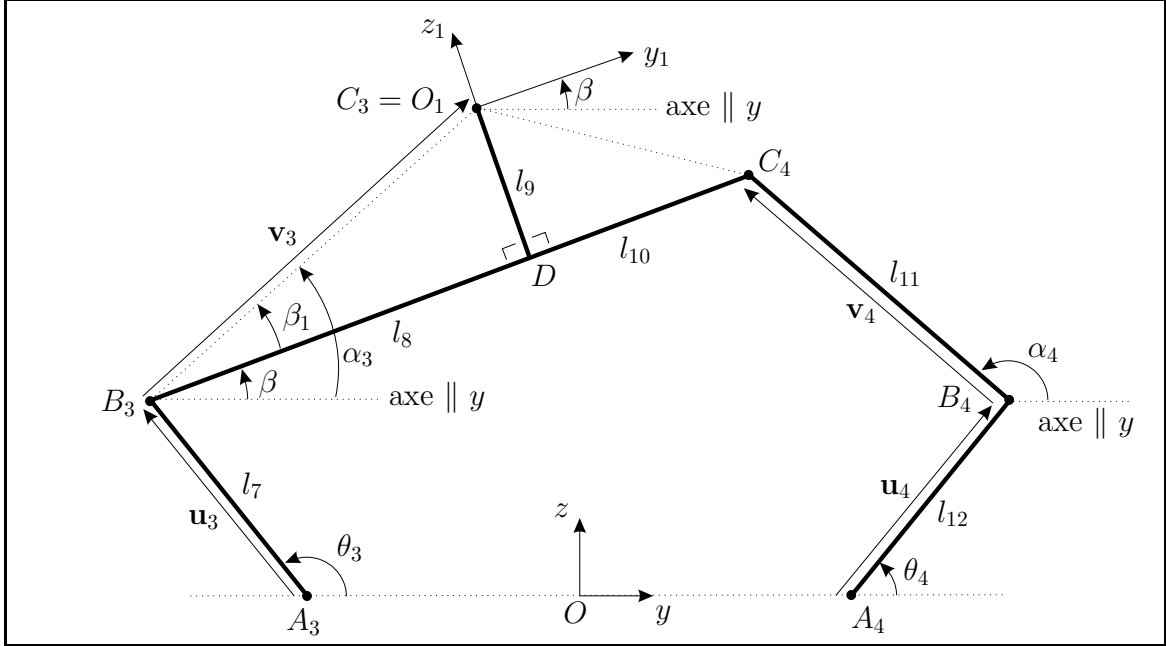


FIG. 1.3 – Mécanisme à 5 barres (dans le plan yz).

$$\alpha_3 = \text{atan2}(c_{3z} - b_{3z}, c_{3y} - b_{3y}) \quad (1.18)$$

$$\beta = \alpha_3 - \beta_1 \quad (1.19)$$

Pour solutionner le PGI associé à chacune des articulations en A_i , étant donné que la méthode de résolution est identique pour $i = 1, \dots, 4$, utilisons les vecteurs \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 où les éléments i de ces vecteurs représentent respectivement la norme des vecteurs \mathbf{u}_i et \mathbf{v}_i . Ainsi, on tire que

$$\mathbf{L}_1 = [l_1, l_6, l_7, l_{12}]^T \quad (1.20)$$

$$\mathbf{L}_2 = [l_2, l_5, \sqrt{l_8^2 + l_9^2}, l_{11}]^T \quad (1.21)$$

Or, on a que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.22)$$

avec

$$\mathbf{u}_i = L_{1i} [\cos \theta_i, 0, \sin \theta_i]^T, \quad i = 1, 2 \quad (1.23)$$

$$\mathbf{u}_i = L_{1i} [0, \cos \theta_i, \sin \theta_i]^T, \quad i = 3, 4 \quad (1.24)$$

En prenant le carré de la norme de \mathbf{v}_i , on obtient

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = L_{2i}^2 = (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i)^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i), \quad i = 1, \dots, 4$$

$$L_{2i}^2 = (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i) - 2(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{u}_i + L_{1i}^2, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.25)$$

De plus, en considérant les vecteurs unitaires suivants

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T \quad (1.26)$$

$$\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T \quad (1.27)$$

$$\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T \quad (1.28)$$

l'équation (1.25) devient sous la forme

$$K_{1i} \cos \theta_i + K_{2i} \sin \theta_i + K_{3i} = 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.29)$$

avec

$$K_{1i} = 2(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T L_{1i} \mathbf{e}_1, \quad i = 1, 2 \quad (1.30)$$

$$K_{1i} = 2(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T L_{1i} \mathbf{e}_2, \quad i = 3, 4 \quad (1.31)$$

$$K_{2i} = 2(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T L_{1i} \mathbf{e}_3, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.32)$$

$$K_{3i} = L_{2i}^2 - L_{1i}^2 - (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.33)$$

En utilisant les identités

$$\cos \theta_i = \frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.34)$$

$$\sin \theta_i = \frac{2t_i}{1 + t_i^2}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.35)$$

avec

$$t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.36)$$

on trouve la relation

$$[-K_{1i} + K_{3i}]t_i^2 + [2K_{2i}]t_i + [K_{1i} + K_{3i}] = 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.37)$$

ce qui implique que

$$t_i = \frac{-2K_{2i} \pm \sqrt{(2K_{2i})^2 - 4(-K_{1i} + K_{3i})(K_{1i} + K_{3i})}}{2(-K_{1i} + K_{3i})}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.38)$$

Ainsi, l'angle recherché θ_i est

$$\theta_i = 2\text{atan}(t_i), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.39)$$

Étant donné qu'il y a deux solutions possibles à l'équation (1.38), le MPS3DDL peut ainsi adopter 16 configurations différentes pour atteindre une certaine position et orientation au niveau de la plate-forme (8 configurations si on ne considère pas la partie passive avec $i = 4$). Toutefois, afin d'avoir les *coudes* des mécanismes vers l'extérieur pour éviter les interférences mécaniques, on choisit le signe devant le radical comme étant $+$, $-$, $-$, $+$ respectivement pour $i = 1, \dots, 4$.

Une fois le PGI résolu, on peut déterminer la position de tous les points du MPS3DDL présentés sur la figure 1.1. Or, les vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{c}_i , $i = 1, \dots, 4$, ont déjà été calculés (voir les équations (1.1) à (1.4) ainsi que (1.7) et (1.14)). Pour localiser les points B_i , $i = 1, \dots, 4$, et D , on a que

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + l_1[\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1]^T \quad (1.40)$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + l_6[\cos \theta_2, 0, \sin \theta_2]^T \quad (1.41)$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 + l_7[0, \cos \theta_3, \sin \theta_3]^T \quad (1.42)$$

$$\mathbf{b}_4 = \mathbf{a}_4 + l_{12}[0, \cos \theta_4, \sin \theta_4]^T \quad (1.43)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{c}_3 + \mathbf{Q}_1[0, 0, -l_9]^T \quad (1.44)$$

Pour les angles α_1 , α_2 et α_4 (α_3 est calculé à l'équation (1.18)), on trouve que

$$\alpha_1 = \text{atan2}(c_{1z} - b_{1z}, c_{1x} - b_{1x}) \quad (1.45)$$

$$\alpha_2 = \text{atan2}(c_{2z} - b_{2z}, c_{2x} - b_{2x}) \quad (1.46)$$

$$\alpha_4 = \text{atan2}(c_{4z} - b_{4z}, c_{4y} - b_{4y}) \quad (1.47)$$

1.3 Équations de vitesse

En dérivant l'équation (1.25) par rapport au temps, on obtient

$$2(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{c}}_i - 2\mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{c}}_i - 2(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{u}}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.48)$$

Il est à noter qu'on ne tient pas compte du cas où $i = 4$ puisque l'articulation n'est pas motorisée. En remaniant l'équation (1.48), on tire que

$$(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_i)^T \dot{\mathbf{c}}_i = (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.49)$$

$$\mathbf{v}_i^T \dot{\mathbf{c}}_i = (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.50)$$

Or, en dérivant les équations (1.23) et (1.24), on obtient que

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\theta}_i \mathbf{E}_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.51)$$

avec

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

$$(1.54)$$

et, en dérivant l'équation (1.7), on trouve que

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.55)$$

où, en dérivant l'équation (1.5), on a que

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (1.56)$$

en considérant que le vecteur des vitesses angulaires de la plate-forme est $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$.

Ainsi, l'équation (1.50) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{v}_i^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'}) = \dot{\theta}_i (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{E}_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.57)$$

et puisque

$$\mathbf{v}_i^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{v}_i^T [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'})], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.58)$$

$$= [(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{v}_i)^T \boldsymbol{\omega}], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.59)$$

on a que

$$\mathbf{v}_i^T \dot{\mathbf{p}} + [(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{v}_i)^T \boldsymbol{\omega}] = \dot{\theta}_i (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{E}_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.60)$$

Donc, sous une forme matricielle où $\mathbf{t} = [\dot{\mathbf{p}}^T, \boldsymbol{\omega}^T]^T$ et $\boldsymbol{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$, on obtient la relation suivante

$$\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.61)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T & [(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{v}_1)^T] \\ \mathbf{v}_2^T & [(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_2]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{v}_2)^T] \\ \mathbf{v}_3^T & [(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_3]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{v}_3)^T] \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}[(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{E}_i \mathbf{u}_i], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.63)$$

La matrice \mathbf{A} est de dimension 3×6 . Puisque les trois moteurs en A_1 , A_2 et A_3 servent à contrôler z , ϕ et θ au niveau de la plate-forme, on doit reformuler les expressions en ajoutant les contraintes de mouvement du MPS3DDL. En établissant la relation entre les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}$ et les vitesses des angles d'Euler, on trouve une relation du type

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Ainsi, on a que

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{S}_1(3 \times 3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (1.65)$$

De plus, en dérivant les équations (1.11) et (1.12), on obtient

$$\dot{x} = \dot{\theta} l_{13} \cos \theta \quad (1.66)$$

$$\dot{\psi} = k_1 \dot{\phi} + k_2 \dot{\theta} \quad (1.67)$$

avec

$$k_1 = \frac{-\cos^2 \psi \sin \theta}{\cos^2 \phi} \quad (1.68)$$

$$k_2 = -\cos^2 \psi \cos \theta \tan \phi \quad (1.69)$$

ce qui permet d'établir que

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_{13} \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (1.70)$$

Ainsi, l'équation (1.61) reformulée devient

$$\mathbf{ASR}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.71)$$

et les vitesses articulaires des moteurs sont

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{ASR}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (1.72)$$

La solution tirée de l'équation (1.72) permet ensuite de trouver la vitesse des points B_1 à B_3 avec

$$\dot{\mathbf{b}}_i = \dot{\theta}_i \mathbf{E}_i(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.73)$$

Il faut toutefois souligner que pour la partie passive du MPS3DDL ($i = 4$), qui n'intervient pas au niveau des matrices jacobiennes précédentes, $\dot{\theta}_4$ et $\ddot{\theta}_4$ doivent être calculées de façon indépendante (ceci sera fait à la section 1.5) une fois que la vitesse et l'accélération de C_3 et β sont connues (voir la relation qui existe entre C_4 , C_3 et β à l'équation (1.14)). Par la suite, il sera possible d'évaluer la vitesse de B_4 avec l'équation (1.73).

1.3.1 Vérification des matrices jacobiennes

En considérant la relation (1.72), on a que

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{ASR} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \epsilon_3} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \epsilon_3} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial \epsilon_1} & \frac{\partial \theta_3}{\partial \epsilon_2} & \frac{\partial \theta_3}{\partial \epsilon_3} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \epsilon_1} & \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \epsilon_2} & \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \epsilon_3} \\ \frac{\Delta \theta_2}{\Delta \epsilon_1} & \frac{\Delta \theta_2}{\Delta \epsilon_2} & \frac{\Delta \theta_2}{\Delta \epsilon_3} \\ \frac{\Delta \theta_3}{\Delta \epsilon_1} & \frac{\Delta \theta_3}{\Delta \epsilon_2} & \frac{\Delta \theta_3}{\Delta \epsilon_3} \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

avec $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ et $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T = [z, \phi, \theta]^T$. Pour vérifier les matrices jacobiennes, on peut utiliser le PGI où l'on spécifie $\boldsymbol{\epsilon}$ afin de trouver les positions articulaires des moteurs $\boldsymbol{\theta}$. Ainsi, voici la procédure à suivre :

- Étape 1 : Pour deux positions $\boldsymbol{\epsilon}$ très rapprochées l'une de l'autre où un seul élément de $\boldsymbol{\epsilon}$ varie (soit ϵ_k varie avec $k = 1, 2$ ou 3), évaluer $\boldsymbol{\theta}$ et $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{ASR}$ à chacune de ces positions.
- Étape 2 : Calculer $\Delta\epsilon_k, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ et la moyenne de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{ASR}$ correspondant au changement de position.
- Étape 3 : Puisque c'est seulement le k^e terme de $\boldsymbol{\epsilon}$ qui a changé, vérifier que les rapports $[\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\epsilon_k}, \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\epsilon_k}, \frac{\Delta\theta_3}{\Delta\epsilon_k}]^T$ correspondent à la k^e colonne de la moyenne de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{ASR}$.
- Étape 4 : Répéter les étapes 1 à 3 afin de vérifier les autres colonnes de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{ASR}$.

1.4 Équations d'accélération

Pour obtenir les accélérations articulaires des moteurs, il suffit de dériver par rapport au temps l'équation (1.71), ce qui nous donne

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^{-1}\{[(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{S} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{S}})\mathbf{R} + \mathbf{ASR}]\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{ASR}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\mathbf{B}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\} \quad (1.75)$$

Cette dernière équation contient, en dérivant par rapport au temps les matrices présentées aux équations (1.62) à (1.65) et à l'équation (1.70), les relations suivantes

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1^T & \{[(\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{v}_1] + \{(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{v}}_1\}^T\} \\ \dot{\mathbf{v}}_2^T & \{[(\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{c}_2]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{v}_2] + \{(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_2]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{v}}_2\}^T\} \\ \dot{\mathbf{v}}_3^T & \{[(\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{c}_3]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{v}_3] + \{(\mathbf{Q}[\mathbf{c}_3]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{v}}_3\}^T\} \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{diag}[(\dot{\mathbf{c}}_i - \dot{\mathbf{a}}_i)^T \mathbf{E}_i \mathbf{u}_i + (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{E}_i \dot{\mathbf{u}}_i], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.77)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & -\dot{\phi} \sin \phi & -\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta \\ 0 & \dot{\phi} \cos \phi & -\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \dot{\mathbf{S}}_{1(3 \times 3)} \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta} l_{13} \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{k}_1 & \dot{k}_2 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

où, en dérivant les équations (1.22), (1.68) et (1.69), on obtient

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{c}}_i - \dot{\mathbf{a}}_i - \dot{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.82)$$

$$\dot{k}_1 = - \left[\frac{(-2\dot{\psi} \cos \psi \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \theta \cos^2 \psi) \cos^2 \phi + 2\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi \cos^2 \psi \sin \theta}{\cos^4 \phi} \right] \quad (1.83)$$

$$\dot{k}_2 = - \left[-2\dot{\psi} \cos \psi \sin \psi \cos \theta \tan \phi + \left(-\dot{\theta} \sin \theta \tan \phi + \frac{\dot{\phi} \cos \theta}{\cos^2 \phi} \right) \cos^2 \psi \right] \quad (1.84)$$

Puisque les points A_i ne bougent pas, alors les vecteurs $\dot{\mathbf{a}}_i = \ddot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{0}$ pour $i = 1, \dots, 4$. Pour ce qui est du vecteur $\dot{\mathbf{u}}_i$, il est donné à l'équation (1.51).

Avec les accélérations articulaires des moteurs connues, on peut évaluer les accélérations des points B_i en dérivant l'équation (1.73), ce qui donne

$$\ddot{\mathbf{b}}_i = \ddot{\theta}_i \mathbf{E}_i(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) - \dot{\theta}_i^2 (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.85)$$

Toutefois, pour ce qui est de l'accélération en B_4 , elle ne pourra être connue qu'après avoir établi $\dot{\theta}_4$ et $\ddot{\theta}_4$ (ce qui sera fait à la section suivante). Pour ce qui est des accélérations des points C_i , on obtient en dérivant l'équation (1.55) que

$$\ddot{\mathbf{c}}_i = \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.86)$$

avec

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{Q} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q} \quad (1.87)$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

sachant que l'accélération angulaire de la plate-forme est donnée par

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{S}}_1 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{S}_1 \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

1.5 Portion passive du MPS3DDL

Avec l'équation (1.39), on peut trouver la solution au PGI pour toutes les pattes du MPS3DDL ($i = 1, \dots, 4$). Toutefois, au niveau des équations de vitesse et d'accélération, pour obtenir $\dot{\theta}_4$ et $\ddot{\theta}_4$, il faut procéder autrement qu'en utilisant les matrices jacobiennes car celles-ci ne font pas intervenir la partie passive qui est dépendante du reste du MPS3DDL. Donc, il faut revenir aux équations du PGI d'un mécanisme plan à 2 ddl où la position des points A_i et C_i sont connus pour $i = 1, \dots, 4$ (voir la figure 1.4) et dériver ces équations. De cette figure, on tire que

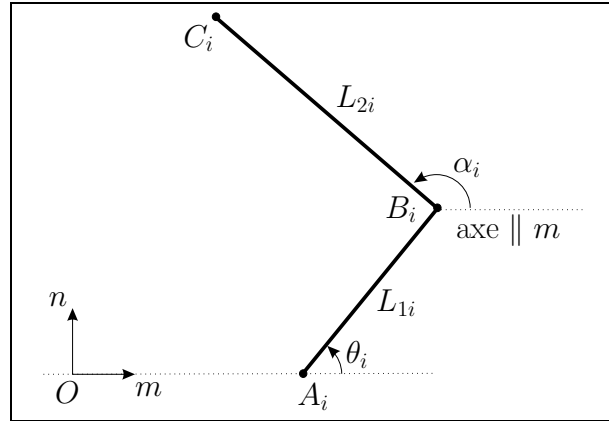


FIG. 1.4 – Mécanisme plan à 2 ddl.

$$c_{im} = a_{im} + L_{1i} \cos \theta_i + L_{2i} \cos \alpha_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.90)$$

$$c_{in} = a_{in} + L_{1i} \sin \theta_i + L_{2i} \sin \alpha_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.91)$$

En dérivant par rapport au temps les équations (1.90) et (1.91), on obtient sous une forme matricielle la relation suivante

$$\begin{bmatrix} -L_{1i} \sin \theta_i & -L_{2i} \sin \alpha_i \\ L_{1i} \cos \theta_i & L_{2i} \cos \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_{im} \\ \dot{c}_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.92)$$

$$\mathbf{D}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.93)$$

De ce système, on peut tirer la valeur de $\dot{\theta}_i$ et $\dot{\alpha}_i$ pour $i = 1, \dots, 4$. Ainsi, on obtient la valeur de $\dot{\theta}_4$ que l'on ne pouvait obtenir avec les matrices jacobienues du MPS3DDL et on peut vérifier si les valeurs de $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$ sont bien les mêmes que celles obtenues avec l'équation (1.72). En dérivant à nouveau le système présenté à l'équation (1.93), on trouve que les accélérations angulaires $\ddot{\theta}_i$ et $\ddot{\alpha}_i$ sont données par

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{D}_i^{-1}(\dot{\mathbf{w}}_i - \dot{\mathbf{D}}_i \mathbf{X}_i), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.94)$$

avec

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\alpha}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.95)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{c}_{im} \\ \ddot{c}_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.96)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_i L_{1i} \cos \theta_i & -\dot{\alpha}_i L_{2i} \cos \alpha_i \\ -\dot{\theta}_i L_{1i} \sin \theta_i & -\dot{\alpha}_i L_{2i} \sin \alpha_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.97)$$

Toutefois, il ne faut pas oublier que l'on doit calculer \mathbf{X}_4 et $\dot{\mathbf{X}}_4$ seulement après que les solutions \mathbf{X}_3 et $\dot{\mathbf{X}}_3$ sont connues. Ainsi, pour les vitesses, en dérivant les équations (1.14) à (1.19), on trouve les relations suivantes

$$\dot{\mathbf{c}}_4 = \dot{\mathbf{c}}_3 + \dot{\mathbf{Q}}_1[\mathbf{c}_4]_{\mathcal{R}_1} \quad (1.98)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_1 = \dot{\beta} \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_1 \quad (1.99)$$

$$\dot{\beta}_1 = 0 \quad (1.100)$$

$$\dot{\alpha}_3 = X_{32} \text{ (2^e élément de la solution de l'équation (1.93) avec } i = 3) \quad (1.101)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha}_3 - \dot{\beta}_1 \quad (1.102)$$

En dérivant à nouveau ces équations, on obtient pour les accélérations

$$\ddot{\mathbf{c}}_4 = \ddot{\mathbf{c}}_3 + \ddot{\mathbf{Q}}_1[\mathbf{c}_4]_{\mathcal{R}_1} \quad (1.103)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_1 = \ddot{\beta} \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_1 + \dot{\beta}^2 \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_1 \quad (1.104)$$

$$\ddot{\beta}_1 = 0 \quad (1.105)$$

$$\ddot{\alpha}_3 = \dot{X}_{32} \text{ (2^e élément de la solution de l'équation (1.94) avec } i = 3) \quad (1.106)$$

$$\ddot{\beta} = \ddot{\alpha}_3 - \ddot{\beta}_1 \quad (1.107)$$

1.6 Dynamique

Une fois les équations du positionnement, de vitesse et d'accélération connues, on désire calculer les couples qui sont requis aux moteurs afin d'effectuer une trajectoire prescrite au centre de la plate-forme O' . Pour ce faire, on doit d'abord modéliser chaque partie du MPS3DDL afin de connaître les masses et les inerties que ces moteurs doivent déplacer. Par la suite, deux méthodes pour le calcul des couples menant aux mêmes résultats seront présentées : l'utilisation du principe du travail virtuel et l'approche conventionnelle de Newton-Euler.

1.6.1 Modélisation

Pour simplifier l'analyse, étant donné que la complexité de la modélisation des corps du mécanisme (ce qui affecte la masse, l'inertie et l'emplacement du centre de masse (CDM) de chaque corps) peut varier d'un concepteur à un autre, on va considérer chacune des membrures du MPS3DDL comme une poutre ayant une section carrée de largeur a . En regardant le MPS3DDL à la figure 1.1, on voit que celui-ci se compose de 9 corps désignés par l'indice k : la membrure de longueur l_1 ($k = 1$), la membrure de longueur l_2 ($k = 2$), les membrures de longueur l_3 et l_4 ainsi que la plate-forme de dimension l_{14} par l_{14} ($k = \text{solide 1}$), la membrure de longueur l_5 ($k = 5$), la membrure de longueur l_6 ($k = 6$), la membrure de longueur l_7 ($k = 7$), les membrures de longueur l_8 , l_9 et l_{10} ($k = \text{solide 2}$), la membrure de longueur l_{11} ($k = 11$) et la membrure de longueur l_{12} ($k = 12$). Ainsi, pour faciliter l'attribution des indices k à chaque corps, k est le même indice que celui de la longueur de la membrure si celle-ci compose le corps en entier; les autres corps étant des solides plus complexes. Donc, on a que $k = 1, 2, \text{solide 1}, 5, 6, 7, \text{solide 2}, 11$ et 12 .

De plus, on considère que tous ces corps ont la même largeur a ainsi que la même densité ρ , tout en négligeant le poids et l'inertie des articulations. Les détails concernant cette modélisation simplifiée, c'est-à-dire le calcul pour chaque corps du CDM ($\mathbf{c}_{m k}$), de la masse (m_k) et de la matrice d'inertie (\mathbf{I}_k) évaluée au CDM, sont présentés à l'annexe A.

1.6.2 Principe du travail virtuel

Cette méthode consiste à calculer le couple (τ_j) que doit produire le moteur j en lui prescrivant un déplacement virtuel angulaire ($\delta\theta_j^j$) et en évaluant les déplacements virtuels linéaires ($\delta\mathbf{c}_{m\ k}^j$) et angulaires ($\delta\boldsymbol{\varphi}_k^j$), du CDM de chaque corps k ($k = 1, 2, \text{solide } 1, 5, 6, 7, \text{solide } 2, 11$ et 12), engendrés par ce déplacement virtuel $\delta\theta_j^j$. Ainsi, il suffit d'obtenir τ_j à l'aide de la relation suivante

$$\tau_j \delta\theta_j^j + \sum_k (\mathbf{f}_k^T \delta\mathbf{c}_{m\ k}^j + \mathbf{m}_k^T \delta\boldsymbol{\varphi}_k^j) = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.108)$$

où \mathbf{f}_k et \mathbf{m}_k sont respectivement les forces et les moments exercés au CDM de chaque corps. En considérant un déplacement virtuel angulaire unitaire ($\delta\theta_j^j = 1$) pour chaque moteur j , l'équation (1.108) se réduit à

$$\tau_j = - \sum_k (\mathbf{f}_k^T \delta\mathbf{c}_{m\ k}^j + \mathbf{m}_k^T \delta\boldsymbol{\varphi}_k^j), \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.109)$$

1.6.2.1 Forces et moments exercés au CDM de chaque corps

Les forces exercées au CDM de chaque corps sont exprimées par

$$\mathbf{f}_k = -m_k \ddot{\mathbf{c}}_{m\ k} + [0, 0, -m_k g]^T \quad (1.110)$$

où g est l'accélération gravitationnelle. Dans cette équation, en considérant la modélisation effectuée à l'annexe A, on calcule les accélérations des CDM en dérivant 2 fois les équations (A.4) à (A.10) ainsi que (A.24) et (A.58), ce qui nous donne

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 1} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{a}}_1 + \ddot{\mathbf{b}}_1) \quad (1.111)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{b}}_1 + \ddot{\mathbf{c}}_1) \quad (1.112)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ \text{solide } 1} = \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{\text{solide } 1} \quad (1.113)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 5} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{b}}_2 + \ddot{\mathbf{c}}_2) \quad (1.114)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 6} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{a}}_2 + \ddot{\mathbf{b}}_2) \quad (1.115)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 7} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{a}}_3 + \ddot{\mathbf{b}}_3) \quad (1.116)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ \text{solide } 2} = \ddot{\mathbf{b}}_3 + \ddot{\mathbf{Q}}_2 \mathbf{G}_{\text{solide } 2} \quad (1.117)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 11} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{b}}_4 + \ddot{\mathbf{c}}_4) \quad (1.118)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ 12} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{a}}_4 + \ddot{\mathbf{b}}_4) \quad (1.119)$$

Pour ce qui est des moments exercés au CDM de chaque corps, ceux-ci sont exprimés comme étant

$$\mathbf{m}_k = -\mathbf{Q}_{Ik}\mathbf{I}_k\mathbf{Q}_{Ik}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{\omega}_k \times (\mathbf{Q}_{Ik}\mathbf{I}_k\mathbf{Q}_{Ik}^T\boldsymbol{\omega}_k) \quad (1.120)$$

Les matrices d'inertie \mathbf{I}_k , étant exprimées dans le repère local de chacun des corps k , doivent être multipliées par une matrice de rotation \mathbf{Q}_{Ik} qui fait le lien entre le repère local de chaque corps et le repère fixe. Ainsi, en se basant sur la modélisation présentée à l'annexe A, les matrices de rotation des corps \mathbf{Q}_{Ik} sont

$$\mathbf{Q}_{I1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

$$\mathbf{Q}_{I2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

$$\mathbf{Q}_{I\text{solide } 1} = \mathbf{Q} \quad (1.123)$$

$$\mathbf{Q}_{I5} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.124)$$

$$\mathbf{Q}_{I6} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

$$\mathbf{Q}_{I7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

$$\mathbf{Q}_{I\text{solide } 2} = \mathbf{Q}_2 \quad (1.127)$$

$$\mathbf{Q}_{I11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_4 & -\sin \alpha_4 \\ 0 & \sin \alpha_4 & \cos \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (1.128)$$

$$\mathbf{Q}_{I12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ 0 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

et les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}_k$ ainsi que les accélérations angulaires $\dot{\boldsymbol{\omega}}_k$ sont données avec les relations suivantes

$$\boldsymbol{\omega}_1 = [0, -\dot{\theta}_1, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = [0, -\ddot{\theta}_1, 0]^T \quad (1.130)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = [0, -\dot{\alpha}_1, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = [0, -\ddot{\alpha}_1, 0]^T \quad (1.131)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{solide\ 1} = \boldsymbol{\omega} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{solide\ 1} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (1.132)$$

$$\boldsymbol{\omega}_5 = [0, -\dot{\alpha}_2, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_5 = [0, -\ddot{\alpha}_2, 0]^T \quad (1.133)$$

$$\boldsymbol{\omega}_6 = [0, -\dot{\theta}_2, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_6 = [0, -\ddot{\theta}_2, 0]^T \quad (1.134)$$

$$\boldsymbol{\omega}_7 = [\dot{\theta}_3, 0, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_7 = [\ddot{\theta}_3, 0, 0]^T \quad (1.135)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{solide\ 2} = [\dot{\beta}_2, 0, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{solide\ 2} = [\ddot{\beta}_2, 0, 0]^T \quad (1.136)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{11} = [\dot{\alpha}_4, 0, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} = [\ddot{\alpha}_4, 0, 0]^T \quad (1.137)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{12} = [\dot{\theta}_4, 0, 0]^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} = [\ddot{\theta}_4, 0, 0]^T \quad (1.138)$$

1.6.2.2 Déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps

Pour obtenir les déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps associés au déplacement virtuel angulaire unitaire d'un moteur j ($\delta\boldsymbol{\theta}^1 = [1, 0, 0]^T$, $\delta\boldsymbol{\theta}^2 = [0, 1, 0]^T$ et $\delta\boldsymbol{\theta}^3 = [0, 0, 1]^T$), il suffit de reprendre les équations de vitesse et de substituer les " $\frac{d}{dt}$ " par des " δ ".

Or, en utilisant les équations (1.65), (1.70) et (1.71), on a que

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}^j = (\mathbf{ASR})^{-1}\mathbf{B}\delta\boldsymbol{\theta}^j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.139)$$

$$\delta\boldsymbol{\eta}^j = \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\epsilon}^j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.140)$$

$$\delta\mathbf{t}^j = \mathbf{S}\delta\boldsymbol{\eta}^j = [\delta\mathbf{p}^{jT}, \delta\boldsymbol{\varphi}^{jT}]^T, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.141)$$

où $\delta\mathbf{p}^j = [\delta x^j, \delta y^j, \delta z^j]^T$ et $\delta\boldsymbol{\varphi}^j = [\delta\varphi_x^j, \delta\varphi_y^j, \delta\varphi_z^j]^T$. De plus, avec les équations de vitesse obtenues dans les sections précédentes, on trouve que (effectuer les calculs dans cet ordre afin que les éléments dont certaines équations ont besoin soient calculés avant celles-ci)

$$\delta\mathbf{a}_i^j = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.142)$$

$$\delta\mathbf{b}_i^j = \delta\theta_i^j \mathbf{E}_i(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.143)$$

$$\delta\mathbf{Q}^j = \boldsymbol{\Omega}^j \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\varphi_z^j & \delta\varphi_y^j \\ \delta\varphi_z^j & 0 & -\delta\varphi_x^j \\ -\delta\varphi_y^j & \delta\varphi_x^j & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}, \quad j = 1,2,3 \quad (1.144)$$

$$\delta\mathbf{c}_i^j = \delta\mathbf{p}^j + \delta\mathbf{Q}^j[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{R}^i}, \quad i = 1,2,3 \quad \text{et} \quad j = 1,2,3 \quad (1.145)$$

$$\mathbf{w}_i^j = [\delta c_{ix}^j, \delta c_{iz}^j]^T, \quad i = 1,2 \quad \text{et} \quad j = 1,2,3 \quad (1.146)$$

$$\mathbf{w}_3^j = [\delta c_{3y}^j, \delta c_{3z}^j]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.147)$$

$$\mathbf{X}_i^j = [\delta\theta_i^j, \delta\alpha_i^j]^T = \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{w}_i^j, \quad i = 1,2,3 \quad \text{et} \quad j = 1,2,3 \quad (1.148)$$

$$\delta\alpha_i^j = X_{i2}^j, \quad i = 1,2,3 \quad \text{et} \quad j = 1,2,3 \quad (1.149)$$

$$\delta\beta^j = \delta\alpha_3^j, \quad j = 1,2,3 \quad (1.150)$$

$$\delta\mathbf{Q}_1^j = \delta\beta^j \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_1, \quad j = 1,2,3 \quad (1.151)$$

$$\delta\mathbf{c}_4^j = \delta\mathbf{c}_3^j + \delta\mathbf{Q}_1^j[\mathbf{c}_4]_{\mathcal{R}_1}, \quad j = 1,2,3 \quad (1.152)$$

$$\mathbf{w}_4^j = [\delta c_{4y}^j, \delta c_{4z}^j]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.153)$$

$$\mathbf{X}_4^j = [\delta\theta_4^j, \delta\alpha_4^j]^T = \mathbf{D}_4^{-1} \mathbf{w}_4^j, \quad j = 1,2,3 \quad (1.154)$$

$$\delta\theta_4^j = X_{41}^j, \quad j = 1,2,3 \quad (1.155)$$

$$\delta\alpha_4^j = X_{42}^j, \quad j = 1,2,3 \quad (1.156)$$

$$\delta\mathbf{b}_4^j = \delta\theta_4^j \mathbf{E}_4(\mathbf{b}_4 - \mathbf{a}_4), \quad j = 1,2,3 \quad (1.157)$$

$$\delta\beta_2^j = \delta\beta^j, \quad j = 1,2,3 \quad (1.158)$$

$$\delta\mathbf{Q}_2^j = \delta\beta_2^j \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_2, \quad j = 1,2,3 \quad (1.159)$$

On peut vérifier que les résultats tirés de X_{i1}^j pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$ à l'équation (1.148) correspondent bien aux valeurs de $\delta\theta^j$ utilisées dans l'équation (1.139).

Donc, en utilisant les équations (A.4) à (A.10) ainsi que (A.24) et (A.58), on tire que les déplacements virtuels linéaires $(\delta\mathbf{c}_{m\ k}^j)$ du CDM de chaque corps k sont

$$\delta\mathbf{c}_{m\ 1}^j = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{a}_1^j + \delta\mathbf{b}_1^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.160)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ 2}^j = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{b}_1^j + \delta\mathbf{c}_1^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.161)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ solide\ 1}^j = \delta\mathbf{p}^j + \delta\mathbf{Q}^j \mathbf{G}_{solide\ 1}, \quad j = 1,2,3 \quad (1.162)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ 5}^j = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{b}_2^j + \delta\mathbf{c}_2^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.163)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ 6}^j = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{a}_2^j + \delta\mathbf{b}_2^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.164)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ 7}^j = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{a}_3^j + \delta\mathbf{b}_3^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.165)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m\ solide\ 2}^j = \delta \mathbf{b}_3^j + \delta \mathbf{Q}_2^j \mathbf{G}_{solide\ 2}, \quad j = 1,2,3 \quad (1.166)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m\ 11}^j = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{b}_4^j + \delta \mathbf{c}_4^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.167)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m\ 12}^j = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{a}_4^j + \delta \mathbf{b}_4^j), \quad j = 1,2,3 \quad (1.168)$$

et on exprime les déplacements virtuels angulaires ($\delta \varphi_k^j$) des CDM, avec l'aide des équations (1.130) à (1.138), par les relations suivantes

$$\delta \varphi_1^j = [0, -\delta \theta_1^j, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.169)$$

$$\delta \varphi_2^j = [0, -\delta \alpha_1^j, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.170)$$

$$\delta \varphi_{solide\ 1}^j = \delta \varphi^j, \quad j = 1,2,3 \quad (1.171)$$

$$\delta \varphi_5^j = [0, -\delta \alpha_2^j, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.172)$$

$$\delta \varphi_6^j = [0, -\delta \theta_2^j, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.173)$$

$$\delta \varphi_7^j = [\delta \theta_3^j, 0, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.174)$$

$$\delta \varphi_{solide\ 2}^j = [\delta \beta_2^j, 0, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.175)$$

$$\delta \varphi_{11}^j = [\delta \alpha_4^j, 0, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.176)$$

$$\delta \varphi_{12}^j = [\delta \theta_4^j, 0, 0]^T, \quad j = 1,2,3 \quad (1.177)$$

1.6.3 Approche de Newton-Euler

L'approche de Newton-Euler consiste à établir le diagramme de corps libre (DCL) de chaque corps du MPS3DDL où toutes les forces et les moments à chacune des articulations du MPS3DDL sont des inconnues à solutionner. Or, le MPS3DDL possède 9 corps et, avec 6 équations par corps provenant du bilan des forces et des moments, 54 équations sont générées (l'annexe B présente le DCL associé à chaque corps avec les équations des forces et des moments). Toutefois, pour avoir un système linéaire à 54 inconnues, il faut considérer les articulations en C_1 , C_2 et C_4 comme des articulations sphériques et considérer l'articulation B_3 comme un cardan en lui ajoutant une liaison rotoïde dans l'axe de la membrure A_3B_3 . La figure 1.5 montre l'allure du MPS3DDL avec ces nouvelles modifications. Ces modifications sont nécessaires car le mécanisme original est surcontraint.

De cette façon, une fois le système de 54 équations à 54 inconnues résolu, il s'agit seulement de localiser les variables qui correspondent aux couples recherchés à l'intérieur

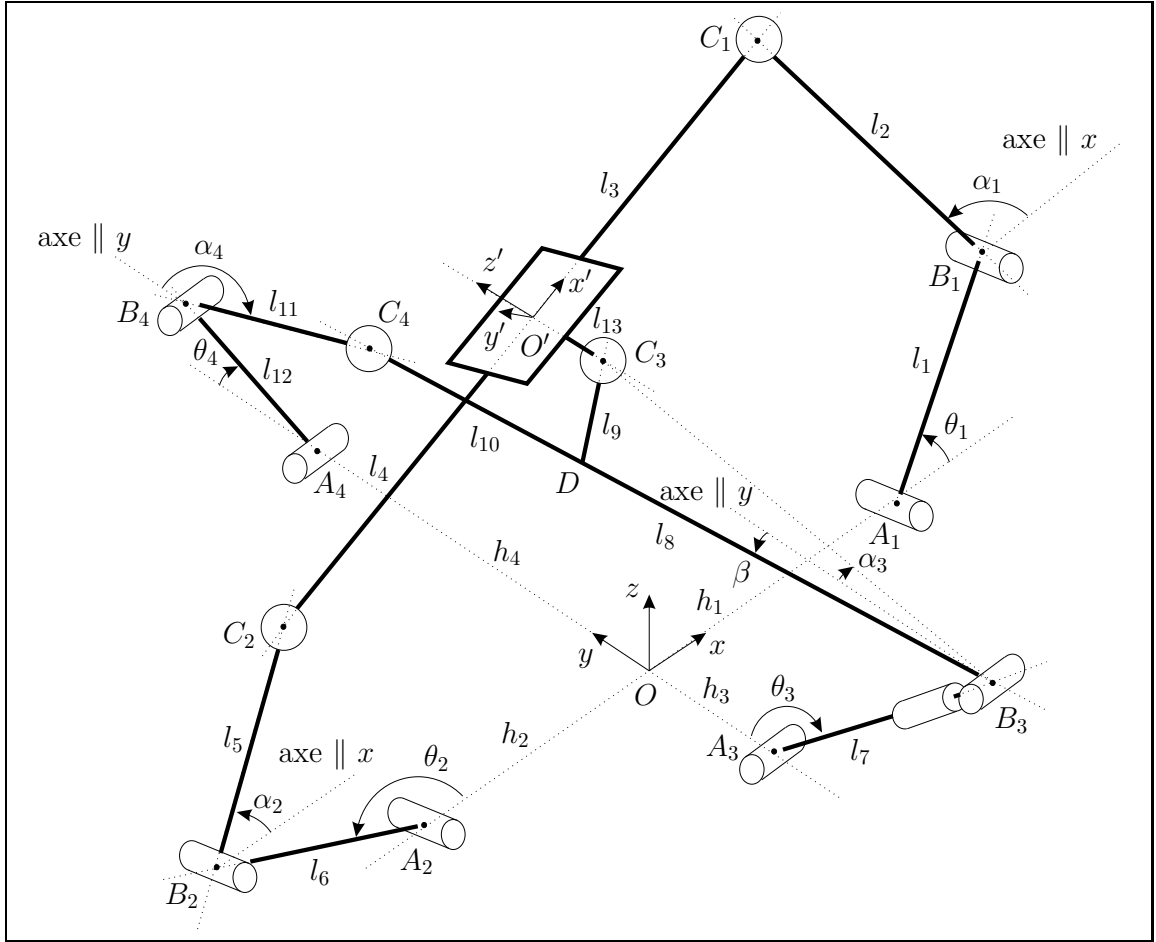


FIG. 1.5 – Mécanisme parallèle à 3 degrés de liberté non surcontraint.

du vecteur solution.

1.6.3.1 Système d'équations

En combinant, à l'annexe B, les relations (B.1) à (B.31) reliées au bilan des forces et des moments, on obtient un système linéaire de 54 équations où les 54 inconnues sont

- en A_1 : R_{A_1x} , R_{A_1y} , R_{A_1z} , M_{A_1x} , τ_1 , M_{A_1z} .
- en A_2 : R_{A_2x} , R_{A_2y} , R_{A_2z} , M_{A_2x} , τ_2 , M_{A_2z} .
- en A_3 : R_{A_3x} , R_{A_3y} , R_{A_3z} , τ_3 , M_{A_3y} , M_{A_3z} .
- en A_4 : R_{A_4x} , R_{A_4y} , R_{A_4z} , M_{A_4y} , M_{A_4z} .
- en B_1 : R_{B_1x} , R_{B_1y} , R_{B_1z} , M_{B_1x} , M_{B_1z} .

- en B_2 : $R_{B_2x}, R_{B_2y}, R_{B_2z}, M_{B_2x}, M_{B_2z}$.
- en B_3 : $R_{B_3x}, R_{B_3y}, R_{B_3z}, M_{B_3z}$.
- en B_4 : $R_{B_4x}, R_{B_4y}, R_{B_4z}, M_{B_4y}, M_{B_4z}$.
- en C_1 : $R_{C_1x}, R_{C_1y}, R_{C_1z}$.
- en C_2 : $R_{C_2x}, R_{C_2y}, R_{C_2z}$.
- en C_3 : $R_{C_3x}, R_{C_3y}, R_{C_3z}$.
- en C_4 : $R_{C_4x}, R_{C_4y}, R_{C_4z}$.

Ainsi, le système est du type

$$\mathbf{L} \mathbf{X} = \mathbf{M} \quad (1.178)$$

où \mathbf{L} est la matrice des coefficients de dimension 54 par 54, \mathbf{X} est le vecteur des 54 inconnues et \mathbf{M} est le vecteur qui renferme les forces $-\mathbf{f}_k$ et les moments $-\mathbf{m}_k$ des corps k . En effectuant la résolution de ce système, il suffit de localiser à l'intérieur du vecteur \mathbf{X} les couples recherchés τ_1, τ_2 et τ_3 qui servent à actionner le mécanisme pour effectuer la trajectoire prescrite.

1.6.4 Bilan d'énergie

Afin de vérifier la validité des couples trouvés avec le principe du travail virtuel ou l'approche de Newton-Euler, effectuer un bilan d'énergie s'avère une excellente méthode puisque tous les éléments nécessaires pour effectuer cette vérification ont déjà été calculés précédemment. Donc, par conservation d'énergie, la somme de la variation d'énergie cinétique ($\Delta T|_t$) et de la variation d'énergie potentielle ($\Delta U|_t$) doit évaluer au travail effectué par les moteurs ($W|_t$). Ainsi, à tout moment t lors de la trajectoire, on a que

$$\Delta T|_t + \Delta U|_t - W|_t = \Delta E|_t \quad (1.179)$$

avec

$$\Delta T|_t = T|_t - T|_{t-\Delta t} \quad (1.180)$$

$$\text{où } T|_t = \sum_k \left(\frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{c}}_{m\ k}^T \dot{\mathbf{c}}_{m\ k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{Q}_{Ik} \mathbf{I}_k \mathbf{Q}_{Ik}^T \boldsymbol{\omega}_k \right) \Big|_t \quad (1.181)$$

$$\Delta U|_t = U|_t - U|_{t-\Delta t} \quad (1.182)$$

$$\text{où } U|_t = \sum_k m_k g \mathbf{c}_{m k} \Big|_t \quad (1.183)$$

$$W|_t = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\tau_j|_t + \tau_j|_{t-\Delta t}}{2} \Delta\theta_j|_t \right] \quad (1.184)$$

et on doit trouver que la variation d'énergie du système, $\Delta E|_t$, est nulle.

Lors de l'évaluation du travail effectué par les moteurs, la variation angulaire $\Delta\theta_j|_t$ correspond à la différence entre $\theta_j|_t$ et $\theta_j|_{t-\Delta t}$. Toutefois, il faut faire attention lorsqu'on soustrait ces deux angles car ceux-ci proviennent de l'équation (1.39). Ainsi, l'angle résultant du calcul de deux fois l'arc tangente d'une valeur se situe entre $-\pi$ et π . Donc, par exemple, si à l'instant t on a que $\theta_j|_t = -\pi + \gamma$ (γ étant un petit incrément d'angle positif) et que $\theta_j|_{t-\Delta t} = \pi - \gamma$, une soustraction directe entraîne un résultat de $\Delta\theta_j|_t = -2\pi + 2\gamma$, ce qui fausse l'évaluation du travail. Dans un cas inverse où $\theta_j|_t = \pi - \gamma$ et que $\theta_j|_{t-\Delta t} = -\pi + \gamma$, une soustraction directe conduit à $\Delta\theta_j|_t = 2\pi - 2\gamma$, ce qui est également faux. De cette façon, pour traiter les cas spéciaux où l'angle passe de $\pi - \gamma$ à $-\pi + \gamma$ ou de $-\pi + \gamma$ à $\pi - \gamma$, on utilise le raisonnement suivant

- si $(\theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t}) \leq -V$, alors $\Delta\theta_j|_t = \theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t} + 2\pi$.
- si $(\theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t}) \geq V$, alors $\Delta\theta_j|_t = \theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t} - 2\pi$.
- si $[-V < (\theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t})$ et $(\theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t}) > V]$, alors $\Delta\theta_j|_t = \theta_j|_t - \theta_j|_{t-\Delta t}$.

où V correspond à une variation d'angle entre l'instant (t) et l'instant ($t - \Delta t$) qui peut être fixée à, par exemple, π .

1.7 Exemple de résultats

Soit le MPS3DDL ayant les paramètres géométriques suivants (l'unité de longueur est le mètre) : $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.05$, $h_4 = 0.03$, $l_1 = 0.10$, $l_2 = 0.10$, $l_3 = 0.11$, $l_4 = 0.11$, $l_5 = 0.10$, $l_6 = 0.10$, $l_7 = 0.12$, $l_8 = 0.10$, $l_9 = 0.02$, $l_{10} = 0.10$, $l_{11} = 0.08$, $l_{12} = 0.08$, $l_{13} = 0.03$ et $l_{14} = 0.06$. L'allure de ce mécanisme est montrée à la figure 1.6 (image provenant d'une animation réalisée avec le logiciel MATLAB).

De plus, posons que ce mécanisme soit entièrement fait d'aluminium (la densité du matériau est $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$), que la largeur des membrures (section carrée) soit

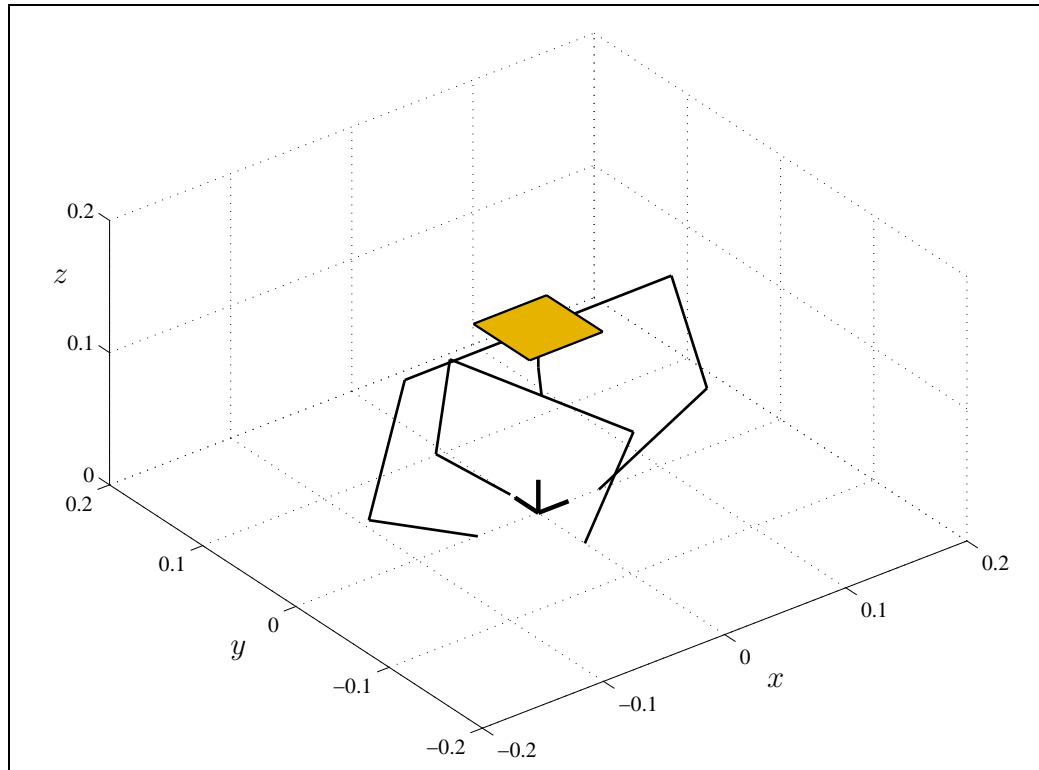


FIG. 1.6 – Allure du mécanisme parallèle spatial à 3 ddl.

$a = 0.01$ m et que la gravité est $g = 9.81$ m/s². Or, on obtient les résultats montrés aux figures 1.7 à 1.12 pour une trajectoire du centre de la plate-forme O' donnée par

$$\begin{aligned} z &= 0.130 + 0.010 \cos(3t) & \phi &= \frac{25\pi}{180} \sin(2t) \\ \dot{z} &= -0.010 (3) \sin(3t) & \dot{\phi} &= \frac{25\pi}{180} (2) \cos(2t) \\ \ddot{z} &= -0.010 (3^2) \cos(3t) & \ddot{\phi} &= -\frac{25\pi}{180} (2^2) \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{20\pi}{180} \sin(4t) \\ \dot{\theta} &= \frac{20\pi}{180} (4) \cos(4t) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{20\pi}{180} (4^2) \sin(4t) \end{aligned}$$

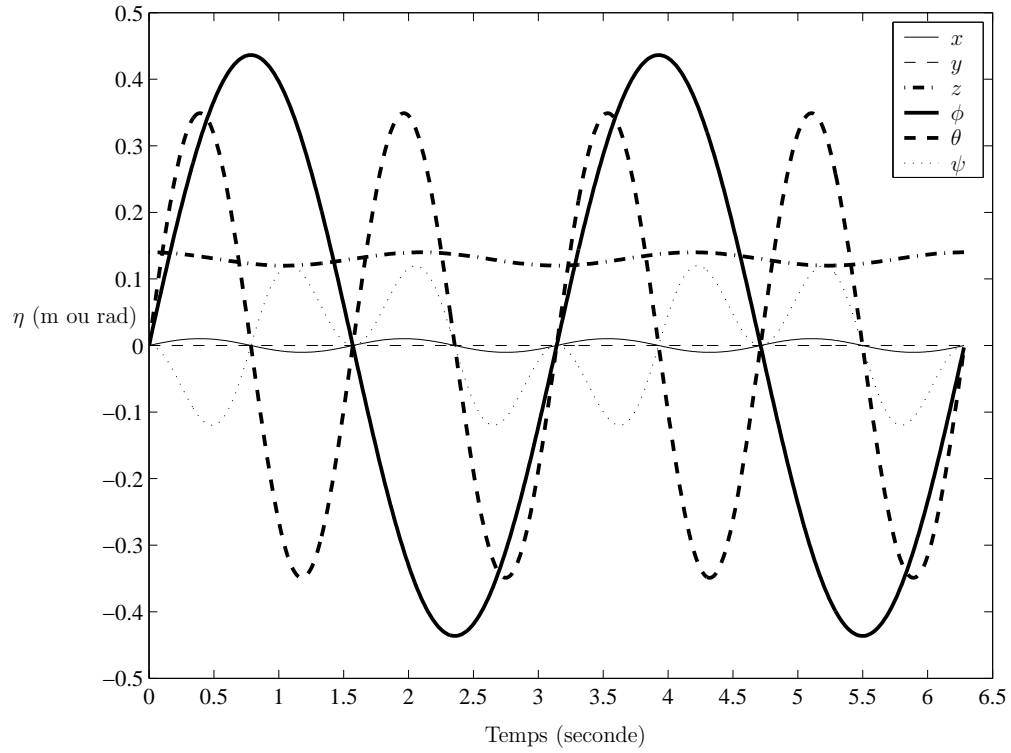


FIG. 1.7 – Trajectoire du centre de la plate-forme.

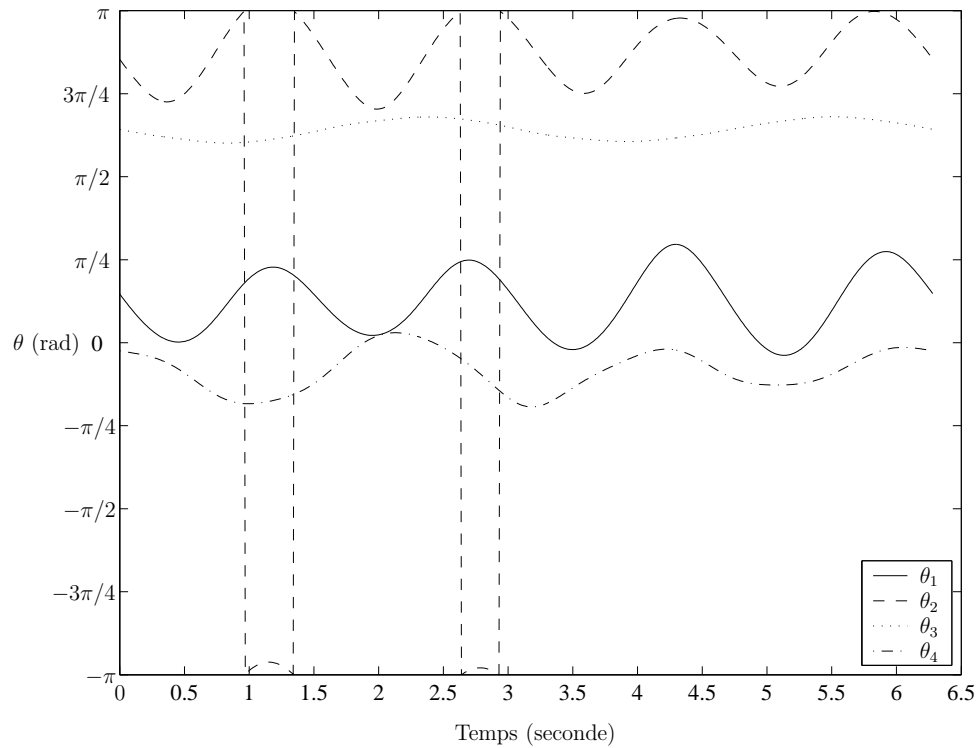


FIG. 1.8 – Évolution des positions articulaires.

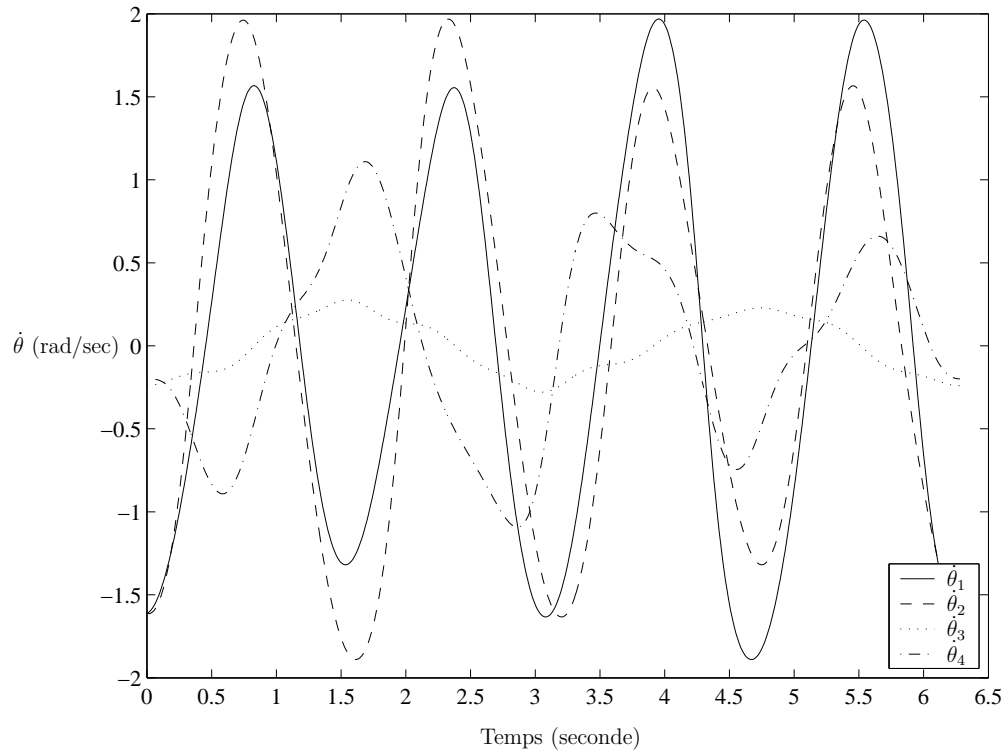


FIG. 1.9 – Évolution des vitesses articulaires.

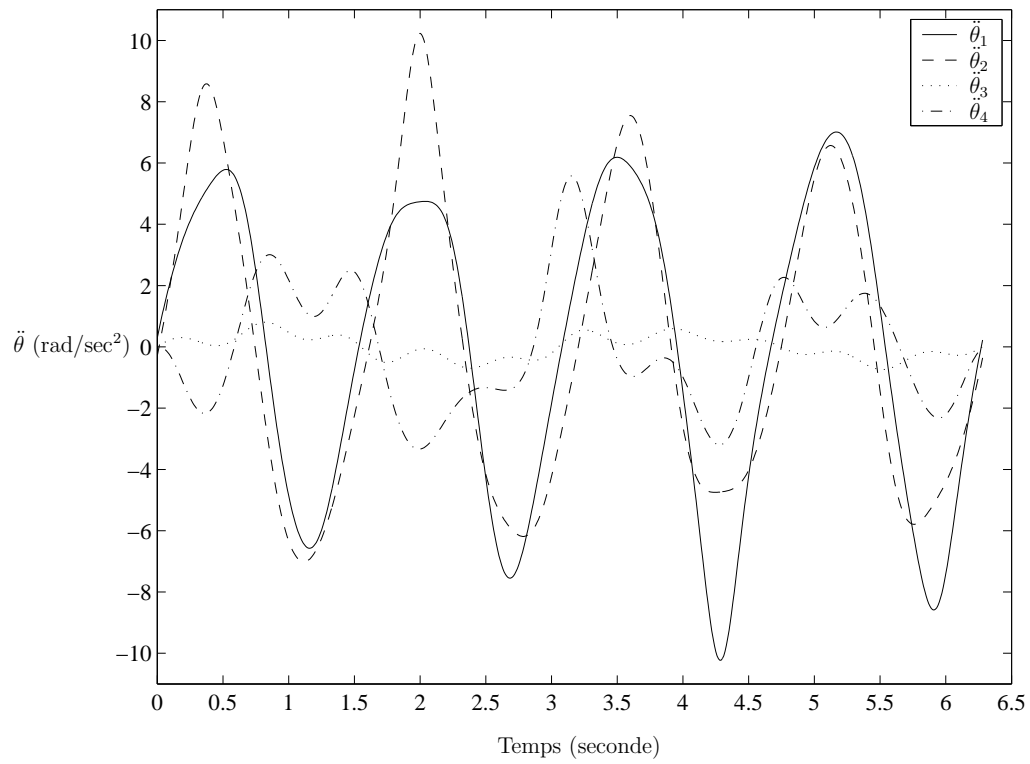


FIG. 1.10 – Évolution des accélérations articulaires.

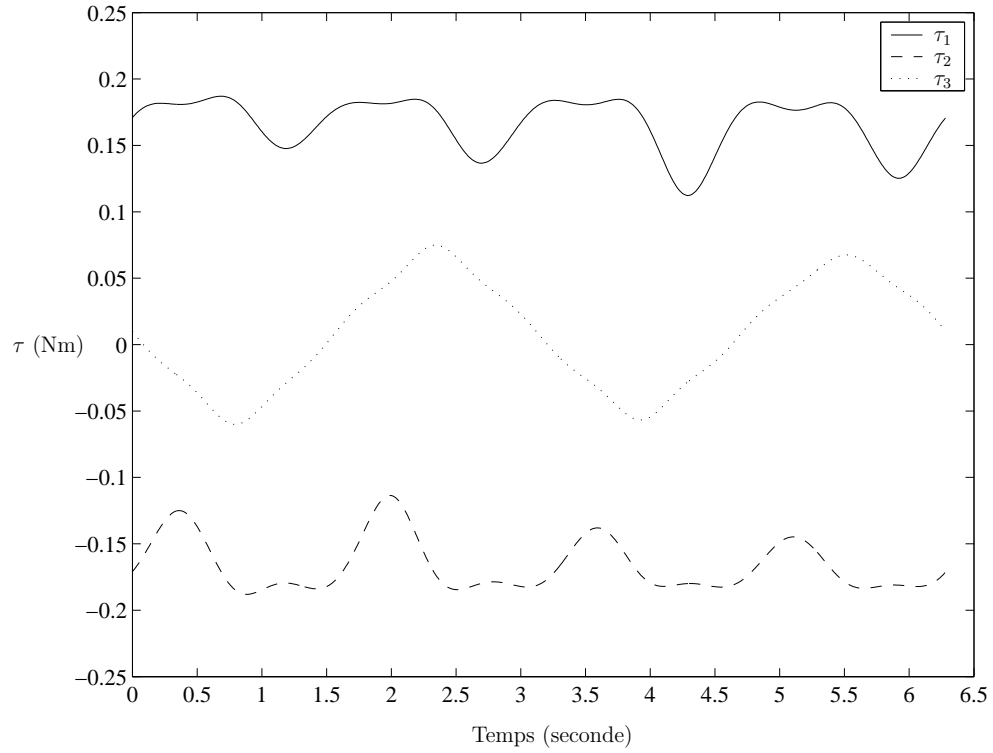


FIG. 1.11 – Évolution des couples articulaires.

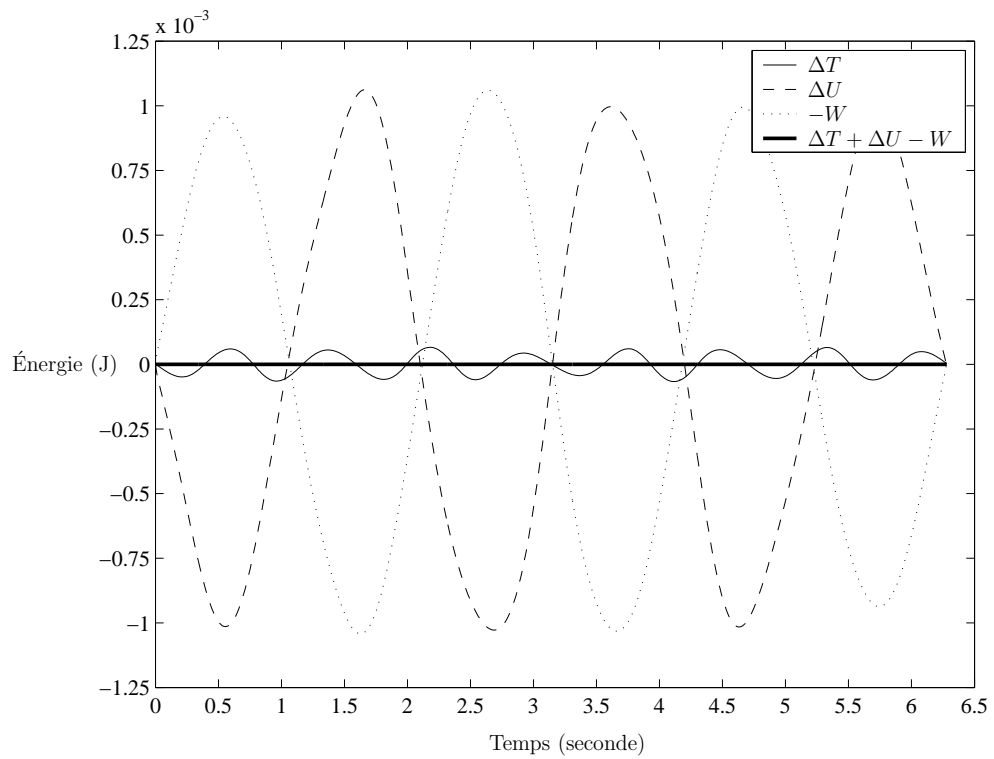


FIG. 1.12 – Bilan d'énergie.

1.8 Simulation dynamique sous ADAMS

ADAMS est un logiciel qui permet d'effectuer des simulations de divers systèmes mécaniques. Ainsi, en modélisant chacun des corps et en associant les bons degrés de liberté aux articulations présentes entre ces différents corps, ADAMS s'avère être un outil de travail très performant pour valider les résultats obtenus dans les sections précédentes.

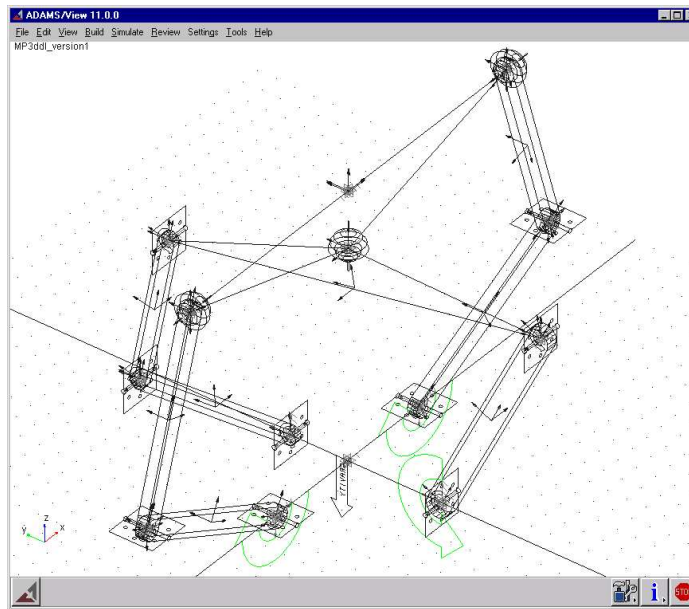
Or, pour le mécanisme étudié, nous avons constaté que la résolution du problème géométrique inverse est une étape qui s'effectue relativement bien. Toutefois, si on désire connaître la relation inverse, c'est-à-dire effectuer la résolution du problème géométrique direct qui consiste à déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires qui sont prescrites, on se rend compte que cette étape n'est pas évidente à accomplir. Pour pallier à cette lacune, on peut d'abord résoudre le problème géométrique inverse et établir les équations de vitesse et d'accélération de manière à savoir la position, la vitesse et l'accélération de chacun des actionneurs en fonction du temps. Puis, à l'intérieur du logiciel ADAMS, on peut se servir des résultats précédents et ainsi imposer une position, une vitesse ou une accélération à chacun des actionneurs en fonction du temps (dans notre cas, on va imposer les vitesses articulaires aux moteurs trouvées à la figure 1.9) de manière à donner la trajectoire voulue à l'organe terminal (résolution du problème géométrique direct). De cette façon, ADAMS peut simuler le mouvement du mécanisme et calculer les forces ou les couples aux actionneurs pour une trajectoire donnée. Donc, le logiciel ADAMS permet, avec le bilan d'énergie, d'effectuer une seconde validation des résultats obtenus par le principe du travail virtuel ou l'approche classique de Newton-Euler.

La figure 1.13(a) illustre la modélisation du MPS3DDL effectuée sous ADAMS. Il est à noter qu'ADAMS est capable d'effectuer la simulation en considérant le mécanisme surcontraint (comme l'architecture de la figure 1.1). Toutefois, puisqu'ADAMS ne supporte pas les joints de cardan en C_1 et C_2 , ceux-ci ont été remplacés par des articulations sphériques.

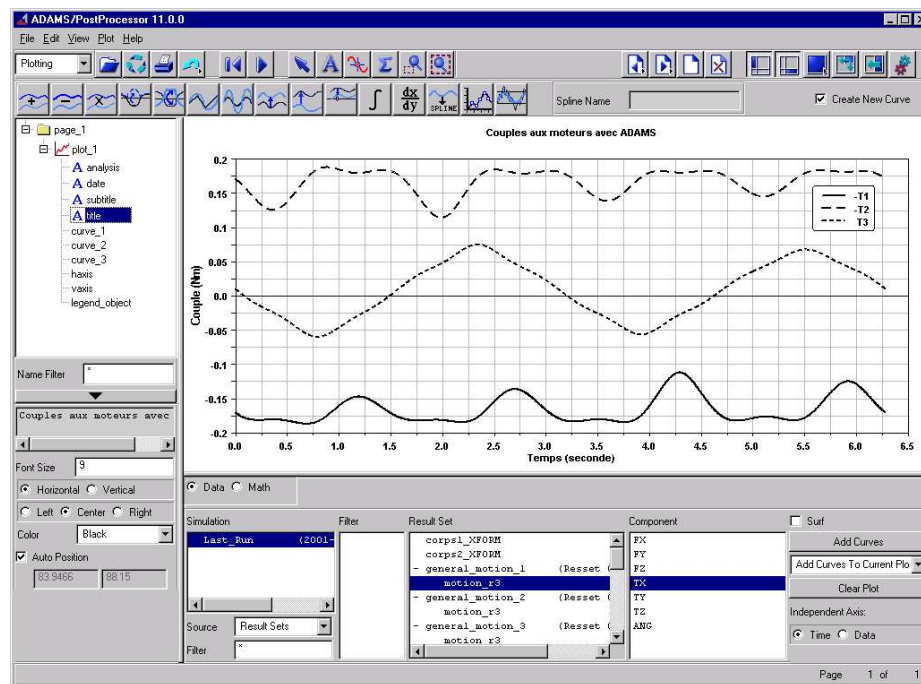
Or, en reprenant les données de l'exemple présenté à la section 1.7 et en implantant celles-ci à l'intérieur du logiciel ADAMS, on obtient les résultats présentés à la figure 1.13(b) (noter que les couples aux moteurs 1 et 2 sont de signe négatif) qui

correspondent à ceux de la figure 1.11.

Pour s'assurer de la parfaite concordance entre les couples calculés provenant des équations développées dans les sections précédentes (soit, par exemple, en implantant ces équations à l'intérieur du logiciel MATLAB) et les couples trouvés par le logiciel ADAMS, on peut exporter à partir du logiciel ADAMS les couples en fonction du temps (sous forme d'un fichier) et, par la suite, il est possible d'importer ce fichier sous forme d'un vecteur dans MATLAB afin de comparer directement les résultats. Ainsi, en mettant sur le même graphique les couples obtenus avec MATLAB et ADAMS pour chacun des moteurs, on voit sur les figures 1.14 à 1.16 que les résultats sont parfaitement identiques entre les deux méthodes, ce qui solidifie l'exactitude de l'étude effectuée.



(a) Modélisation du mécanisme parallèle spatial à 3 degrés de liberté sous ADAMS.



(b) Calcul des couples aux moteurs avec ADAMS.

FIG. 1.13 – Exemple de résultats pour une trajectoire donnée avec ADAMS.

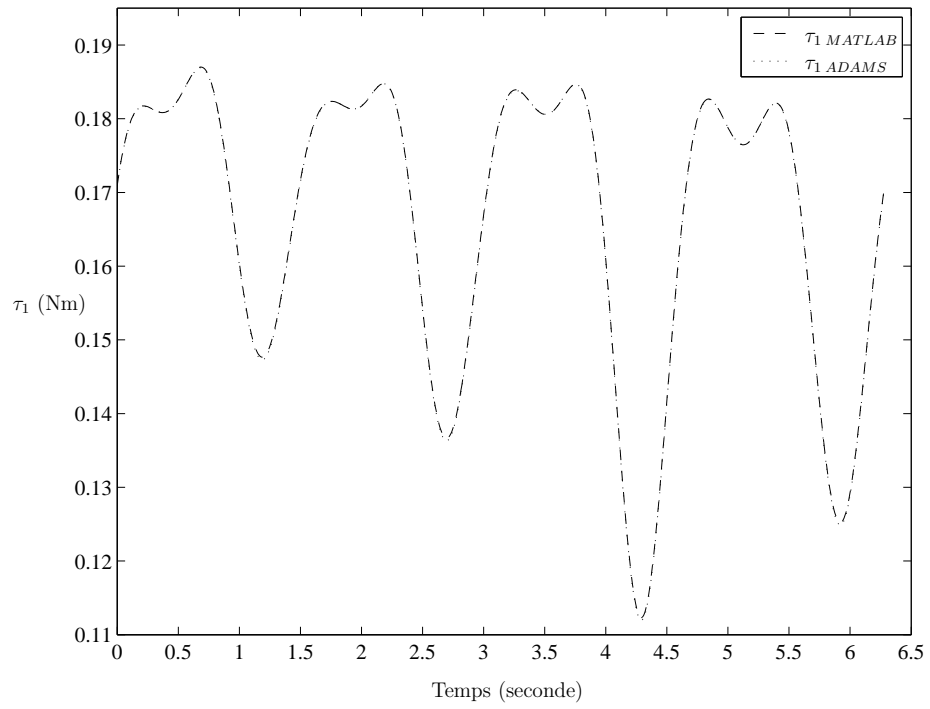


FIG. 1.14 – Couple au moteur 1.

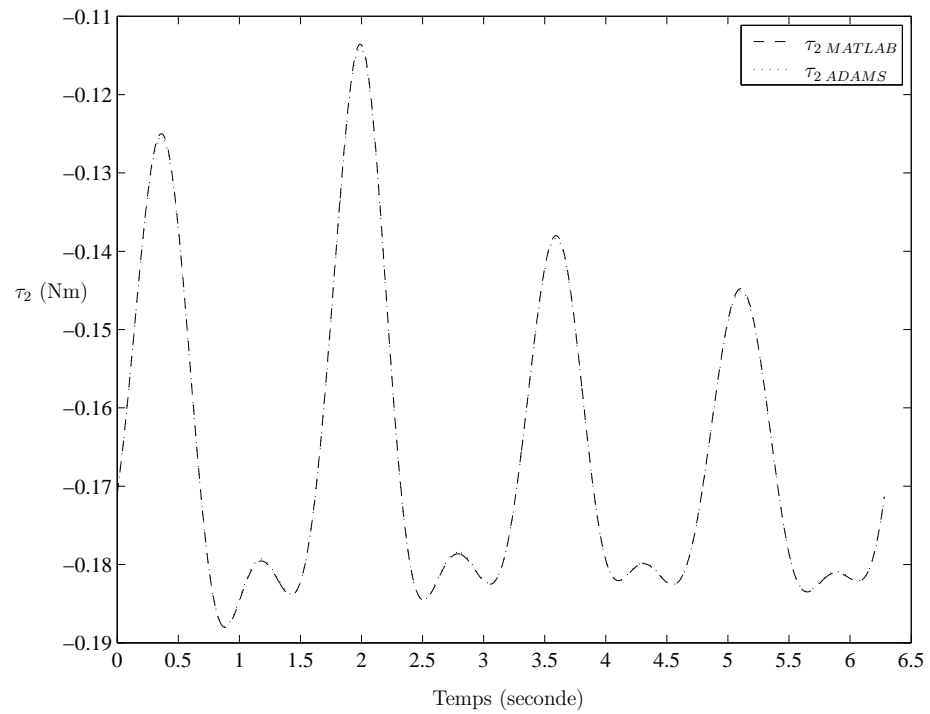


FIG. 1.15 – Couple au moteur 2.

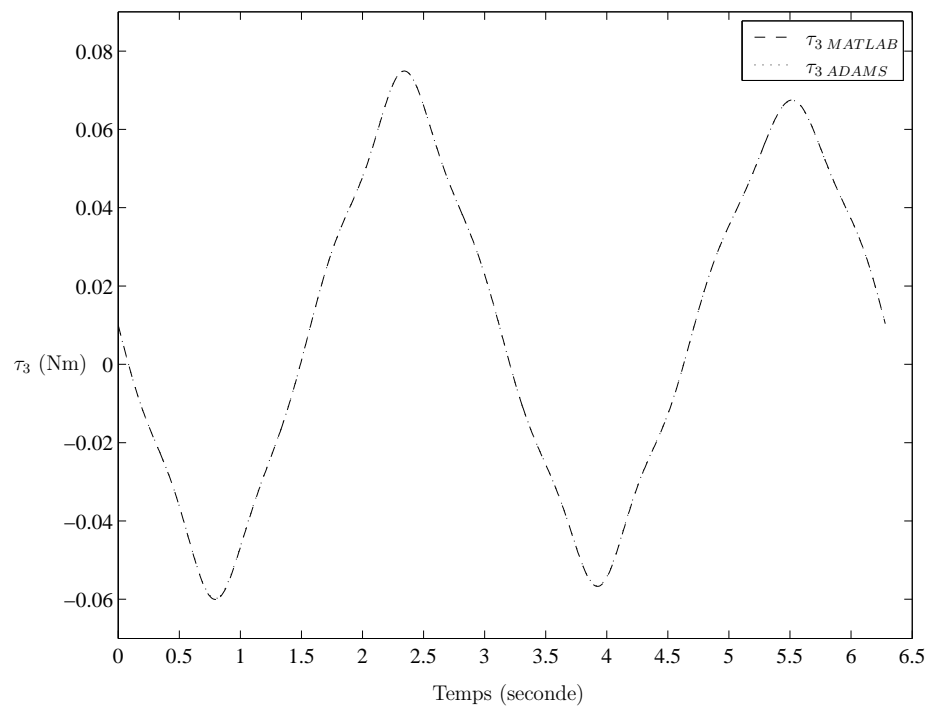


FIG. 1.16 – Couple au moteur 3.

Chapitre 2

Mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté

2.1 Modèle géométrique

La figure 2.1 illustre l'architecture du mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté, noté MPS4DDL, où les 3 moteurs (situés sur la base) et l'actionneur prismatique (fixé au centre de la plate-forme) permettent d'orienter et de positionner celle-ci avec l'aide de 3 angles d'Euler et d'une hauteur h au niveau de l'axe z' . Ce mécanisme a été proposé en [3], où une description détaillée est donnée.

Ainsi, ce mécanisme est de type *parallèle* puisqu'il possède 4 chaînes cinématiques qui relient la base à la plate-forme. Parmi celles-ci, 3 chaînes cinématiques, $i = 1,2,3$, sont identiques (voir la figure 2.2) et elles sont composées des éléments suivants : un moteur fixé en A_i qui active le membre proximal (membrure se trouvant entre les

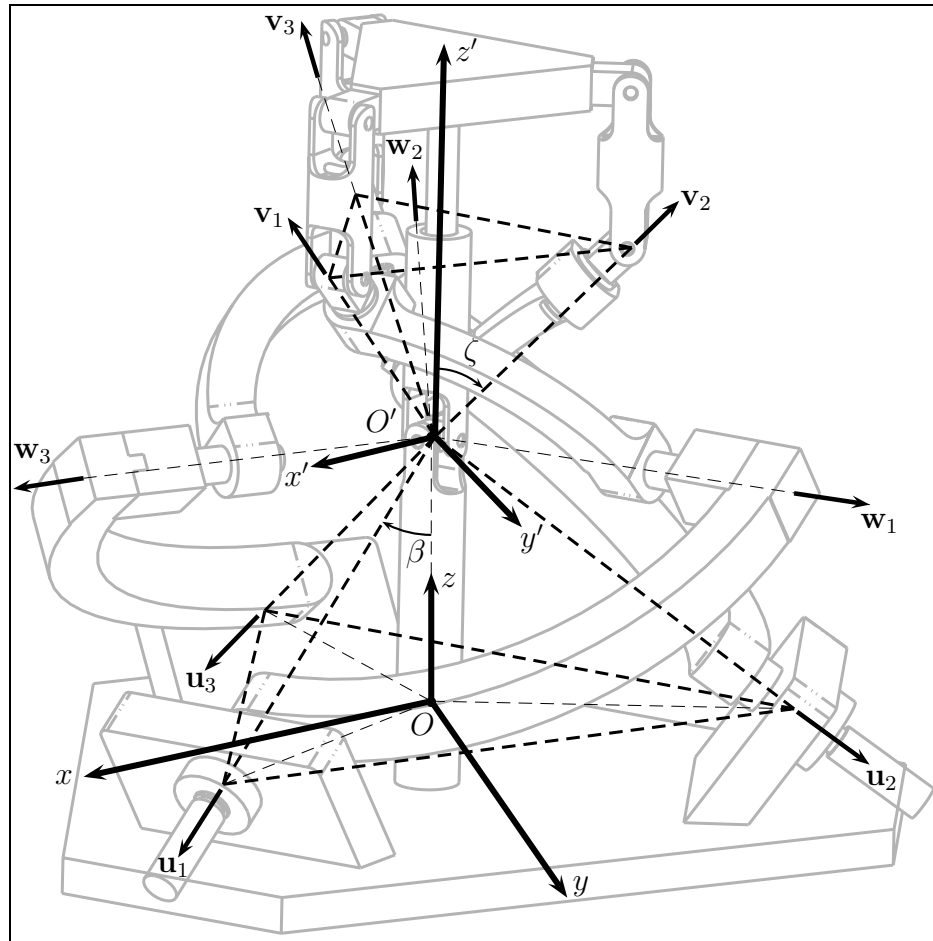


FIG. 2.1 – Architecture du mécanisme sphérique à 4 degrés de liberté.

vecteurs \mathbf{u}_i et \mathbf{w}_i caractérisée par un rayon R_1 et un angle α_1), une articulation rotoïde dans l'axe $C_i D_i$ qui relie le membre proximal au membre distal (membrane se trouvant entre les vecteurs \mathbf{w}_i et \mathbf{v}_i caractérisée par un rayon R_2 et un angle α_2), un cardan qui lie le membre distal à la tige d'une longueur l , puis une articulation rotoïde en G_i qui relie la tige de longueur l à la plate-forme. En combinant à cette chaîne l'effet de l'actionneur prismatique qui fait varier la hauteur h , soit la distance entre le centre géométrique O' et le centre de la plate-forme P , on retrouve dans un plan la forme d'un trapèze en $O'F_i G_i P O'$ dont la hauteur h influence l'angle ζ qui, à son tour, influence l'orientation du vecteur \mathbf{v}_i .

Une autre particularité de ce mécanisme est qu'il est de type *sphérique*, c'est-à-dire qu'il possède un *centre géométrique* (localisé dans notre cas en O') autour duquel

s'effectue le mouvement des membres proximaux et distaux. Donc, les axes de rotations se trouvant en $A_i B_i$ (les axes des moteurs), $C_i D_i$ et $E_i F_i$ passent par ce centre géométrique O' . De cette façon, on peut représenter schématiquement la base avec l'aide d'une pyramide où les arêtes correspondent aux axes de rotation des 3 moteurs qui sont inclinés d'un angle β par rapport à l'axe z . Ainsi, on définit des vecteurs unitaires \mathbf{u}_i qui partent du point O' et qui suivent les arêtes de cette pyramide. D'autre part, les vecteurs \mathbf{v}_i forment une seconde pyramide, se situant toutefois au niveau des membres distaux, mais la forme de cette pyramide qui est reliée à l'angle ζ change lorsque h varie (contrairement à la pyramide de la base où la forme ne change pas une fois le dimensionnement du mécanisme établi).

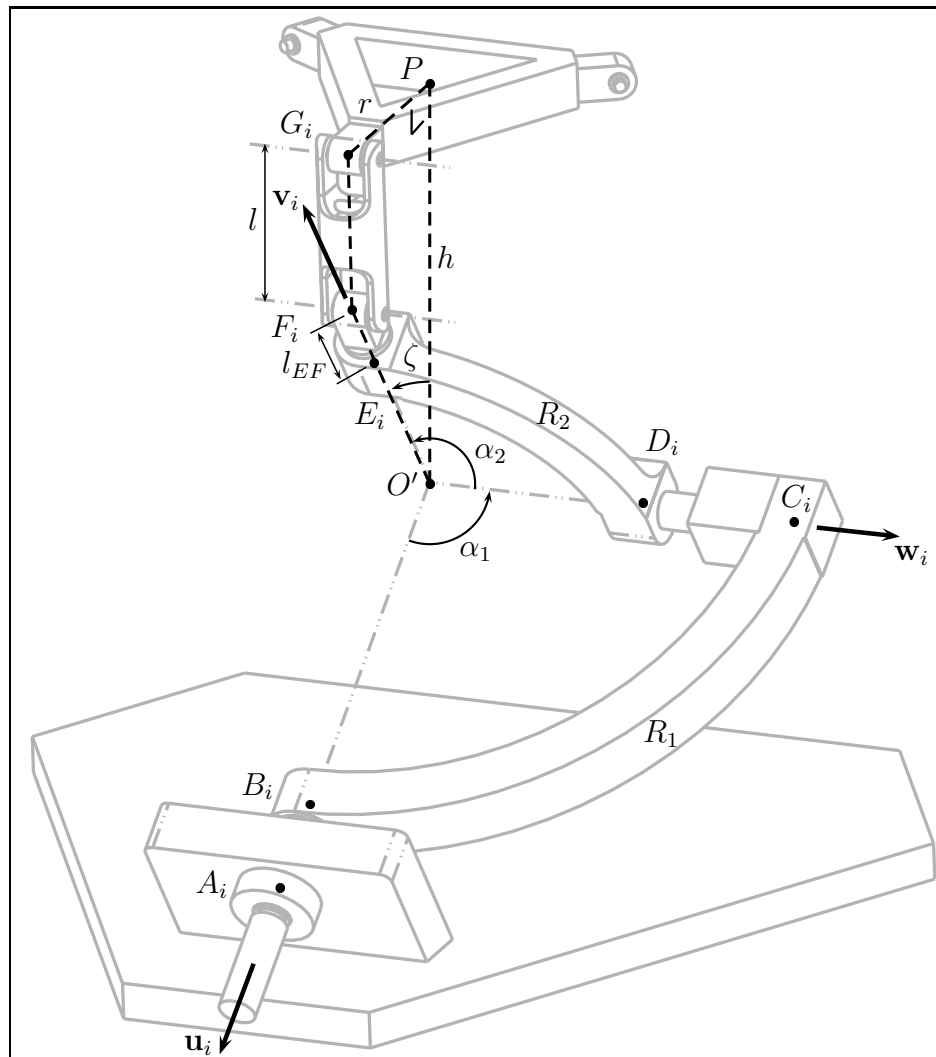


FIG. 2.2 – Chaîne cinématique i reliant la base à l'effecteur.

2.1.1 Géométrie de la base

Les points A_i , $i = 1,2,3$, indiquent la position du moteur i dans le repère fixe \mathcal{R}_{xyz} d'origine O . Ces points sont situés symétriquement sur la base selon un angle η_i sur un cercle de rayon R (voir la figure 2.3).

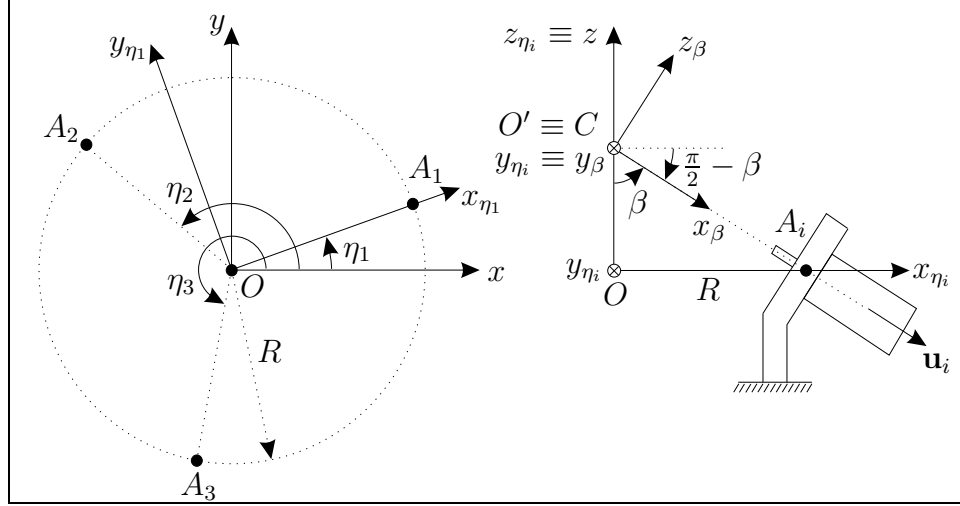


FIG. 2.3 – Base du mécanisme sphérique à 4 ddl.

Donc, en fixant η_1 , on obtient par symétrie que

$$\eta_2 = \eta_1 + \frac{2\pi}{3} \quad (2.1)$$

$$\eta_3 = \eta_1 + \frac{4\pi}{3} \quad (2.2)$$

et les points A_i sont localisés par

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{Q}_{\eta_i} [R, 0, 0]^T = R [\cos \eta_i, \sin \eta_i, 0], \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

où \mathbf{Q}_{η_i} est une matrice de rotation du repère \mathcal{R}_{η_i} par rapport au repère fixe \mathcal{R} définie par

$$\mathbf{Q}_{\eta_i} = \mathbf{Q}_z|_{\eta_i} = \begin{bmatrix} \cos \eta_i & -\sin \eta_i & 0 \\ \sin \eta_i & \cos \eta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Les vecteurs \mathbf{u}_i , $i = 1, 2, 3$, pointent dans l'axe de rotation des moteurs. Ainsi, l'angle β est l'angle compris entre une arête de la pyramide de la base (une ligne joignant $O'A_i$) et l'axe z pour indiquer l'orientation de l'axe de rotation des moteurs (on note

que l'inclinaison des 3 moteurs est identique pour conserver la symétrie entre chacune des pattes i). Puisque \mathbf{u}_i est dirigé selon l'axe x_β , on a que

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_\beta [1,0,0]^T = [\cos \eta_i \sin \beta, \sin \eta_i \sin \beta, -\cos \beta]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\beta &= \mathbf{Q}_{y_{\eta_i}} \Big|_{\frac{\pi}{2}-\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-\beta) & 0 & \sin(\frac{\pi}{2}-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\beta) \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \\ &= \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \beta & 0 & \sin \beta \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

\mathbf{Q}_β étant la matrice de rotation entre le repère \mathcal{R}_β et le repère \mathcal{R}_{η_i} . Donc, pour dimensionner la base, les paramètres géométriques à déterminer sont R , η_1 et β . Pour ce qui est du centre géométrique du mécanisme, noté le point C (ou O'), il est localisé par

$$\mathbf{c} = \frac{R}{\tan \beta} [0,0,1]^T \quad (2.7)$$

2.1.2 Géométrie de la plate-forme

Un repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ ayant son origine O' centrée au centre géométrique du mécanisme C et dont l'axe z' suit le vecteur $O'P$ permet de définir l'orientation de la plate-forme. Ainsi, l'orientation est donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} de l'équation (1.5) où les angles d'Euler autour de x , y et z sont respectivement ϕ , θ et ψ . Ainsi, la position du centre de la plate-forme est

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}[\mathbf{p}]_{\mathcal{R}'} \quad (2.8)$$

avec la position du centre de la plate-forme dans le repère mobile qui est

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{R}'} = [0,0,h]^T \quad (2.9)$$

De cette façon, l'orientation et la position de la plate-forme est définie en spécifiant le vecteur suivant

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\phi, \theta, \psi, h]^T \quad (2.10)$$

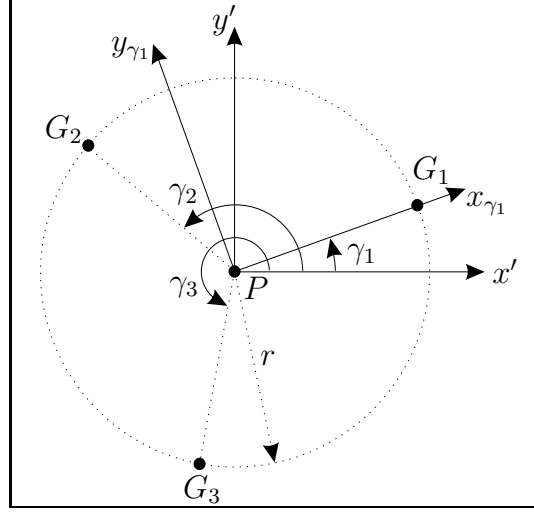


FIG. 2.4 – Plate-forme du mécanisme sphérique à 4 ddl.

Or, en projetant le repère \mathcal{R}' dans le plan de la plate-forme (qui est à une hauteur $z' = h$), on obtient la géométrie présentée à la figure 2.4 où les points G_i , $i = 1,2,3$, sont disposés de manière symétrique sur un cercle de rayon r . Donc, en déterminant γ_1 , on a que

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{2\pi}{3} \quad (2.11)$$

$$\gamma_3 = \gamma_1 + \frac{4\pi}{3} \quad (2.12)$$

et les points G_i sont localisés par

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{c} + \mathbf{Q}[\mathbf{g}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.13)$$

avec

$$[\mathbf{g}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i}[\mathbf{g}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [r \cos \gamma_i, r \sin \gamma_i, h]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (2.14)$$

$$\mathbf{Q}_{\gamma_i} = \mathbf{Q}_{z'}|_{\gamma_i} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_i & -\sin \gamma_i & 0 \\ \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.15)$$

$$[\mathbf{g}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [r, 0, h]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (2.16)$$

2.1.3 Géométrie des membres proximaux

Le membre proximal i (où $i = 1,2,3$) est la membrure de rayon R_1 que l'on retrouve entre les vecteurs \mathbf{u}_i et \mathbf{w}_i . Pour déterminer l'orientation de ce membre, en partant du

repère \mathcal{R}_β montré à la figure 2.3, il suffit d'effectuer une rotation additionnelle autour de x_β d'un angle θ_i . Ainsi, on arrive dans la configuration indiquée à la figure 2.5 (image de gauche).

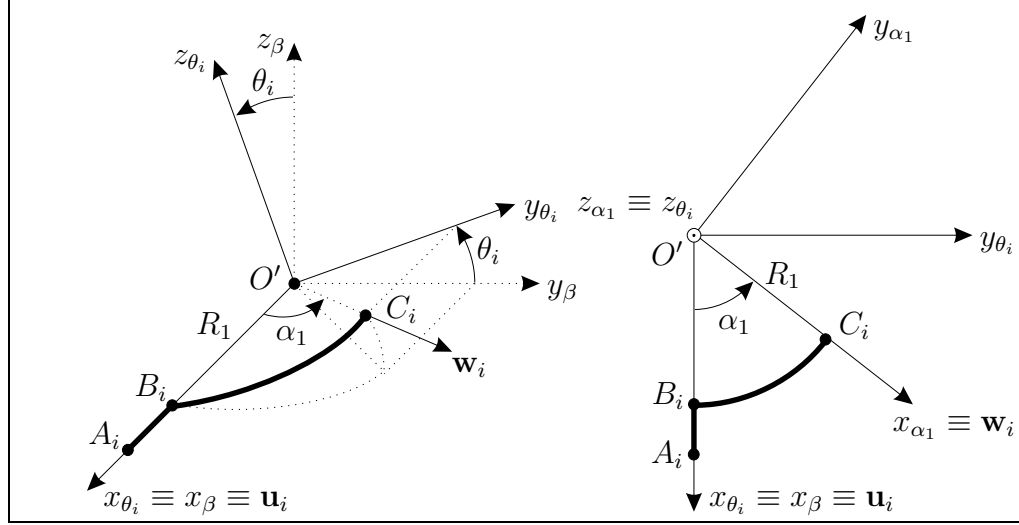


FIG. 2.5 – Membre proximal.

Puis, en effectuant une rotation autour de z_{θ_i} d'un angle α_1 (tel que montré sur l'image de droite de la figure 2.5), on a que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1, 2, 3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \eta_i \sin \beta \cos \alpha_1 - \sin \eta_i \cos \theta_i \sin \alpha_1 + \cos \eta_i \cos \beta \sin \theta_i \sin \alpha_1 \\ \sin \eta_i \sin \beta \cos \alpha_1 + \cos \eta_i \cos \theta_i \sin \alpha_1 + \sin \eta_i \cos \beta \sin \theta_i \sin \alpha_1 \\ - \cos \beta \cos \alpha_1 + \sin \beta \sin \theta_i \sin \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{\theta_i} = \mathbf{Q}_{x_\beta} \Big|_{\theta_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{Q}_{\alpha_1} = \mathbf{Q}_{z_{\theta_i}} \Big|_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

$$[\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} = [1, 0, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

et les points B_i , C_i et D_i sont localisés respectivement par

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{c} + R_1 \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{c} + R_1 \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{c} + R_2 \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.23)$$

2.1.4 Géométrie des membres distaux

En regardant les figures 2.2 et 2.6, on voit que les contraintes géométriques du mécanisme conduisent à la formation dans le plan $x_{\gamma_i} z_{\gamma_i}$ d'un trapèze reliant les points $O'F_i G_i P O'$. On note que l'angle entre la plate-forme (la distance r joignant les points P et G_i) et l'axe de l'actionneur prismatique qui fait varier la distance h est toujours de 90° .

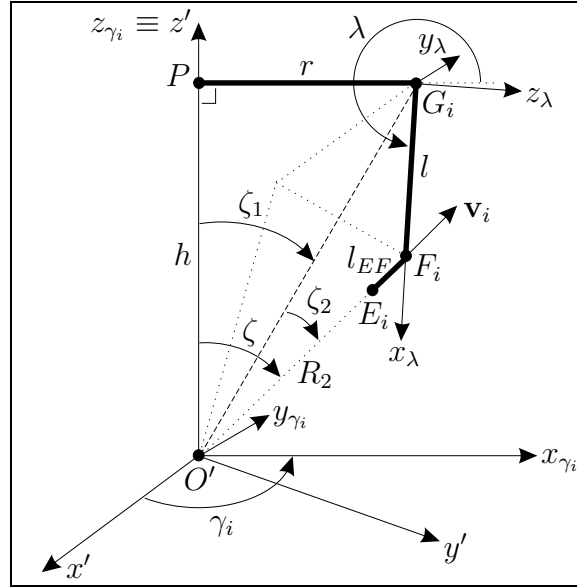


FIG. 2.6 – Membre distal.

Or, par géométrie, on trouve que

$$l_{O'G_i}^2 = h^2 + r^2 \quad (2.24)$$

$$l^2 = (R_2 + l_{EF})^2 + l_{O'G_i}^2 - 2(R_2 + l_{EF})l_{O'G_i} \cos \zeta_2 \quad (2.25)$$

En substituant l'équation (2.24) dans l'équation (2.25), on tire que

$$l^2 = (R_2 + l_{EF})^2 + h^2 + r^2 - 2(R_2 + l_{EF})\sqrt{h^2 + r^2} \cos \zeta_2 \quad (2.26)$$

d'où

$$\zeta_2 = \arccos \left[\frac{(R_2 + l_{EF})^2 + h^2 + r^2 - l^2}{2(R_2 + l_{EF})\sqrt{h^2 + r^2}} \right] \quad (2.27)$$

De plus, on a que

$$\tan \zeta_1 = \frac{r}{h} \quad (2.28)$$

ce qui implique que

$$\zeta_1 = \text{atan} \left(\frac{r}{h} \right) \quad (2.29)$$

Donc, l'angle ζ servant à donner l'orientation au vecteur \mathbf{v}_i est

$$\zeta = \zeta_1 \pm \zeta_2 \quad (2.30)$$

Selon la branche de solution désirée, on choisit le signe $+$ ou $-$ à l'intérieur de l'équation (2.30). En regardant la figure 2.6, on voit que le signe $-$ conduit à la solution tracée en ligne pointillée, tandis que le signe $+$ conduit à la solution présentée sur la figure par les segments $O'F_i$ et F_iG_i . Dans notre cas, pour éviter les interférences mécaniques, on choisit le signe $+$.

Or, le vecteur unitaire \mathbf{v}_i allant dans la direction de O' à E_i (les points O' , E_i et F_i étant sur la même ligne) est

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{Q}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.31)$$

où

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.32)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{\zeta} = \mathbf{Q}_{y_{\gamma_i}} \Big|_{\zeta} = \begin{bmatrix} \cos \zeta & 0 & \sin \zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \zeta & 0 & \cos \zeta \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.33)$$

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}} = [0,0,1]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (2.34)$$

et les points E_i et F_i sont respectivement localisés par

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{c} + R_2 \mathbf{v}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{c} + (R_2 + l_{EF}) \mathbf{v}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.36)$$

2.2 Problème géométrique inverse

La résolution du PGI consiste à trouver la valeur des angles θ_i aux moteurs pour une position et une orientation donnée de la plate-forme. Or, les contraintes du mécanisme nous indiquent que les vecteurs \mathbf{w}_i et \mathbf{v}_i forment un angle α_2 au niveau du centre géométrique du mécanisme, ce qui implique que

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_i = \cos \alpha_2, \quad i = 1,2,3 \quad (2.37)$$

En utilisant les équations (2.17) et (2.31), l'équation (2.37) devient sous la forme

$$\begin{aligned} & (\cos \eta_i \sin \beta \cos \alpha_1 - \sin \eta_i \cos \theta_i \sin \alpha_1 + \cos \eta_i \cos \beta \sin \theta_i \sin \alpha_1) v_{ix} + \\ & (\sin \eta_i \sin \beta \cos \alpha_1 + \cos \eta_i \cos \theta_i \sin \alpha_1 + \sin \eta_i \cos \beta \sin \theta_i \sin \alpha_1) v_{iy} + \\ & (-\cos \beta \cos \alpha_1 + \sin \beta \sin \theta_i \sin \alpha_1) v_{iz} = \cos \alpha_2, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.38)$$

et celle-ci se ramène à

$$K_{1i} \cos \theta_i + K_{2i} \sin \theta_i + K_{3i} = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (2.39)$$

avec

$$K_{1i} = -v_{ix} \sin \eta_i \sin \alpha_1 + v_{iy} \cos \eta_i \sin \alpha_1, \quad i = 1,2,3 \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} K_{2i} = & v_{ix} \cos \eta_i \cos \beta \sin \alpha_1 + v_{iy} \sin \eta_i \cos \beta \sin \alpha_1 + \\ & v_{iz} \sin \beta \sin \alpha_1, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} K_{3i} = & v_{ix} \cos \eta_i \sin \beta \cos \alpha_1 + v_{iy} \sin \eta_i \sin \beta \cos \alpha_1 - \\ & v_{iz} \cos \beta \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.42)$$

On remarque que l'équation (2.39) a la même formulation que celle de l'équation (1.29) développée au chapitre 1. Ainsi, il suffit de continuer la résolution avec les équations (1.34) à (1.39) afin de trouver la valeur des angles θ_i pour $i = 1,2,3$. Concernant le choix du signe + ou - au niveau de l'équation (1.38), un choix qui est laissé à la discrétion de l'utilisateur, on sélectionne dans notre cas la branche de solution correspondant au signe + pour les 3 moteurs. Donc, pour atteindre une certaine position et orientation au niveau de la plate-forme, chaque patte i dispose de 4 solutions différentes en considérant les équations (1.38) et (2.30), ce qui implique que le mécanisme peut adopter 64 configurations différentes.

2.3 Équations de vitesse

En dérivant par rapport au temps l'équation (2.37), on obtient

$$\dot{\mathbf{w}}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (2.43)$$

avec

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.44)$$

où

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} = -\dot{\theta}_i \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{E}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

et

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q}[\dot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.47)$$

où $\dot{\mathbf{Q}}$ est exprimée à l'équation (1.56) et

$$[\dot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i} \dot{\mathbf{Q}}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.48)$$

sachant que

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\zeta} = \dot{\zeta} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{E}_{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Pour évaluer $\dot{\zeta}$, on dérive par rapport au temps l'équation (2.30) (avec le choix du signe +), ce qui donne

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2 \quad (2.51)$$

Puis, en dérivant l'équation (2.28), on a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \zeta_1} \dot{\zeta}_1 &= -\frac{r\dot{h}}{h^2} \\ \dot{\zeta}_1 &= \dot{h} \left[\frac{-r \cos^2 \zeta_1}{h^2} \right] = \dot{h} k_1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Pour obtenir $\dot{\zeta}_2$, la dérivation de l'équation (2.26) conduit aux relations suivantes

$$\begin{aligned}
0 &= 2h\dot{h} - 2(R_2 + l_{EF}) \left[\frac{h\dot{h} \cos \zeta_2}{\sqrt{h^2 + r^2}} - \dot{\zeta}_2 \sin \zeta_2 \sqrt{h^2 + r^2} \right] \\
\dot{\zeta}_2 &= \frac{\frac{(R_2 + l_{EF})h\dot{h} \cos \zeta_2}{\sqrt{h^2 + r^2}} - h\dot{h}}{(R_2 + l_{EF}) \sin \zeta_2 \sqrt{h^2 + r^2}} \\
\dot{\zeta}_2 &= \dot{h} \left[h \left(\frac{1}{\tan \zeta_2 (h^2 + r^2)} - \frac{1}{(R_2 + l_{EF}) \sin \zeta_2 \sqrt{h^2 + r^2}} \right) \right] = \dot{h} k_2 \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Avec les équations (2.52) et (2.53), en posant que

$$k = k_1 + k_2 \quad (2.54)$$

on a que l'équation (2.51) devient sous la forme suivante

$$\dot{\zeta} = \dot{h} k \quad (2.55)$$

Donc, en revenant à l'équation (2.43) pour $i = 1, 2, 3$, on a que

$$\begin{aligned}
& \left(-\dot{\theta}_i \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} \right) \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \cdot \left(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q} \dot{h} k \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}} \right) = 0 \\
& -\dot{\theta}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} + \mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} + \dot{h} k \mathbf{w}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}} = 0 \quad (2.56)
\end{aligned}$$

et puisque

$$\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{w}_i^T [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'})], \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.57)$$

$$= [(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_i)^T \boldsymbol{\omega}], \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.58)$$

on obtient, pour $i = 1, 2, 3$, la relation suivante

$$[(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_i)^T \boldsymbol{\omega} + [k \mathbf{w}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}}] \dot{h} = [\mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}] \dot{\theta}_i \quad (2.59)$$

D'autre part, pour ce qui est de l'actionneur prismatique, on a tout simplement que sa vitesse $\dot{\rho}_{prismatique}$ est donnée par \dot{h} . Ainsi, sous une forme matricielle où $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\omega}^T, \dot{h}]^T$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\rho}_{prismatique}]^T$, on trouve que

$$\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.60)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_1)^T \boldsymbol{\omega} & k \mathbf{w}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}_{\zeta}} \\ [(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_2)^T \boldsymbol{\omega} & k \mathbf{w}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_2} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}_{\zeta}} \\ [(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_3)^T \boldsymbol{\omega} & k \mathbf{w}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_3} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}_{\zeta}} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{Q}_{\eta_1} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_\theta \mathbf{Q}_{\theta_1} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2^T \mathbf{Q}_{\eta_2} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_\theta \mathbf{Q}_{\theta_2} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_3^T \mathbf{Q}_{\eta_3} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_\theta \mathbf{Q}_{\theta_3} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_3]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

En regardant attentivement la matrice \mathbf{A} , on peut se rendre compte qu'il est possible de découpler le degré de liberté en translation de ceux en rotation en optant pour des conditions qui font que les termes A_{14} , A_{24} et A_{34} s'annulent. Ainsi, les deux options suivantes s'offrent pour le découplage

- Option 1 : le terme $k = 0$.
- Option 2 : le terme $\mathbf{w}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_\zeta \mathbf{Q}_\zeta [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

Pour visualiser l'option 1, deux situations peuvent affecter grandement la valeur k , à un tel point de rendre sa valeur indéterminée (voir la figure 2.7(a)) ou d'obtenir une valeur nulle (voir la figure 2.7(b)). La première situation, qui est représentée par la figure 2.7(a) où l'axe de la tige l est alignée avec le vecteur \mathbf{v}_i , n'est pas souhaitable car avec un angle $\zeta_2 = 0$, on atteint une configuration singulière ($k_2 = -\infty$). Pour ce qui est de la seconde situation indiquée par la figure 2.7(b), en alignant l'axe de la tige l avec la plate-forme de rayon r à une certaine hauteur h , on se trouve à découpler la translation verticale selon z' des 3 rotations de la plate-forme (on obtient $k_1 = -k_2$, donc $k = k_1 + k_2 = 0$), ce qui est très utile pour donner de petits mouvements à la plate-forme autour de cette position h (comme des vibrations) sans que les moteurs situés sur la base ne perçoivent ces mouvements. De plus, puisque la valeur de k est indépendante de l'orientation de la plate-forme, on obtient un découplage pour n'importe quelle trajectoire donnée au centre de la plate-forme, en autant que les déplacements en translation donnés autour de h soient suffisamment petits pour rendre la valeur de k très faible.

Concernant la seconde option, pour $i = 1, 2$ et 3 , il faut que le produit scalaire entre les vecteurs \mathbf{w}_i et $\mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_\zeta \mathbf{Q}_\zeta [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta}$ soit nul, ce qui implique que ces deux vecteurs doivent être perpendiculaires entre eux. Or, le vecteur $\mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_\zeta \mathbf{Q}_\zeta [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta}$ se situe dans le plan du trapèze $O'F_iG_iPO'$ (voir les figures 2.2 et 2.6) et il y a perpendicularité entre ce vecteur et le vecteur \mathbf{w}_i seulement lorsque \mathbf{w}_i est normal au plan $O'F_iG_iPO'$. En d'autres termes, lorsque les axes y_{γ_i} (voir la figure 2.6) sont parallèles aux vecteurs \mathbf{w}_i , alors il est possible d'effectuer une translation de la plate-forme selon l'axe z' , ce

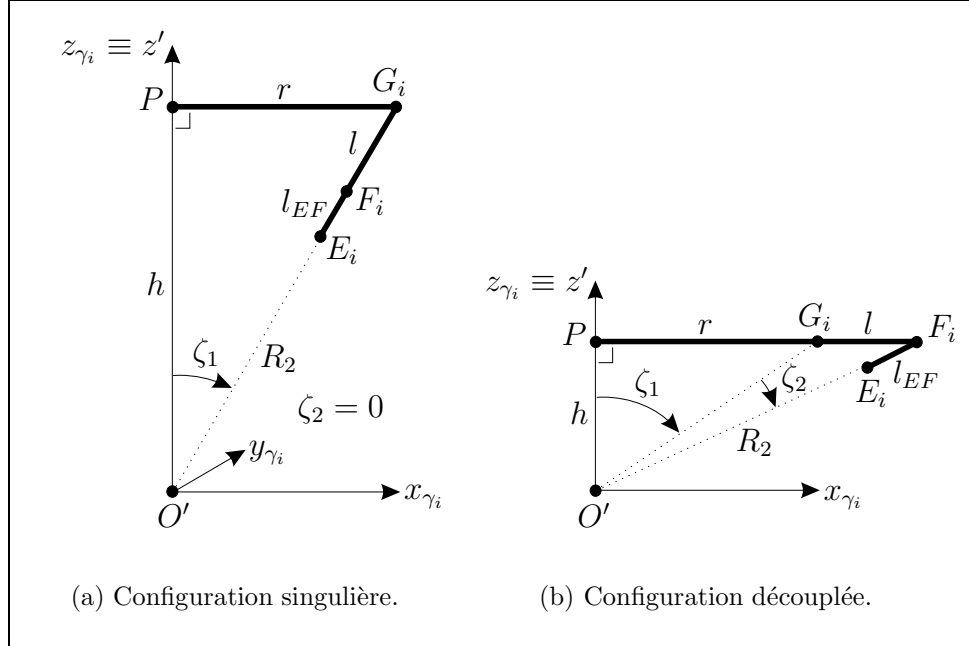


FIG. 2.7 – Configurations spéciales.

qui fait bouger uniquement les membres distaux (et varier l'angle ζ) tout en laissant les membres proximaux immobiles. D'autre part, puisque le terme $\mathbf{w}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_\zeta \mathbf{Q}_\zeta [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta}$ doit être nul pour les 3 pattes afin d'observer un découplage entre les degrés de liberté en rotation de celui en translation, on doit noter que la seconde option survient seulement lorsque la matrice de rotation correspond à la matrice identité, ce qui ne correspond toutefois pas au type de trajectoire recherchée pour l'usage d'un simulateur de vol.

Or, en considérant la relation entre les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}$ et les vitesses des angles d'Euler, on peut écrire que

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.63)$$

et l'équation (2.60) devient sous la forme

$$\mathbf{A} \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.64)$$

Cette dernière équation met en relation les vitesses des 4 degrés de liberté du mécanisme ($\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et \dot{h}) avec les vitesses qui sont requises aux actionneurs pour effectuer la trajectoire prescrite ($\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\rho}_{prismatique}$). Afin de s'assurer que les expressions des

matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{S} sont exactes, on peut se servir de la procédure indiquée à la section 1.3.1.

2.4 Équations d'accélération

En dérivant l'équation (2.64), on trouve que les vitesses des actionneurs sont données par

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^{-1}[(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{S} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{A}\mathbf{S}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\mathbf{B}}\dot{\boldsymbol{\theta}}] \quad (2.65)$$

avec

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \left[\left\{ (\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q}[\dot{\mathbf{v}}_1]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_1 \right\} + \left\{ (\mathbf{Q}[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{w}}_1 \right\} \right]^T & \dot{A}_{14} \\ \left[\left\{ (\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q}[\dot{\mathbf{v}}_2]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_2 \right\} + \left\{ (\mathbf{Q}[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{w}}_2 \right\} \right]^T & \dot{A}_{24} \\ \left[\left\{ (\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q}[\dot{\mathbf{v}}_3]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_3 \right\} + \left\{ (\mathbf{Q}[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{w}}_3 \right\} \right]^T & \dot{A}_{34} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \dot{B}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{B}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{B}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 0_{(1 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{A}_{i4} &= \dot{k} \mathbf{w}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}} + k \dot{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}} + \\ & k \mathbf{w}_i^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}} + k \mathbf{w}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{E}_{\zeta} \dot{\mathbf{Q}}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\dot{B}_{ii} = \dot{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} + \mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.70)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \text{voir l'équation (1.78)} \quad (2.71)$$

$$\dot{k} = \dot{k}_1 + \dot{k}_2 \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \frac{-2r \cos \zeta_1 (\dot{\zeta}_1 \sin \zeta_1) h^2 + 2h \dot{h} r \cos^2 \zeta_1}{h^4} \\ &= \frac{2r \dot{\zeta}_1 \cos \zeta_1 \sin \zeta_1}{h^2} + \frac{2\dot{h} r \cos^2 \zeta_1}{h^3} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\dot{k}_2 = \dot{h} \left(\frac{1}{\tan \zeta_2 (h^2 + r^2)} - \frac{1}{(R_2 + l_{EF}) \sin \zeta_2 \sqrt{h^2 + r^2}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& h \left(\frac{-\left(\frac{\dot{\zeta}_2(h^2+r^2)}{\cos^2 \zeta_2} + 2h\dot{h} \tan \zeta_2\right)}{\tan^2 \zeta_2 (h^2+r^2)^2} + \frac{\dot{\zeta}_2 \cos \zeta_2 \sqrt{h^2+r^2} + \frac{h\dot{h} \sin \zeta_2}{\sqrt{h^2+r^2}}}{(R_2 + l_{EF}) \sin^2 \zeta_2 (h^2+r^2)} \right) \\
&= \frac{\dot{h}k_2}{h} - \frac{\dot{\zeta}_2 h}{\sin^2 \zeta_2 (h^2+r^2)} - \frac{2h^2 \dot{h}}{\tan \zeta_2 (h^2+r^2)^2} + \\
& \quad \frac{h\dot{\zeta}_2 \cos \zeta_2}{(R_2 + l_{EF}) \sin^2 \zeta_2 \sqrt{h^2+r^2}} + \frac{h^2 \dot{h}}{(R_2 + l_{EF}) \sin \zeta_2 (h^2+r^2)^{3/2}} \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Pour déterminer l'accélération des vecteurs \mathbf{u}_i (des vecteurs constants), \mathbf{v}_i et \mathbf{w}_i , on a que

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.75)$$

$$\ddot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} + 2\dot{\mathbf{Q}}[\dot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q}[\ddot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.76)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \ddot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.77)$$

où $\ddot{\mathbf{Q}}$ est indiquée à l'équation (1.87) et

$$[\ddot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i} \ddot{\mathbf{Q}}_{\zeta} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_{\zeta}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.78)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\zeta} = \ddot{\zeta} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} + \dot{\zeta}^2 \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{E}_{\zeta} \mathbf{Q}_{\zeta} \quad (2.79)$$

$$\ddot{\zeta} = \ddot{h}k + \dot{h}\dot{k} \quad (2.80)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} = -\ddot{\theta}_i \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} + \dot{\theta}_i^2 \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.81)$$

2.5 Dynamique

Une fois que les équations reliées à la cinématique sont connues, on peut poursuivre l'analyse en modélisant chaque partie du mécanisme afin de pouvoir calculer les efforts qui sont requis aux actionneurs avec l'utilisation du principe du travail virtuel.

2.5.1 Modélisation

Le mécanisme se compose de 11 corps k : les membres proximaux 1, 2 et 3, les membres distaux 1, 2 et 3, les tiges 1, 2 et 3 de longueur l , ainsi que la plate-forme et l'actionneur prismatique. Pour simplifier l'analyse, on considère que tous ces corps ont la même densité ρ . De plus, on néglige le poids et l'inertie des articulations.

2.5.1.1 Membres proximaux

Les membres proximaux peuvent être composés de formes géométriques assez complexes. Donc, pour déterminer la masse $m_{proximal\ i}$ à partir d'une densité ρ et du volume de la forme géométrique, le centre de masse (CDM) du corps $\mathbf{G}_{proximal\ i}$ exprimé dans le repère local du membre proximal (soit le repère $\mathcal{R}_{proximal\ i}$ correspondant au repère \mathcal{R}_{θ_i} montré sur l'image de droite de la figure 2.5) et l'inertie $\mathbf{I}_{proximal\ i}$ évaluée au CDM du corps, on peut recourir à un logiciel de CAO (conception assistée par ordinateur) tel que Pro-ENGINEER qui permet d'effectuer le calcul. C'est d'ailleurs ce logiciel qui est utilisé pour valider les masses, les CDM et les matrices d'inertie calculés à partir d'expressions analytiques.

Ainsi, en connaissant la masse $m_{proximal\ i}$, le CDM $[\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}}$ et l'inertie $\mathbf{I}_{proximal\ i}$, on peut établir la position, la vitesse et l'accélération du CDM évaluées dans le repère fixe par

$$\mathbf{c}_{m\ proximal\ i} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}_{proximal\ i}[\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.82)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m\ proximal\ i} = \dot{\mathbf{Q}}_{proximal\ i}[\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.83)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ proximal\ i} = \ddot{\mathbf{Q}}_{proximal\ i}[\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.84)$$

où

$$\mathbf{Q}_{proximal\ i} = \mathbf{Q}_{I_{proximal\ i}} = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.85)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_{proximal\ i} = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.86)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{proximal\ i} = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \ddot{\mathbf{Q}}_{\theta_i}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.87)$$

Pour ce qui est de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{proximal\ i}$ ainsi que l'accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{proximal\ i}$, celles-ci sont données avec les relations suivantes

$$\boldsymbol{\omega}_{proximal\ i} = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} [\dot{\theta}_i, 0, 0]^T = \dot{\theta}_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.88)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{proximal\ i} = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} [\ddot{\theta}_i, 0, 0]^T = \ddot{\theta}_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.89)$$

2.5.1.2 Membres distaux

De façon similaire aux membres proximaux, le logiciel de CAO Pro-ENGINEER est utilisé pour évaluer la masse $m_{distal\ i}$, le centre de masse (CDM) du corps $\mathbf{G}_{distal\ i}$

exprimé dans le repère local du membre distal (soit le repère $\mathcal{R}_{distal\ i}$ montré sur la figure 2.8) et l'inertie $\mathbf{I}_{distal\ i}$ évaluée au CDM du corps.

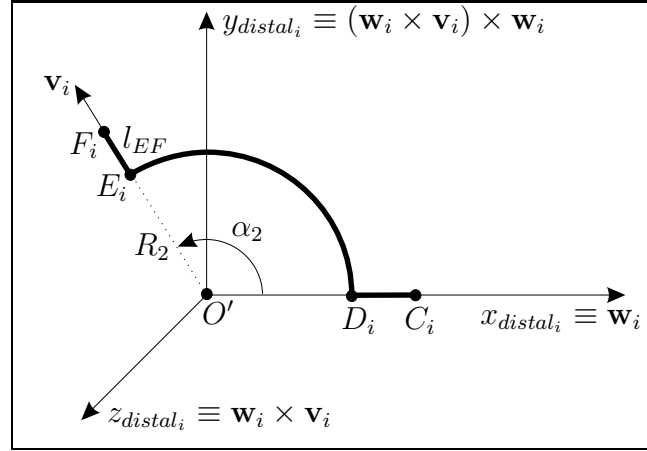


FIG. 2.8 – Repère local du membre distal.

Ainsi, une fois que la masse $m_{distal\ i}$, le CDM $[\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}}$ et l'inertie $\mathbf{I}_{distal\ i}$ sont déterminées, on peut établir la position, la vitesse et l'accélération du CDM évaluées dans le repère fixe par

$$\mathbf{c}_{m\ distal\ i} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}_{distal\ i}[\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.90)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m\ distal\ i} = \dot{\mathbf{Q}}_{distal\ i}[\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.91)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ distal\ i} = \ddot{\mathbf{Q}}_{distal\ i}[\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.92)$$

où

$$\mathbf{Q}_{distal\ i} = \mathbf{Q}_{I\ distal\ i} = [\mathbf{w}_i, (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \times \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i], \quad i = 1,2,3 \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_{distal\ i} = & [\dot{\mathbf{w}}_i, (\dot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{v}_i) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \times \dot{\mathbf{w}}_i, \\ & \dot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i], \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_{distal\ i} = & [\ddot{\mathbf{w}}_i, (\ddot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{v}_i) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \ddot{\mathbf{v}}_i) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \times \ddot{\mathbf{w}}_i + \\ & 2(\dot{\mathbf{w}}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i) \times \mathbf{w}_i + 2(\dot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{v}_i) \times \dot{\mathbf{w}}_i + 2(\mathbf{w}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i) \times \dot{\mathbf{w}}_i, \\ & \ddot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \times \ddot{\mathbf{v}}_i + 2\dot{\mathbf{w}}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i], \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.95)$$

Pour évaluer la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{distal\ i}$, en utilisant les équations établies en [6], on peut dire que la vitesse angulaire du membre distal est égale à celle du membre

proximal en lui ajoutant une certaine composante de rotation dans la direction de \mathbf{w}_i , ce qui implique que

$$\boldsymbol{\omega}_{distal\ i} = \boldsymbol{\omega}_{proximal\ i} + k_{distal\ i} \mathbf{w}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.96)$$

Or, puisque nous disposons de la relation cinématique où

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{w}}_i + \boldsymbol{\omega}_{distal\ i} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i), \quad i = 1,2,3 \quad (2.97)$$

alors le terme $k_{distal\ i}$ de l'équation (2.96) est

$$k_{distal\ i} = \frac{\mathbf{r}_{distal\ i}^T \mathbf{S}_{distal\ i}}{\mathbf{r}_{distal\ i}^T \mathbf{r}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.98)$$

avec

$$\mathbf{r}_{distal\ i} = \mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.99)$$

$$\mathbf{S}_{distal\ i} = \dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\mathbf{w}}_i - \boldsymbol{\omega}_{proximal\ i} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i), \quad i = 1,2,3 \quad (2.100)$$

Pour établir l'accélération angulaire $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{distal\ i}$, on dérive l'équation (2.96), ce qui donne

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{distal\ i} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{proximal\ i} + \dot{k}_{distal\ i} \mathbf{w}_i + k_{distal\ i} \dot{\mathbf{w}}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.101)$$

et puisque la dérivée par rapport au temps de l'équation (2.97) est

$$\ddot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{w}}_i + \boldsymbol{\omega}_{distal\ i} \times (\dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\mathbf{w}}_i) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{distal\ i} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i), \quad i = 1,2,3 \quad (2.102)$$

alors on a que le terme $\dot{k}_{distal\ i}$ de l'équation (2.101) est

$$\dot{k}_{distal\ i} = \frac{\mathbf{g}_{distal\ i}^T \mathbf{h}_{distal\ i}}{\mathbf{g}_{distal\ i}^T \mathbf{g}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (2.103)$$

avec

$$\mathbf{g}_{distal\ i} = \mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{distal\ i} = & \ddot{\mathbf{v}}_i - \ddot{\mathbf{w}}_i - \boldsymbol{\omega}_{distal\ i} \times (\dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\mathbf{w}}_i) - \\ & (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{proximal\ i} + k_{distal\ i} \dot{\mathbf{w}}_i) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i), \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.105)$$

2.5.1.3 Tiges de longueur l

Chaque tige est modélisée comme un cylindre de longueur l et de rayon r_l . En regardant la figure 2.6, on peut associer à chaque tige un repère \mathcal{R}_λ ayant son origine en G_i où l'axe x_λ suit la direction de G_i à F_i et l'axe y_λ suit la direction de l'axe y_{γ_i} . Ainsi, on peut établir que

$$[\mathbf{f}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [\mathbf{g}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + l[\cos \lambda, 0, \sin \lambda]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.106)$$

$$\begin{bmatrix} (R_2 + l_{EF}) \sin \zeta \\ 0 \\ (R_2 + l_{EF}) \cos \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \cos \lambda \\ 0 \\ l \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

ce qui permet de trouver la valeur de l'angle λ avec

$$\lambda = \text{atan2}(s_\lambda, c_\lambda) \quad (2.108)$$

où

$$c_\lambda = \cos \lambda = \frac{(R_2 + l_{EF}) \sin \zeta - r}{l} \quad (2.109)$$

$$s_\lambda = \sin \lambda = \frac{(R_2 + l_{EF}) \cos \zeta - h}{l} \quad (2.110)$$

À partir de la première ligne de l'équation (2.107), il est possible de déterminer la vitesse et l'accélération de l'angle λ par

$$\dot{\lambda} = \frac{-(R_2 + l_{EF})\dot{\zeta} \cos \zeta}{l \sin \lambda} \quad (2.111)$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{[(R_2 + l_{EF}) \sin \zeta \dot{\zeta}^2 - (R_2 + l_{EF}) \cos \zeta \ddot{\zeta}] l \sin \lambda + l \cos \lambda \dot{\lambda} (R_2 + l_{EF}) \cos \zeta \dot{\zeta}}{l^2 \sin^2 \lambda} \quad (2.112)$$

En considérant que le CDM évalué dans le repère \mathcal{R}_{γ_i} , noté $[\mathbf{G}_{tigue i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}$, se situe à la mi-longueur de la tige, on a que

$$[\mathbf{G}_{tigue i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [\mathbf{g}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + [\mathbf{s}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.113)$$

$$[\dot{\mathbf{G}}_{tigue i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [\dot{\mathbf{g}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + [\dot{\mathbf{s}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.114)$$

$$[\ddot{\mathbf{G}}_{tigue i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [\ddot{\mathbf{g}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + [\ddot{\mathbf{s}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.115)$$

avec

$$[\dot{\mathbf{g}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [0, 0, \dot{h}]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.116)$$

$$[\ddot{\mathbf{g}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [0, 0, \ddot{h}]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.117)$$

$$[\mathbf{s}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = \left[\frac{l}{2} \cos \lambda, 0, \frac{l}{2} \sin \lambda \right]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.118)$$

$$[\dot{\mathbf{s}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = \dot{\lambda} \mathbf{E}_\lambda [\mathbf{s}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.119)$$

$$[\ddot{\mathbf{s}}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = \ddot{\lambda} \mathbf{E}_\lambda [\mathbf{s}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + \dot{\lambda}^2 \mathbf{E}_\lambda \mathbf{E}_\lambda [\mathbf{s}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.120)$$

$$\mathbf{E}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

Donc, on peut établir que la position, la vitesse et l'accélération du CDM évaluées dans le repère fixe sont

$$\mathbf{c}_{m \text{ tige } i} = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\mathbf{G}_{\text{tige } i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.122)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m \text{ tige } i} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\mathbf{G}_{\text{tige } i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\dot{\mathbf{G}}_{\text{tige } i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.123)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m \text{ tige } i} = \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\mathbf{G}_{\text{tige } i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + 2\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\dot{\mathbf{G}}_{\text{tige } i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\ddot{\mathbf{G}}_{\text{tige } i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.124)$$

et, puisque chaque tige tourne selon une vitesse $-\dot{\lambda}$ autour de l'axe y_λ (ou de l'axe y_{γ_i}), alors la vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont respectivement

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{tige } i} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [0, -\dot{\lambda}, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.125)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{tige } i} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [0, -\dot{\lambda}, 0]^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [0, -\ddot{\lambda}, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.126)$$

Il est à noter que la masse, la matrice d'inertie exprimée au CDM dans le repère \mathcal{R}_λ et la matrice de rotation du repère \mathcal{R}_λ par rapport au repère fixe sont présentées à la section C.1 de l'annexe C.

2.5.1.4 Plate-forme

La section C.2 de l'annexe C présente une modélisation simplifiée pour la plate-forme (avec le calcul de la masse, de l'inertie et de la position du CDM), où celle-ci peut être modélisée comme un disque muni d'un cylindre qui glisse à l'intérieur de l'actionneur prismatique (voir la figure C.1).

L'orientation de la plate-forme est donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} (voir l'équation (1.5)) du repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ par rapport au repère fixe. Ainsi, la position du CDM

de la plate-forme (notée PF), qui dépend de la forme géométrique attribuée à ce corps, exprimée dans ce repère mobile est

$$\mathbf{G}_{PF} = [G_{PF\ x'}, G_{PF\ y'}, G_{PF\ z'}]^T \quad (2.127)$$

où les positions $G_{PF\ x'}$ et $G_{PF\ y'}$ sont des paramètres constants tandis que la position selon z' ($G_{PF\ z'}$) dépend de la hauteur h . Ainsi, on tire que la vitesse et l'accélération de ce solide exprimées dans le repère mobile sont

$$\dot{\mathbf{G}}_{PF} = [0, 0, \dot{h}]^T \quad (2.128)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}_{PF} = [0, 0, \ddot{h}]^T \quad (2.129)$$

Pour ce qui est de la position, de la vitesse et de l'accélération du CDM de la plate-forme dans le repère fixe, on a que

$$\mathbf{c}_{m\ PF} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{G}_{PF} \quad (2.130)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m\ PF} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{PF} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{G}}_{PF} \quad (2.131)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m\ PF} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{PF} + 2\dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{G}}_{PF} + \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{G}}_{PF} \quad (2.132)$$

De plus, la vitesse angulaire ainsi que l'accélération angulaire sont respectivement

$$\boldsymbol{\omega}_{PF} = \boldsymbol{\omega} \quad (2.133)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{PF} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.134)$$

2.5.1.5 Actionneur prismatique

On retrouve à la section C.3 de l'annexe C une modélisation simplifiée de l'actionneur prismatique en y présentant les calculs de la masse, de l'inertie et de la position du CDM. Celui-ci est modélisé comme un cylindre muni d'une cavité qui permet de guider le mouvement de la plate-forme (voir la figure C.2).

L'orientation de ce solide est donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} (voir l'équation (1.5)) du repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ par rapport au repère fixe. Ainsi, le CDM du solide exprimé dans ce repère mobile est

$$\mathbf{G}_P = [G_{P\ x'}, G_{P\ y'}, G_{P\ z'}]^T \quad (2.135)$$

où la forme géométrique attribuée à l'actionneur prismatique permet de définir les constantes $G_{P x'}$, $G_{P y'}$ et $G_{P z'}$. Donc, la position, la vitesse et l'accélération du CDM exprimées dans le repère fixe sont

$$\mathbf{c}_{m P} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{G}_P \quad (2.136)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m P} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_P \quad (2.137)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m P} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_P \quad (2.138)$$

De plus, la vitesse angulaire ainsi que l'accélération angulaire sont respectivement

$$\boldsymbol{\omega}_P = \boldsymbol{\omega} \quad (2.139)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.140)$$

2.5.2 Principe du travail virtuel

Pour calculer le couple ou la force (τ_j) que doit produire le moteur ($j = 1,2,3$) ou l'actionneur prismatique ($j = 4$), on va utiliser le principe du travail virtuel représenté par la relation suivante (en considérant un déplacement virtuel unitaire aux actionneurs)

$$\tau_j = - \sum_k (\mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{c}_{m k}^j + \mathbf{m}_k^T \delta \boldsymbol{\varphi}_k^j), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.141)$$

où \mathbf{f}_k et \mathbf{m}_k sont respectivement les forces et les moments exercés au CDM de chaque corps.

2.5.2.1 Forces et moments exercés au CDM de chaque corps

Les forces exercées au CDM de chaque corps sont exprimées par

$$\mathbf{f}_k = -m_k \ddot{\mathbf{c}}_{m k} + [0, 0, -m_k g]^T \quad (2.142)$$

où g est l'accélération gravitationnelle et où les accélérations des CDM sont présentées aux équations (2.84), (2.92), (2.124), (2.132) et (2.138). Pour ce qui est des moments exercés au CDM de chaque corps, ceux-ci sont exprimés comme étant

$$\mathbf{m}_k = -\mathbf{Q}_{Ik} \mathbf{I}_k \mathbf{Q}_{Ik}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{\omega}_k \times (\mathbf{Q}_{Ik} \mathbf{I}_k \mathbf{Q}_{Ik}^T \boldsymbol{\omega}_k) \quad (2.143)$$

Les matrices d'inertie \mathbf{I}_k , étant exprimées dans le repère local de chacun des corps k , doivent être multipliées par une matrice de rotation \mathbf{Q}_{Ik} qui fait le lien entre le repère local de chaque corps et le repère fixe. Ainsi, les matrices de rotation des corps \mathbf{Q}_{Ik} , les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}_k$ ainsi que les accélérations angulaires $\dot{\boldsymbol{\omega}}_k$ sont données à l'intérieur de la section 2.5.1 (ou à l'annexe C).

2.5.2.2 Déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps

Pour obtenir les déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps associés au déplacement virtuel unitaire d'un actuateur j ($\delta\boldsymbol{\theta}^1 = [1,0,0,0]^T$, $\delta\boldsymbol{\theta}^2 = [0,1,0,0]^T$, $\delta\boldsymbol{\theta}^3 = [0,0,1,0]^T$ et $\delta\boldsymbol{\theta}^4 = [0,0,0,1]^T$), il suffit de reprendre les équations de vitesse et de substituer les " $\frac{d}{dt}$ " par des " δ ".

Or, en utilisant l'équation (2.60), on a que

$$\delta\mathbf{t}^j = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\delta\boldsymbol{\theta}^j = [\delta\boldsymbol{\varphi}^{jT}, \delta h^j]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.144)$$

où $\delta\boldsymbol{\varphi}^j = [\delta\varphi_x^j, \delta\varphi_y^j, \delta\varphi_z^j]^T$. De plus, avec les équations de vitesse obtenues dans les sections précédentes, pour les membres proximaux ($i = 1, 2, 3$), on a que

$$\delta\mathbf{Q}_{\theta_i}^j = -\delta\theta_i^j \mathbf{E}_\theta \mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (2.145)$$

$$\delta\mathbf{Q}_{proximal\ i}^j = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_\beta \delta\mathbf{Q}_{\theta_i}^j, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (2.146)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ proximal\ i}^j = \delta\mathbf{Q}_{proximal\ i}^j [\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (2.147)$$

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_{proximal\ i}^j = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_\beta [\delta\theta_i^j, 0, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (2.148)$$

Concernant les membres distaux ($i = 1, 2, 3$), on a que

$$\delta\zeta^j = \delta h^j k, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.149)$$

$$\delta\mathbf{Q}_\zeta^j = \delta\zeta^j \mathbf{E}_\zeta \mathbf{Q}_\zeta, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.150)$$

$$\delta\mathbf{Q}^j = \boldsymbol{\Omega}^j \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\varphi_z^j & \delta\varphi_y^j \\ \delta\varphi_z^j & 0 & -\delta\varphi_x^j \\ -\delta\varphi_y^j & \delta\varphi_x^j & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (2.151)$$

$$[\delta\mathbf{v}_i^j]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i} \delta\mathbf{Q}_\zeta^j [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (2.152)$$

$$\delta\mathbf{v}_i^j = \delta\mathbf{Q}^j [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} + \mathbf{Q} [\delta\mathbf{v}_i^j]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (2.153)$$

$$\delta \mathbf{w}_i^j = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \delta \mathbf{Q}_{\theta_i}^j \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Q}_{distal\ i}^j &= [\delta \mathbf{w}_i^j, (\delta \mathbf{w}_i^j \times \mathbf{v}_i) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \delta \mathbf{v}_i^j) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \times \delta \mathbf{w}_i^j, \\ &\quad \delta \mathbf{w}_i^j \times \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \times \delta \mathbf{v}_i^j], \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m\ distal\ i}^j = \delta \mathbf{Q}_{distal\ i}^j [\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.156)$$

$$\mathbf{s}_{distal\ i}^j = \delta \mathbf{v}_i^j - \delta \mathbf{w}_i^j - \delta \boldsymbol{\varphi}_{proximal\ i}^j \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i), \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.157)$$

$$k_{distal\ i}^j = \frac{\mathbf{r}_{distal\ i}^T \mathbf{s}_{distal\ i}^j}{\mathbf{r}_{distal\ i}^T \mathbf{r}_{distal\ i}}, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.158)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{distal\ i}^j = \delta \boldsymbol{\varphi}_{proximal\ i}^j + k_{distal\ i}^j \mathbf{w}_i, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.159)$$

Pour ce qui est des tiges de longueur l ($i = 1,2,3$), on a que

$$\delta \lambda^j = \frac{-(R_2 + l_{EF}) \delta \zeta^j \cos \zeta}{l \sin \lambda}, \quad j = 1,\dots,4 \quad (2.160)$$

$$[\delta \mathbf{g}_i^j]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [0, 0, \delta h^j]^T, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.161)$$

$$[\delta \mathbf{s}_i^j]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = \delta \lambda^j \mathbf{E}_{\lambda} [\mathbf{s}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.162)$$

$$[\delta \mathbf{G}_{tige\ i}^j]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [\delta \mathbf{g}_i^j]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + [\delta \mathbf{s}_i^j]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.163)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m\ tige\ i}^j = \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\mathbf{G}_{tige\ i}]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [\delta \mathbf{G}_{tige\ i}^j]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.164)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{tige\ i}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} [0, -\delta \lambda^j, 0]^T, \quad i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,\dots,4 \quad (2.165)$$

Pour la plate-forme, on a que

$$\delta \mathbf{G}_{PF}^j = [0, 0, \delta h^j]^T, \quad j = 1,\dots,4 \quad (2.166)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m\ PF}^j = \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{G}_{PF} + \mathbf{Q} \delta \mathbf{G}_{PF}^j, \quad j = 1,\dots,4 \quad (2.167)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{PF}^j = \delta \boldsymbol{\varphi}^j, \quad j = 1,\dots,4 \quad (2.168)$$

Finalement, concernant l'actionneur prismatique, on a que

$$\delta \mathbf{c}_{m\ P}^j = \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{G}_P, \quad j = 1,\dots,4 \quad (2.169)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_P^j = \delta \boldsymbol{\varphi}^j, \quad j = 1,\dots,4 \quad (2.170)$$

En appliquant les résultats tirés des équations précédentes à l'intérieur de l'équation (2.141) pour le calcul des couples aux moteurs ($j = 1,2,3$) et de la force requise à l'actionneur prismatique ($j = 4$), on peut vérifier la validité des résultats trouvés en effectuant un bilan d'énergie tel que montré à la section 1.6.4.

2.6 Exemple de résultats

Considérons un mécanisme (dont l'allure est montrée à la figure 2.9) entièrement fait d'aluminium (la densité du matériau est $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) soumis à une gravité $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ dont les paramètres de design sont les suivants (les unités de longueur, d'angle, de masse et de temps sont respectivement le mètre, le radian, le kilogramme et la seconde) :

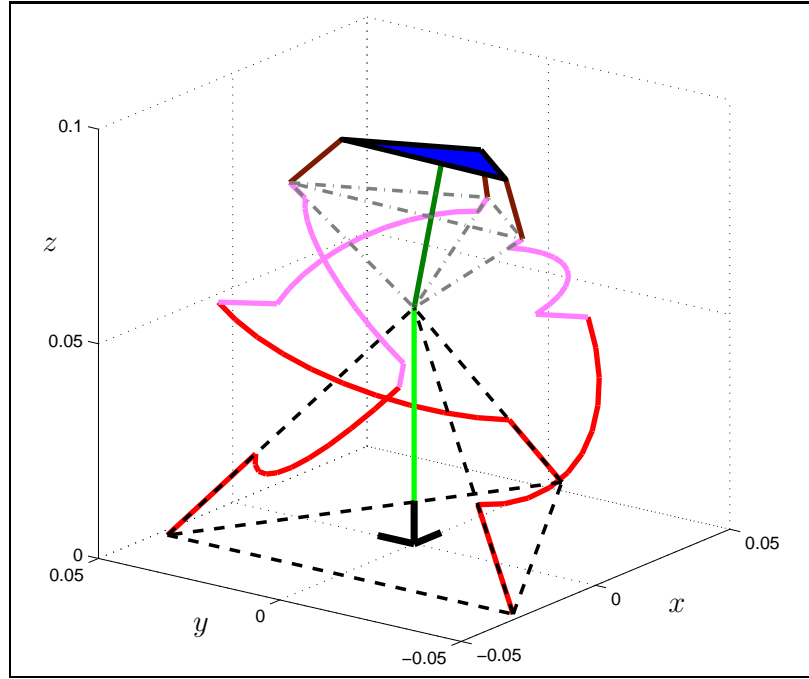


FIG. 2.9 – Allure du mécanisme parallèle sphérique à 4 ddl.

- Pour la base : $R = 0.055$, $\eta_1 = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$.
- Pour les membres proximaux (voir la figure 2.10) : $R_1 = 0.050$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$m_{proximal\ i} = 0.011952875, \quad i = 1,2,3$$

$$[\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}} = 1 \cdot 10^{-2} [3.0941823, 3.0941823, 0]^T, \quad i = 1,2,3$$

$$\mathbf{I}_{proximal\ i} = 1 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.6372267 & 3.1537961 & 0 \\ 3.1537961 & 3.6372267 & 0 \\ 0 & 0 & 7.0752387 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3$$

- Pour les membres distaux (voir la figure 2.10) : $R_2 = 0.035$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $l_{EF} = 0.005$

et

$$\begin{aligned}
 m_{distal\ i} &= 0.0087720126, \quad i = 1,2,3 \\
 [\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}} &= 1 \cdot 10^{-2} [2.1385486, 2.1385486, 0]^T, \quad i = 1,2,3 \\
 \mathbf{I}_{distal\ i} &= 1 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.4643995 & 1.2210803 & 0 \\ 1.2210803 & 1.4643995 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7825987 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3
 \end{aligned}$$

- Pour les tiges de longueur l : $l = 0.015$ et $r_l = 0.003$.
- Pour la plate-forme: $r = 0.023$, $\gamma_1 = 0$, $e_r = 0.005$, $r_1 = 0.0025$ et $h_1 = 0.015$.
- Pour l'actionneur prismatique: $r_2 = 0.005$, $h_2 = 0.020$, $r_3 = 0.0025$ et $h_3 = 0.015$.

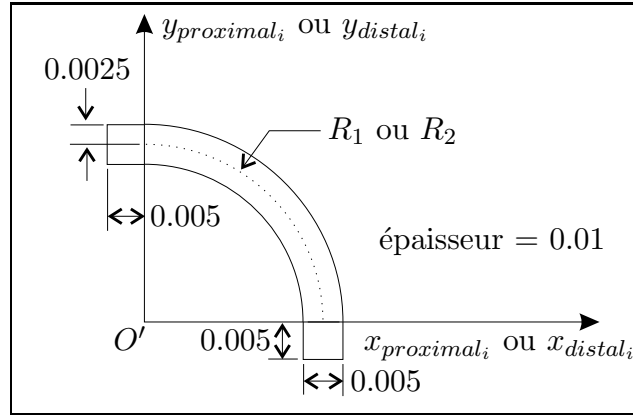


FIG. 2.10 – Modélisation des membres proximaux et distaux.

Or, pour une trajectoire du centre de la plate-forme O' donnée par

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{10\pi}{180} \sin(2t) & \theta &= \frac{35\pi}{180} \sin(3t) \\
 \dot{\phi} &= \frac{10\pi}{180} (2) \cos(2t) & \dot{\theta} &= \frac{35\pi}{180} (3) \cos(3t) \\
 \ddot{\phi} &= -\frac{10\pi}{180} (2^2) \sin(2t) & \ddot{\theta} &= -\frac{35\pi}{180} (3^2) \sin(3t) \\
 \\ \\
 \psi &= \frac{25\pi}{180} \sin(4t) & h &= 0.030 + 0.005 \sin(8t) \\
 \dot{\psi} &= \frac{25\pi}{180} (4) \cos(4t) & \dot{h} &= 0.005 (8) \cos(8t) \\
 \ddot{\psi} &= -\frac{25\pi}{180} (4^2) \sin(4t) & \ddot{h} &= -0.005 (8^2) \sin(8t)
 \end{aligned}$$

on obtient les résultats montrés aux figures 2.11 à 2.16. Il est à noter que la position ($\rho_{prismatique}$), la vitesse ($\dot{\rho}_{prismatique}$) et l'accélération ($\ddot{\rho}_{prismatique}$) du moteur de l'actionneur prismatique ne sont pas tracées au niveau des figures 2.12 à 2.14 puisqu'elles sont directement tirées de la trajectoire prescrite au centre de la plate-forme en définissant h , \dot{h} et \ddot{h} (voir l'équation (2.60)).

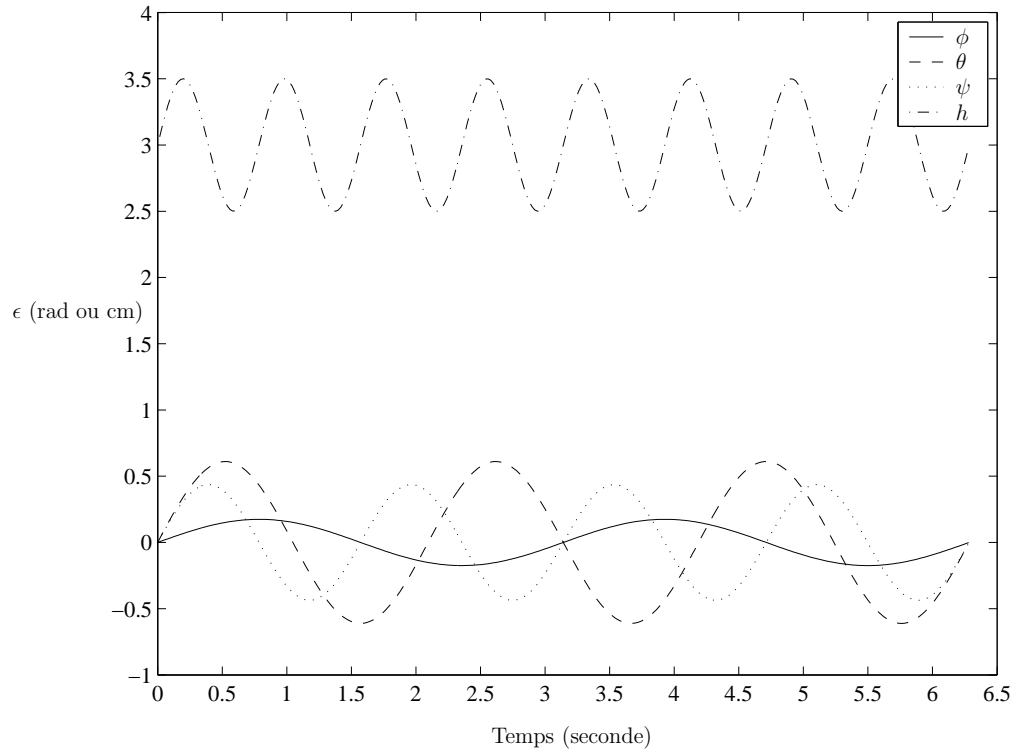


FIG. 2.11 – Trajectoire du centre de la plate-forme.

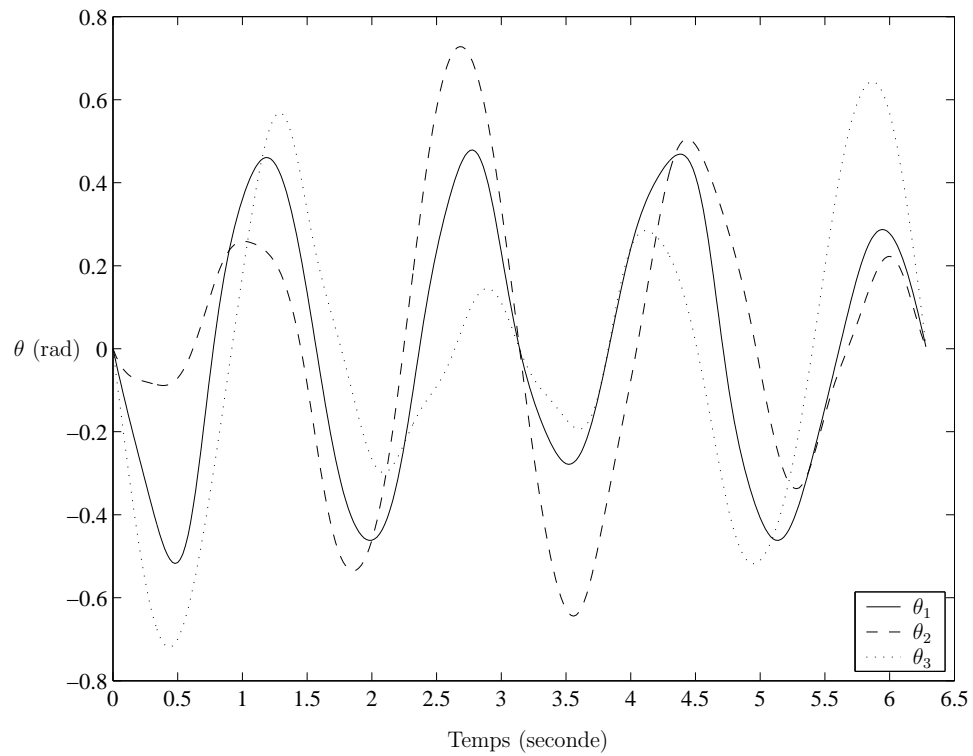


FIG. 2.12 – Évolution des positions articulaires.

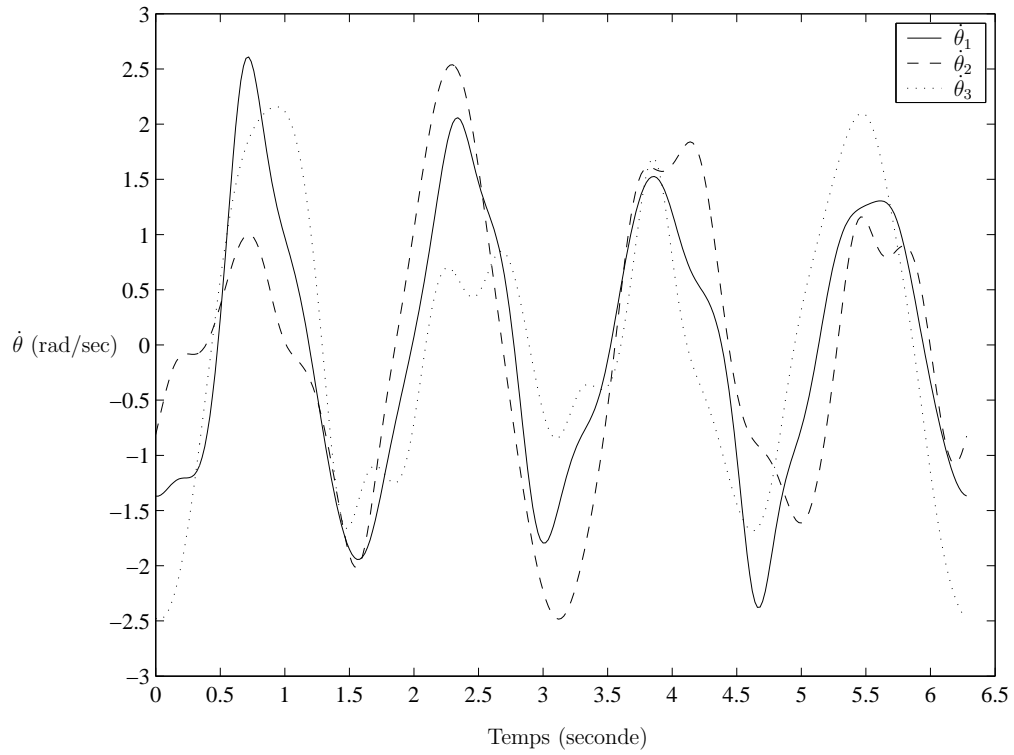


FIG. 2.13 – Évolution des vitesses articulaires.

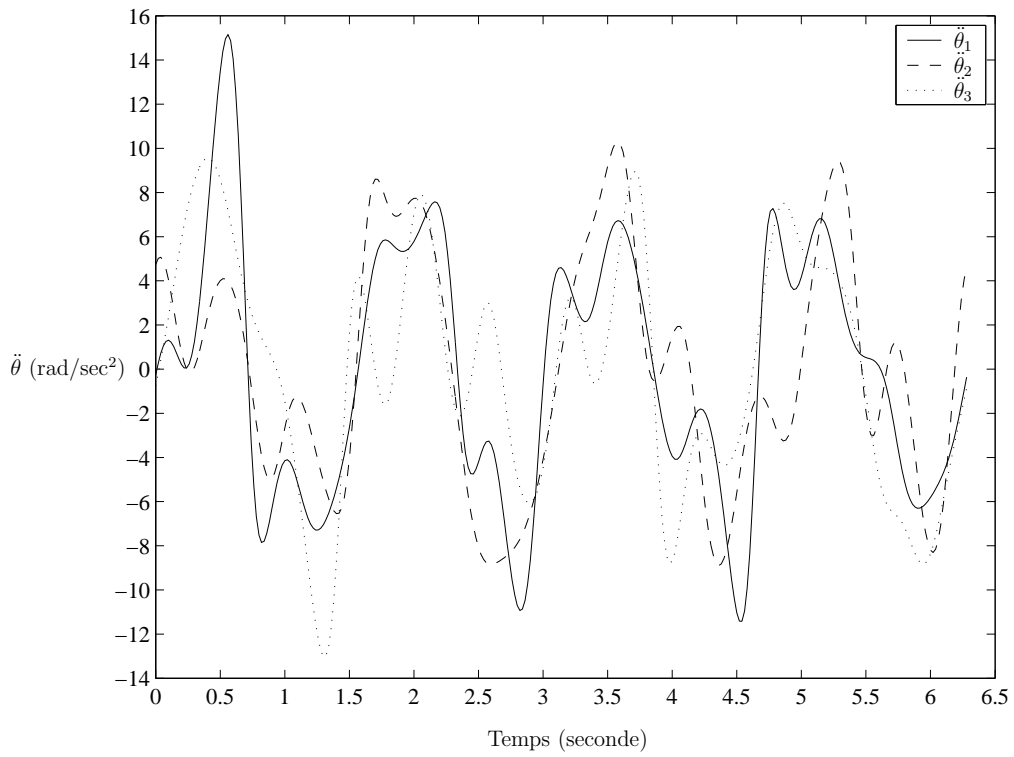


FIG. 2.14 – Évolution des accélérations articulaires.

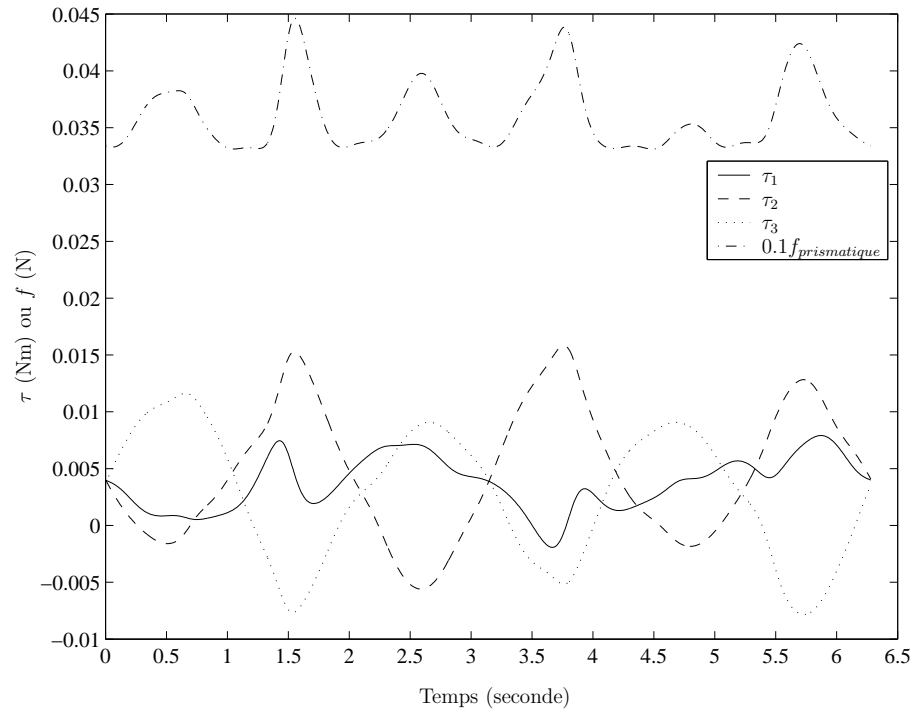


FIG. 2.15 – Couples ou forces requis aux actionneurs.

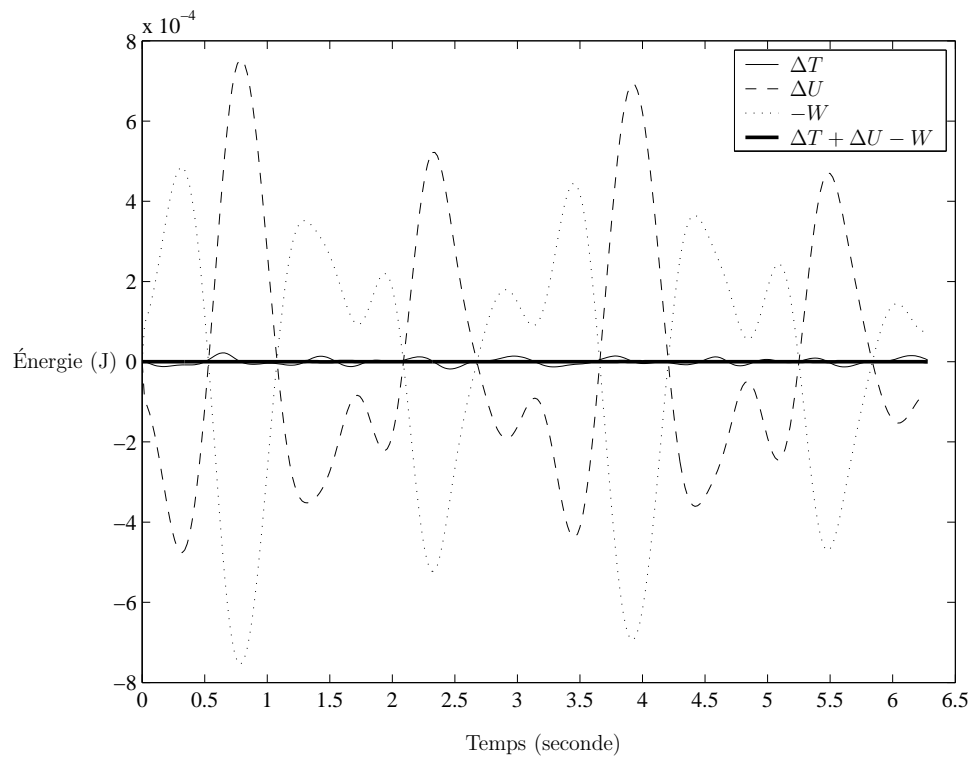
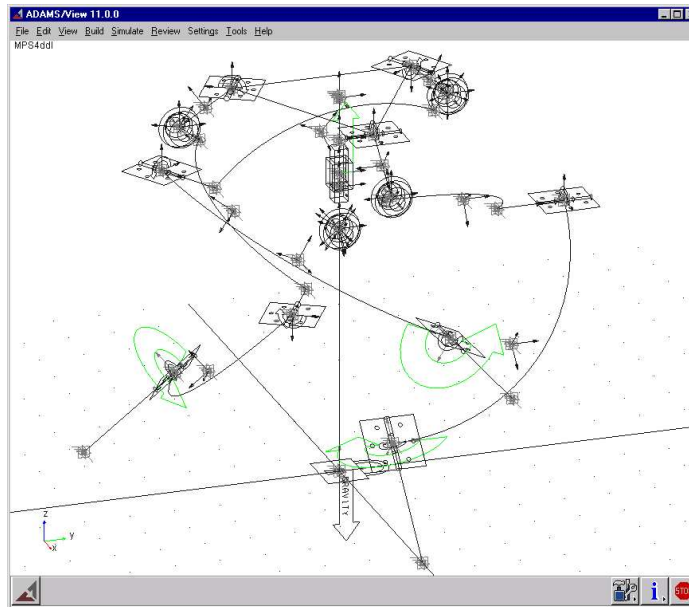


FIG. 2.16 – Bilan d'énergie.

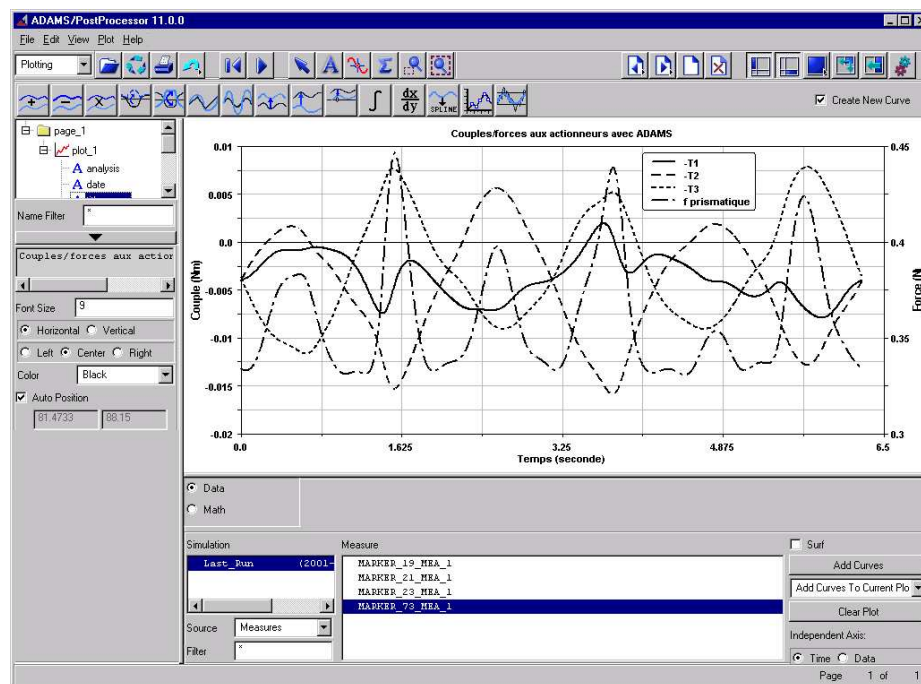
2.7 Simulation dynamique sous ADAMS

Pour vérifier la validité des efforts obtenus par le principe du travail virtuel, on peut modéliser le MPS4DDL sous ADAMS avec les mêmes caractéristiques que l'on retrouve à la section 2.6 et lui soumettre les vitesses aux moteurs présentées à la figure 2.13 et la vitesse à l'actionneur prismatique donnée par \dot{h} en fonction du temps. La figure 2.17(a) illustre l'architecture du mécanisme à l'intérieur du logiciel ADAMS et les résultats obtenus sont présentés à la figure 2.17(b).

En joignant sur un même graphique les couples ou forces trouvés à partir des équations analytiques (soit avec MATLAB) à ceux obtenus avec ADAMS, les figures 2.18 à 2.21 démontrent la concordance parfaite entre les résultats tirés avec le principe du travail virtuel (MATLAB) et les résultats provenant du logiciel ADAMS.



(a) Modélisation du mécanisme parallèle sphérique à 4 degrés de liberté sous ADAMS.



(b) Calcul des couples ou forces aux actionneurs avec ADAMS.

FIG. 2.17 – Exemple de résultats pour une trajectoire donnée avec ADAMS.

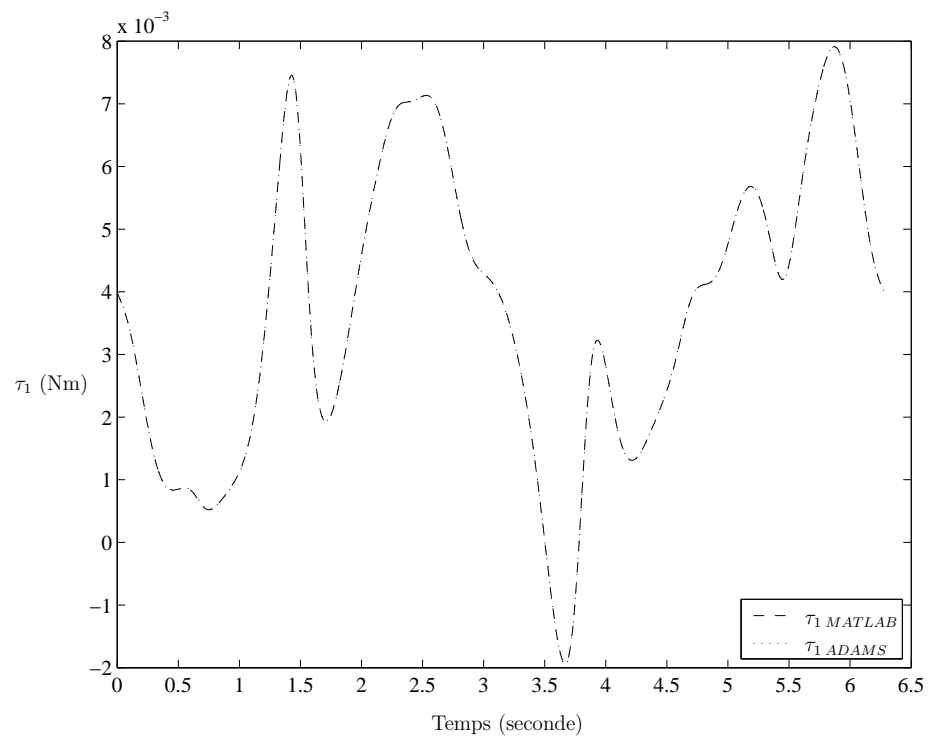


FIG. 2.18 – Couple au moteur 1.

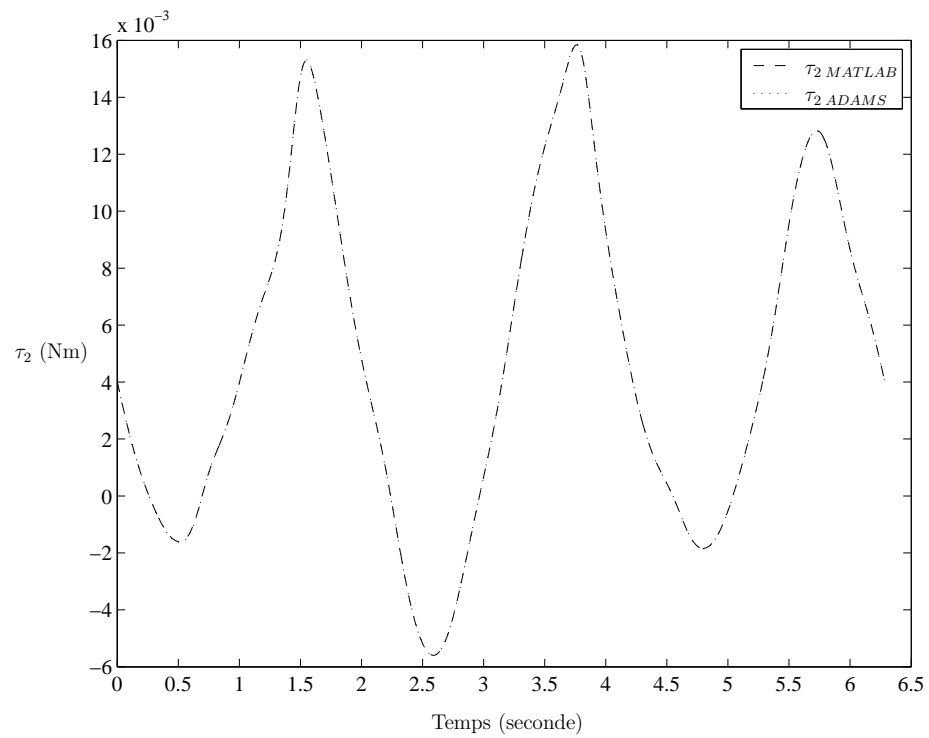


FIG. 2.19 – Couple au moteur 2.

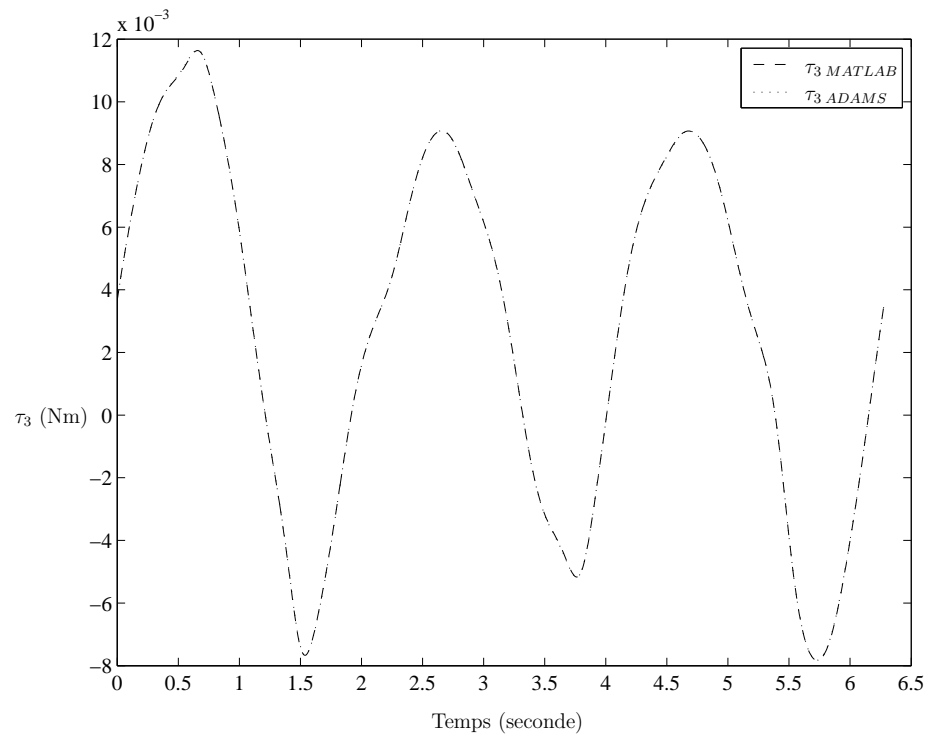


FIG. 2.20 – Couple au moteur 3.

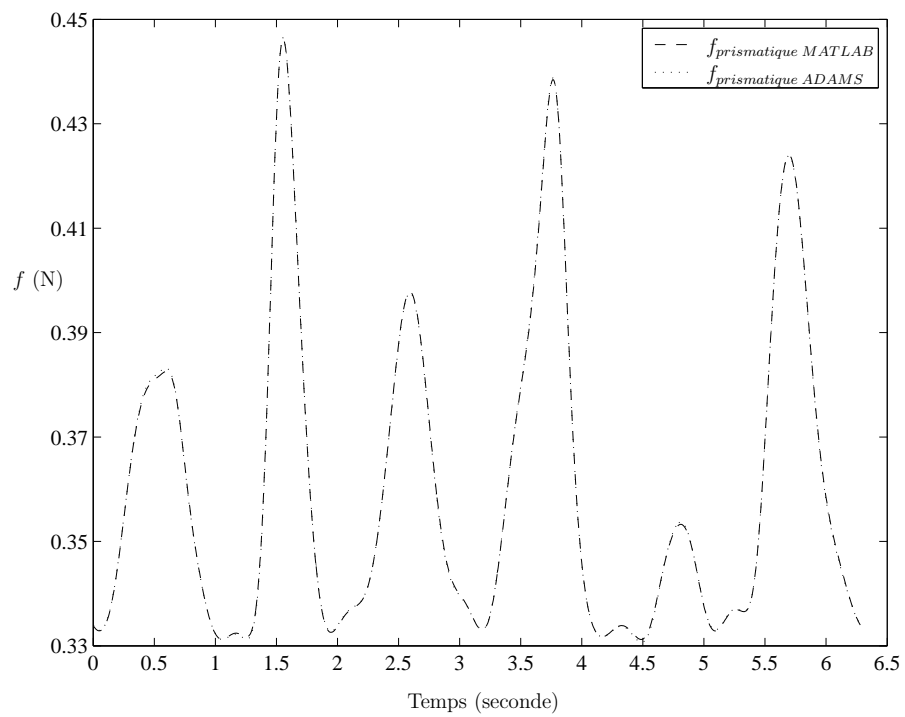


FIG. 2.21 – Force à l'actionneur prismatique.

Chapitre 3

Mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté

3.1 Modèle géométrique

Ce mécanisme, noté MHS4DDL, est de type *hybride* puisqu'il est composé de deux mécanismes connectés en série. Tout d'abord, on retrouve un mécanisme parallèle sphérique à 3 degrés de liberté, également nommé *oeil agile*, qui est tout-à-fait identique au mécanisme traité à l'intérieur du chapitre 2, mais où il faut toutefois considérer seulement les 3 degrés de liberté reliés aux moteurs sur la base (il faut donc éliminer l'effet de l'actionneur prismatique en considérant une hauteur constante pour la plateforme de l'oeil agile). Ainsi, le mécanisme est également de type *sphérique* puisque l'architecture de l'oeil agile implique que les axes de rotation des membres proximaux et distaux, c'est-à-dire les vecteurs \mathbf{u}_i formant la pyramide de la base, les vecteurs \mathbf{w}_i

ainsi que les vecteurs \mathbf{v}_i formant la pyramide mobile, passent par le centre géométrique du mécanisme O' (où l'on retrouve une articulation sphérique passive reliant la plate-forme de l'oeil agile à la base). Donc, le contrôle des 3 moteurs situés sur la base (les angles θ_1 , θ_2 et θ_3) permet d'orienter la plate-forme de l'oeil agile selon 3 angles d'Euler ϕ , θ et ψ .

De plus, au centre de la plate-forme de l'oeil agile, on retrouve un *mécanisme de translation* à 1 degré de liberté qui permet à une seconde plate-forme (possédant la même orientation que la plate-forme de l'oeil agile) d'effectuer un mouvement de translation par rapport à la plate-forme de l'oeil agile. Ainsi, le contrôle du moteur situé sur le mécanisme de translation (l'angle θ_4) permet d'obtenir une hauteur h désirée qui sépare le centre de la seconde plate-forme du centre géométrique O' . Pour stabiliser et contraindre cette translation à un mouvement dirigé selon l'axe z' , 3 mécanismes à 2 barres, nommés *stabilisateurs*, sont disposés symétriquement entre les deux plate-formes. La figure 3.1 illustre l'architecture du MHS4DDL.

Donc, la mise en série du mécanisme de l'oeil agile et du mécanisme de translation permet un découplage complet entre les 3 degrés de liberté en rotation et le degré de liberté en translation. Ainsi, on peut analyser de manière indépendante la cinématique reliée à l'oeil agile et la cinématique du mécanisme de translation. Par la suite, une fois les équations du mouvement connues, il est possible de regrouper ces équations afin de former les matrices jacobiniennes du mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté.

3.1.1 Géométrie de l'oeil agile

L'oeil agile se compose d'une base, d'une plate-forme, de 3 membres proximaux et de 3 membres distaux. Ainsi, toutes les équations présentées à l'intérieur des sections 2.1.1 et 2.1.3 s'appliquent respectivement pour la géométrie de la base et la géométrie des membres proximaux. Toutefois, comme il sera présenté aux deux sections suivantes, certaines modifications doivent être apportées concernant la géométrie de la plate-forme de l'oeil agile et la géométrie des membres distaux. Pour visualiser la géométrie d'une patte de l'oeil agile, on peut se référer à la figure 2.2 en arrêtant la chaîne cinématique au niveau du point F_i (cependant, en regardant l'allure des membres distaux sur la figure 3.1, on doit considérer que le point F_i est situé plus près du centre géométrique

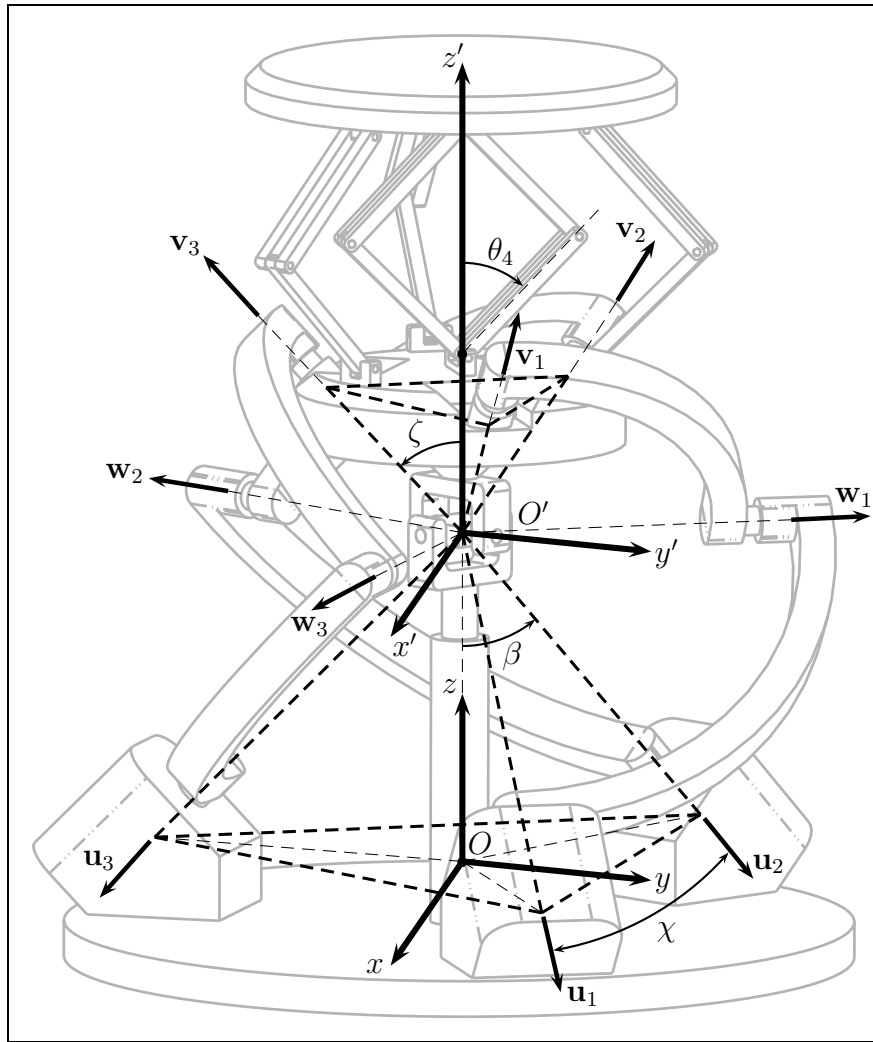


FIG. 3.1 – Architecture du mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté.

O' que le point E_i).

3.1.1.1 Géométrie de la plate-forme de l'oeil agile

Un repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ ayant son origine O' centrée au centre géométrique du mécanisme C et dont l'axe z' suit le vecteur $O'P_{OA}$ (P_{OA} étant le centre de la plate-forme de l'oeil agile) permet de définir l'orientation de la plate-forme. Ainsi, l'orientation est donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} de l'équation (1.5) où les angles d'Euler autour de x , y et z sont respectivement ϕ , θ et ψ . Ainsi, la position du centre de la plate-forme

de l'oeil agile est

$$\mathbf{p}_{OA} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}[\mathbf{p}_{OA}]_{\mathcal{R}'} \quad (3.1)$$

avec cette position, exprimée dans le repère mobile, qui est

$$[\mathbf{p}_{OA}]_{\mathcal{R}'} = [0, 0, h_{OA}]^T \quad (3.2)$$

Il est à noter que la hauteur du centre de la plate-forme h_{OA} sera donnée à l'équation (3.12) de la section 3.1.1.2. Or, en projetant le repère \mathcal{R}' dans le plan de la plate-forme (qui est à une hauteur $z' = h_{OA}$), on obtient la géométrie présentée à la figure 3.2 où les points F_i , $i = 1, 2, 3$, sont disposés de manière symétrique sur un cercle de rayon r_{OA} .

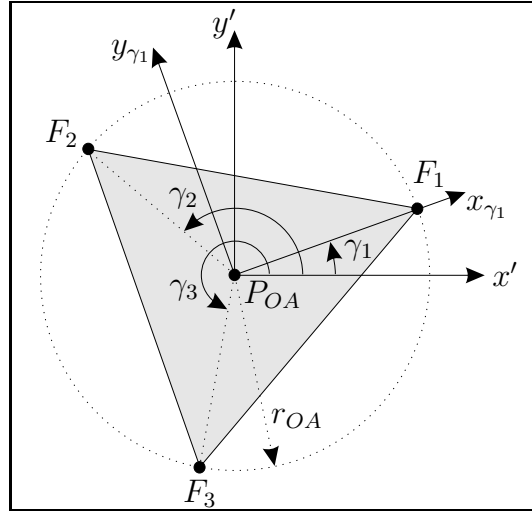


FIG. 3.2 – Plate-forme de l'oeil agile.

Donc, en déterminant γ_1 , on a que

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{2\pi}{3} \quad (3.3)$$

$$\gamma_3 = \gamma_1 + \frac{4\pi}{3} \quad (3.4)$$

et les points F_i sont localisés par

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{c} + \mathbf{Q}[\mathbf{f}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

avec

$$[\mathbf{f}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i}[\mathbf{f}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Q}_{\gamma_i} = \mathbf{Q}_{z'}|_{\gamma_i} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_i & -\sin \gamma_i & 0 \\ \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.7)$$

$$[\mathbf{f}_i]_{\mathcal{R}_{\gamma_i}} = [r_{OA}, 0, h_{OA}]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.8)$$

3.1.1.2 Géométrie des membres distaux

La figure 3.3 montre l'orientation des vecteurs \mathbf{v}_i qui est donnée par l'angle ζ . Contrairement au mécanisme présenté au chapitre 2 (où la hauteur de la plate-forme peut varier pour ainsi modifier l'angle ζ), l'angle ζ ne varie pas en fonction de la trajectoire établie.

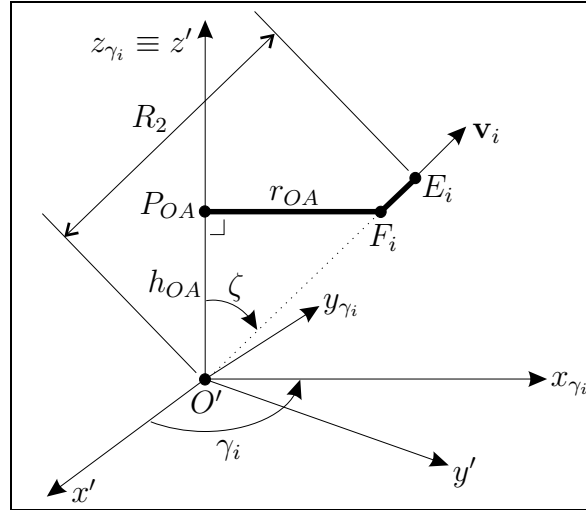


FIG. 3.3 – Membre distal.

Or, bien que la valeur de l'angle ζ peut être déterminée de manière tout à fait libre, en fixant adéquatement cet angle avec les paramètres β , α_1 et α_2 , des études antérieures en [4] ont démontré qu'il est possible d'obtenir des configurations *isotropes*, c'est-à-dire des configurations pour lesquelles la qualité de la transformation linéaire entre le vecteur des vitesses aux moteurs et le vecteur des vitesses angulaires à la plate-forme est parfaite, ce qui permet d'obtenir une précision de positionnement optimale. Donc, parmi les différentes combinaisons proposées dans [4], en voici une qui offre de bonnes performances

$$\chi = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \quad (3.9)$$

$$\beta = \operatorname{asin}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\chi}{2}\right) \quad (3.10)$$

$$\zeta = \beta \quad (3.11)$$

où l'angle χ est compris entre chacun des côtés de la pyramide de la base formée par les vecteurs \mathbf{u}_i (voir la figure 3.1). L'équation (3.10) montre la relation géométrique directe entre l'angle β et χ , ce qui permet en fixant l'angle χ à 90° d'avoir les vecteurs \mathbf{u}_i orthogonaux entre eux. De plus, en raison de l'équation (3.11), il y a également orthogonalité entre les vecteurs \mathbf{v}_i .

Ainsi, en connaissant l'angle ζ et en fixant le rayon de la plate-forme de l'oeil agile, noté r_{OA} , on obtient par géométrie que

$$h_{OA} = \frac{r_{OA}}{\tan\zeta} \quad (3.12)$$

Or, le vecteur unitaire \mathbf{v}_i allant dans la direction de O' à F_i (les points O' , F_i et E_i étant sur la même ligne) est

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{Q}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.13)$$

où

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_\zeta [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.14)$$

avec

$$\mathbf{Q}_\zeta = \mathbf{Q}_{y_{\gamma_i}}|_\zeta = \begin{bmatrix} \cos\zeta & 0 & \sin\zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\zeta & 0 & \cos\zeta \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.15)$$

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}_\zeta} = [0,0,1]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.16)$$

et les points E_i sont localisés par

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{c} + R_2 \mathbf{v}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (3.17)$$

3.1.2 Géométrie des stabilisateurs

Entre la plate-forme de l'oeil agile et la seconde plate-forme, on retrouve 3 stabilisateurs où chacun est formé de 2 membrures (la première membrure de longueur

l_{λ_1} reliant les points S_{1i} et S_{2i} , la seconde membrure de longueur l_{λ_2} allant des points S_{2i} à S_{3i}) ayant des liaisons rotoïdes passives à leurs extrémités. La figure 3.4 illustre l'architecture des stabilisateurs (pour faciliter la visualisation, 3 plans ombragés sont dessinés pour indiquer l'orientation des plans $x'z'$, $x_{\gamma_i}z_{\gamma_i}$ et $x_{\varsigma_i}z_{\varsigma_i}$ en considérant que les axes z' , z_{γ_i} et z_{ς_i} sont orientés dans la même direction et le même sens). Ainsi, chaque stabilisateur i est un mécanisme plan à 2 barres évoluant dans le plan $x_{\varsigma_i}z_{\varsigma_i}$. Disposés de manière symétrique, ces stabilisateurs contraignent la plate-forme du mécanisme à un mouvement de translation dirigé selon l'axe z' du repère mobile \mathcal{R}' . Il est à noter que la présence de seulement 2 stabilisateurs est nécessaire pour contraindre le mouvement de la plate-forme selon l'axe z' , et que le troisième stabilisateur est uniquement présent pour assurer une meilleure stabilité.

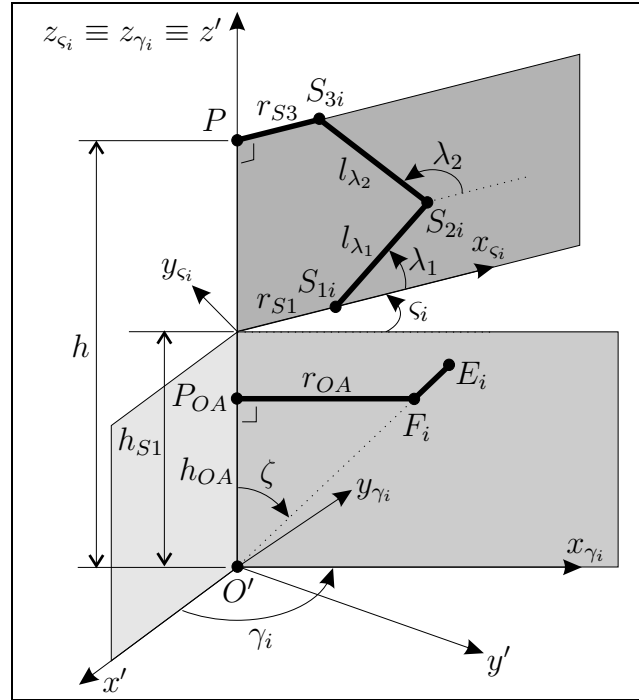


FIG. 3.4 – Géométrie des stabilisateurs.

Ainsi, en orientant le premier stabilisateur selon un angle ς_1 par rapport à l'axe x_{γ_1} , on obtient par symétrie que

$$\varsigma_2 = \varsigma_1 + \frac{2\pi}{3} \quad (3.18)$$

$$\varsigma_3 = \varsigma_1 + \frac{4\pi}{3} \quad (3.19)$$

et la matrice de rotation du repère $\mathcal{R}_{\varsigma_i}$ par rapport à \mathcal{R}_{γ_i} est

$$\mathbf{Q}_{\varsigma_i} = \mathbf{Q}_{z\gamma_i} \Big|_{\varsigma_i} = \begin{bmatrix} \cos \varsigma_i & -\sin \varsigma_i & 0 \\ \sin \varsigma_i & \cos \varsigma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.20)$$

En fixant les distances r_{S1} et h_{S1} de manière à positionner les points S_{1i} dans le repère $\mathcal{R}_{\varsigma_i}$ par

$$[\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [r_{S1}, 0, h_{S1}]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.21)$$

et sachant que les points S_{3i} sont situés à une distance r_{S3} et une hauteur h (h est variable selon la trajectoire choisie), ce qui donne

$$[\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [r_{S3}, 0, h]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.22)$$

alors chaque stabilisateur devient tout simplement un mécanisme passif à 2 degrés de liberté où les points S_{1i} et S_{3i} sont connus. Ces points sont localisés dans le repère fixe par

$$\mathbf{s}_{1i} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{s}_{3i} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.24)$$

Ainsi, pour déterminer la position de chaque point S_{2i} , on doit résoudre le problème géométrique inverse relié à un mécanisme à 2 degrés de liberté en déterminant l'angle λ_1 qui est identique pour $i = 1, 2$ et 3 (puisque les 3 stabilisateurs ont les mêmes longueurs l_{λ_1} et l_{λ_2}). En adoptant la procédure présentée à la section 1.2 du chapitre 1, on peut représenter sous forme vectorielle dans le repère $\mathcal{R}_{\varsigma_i}$ que

$$[\mathbf{v}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{u}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.25)$$

avec

$$[\mathbf{u}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = l_{\lambda_1}[\cos \lambda_1, 0, \sin \lambda_1]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.26)$$

Ainsi, les vecteurs $[\mathbf{u}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}$ et $[\mathbf{v}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}$ vont respectivement des points S_{1i} à S_{2i} et des points S_{2i} à S_{3i} . En prenant le carré de la norme de $[\mathbf{v}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}$, on obtient

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}^T [\mathbf{v}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = l_{\lambda_2}^2 &= ([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{u}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}})^T ([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - \\ &\quad [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{u}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}), \quad i = 1,2,3 \\ l_{\lambda_2}^2 &= ([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}})^T ([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}) - \\ &\quad 2([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}})^T [\mathbf{u}_\lambda]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + l_{\lambda_1}^2, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

De plus, en considérant les vecteurs unitaires suivants

$$\mathbf{e}_{x_{\varsigma_i}} = [1,0,0]^T \quad (3.28)$$

$$\mathbf{e}_{z_{\varsigma_i}} = [0,0,1]^T \quad (3.29)$$

l'équation (3.27) devient sous la forme

$$K_{1i} \cos \lambda_1 + K_{2i} \sin \lambda_1 + K_{3i} = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (3.30)$$

avec

$$K_{1i} = 2([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}})^T l_{\lambda_1} \mathbf{e}_{x_{\varsigma_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.31)$$

$$K_{2i} = 2([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}})^T l_{\lambda_1} \mathbf{e}_{z_{\varsigma_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.32)$$

$$K_{3i} = l_{\lambda_2}^2 - l_{\lambda_1}^2 - ([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}})^T ([\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.33)$$

En utilisant les identités

$$\cos \lambda_1 = \frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.34)$$

$$\sin \lambda_1 = \frac{2t_i}{1 + t_i^2}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.35)$$

avec

$$t_i = \tan\left(\frac{\lambda_1}{2}\right), \quad i = 1,2,3 \quad (3.36)$$

on trouve la relation

$$[-K_{1i} + K_{3i}]t_i^2 + [2K_{2i}]t_i + [K_{1i} + K_{3i}] = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (3.37)$$

ce qui implique que

$$t_i = \frac{-2K_{2i} \pm \sqrt{(2K_{2i})^2 - 4(-K_{1i} + K_{3i})(K_{1i} + K_{3i})}}{2(-K_{1i} + K_{3i})}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.38)$$

Ainsi, l'angle recherché λ_1 est

$$\lambda_1 = 2\text{atan}(t_i), \quad i = 1,2,3 \quad (3.39)$$

Or, pour éviter les interférences mécaniques, on choisit le signe devant le radical de l'équation (3.38) comme étant positif pour $i = 1, 2, 3$. Une fois que l'angle λ_1 est connu, celui-ci permet de localiser les points S_{2i} dans le repère $\mathcal{R}_{\varsigma_i}$ avec

$$[\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + l_{\lambda_1} [\cos \lambda_1, 0, \sin \lambda_1]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.40)$$

et on obtient dans le repère fixe que

$$\mathbf{s}_{2i} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.41)$$

Pour évaluer l'angle λ_2 , on a que

$$\lambda_2 = \text{atan2} \left[(s_{3i_{z_{\zeta_i}}} - s_{2i_{z_{\zeta_i}}}), (s_{3i_{x_{\zeta_i}}} - s_{2i_{x_{\zeta_i}}}) \right], \quad i = 1,2,3 \quad (3.42)$$

3.1.3 Géométrie du mécanisme de translation

Avec les stabilisateurs qui contraignent la plate-forme du mécanisme à bouger uniquement le long de l'axe z' , le mécanisme de translation à 1 degré de liberté, illustré à la figure 3.5(a), consiste en deux membrures de longueur l_2 et l_3 allant respectivement des points P_1 à P_2 et des points P_2 à P_4 où l'on retrouve une articulation rotoïde motorisée en P_1 et des articulations rotoïdes passives en P_2 et P_4 . Pour simplifier la modélisation, on va considérer que le point P_4 correspond au centre de la plate-forme, soit un point également noté P sur la figure 3.4 (donc, on a que $P_4 \equiv P$). Puisque les points O' , P_1 et P_4 sont toujours positionnés sur l'axe z' , il est possible d'évaluer l'angle θ_4 , contrôlé par le moteur au point P_1 , qui est formé entre l'axe z' (ou l'axe z_ξ) et la membrure P_1P_2 de manière à obtenir la hauteur h de la plate-forme désirée par rapport au centre géométrique O' .

D'autre part, il est à noter que le point P_1 est situé à une distance l_1 du centre géométrique O' et que, normalement, cette longueur l_1 est un paramètre fixé comme étant supérieur à la hauteur du centre de la plate-forme de l'oeil agile h_{OA} (voir l'équation (3.12)). De plus, afin d'augmenter la rigidité du mécanisme de translation, il est préférable de fermer la chaîne ouverte $P_1P_2P_4$ en lui ajoutant deux autres membrures, ayant des articulations rotoïdes passives à leurs extrémités, de longueur l_2 et l_3 allant respectivement des points P_1 à P_3 et P_3 à P_4 (ce qui permet d'avoir une chaîne fermée symétrique par rapport à l'axe z_ξ).

De plus, ce mécanisme de translation est orienté selon un angle ξ mesuré par rapport à l'axe x_{ζ_1} , c'est-à-dire l'axe qui sert à indiquer le plan de mouvement du premier stabilisateur. De cette façon, il est facile d'orienter successivement les mécanismes qui composent le MHS4DDL et voici une brève récapitulation pour orienter tous ces différents repères : le repère mobile étant orienté par rapport au repère fixe, on oriente

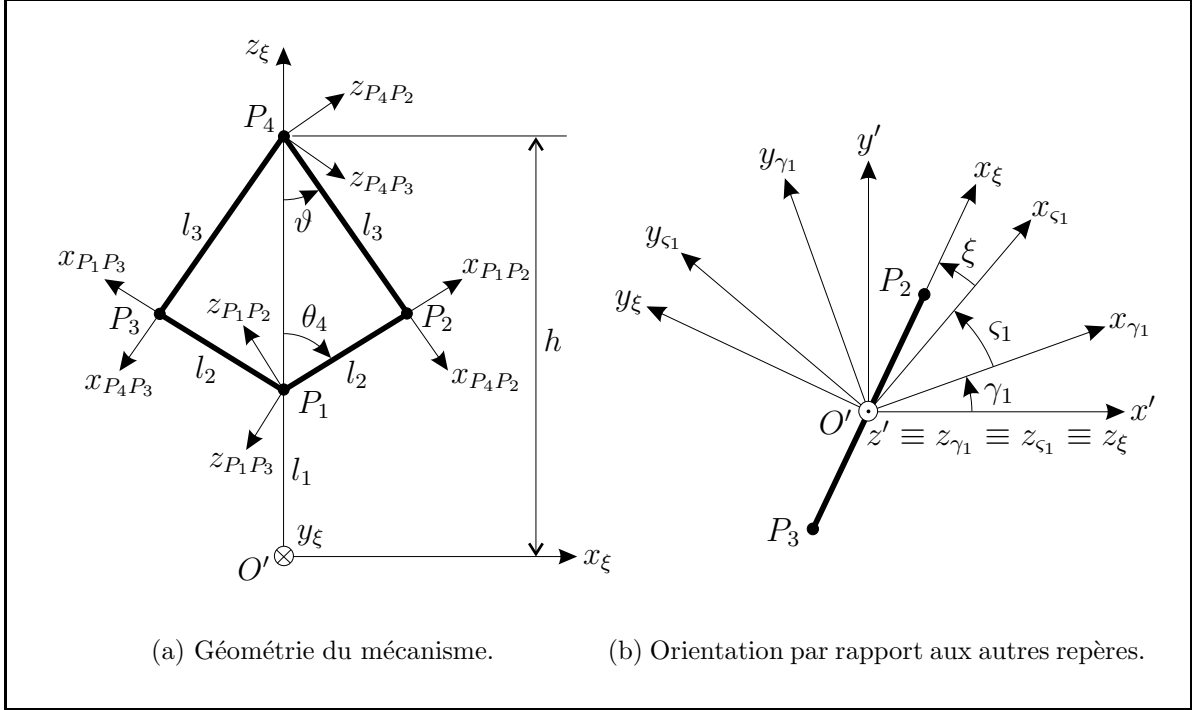


FIG. 3.5 – Mécanisme de translation à 1 ddl.

d'abord le point F_1 de la plate-forme de l'oeil agile selon un angle γ_1 par rapport au repère mobile (les points F_2 et F_3 sont orientés par symétrie), puis on oriente le premier stabilisateur de l'oeil agile selon un angle ς_1 par rapport à la plate-forme de l'oeil agile (les deuxième et troisième stabilisateurs étant orientés par symétrie), et on oriente finalement le mécanisme de translation selon un angle ξ par rapport au premier stabilisateur.

Donc, en tournant autour de l'axe z_{ς_1} d'un angle ξ , la matrice de rotation du repère \mathcal{R}_ξ par rapport au repère $\mathcal{R}_{\varsigma_1}$ est

$$\mathbf{Q}_\xi = \mathbf{Q}_{z_{\varsigma_1}} \Big|_\xi = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

et on détermine la position des points P_1 à P_4 du mécanisme de translation dans le repère \mathcal{R}_ξ par

$$[\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_\xi} = [0, 0, l_1]^T \quad (3.44)$$

$$[\mathbf{p}_2]_{\mathcal{R}_\xi} = [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_\xi} + l_2 [\sin \theta_4, 0, \cos \theta_4]^T \quad (3.45)$$

$$[\mathbf{p}_3]_{\mathcal{R}_\xi} = [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_\xi} + l_2 [-\sin \theta_4, 0, \cos \theta_4]^T \quad (3.46)$$

$$[\mathbf{p}_4]_{\mathcal{R}_\xi} = [0,0,h]^T \quad (3.47)$$

Ainsi, dans le repère fixe, on localise ces 4 points avec la relation suivante

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_\xi [\mathbf{p}_i]_{\mathcal{R}_\xi}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.48)$$

3.1.4 Géométrie de la plate-forme du mécanisme hybride

À la section 3.1.1.1, en définissant l'orientation de la plate-forme de l'oeil agile avec l'aide de 3 angles d'Euler, on se trouvait à définir par la même occasion l'orientation de la plate-forme du MHS4DDL puisque celle-ci ne peut qu'effectuer un mouvement de translation dans une direction perpendiculaire au plan de la plate-forme de l'oeil agile, c'est-à-dire selon l'axe z' . Puisque la distance séparant le centre de la plate-forme du mécanisme hybride P et le centre géométrique O' est notée h , alors on a que

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}[\mathbf{p}]_{\mathcal{R}'} \quad (3.49)$$

avec la position du centre de la plate-forme dans le repère mobile qui est

$$[\mathbf{p}]_{\mathcal{R}'} = [0,0,h]^T \quad (3.50)$$

De cette façon, on définit l'orientation et la position de la plate-forme du mécanisme hybride en spécifiant le vecteur suivant

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\phi, \theta, \psi, h]^T \quad (3.51)$$

3.2 Problème géométrique inverse

3.2.1 PGI du mécanisme de l'oeil agile

En imposant une orientation à la plate-forme de l'oeil agile, il est possible de déterminer la position angulaire des moteurs θ_1 , θ_2 et θ_3 . Pour ce faire, le contenu de la section 2.2 s'applique entièrement pour la résolution du PGI du mécanisme de l'oeil agile. Il est à noter qu'avec 2 solutions pour chaque angle θ_i ($i = 1,2,3$), l'oeil agile peut adopter 8 configurations différentes pour une même orientation de la plate-forme.

3.2.2 PGI du mécanisme de translation

En regardant la figure 3.5(a), on peut établir par géométrie que

$$h = l_1 + l_2 \cos \theta_4 + l_3 \cos \vartheta \quad (3.52)$$

Or, puisqu'on a que

$$l_3^2 = (l_3 \cos \vartheta)^2 + (l_2 \sin \theta_4)^2 \quad (3.53)$$

$$l_3 \cos \vartheta = \pm \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4} \quad (3.54)$$

alors, en prenant le signe positif devant le radical de l'équation (3.54), la substitution de cette équation dans l'équation (3.52) donne la relation suivante

$$h = l_1 + l_2 \cos \theta_4 + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4} \quad (3.55)$$

où la hauteur h est uniquement exprimée en fonction de la variable angulaire θ_4 et des distances l_1 , l_2 et l_3 . En manipulant cette dernière équation, on obtient que

$$\begin{aligned} l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4 &= (h - l_1 - l_2 \cos \theta_4)^2 \\ l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4 &= h^2 + l_1^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_4 - 2hl_1 - 2hl_2 \cos \theta_4 + 2l_1l_2 \cos \theta_4 \\ 0 &= h^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - 2hl_1 + (2l_1l_2 - 2hl_2) \cos \theta_4 \\ \cos \theta_4 &= \frac{-h^2 - l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + 2hl_1}{2l_2(l_1 - h)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ce qui implique que la position angulaire du moteur est donnée par

$$\theta_4 = \arccos \left(\frac{-h^2 - l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + 2hl_1}{2l_2(l_1 - h)} \right) \quad (3.57)$$

Pour évaluer la valeur de l'angle ϑ , il s'agit d'utiliser l'équation (3.54), ce qui donne

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4}}{l_3} \right) \quad (3.58)$$

3.3 Équations de vitesse

3.3.1 Équations de vitesse du mécanisme de l'oeil agile

La principale différence entre les équations de vitesse du mécanisme de l'oeil agile et celles développées à la section 2.3 du chapitre 2 est que, pour l'oeil agile, les vecteurs

$[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}$ ne varient pas en fonction du temps puisque l'angle ζ de la pyramide mobile reste constant (revoir l'équation (3.11) et les figures 3.1 et 3.3). Ainsi, il faut considérer que

$$\dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = 0 \quad (3.59)$$

$$[\dot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'} = [\ddot{\mathbf{v}}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{0}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.60)$$

Donc, en se référant à ce qui a été développé au chapitre 2 et en dérivant par rapport au temps l'équation (2.37), on obtient

$$\dot{\mathbf{w}}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (3.61)$$

avec

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.62)$$

où

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} = -\dot{\theta}_i \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.63)$$

$$\mathbf{E}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

et

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{Q}} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.65)$$

où $\dot{\mathbf{Q}}$ est exprimée à l'équation (1.56). Donc, en revenant à l'équation (3.61), on a que

$$\begin{aligned} (-\dot{\theta}_i \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}) \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \cdot (\dot{\mathbf{Q}} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}) &= 0, \quad i = 1,2,3 \\ -\dot{\theta}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} + \mathbf{w}_i^T \dot{\mathbf{Q}} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} &= 0, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (3.66)$$

et puisque

$$\mathbf{w}_i^T \dot{\mathbf{Q}} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{w}_i^T [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'})], \quad i = 1,2,3 \quad (3.67)$$

$$= [(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_i]^T \boldsymbol{\omega}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.68)$$

alors on obtient la relation suivante qui lie les vitesses angulaires de la plate-forme de l'oeil agile aux vitesses angulaires des moteurs

$$[(\mathbf{Q} [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_i]^T \boldsymbol{\omega} = [\mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}] \dot{\theta}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (3.69)$$

3.3.2 Équations de vitesse du mécanisme de translation

À partir de l'équation (3.55), on peut dire que

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -l_2 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 - \frac{l_2^2 \sin \theta_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4}} \\ &= \left[-l_2 \sin \theta_4 - \frac{l_2^2 \sin \theta_4 \cos \theta_4}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4}} \right] \dot{\theta}_4 = k \dot{\theta}_4 \end{aligned} \quad (3.70)$$

ce qui met en relation la vitesse de la hauteur désirée \dot{h} en fonction de la vitesse angulaire du moteur $\dot{\theta}_4$ et d'une variable k qui dépend de la valeur de l'angle θ_4 . Une fois la vitesse angulaire $\dot{\theta}_4$ connue, on peut dériver l'équation (3.48) afin d'évaluer les vitesses des différents points du mécanisme de translation avec

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_{\xi} [\mathbf{p}_i]_{\mathcal{R}_{\xi}} + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_{\xi} [\dot{\mathbf{p}}_i]_{\mathcal{R}_{\xi}}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.71)$$

où, en dérivant les équations (3.44) à (3.47), on a que

$$[\dot{\mathbf{p}}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}} = [0, 0, 0]^T \quad (3.72)$$

$$[\dot{\mathbf{p}}_2]_{\mathcal{R}_{\xi}} = \dot{\theta}_4 \mathbf{E}_{\xi P_2} ([\mathbf{p}_2]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}) \quad (3.73)$$

$$[\dot{\mathbf{p}}_3]_{\mathcal{R}_{\xi}} = \dot{\theta}_4 \mathbf{E}_{\xi P_3} ([\mathbf{p}_3]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}) \quad (3.74)$$

$$[\dot{\mathbf{p}}_4]_{\mathcal{R}_{\xi}} = [0, 0, \dot{h}]^T \quad (3.75)$$

avec

$$\mathbf{E}_{\xi P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{E}_{\xi P_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Pour déterminer la vitesse angulaire $\dot{\vartheta}$, il suffit de dériver l'équation (3.52), ce qui implique que

$$\dot{\vartheta} = \frac{-\dot{h} - l_2 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4}{l_3 \sin \vartheta} \quad (3.78)$$

3.3.3 Combinaison des équations de vitesse

En combinant les équations (3.69) et (3.70) sous une forme matricielle où $\mathbf{t} = [\boldsymbol{\omega}^T, \dot{h}]^T$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4]^T$, on trouve que

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.79)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [(\mathbf{Q}[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_1)]^T & 0 \\ [(\mathbf{Q}[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_2)]^T & 0 \\ [(\mathbf{Q}[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{w}_3)]^T & 0 \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{Q}_{\eta_1} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_1} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2^T \mathbf{Q}_{\eta_2} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_2} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_3^T \mathbf{Q}_{\eta_3} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_3} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_3]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Or, en considérant la relation entre les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}$ et les vitesses des angles d'Euler, on peut écrire que

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.82)$$

et l'équation (3.79) devient sous la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.83)$$

Cette dernière équation met en relation les vitesses des 4 degrés de liberté du mécanisme hybride sphérique ($\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et \dot{h}) avec les vitesses qui sont requises aux actionneurs pour effectuer la trajectoire prescrite ($\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_4$). On remarque le découplage entre, d'une part, les 3 premiers degrés de liberté et, d'autre part, le degré de liberté en translation. Afin de s'assurer que les expressions des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{S} sont exactes, on peut se servir de la procédure indiquée à la section 1.3.1.

3.4 Équations d'accélération

En dérivant l'équation (3.83), on trouve que les vitesses des actionneurs sont données par

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^{-1}[(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{S} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{S}})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{A}\mathbf{S}\ddot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\mathbf{B}}\dot{\boldsymbol{\theta}}] \quad (3.84)$$

avec

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \left[\left\{ (\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_1 \right\} + \{ (\mathbf{Q}[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{w}}_1 \} \right]^T & 0 \\ \left[\left\{ (\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_2 \right\} + \{ (\mathbf{Q}[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{w}}_2 \} \right]^T & 0 \\ \left[\left\{ (\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}'}) \times \mathbf{w}_3 \right\} + \{ (\mathbf{Q}[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{R}'}) \times \dot{\mathbf{w}}_3 \} \right]^T & 0 \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \dot{B}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{B}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{B}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{k} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_{1(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 3)} & 0_{(1 \times 1)} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

où

$$\dot{B}_{ii} = \dot{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}} + \mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \mathbf{E}_{\theta} \dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.88)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \text{voir l'équation (1.78)} \quad (3.89)$$

$$\dot{k} = -l_2 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 - \frac{l_2^2 \dot{\theta}_4 (\cos^2 \theta_4 - \sin^2 \theta_4) \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4} + \frac{l_2^4 \sin^2 \theta_4 \cos^2 \theta_4 \dot{\theta}_4}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4}}}{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \theta_4} \quad (3.90)$$

Pour déterminer l'accélération des vecteurs \mathbf{u}_i (des vecteurs constants), \mathbf{v}_i et \mathbf{w}_i , on a que

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.91)$$

$$\ddot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}'}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.92)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \ddot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.93)$$

où $\ddot{\mathbf{Q}}$ est indiquée à l'équation (1.87) et

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} = -\ddot{\theta}_i \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i} + \dot{\theta}_i^2 \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{E}_{\theta} \mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.94)$$

Au niveau du mécanisme de translation, on détermine l'accélération des points en dérivant les équations (3.71) à (3.75), ce qui implique que

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_1}\mathbf{Q}_{\varsigma_1}\mathbf{Q}_{\xi}[\mathbf{p}_i]_{\mathcal{R}_{\xi}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_1}\mathbf{Q}_{\varsigma_1}\mathbf{Q}_{\xi}[\dot{\mathbf{p}}_i]_{\mathcal{R}_{\xi}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_1}\mathbf{Q}_{\varsigma_1}\mathbf{Q}_{\xi}[\ddot{\mathbf{p}}_i]_{\mathcal{R}_{\xi}}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.95)$$

avec

$$[\ddot{\mathbf{p}}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}} = [0, 0, 0]^T \quad (3.96)$$

$$[\ddot{\mathbf{p}}_2]_{\mathcal{R}_{\xi}} = \ddot{\theta}_4 \mathbf{E}_{\xi P_2}([\mathbf{p}_2]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}) - \dot{\theta}_4^2([\mathbf{p}_2]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}) \quad (3.97)$$

$$[\ddot{\mathbf{p}}_3]_{\mathcal{R}_{\xi}} = \ddot{\theta}_4 \mathbf{E}_{\xi P_3}([\mathbf{p}_3]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}) - \dot{\theta}_4^2([\mathbf{p}_3]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}) \quad (3.98)$$

$$[\ddot{\mathbf{p}}_4]_{\mathcal{R}_{\xi}} = [0, 0, \ddot{h}]^T \quad (3.99)$$

et l'accélération angulaire $\ddot{\vartheta}$ est donnée en dérivant l'équation (3.78), ce qui donne

$$\ddot{\vartheta} = \frac{[-\ddot{h} - l_2(\cos \theta_4 \ddot{\theta}_4^2 + \sin \theta_4 \ddot{\theta}_4)]l_3 \sin \vartheta - l_3 \cos \vartheta \dot{\vartheta}[-\dot{h} - l_2 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4]}{l_3^2 \sin^2 \vartheta} \quad (3.100)$$

3.5 Dynamique

L'objectif de cette analyse est de calculer les couples qui sont requis aux actionneurs du MHS4DDL afin d'effectuer une trajectoire prescrite au centre de la plate-forme du mécanisme hybride. Donc, après avoir obtenu les équations de positionnement, de vitesse et d'accélération, on peut poursuivre l'analyse en modélisant chaque partie du MHS4DDL. Par la suite, il sera possible d'évaluer ces couples avec l'utilisation du principe du travail virtuel.

3.5.1 Modélisation

Le mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté se compose des 18 corps k suivants : 3 membres proximaux (notés *proximal 1*, *proximal 2* et *proximal 3*), 3 membres distaux (notés *distal 1*, *distal 2* et *distal 3*), la plate-forme de l'oeil agile (notée *PFOA*), 2 membrures pour chaque stabilisateur i allant des points S_{1i} à S_{2i} (notées $S_{11}S_{21}$, $S_{12}S_{22}$ et $S_{13}S_{23}$) et des points S_{2i} à S_{3i} (notées $S_{21}S_{31}$, $S_{22}S_{32}$ et $S_{23}S_{33}$), 4 membrures pour le mécanisme de translation allant des points P_1 à P_2 (notée P_1P_2), P_4 à P_2 (notée P_4P_2), P_1 à P_3 (notée P_1P_3) et P_4 à P_3 (notée P_4P_3), et la plate-forme

du mécanisme (notée PF). Notons, pour simplifier l'analyse, que tous les corps ont la même densité ρ et qu'on néglige le poids et l'inertie des articulations.

3.5.1.1 Modélisation de l'oeil agile

Pour la modélisation des 3 membres proximaux et des 3 membres distaux, on a qu'à se référer aux sections 2.5.1.1 et 2.5.1.2 présentées au chapitre 2. Toutefois, concernant la plate-forme de l'oeil agile qui se réfère au contenu de la section 2.5.1.4, il faut apporter quelques modifications à l'intérieur de cette section au niveau de la notation des différentes variables (pour ne pas créer de confusion entre la plate-forme de l'oeil agile, notée $PFOA$, et celle du mécanisme hybride, notée PF). Ainsi, il faut substituer tous les indices PF par $PFOA$, puis substituer les variables h par h_{OA} (où h_{OA} est un paramètre constant calculé à l'équation (3.12), donc $\dot{h}_{OA} = \ddot{h}_{OA} = 0$), r par r_{OA} et e_r par $e_{r_{OA}}$. De plus, puisque la variable h_1 relie le dessous de la plate-forme de l'oeil agile au centre géométrique O' , on a que

$$h_1 = h_{OA} - \frac{e_{r_{OA}}}{2} \quad (3.101)$$

3.5.1.2 Modélisation des stabilisateurs

Chaque stabilisateur est composé de 2 tiges (la première de longueur l_{λ_1} et la seconde de longueur l_{λ_2}) et on va se référer aux équations développées à la section 2.5.1.3 pour modéliser ces tiges. Pour évaluer la masse, l'inertie et les matrices de rotation des repères \mathcal{R}_{λ_1} et \mathcal{R}_{λ_2} par rapport au repère fixe, la section D.1 de l'annexe D présente ces calculs.

En regardant la figure 3.4, on peut associer à chaque tige de longueur l_{λ_1} un repère \mathcal{R}_{λ_1} ayant son origine en S_{1i} où l'axe x_{λ_1} suit la direction de S_{1i} à S_{2i} et l'axe y_{λ_1} suit la direction de l'axe y_{ς_i} . De même, pour chaque tige de longueur l_{λ_2} , on peut associer un repère \mathcal{R}_{λ_2} ayant son origine en S_{2i} où l'axe x_{λ_2} suit la direction de S_{2i} à S_{3i} et l'axe y_{λ_2} suit la direction de l'axe y_{ς_i} . Ainsi, puisque chaque tige $S_{1i}S_{2i}$ tourne selon une vitesse $-\dot{\lambda}_1$ autour de l'axe y_{λ_1} (ou de l'axe y_{ς_i}) et que chaque tige $S_{2i}S_{3i}$ tourne selon une vitesse $-\dot{\lambda}_2$ autour de l'axe y_{λ_2} (ou de l'axe y_{ς_i}), alors les vitesses angulaires

et les accélérations angulaires sont

$$\boldsymbol{\omega}_{S_{1i}S_{2i}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[0, -\dot{\lambda}_1, 0]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.102)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{S_{1i}S_{2i}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[0, -\dot{\lambda}_1, 0]^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\dot{\mathbf{Q}}_{\zeta_i}[0, -\ddot{\lambda}_1, 0]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.103)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{S_{2i}S_{3i}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[0, -\dot{\lambda}_2, 0]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.104)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{S_{2i}S_{3i}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[0, -\dot{\lambda}_2, 0]^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\dot{\mathbf{Q}}_{\zeta_i}[0, -\ddot{\lambda}_2, 0]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.105)$$

Afin d'établir la valeur de $\dot{\lambda}_1$, $\ddot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ et $\ddot{\lambda}_2$, on peut se référer au développement effectué à la section 1.5. Ainsi, puisque chaque stabilisateur i est un mécanisme plan à 2 barres, on a que

$$s_{3i_{x\zeta_i}} = s_{1i_{x\zeta_i}} + l_{\lambda_1} \cos \lambda_1 + l_{\lambda_2} \cos \lambda_2, \quad i = 1,2,3 \quad (3.106)$$

$$s_{3i_{z\zeta_i}} = s_{1i_{z\zeta_i}} + l_{\lambda_1} \sin \lambda_1 + l_{\lambda_2} \sin \lambda_2, \quad i = 1,2,3 \quad (3.107)$$

En dérivant par rapport au temps les équations (3.106) et (3.107), on obtient sous une forme matricielle la relation suivante

$$\begin{bmatrix} -l_{\lambda_1} \sin \lambda_1 & -l_{\lambda_2} \sin \lambda_2 \\ l_{\lambda_1} \cos \lambda_1 & l_{\lambda_2} \cos \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}_{3i_{x\zeta_i}} - \dot{s}_{1i_{x\zeta_i}} \\ \dot{s}_{3i_{z\zeta_i}} - \dot{s}_{1i_{z\zeta_i}} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.108)$$

$$\mathbf{D}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{q}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (3.109)$$

où, en dérivant les équations (3.23) et (3.24), on a que

$$\dot{\mathbf{s}}_{1i} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\dot{\mathbf{Q}}_{\zeta_i}[\dot{\mathbf{s}}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.110)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{3i} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\dot{\mathbf{Q}}_{\zeta_i}[\dot{\mathbf{s}}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.111)$$

avec

$$[\dot{\mathbf{s}}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}} = [0,0,0]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.112)$$

$$[\dot{\mathbf{s}}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}} = [0,0,\dot{h}]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.113)$$

Du système présenté à l'équation (3.109), on peut tirer la valeur de $\dot{\lambda}_1$ et $\dot{\lambda}_2$ pour $i = 1,2,3$ (la solution étant identique pour chaque stabilisateur i), ce qui permet d'évaluer en dérivant l'équation (3.41) que

$$\dot{\mathbf{s}}_{2i} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\zeta_i}[\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\dot{\mathbf{Q}}_{\zeta_i}[\dot{\mathbf{s}}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\zeta_i}}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.114)$$

où

$$[\dot{\mathbf{s}}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = \dot{\lambda}_1 \mathbf{E}_\varsigma ([\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.115)$$

$$\mathbf{E}_\varsigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Or, sachant que

$$[\ddot{\mathbf{s}}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [0,0,0]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.117)$$

$$[\ddot{\mathbf{s}}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [0,0,\ddot{h}]^T, \quad i = 1,2,3 \quad (3.118)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}_{1i} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\dot{\mathbf{s}}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\ddot{\mathbf{s}}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, i = 1,2,3 \quad (3.119)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}_{3i} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\dot{\mathbf{s}}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\ddot{\mathbf{s}}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, i = 1,2,3 \quad (3.120)$$

en dérivant le système de l'équation (3.109), on trouve que les accélérations angulaires $\ddot{\lambda}_1$ et $\ddot{\lambda}_2$ sont données par

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{D}_i^{-1}(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{D}}_i \mathbf{X}_i), \quad i = 1,2,3 \quad (3.121)$$

avec

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{\lambda}_1 \\ \ddot{\lambda}_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.122)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{s}_{3ix_{\varsigma_i}} - \ddot{s}_{1ix_{\varsigma_i}} \\ \ddot{s}_{3iz_{\varsigma_i}} - \ddot{s}_{1iz_{\varsigma_i}} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.123)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} -\dot{\lambda}_1 l_{\lambda_1} \cos \lambda_1 & -\dot{\lambda}_2 l_{\lambda_2} \cos \lambda_2 \\ -\dot{\lambda}_1 l_{\lambda_1} \sin \lambda_1 & -\dot{\lambda}_2 l_{\lambda_2} \sin \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (3.124)$$

ce qui permet également de trouver que

$$[\ddot{\mathbf{s}}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = \ddot{\lambda}_1 \mathbf{E}_\varsigma ([\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}) - \dot{\lambda}_1^2 ([\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.125)$$

$$\ddot{\mathbf{s}}_{2i} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\dot{\mathbf{s}}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_{\varsigma_i}[\ddot{\mathbf{s}}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, i = 1,2,3 \quad (3.126)$$

Concernant la position, la vitesse et l'accélération du CDM de chaque tige évaluées dans le repère fixe, on peut établir que

$$\mathbf{c}_{m_{S_{1i}S_{2i}}} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{1i} + \mathbf{s}_{2i}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.127)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m S_{1i}S_{2i}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{s}}_{1i} + \dot{\mathbf{s}}_{2i}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.128)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m S_{1i}S_{2i}} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{s}}_{1i} + \ddot{\mathbf{s}}_{2i}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.129)$$

$$\mathbf{c}_{m S_{2i}S_{3i}} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{2i} + \mathbf{s}_{3i}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.130)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m S_{2i}S_{3i}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{s}}_{2i} + \dot{\mathbf{s}}_{3i}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.131)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m S_{2i}S_{3i}} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{s}}_{2i} + \ddot{\mathbf{s}}_{3i}), \quad i = 1,2,3 \quad (3.132)$$

3.5.1.3 Modélisation du mécanisme de translation

De façon similaire aux stabilisateurs, on modélise le mécanisme de translation par des membrures. La section D.1 de l'annexe D présente les équations pour évaluer la masse, la matrice d'inertie évaluée au CDM et les matrices de rotation des repères liés aux membrures par rapport au repère fixe. Pour définir la position, la vitesse et l'accélération du CDM de chaque membrure évaluées dans le repère fixe, on a que

$$\mathbf{c}_{m P_1P_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad (3.133)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m P_1P_2} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2) \quad (3.134)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m P_1P_2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{p}}_1 + \ddot{\mathbf{p}}_2) \quad (3.135)$$

$$\mathbf{c}_{m P_4P_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_2) \quad (3.136)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m P_4P_2} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_4 + \dot{\mathbf{p}}_2) \quad (3.137)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m P_4P_2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{p}}_4 + \ddot{\mathbf{p}}_2) \quad (3.138)$$

$$\mathbf{c}_{m P_1P_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) \quad (3.139)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m P_1P_3} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_3) \quad (3.140)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m P_1P_3} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{p}}_1 + \ddot{\mathbf{p}}_3) \quad (3.141)$$

$$\mathbf{c}_{m P_4P_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3) \quad (3.142)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m P_4 P_3} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_4 + \dot{\mathbf{p}}_3) \quad (3.143)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m P_4 P_3} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{p}}_4 + \ddot{\mathbf{p}}_3) \quad (3.144)$$

puis, on détermine les vitesses angulaires et les accélérations angulaires de chaque corps avec

$$\boldsymbol{\omega}_{P_1 P_2} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, \dot{\theta}_4, 0]^T \quad (3.145)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{P_1 P_2} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, \dot{\theta}_4, 0]^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, \ddot{\theta}_4, 0]^T \quad (3.146)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{P_4 P_2} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, -\dot{\vartheta}, 0]^T \quad (3.147)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{P_4 P_2} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, -\dot{\vartheta}, 0]^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, -\ddot{\vartheta}, 0]^T \quad (3.148)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{P_1 P_3} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, -\dot{\theta}_4, 0]^T \quad (3.149)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{P_1 P_3} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, -\dot{\theta}_4, 0]^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, -\ddot{\theta}_4, 0]^T \quad (3.150)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{P_4 P_3} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, \dot{\vartheta}, 0]^T \quad (3.151)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{P_4 P_3} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, \dot{\vartheta}, 0]^T + \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\varsigma_1} \mathbf{Q}_{\xi} [0, \ddot{\vartheta}, 0]^T \quad (3.152)$$

3.5.1.4 Modélisation de la plate-forme du mécanisme hybride

La section D.3 de l'annexe D présente une modélisation simplifiée de la plate-forme du mécanisme hybride (qui peut s'avérer dans la réalité une forme géométrique assez complexe), soit en modélisant celle-ci par un disque (les expressions pour évaluer la masse et l'inertie sont indiquées à la section D.3).

L'orientation de la plate-forme est donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} (voir l'équation (1.5)) du repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ par rapport au repère fixe. Or, on localise le CDM dans le repère mobile avec

$$\mathbf{G}_{PF} = [G_{PF x'}, G_{PF y'}, G_{PF z'}]^T \quad (3.153)$$

où les positions $G_{PF x'}$ et $G_{PF y'}$ sont des paramètres constants tandis que la position selon z' ($G_{PF z'}$) dépend de la hauteur h . Ainsi, on tire que la vitesse et l'accélération de ce solide exprimées dans le repère mobile sont

$$\dot{\mathbf{G}}_{PF} = [0, 0, \dot{h}]^T \quad (3.154)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}_{PF} = [0,0,\ddot{h}]^T \quad (3.155)$$

Donc, la position, la vitesse et l'accélération du CDM de la plate-forme exprimées dans le repère fixe sont

$$\mathbf{c}_{m PF} = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{G}_{PF} \quad (3.156)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{m PF} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{PF} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{G}}_{PF} \quad (3.157)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_{m PF} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{PF} + 2\dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{G}}_{PF} + \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{G}}_{PF} \quad (3.158)$$

De plus, la vitesse angulaire ainsi que l'accélération angulaire sont respectivement

$$\boldsymbol{\omega}_{PF} = \boldsymbol{\omega} \quad (3.159)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{PF} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.160)$$

3.5.2 Principe du travail virtuel

Pour calculer le couple (τ_j) que doit produire le moteur j , on va utiliser le principe du travail virtuel représenté par la relation suivante (en considérant un déplacement virtuel angulaire unitaire pour chaque moteur j)

$$\tau_j = - \sum_k (\mathbf{f}_k^T \delta \mathbf{c}_{m k}^j + \mathbf{m}_k^T \delta \varphi_k^j), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.161)$$

où \mathbf{f}_k et \mathbf{m}_k sont respectivement les forces et les moments exercés au CDM de chaque corps.

3.5.2.1 Forces et moments exercés au CDM de chaque corps

Les forces \mathbf{f}_k et moments \mathbf{m}_k exercés au CDM de chaque corps k sont exprimés par

$$\mathbf{f}_k = -m_k \ddot{\mathbf{c}}_{m k} + [0,0, -m_k g]^T \quad (3.162)$$

$$\mathbf{m}_k = -\mathbf{Q}_{Ik} \mathbf{I}_k \mathbf{Q}_{Ik}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{\omega}_k \times (\mathbf{Q}_{Ik} \mathbf{I}_k \mathbf{Q}_{Ik}^T \boldsymbol{\omega}_k) \quad (3.163)$$

où g est l'accélération gravitationnelle. Concernant les expressions pour chaque corps de la masse, l'accélération, la matrice d'inertie, la matrice de rotation, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire, celles-ci sont présentées à l'intérieur des sections précédentes.

3.5.2.2 Déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps

Pour obtenir les déplacements virtuels linéaires et angulaires du CDM de chaque corps associés au déplacement virtuel angulaire unitaire d'un actuateur j ($\delta\boldsymbol{\theta}^1 = [1,0,0,0]^T$, $\delta\boldsymbol{\theta}^2 = [0,1,0,0]^T$, $\delta\boldsymbol{\theta}^3 = [0,0,1,0]^T$ et $\delta\boldsymbol{\theta}^4 = [0,0,0,1]^T$), il suffit de reprendre les équations de vitesse et de substituer les “ $\frac{d}{dt}$ ” par des “ δ ”.

Or, en utilisant l'équation (3.79), on a que

$$\delta\mathbf{t}^j = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\delta\boldsymbol{\theta}^j = [\delta\boldsymbol{\varphi}^{jT}, \delta h^j]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.164)$$

où $\delta\boldsymbol{\varphi}^j = [\delta\varphi_x^j, \delta\varphi_y^j, \delta\varphi_z^j]^T$. Avec les équations de vitesse obtenues dans les sections précédentes, pour les membres proximaux ($i = 1, 2, 3$), on obtient les équations (2.145) à (2.148). Concernant les membres distaux ($i = 1, 2, 3$), on a que

$$\delta\mathbf{Q}^j = \boldsymbol{\Omega}^j \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\varphi_z^j & \delta\varphi_y^j \\ \delta\varphi_z^j & 0 & -\delta\varphi_x^j \\ -\delta\varphi_y^j & \delta\varphi_x^j & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.165)$$

$$\delta\mathbf{v}_i^j = \delta\mathbf{Q}^j [\mathbf{v}_i]_{\mathcal{R}^i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.166)$$

$$\delta\mathbf{w}_i^j = \mathbf{Q}_{\eta_i} \mathbf{Q}_{\beta} \delta\mathbf{Q}_{\theta_i}^j \mathbf{Q}_{\alpha_1} [\mathbf{w}_i]_{\mathcal{R}_{\alpha_1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.167)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{Q}_{distal\ i}^j &= [\delta\mathbf{w}_i^j, (\delta\mathbf{w}_i^j \times \mathbf{v}_i) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \delta\mathbf{v}_i^j) \times \mathbf{w}_i + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \times \delta\mathbf{w}_i^j, \\ &\quad \delta\mathbf{w}_i^j \times \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \times \delta\mathbf{v}_i^j], \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.168)$$

$$\delta\mathbf{c}_{m\ distal\ i}^j = \delta\mathbf{Q}_{distal\ i}^j [\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.169)$$

$$\mathbf{s}_{distal\ i}^j = \delta\mathbf{v}_i^j - \delta\mathbf{w}_i^j - \delta\boldsymbol{\varphi}_{proximal\ i}^j \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.170)$$

$$k_{distal\ i}^j = \frac{\mathbf{r}_{distal\ i}^T \mathbf{s}_{distal\ i}^j}{\mathbf{r}_{distal\ i}^T \mathbf{r}_{distal\ i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.171)$$

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_{distal\ i}^j = \delta\boldsymbol{\varphi}_{proximal\ i}^j + k_{distal\ i}^j \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.172)$$

Pour la plate-forme de l'oeil agile, on a que

$$\delta\mathbf{c}_{m\ PFOA}^j = \delta\mathbf{Q}^j \mathbf{G}_{PFOA}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.173)$$

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_{PFOA}^j = \delta\boldsymbol{\varphi}^j, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.174)$$

Pour les stabilisateurs ($i = 1, 2, 3$), on a que

$$[\delta\mathbf{s}_{1i}^j]_{\mathcal{R}_{s_i}} = [0, 0, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.175)$$

$$\left[\delta \mathbf{s}_{3i}^j \right]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = [0, 0, \delta h^j]^T, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.176)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{s}_{1i}^j &= \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + \\ &\quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [\delta \mathbf{s}_{1i}^j]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.177)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{s}_{3i}^j &= \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [\mathbf{s}_{3i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + \\ &\quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [\delta \mathbf{s}_{3i}^j]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.178)$$

$$\mathbf{q}_i^j = \begin{bmatrix} \delta s_{3i x \varsigma_i}^j - \delta s_{1i x \varsigma_i}^j \\ \delta s_{3i z \varsigma_i}^j - \delta s_{1i z \varsigma_i}^j \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.179)$$

$$\mathbf{X}_i^j = \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{q}_i^j, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.180)$$

$$\delta \lambda_1^j = X_{i1}^j, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.181)$$

$$\delta \lambda_2^j = X_{i2}^j, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.182)$$

$$\left[\delta \mathbf{s}_{2i}^j \right]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} = \delta \lambda_1^j \mathbf{E}_{\varsigma} ([\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} - [\mathbf{s}_{1i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}), \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.183)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{s}_{2i}^j &= \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [\mathbf{s}_{2i}]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}} + \\ &\quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [\delta \mathbf{s}_{2i}^j]_{\mathcal{R}_{\varsigma_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m S_{1i} S_{2i}}^j = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{s}_{1i}^j + \delta \mathbf{s}_{2i}^j), \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.185)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m S_{2i} S_{3i}}^j = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{s}_{2i}^j + \delta \mathbf{s}_{3i}^j), \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.186)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{S_{1i} S_{2i}}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [0, -\delta \lambda_1^j, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.187)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_{S_{2i} S_{3i}}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} [0, -\delta \lambda_2^j, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \quad (3.188)$$

Pour le mécanisme de translation, on a que

$$\left[\delta \mathbf{p}_1^j \right]_{\mathcal{R}_{\xi}} = [0, 0, 0]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.189)$$

$$\left[\delta \mathbf{p}_2^j \right]_{\mathcal{R}_{\xi}} = \delta \theta_4^j \mathbf{E}_{\xi P_2} ([\mathbf{p}_2]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.190)$$

$$\left[\delta \mathbf{p}_3^j \right]_{\mathcal{R}_{\xi}} = \delta \theta_4^j \mathbf{E}_{\xi P_3} ([\mathbf{p}_3]_{\mathcal{R}_{\xi}} - [\mathbf{p}_1]_{\mathcal{R}_{\xi}}), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.191)$$

$$\left[\delta \mathbf{p}_4^j \right]_{\mathcal{R}_{\xi}} = [0, 0, \delta h^j]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.192)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_i^j &= \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} \mathbf{Q}_{\xi} [\mathbf{p}_i]_{\mathcal{R}_{\xi}} + \\ &\quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} \mathbf{Q}_{\xi} [\delta \mathbf{p}_i^j]_{\mathcal{R}_{\xi}}, \quad i = 1, \dots, 4 \text{ et } j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.193)$$

$$\delta \vartheta^j = \frac{-\delta h^j - l_2 \sin \theta_4 \delta \theta_4^j}{l_3 \sin \vartheta}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.194)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m P_1 P_2}^j = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{p}_1^j + \delta \mathbf{p}_2^j), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.195)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m P_4 P_2}^j = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{p}_4^j + \delta \mathbf{p}_2^j), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.196)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m P_1 P_3}^j = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{p}_1^j + \delta \mathbf{p}_3^j), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.197)$$

$$\delta \mathbf{c}_{m P_4 P_3}^j = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{p}_4^j + \delta \mathbf{p}_3^j), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.198)$$

$$\delta \varphi_{P_1 P_2}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_\xi [0, \delta \theta_4^j, 0]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.199)$$

$$\delta \varphi_{P_4 P_2}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_\xi [0, -\delta \vartheta^j, 0]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.200)$$

$$\delta \varphi_{P_1 P_3}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_\xi [0, -\delta \theta_4^j, 0]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.201)$$

$$\delta \varphi_{P_4 P_3}^j = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{s_1} \mathbf{Q}_\xi [0, \delta \vartheta^j, 0]^T, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.202)$$

Finalement, concernant la plate-forme du mécanisme hybride, on a que

$$\delta \mathbf{c}_{m PF}^j = \delta \mathbf{Q}^j \mathbf{G}_{PF}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.203)$$

$$\delta \varphi_{PF}^j = \delta \varphi^j, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.204)$$

En appliquant les résultats tirés des équations précédentes à l'intérieur de l'équation (3.161) pour le calcul des couples aux moteurs ($j = 1, \dots, 4$), on peut vérifier la validité des résultats trouvés en effectuant un bilan d'énergie tel que montré au chapitre 1 à la section 1.6.4.

3.6 Exemple de résultats

Soit un MHS4DDL entièrement fait d'aluminium (la densité du matériau est $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) soumis à une gravité $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et dont l'allure est montrée à la figure 3.6. Il est à noter que le dimensionnement de l'oeil agile est le même que celui établi au chapitre 2, avec comme seule modification l'angle d'inclinaison des moteurs β qui est fixé à 54.7356103172° (voir les équations (3.9) à (3.11)). Ainsi, les paramètres de design sont les suivants (les unités de longueur, d'angle, de masse et de temps sont respectivement le mètre, le radian, le kilogramme et la seconde) :

- Pour la base : $R = 0.055$, $\eta_1 = 0$ et $\beta = \text{asin}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right)$.
- Pour les membres proximaux : $R_1 = 0.050$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$m_{proximal\ i} = 0.011952875, \quad i = 1, 2, 3$$

$$[\mathbf{G}_{proximal\ i}]_{\mathcal{R}_{proximal\ i}} = 1 \cdot 10^{-2} [3.0941823, 3.0941823, 0]^T, \quad i = 1, 2, 3$$

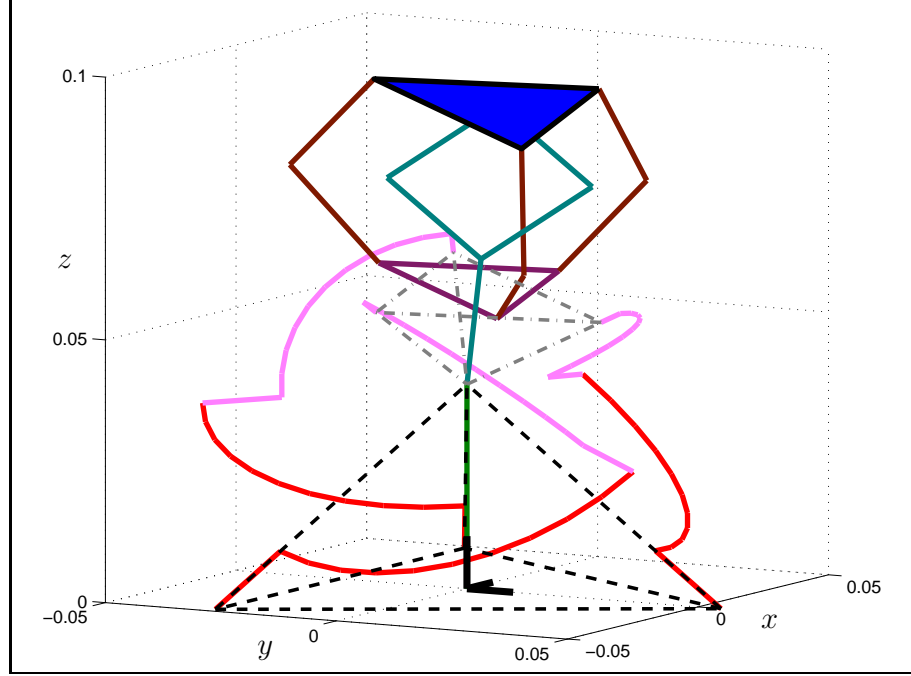


FIG. 3.6 – Allure du mécanisme parallèle sphérique à 4 ddl.

$$\mathbf{I}_{proximal\ i} = 1 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.6372267 & 3.1537961 & 0 \\ 3.1537961 & 3.6372267 & 0 \\ 0 & 0 & 7.0752387 \end{bmatrix}, i = 1,2,3$$

- Pour les membres distaux: $R_2 = 0.035$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $\zeta = \beta$ et

$$m_{distal\ i} = 0.0087720126, \quad i = 1,2,3$$

$$[\mathbf{G}_{distal\ i}]_{\mathcal{R}_{distal\ i}} = 1 \cdot 10^{-2} [2.1385486, 2.1385486, 0]^T, \quad i = 1,2,3$$

$$\mathbf{I}_{distal\ i} = 1 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.4643995 & 1.2210803 & 0 \\ 1.2210803 & 1.4643995 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7825987 \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3$$

- Pour la plate-forme de l'oeil agile: $r_{OA} = 0.025$, $e_{r_{OA}} = 0.005$, $\gamma_1 = 0$ et $r_1 = 0.0025$.
- Pour les stabilisateurs: $\varsigma_1 = \frac{\pi}{3}$, $l_{\lambda_1} = l_{\lambda_2} = 0.025$, $r_{l_{\lambda_1}} = r_{l_{\lambda_2}} = 0.003$, $r_{S1} = 0.020$, $h_{S1} = 0.020$ et $r_{S3} = 0.025$.
- Pour le mécanisme de translation: $\xi = \frac{5\pi}{6}$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0.025$ et $r_{l_2} = r_{l_3} = 0.003$.
- Pour la plate-forme du mécanisme hybride: $r = 0.025$ et $e_r = 0.005$.

Or, pour une trajectoire du centre de la plate-forme O' donnée par

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{30\pi}{180} \sin(2t) & \theta &= \frac{35\pi}{180} \sin(3t) \\ \dot{\phi} &= \frac{30\pi}{180} (2) \cos(2t) & \dot{\theta} &= \frac{35\pi}{180} (3) \cos(3t) \\ \ddot{\phi} &= -\frac{30\pi}{180} (2^2) \sin(2t) & \ddot{\theta} &= -\frac{35\pi}{180} (3^2) \sin(3t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{25\pi}{180} \sin(4t) & h &= 0.050 + 0.010 \sin(6t) \\ \dot{\psi} &= \frac{25\pi}{180} (4) \cos(4t) & \dot{h} &= 0.010 (6) \cos(6t) \\ \ddot{\psi} &= -\frac{25\pi}{180} (4^2) \sin(4t) & \ddot{h} &= -0.010 (6^2) \sin(6t)\end{aligned}$$

on obtient les résultats montrés aux figures 3.7 à 3.12.

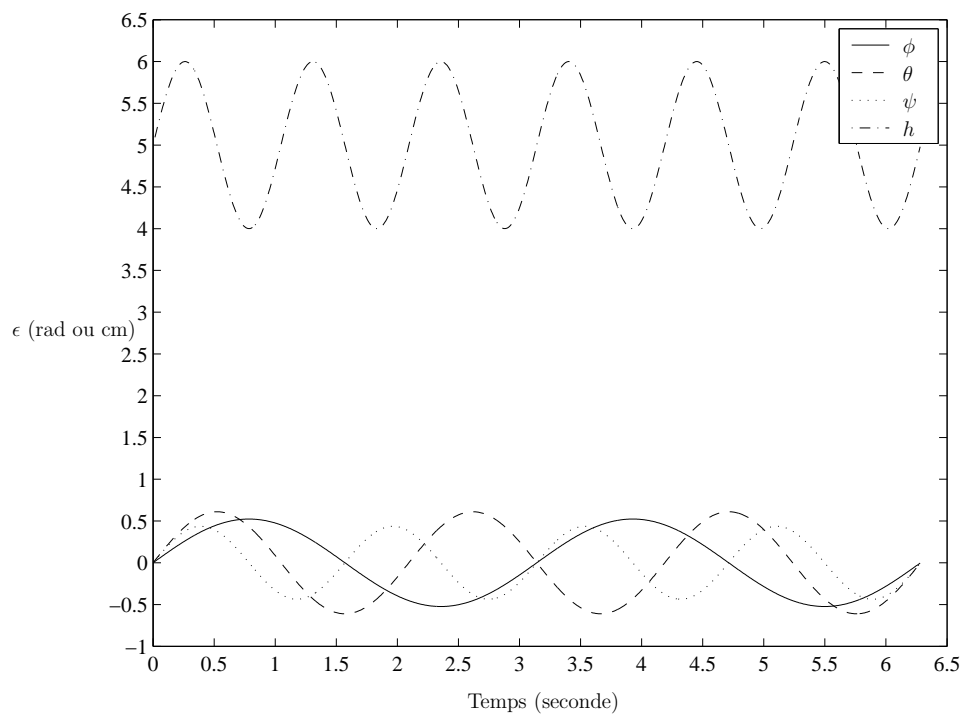


FIG. 3.7 – Trajectoire du centre de la plate-forme et orientations.

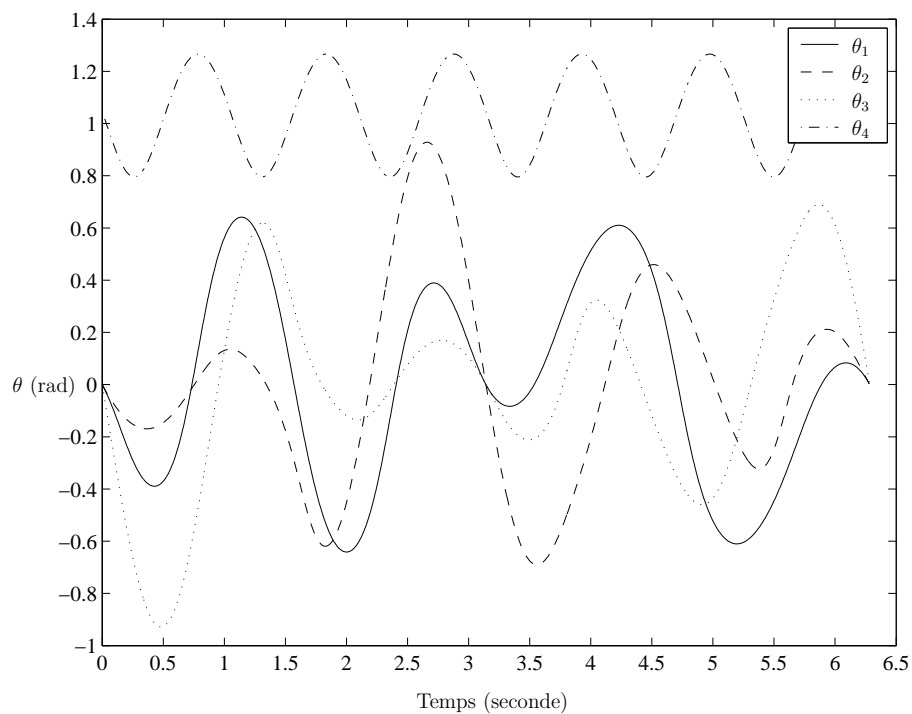


FIG. 3.8 – Évolution des coordonnées articulaires.

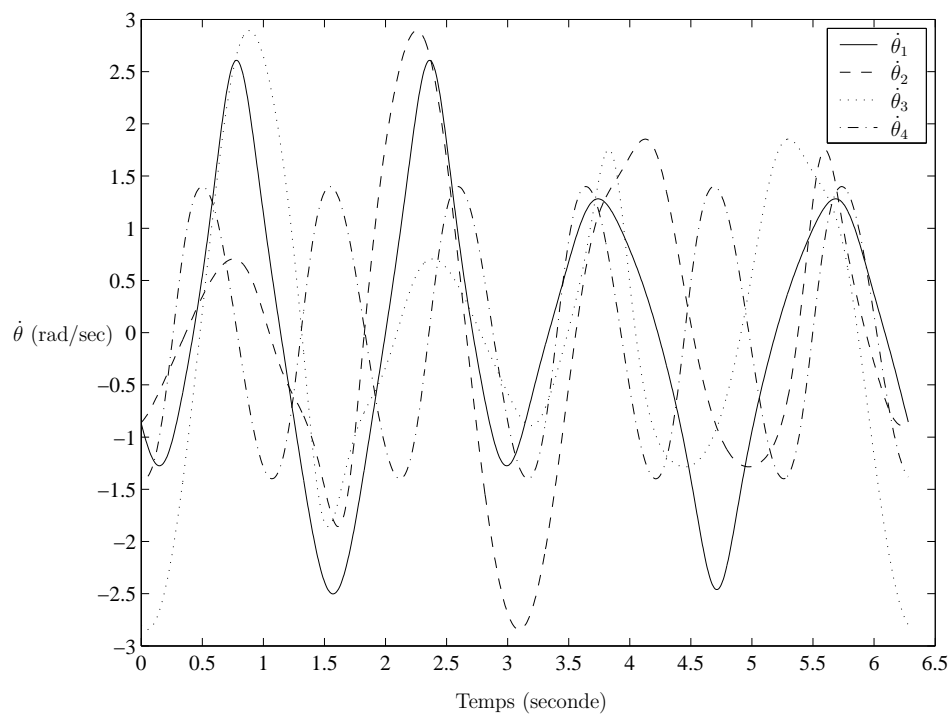


FIG. 3.9 – Évolution des vitesses articulaires.

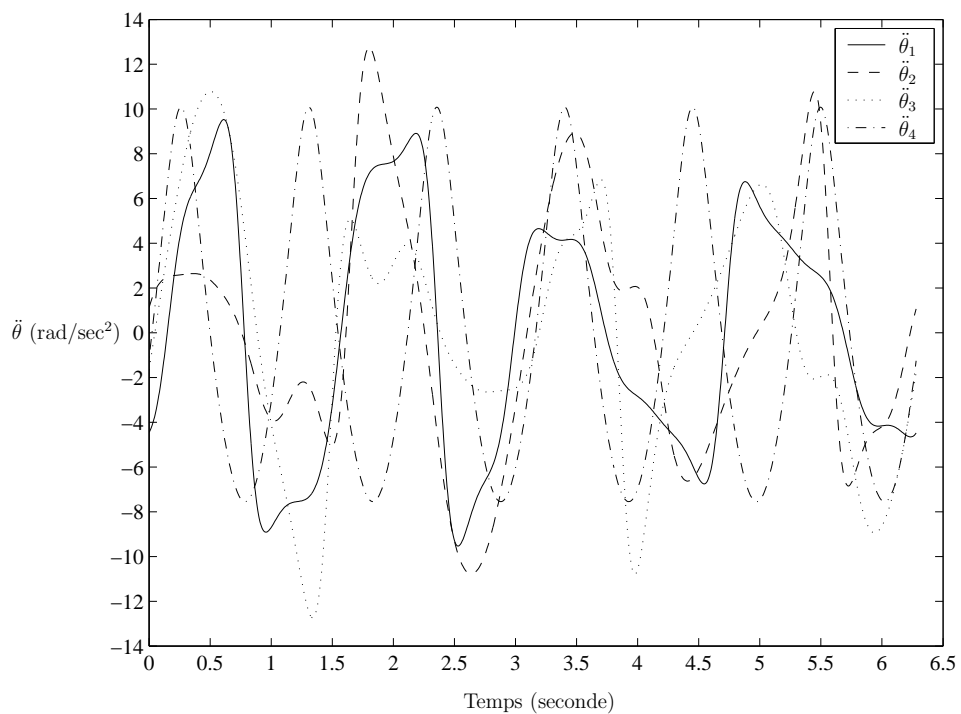


FIG. 3.10 – Évolution des accélérations articulaires.

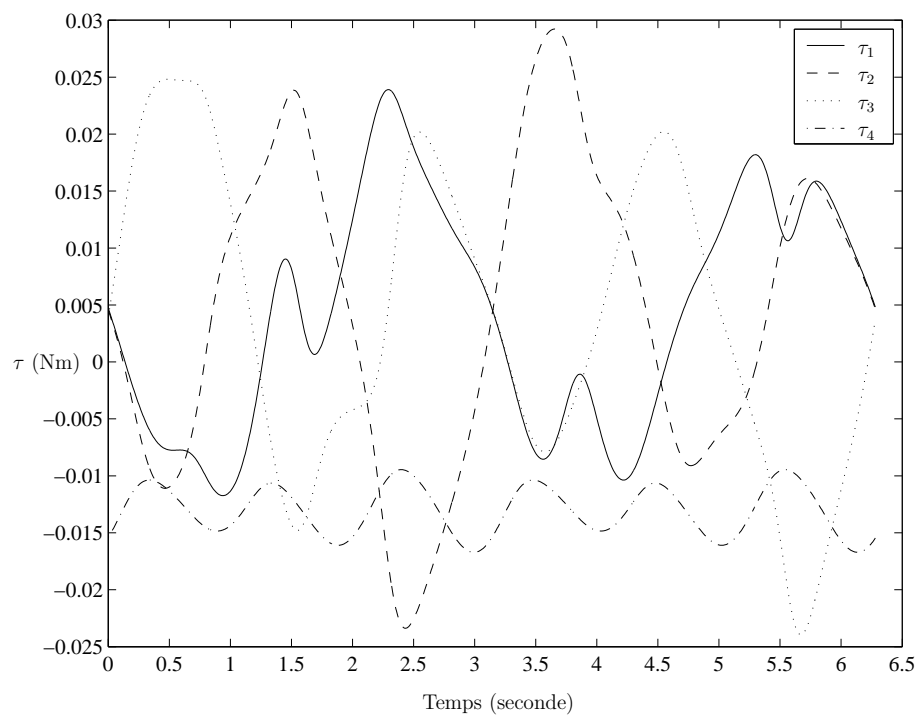


FIG. 3.11 – Couples requis aux moteurs.

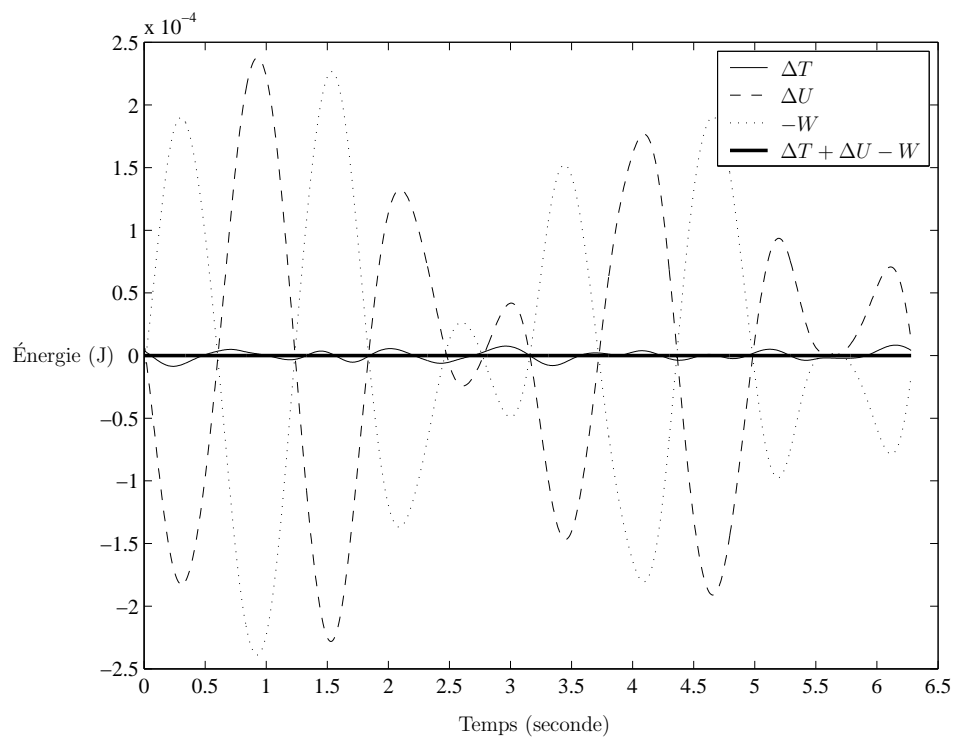
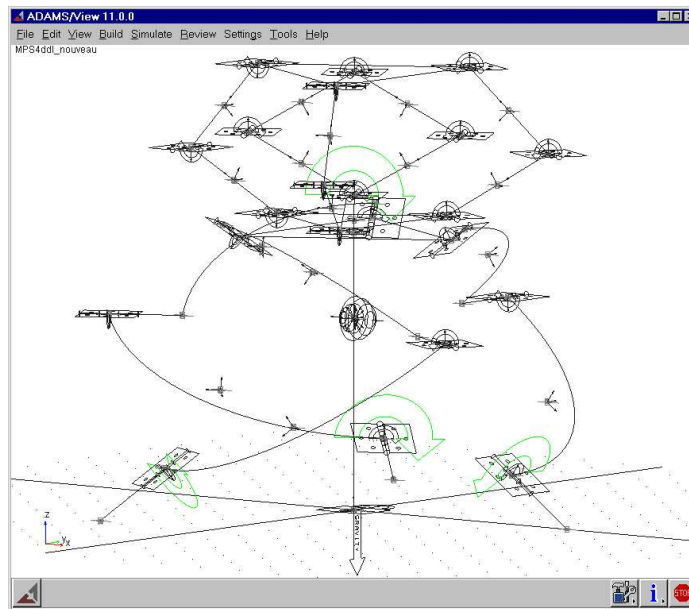


FIG. 3.12 – Bilan d'énergie.

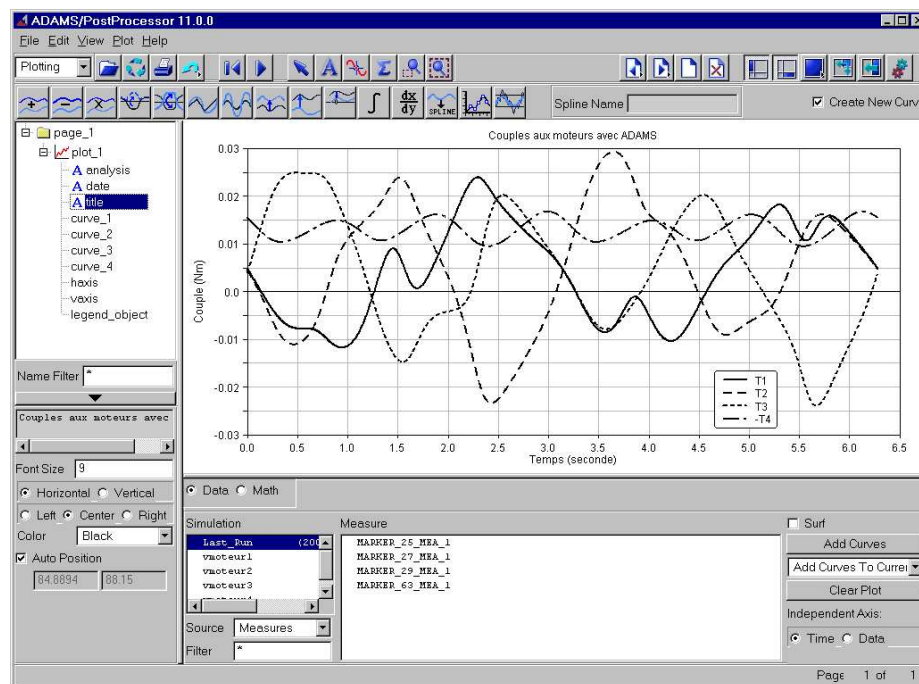
3.7 Simulation dynamique sous ADAMS

En modélisant le mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté avec les caractéristiques présentées à la section 3.6 et en lui soumettant les vitesses aux moteurs présentées à la figure 3.9, le logiciel ADAMS peut calculer les couples aux moteurs pour la trajectoire prescrite. Ainsi, puisque le logiciel ADAMS représente une méthode de calcul des couples qui est complètement indépendante des équations développées à l'intérieur des sections précédentes, ceci va nous permettre de valider les résultats obtenus à la figure 3.11. La figure 3.13(a) illustre l'architecture du mécanisme à l'intérieur du logiciel ADAMS et les résultats obtenus sont présentés à la figure 3.13(b).

En joignant sur un même graphique les couples trouvés à partir d'un code MATLAB basé sur les équations analytiques en comparaison avec les couples obtenus avec ADAMS, les figures 3.14 à 3.17 illustrent la parfaite concordance entre les résultats tirés avec le principe du travail virtuel (MATLAB) et les résultats provenant du logiciel ADAMS.



(a) Modélisation du mécanisme hybride sphérique à 4 degrés de liberté sous ADAMS.



(b) Calcul des couples aux moteurs avec ADAMS.

FIG. 3.13 – Exemple de résultats pour une trajectoire donnée avec ADAMS.

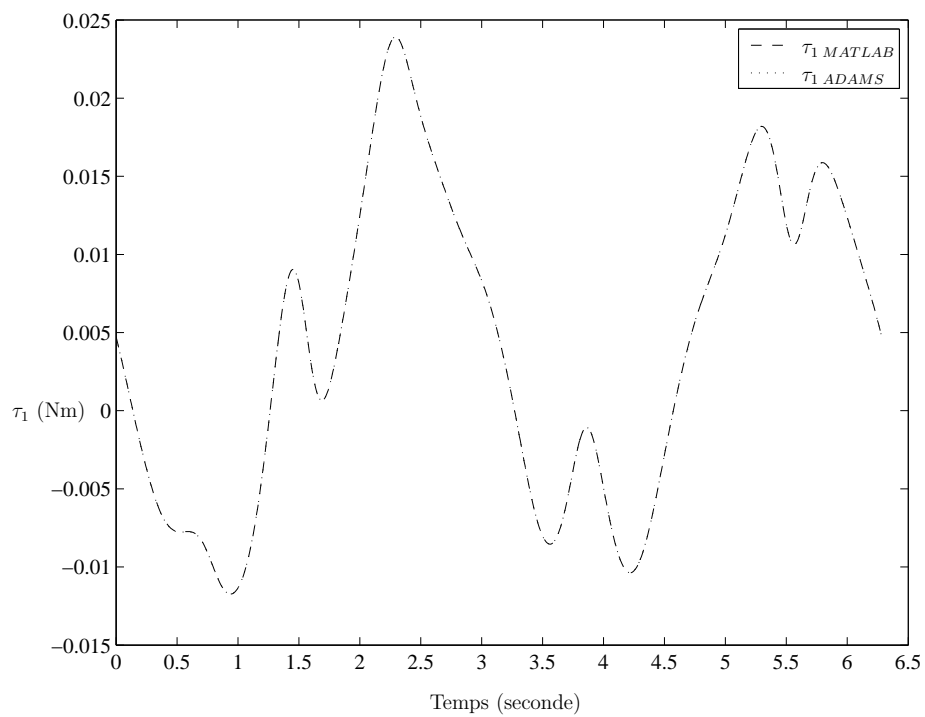


FIG. 3.14 – Couple au moteur 1.

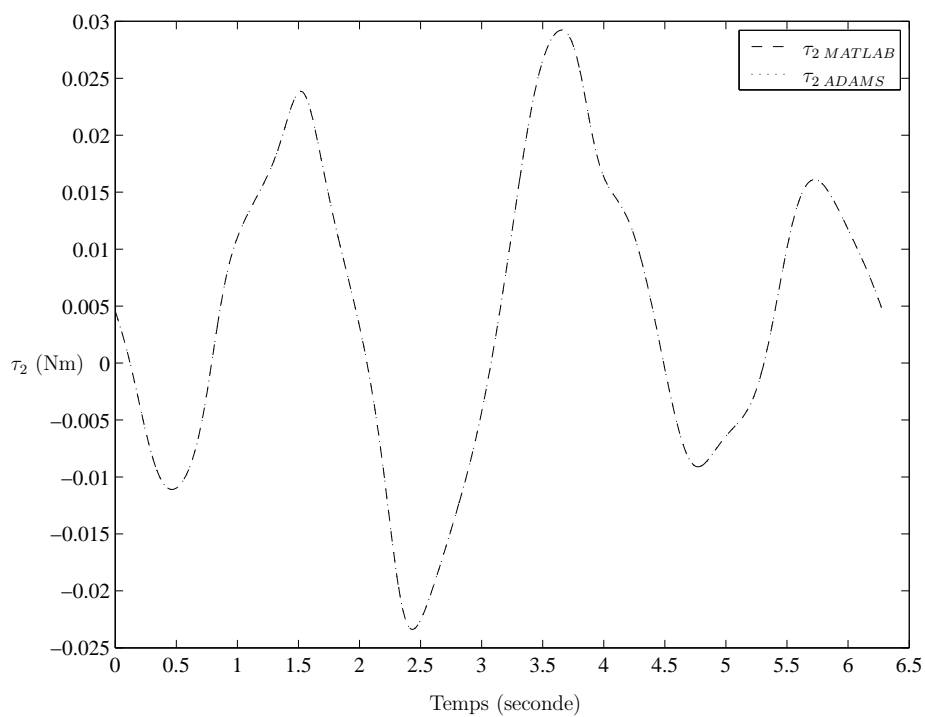


FIG. 3.15 – Couple au moteur 2.

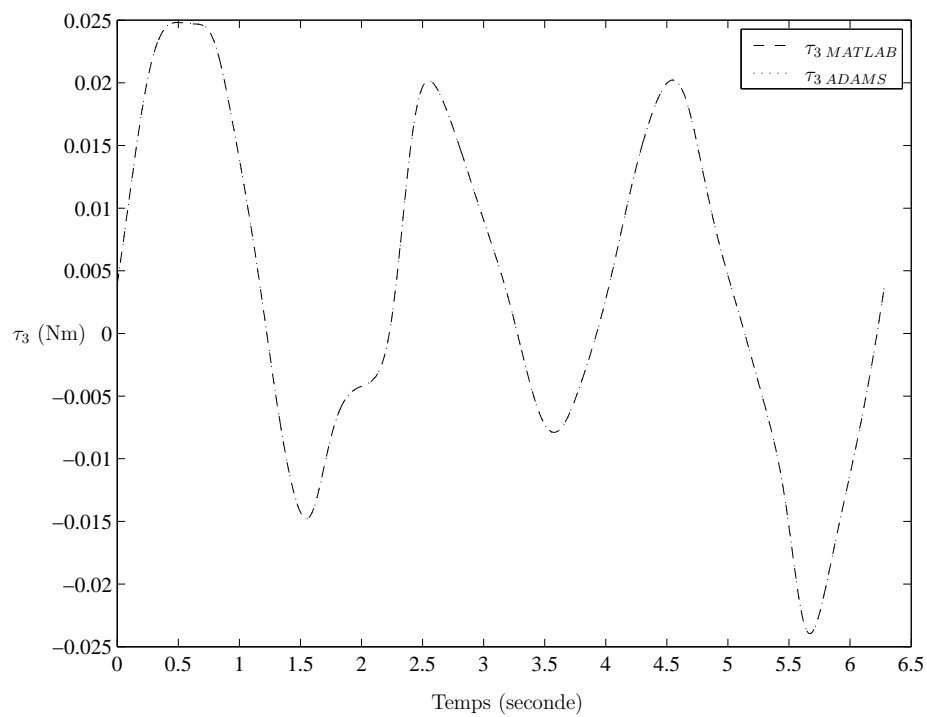


FIG. 3.16 – Couple au moteur 3.

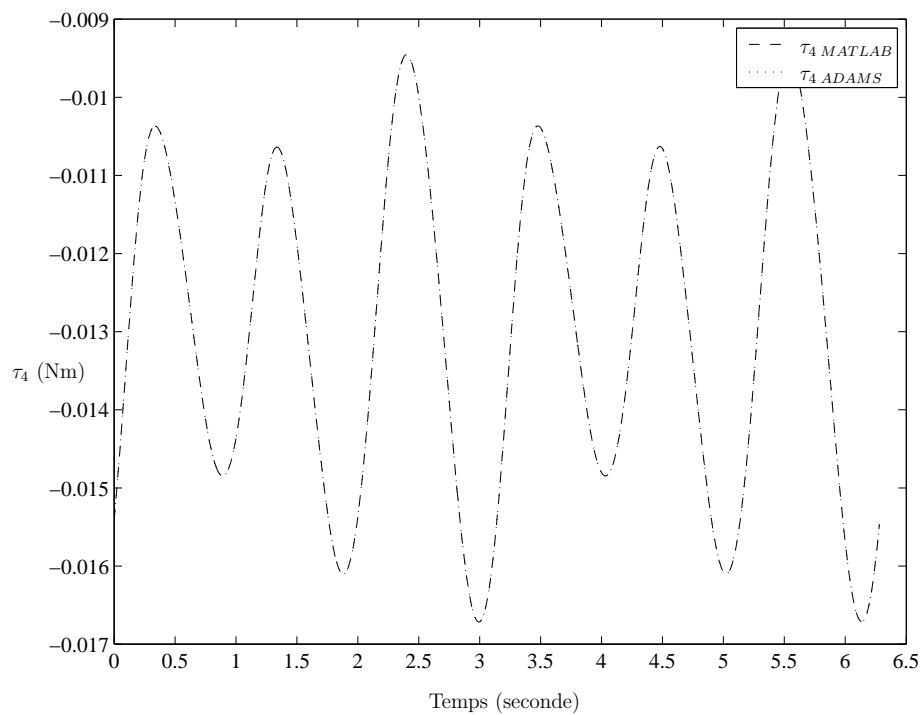


FIG. 3.17 – Couple au moteur 4.

Conclusion

Pour chacun des mécanismes parallèles étudiés à l'intérieur des chapitres 1, 2 et 3, il a été possible d'élaborer les équations reliées à la cinématique et de développer les relations nécessaires pour le calcul des efforts aux actionneurs. Or, pour la réalisation d'un simulateur de vol qui offre de bonnes performances et de faibles coûts de fabrication et d'opération par rapport au mécanisme de Gough-Stewart, il serait intéressant de sélectionner, parmi ces nouvelles architectures, celle qui est la plus avantageuse. Pour ce faire, regardons à priori le tableau 4.1 qui récapitule les principales caractéristiques des mécanismes étudiés.

	MPS3DDL	MPS4DDL	MHS4DDL
Degrés de liberté	position selon z et 2 angles d'Euler	position selon z' et 3 angles d'Euler	position selon z' et 3 angles d'Euler
Découplage : DDL en translation versus DDL en rotation	non	uniquement pour certaines configurations	oui
Solutions au PGI	16	64	16
Nombre de corps	9	11	18

TAB. 4.1 – Résumé des principales caractéristiques des mécanismes.

Sur le plan économique, concernant les coûts de fabrication et d'opération, il est difficile de déterminer lequel de ces 3 nouveaux mécanismes est en mesure de se démarquer. Toutefois, pour chacun de ceux-ci, en ayant moins de degrés de liberté que les 6 DDL du mécanisme de Gough-Stewart, en effectuant un design approprié et en mettant l'accent sur l'actionnement avec des moteurs électriques (plutôt que d'utiliser des vérins hydrauliques comme c'est le cas pour la plupart des simulateurs de vol basés sur le mécanisme de Gough-Stewart), il est évident que ces nouvelles architectures présentent un avantage marqué sur le plan des coûts par rapport aux simulateurs de vol que l'on retrouve sur le marché.

Sur le plan de la performance, la caractéristique première à observer est la possibilité de découpler à l'effecteur le degré de liberté en translation de ceux en rotation. Il faut se rappeler que la raison pour laquelle ces nouveaux mécanismes incluent un degré de liberté en translation est de pouvoir remédier à l'incapacité des simulateurs de vol actuels à produire une bonne simulation de mouvement en translation verticale (appelée le *heave*). Donc, si les mouvements en translation doivent être effectués à hautes fréquences, il est primordial de sélectionner une architecture qui permet le découplage, sinon ces mouvements se répercuteront au niveau des autres actionneurs. Ainsi, comme il est mentionné au tableau 4.1, l'architecture du MPS3DDL ne peut convenir à des mouvements en translation à hautes fréquences, le MPS4DDL doit être utilisé uniquement pour certaines configurations spéciales, tandis que le MHS4DDL permet un découplage en tout temps. Toutefois, si tous les degrés de liberté sont sollicités à de basses fréquences, alors les 3 architectures sont en mesure de répondre adéquatement aux mouvements désirés à la plate-forme.

D'autre part, pour qualifier le niveau de performance d'un manipulateur par rapport à un autre, avec le grand nombre de corps qui composent chacun des mécanismes et les différentes solutions que l'on peut choisir pour le PGI, il faut considérer l'évaluation des aspects suivants

- la région où peut manoeuvrer le mécanisme (espace atteignable);
- les interférences mécaniques et les limites articulaires qui contribuent à limiter l'espace atteignable;
- le niveau de précision du mécanisme à l'intérieur de l'espace atteignable (dextérité) et le lieu des singularités;

- le design des différents corps (masses et inerties) qui affecte les efforts requis aux actionneurs.

Bien que les degrés de liberté des 3 mécanismes font de ceux-ci, à la base, d'excellents candidats pour la conception d'un simulateur de vol et que l'analyse dynamique effectuée a permis de bien les connaître sous un aspect géométrique, cinématique et dynamique, la réalisation de ces évaluations complémentaires donnerait des informations très utiles pour faciliter la sélection de la plus adéquate de ces nouvelles architectures. Pour l'instant, nous pouvons seulement affirmer qu'en raison de l'architecture hybride du MHS4DDL, qui permet un découplage complet entre le degré de liberté en translation de ceux en rotation pour toute trajectoire donnée à la plate-forme, celui-ci semble le mécanisme le plus prometteur pour la réalisation d'un simulateur de vol.

Références

- [1] Merlet, J.-P., 1997, “Les robots parallèles”, *Hermès*, 2^e édition, Paris, 367 p.
- [2] Pouliot, N., Gosselin, C. et Nahon, M., 1998, “Motion simulation capabilities of three-degree-of-freedom flight simulators”, *AIAA Journal of Aircraft*, Vol. 35, No. 1, pp. 9–17.
- [3] Zlatanov, D. et Gosselin, C., 2001, “A Family of New Parallel Architectures with Four Degrees of Freedom”, Proceedings of the *Second Workshop on Computational Kinematics*, Seoul, Korea, 19–22 mai, pp. 57–66.
- [4] Gosselin, C. et Lavoie, E., 1993, “On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators”, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 12, No. 4, pp. 394–402.
- [5] Gosselin, C. et Hamel, J.-F., 1994, “The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device”, Proceedings of the *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, mai, pp. 781–786.
- [6] Gagné, M., 1994, “Analyse dynamique d’un manipulateur parallèle sphérique à trois degrés de liberté”, *Rapport de stage*, Département de Génie Mécanique, Université Laval, 41 p.
- [7] Gosselin, C. et Gagné, M., 1995, “Dynamic models for spherical parallel manipulators”, Proceedings of the *Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Milano, Italy, 29 août – 2 septembre, pp. 2032–2036.

- [8] Gosselin, C., Perreault, L., et Vaillancourt, C., 1995, "Simulation and computer-aided kinematic design of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators", *Journal of Robotic Systems*, Vol. 12, No. 12, pp. 857–869.
- [9] Gosselin, C., St-Pierre, E. et Gagné, M., 1996, "On the development of the agile eye: mechanical design, control issues and experimentation", *IEEE Robotics and Automation Society Magazine*, Vol. 3, No. 4, pp. 29–37.
- [10] Gosselin, C. et St-Pierre, E., 1997, "Development and experimentation of a fast three-degree-of-freedom camera-orienting device", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 16, No. 5, pp. 619–630.
- [11] Gagné, M., et Gosselin, C., 1997, "Commande dynamique d'un manipulateur parallèle sphérique à 3 ddl", *Le 16^e Congrès canadien de mécanique appliquée*, Québec, Canada, 1–5 juin, pp. 503–504.
- [12] Gosselin, C. et Angeles, J., 1990, "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 281–290.
- [13] Gosselin, C., 1990, "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, No. 3, pp. 331–336.
- [14] Merlet, J.-P., et Gosselin, C., 1991, "Nouvelle architecture pour un manipulateur parallèle à six degrés de liberté", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 26, No. 1, pp. 77–90.
- [15] Gosselin, C., 1996, "Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of planar and spatial parallel manipulators", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, No. 1, pp. 22–28.
- [16] Wang, J., et Gosselin, C., 1997, "Dynamic analysis of spatial four-degree-of-freedom parallel manipulators", *Proceedings of the 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sacramento, CA, September 14–17, Paper No. DETC97DAC3759.
- [17] Wang, J. et Gosselin, C., 1998, "A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators", *Multibody System Dynamics*, Vol 2., No. 3, pp. 317–334.
- [18] Tsai, L.-W., 2000, "Solving the Inverse Dynamics of a Stewart-Gough Manipulator by the Principle of Virtual Work", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, No. 1, pp. 3–9.

Annexe A

Modélisation des corps du MPS3DDL

A.1 Membrures

La masse des membrures est donnée par

$$m_k = \rho a^2 l_k, \quad k = 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12 \quad (\text{A.1})$$

et l'inertie de celles-ci calculée au centre de masse et exprimée dans le repère local de chaque membrure est

$$I_k = \begin{bmatrix} \frac{m_k a^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_k (a^2 + l_k^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_k (a^2 + l_k^2)}{12} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 5, 6 \quad (\text{A.2})$$

$$I_k = \begin{bmatrix} \frac{m_k(a^2+l_k^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_k a^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_k(a^2+l_k^2)}{12} \end{bmatrix}, \quad k = 7,11,12 \quad (\text{A.3})$$

Or, les CDM des membrures sont situés dans le repère fixe avec les vecteurs suivants

$$\mathbf{c}_{m\ 1} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{c}_{m\ 2} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{c}_{m\ 5} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{c}_{m\ 6} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{c}_{m\ 7} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{c}_{m\ 11} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_4 + \mathbf{c}_4) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{c}_{m\ 12} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4) \quad (\text{A.10})$$

A.2 Solide 1

La figure A.1 montre la géométrie du solide 1 composé de la plate-forme et des membrures l_3 , l_4 et l_{13} . Pour travailler avec des géométries simples, ce solide est segmenté en quatre corps ($\nu = 1, \dots, 4$) ayant des CDM positionnés en G_ν . En segmentant ce solide, on évalue sa masse par l'équation suivante

$$m_{solide\ 1} = \sum_{\nu=1}^4 m_{\nu\ solide\ 1} \quad (\text{A.11})$$

avec

$$m_{1\ solide\ 1} = \rho \left(l_4 - \frac{l_{14}}{2} \right) a^2 \quad (\text{A.12})$$

$$m_{2\ solide\ 1} = \rho l_{14}^2 a \quad (\text{A.13})$$

$$m_{3\ solide\ 1} = \rho \left(l_3 - \frac{l_{14}}{2} \right) a^2 \quad (\text{A.14})$$

$$m_{4\ solide\ 1} = \rho \left(l_{13} - \frac{a}{2} \right) a^2 \quad (\text{A.15})$$

L'orientation du solide 1 est donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} (voir l'équation(1.5)) du repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$ par rapport au repère fixe. Ainsi, le CDM de chacun des 4

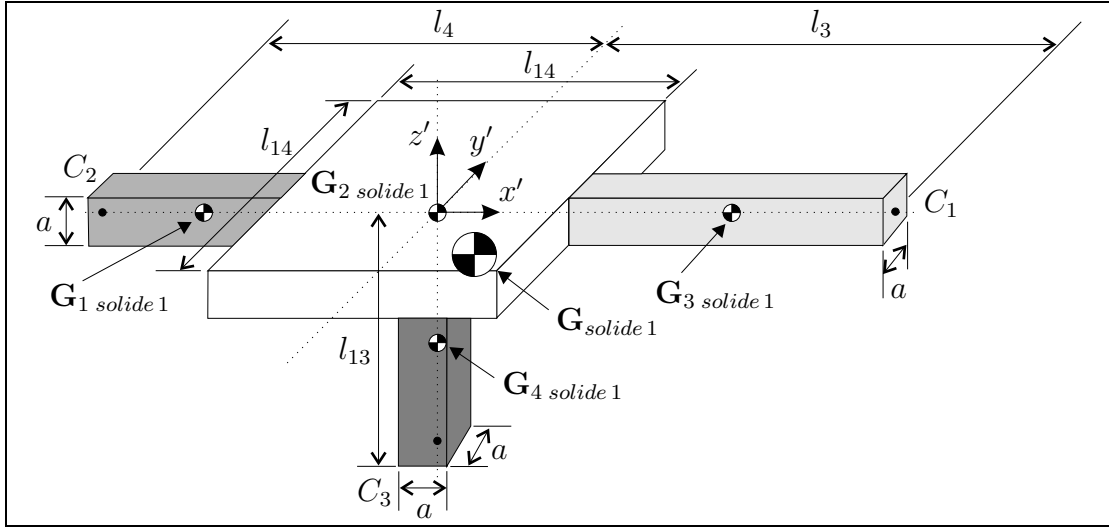


FIG. A.1 – Solide 1.

corps du solide 1, exprimé dans ce repère mobile, est

$$\mathbf{G}_{1 \text{ solide 1}} = \left[-\frac{l_4}{2} - \frac{l_{14}}{4}, 0, 0 \right]^T \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{G}_{2 \text{ solide 1}} = [0, 0, 0]^T \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{G}_{3 \text{ solide 1}} = \left[\frac{l_3}{2} + \frac{l_{14}}{4}, 0, 0 \right]^T \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{G}_{4 \text{ solide 1}} = \left[0, 0, -\frac{l_{13}}{2} - \frac{a}{4} \right]^T \quad (\text{A.19})$$

et le CDM du solide 1 est

$$\mathbf{G}_{\text{solide 1}} = [G_{\text{solide 1 } x'}, G_{\text{solide 1 } y'}, G_{\text{solide 1 } z'}]^T \quad (\text{A.20})$$

avec

$$\begin{aligned} G_{\text{solide 1 } x'} &= \frac{\sum_{\nu=1}^4 G_{\nu \text{ solide 1 } x'} m_{\nu \text{ solide 1}}}{\sum_{\nu=1}^4 m_{\nu \text{ solide 1}}} \\ &= \frac{(-\frac{l_4}{2} - \frac{l_{14}}{4})(l_4 - \frac{l_{14}}{2})a + (\frac{l_3}{2} + \frac{l_{14}}{4})(l_3 - \frac{l_{14}}{2})a}{(l_4 - \frac{l_{14}}{2})a + l_{14}^2 + (l_3 - \frac{l_{14}}{2})a + (l_{13} - \frac{a}{2})a} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$G_{\text{solide 1 } y'} = \frac{\sum_{\nu=1}^4 G_{\nu \text{ solide 1 } y'} m_{\nu \text{ solide 1}}}{\sum_{\nu=1}^4 m_{\nu \text{ solide 1}}} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} G_{\text{solide 1 } z'} &= \frac{\sum_{\nu=1}^4 G_{\nu \text{ solide 1 } z'} m_{\nu \text{ solide 1}}}{\sum_{\nu=1}^4 m_{\nu \text{ solide 1}}} \\ &= \frac{(-\frac{l_{13}}{2} - \frac{a}{4})(l_{13} - \frac{a}{2})a}{(l_4 - \frac{l_{14}}{2})a + l_{14}^2 + (l_3 - \frac{l_{14}}{2})a + (l_{13} - \frac{a}{2})a} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

De ces équations, on peut observer que si $l_3 = l_4$ alors $G_{solide\ 1\ x'} = 0$ et que si $l_{13} = \frac{a}{2}$ alors $G_{solide\ 1\ z'} = 0$. Pour ce qui est de la position du CDM du solide 1 dans le repère fixe, il est localisé par

$$\mathbf{c}_{m\ solide\ 1} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{G}_{solide\ 1} \quad (\text{A.24})$$

Concernant les matrices d'inertie des 4 corps du solide 1 ($\nu = 1, \dots, 4$), exprimées dans le repère mobile au CDM du solide, on a que

$$\mathbf{I}_{\nu\ solide\ 1} = \begin{bmatrix} I_{x'x'\ \nu\ solide\ 1} & -I_{x'y'\ \nu\ solide\ 1} & -I_{x'z'\ \nu\ solide\ 1} \\ -I_{y'x'\ \nu\ solide\ 1} & I_{y'y'\ \nu\ solide\ 1} & -I_{y'z'\ \nu\ solide\ 1} \\ -I_{z'x'\ \nu\ solide\ 1} & -I_{z'y'\ \nu\ solide\ 1} & I_{z'z'\ \nu\ solide\ 1} \end{bmatrix}, \quad \nu = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.25})$$

où ($I_{x'y'\ \nu\ solide\ 1} = I_{y'x'\ \nu\ solide\ 1}$, $I_{x'z'\ \nu\ solide\ 1} = I_{z'x'\ \nu\ solide\ 1}$ et $I_{y'z'\ \nu\ solide\ 1} = I_{z'y'\ \nu\ solide\ 1}$ pour $\nu = 1, \dots, 4$)

$$I_{x'x'\ 1\ solide\ 1} = \frac{m_{1\ solide\ 1}}{12} [a^2 + a^2] + m_{1\ solide\ 1} [(G_{1\ solide\ 1\ y'} - G_{solide\ 1\ y'})^2 + (G_{1\ solide\ 1\ z'} - G_{solide\ 1\ z'})^2] \quad (\text{A.26})$$

$$I_{y'y'\ 1\ solide\ 1} = \frac{m_{1\ solide\ 1}}{12} \left[a^2 + \left(l_4 - \frac{l_{14}}{2} \right)^2 \right] + m_{1\ solide\ 1} [(G_{1\ solide\ 1\ x'} - G_{solide\ 1\ x'})^2 + (G_{1\ solide\ 1\ z'} - G_{solide\ 1\ z'})^2] \quad (\text{A.27})$$

$$I_{z'z'\ 1\ solide\ 1} = \frac{m_{1\ solide\ 1}}{12} \left[a^2 + \left(l_4 - \frac{l_{14}}{2} \right)^2 \right] + m_{1\ solide\ 1} [(G_{1\ solide\ 1\ x'} - G_{solide\ 1\ x'})^2 + (G_{1\ solide\ 1\ y'} - G_{solide\ 1\ y'})^2] \quad (\text{A.28})$$

$$I_{x'x'\ 2\ solide\ 1} = \frac{m_{2\ solide\ 1}}{12} [a^2 + l_{14}^2] + m_{2\ solide\ 1} [(G_{2\ solide\ 1\ y'} - G_{solide\ 1\ y'})^2 + (G_{2\ solide\ 1\ z'} - G_{solide\ 1\ z'})^2] \quad (\text{A.29})$$

$$I_{y'y'\ 2\ solide\ 1} = \frac{m_{2\ solide\ 1}}{12} [a^2 + l_{14}^2] + m_{2\ solide\ 1} [(G_{2\ solide\ 1\ x'} - G_{solide\ 1\ x'})^2 + (G_{2\ solide\ 1\ z'} - G_{solide\ 1\ z'})^2] \quad (\text{A.30})$$

$$I_{z'z'\ 2\ solide\ 1} = \frac{m_{2\ solide\ 1}}{12} [l_{14}^2 + l_{14}^2] + m_{2\ solide\ 1} [(G_{2\ solide\ 1\ x'} - G_{solide\ 1\ x'})^2 + (G_{2\ solide\ 1\ y'} - G_{solide\ 1\ y'})^2] \quad (\text{A.31})$$

$$I_{x'x'\ 3\ solide\ 1} = \frac{m_{3\ solide\ 1}}{12} [a^2 + a^2] + m_{3\ solide\ 1} [(G_{3\ solide\ 1\ y'} - G_{solide\ 1\ y'})^2 + (G_{3\ solide\ 1\ z'} - G_{solide\ 1\ z'})^2] \quad (\text{A.32})$$

$$I_{y'y'\ 3\ solide\ 1} = \frac{m_{3\ solide\ 1}}{12} \left[a^2 + \left(l_3 - \frac{l_{14}}{2} \right)^2 \right] + m_{3\ solide\ 1} [(G_{3\ solide\ 1\ x'} - G_{solide\ 1\ x'})^2 + (G_{3\ solide\ 1\ z'} - G_{solide\ 1\ z'})^2] \quad (\text{A.33})$$

$$I_{z'z'\ 3\ solide\ 1} = \frac{m_{3\ solide\ 1}}{12} \left[a^2 + \left(l_3 - \frac{l_{14}}{2} \right)^2 \right] + m_{1\ solide\ 1} [(G_{3\ solide\ 1\ x'} -$$

$$I_{x'x'4\text{ solide }1} = \frac{G_{\text{solide }1\ x'}}{12} + (G_{3\ \text{solide }1\ y'} - G_{\text{solide }1\ y'})^2 \quad (\text{A.34})$$

$$I_{y'y'4\text{ solide }1} = \frac{m_{4\ \text{solide }1}}{12} \left[a^2 + \left(l_{13} - \frac{a}{2} \right)^2 \right] + m_{4\ \text{solide }1} [(G_{4\ \text{solide }1\ y'} - G_{\text{solide }1\ y'})^2 + (G_{4\ \text{solide }1\ z'} - G_{\text{solide }1\ z'})^2] \quad (\text{A.35})$$

$$I_{z'z'4\text{ solide }1} = \frac{m_{4\ \text{solide }1}}{12} \left[a^2 + \left(l_{13} - \frac{a}{2} \right)^2 \right] + m_{4\ \text{solide }1} [(G_{4\ \text{solide }1\ x'} - G_{\text{solide }1\ x'})^2 + (G_{4\ \text{solide }1\ z'} - G_{\text{solide }1\ z'})^2] \quad (\text{A.36})$$

$$I_{x'y'\nu\text{ solide }1} = \frac{m_{4\ \text{solide }1}}{12} [a^2 + a^2] + m_{4\ \text{solide }1} [(G_{4\ \text{solide }1\ x'} - G_{\text{solide }1\ x'})^2 + (G_{4\ \text{solide }1\ y'} - G_{\text{solide }1\ y'})^2] \quad (\text{A.37})$$

$$I_{x'y'\nu\text{ solide }1} = m_{\nu\ \text{solide }1} (G_{\nu\ \text{solide }1\ x'} - G_{\text{solide }1\ x'}) (G_{\nu\ \text{solide }1\ y'} - G_{\text{solide }1\ y'}), \quad \nu = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.38})$$

$$I_{y'z'\nu\text{ solide }1} = m_{\nu\ \text{solide }1} (G_{\nu\ \text{solide }1\ y'} - G_{\text{solide }1\ y'}) (G_{\nu\ \text{solide }1\ z'} - G_{\text{solide }1\ z'}), \quad \nu = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.39})$$

$$I_{x'z'\nu\text{ solide }1} = m_{1\ \text{solide }1} (G_{\nu\ \text{solide }1\ x'} - G_{\text{solide }1\ x'}) (G_{\nu\ \text{solide }1\ z'} - G_{\text{solide }1\ z'}), \quad \nu = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.40})$$

ce qui nous conduit à l'évaluation de la matrice d'inertie au CDM du solide 1, exprimée dans le repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$, avec

$$\mathbf{I}_{\text{solide }1} = \sum_{\nu=1}^4 \mathbf{I}_{\nu\ \text{solide }1} \quad (\text{A.41})$$

A.3 Solide 2

La figure A.2 montre le solide 2 où un repère \mathcal{R}_2 , centré en B_3 , est fixé au solide afin de déterminer son orientation par rapport au repère fixe. Ainsi, la matrice de rotation associée au \mathcal{R}_2 est

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 \\ 0 & \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

avec

$$\beta_2 = \beta + \beta_3 \quad (\text{A.43})$$

$$\beta_3 = \text{atan}(G_{\text{solide }2\ z_2}/G_{\text{solide }2\ y_2}) \quad (\text{A.44})$$

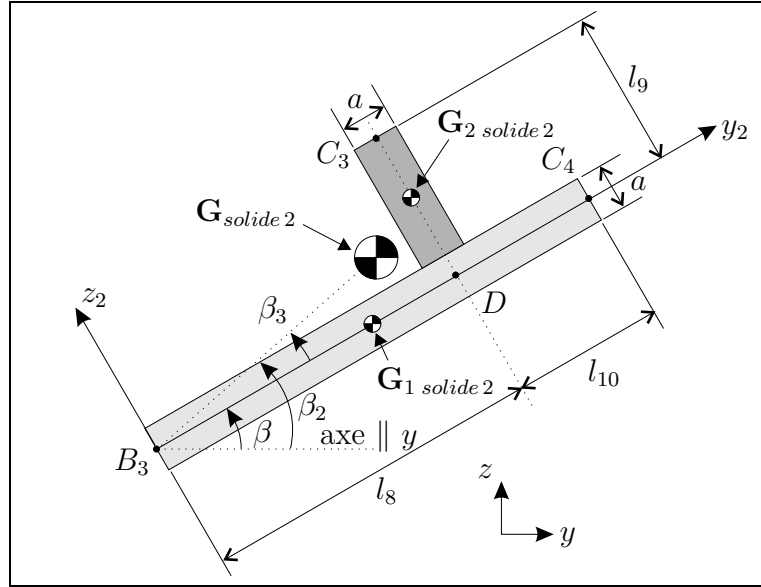


FIG. A.2 – Solide 2.

où β est calculé à l'équation (1.19). Pour ce qui est de $G_{solide\ 2\ y_2}$ et $G_{solide\ 2\ z_2}$, ces valeurs seront évaluées aux équations et (A.56) et (A.57).

Notons qu'en dérivant par rapport au temps les équations (A.42) et (A.43), on obtient

$$\dot{\mathbf{Q}}_2 = \dot{\beta}_2 \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_2 \quad (\text{A.45})$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_2 = \ddot{\beta}_2 \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_2 + \dot{\beta}_2^2 \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_3 \mathbf{Q}_2 \quad (\text{A.46})$$

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\beta} \quad (\text{A.47})$$

$$\ddot{\beta}_2 = \ddot{\beta} \quad (\text{A.48})$$

Or, tout comme le solide 1, afin de travailler avec des géométries plus simples, le solide 2 est segmenté en deux portions (voir la figure A.2). Donc, la masse du solide 2 est donnée par

$$m_{solide\ 2} = \sum_{\mu=1}^2 m_{\mu\ solide\ 2} \quad (\text{A.49})$$

avec

$$m_{1\ solide\ 1} = \rho (l_8 + l_{10}) a^2 \quad (\text{A.50})$$

$$m_{2\ solide\ 1} = \rho \left(l_9 - \frac{a}{2} \right) a^2 \quad (\text{A.51})$$

Le CDM de chaque corps du solide 2, exprimé dans le repère \mathcal{R}_2 , est

$$\mathbf{G}_{1 \text{ solide } 2} = \left[0, \frac{l_8 + l_{10}}{2}, 0 \right]^T \quad (\text{A.52})$$

$$\mathbf{G}_{2 \text{ solide } 2} = \left[0, l_8, \frac{l_9}{2} + \frac{a}{4} \right]^T \quad (\text{A.53})$$

et le CDM du solide 2 est

$$\mathbf{G}_{\text{solide } 2} = [G_{\text{solide } 2 \ x_2}, G_{\text{solide } 2 \ y_2}, G_{\text{solide } 2 \ z_2}]^T \quad (\text{A.54})$$

avec

$$G_{\text{solide } 2 \ x_2} = \frac{\sum_{\mu=1}^2 G_{\mu \text{ solide } 2 \ x_2} m_{\mu \text{ solide } 2}}{\sum_{\mu=1}^2 m_{\mu \text{ solide } 2}} = 0 \quad (\text{A.55})$$

$$G_{\text{solide } 2 \ y_2} = \frac{\sum_{\mu=1}^2 G_{\mu \text{ solide } 2 \ y_2} m_{\mu \text{ solide } 2}}{\sum_{\mu=1}^2 m_{\mu \text{ solide } 2}} = \frac{\frac{(l_8 + l_{10})^2}{2} + l_8(l_9 - \frac{a}{2})}{l_8 + l_9 + l_{10} - \frac{a}{2}} \quad (\text{A.56})$$

$$G_{\text{solide } 2 \ z_2} = \frac{\sum_{\mu=1}^2 G_{\mu \text{ solide } 2 \ z_2} m_{\mu \text{ solide } 2}}{\sum_{\mu=1}^2 m_{\mu \text{ solide } 2}} = \frac{(\frac{l_9}{2} + \frac{a}{4})(l_9 - \frac{a}{2})}{l_8 + l_9 + l_{10} - \frac{a}{2}} \quad (\text{A.57})$$

On peut voir de ces équations que si $l_9 = \frac{a}{2}$ alors $G_{\text{solide } 2 \ z_2} = 0$. Pour ce qui est du positionnement du CDM du solide 2 dans le repère fixe, il est localisé par

$$\mathbf{c}_{m \text{ solide } 2} = \mathbf{b}_3 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{G}_{\text{solide } 2} \quad (\text{A.58})$$

Concernant les matrices d'inertie des deux corps du solide 2 ($\mu = 1, 2$), exprimées dans le repère \mathcal{R}_2 au CDM du solide, on a que

$$\mathbf{I}_{\mu \text{ solide } 2} = \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2 \ \mu \text{ solide } 2} & -I_{x_2 y_2 \ \mu \text{ solide } 2} & -I_{x_2 z_2 \ \mu \text{ solide } 2} \\ -I_{y_2 x_2 \ \mu \text{ solide } 2} & I_{y_2 y_2 \ \mu \text{ solide } 2} & -I_{y_2 z_2 \ \mu \text{ solide } 2} \\ -I_{z_2 x_2 \ \mu \text{ solide } 2} & -I_{z_2 y_2 \ \mu \text{ solide } 2} & I_{z_2 z_2 \ \mu \text{ solide } 2} \end{bmatrix}, \quad \mu = 1, 2 \quad (\text{A.59})$$

où ($I_{x_2 y_2 \ \mu \text{ solide } 2} = I_{y_2 x_2 \ \mu \text{ solide } 2}$, $I_{x_2 z_2 \ \mu \text{ solide } 2} = I_{z_2 x_2 \ \mu \text{ solide } 2}$ et $I_{y_2 z_2 \ \mu \text{ solide } 2} = I_{z_2 y_2 \ \mu \text{ solide } 2}$ pour $\mu = 1, 2$)

$$I_{x_2 x_2 \ 1 \text{ solide } 2} = \frac{m_{1 \text{ solide } 2}}{12} [(l_8 + l_{10})^2 + a^2] + m_{1 \text{ solide } 2} [(G_{1 \text{ solide } 2 \ y_2} - G_{\text{solide } 2 \ y_2})^2 + (G_{1 \text{ solide } 2 \ z_2} - G_{\text{solide } 2 \ z_2})^2] \quad (\text{A.60})$$

$$I_{y_2 y_2 \ 1 \text{ solide } 2} = \frac{m_{1 \text{ solide } 2}}{12} [a^2 + a^2] + m_{1 \text{ solide } 2} [(G_{1 \text{ solide } 2 \ x_2} - G_{\text{solide } 2 \ x_2})^2 + (G_{1 \text{ solide } 2 \ z_2} - G_{\text{solide } 2 \ z_2})^2] \quad (\text{A.61})$$

$$I_{z_2 z_2 1 \text{ solide } 2} = \frac{m_{1 \text{ solide } 2}}{12} [(l_8 + l_{10})^2 + a^2] + m_{1 \text{ solide } 2} [(G_{1 \text{ solide } 2 x_2} - G_{\text{solide } 2 x_2})^2 + (G_{1 \text{ solide } 2 y_2} - G_{\text{solide } 2 y_2})^2] \quad (\text{A.62})$$

$$I_{x_2 x_2 2 \text{ solide } 2} = \frac{m_{2 \text{ solide } 2}}{12} \left[\left(l_9 - \frac{a}{2} \right)^2 + a^2 \right] + m_{2 \text{ solide } 2} [(G_{2 \text{ solide } 2 y_2} - G_{\text{solide } 2 y_2})^2 + (G_{2 \text{ solide } 2 z_2} - G_{\text{solide } 2 z_2})^2] \quad (\text{A.63})$$

$$I_{y_2 y_2 2 \text{ solide } 2} = \frac{m_{2 \text{ solide } 2}}{12} \left[\left(l_9 - \frac{a}{2} \right)^2 + a^2 \right] + m_{2 \text{ solide } 2} [(G_{2 \text{ solide } 2 x_2} - G_{\text{solide } 2 x_2})^2 + (G_{2 \text{ solide } 2 z_2} - G_{\text{solide } 2 z_2})^2] \quad (\text{A.64})$$

$$I_{z_2 z_2 2 \text{ solide } 2} = \frac{m_{2 \text{ solide } 2}}{12} [a^2 + a^2] + m_{2 \text{ solide } 2} [(G_{2 \text{ solide } 2 x_2} - G_{\text{solide } 2 x_2})^2 + (G_{2 \text{ solide } 2 y_2} - G_{\text{solide } 2 y_2})^2] \quad (\text{A.65})$$

$$I_{x_2 y_2 \mu \text{ solide } 2} = m_{\mu \text{ solide } 2} (G_{\mu \text{ solide } 2 x_2} - G_{\text{solide } 2 x_2})(G_{\mu \text{ solide } 2 y_2} - G_{\text{solide } 2 y_2}), \quad \mu = 1, 2 \quad (\text{A.66})$$

$$I_{y_2 z_2 \mu \text{ solide } 2} = m_{\mu \text{ solide } 2} (G_{\mu \text{ solide } 2 y_2} - G_{\text{solide } 2 y_2})(G_{\mu \text{ solide } 2 z_2} - G_{\text{solide } 2 z_2}), \quad \mu = 1, 2 \quad (\text{A.67})$$

$$I_{x_2 z_2 \mu \text{ solide } 2} = m_{\mu \text{ solide } 2} (G_{\mu \text{ solide } 2 x_2} - G_{\text{solide } 2 x_2})(G_{\mu \text{ solide } 2 z_2} - G_{\text{solide } 2 z_2}), \quad \mu = 1, 2 \quad (\text{A.68})$$

ce qui nous conduit à l'évaluation de la matrice d'inertie au CDM du solide 2, exprimée dans le repère mobile \mathcal{R}_2 , avec

$$\mathbf{I}_{\text{solide } 2} = \sum_{\mu=1}^2 \mathbf{I}_{\mu \text{ solide } 2} \quad (\text{A.69})$$

Annexe B

DCL des corps du MPS3DDL

B.1 DCL des membrures

La figure B.1 montre le DCL du corps 1 où les différentes réactions aux articulations (en A_1 et B_1) sont indiquées. Par convention, et à titre d'exemple, le sens de la réaction $-R_{B_1x}$ est selon l'axe x négatif puisque la réaction R_{B_1x} est dirigée selon l'axe x positif.

Il est à noter que les forces et les moments exercés au CDM de chaque corps ont été calculés aux équations (1.110) et (1.120). Ainsi, la somme des forces sur le corps 1 et la somme des moments évaluée au CDM du corps 1 conduisent aux équations suivantes

$$\sum \mathbf{F}|_{corps\ 1} = \begin{bmatrix} R_{A_1x} - R_{B_1x} \\ R_{A_1y} - R_{B_1y} \\ R_{A_1z} - R_{B_1z} \end{bmatrix} = m_1 \ddot{\mathbf{c}}_{m\ 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_1 \quad (\text{B.1})$$

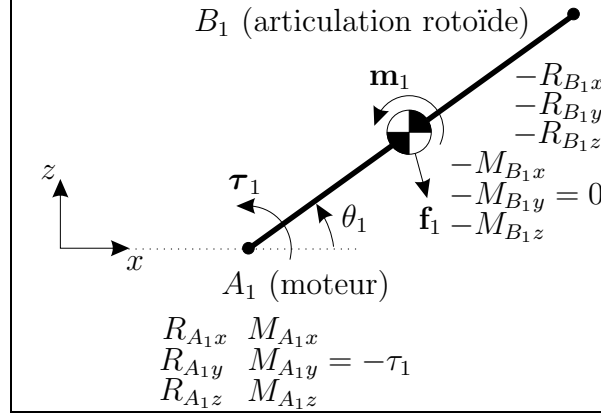


FIG. B.1 – DCL du corps 1.

$$\begin{aligned}
 \sum \mathbf{M} \Big|_{CDM \text{ du corps } 1} &= \begin{bmatrix} M_{A1x} - M_{B1x} + (R_{A1y} + R_{B1y}) \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \\ -\tau_1 - (R_{A1x} + R_{B1x}) \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 + (R_{A1z} + R_{B1z}) \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \\ M_{A1z} - M_{B1z} - (R_{A1y} + R_{B1y}) \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{Q}_{I1} \mathbf{I}_1 \mathbf{Q}_{I1}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{Q}_{I1} \mathbf{I}_1 \mathbf{Q}_{I1}^T \boldsymbol{\omega}_1) = -\mathbf{m}_1 \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

Les DCL des corps 2, 5 et 6 sont similaires à celui du corps 1 puisque ces membrures sont toutes positionnées dans le même plan. Pour ce qui est du DCL du corps 2, les réactions aux articulations B_1 (articulation rotoïde) et C_1 (articulation sphérique) sont

- en B_1 : $R_{B1x}, R_{B1y}, R_{B1z}, M_{B1x}, M_{B1y} = 0$ et M_{B1z} .
- en C_1 : $-R_{C1x}, -R_{C1y}, -R_{C1z}, -M_{C1x} = 0, -M_{C1y} = 0$ et $-M_{C1z} = 0$.

ce qui nous conduit aux équations suivantes

$$\sum \mathbf{F} \Big|_{\text{corps } 2} = \begin{bmatrix} R_{B1x} - R_{C1x} \\ R_{B1y} - R_{C1y} \\ R_{B1z} - R_{C1z} \end{bmatrix} = m_2 \ddot{\mathbf{c}}_{m2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_2 \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
 \sum \mathbf{M} \Big|_{CDM \text{ du corps } 2} &= \begin{bmatrix} M_{B1x} + (R_{B1y} + R_{C1y}) \frac{l_2}{2} \sin \alpha_1 \\ -(R_{B1x} + R_{C1x}) \frac{l_2}{2} \sin \alpha_1 + (R_{B1z} + R_{C1z}) \frac{l_2}{2} \cos \alpha_1 \\ M_{B1z} - (R_{B1y} + R_{C1y}) \frac{l_2}{2} \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{Q}_{I2} \mathbf{I}_2 \mathbf{Q}_{I2}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{Q}_{I2} \mathbf{I}_2 \mathbf{Q}_{I2}^T \boldsymbol{\omega}_2) = -\mathbf{m}_2 \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Concernant le DCL du corps 5, les réactions aux articulations B_2 (articulation

rotoïde) et C_2 (articulation sphérique) sont

- en B_2 : $R_{B_2x}, R_{B_2y}, R_{B_2z}, M_{B_2x}, M_{B_2y} = 0$ et M_{B_2z} .
- en C_2 : $-R_{C_2x}, -R_{C_2y}, -R_{C_2z}, -M_{C_2x} = 0, -M_{C_2y} = 0$ et $-M_{C_2z} = 0$.

et on obtient

$$\sum \mathbf{F} \Big|_{\text{corps } 5} = \begin{bmatrix} R_{B_2x} - R_{C_2x} \\ R_{B_2y} - R_{C_2y} \\ R_{B_2z} - R_{C_2z} \end{bmatrix} = m_5 \ddot{\mathbf{c}}_{m5} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_5 g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_5 \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} \Big|_{\text{CDM du corps } 5} &= \begin{bmatrix} M_{B_2x} + (R_{B_2y} + R_{C_2y}) \frac{l_5}{2} \sin \alpha_2 \\ -(R_{B_2x} + R_{C_2x}) \frac{l_5}{2} \sin \alpha_2 + (R_{B_2z} + R_{C_2z}) \frac{l_5}{2} \cos \alpha_2 \\ M_{B_2z} - (R_{B_2y} + R_{C_2y}) \frac{l_5}{2} \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{I5} \mathbf{I}_5 \mathbf{Q}_{I5}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_5 + \boldsymbol{\omega}_5 \times (\mathbf{Q}_{I5} \mathbf{I}_5 \mathbf{Q}_{I5}^T \boldsymbol{\omega}_5) = -\mathbf{m}_5 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Pour le DCL du corps 6, on pose que les réactions aux articulations A_2 (articulation rotoïde motorisée) et B_2 (articulation rotoïde) sont

- en A_2 : $R_{A_2x}, R_{A_2y}, R_{A_2z}, M_{A_2x}, M_{A_2y} = -\tau_2$ et M_{A_2z} .
- en B_2 : $-R_{B_2x}, -R_{B_2y}, -R_{B_2z}, -M_{B_2x}, -M_{B_2y} = 0$ et $-M_{B_2z}$.

et on tire que

$$\sum \mathbf{F} \Big|_{\text{corps } 6} = \begin{bmatrix} R_{A_2x} - R_{B_2x} \\ R_{A_2y} - R_{B_2y} \\ R_{A_2z} - R_{B_2z} \end{bmatrix} = m_6 \ddot{\mathbf{c}}_{m6} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_6 g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_6 \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} \Big|_{\text{CDM du corps } 6} &= \begin{bmatrix} M_{A_2x} - M_{B_2x} + (R_{A_2y} + R_{B_2y}) \frac{l_6}{2} \sin \theta_2 \\ -\tau_2 - (R_{A_2x} + R_{B_2x}) \frac{l_6}{2} \sin \theta_2 + (R_{A_2z} + R_{B_2z}) \frac{l_6}{2} \cos \theta_2 \\ M_{A_2z} - M_{B_2z} - (R_{A_2y} + R_{B_2y}) \frac{l_6}{2} \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{I6} \mathbf{I}_6 \mathbf{Q}_{I6}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_6 + \boldsymbol{\omega}_6 \times (\mathbf{Q}_{I6} \mathbf{I}_6 \mathbf{Q}_{I6}^T \boldsymbol{\omega}_6) = -\mathbf{m}_6 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dans le plan yz on retrouve les corps 7, 11 et 12. Le DCL du corps 7 est représenté à la figure B.2. Or, en considérant l'effet du cardan en B_3 avec $M_{B_3x7} = M_{B_3y7} = 0$, on

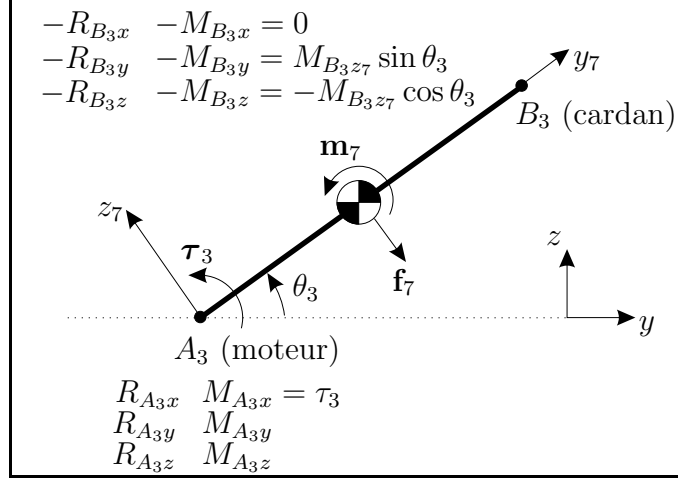


FIG. B.2 – DCL du corps 7.

tire que

$$\begin{bmatrix} M_{B_3x} \\ M_{B_3y} \\ M_{B_3z} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{I7} \begin{bmatrix} M_{B_3x_7} \\ M_{B_3y_7} \\ M_{B_3z_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_{B_3z_7} \sin \theta_3 \\ M_{B_3z_7} \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

où la matrice de rotation \mathbf{Q}_{I7} est présentée à l'équation (1.126). Ainsi, on obtient les équations suivantes

$$\sum \mathbf{F} \Big|_{\text{corps } 7} = \begin{bmatrix} R_{A_3x} - R_{B_3x} \\ R_{A_3y} - R_{B_3y} \\ R_{A_3z} - R_{B_3z} \end{bmatrix} = m_7 \ddot{\mathbf{c}}_{m_7} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_7 g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_7 \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} \Big|_{\text{CDM du corps } 7} &= \begin{bmatrix} \tau_3 + (R_{A_3y} + R_{B_3y}) \frac{l_7}{2} \sin \theta_3 - (R_{A_3z} + R_{B_3z}) \frac{l_7}{2} \cos \theta_3 \\ M_{A_3y} + M_{B_3z_7} \sin \theta_3 - (R_{A_3x} + R_{B_3x}) \frac{l_7}{2} \sin \theta_3 \\ M_{A_3z} - M_{B_3z_7} \cos \theta_3 + (R_{A_3x} + R_{B_3x}) \frac{l_7}{2} \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{I7} \mathbf{I}_7 \mathbf{Q}_{I7}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_7 + \boldsymbol{\omega}_7 \times (\mathbf{Q}_{I7} \mathbf{I}_7 \mathbf{Q}_{I7}^T \boldsymbol{\omega}_7) = -\mathbf{m}_7 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Concernant le DCL du corps 11, les réactions aux articulations B_4 (articulation rotoïde) et C_4 (articulation sphérique) sont

- en B_4 : $R_{B_4x}, R_{B_4y}, R_{B_4z}, M_{B_4x} = 0, M_{B_4y}$ et M_{B_4z} .
- en C_4 : $-R_{C_4x}, -R_{C_4y}, -R_{C_4z}, -M_{C_4x} = 0, -M_{C_4y} = 0$ et $-M_{C_4z} = 0$.

et on trouve que

$$\sum \mathbf{F} \Big|_{\text{corps 11}} = \begin{bmatrix} R_{B_4x} - R_{C_4x} \\ R_{B_4y} - R_{C_4y} \\ R_{B_4z} - R_{C_4z} \end{bmatrix} = m_{11} \ddot{\mathbf{c}}_{m\ 11} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{11}g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_{11} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} \Big|_{\text{CDM du corps 11}} &= \begin{bmatrix} (R_{B_4y} + R_{C_4y}) \frac{l_{11}}{2} \sin \alpha_4 - (R_{B_4z} + R_{C_4z}) \frac{l_{11}}{2} \cos \alpha_4 \\ M_{B_4y} - (R_{B_4x} + R_{C_4x}) \frac{l_{11}}{2} \sin \alpha_4 \\ M_{B_4z} + (R_{B_4x} + R_{C_4x}) \frac{l_{11}}{2} \cos \alpha_4 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{I11} \mathbf{I}_{11} \mathbf{Q}_{I11}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_{11} + \boldsymbol{\omega}_{11} \times (\mathbf{Q}_{I11} \mathbf{I}_{11} \mathbf{Q}_{I11}^T \boldsymbol{\omega}_{11}) \\ &= -\mathbf{m}_{11} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Pour le DCL du corps 12, on a que les réactions aux articulations A_4 (articulation rotoïde motorisée) et B_4 (articulation rotoïde) sont

- en A_4 : R_{A_4x} , R_{A_4y} , R_{A_4z} , $M_{A_4x} = 0$, M_{A_4y} et M_{A_4z} .
- en B_4 : $-R_{B_4x}$, $-R_{B_4y}$, $-R_{B_4z}$, $-M_{B_4x} = 0$, $-M_{B_4y}$ et $-M_{B_4z}$.

et on a que

$$\sum \mathbf{F} \Big|_{\text{corps 12}} = \begin{bmatrix} R_{A_4x} - R_{B_4x} \\ R_{A_4y} - R_{B_4y} \\ R_{A_4z} - R_{B_4z} \end{bmatrix} = m_{12} \ddot{\mathbf{c}}_{m\ 12} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{12}g \end{bmatrix} = -\mathbf{f}_{12} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} \Big|_{\text{CDM du corps 12}} &= \begin{bmatrix} (R_{A_4y} + R_{B_4y}) \frac{l_{12}}{2} \sin \theta_4 - (R_{A_4z} + R_{B_4z}) \frac{l_{12}}{2} \cos \theta_4 \\ M_{A_4y} + M_{B_4y} - (R_{A_4x} + R_{B_4x}) \frac{l_{12}}{2} \sin \theta_4 \\ M_{A_4z} - M_{B_4z} + (R_{A_4x} + R_{B_4x}) \frac{l_{12}}{2} \cos \theta_4 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{I12} \mathbf{I}_{12} \mathbf{Q}_{I12}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\mathbf{Q}_{I12} \mathbf{I}_{12} \mathbf{Q}_{I12}^T \boldsymbol{\omega}_{12}) \\ &= -\mathbf{m}_{12} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

B.2 DCL du solide 1

La figure B.3 montre le DCL du solide 1 avec les différentes réactions aux articulations C_1 , C_2 et C_3 . De cette façon, en effectuant un bilan des forces au niveau du solide

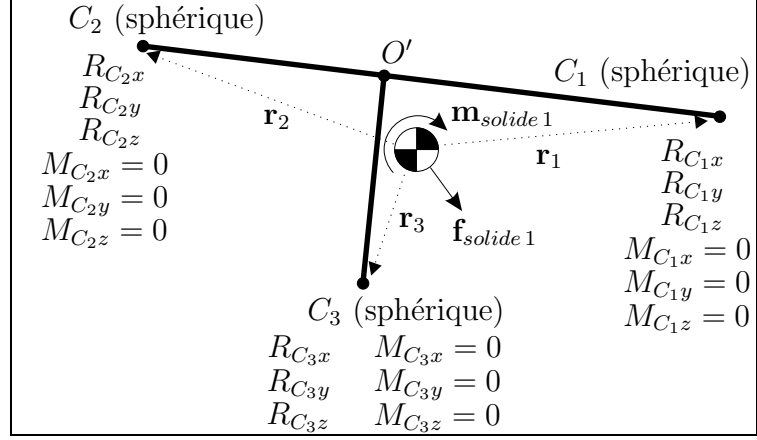


FIG. B.3 – DCL du solide 1.

1, on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} \Big|_{solide\ 1} &= \begin{bmatrix} R_{C1x} + R_{C2x} + R_{C3x} \\ R_{C1y} + R_{C2y} + R_{C3y} \\ R_{C1z} + R_{C2z} + R_{C3z} \end{bmatrix} = m_{solide\ 1} \ddot{\mathbf{c}}_{m\ solide\ 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{solide\ 1}g \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{f}_{solide\ 1} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Pour les moments, on a que les réactions aux articulations produisent les moments \mathbf{M}_q ($q = 1,2,3$) suivants

$$\mathbf{M}_q \Big|_{CDM\ du\ solide\ 1} = \mathbf{r}_q \times \mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} r_{qy}F_{qz} - r_{qz}F_{qy} \\ r_{qz}F_{qx} - r_{qx}F_{qz} \\ r_{qx}F_{qy} - r_{qy}F_{qx} \end{bmatrix}, \quad q = 1,2,3 \quad (\text{B.17})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_q &= \mathbf{c}_q - \mathbf{c}_{m\ solide\ 1} \\ &= [c_{qx} - c_{m\ solide\ 1\ x}, c_{qy} - c_{m\ solide\ 1\ y}, c_{qz} - c_{m\ solide\ 1\ z}]^T, \quad q = 1,2,3 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{F}_q = [R_{Cqx}, R_{Cqy}, R_{Cqz}]^T, \quad q = 1,2,3 \quad (\text{B.19})$$

où les vecteurs \mathbf{c}_q et $\mathbf{c}_{m\ solide\ 1}$ sont respectivement évalués aux équations (1.7) et (A.24).

Donc, la somme des moments au CDM du solide 1 devient

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M} \Big|_{CDM\ du\ solide\ 1} &= \sum_{q=1}^3 \mathbf{M}_q \Big|_{CDM\ du\ solide\ 1} \\ &= \mathbf{Q}_{I\ solide\ 1} \mathbf{I}_{solide\ 1} \mathbf{Q}_{I\ solide\ 1}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_{solide\ 1} + \\ &\quad \boldsymbol{\omega}_{solide\ 1} \times (\mathbf{Q}_{I\ solide\ 1} \mathbf{I}_{solide\ 1} \mathbf{Q}_{I\ solide\ 1}^T \boldsymbol{\omega}_{solide\ 1}) \\ &= -\mathbf{m}_{solide\ 1} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\sum_{q=1}^3 \mathbf{M}_q |_{CDM \text{ du solide } 1} = \begin{bmatrix} (c_{1y} - c_m \text{ solide } 1y)R_{C_{1z}} - (c_{1z} - c_m \text{ solide } 1z)R_{C_{1y}} + \\ (c_{2y} - c_m \text{ solide } 1y)R_{C_{2z}} - (c_{2z} - c_m \text{ solide } 1z)R_{C_{2y}} + \\ (c_{3y} - c_m \text{ solide } 1y)R_{C_{3z}} - (c_{3z} - c_m \text{ solide } 1z)R_{C_{3y}} \\ (c_{1z} - c_m \text{ solide } 1z)R_{C_{1x}} - (c_{1x} - c_m \text{ solide } 1x)R_{C_{1z}} + \\ (c_{2z} - c_m \text{ solide } 1z)R_{C_{2x}} - (c_{2x} - c_m \text{ solide } 1x)R_{C_{2z}} + \\ (c_{3z} - c_m \text{ solide } 1z)R_{C_{3x}} - (c_{3x} - c_m \text{ solide } 1x)R_{C_{3z}} \\ (c_{1x} - c_m \text{ solide } 1x)R_{C_{1y}} - (c_{1y} - c_m \text{ solide } 1y)R_{C_{1x}} + \\ (c_{2x} - c_m \text{ solide } 1x)R_{C_{2y}} - (c_{2y} - c_m \text{ solide } 1y)R_{C_{2x}} + \\ (c_{3x} - c_m \text{ solide } 1x)R_{C_{3y}} - (c_{3y} - c_m \text{ solide } 1y)R_{C_{3x}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

B.3 DCL du solide 2

La figure B.4 indique le DCL associé au solide 2. En effectuant le bilan des forces

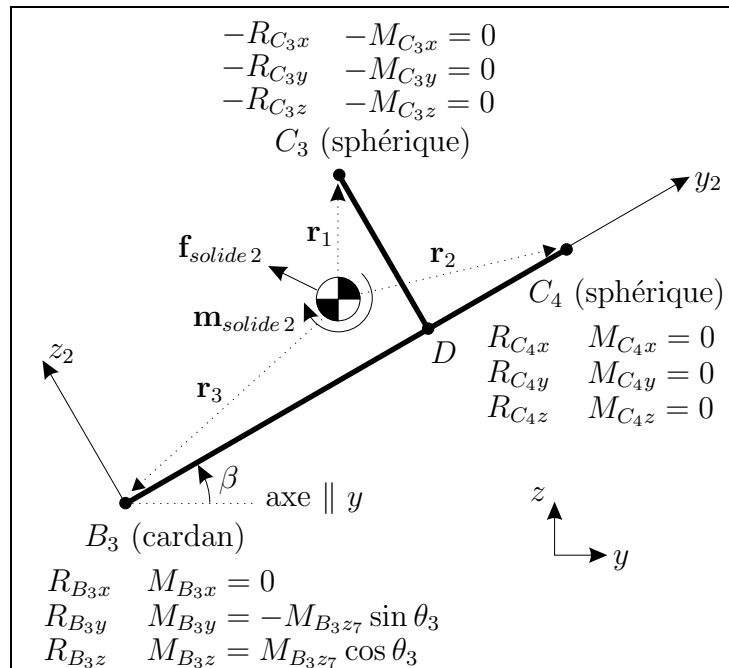


FIG. B.4 – DCL du solide 2.

sur le solide 2, on trouve les équations suivantes

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}|_{solide\ 1} &= \begin{bmatrix} R_{B_3x} + R_{C_4x} - R_{C_3x} \\ R_{B_3y} + R_{C_4y} - R_{C_3y} \\ R_{B_3z} + R_{C_4z} - R_{C_3z} \end{bmatrix} = m_{solide\ 2} \ddot{\mathbf{c}}_{m\ solide\ 2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{solide\ 2}g \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{f}_{solide\ 2} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Concernant les moments obtenus au CDM produits par les réactions aux articulations, on tire que

$$\mathbf{M}_q|_{CDM\ du\ solide\ 2} = \mathbf{r}_q \times \mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} r_{qy}F_{qz} - r_{qz}F_{qy} \\ r_{qz}F_{qx} - r_{qx}F_{qz} \\ r_{qx}F_{qy} - r_{qy}F_{qx} \end{bmatrix}, \quad q = 1,2,3 \quad (\text{B.23})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_{m\ solide\ 2} \\ &= [c_{3x} - c_{m\ solide\ 2\ x}, c_{3y} - c_{m\ solide\ 2\ y}, c_{3z} - c_{m\ solide\ 2\ z}]^T \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{c}_4 - \mathbf{c}_{m\ solide\ 2} \\ &= [c_{4x} - c_{m\ solide\ 2\ x}, c_{4y} - c_{m\ solide\ 2\ y}, c_{4z} - c_{m\ solide\ 2\ z}]^T \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \mathbf{b}_3 - \mathbf{c}_{m\ solide\ 2} \\ &= [b_{3x} - c_{m\ solide\ 2\ x}, b_{3y} - c_{m\ solide\ 2\ y}, b_{3z} - c_{m\ solide\ 2\ z}]^T \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{F}_1 = [-R_{C_3x}, -R_{C_3y}, -R_{C_3z}]^T \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{F}_2 = [R_{C_4x}, R_{C_4y}, R_{C_4z}]^T \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{F}_3 = [R_{B_3x}, R_{B_3y}, R_{B_3z}]^T \quad (\text{B.29})$$

où les vecteurs \mathbf{c}_3 , \mathbf{c}_4 , \mathbf{b}_3 et $\mathbf{c}_{m\ solide\ 2}$ sont respectivement évalués aux équations (1.7), (1.14), (1.42) et (A.58). Donc, la somme des moments au CDM du solide 2 est

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}|_{CDM\ du\ solide\ 2} &= \sum_{q=1}^3 \mathbf{M}_q|_{CDM\ du\ solide\ 2} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M_{B_3z7} \sin \theta_3 \\ M_{B_3z7} \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{I\ solide\ 2} \mathbf{I}_{solide\ 2} \mathbf{Q}_{I\ solide\ 2}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_{solide\ 2} + \\ &\quad \boldsymbol{\omega}_{solide\ 2} \times (\mathbf{Q}_{I\ solide\ 2} \mathbf{I}_{solide\ 2} \mathbf{Q}_{I\ solide\ 2}^T \boldsymbol{\omega}_{solide\ 2}) \\ &= -\mathbf{m}_{solide\ 2} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

avec

$$\sum_{q=1}^3 \mathbf{M}_q|_{CDM \text{ du solide } 2} = \left[\begin{array}{l}
(c_{3y} - c_m \text{ solide } 2y)(-R_{C_{3z}}) - (c_{3z} - c_m \text{ solide } 2z)(-R_{C_{3y}}) + \\
(c_{4y} - c_m \text{ solide } 2y)R_{C_{4z}} - (c_{4z} - c_m \text{ solide } 2z)R_{C_{4y}} + \\
(b_{3y} - c_m \text{ solide } 2y)R_{B_{3z}} - (b_{3z} - c_m \text{ solide } 2z)R_{B_{3y}} \\
(c_{3z} - c_m \text{ solide } 2z)(-R_{C_{3x}}) - (c_{3x} - c_m \text{ solide } 2x)(-R_{C_{3z}}) + \\
(c_{4z} - c_m \text{ solide } 2z)R_{C_{4x}} - (c_{4x} - c_m \text{ solide } 2x)R_{C_{4z}} + \\
(b_{3z} - c_m \text{ solide } 2z)R_{B_{3x}} - (b_{3x} - c_m \text{ solide } 2x)R_{B_{3z}} \\
(c_{3x} - c_m \text{ solide } 2x)(-R_{C_{3y}}) - (c_{3y} - c_m \text{ solide } 2y)(-R_{C_{3x}}) + \\
(c_{4x} - c_m \text{ solide } 2x)R_{C_{4y}} - (c_{4y} - c_m \text{ solide } 2y)R_{C_{4x}} + \\
(b_{3x} - c_m \text{ solide } 2x)R_{B_{3y}} - (b_{3y} - c_m \text{ solide } 2y)R_{B_{3x}}
\end{array} \right] \quad (\text{B.31})$$

Annexe C

Modélisation des corps du MPS4DDL

C.1 Tiges de longueur l

Puisque chaque tige est modélisée comme par un cylindre de longueur l et de rayon r_l , la masse est

$$m_{tigi} = \rho\pi r_l^2 l, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{C.1})$$

et la matrice d'inertie exprimée au CDM dans le repère \mathcal{R}_λ est exprimée par

$$\mathbf{I}_{tigi} = \begin{bmatrix} m_{tigi} \frac{r_l^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{tigi} \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r_l^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{tigi} \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r_l^2}{4} \right) \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{C.2})$$

De plus, la matrice de rotation du repère \mathcal{R}_λ par rapport au repère fixe est

$$\mathbf{Q}_{I_{tigi}i} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i}\mathbf{Q}_\lambda, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\mathbf{Q}_\lambda = \mathbf{Q}_{y_{\gamma_i}}|_{-\lambda} = \begin{bmatrix} \cos(-\lambda) & 0 & \sin(-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\lambda) & 0 & \cos(-\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

C.2 Plate-forme

On peut modéliser la plate-forme comme un disque de rayon r et d'épaisseur e_r munie d'un cylindre (qui glisse à l'intérieur de l'actionneur prismatique) de longueur h_1 et de rayon r_1 (voir la figure C.1).

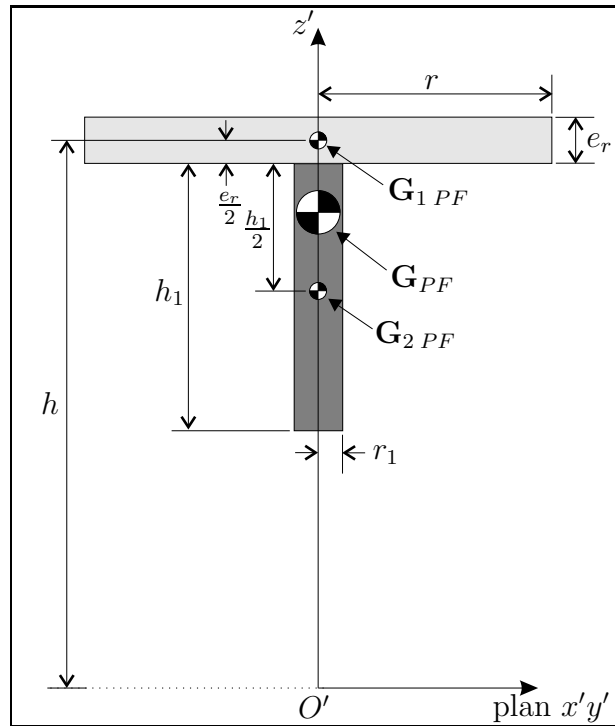


FIG. C.1 – Modélisation de la plate-forme.

En segmentant ce solide formé par le disque ($\nu = 1$) et le cylindre ($\nu = 2$), noté PF , on évalue sa masse par l'équation suivante

$$m_{PF} = \sum_{\nu=1}^2 m_{\nu PF} \quad (\text{C.5})$$

avec

$$m_{1 PF} = \rho\pi r^2 e_r \quad (\text{C.6})$$

$$m_{2 PF} = \rho\pi r_1^2 h_1 \quad (\text{C.7})$$

Le CDM de chaque corps ν exprimé dans le repère mobile est

$$\mathbf{G}_{1 PF} = [0,0,h]^T \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{G}_{2 PF} = \left[0,0,h - \frac{e_r + h_1}{2}\right]^T \quad (\text{C.9})$$

et la position du CDM du solide PF est

$$\mathbf{G}_{PF} = [G_{PF x'}, G_{PF y'}, G_{PF z'}]^T \quad (\text{C.10})$$

avec

$$G_{PF x'} = \frac{\sum_{\nu=1}^2 G_{\nu PF x'} m_{\nu PF}}{\sum_{\nu=1}^2 m_{\nu PF}} = 0 \quad (\text{C.11})$$

$$G_{PF y'} = \frac{\sum_{\nu=1}^2 G_{\nu PF y'} m_{\nu PF}}{\sum_{\nu=1}^2 m_{\nu PF}} = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$G_{PF z'} = \frac{\sum_{\nu=1}^2 G_{\nu PF z'} m_{\nu PF}}{\sum_{\nu=1}^2 m_{\nu PF}} = h - \frac{r_1^2 h_1 (e_r + h_1)}{2(r^2 e_r + r_1^2 h_1)} \quad (\text{C.13})$$

Concernant les matrices d'inertie des 2 corps de la plate-forme ($\nu = 1,2$), exprimées dans le repère mobile au CDM de celle-ci, on a que

$$\mathbf{I}_{\nu PF} = \begin{bmatrix} I_{x'x' \nu PF} & -I_{x'y' \nu PF} & -I_{x'z' \nu PF} \\ -I_{y'x' \nu PF} & I_{y'y' \nu PF} & -I_{y'z' \nu PF} \\ -I_{z'x' \nu PF} & -I_{z'y' \nu PF} & I_{z'z' \nu PF} \end{bmatrix}, \quad \nu = 1,2 \quad (\text{C.14})$$

où ($I_{x'y' \nu PF} = I_{y'x' \nu PF}$, $I_{x'z' \nu PF} = I_{z'x' \nu PF}$ et $I_{y'z' \nu PF} = I_{z'y' \nu PF}$ pour $\nu = 1,2$)

$$I_{x'x' 1 PF} = m_{1 PF} \left[\frac{e_r^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right] + m_{1 PF} [(G_{1 PF y'} - G_{PF y'})^2 + (G_{1 PF z'} - G_{PF z'})^2] \quad (\text{C.15})$$

$$I_{y'y' 1 PF} = m_{1 PF} \left[\frac{e_r^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right] + m_{1 PF} [(G_{1 PF x'} - G_{PF x'})^2 + (G_{1 PF z'} - G_{PF z'})^2] \quad (\text{C.16})$$

$$I_{z'z' 1 PF} = m_{1 PF} \left[\frac{r^2}{2} \right] + m_{1 PF} [(G_{1 PF x'} - G_{PF x'})^2 + (G_{1 PF y'} - G_{PF y'})^2] \quad (\text{C.17})$$

$$I_{x'x'2PF} = m_{2PF} \left[\frac{h_1^2}{12} + \frac{r_1^2}{4} \right] + m_{2PF} [(G_{2PFy'} - G_{PFy'})^2 + (G_{2PFz'} - G_{PFz'})^2] \quad (C.18)$$

$$I_{y'y'2PF} = m_{2PF} \left[\frac{h_1^2}{12} + \frac{r_1^2}{4} \right] + m_{2PF} [(G_{2PFx'} - G_{PFx'})^2 + (G_{2PFz'} - G_{PFz'})^2] \quad (C.19)$$

$$I_{z'z'2PF} = m_{2PF} \left[\frac{r_1^2}{2} \right] + m_{2PF} [(G_{2PFx'} - G_{PFx'})^2 + (G_{2PFy'} - G_{PFy'})^2] \quad (C.20)$$

$$I_{x'y'\nu PF} = m_{\nu PF} (G_{\nu PFx'} - G_{PFx'}) (G_{\nu PFy'} - G_{PFy'}), \quad \nu = 1,2 \quad (C.21)$$

$$I_{y'z'\nu PF} = m_{\nu PF} (G_{\nu PFy'} - G_{PFy'}) (G_{\nu PFz'} - G_{PFz'}), \quad \nu = 1,2 \quad (C.22)$$

$$I_{x'z'\nu PF} = m_{1PF} (G_{\nu PFx'} - G_{PFx'}) (G_{\nu PFz'} - G_{PFz'}), \quad \nu = 1,2 \quad (C.23)$$

Bien que la position des CDM des corps dépendent de h (voir les équation (C.8) et (C.9)), on remarque que la position relative du CDM d'un corps par rapport au CDM du solide ne change pas. Cette observation permet d'établir que

$$(G_{\nu PFx'} - G_{PFx'}) = 0, \quad \nu = 1,2 \quad (C.24)$$

$$(G_{\nu PFy'} - G_{PFy'}) = 0, \quad \nu = 1,2 \quad (C.25)$$

$$(G_{1PFz'} - G_{PFz'}) = \frac{r_1^2 h_1 (e_r + h_1)}{2(r^2 e_r + r_1^2 h_1)} \quad (C.26)$$

$$(G_{2PFz'} - G_{PFz'}) = \frac{r_1^2 h_1 (e_r + h_1)}{2(r^2 e_r + r_1^2 h_1)} - \frac{e_r + h_1}{2} \quad (C.27)$$

Ainsi, les éléments de la matrice d'inertie dépendent seulement de paramètres géométriques (pas de la distance h qu'on fait varier avec l'actionneur prismatique). Donc, l'évaluation de la matrice d'inertie au CDM de la plate-forme, exprimée dans le repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$, est

$$\mathbf{I}_{PF} = \sum_{\nu=1}^2 \mathbf{I}_{\nu PF} \quad (C.28)$$

et la matrice de rotation liée à la plate-forme est

$$\mathbf{Q}_{IPF} = \mathbf{Q} \quad (C.29)$$

C.3 Actionneur prismatique

L'actionneur prismatique est modélisé comme un cylindre de rayon r_2 et de longueur h_2 sur lequel on retrouve une cavité cylindrique de longueur h_3 et de rayon r_3 qui permet de guider le mouvement du cylindre de longueur h_1 attaché au disque de la plate-forme (voir la figure C.2).

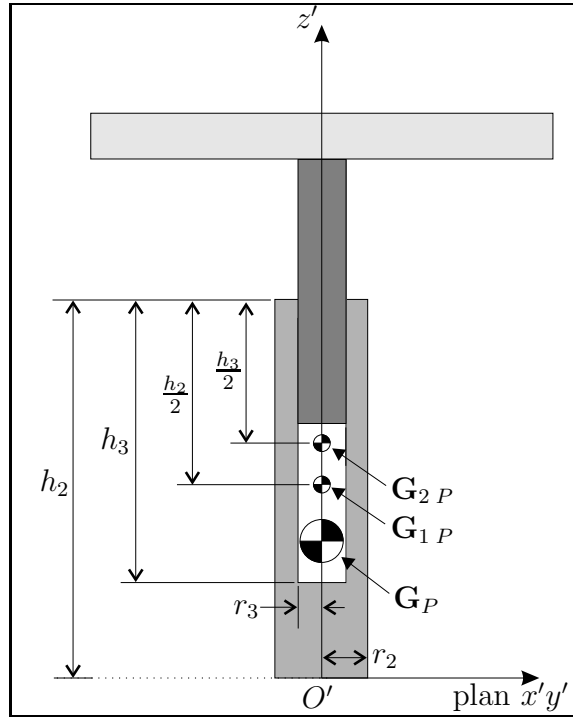


FIG. C.2 – Modélisation de l'actionneur prismatique.

En segmentant ce solide, noté P , formé du cylindre plein ($\mu = 1$) et du cylindre vide ($\mu = 2$), on évalue sa masse par l'équation suivante

$$m_P = \sum_{\mu=1}^2 m_{\mu P} \quad (\text{C.30})$$

avec

$$m_{1P} = \rho \pi r_2^2 h_2 \quad (\text{C.31})$$

$$m_{2P} = -\rho \pi r_3^2 h_3 \quad (\text{C.32})$$

Le CDM de chaque corps μ exprimé dans ce repère mobile est

$$\mathbf{G}_{1P} = \left[0, 0, \frac{h_2}{2} \right]^T \quad (\text{C.33})$$

$$\mathbf{G}_{2P} = \left[0, 0, h_2 - \frac{h_3}{2} \right]^T \quad (\text{C.34})$$

et la position du CDM du solide P est

$$\mathbf{G}_P = [G_{Px'}, G_{Py'}, G_{Pz'}]^T \quad (\text{C.35})$$

avec

$$G_{Px'} = \frac{\sum_{\mu=1}^2 G_{\mu Px'} m_{\mu P}}{\sum_{\mu=1}^2 m_{\mu P}} = 0 \quad (\text{C.36})$$

$$G_{Py'} = \frac{\sum_{\mu=1}^2 G_{\mu Py'} m_{\mu P}}{\sum_{\mu=1}^2 m_{\mu P}} = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$G_{Pz'} = \frac{\sum_{\mu=1}^2 G_{\mu Pz'} m_{\mu P}}{\sum_{\mu=1}^2 m_{\mu P}} = \frac{\frac{h_2}{2} r_2^2 h_2 - (h_2 - \frac{h_3}{2}) r_3^2 h_3}{r_2^2 h_2 - r_3^2 h_3} \quad (\text{C.38})$$

Concernant les matrices d'inertie des 2 corps de l'actionneur prismatique ($\mu = 1, 2$), exprimées dans le repère mobile au CDM du solide, on a que

$$\mathbf{I}_{\mu P} = \begin{bmatrix} I_{x'x' \mu P} & -I_{x'y' \mu P} & -I_{x'z' \mu P} \\ -I_{y'x' \mu P} & I_{y'y' \mu P} & -I_{y'z' \mu P} \\ -I_{z'x' \mu P} & -I_{z'y' \mu P} & I_{z'z' \mu P} \end{bmatrix}, \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{C.39})$$

où ($I_{x'y' \mu P} = I_{y'x' \mu P}$, $I_{x'z' \mu P} = I_{z'x' \mu P}$ et $I_{y'z' \mu P} = I_{z'y' \mu P}$ pour $\mu = 1, 2$)

$$I_{x'x' 1P} = m_{1P} \left[\frac{h_2^2}{12} + \frac{r_2^2}{4} \right] + m_{1P} [(G_{1Py'} - G_{Py'})^2 + (G_{1Pz'} - G_{Pz'})^2] \quad (\text{C.40})$$

$$I_{y'y' 1P} = m_{1P} \left[\frac{h_2^2}{12} + \frac{r_2^2}{4} \right] + m_{1P} [(G_{1Px'} - G_{Px'})^2 + (G_{1Pz'} - G_{Pz'})^2] \quad (\text{C.41})$$

$$I_{z'z' 1P} = m_{1P} \left[\frac{r_2^2}{2} \right] + m_{1P} [(G_{1Px'} - G_{Px'})^2 + (G_{1Py'} - G_{Py'})^2] \quad (\text{C.42})$$

$$I_{x'x' 2P} = m_{2P} \left[\frac{h_3^2}{12} + \frac{r_3^2}{4} \right] + m_{2P} [(G_{2Py'} - G_{Py'})^2 + (G_{2Pz'} - G_{Pz'})^2] \quad (\text{C.43})$$

$$I_{y'y' 2P} = m_{2P} \left[\frac{h_3^2}{12} + \frac{r_3^2}{4} \right] + m_{2P} [(G_{2Px'} - G_{Px'})^2 + (G_{2Pz'} - G_{Pz'})^2] \quad (\text{C.44})$$

$$I_{z'z' 2P} = m_{2P} \left[\frac{r_3^2}{2} \right] + m_{2P} [(G_{2Px'} - G_{Px'})^2 + (G_{2Py'} - G_{Py'})^2] \quad (\text{C.45})$$

$$I_{x'y' \nu P} = m_{\nu P} (G_{\nu Px'} - G_{Px'}) (G_{\nu Py'} - G_{Py'}), \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{C.46})$$

$$I_{y'z' \nu P} = m_{\nu P} (G_{\nu Py'} - G_{Py'}) (G_{\nu Pz'} - G_{Pz'}), \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{C.47})$$

$$I_{x'z' \nu P} = m_{\nu P} (G_{\nu Px'} - G_{Px'}) (G_{\nu Pz'} - G_{Pz'}), \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{C.48})$$

ce qui nous conduit à l'évaluation de la matrice d'inertie au CDM de l'actionneur prismatique, exprimée dans le repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$, avec

$$\mathbf{I}_P = \sum_{\mu=1}^2 \mathbf{I}_{\mu P} \quad (\text{C.49})$$

et la matrice de rotation entre ce repère mobile et le repère fixe est

$$\mathbf{Q}_{IP} = \mathbf{Q} \quad (\text{C.50})$$

Annexe D

Modélisation des corps du MHS4DDL

D.1 Stabilisateurs

Chaque stabilisateur est composé de 2 tiges : la première de longueur l_{λ_1} et de rayon $r_{l_{\lambda_1}}$, la seconde de longueur l_{λ_2} et de rayon $r_{l_{\lambda_2}}$. Ainsi, on a que la masse des tiges est donnée par

$$m_{S_{1i}S_{2i}} = \rho\pi r_{l_{\lambda_1}}^2 l_{\lambda_1}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{D.1})$$

$$m_{S_{2i}S_{3i}} = \rho\pi r_{l_{\lambda_2}}^2 l_{\lambda_2}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{D.2})$$

Concernant les matrices d'inertie des tiges exprimées au CDM dans le repère \mathcal{R}_{λ_1} et \mathcal{R}_{λ_2} , on a que

$$\mathbf{I}_{S_{1i}S_{2i}} = \begin{bmatrix} m_{S_{1i}S_{2i}} \frac{r_{l_{\lambda_1}}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{S_{1i}S_{2i}} \left(\frac{l_{\lambda_1}^2}{12} + \frac{r_{l_{\lambda_1}}^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{S_{1i}S_{2i}} \left(\frac{l_{\lambda_1}^2}{12} + \frac{r_{l_{\lambda_1}}^2}{4} \right) \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{I}_{S_{2i}S_{3i}} = \begin{bmatrix} m_{S_{2i}S_{3i}} \frac{r_{l_{\lambda_2}}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{S_{2i}S_{3i}} \left(\frac{l_{\lambda_2}^2}{12} + \frac{r_{l_{\lambda_2}}^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{S_{2i}S_{3i}} \left(\frac{l_{\lambda_2}^2}{12} + \frac{r_{l_{\lambda_2}}^2}{4} \right) \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{D.4})$$

et les matrices de rotation du repère \mathcal{R}_{λ_1} et du repère \mathcal{R}_{λ_2} par rapport au repère fixe sont

$$\mathbf{Q}_{IS_{1i}S_{2i}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} \mathbf{Q}_{\lambda_1}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{Q}_{IS_{2i}S_{3i}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}_{\gamma_i} \mathbf{Q}_{\varsigma_i} \mathbf{Q}_{\lambda_2}, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{D.6})$$

avec

$$\mathbf{Q}_{\lambda_1} = \mathbf{Q}_{y_{\varsigma_i}} \Big|_{-\lambda_1} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_1 & 0 & -\sin \lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda_1 & 0 & \cos \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{Q}_{\lambda_2} = \mathbf{Q}_{y_{\varsigma_i}} \Big|_{-\lambda_2} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_2 & 0 & -\sin \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda_2 & 0 & \cos \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

D.2 Mécanisme de translation

Le mécanisme de translation est modélisé par des membrures. Comme il est indiqué à la figure 3.5, ces membrures relient les points P_1 à P_2 (de longueur l_2 et de rayon r_{l_2}), P_4 à P_2 (de longueur l_3 et de rayon r_{l_3}), P_1 à P_3 (de longueur l_2 et de rayon r_{l_2}) et P_4 à P_3 (de longueur l_3 et de rayon r_{l_3}). Donc, la masse de ces corps est donnée par

$$m_{P_1P_2} = m_{P_1P_3} = m_{l_2} = \rho\pi r_{l_2}^2 l_2 \quad (\text{D.9})$$

$$m_{P_4P_2} = m_{P_4P_3} = m_{l_3} = \rho\pi r_{l_3}^2 l_3 \quad (\text{D.10})$$

Pour définir la matrice d'inertie exprimée au CDM de chaque corps, on associe un repère mobile lié à chacune des membrures dont l'indice du repère correspond aux points définissant les extrémités de chaque membrure. Comme il est montré sur la figure 3.5(a), les axes $x_{P_1P_2}$, $x_{P_4P_2}$, $x_{P_1P_3}$ et $x_{P_4P_3}$ suivent l'axe de chaque membrure et les axes $y_{P_1P_2}$, $y_{P_4P_2}$, $y_{P_1P_3}$ et $y_{P_4P_3}$ sont orientés dans le même sens et la même direction que l'axe y_ξ . Ainsi, on a que

$$\mathbf{I}_{P_1P_2} = \mathbf{I}_{P_1P_3} = \begin{bmatrix} m_{l_2} \frac{r_{l_2}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{l_2} \left(\frac{l_2^2}{12} + \frac{r_{l_2}^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{l_2} \left(\frac{l_2^2}{12} + \frac{r_{l_2}^2}{4} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{I}_{P_4P_2} = \mathbf{I}_{P_4P_3} = \begin{bmatrix} m_{l_3} \frac{r_{l_3}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_{l_3} \left(\frac{l_3^2}{12} + \frac{r_{l_3}^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{l_3} \left(\frac{l_3^2}{12} + \frac{r_{l_3}^2}{4} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

et les matrices de rotation des repères liés aux membrures par rapport au repère fixe sont

$$\mathbf{Q}_{Ik} = \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_{\gamma_1} \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}_{s1}} \mathbf{Q}_{\xi} \mathbf{Q}_k, \quad k = P_1P_2, P_4P_2, P_1P_3, P_4P_3 \quad (\text{D.13})$$

avec

$$\mathbf{Q}_{P_1P_2} = \mathbf{Q}_{y_\xi} \Big|_{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta_4\right)} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_4\right) & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_4\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_4\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_4\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$\mathbf{Q}_{P_4P_2} = \mathbf{Q}_{y_\xi} \Big|_{-\left(\frac{3\pi}{2}+\vartheta\right)} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \vartheta\right) & 0 & \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - \vartheta\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - \vartheta\right) & 0 & \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \vartheta\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{Q}_{P_1P_3} = \mathbf{Q}_{y_\xi} \Big|_{-\left(\frac{\pi}{2}+\theta_4\right)} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_4\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbf{Q}_{P_4P_3} = \mathbf{Q}_{y_\xi} \Big|_{-\left(\frac{3\pi}{2}-\vartheta\right)} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + \vartheta\right) & 0 & \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \vartheta\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \vartheta\right) & 0 & \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + \vartheta\right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

D.3 Plate-forme du mécanisme hybride

Pour simplifier la modélisation de la plate-forme du mécanisme hybride, on va modéliser celle-ci par un disque de rayon r et d'épaisseur e_r . Ainsi, on a que la masse est donnée par

$$m_{PF} = \rho\pi r^2 e_r \quad (\text{D.18})$$

et l'orientation de ce corps est donné par la matrice de rotation du repère mobile $\mathcal{R}'_{x'y'z'}$, c'est-à-dire que

$$\mathbf{Q}_{IPF} = \mathbf{Q} \quad (\text{D.19})$$

Donc, en considérant la même orientation que le repère mobile, la matrice d'inertie évaluée au CDM correspond à

$$\mathbf{I}_{PF} = \begin{bmatrix} m_{PF} \left(\frac{e_r^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m_{PF} \left(\frac{e_r^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{PF} \frac{r^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$