

JEAN-FRANÇOIS LÉVESQUE

**ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE ROBOTS PARALLÈLES
SPHÉRIQUES À TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ PAR
ÉLÉMENTS ÉLASTIQUES LINÉAIRES**

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

AVRIL 2001

Résumé

Ce mémoire traite de l'équilibrage statique de mécanismes parallèles sphériques à trois degrés de liberté. Dans un monde où les mécanismes parallèles sont de plus en plus utilisés, il est important d'introduire la notion d'équilibrage statique. Les mécanismes parallèles existants possèdent des actionneurs puissants non seulement pour déplacer des charges mais aussi pour supporter leur propre poids. Cela mène à un surdimensionnement des moteurs et à une moins grande efficacité. Il est donc important d'équilibrer les mécanismes parallèles pour améliorer le design et réduire les effets de l'usure et des vibrations. La méthode d'équilibrage par éléments élastiques linéaires (ressorts) qui est utilisée ici est particulièrement intéressante puisqu'elle ajoute très peu de poids et d'inertie au système. Après un bref survol des robots parallèles et de l'équilibrage de mécanisme, il sera question d'appliquer des équations d'équilibre générales à un manipulateur sphérique en variant le nombre de ressorts. Un prototype pouvant être construit pour démontrer les principes théoriques sera aussi présenté.

Jean-François Lévesque

Clément Gosselin

Avant-propos

Déjà une autre étape de ma vie qui se termine avec le dépôt de ce mémoire. On ne peut réellement résumer dans un document deux ans de travail, de recherche et d'efforts. On ne voit que le résultat final, la version raffinée résultant des épreuves et des obstacles mais aussi des découvertes et des joies. En terminant notre mémoire, on espère simplement que notre travail sera le plus représentatif possible de nos sacrifices.

J'aimerais profiter de cet espace qui m'est réservé pour remercier les personnes qui m'ont accompagné dans cette aventure. Premièrement, Clément Gosselin, mon directeur de recherche, qui par sa compréhension, sa patience, sa rigueur scientifique et sa passion évidente pour le monde de la robotique, m'a permis de ne pas quitter le sentier parfois sinueux de la maîtrise. Je n'aurais pu espérer avoir un meilleur directeur de recherche. Je voudrais aussi remercier ma copine Isabelle pour avoir pu partager nos expériences respectives de la maîtrise ainsi que d'être simplement à mes côtés. Je m'en voudrais bien sûr de ne pas témoigner ma reconnaissance à ma mère qui m'a toujours aimé, à mes grands-parents qui sont d'une générosité d'âme exceptionnelle, à mes beaux-parents qui montrent toujours un grand intérêt pour nos réalisations et à mes amis et amies qui me permettent toujours de poursuivre mon chemin en bonne compagnie.

Merci à tous.

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	v
Table des figures	vi
Introduction	1
1 Les robots parallèles	3
1.1 Caractéristiques des robots parallèles	5
1.1.1 Robots parallèles sphériques à trois degrés de liberté	7
2 L'équilibrage de mécanismes parallèles	11
2.1 L'équilibrage statique	12
2.1.1 Définition de l'équilibrage statique	12
2.1.2 Motifs et moyens d'obtenir un équilibrage statique	13
2.2 L'équilibrage dynamique	15
3 L'équilibrage statique avec éléments élastiques linéaires	18
3.1 Définition des équations d'équilibre générales	19
4 Mécanismes parallèles sphériques statiquement équilibrés	25
4.1 Développement pour un nombre indéterminé de ressorts	26

4.2	Développement pour un nombre déterminé de ressorts	28
4.2.1	Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec un ressort . . .	28
4.2.2	Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec deux ressorts .	30
4.2.3	Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec trois ressorts .	33
4.2.4	Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec quatre ressorts et plus	36
5	Développement et simplification des équations d'équilibre générales	38
5.1	Optimisation des équations d'équilibre générales	39
5.2	Simplification par hypothèse des équations d'équilibre générales	41
5.2.1	Hypothèse du centre de masse situé sur une verticale passant par le point \mathcal{O}	41
5.2.2	Hypothèse des points d'attache sur le corps mobile situés sur un cercle coaxial	43
6	Illustration du principe de l'équilibrage statique	46
6.1	Conception et optimisation	47
6.2	Description du prototype	48
6.3	Améliorations futures	49
	Conclusion	51
	Références	54
A	Développements complets des équations d'équilibre générales	57
A.1	Dérivées partielles de la somme des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i	58
B	Plans complets du prototype d'une table statiquement balancée à l'aide de ressorts	62
B.1	Vues obliques et dimensionnées	62

Liste des tableaux

6.1	Dimensions de diverses pièces (en cm)	49
6.2	Coordonnées des points d'attache par rapport au centre de rotation (en cm)	49

Table des figures

1.1	Illustration des deux grandes familles de robots	4
1.2	Diverses applications des manipulateurs parallèles	8
1.3	Robot sphérique à trois degrés de liberté avec une plate-forme restreinte.	9
1.4	Exemple de robots parallèles sphériques à trois degrés de liberté (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval).	10
2.1	Manipulateur à quatre degrés de liberté statiquement équilibré (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval).	13
2.2	Prototypes de manipulateurs statiquement équilibrés (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval).	14
2.3	Manipulateurs dynamiquement équilibrés (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval)	17
3.1	Un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec n ressorts.	20
3.2	Un corps libre équilibré avec trois ressorts.	23
4.1	Exemple de mécanismes sphériques à trois degrés de liberté avec un ressort.	29
4.2	Exemple de mécanismes sphériques à trois degrés de liberté avec deux ressorts.	32

4.3	Un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec trois ressorts. . .	35
5.1	Diagramme de positionnement des points d'attache des trois ressorts sur le corps mobile à 120 degrés.	43
5.2	Diagramme de positionnement des points d'attache des trois ressorts sur le corps mobile à 90 degrés.	45
6.1	Vue oblique du prototype.	48
B.1	Vue oblique supérieure gauche.	63
B.2	Vue oblique inférieure gauche.	64
B.3	Vue oblique supérieure droite.	65
B.4	Vue dimensionnée.	66
B.5	Vue frontale.	67
B.6	Vue du côté droit.	68
B.7	Vue de la position des attaches.	69

Introduction

Problématique

Nous évoluons dans un monde où les mécanismes parallèles sont de plus en plus utilisés et ce, dans un nombre grandissant de domaines. Ces mécanismes sont généralement conçus non seulement pour déplacer des charges mais également pour supporter leur propre poids. Cela mène à un surdimensionnement des actionneurs et à une perte d'efficacité et d'énergie des robots.

C'est dans cette optique que la notion d'équilibrage statique devient très intéressante. Un mécanisme est dit équilibré statiquement lorsque le poids de ce dernier ne produit aucun couple (ou force) à ses actionneurs pour toute configuration sous des conditions statiques. Les éléments élastiques linéaires (ressorts) sont particulièrement avantageux pour une telle application puisqu'ils ajoutent très peu de poids et d'inertie au système. Nous nous intéresserons donc ici à l'équilibrage statique de mécanismes parallèles avec l'aide d'éléments élastiques linéaires et aux nombreux aspects de cette technique. Nous restreindrons cependant notre étude dans le cadre de ce mémoire aux mécanismes sphériques à trois degrés de liberté.

Ces recherches s'inscrivent dans une étude d'ensemble réalisée au Laboratoire de robotique de l'Université Laval depuis plusieurs années et portant sur l'équilibrage statique et dynamique de mécanismes parallèles. Elles se veulent la suite directe de travaux réalisés en 1999 sur le même sujet (Gosselin 1999).

Structure du mémoire

Ce mémoire se divise en trois grandes parties. La première partie, composée des Chapitres 1 et 2, introduit les éléments de base de ce mémoire. Au Chapitre 1, on explique la nature des mécanismes parallèles et plus précisément celui des robots sphériques à trois degrés de liberté dont il est question dans ce mémoire. Dans le chapitre 2, on revoit brièvement les principes généraux de l'équilibrage statique et dynamique de tels mécanismes.

On entre ensuite dans le coeur des recherches sur l'équilibrage statique avec la deuxième partie. Tout d'abord, le Chapitre 3 présente les définitions de l'équilibrage statique avec éléments élastiques linéaires. C'est dans ce chapitre que sont développées les équations d'équilibre générales. Par la suite, le Chapitre 4 montre en détail l'application du principe d'équilibrage statique avec ressorts lorsque le nombre de ressorts est indéterminé et déterminé. Le chapitre 5 expose quant à lui les optimisations et les simplifications qui ont été réalisées sur les équations d'équilibre générales.

Enfin, la dernière partie présente en détail un exemple d'application pratique des principes démontrés aux chapitres précédents. Le Chapitre 6 traite donc du design et des paramètres du prototype qui pourra être construit dans un futur rapproché.

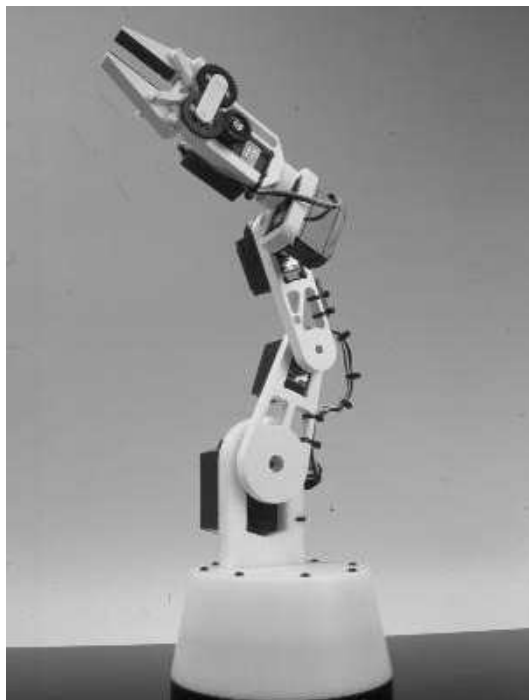
On retrouve comme complément d'information à l'annexe A, les résultats complets de l'optimisation des équations par les dérivées partielles montrés au Chapitre 5. Et à l'annexe B, les plans complets du prototype exposé au Chapitre 6 sont présentés pour permettre une meilleure compréhension de la conception du prototype et du choix des paramètres.

Chapitre 1

Les robots parallèles

Bien que la majorité des gens se représente les robots comme des machines d'aspect humanoïde ou comme la réplique d'un membre humain, il en est tout autrement dans le domaine de l'ingénierie. Le robot constitue pour l'ingénieur un outil de travail complexe et formidable. Les formes qu'il peut prendre et les tâches qu'il peut accomplir sont innombrables et très diversifiées. La conception et la fabrication de ces machines est donc un champ d'activité important.

Les ingénieurs classent les manipulateurs dans deux principales familles : les robots sériels et les robots parallèles. Comme leur nom l'indique, ces deux classes de robots se distinguent par leur architecture physique. Le manipulateur sériel est constitué d'une seule chaîne cinématique ouverte reliant le préhenseur à sa base. Cette chaîne comprend généralement une série de membrures auxquelles est attaché un moteur pour chaque degré de liberté. On associe souvent le robot sériel au bras humain puisqu'il peut y être semblable morphologiquement. Un robot sériel est représenté à la figure 1.1(a).



(a) Robot sériel EduBot (courtoisie de Technology Education Index)



(b) Robot parallèle (courtoisie de Hydra Power Systems)

FIG. 1.1: Illustration des deux grandes familles de robots

Les manipulateurs parallèles (Merlet, 1990) ont quant à eux plusieurs chaînes cinématiques fermées qui relient la base à l'effecteur comme à la figure 1.1(b). Les chaînes sont composées d'une ou de plusieurs membrures qui peuvent être actionnées ou non. Le nombre de degrés de liberté d'un manipulateur parallèle n'est pas nécessairement fonction du nombre de chaînes ou de pattes qu'il possède. Le plus connu des robots parallèles est sans aucun doute la plate-forme de Gough-Stewart qui a été largement étudiée (Daguspta et Mruthyunjaya 2000). On utilise ce type de robots dans un nombre grandissant de domaines pour les caractéristiques qu'il possède. Le présent chapitre porte justement sur les spécifications et l'utilisation des robots parallèles.

1.1 Caractéristiques des robots parallèles

Pour comprendre les avantages et les inconvénients des robots parallèles, il est intéressant de les comparer aux robots sériels qui sont bien connus. On peut examiner les deux familles de manipulateurs sur quatre grands points : l'espace atteignable, l'erreur de positionnement, la rigidité et le rapport charge utile/poids. Regardons en premier lieu les caractéristiques des manipulateurs sériels.

- **Espace atteignable.** De par leur architecture, les robots sériels possèdent un grand espace atteignable. En effet, cet espace correspond généralement à l'union des espaces de chacun des actionneurs. On peut donc de cette façon obtenir un espace de loin supérieur à celui d'un seul actionneur.
- **Rigidité.** Bien qu'il soit possible d'obtenir une bonne rigidité pour les manipulateurs sériels, il n'en demeure pas moins que celle-ci est relativement faible dans une grande majorité des cas. Pour des applications demandant une forte résistance aux efforts, il peut donc être difficile de concevoir et de fabriquer un robot sériel sans grandement diminuer l'espace atteignable et le rapport de charge utile de ce dernier.
- **Erreur de positionnement.** Cette architecture ouverte donne malheureusement aux robots sériels une erreur additive. Comme chaque membrure est positionnée selon la membrure précédente, les erreurs de positionnement de chaque actionneur s'additionnent pour former l'erreur globale. Ainsi, une erreur, même faible, dans le

positionnement d'une seule membrure aura des répercussions qui pourraient être importantes sur l'ensemble du mécanisme. Il peut donc être difficile d'obtenir une grande précision (plus petite qu'un dixième de mm) avec ce genre d'architecture ouverte.

- **Rapport charge utile/poids.** Le rapport entre la charge pouvant être soulevée par un robot sériel et son poids est relativement petit. On parle généralement d'un rapport inférieur à un dixième. Pour pouvoir soulever une charge de dix kilogrammes, il faudra en règle générale un robot pesant dans les cent kilogrammes. On peut comprendre que pour certaines applications, comme la conception de simulateurs de vol pesant plusieurs tonnes, il est souhaitable de trouver une alternative aux robots sériels.

Le robot sériel est donc tout désigné pour des applications demandant de grands mouvements. Son principal avantage est sans aucun doute son grand débattement permettant d'atteindre diverses positions de plusieurs façons. De plus, le robot sériel a été très étudié depuis sa première apparition. Il est donc bien connu mathématiquement et physiquement. On l'utilise souvent dans l'industrie pour effectuer des tâches de soudure et de peinture ou simplement comme manipulateur. Par contre, lorsque de grandes charges sont en cause ou qu'une bonne rigidité est exigée, les manipulateurs sériels montrent rapidement des limitations. Les manipulateurs parallèles sont probablement mieux adaptés pour ce genre de tâches car ils possèdent effectivement une excellente résistance aux efforts et peuvent déplacer de grandes charges.

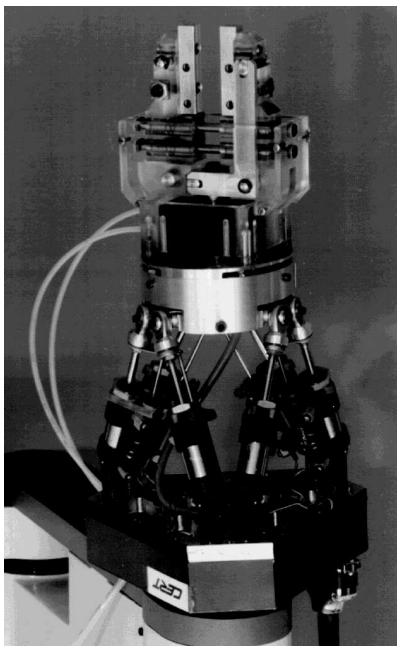
- **Espace atteignable.** Étant donné que les robots parallèles sont constitués de plusieurs chaînes reliant la base à l'effecteur, l'espace atteignable en est grandement réduit. En effet, ce dernier correspond à l'intersection des volumes possibles de toutes les pattes. Il en résulte que l'espace est généralement restreint et de forme non régulière. Les robots parallèles sont donc souvent assignés à des applications ne demandant pas de l'organe terminal d'effectuer de grands mouvements.
- **Rigidité.** La rigidité d'un robot parallèle est très grande à cause des nombreuses pattes du manipulateur. Effectivement, chaque membrure contribue à soutenir la charge et le poids du manipulateur. La forte résistance aux efforts permet l'exécution de mouvements rapides et précis ainsi que le déplacement de grandes charges tout en conservant un comportement uniforme.

- **Erreur de positionnement.** Contrairement au manipulateur sériel, l'erreur de positionnement du robot parallèle ne correspond pas à la somme des erreurs de chaque patte mais bien à la plus grande des erreurs. Comme chaque actionneur ne dépend pas du positionnement des autres, la plus grande erreur de position d'une patte sera donc la plus significative sur le positionnement de l'effecteur. Cette propriété rend donc possible une précision accrue qui permet des manipulations extrêmement minutieuses ; elle peut atteindre un centième de millimètre dans certains cas. De plus, comme chaque membrure supporte une partie de la charge utile, il en découle une réduction des déformations possibles des divers éléments comme la structure mobile, les articulations et les actionneurs. On obtient ainsi un meilleur positionnement de l'organe terminal.
- **Rapport charge utile/poids.** La charge utile d'un robot parallèle est très importante si on la compare avec son propre poids. En effet, le rapport entre les deux est habituellement supérieur à dix. Un manipulateur parallèle pesant cent kilogrammes pourrait normalement déplacer une charge excédant une tonne. Cette faculté découle encore une fois de l'architecture particulière du manipulateur.

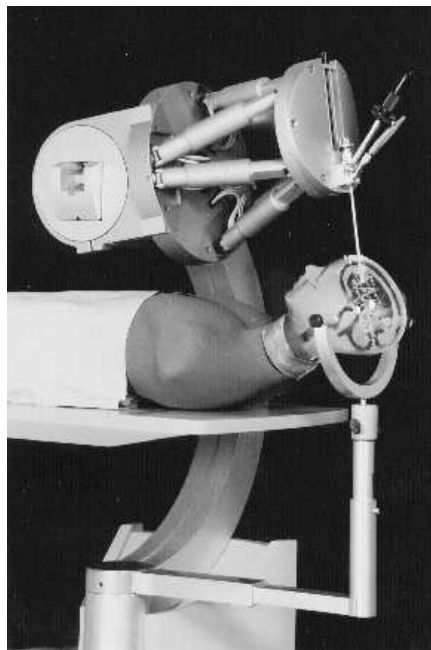
Comme il a été mentionné plus haut, le manipulateur parallèle excelle dans les applications nécessitant le déplacement de lourdes charges, une grande rigidité et une excellente précision. On le retrouve principalement dans la construction de simulateurs de vol et de mouvements, de machines-outils ainsi que de manipulateurs de précision comme les robots médicaux ou les robots de fabrication de composantes électroniques. On peut voir à la figure 1.2 plusieurs applications des robots parallèles. Relativement récents, les manipulateurs parallèles sont loin d'être parfaitement étudiés. Beaucoup de recherches restent encore à faire pour bien comprendre ces robots et à chaque nouvelle publication, un manipulateur, une application ou une piste de solution voit le jour.

1.1.1 Robots parallèles sphériques à trois degrés de liberté

Comme ce document porte principalement sur les robots parallèles sphériques à trois degrés de liberté, il est bon de rappeler brièvement les caractéristiques de tels manipulateurs. On les dit sphériques puisque ces robots possèdent la particularité d'avoir des axes de rotation qui s'intersectent tous en un même point, soit au centre de rotation.



(a) Manipulateur de précision
(courtoisie du CERT)



(b) Instrumentation médicale
(courtoisie de Universal Robot Systems)



(c) Machine-outil (courtoisie de Toyoda)



(d) Simulateur de mouvements (courtoisie de Thomson Training & Simulation)

FIG. 1.2: Diverses applications des manipulateurs parallèles

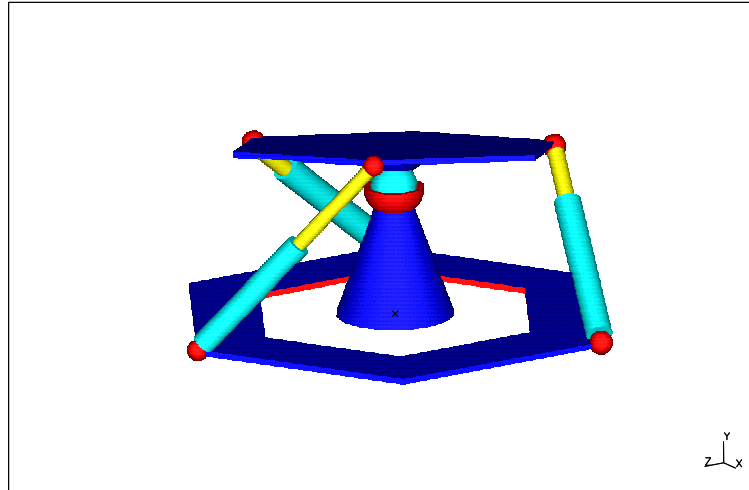
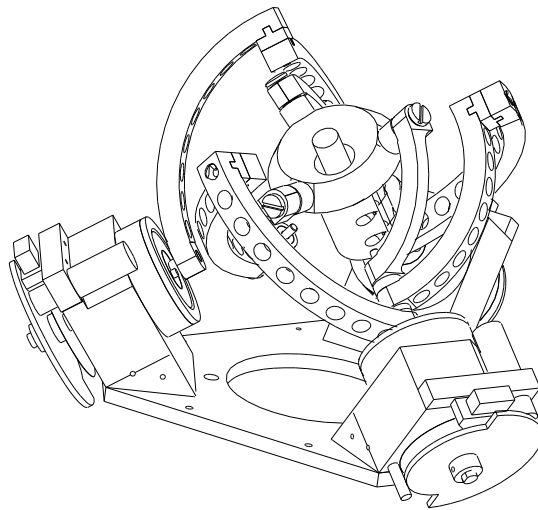


FIG. 1.3: Robot sphérique à trois degrés de liberté avec une plate-forme restreinte.

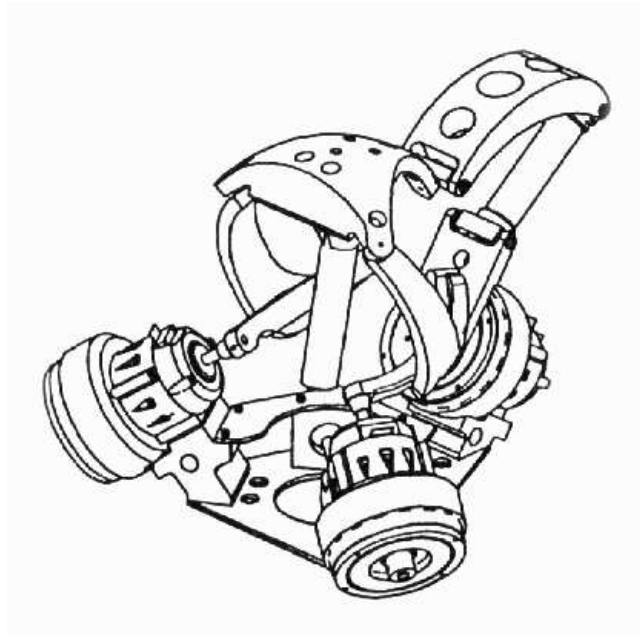
On peut obtenir ce type d'architecture en restreignant les mouvements de la plate-forme mobile ou encore en utilisant une architecture sphérique (Craver 1989 ; Gosselin et Angeles 1989 ; Gosselin et Lavoie 1993) comme on peut le voir aux figures 1.3 et 1.4. Ces robots possèdent généralement trois degrés de liberté en rotation et servent à des applications nécessitant l'orientation dans l'espace de l'organe terminal.

Les caractéristiques de tels manipulateurs permettent le développement d'applications particulières comme l'oeil agile (figure 1.4(a)), un système qui permet d'orienter une caméra plus rapidement que l'oeil humain, et un palonnier sphérique (figure 1.4(b)), une interface mécanique permettant à un opérateur humain de commander des mouvements d'orientation à un autre mécanisme tout en étant soumis à des efforts. Ces deux applications ont été développées au Laboratoire de robotique de l'Université Laval.

L'utilisation de manipulateurs sphériques à trois degrés de liberté dans la conception de simulateurs de mouvements devient très intéressante puisqu'il a été démontré il y a quelques années (Pouliot, Gosselin et Nahon 1998) que ces manipulateurs pouvaient produire des simulations d'une qualité comparable à celles obtenues par les simulateurs conventionnels à six degrés de liberté. Cette alternative permettrait d'économiser grandement sur le coût des appareils ainsi que de simplifier les modèles de résolution des problèmes géométriques directs et inverses.



(a) L'oeil agile



(b) Palonnier sphérique

FIG. 1.4: Exemple de robots parallèles sphériques à trois degrés de liberté (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval).

Chapitre 2

L'équilibrage de mécanismes parallèles

Dû aux déplacements effectués et aux efforts fournis par les manipulateurs, des forces et des couples sont créés aux actionneurs et à la base et ce, même lorsque le mécanisme est au repos. Cette situation provoque des effets négatifs comme des vibrations, de l'usure, un surdimensionnement des actionneurs lors de la conception ou simplement des efforts non désirés de la base. Ces effets peuvent être très néfastes pour la réalisation de la tâche du manipulateur. Il serait intéressant, par exemple, qu'un manipulateur tel que le Bras Canadien n'entraîne pas de changements de trajectoire sur l'engin spatial auquel il est fixé lorsqu'il se déplace. On pourrait aussi songer simplement à vouloir prolonger la longévité d'un manipulateur ou à concevoir des mécanismes nécessitant peu de force pour les déplacer.

C'est dans de telles perspectives qu'il devient profitable de réduire ou de supprimer

complètement ces conséquences indésirables. Une méthode permettant d'arriver à un tel résultat consiste à garder un mécanisme en équilibre quels que soient sa position ou son mouvement. Le présent chapitre passe donc en revue l'équilibrage statique et dynamique de mécanismes.

2.1 L'équilibrage statique

2.1.1 Définition de l'équilibrage statique

Il est tout d'abord important de pouvoir définir ce qu'est exactement l'équilibrage statique. Un mécanisme est dit statiquement équilibré quand son poids ne produit aucune force (ou couple) aux actionneurs pour toute configuration de l'effecteur sous des conditions statiques. Cet état du robot est aussi appelé *compensation gravitationnelle* et est de plus en plus utilisée pour la conception et la modification des robots. Cet équilibrage est dit parfait lorsque l'équilibre peut être atteint pour toute position ou orientation du mécanisme. On peut aussi obtenir un équilibrage partiel lorsque le nombre de positions et d'orientations d'équilibre pouvant être atteintes par le mécanisme est fini. C'est habituellement la conséquence d'une conception approximative ou d'un besoin pour une application particulière.

Plusieurs manipulateurs sériels (Nathan 1985 ; Hervé 1986 ; Streit et Gilmore 1989 ; Ulrich et Kumar 1991 ; Walsh, Streit et Gilmore 1991 ; Gosselin et Wang 1998) ont été conçus selon ce principe en utilisant des ressorts, des cames, des poulies et des contrepoids. De plus, une approche générale pour l'équilibrage de mécanismes à barres plans a été présentée (Streit et Shin 1990) et les conditions d'équilibre pour plusieurs mécanismes sphériques ont été démontrées (Streit 1991 ; Gosselin et Wang 1998 ; Wang et Gosselin 1999) dans différentes publications. Dans le cas où des ressorts sont utilisés, on peut définir l'équilibrage statique comme une série de conditions pour lesquelles l'énergie potentielle globale du système - incluant l'énergie gravitationnelle et l'énergie des ressorts - doit être constante pour toute configuration. En fonction du mécanisme étudié, une série de conditions sur les paramètres dimensionnels et inertiels doivent être satisfaites pour que l'équilibrage soit atteint. Si seulement des contrepoids sont utilisés, les conditions de l'équilibrage statique impliquent que, pour tout mouvement, le centre

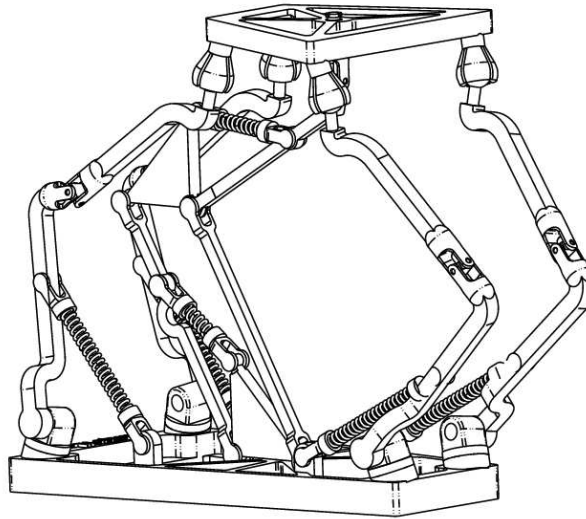


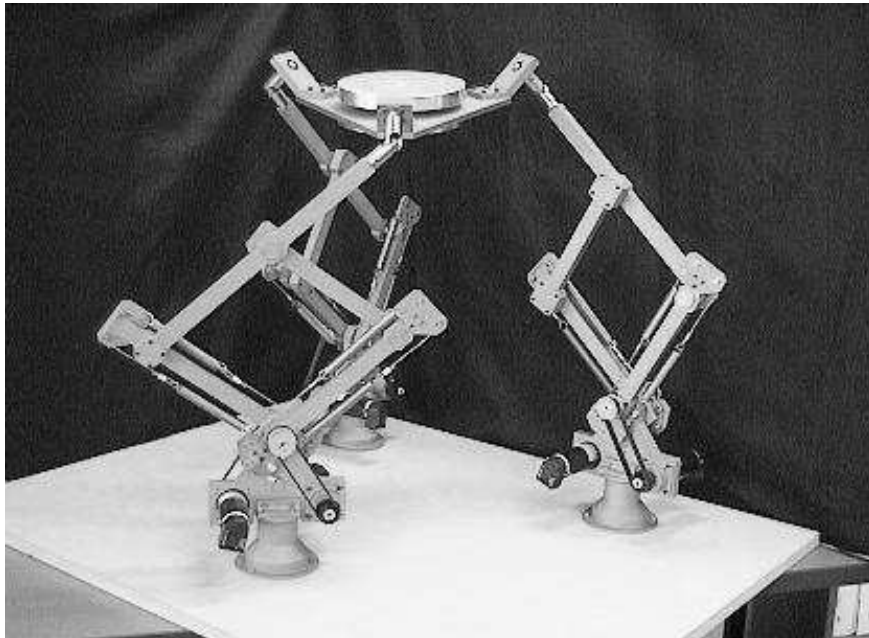
FIG. 2.1: Manipulateur à quatre degrés de liberté statiquement équilibré (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval).

de masse du mécanisme ne bouge pas en direction du vecteur de la force gravitationnelle. Comme on peut le voir aux figures 2.1 et 2.2, le Laboratoire de Robotique de l'Université Laval est très actif dans ce domaine de recherche.

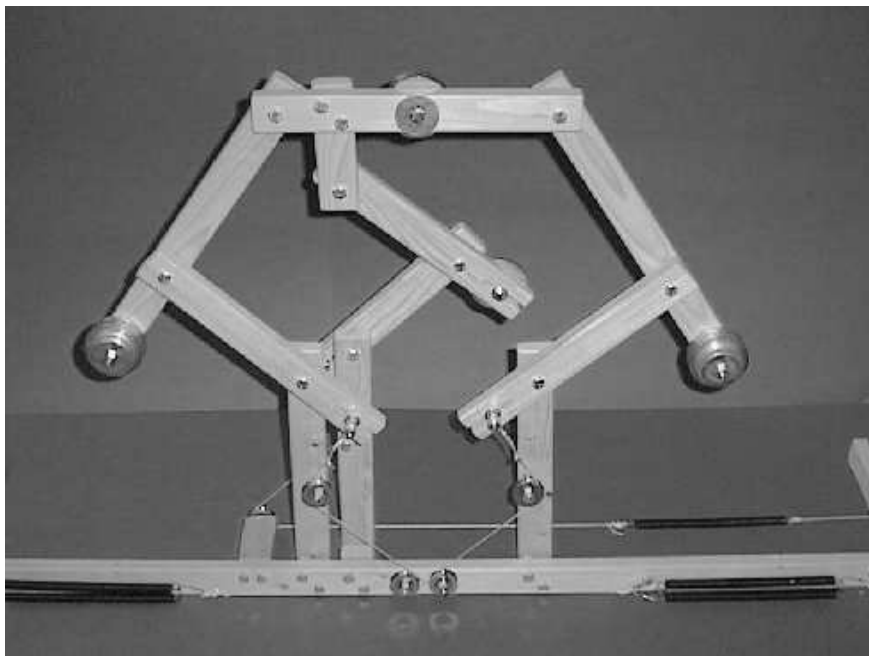
2.1.2 Motifs et moyens d'obtenir un équilibrage statique

Comme il a été brièvement mentionné ci-haut, l'équilibrage statique est principalement employé sur les robots pour compenser la force gravitationnelle. On utilise généralement cette méthode quand les forces appliquées à la base fixe par le manipulateur ne sont pas critiques et que l'emphase veut être mise sur la diminution des couples (ou forces) qui sont requis par les actionneurs pour maintenir le mécanisme en place lorsqu'il est immobile. On peut, de cette façon, diminuer la taille des actionneurs et la puissance qui leur est demandée pour maintenir le mécanisme en place. De plus, la force qui doit être déployée lors de déplacements à basse vitesse est grandement diminuée puisque seules les forces inertielles, qui sont fonction de la vitesse, doivent être combattues.

Les principaux moyens d'obtenir l'équilibrage statique pour un mécanisme sont



(a) Manipulateur à six degrés de liberté



(b) Manipulateur plan à trois degrés de liberté

FIG. 2.2: Prototypes de manipulateurs statiquement équilibrés (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval).

l'utilisation de contrepoids, de ressorts, de cames et de poulies. Chacune de ces options comporte des avantages et des désavantages à ne pas négliger. Il est possible, avec l'aide de contrepoids, de modifier un mécanisme déjà existant pour l'équilibrer statiquement. Cette méthode entraîne cependant une augmentation significative de la masse du mécanisme. Il en résulte donc une diminution du gain acquis par l'équilibrage du système. Malgré l'augmentation de la masse, il peut parfois être intéressant d'utiliser des contrepoids puisqu'il est possible, en ajoutant des roues d'inertie, d'obtenir l'équilibrage statique et dynamique du système. Les ressorts ajoutent quant à eux très peu de poids et d'inertie au système et sont donc souvent préférés aux autres moyens (Streit et Gilmore 1989) pour les applications statiques. Par contre, la modification d'un mécanisme déjà existant devient rapidement complexe dû aux nombreuses contraintes dont on doit tenir compte (centre de masse global du mécanisme, différents points d'attache des ressorts, etc.).

Pour ne nommer que quelques applications concrètes de l'équilibrage statique, mentionnons certaines lampes de travail, des systèmes d'ouverture manuelle pour les portes de garage, des mécanismes d'orientation pour les antennes de satellite, des supports pour les armes lourdes sur les véhicules militaires et, bien sûr, le raffinement de simulateurs de mouvements.

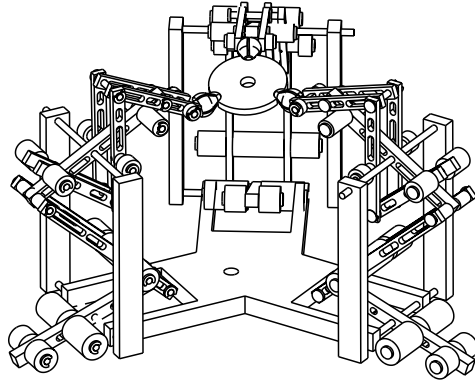
2.2 L'équilibrage dynamique

Le présent mémoire portant exclusivement sur l'équilibrage statique, il ne sera fait ici qu'un bref survol de l'équilibrage dynamique (Lowen, Tepper et Berkof 1982).

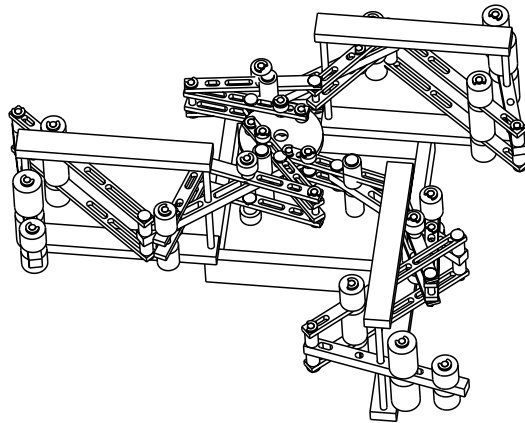
On définit un mécanisme comme dynamiquement équilibré lorsque la force et le couple résultants appliqués sur la base fixe sont constants pour tout mouvement du mécanisme. En d'autres mots, on peut affirmer que le centre de masse global du mécanisme doit demeurer fixe pour tout mouvement arbitraire effectué par le manipulateur et que sa quantité de mouvement angulaire doit être constante. Cette condition permet d'empêcher l'apparition de forces non désirées et donc d'éviter les vibrations, l'usure et les autres effets néfastes d'un système déséquilibré. Dans le cas de l'équilibrage

dynamique, on tente de minimiser et d'annuler des forces *inertielles* plutôt que *gravitationnelles*. On peut aussi préciser que lorsqu'un système est dynamiquement équilibré, il est par le fait même statiquement équilibré.

Le moyen le plus utilisé pour équilibrer dynamiquement un mécanisme demeure l'utilisation de contrepoids et de roues d'inertie (Walker et Oldham 1978 ; Ye et Smith 1994 ; Papadopoulos et Abu-Abed 1994) . Cependant, ces mécanismes ont généralement une masse importante, limitant ainsi leurs applications. Il est à noter que l'équilibrage dynamique ne peut être effectué à l'aide de ressorts étant donné que ceux-ci n'affectent pas la position du centre de masse global (Ricard et Gosselin 2000). Il est également intéressant de mentionner qu'un manipulateur peut être dynamiquement équilibré dès la conception sans l'aide de roues d'inertie (Ricard et Gosselin 2000) en utilisant des mécanismes à barres comme on peut le voir à la figure 2.3. Il faut cependant préciser que cette méthode peut comporter des limitations lors de la conception de certains manipulateurs ou applications. Grâce aux nombreuses recherches qui sont actuellement faites dans ce domaine, les manipulateurs dynamiquement équilibrés se perfectionnent au fil des jours et devraient certainement surpasser leurs limitations actuelles dans quelques années.



(a) Mécanisme spatial à trois degrés de liberté



(b) Mécanisme plan à trois degrés de liberté

FIG. 2.3: Manipulateurs dynamiquement équilibrés (courtoisie du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval)

Chapitre 3

L'équilibrage statique avec éléments élastiques linéaires

Il a été fait mention, au chapitre précédent, de la méthode d'équilibrage avec éléments élastiques linéaires. Cette méthode comporte beaucoup d'avantages qui peuvent s'appliquer à la perfection à certains mécanismes. Au cours des dernières années, on procédait encore parfois par essais et erreurs lors de la simulation et de la conception de mécanismes sphériques avec cette méthode. Comme l'énergie potentielle gravitationnelle d'un lien en rotation est non linéaire, les relations entre le mécanisme et les éléments élastiques linéaires utilisés étaient plutôt mal comprises. Il en résultait que les mécanismes n'étaient pas parfaitement équilibrés dû à une conception approximative et qu'ils ne pouvaient atteindre l'équilibre statique que dans un nombre fini de positions.

Le besoin qui sous-tend le développement d'un moyen exact pour équilibrer un mécanisme est bien réel. Dans le cas présent, l'objectif principal, en plus d'obtenir une

méthode générale d'équilibrage, est la fabrication d'une table de travail spécialisée. Cette table de travail permettrait à un ouvrier effectuant des travaux de grande précision de pouvoir ajuster l'orientation et la position de la table sans efforts. Cela lui procurerait une meilleure qualité d'usinage en plus d'accroître l'ergonomie de façon substantielle. Les clients potentiels pour de telles tables sont nombreux et le secteur de l'aérospatial est particulièrement visé. Des entreprises comme Bell Helicopter Textron ou Bombardier seraient probablement intéressées par une application comme celle-ci. De nombreuses autres applications pourraient aussi être dérivées du concept premier et ainsi répondre à de nombreux besoins.

Le présent chapitre expose une méthode permettant d'équilibrer statiquement un manipulateur ou mécanisme sphérique à trois degrés de liberté à l'aide d'éléments élastiques linéaires pour toute configuration statique. Les équations générales et les conditions associées à celles-ci sont ici démontrées et commentées. La modélisation présentée ici est similaire à celle présentée dans (Gosselin 1999).

3.1 Définition des équations d'équilibre générales

Soit un corps rigide monté sur une rotule à trois degrés de liberté située à l'origine en \mathcal{O} . Comme illustré à la figure 3.1, la position du centre de masse est définie par le vecteur \mathbf{r} et la masse du corps est notée m . Une série de n ressorts est attachée à des rotules fixes aux points A_i à une extrémité et à des rotules sur le corps mobile aux points B_i à l'autre extrémité. Un système de coordonnées fixe $\mathcal{R}(\mathcal{O} - xyz)$ est attaché à la base avec son origine positionnée au point \mathcal{O} . L'axe z de ce système de référence pointe dans la direction opposée au vecteur de la force gravitationnelle. Un deuxième système de coordonnées $\mathcal{R}'(\mathcal{O} - x'y'z')$ est attaché au corps mobile et la configuration de référence est définie comme la configuration dans laquelle les deux systèmes de référence ont la même orientation. La matrice de rotation \mathbf{Q} définit l'orientation du système de référence \mathcal{R}' par rapport au système de référence \mathcal{R} . Elle est définie comme étant

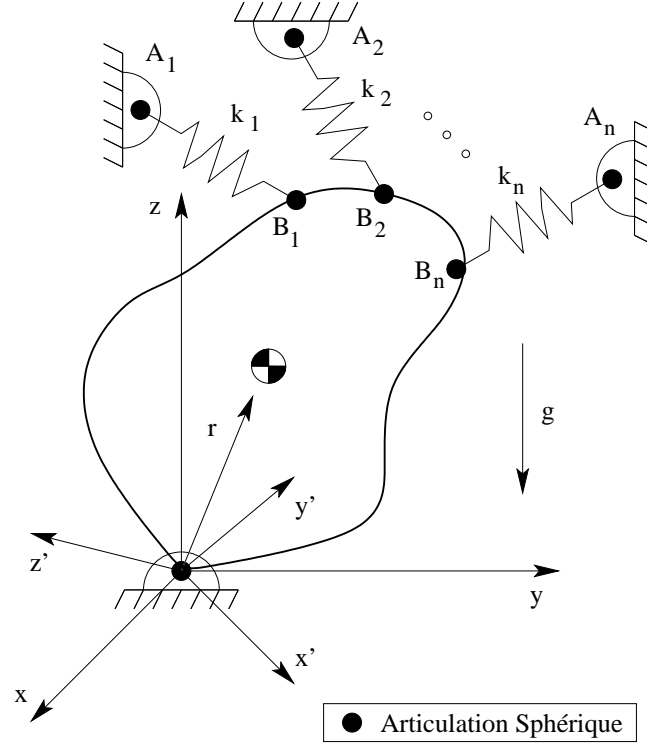


FIG. 3.1: Un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec n ressorts.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c(\phi)c(\theta)c(\psi) - s(\phi)s(\psi) & -c(\phi)c(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) & c(\phi)s(\theta) \\ s(\phi)c(\theta)c(\psi) + c(\phi)s(\psi) & -s(\phi)c(\theta)s(\psi) + c(\phi)c(\psi) & s(\phi)s(\theta) \\ -s(\theta)c(\psi) & s(\theta)s(\psi) & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où $c(\cdot)$ et $s(\cdot)$ sont, respectivement, le cosinus et le sinus de leur argument et où ϕ, θ et ψ sont les trois angles d'Euler utilisés pour définir l'orientation du corps mobile. Le vecteur \mathbf{r} , exprimé dans le repère mobile \mathcal{R}' , est constant et est défini comme

$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{r}_{\mathcal{O}} = [r_x \ r_y \ r_z]^T, \quad (3.2)$$

tandis que le vecteur \mathbf{a}_i est défini comme le vecteur partant du point d'origine \mathcal{O} et reliant le point A_i . Il est écrit dans le repère fixe comme

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}_i = [a_{ix} \ a_{iy} \ a_{iz}]^T, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

De façon similaire, le vecteur \mathbf{b}_i représente le vecteur partant du point d'origine \mathcal{O} et reliant le point B_i et est défini dans le repère mobile comme

$$[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{b}_{i\mathcal{O}} = [b_{ix} \quad b_{iy} \quad b_{iz}]^T, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{b}_i peuvent être réécrits dans le système de référence fixe en utilisant la matrice de rotation \mathbf{Q} décrite plus haut. Nous avons donc

$$[\mathbf{r}]_{\mathcal{R}} = \mathbf{Q}[\mathbf{r}]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}\mathbf{r}_{\mathcal{O}}, \quad (3.5)$$

$$[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}} = \mathbf{Q}[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{R}'} = \mathbf{Q}\mathbf{b}_{i\mathcal{O}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Pour atteindre les conditions permettant l'équilibrage statique du mécanisme, nous devons imposer que l'énergie potentielle totale (gravitationnelle et élastique) soit constante pour toute position statique. Pour le manipulateur dont il est question ici, l'énergie potentielle totale, notée V , peut être écrite de la façon suivante

$$\begin{aligned} V &= mge_z^T \mathbf{r} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)] \\ &= mge_z^T \mathbf{Q}\mathbf{r}_{\mathcal{O}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{i\mathcal{O}}^T \mathbf{b}_{i\mathcal{O}} - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{b}_{i\mathcal{O}}) \\ &= mge_z^T \mathbf{Q}\mathbf{r}_{\mathcal{O}} - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{b}_{i\mathcal{O}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{i\mathcal{O}}^T \mathbf{b}_{i\mathcal{O}}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où on note g l'accélération gravitationnelle, k_i la raideur du i ième ressort et

$$\mathbf{e}_z = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (3.8)$$

un vecteur unitaire dans la direction opposée à la gravité. On suppose que celle-ci agit dans le sens négatif de l'axe z . On peut faire cette supposition sans perdre la généralité nécessaire à la suite de la démonstration. Le point \mathcal{O} est ici utilisé comme un point de référence pour le calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle. Pour des raisons qui ont

déjà été démontrées (Nathan 1995 ; Streit et Gilmore 1989 ; Jean et Gosselin 1996), il est présumé que la longueur non déformée des ressorts doit être zéro dans les équations mentionnées plus haut. Si on considère toujours un corps monté sur une rotule comme dans le présent exemple et qu'on récrit l'équation 3.7 avec des ressorts n'ayant pas une longueur non déformée nulle, nous obtenons (Gosselin 1999)

$$V = mge_z^T \mathbf{Q} \mathbf{r}_O - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{b}_{iO} - \sum_{i=1}^n k_i l_{iO} \sqrt{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{iO}^T \mathbf{b}_{iO} - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{b}_{iO}} + C \quad (3.9)$$

où l_{iO} représente la longueur non déformée du i ième ressort et C , les termes constants de l'équation. On peut voir dans l'équation 3.9 que des termes non linéaires apparaissent dans l'expression et que l'équilibrage complet du système n'est plus possible, tel qu'on le verra plus loin. Dans le cas où, volontairement ou involontairement, les ressorts possèdent une longueur non déformée différente de zéro, il devient nécessaire de minimiser les termes non linéaires pour obtenir une conception optimale. On peut aussi remarquer que plus les longueurs non déformées sont petites, plus les termes non linéaires seront petits. Cela découle du fait que les termes non linéaires sont proportionnels à l_{iO} dans l'équation 3.9.

Comme l'ont exposée Streit et Gilmore (1989), la nécessité d'imposer la longueur non déformée des ressorts égale à zéro ne pose pas de problème pratique puisqu'il est possible d'utiliser plusieurs moyens physiques permettant aux ressorts de satisfaire cette condition. On peut faire mention des systèmes comportant un guide pour le ressort ou utilisant des câbles et des poulies.

Dans le but d'avoir toutes les conditions assurant que l'énergie potentielle du système reste constante pour toute orientation donnée, l'équation 3.7 est dérivée par rapport à la matrice de rotation \mathbf{Q} et on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{Q}} = mge_z \mathbf{r}_O^T - \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i \mathbf{b}_{iO}^T. \quad (3.10)$$

On égale ensuite cette équation à une matrice nulle de dimension 3×3 , $\mathbf{0}_{3 \times 3}$, pour obtenir notre équation résultante

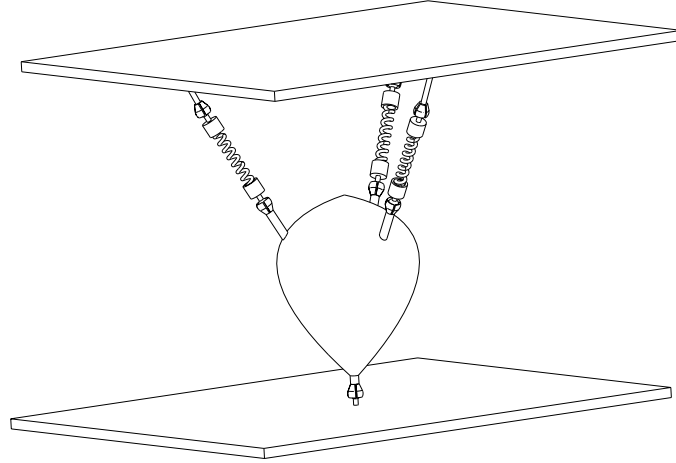


FIG. 3.2: Un corps libre équilibré avec trois ressorts.

$$mg\mathbf{e}_z\mathbf{r}_O^T - \sum_{i=1}^n k_i\mathbf{a}_i\mathbf{b}_{iO}^T = \mathbf{0}_{3 \times 3}. \quad (3.11)$$

L'équation 3.11 contient neuf équations scalaires qui définissent les conditions d'équilibre du mécanisme. Elles peuvent être réécrites de la façon suivante puisqu'il a déjà été déterminé que le vecteur gravité agissait en direction opposée à l'axe z

$$mg\mathbf{r} - \sum_{i=1}^n k_i a_{iz} \mathbf{b}_i = \mathbf{0}_3, \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^n k_i a_{ix} \mathbf{b}_i = \mathbf{0}_3, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^n k_i a_{iy} \mathbf{b}_i = \mathbf{0}_3, \quad (3.14)$$

où $\mathbf{0}_3$ est un vecteur nul tridimensionnel. Donc, si ces neuf équations d'équilibre générales sont satisfaites, le mécanisme sphérique présenté à la figure 3.1 sera équilibré statiquement pour toute configuration.

Il est toutefois bon de rappeler que la configuration qui sera trouvée pour l'équilibre du mécanisme sphérique ne sera valide que si la gravité préserve son module et son orientation par rapport à la base du mécanisme. La partie mobile du mécanisme sera ainsi équilibrée pour toutes orientations de celui-ci. Pour chaque changement du

module ou de l'orientation de la gravité, il faudra valider à nouveau les paramètres choisis pour le mécanisme et les modifier dans la vaste majorité des cas. Par contre, cette contrainte ne constitue pas un problème dans la majorité des applications prévues pour de tels manipulateurs. Un exemple simple d'un corps libre équilibré avec trois ressorts est illustré à la figure 3.2.

Chapitre 4

Mécanismes parallèles sphériques statiquement équilibrés

Le Chapitre 3 a exposé et démontré les expressions pour les équations d'équilibre tout en demeurant le plus général possible. Dans le Chapitre 4, nous allons considérer le système d'équations du mécanisme sphérique à trois degrés de liberté dans les situations où n prend une valeur indéterminée et déterminée. Dans cette dernière situation, les cas où le système est équilibré statiquement avec un, deux, trois et plus de trois ressorts seront traités. Pour chacune des situations mentionnées, les solutions possibles, les implications et les limitations seront exposées.

4.1 Développement pour un nombre indéterminé de ressorts

Lorsque le nombre de ressorts n est indéterminé, les équations générales (3.12) à (3.14) deviennent un système linéaire de neuf équations à $3n$ inconnues. On considère ici que l'ensemble des points d'attache fixes ou des points d'attache sur le corps mobile, selon l'approche qui est préconisée, sont connus. Si moins de trois ressorts sont utilisés pour équilibrer le mécanisme, le système présente plus d'équations que d'inconnues et sera ainsi *sur-déterminé*. Il n'y aura donc pas à première vue de solution exacte au problème. Il sera cependant possible de décomposer le système pour obtenir des pistes de solution. Pour n égal à trois, le système sera *déterminé* et une solution unique pourra être trouvée en résolvant les équations. Pour n plus grand que trois, le système sera *sous-déterminé* et possèdera une infinité de solutions. Il s'agira dans ce cas d'émettre des hypothèses qui vont diminuer le nombre d'inconnues ou d'utiliser une solution qui minimise l'erreur comme la solution à *norme minimale*.

Dans le cas où l'on désire obtenir une solution pour les vecteurs \mathbf{b}_i en fonction des vecteurs \mathbf{a}_i , on peut écrire le système sous la forme

$$\mathbf{L}\beta = \mathbf{s}, \quad (4.1)$$

où \mathbf{L} , β et \mathbf{s} prennent les formes suivantes

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} k_1 a_{1x} \mathbf{1} & \cdots & k_n a_{nx} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1y} \mathbf{1} & \cdots & k_n a_{ny} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1z} \mathbf{1} & \cdots & k_n a_{nz} \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

et où $\mathbf{1}$ représente ici une matrice identité de dimension 3×3 . Pour obtenir les solutions des vecteurs \mathbf{a}_i en fonction des vecteurs \mathbf{b}_i , on peut récrire le système linéaire comme suit

$$\mathbf{G}\alpha = \mathbf{s}, \quad (4.5)$$

où \mathbf{G} et α correspondent à

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & k_n \mathbf{b}_n & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 & k_n \mathbf{b}_n & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_1 \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_n \mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

et où \mathbf{s} garde la même forme que précédemment. On peut tout d'abord voir que les matrices \mathbf{L} et \mathbf{G} se doivent de ne pas être singulières si la résolution du système linéaire doit être réalisée. Il serait cependant peu probable qu'un arrangement de ressorts produise une matrice singulière puisque la dimension de ces deux matrices, leur rang et le nombre d'inconnues sont directement reliés. À partir de ces systèmes linéaires, il semble à première vue que presque tout arrangement de ressorts qui satisfait les équations d'équilibre est possible pour équilibrer le mécanisme. Nous allons maintenant voir dans la prochaine section que certaines limitations se présentent lorsque le nombre de ressorts est déterminé.

4.2 Développement pour un nombre déterminé de ressorts

Pour un nombre de ressorts n déterminé, les équations générales (3.12) à (3.14) prennent des formes plus simples. Cependant, comme nous allons le voir dans les prochaines sous-sections, le nombre de ressorts influence beaucoup les restrictions qui doivent être prises en compte pour satisfaire les équations d'équilibre. Certains des résultats suivants sont similaires à ceux présentés dans (Gosselin 1999).

4.2.1 Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec un ressort

Dans le cas le plus simple où un seul ressort ($n = 1$) est utilisé, la sommation des équations (3.12) à (3.14) ne comporte qu'un seul terme. Il faut comprendre qu'ici, le vecteur \mathbf{b}_1 ne peut être nul puisque cela reviendrait à dire que le point B_1 coïncide avec l'origine \mathcal{O} . Ce cas ne peut survenir que si le centre de masse du corps est situé lui aussi au point \mathcal{O} . Comme cette situation mène à une solution triviale, il n'est pas de notre intérêt de nous y attarder dans le cadre de cette étude.

Nous avons donc pour les équations (3.12) et (3.13)

$$a_{1x} = a_{1y} = 0. \quad (4.8)$$

On peut en conclure que le point d'attache fixe du ressort doit obligatoirement se situer sur l'axe vertical passant par le point \mathcal{O} , soit l'axe z . En réarrangeant l'équation (3.14), on trouve que

$$\mathbf{r}_{\mathcal{O}} = \frac{k_1 a_{1z}}{mg} \mathbf{b}_{1\mathcal{O}}. \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) montre que les vecteurs $\mathbf{r}_{\mathcal{O}}$ et $\mathbf{b}_{1\mathcal{O}}$ se doivent d'être proportionnels et définit que le point d'attache du ressort sur le corps doit être situé sur la ligne passant

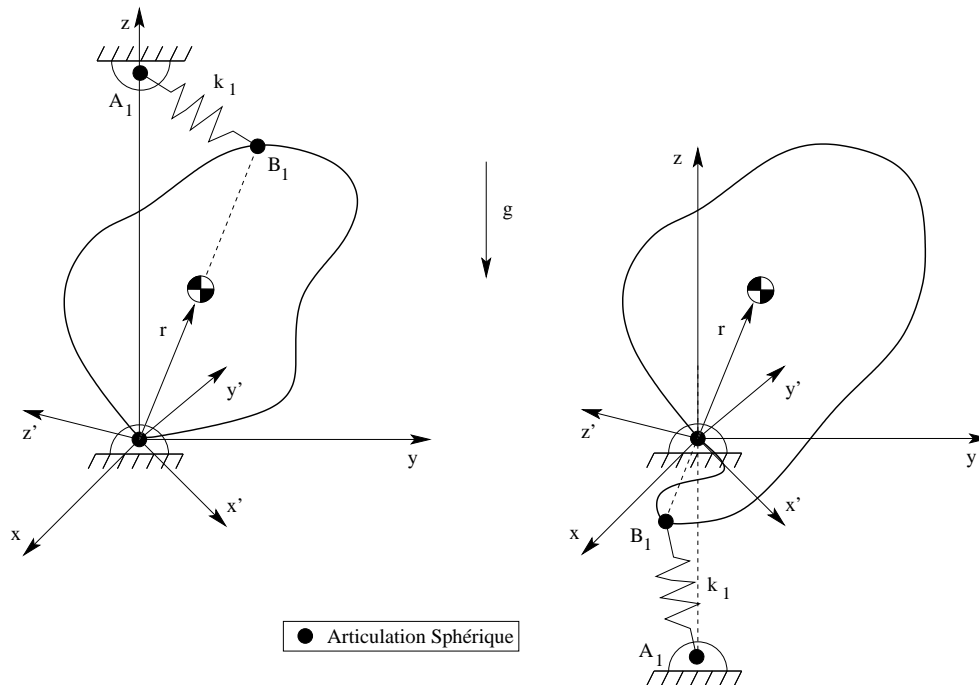


FIG. 4.1: Exemple de mécanismes sphériques à trois degrés de liberté avec un ressort.

par le point \mathcal{O} et le centre de masse. De plus, on peut déduire de ces résultats que si le point d'attache fixe du ressort est situé au-dessus du point \mathcal{O} sur l'axe z , le point B_1 sera situé du même côté du point \mathcal{O} que le centre de masse. Inversement, si le point d'attache fixe du ressort est situé en dessous du point \mathcal{O} sur l'axe z , le point B_1 sera situé du côté opposé au centre de masse par rapport à \mathcal{O} . On peut voir les deux cas illustrés à la figure 4.1.

Les résultats précédents démontrent qu'avec un seul ressort, il est possible d'équilibrer, pour toutes positions statiques, un mécanisme à trois degrés de liberté fixé par une rotule pouvant effectuer des rotations arbitraires. Il est donc important de pouvoir constater que pour $n = 1$, l'énergie potentielle globale du système demeure constante pour toute orientation statique du corps et ce, sans l'ajout de forces ou de couples externes.

D'un côté pratique, il peut être physiquement difficile d'équilibrer un mécanisme avec un seul ressort. En effet, les conditions quant au positionnement des points d'attache et de la rigidité du ressort sont très restrictives. De plus, ces conditions peuvent être impossibles à remplir ou impraticables lors de la conception de certains manipulateurs. Il faudrait aussi porter une attention très particulière aux paramètres et aux

composantes choisis lors du design d'un tel mécanisme pour assurer une bonne longévité au système. En effet, un ressort mal choisi pourrait rapidement perdre sa rigidité et ainsi compromettre l'équilibrage du manipulateur.

4.2.2 Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec deux ressorts

Avec deux ressorts ($n = 2$), les sommations des équations (3.12) à (3.14) comportent toutes deux termes. Du système linéaire de l'équation (4.1), on peut extraire le sous-système suivant

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{0}_6, \quad (4.10)$$

où \mathbf{K} et δ sont respectivement définis comme

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 a_{1x} \mathbf{1} & k_2 a_{2x} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1y} \mathbf{1} & k_2 a_{2y} \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} b_{1x} \\ b_{1y} \\ b_{1z} \\ b_{2x} \\ b_{2y} \\ b_{2z} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

et $\mathbf{0}_6$, un vecteur nul de dimensions six. L'équation (4.10) forme un système de six équations à six inconnues. Celui-ci peut être satisfait si tous les éléments du vecteur δ sont nuls ou si le déterminant de la matrice \mathbf{K} est égal à zéro. Comme il a été spécifié dans la section précédente, le vecteur δ ne peut être nul puisque cela reviendrait à dire que le centre de masse est situé au point \mathcal{O} . Cette solution étant triviale, elle ne sera pas considérée ici. Il faut donc que le déterminant de la matrice \mathbf{K} soit égal à zéro, ce qui nous conduit à

$$\det(\mathbf{K}) = k_1 k_2 (a_{1x} a_{2y} - a_{2x} a_{1y}) = 0. \quad (4.13)$$

De cette équation, on peut déterminer que le mécanisme ne pourra être équilibré statiquement que si et seulement si

$$a_{1x} a_{2y} = a_{2x} a_{1y}. \quad (4.14)$$

On peut déduire de cette dernière équation que les deux points d'attache fixes n'ont plus à être exclusivement sur l'axe vertical passant par le point \mathcal{O} . Cependant, la ligne définie par les points A_1 et A_2 se doit d'intersecter cet axe vertical.

On peut aussi récrire les équations (3.12) à (3.14) sous leur forme vectorielle. Nous obtenons donc

$$k_1 a_{1x} \mathbf{b}_1 + k_2 a_{2x} \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}_3, \quad (4.15)$$

$$k_1 a_{1y} \mathbf{b}_1 + k_2 a_{2y} \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}_3, \quad (4.16)$$

$$k_1 a_{1z} \mathbf{b}_1 + k_2 a_{2z} \mathbf{b}_2 = mg \mathbf{r}_{\mathcal{O}}. \quad (4.17)$$

Selon les équations (4.15) et (4.16), les vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 doivent être colinéaires si les variables a_{1x} , a_{1y} , a_{2x} et a_{2y} sont différentes de zéro. Par exemple, on peut réorganiser les équations pour obtenir

$$\mathbf{b}_1 = \frac{-k_2 a_{2x}}{k_1 a_{1x}} \mathbf{b}_2 = \frac{-k_2 a_{2y}}{k_1 a_{1y}} \mathbf{b}_2 = \frac{mg}{k_1 a_{1z}} \mathbf{r}_{\mathcal{O}} + \frac{-k_2 a_{2z}}{k_1 a_{1z}} \mathbf{b}_2. \quad (4.18)$$

On peut voir de l'équation (4.18) que quand les vecteurs \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 sont alignés, ils doivent aussi l'être avec le centre de masse.

Lors de l'équilibrage statique d'un mécanisme avec deux ressorts, deux classes de solutions sont ainsi possibles. Dans la première, les points d'attache fixes sont situés sur une ligne intersectant l'axe vertical passant par le point \mathcal{O} . Par conséquent, les points

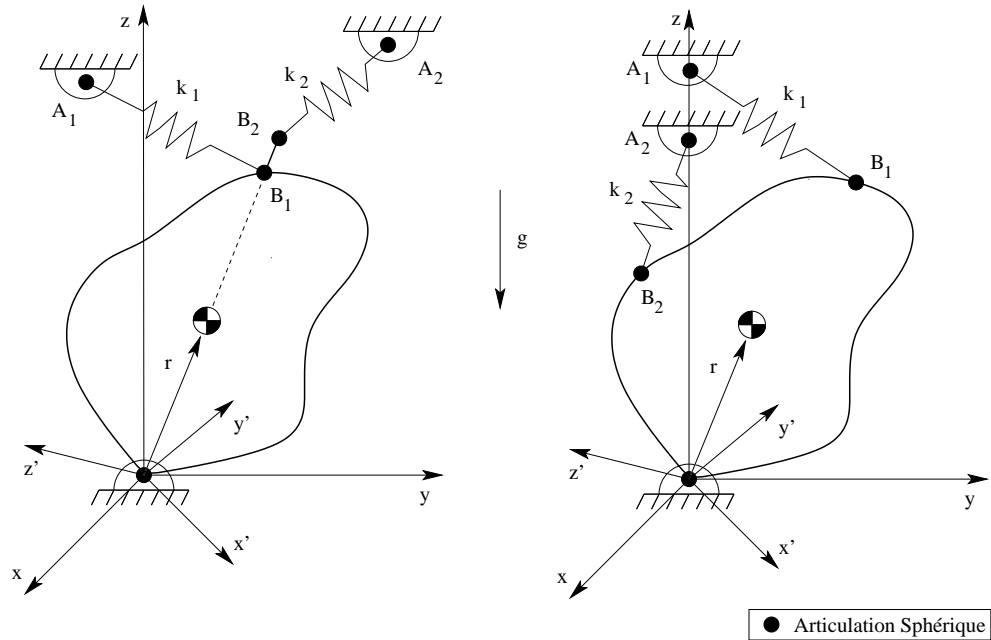


FIG. 4.2: Exemple de mécanismes sphériques à trois degrés de liberté avec deux ressorts.

d'attache sur le corps mobile doivent être placés sur une ligne définie par le centre de masse et le point \mathcal{O} . Pour la seconde classe de solutions, les points d'attache fixes sont placés sur l'axe vertical passant par le point \mathcal{O} . Les points d'attache sur le corps seront donc placés de telle sorte que les vecteurs \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 et $\mathbf{r}_{\mathcal{O}}$ soient coplanaires. La figure 4.2 illustre les deux classes de solutions pour l'équilibrage avec deux ressorts.

Encore une fois, il est appréciable de constater que l'équilibrage peut être fait avec seulement deux ressorts. Bien que le positionnement des points d'attache soit encore restrictif, on remarque une plus grande liberté de conception en comparaison de l'utilisation d'un seul ressort. De plus, la masse sera généralement répartie sur les deux ressorts, diminuant ainsi la rigidité nécessaire. On peut donc avancer que plus le nombre de ressorts sera important, plus ces mêmes ressorts pourront généralement posséder une raideur faible.

4.2.3 Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec trois ressorts

Lorsque $n = 3$ dans les équations d'équilibre générales, le système devient déterminé puisque les matrices \mathbf{L} et \mathbf{G} sont carrées. En inversant les matrices principales, il est possible d'obtenir des solutions pour les vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i . En solutionnant tout d'abord pour les vecteurs \mathbf{b}_i , on peut transformer l'équation (4.1) avec trois ressorts ($n = 3$) pour obtenir

$$\begin{bmatrix} k_1 a_{1x} \mathbf{1} & k_2 a_{2x} \mathbf{1} & k_3 a_{3x} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1y} \mathbf{1} & k_2 a_{2y} \mathbf{1} & k_3 a_{3y} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1z} \mathbf{1} & k_2 a_{2z} \mathbf{1} & k_3 a_{3z} \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

En supposant que cette matrice n'est pas singulière, nous pouvons l'inverser et ainsi avoir une solution au système linéaire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_1}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} & \left(\frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_2}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} & \left(\frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_1}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} & \left(\frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_2}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} & \left(\frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_1}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} & \left(\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_2}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} & \left(\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3}{k_1 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \right) \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

où les vecteurs \mathbf{e}_i sont $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$ et $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$. Après multiplications et simplifications des éléments des matrices, nous obtenons pour les vecteurs \mathbf{b}_i , le vecteur solution suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \frac{mg}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \begin{bmatrix} \left(\frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3}{k_1} \right) \mathbf{r} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3}{k_2} \right) \mathbf{r} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3}{k_3} \right) \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

On peut cependant constater que les vecteurs \mathbf{a}_i ne peuvent être coplanaires puisque leur produit triple est alors nul. La solution triviale du problème étant la seule option restante si les vecteurs \mathbf{a}_i sont linéairement dépendants, il faut donc éviter cette situation. On peut voir qu'ici, il n'est pas possible de faire ressortir de solutions précises

comme dans le cas où il n'y a qu'un ou deux ressorts, à moins d'émettre des conditions supplémentaires. Certaines situations particulières peuvent donc être observées si des hypothèses additionnelles sont émises. Lorsque, par exemple, on impose que tous les éléments a_{ix} et a_{iy} sont différents de zéro, on peut récrire les équations (4.15) et (4.16) de la façon suivante

$$k_1 a_{1x} \mathbf{b}_1 + k_2 a_{2x} \mathbf{b}_2 + k_3 a_{3x} \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}_3, \quad (4.22)$$

$$k_1 a_{1y} \mathbf{b}_1 + k_2 a_{2y} \mathbf{b}_2 + k_3 a_{3y} \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}_3. \quad (4.23)$$

De ces deux équations, on peut déduire, comme dans le cas où nous avons deux ressorts, que les vecteurs \mathbf{b}_i doivent être coplanaires pour ne pas retomber sur la solution triviale. De la même façon qu'au début de cette sous-section, on peut aussi obtenir des expressions équivalentes pour les vecteurs \mathbf{a}_i . En reprenant cette fois l'équation (4.5), nous avons

$$\begin{bmatrix} k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_3 \mathbf{b}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_3 \mathbf{b}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_3 \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Encore une fois, en inversant la matrice \mathbf{G} , nous avons une solution déterminée au système linéaire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{k_1 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T & \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3^T & \left(\frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{k_1 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T & \left(\frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{k_1 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T \\ \left(\frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{k_2 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T & \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3^T & \left(\frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{k_2 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T & \left(\frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{k_2 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T \\ \left(\frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{k_3 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T & \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3^T & \left(\frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{k_3 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3^T & \mathbf{0}_3^T & \left(\frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{k_3 (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

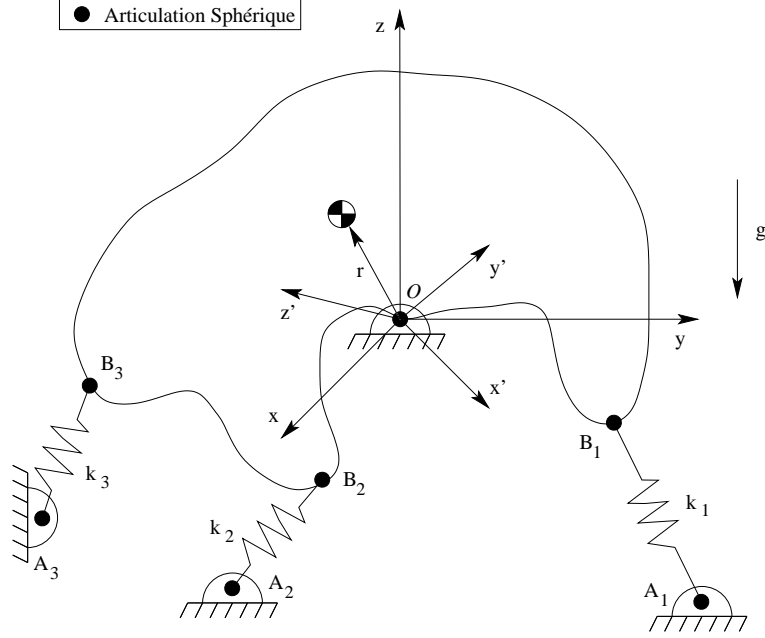


FIG. 4.3: Un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec trois ressorts.

et après avoir simplifié le résultat, le vecteur solution qui satisfait toutes les conditions d'équilibre est

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \frac{mg}{(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)^T \mathbf{r}}{k_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)^T \mathbf{r}}{k_2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{r}}{k_3} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Dans cette dernière équation, on peut constater que les éléments a_{ix} et a_{iy} se doivent d'être nuls pour satisfaire les équations. De plus, on remarque que les trois vecteurs \mathbf{b}_i ne peuvent être coplanaires entre eux ainsi qu'avec le vecteur \mathbf{r} sans ramener un ou des points d'attache à l'origine. On peut voir à la figure 4.3 un exemple d'un mécanisme équilibré statiquement à l'aide de trois ressorts.

4.2.4 Mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec quatre ressorts et plus

De la même façon qu'avec trois ressorts, on peut modifier les équations d'équilibre générales pour $n \geq 4$. On construit encore une fois un système linéaire composé de trois matrices. Pour obtenir un vecteur solution en fonction des vecteurs \mathbf{b}_i inconnus, nous avons

$$\begin{bmatrix} k_1 a_{1x} \mathbf{1} & \cdots & k_n a_{nx} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1y} \mathbf{1} & \cdots & k_n a_{ny} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1z} \mathbf{1} & \cdots & k_n a_{nz} \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

En employant la solution à norme minimale, nous pouvons obtenir l'inverse généralisé du système et résoudre en vue d'obtenir un vecteur solution. Nous avons

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \frac{mg\eta}{(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)^T \mathbf{c}_3}, \quad (4.28)$$

où le vecteur η s'écrit

$$\eta = \begin{bmatrix} \left(k_1 a_{1x} (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3)^T \mathbf{e}_3 + k_1 a_{1y} (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_1)^T \mathbf{e}_3 + k_1 a_{1z} (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)^T \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{r} \\ \vdots \\ \left(k_n a_{nx} (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3)^T \mathbf{e}_3 + k_n a_{ny} (\mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_1)^T \mathbf{e}_3 + k_n a_{nz} (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)^T \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

et où $\mathbf{c}_1 = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \right) \mathbf{e}_1$, $\mathbf{c}_2 = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \right) \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{c}_3 = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \right) \mathbf{e}_3$.

Ce vecteur général permet de réaliser que, malgré la complexification des équations, il est toujours possible de résoudre le système avec les outils appropriés. Il faudrait de plus éviter le cas où les vecteurs \mathbf{c}_i sont coplanaires. Cela veut donc dire que les trois colonnes de la matrice formée par la sommation des carrés des vecteurs \mathbf{a}_i ne doivent pas être coplanaires. En transposant le résultat obtenu ici pour un nombre de ressorts

égal à trois ($n = 3$), on retrouve de façon logique le vecteur solution trouvé à l'équation (4.21).

On peut aussi écrire ces équations pour les vecteurs \mathbf{a}_i comme dans le cas de trois ressorts. Nous avons

$$\begin{bmatrix} k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & k_n \mathbf{b}_n & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & k_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 & k_n \mathbf{b}_n & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_1 \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & k_n \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mg\mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Encore une fois, on utilise la solution à norme minimale pour trouver une solution aux vecteurs \mathbf{a}_i

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1 b_{1x} mg(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3)^T \mathbf{r}}{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{d}_3} + \frac{k_1 b_{1y} mg(\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1)^T \mathbf{r}}{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{d}_3} + \frac{k_1 b_{1z} mg(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{r}}{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{d}_3} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_n b_{nx} mg(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3)^T \mathbf{r}}{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{d}_3} + \frac{k_n b_{ny} mg(\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1)^T \mathbf{r}}{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{d}_3} + \frac{k_n b_{nz} mg(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{r}}{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)^T \mathbf{d}_3} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

où $\mathbf{d}_1 = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \right) \mathbf{e}_1$, $\mathbf{d}_2 = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \right) \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{d}_3 = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \right) \mathbf{e}_3$.

Comme dans la situation précédente, on peut faire un rapprochement avec les résultats constatés avec trois ressorts. Il est maintenant évident que lorsque plus de trois ressorts sont utilisés lors de la conception, il existe une infinité de solutions permettant l'équilibrage du mécanisme. De même, plusieurs situations particulières pourraient être énoncées en fonction du nombre de ressorts et des paramètres choisis mais il serait trop long et fastidieux de les exposer ici en détail.

Il serait maintenant intéressant de s'attarder à l'optimisation et aux simplifications possibles des équations d'équilibre générales pour faciliter l'équilibrage de mécanismes. Le prochain chapitre portera donc sur ce sujet.

Chapitre 5

Développement et simplification des équations d'équilibre générales

Il est important, dans le développement d'un nouveau mécanisme, de s'assurer qu'une conception optimale a été effectuée en tenant compte, bien sûr, des restrictions rencontrées pendant le processus de conceptualisation. C'est dans cette perspective que lors des recherches effectuées sur le développement des équations d'équilibre générales, des tentatives ont été effectuées pour simplifier les équations (3.12) à (3.14) et rendre leur utilisation optimale. Le présent chapitre expose donc les démarches entreprises et les résultats obtenus.

5.1 Optimisation des équations d'équilibre générales

Cette section présente les démarches qui ont été effectuées dans le but de rendre les équations d'équilibre générales plus à même de fournir des solutions favorables à une bonne conception. Pour des raisons pratiques, le cas où n est égal à trois a été principalement étudié. Il apparaît que les solutions avec trois ressorts sont très diversifiées et mathématiquement simples. Le système linéaire obtenu est de plus déterminé. D'un point de vue physique, un arrangement de trois ressorts représente un bon compromis quant à la répartition de la masse et à l'espace nécessaire autour du mécanisme.

Puisque le système linéaire obtenu est déterminé, il est possible d'éliminer un des ensembles de vecteurs (les vecteurs \mathbf{a}_i ou \mathbf{b}_i) et d'utiliser l'autre ensemble comme variables d'optimisation. À cet effet, nous pouvons reprendre l'équation (4.1)

$$\mathbf{L}\beta = \mathbf{s}, \quad (5.1)$$

où \mathbf{L} , β et \mathbf{s} prennent maintenant les formes suivantes

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} k_1 a_{1x} \mathbf{1} & k_2 a_{2x} \mathbf{1} & k_3 a_{3x} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1y} \mathbf{1} & k_2 a_{2y} \mathbf{1} & k_3 a_{3y} \mathbf{1} \\ k_1 a_{1z} \mathbf{1} & k_2 a_{2z} \mathbf{1} & k_3 a_{3z} \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\beta = \left[b_{1x} \quad b_{1y} \quad b_{1z} \quad b_{2x} \quad b_{2y} \quad b_{2z} \quad b_{3x} \quad b_{3y} \quad b_{3z} \right]^T, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ mgr \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

On peut ensuite inverser la matrice \mathbf{L} , si cette dernière n'est pas singulière, et solutionner pour le vecteur β . Nous obtenons, comme à l'équation (4.21) du Chapitre 4, le vecteur solution suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \frac{mg}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \begin{bmatrix} \left(\frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3}{k_1} \right) \mathbf{r} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3}{k_2} \right) \mathbf{r} \\ \left(\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3}{k_3} \right) \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

où $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$. Il a ensuite semblé intéressant de minimiser la somme des modules des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i pour atteindre l'objectif d'optimisation des équations générales. En effet, minimiser cette somme représente nécessairement un arrangement de ressorts plus compact et donc plus susceptible d'être utilisable dans un environnement restreint. Ce critère est important si on garde en mémoire le besoin sous-jacent aux recherches, c'est-à-dire la conception d'une table statiquement équilibrée dont l'espace de travail est libre de tout encombrement. En utilisant le résultat précédent, l'équation (5.5), il est possible d'établir la sommation du module des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i exprimée uniquement en fonction de la position des points d'attache fixes et des raideurs des ressorts en effectuant quelques substitutions. Donc, en remplaçant les vecteurs \mathbf{b}_i dans la sommation par leur équivalent, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = & \\ & \frac{([(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \\ & + a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2 + a_{2x}^2 + a_{2y}^2 + a_{2z}^2 + a_{3x}^2 + a_{3y}^2 + a_{3z}^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

qui est uniquement fonction des vecteurs \mathbf{a}_i .

On peut ensuite dériver partiellement la fonction par rapport aux neuf variables. On trouve ainsi les minimums de la fonction qui permettent d'optimiser son utilisation. Par exemple, la dérivée partielle de la sommation des normes des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i par rapport au premier élément du vecteur \mathbf{a}_1 , a_{1x} , nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{1x}} = & \\ \left(- \frac{2([(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2) [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_1]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_3^2 a_{3y} - 2[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_2^2 a_{2y}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \Big) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\
& + 2a_{1x}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Toutes les équations sont présentées en détail à l'Annexe A. Il serait donc possible, à partir de ces équations, de déterminer les positions optimales pour la fixation des ressorts sur une base en fonction des paramètres donnés. On peut cependant constater que les neuf équations deviennent plus complexes et plus lourdes que les équations d'origine. De plus, il n'est pas possible de les simplifier d'avantage, même vectoriellement, sans émettre des hypothèses supplémentaires. On peut utiliser ces équations dans un but de conception précis mais il serait souhaitable dans certains cas (i.e. dans des essais préliminaires) d'utiliser les équations non simplifiées pour établir les paramètres d'un mécanisme. D'autres moyens d'optimisation pourraient aussi être utilisés pour transformer les équations, notamment la méthode numérique d'optimisation quadratique disponible dans le logiciel *MATLAB*.

5.2 Simplification par hypothèse des équations d'équilibre générales

À ce stade, il peut être intéressant de faire des hypothèses qui permettraient de simplifier les équations tout en gardant le problème le plus général possible. Deux avenues ont été étudiées plus spécifiquement, soit le positionnement du centre de masse sur l'axe z et le positionnement des points d'attache fixes sur un cercle coaxial.

5.2.1 Hypothèse du centre de masse situé sur une verticale passant par le point \mathcal{O}

Une première simplification très simple consiste à spécifier que le centre de masse du corps mobile doit se situer sur la verticale du point \mathcal{O} , donc que

$$r_x = r_y = 0, \tag{5.8}$$

lorsque le système est dans son orientation initiale. On tente ici de s'approcher de la solution triviale du problème (i.e. lorsque le centre de masse du corps libre est situé au point \mathcal{O} donc que $r_x = r_y = r_z = 0$) sans toutefois l'atteindre puisqu'elle n'est d'aucun intérêt dans le cadre de cette étude. Cette simplification s'applique logiquement quand le mécanisme étudié est symétrique par rapport aux plans xz et yz . Dans ces conditions, on peut remarquer, à partir des équations (3.12) à (3.14), que la sommation des éléments b_{ix} ainsi que celle des b_{iy} doivent être nulles pour que les équations soient respectées. De plus, les éléments en x et en y des vecteurs \mathbf{a}_i se doivent d'être égaux à zéro. L'équation (5.5) devient donc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \frac{mg}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3] r_z}{k_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{[(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3] r_z}{k_2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] r_z}{k_3} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \frac{mg}{(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{b}_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{[(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)^T \mathbf{e}_3] r_z}{k_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{[(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)^T \mathbf{e}_3] r_z}{k_2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{[(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T \mathbf{e}_3] r_z}{k_3} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Le fait de déplacer le centre de masse dans cette position permet de simplifier le système linéaire. On peut constater que les points d'attache doivent être situés le long de

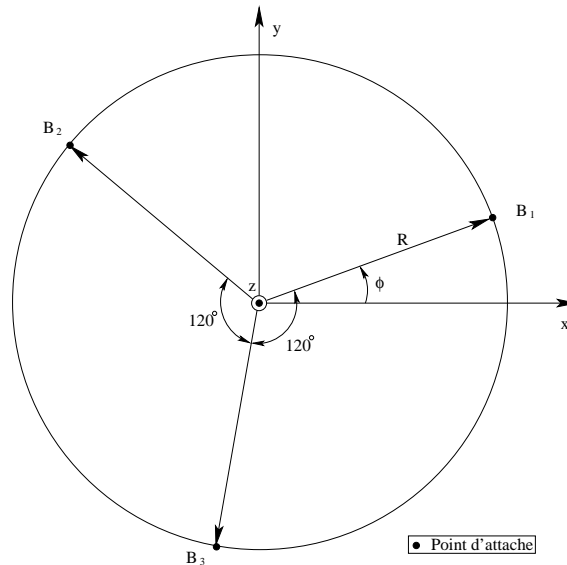


FIG. 5.1: Diagramme de positionnement des points d'attache des trois ressorts sur le corps mobile à 120 degrés.

l'axe z dans les deux cas précédents et que les vecteurs inconnus ne doivent pas être coplanaires. Cependant, cette simplification entraîne inévitablement des restrictions dans le positionnement des ressorts et peut restreindre la conceptualisation de certains manipulateurs. Cette hypothèse ainsi que toutes les simplifications subséquentes semblent très intéressantes dans le cas où l'arrangement de ressorts favorisé doit préférablement se situer près de la verticale passant par le point \mathcal{O} .

5.2.2 Hypothèse des points d'attache sur le corps mobile situés sur un cercle coaxial

La deuxième principale hypothèse faite pour tenter de simplifier le problème est de placer sur un cercle les points d'attache des ressorts sur le corps mobile. Nous avons choisi d'utiliser ici trois ressorts ($n = 3$) pour les mêmes raisons que précédemment. Considérons un cercle de rayon R dont le centre est situé sur la verticale passant par le point \mathcal{O} et dont tous les points sont à la même distance du plan xy . Cette dernière condition nous permet de déterminer que la position par rapport à l'axe z des points d'attache est identique pour les trois ressorts. Elle sera ici notée b_z .

Dans un premier temps, considérons que les points d'attache sont distribués symétriquement sur le cercle, soit à tous les 120 degrés. La rotation du cercle par rapport au repère fixe est notée par l'angle ϕ comme il est illustré à la figure 5.1.

En reprenant l'équation (5.1) et en solutionnant cette fois pour les vecteurs \mathbf{a}_i , nous avons le système linéaire suivant

$$\mathbf{G}\alpha = \mathbf{s}, \quad (5.11)$$

où \mathbf{G} et α prennent les formes suivantes

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} k_1 R \cos(\phi) \mathbf{1} & k_2 R \cos(\frac{2\pi}{3} + \phi) \mathbf{1} & k_3 R \cos(\frac{4\pi}{3} + \phi) \mathbf{1} \\ k_1 R \sin(\phi) \mathbf{1} & k_2 R \sin(\frac{2\pi}{3} + \phi) \mathbf{1} & k_3 R \sin(\frac{4\pi}{3} + \phi) \mathbf{1} \\ k_1 b_z \mathbf{1} & k_2 b_z \mathbf{1} & k_3 b_z \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\alpha = \left[a_{1x} \quad a_{1y} \quad a_{1z} \quad a_{2x} \quad a_{2y} \quad a_{2z} \quad a_{3x} \quad a_{3y} \quad a_{3z} \right]^T. \quad (5.13)$$

On peut voir dans la matrice \mathbf{G} les nouveaux paramètres pour les vecteurs \mathbf{b}_i en fonction de l'angle ϕ . Après la résolution du système linéaire et la simplification du vecteur résultant, nous obtenons

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{mg}{b_z k_1} \mathbf{r} \\ \frac{1}{3} \frac{mg}{b_z k_2} \mathbf{r} \\ \frac{1}{3} \frac{mg}{b_z k_3} \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Il est important de constater que le résultat ne dépend plus de ϕ , l'angle de rotation de l'arrangement de ressorts. Cette conclusion permet de vérifier que les équations d'équilibrage sont indépendantes du système de coordonnées. De plus, les résultats sont indépendants du rayon du cercle R puisque la symétrie de l'arrangement équilibre implicitement les forces dans la direction des axes x et y . Les coefficients numériques changent donc en fonction de la symétrie des différents points d'attache.

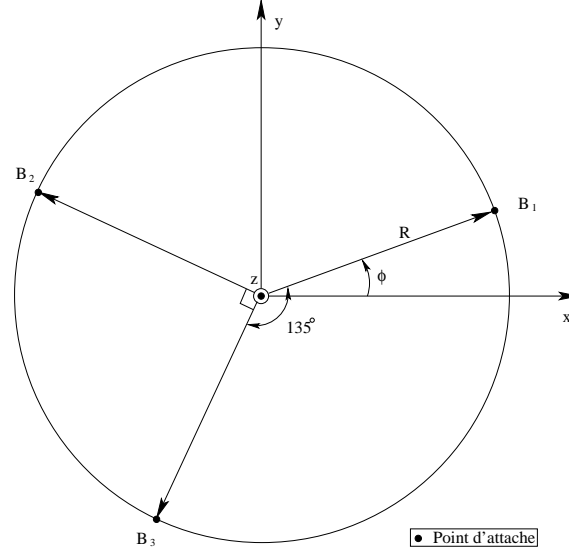


FIG. 5.2: Diagramme de positionnement des points d'attache des trois ressorts sur le corps mobile à 90 degrés.

Par exemple, quand les points B_2 et B_3 forment sur le cercle un angle de 90 degrés comme illustré à la figure 5.2, l'équation (5.14) devient

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}+1} \frac{mg}{b_z k_1} \mathbf{r} \\ \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} \frac{mg}{b_z k_2} \mathbf{r} \\ \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} \frac{mg}{b_z k_3} \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

La symétrie de l'hypothèse se reflète donc dans la solution du système. Approcher ou éloigner les points entre eux a pour conséquence de modifier directement et proportionnellement les coefficients qui les multiplient puisque les forces doivent s'équilibrer dans toutes les directions. L'hypothèse de cette section permet ainsi de simplifier grandement le vecteur résultant uniquement par la symétrie de l'arrangement de ressorts et peut s'avérer très utile dans le développement de futures applications.

Chapitre 6

Illustration du principe de l'équilibrage statique

Les trois derniers chapitres ont clairement démontré les tenants de l'équilibrage statique d'un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté à l'aide de ressorts. Ce dernier chapitre présente maintenant une illustration pratique de cette application. Il était dans l'ordre des choses de concevoir un prototype ayant pour but de confirmer physiquement les principes démontrés et exposés dans ce mémoire. De plus, ce prototype permettrait de démontrer la viabilité d'une telle méthode pour satisfaire les objectifs premiers du projet, soit la construction d'une table de travail spécialisée. Malheureusement, la construction proprement dite du prototype n'a pu être faite avant la fin de la rédaction de ce mémoire dû à des contraintes de temps. Le prototype sera éventuellement construit dans un futur proche après quelques modifications. Le présent chapitre portera donc sur le prototype ainsi que tous les aspects de sa conception.

6.1 Conception et optimisation

Les objectifs de ce futur prototype seront principalement de démontrer qu'un arrangement de ressorts peut à la fois équilibrer statiquement un mécanisme sphérique tout en permettant l'utilisation d'une surface de travail dégagée. Il a été décidé de réduire grandement les dimensions par rapport à une table réelle puisque ces vérifications peuvent être faites indépendamment de la taille du prototype. On pourra ainsi réduire considérablement les coûts en matériaux et en main-d'oeuvre.

L'équilibrage statique sera réalisé à l'aide de trois ressorts dû au bon compromis que possède un tel arrangement. Comme expliqué précédemment, un système à trois ressorts est déterminé et facile à résoudre mathématiquement en plus de posséder une bonne répartition de la masse sur chaque ressort. Pour permettre aux ressorts d'avoir une longueur non déformée nulle et de ramener les pièces mobiles à la base du mécanisme, un système de câbles et de guides sera installé pour relier les ressorts à la plate-forme. Les matériaux choisis seront principalement l'aluminium et le plastique en raison de leur légèreté et de leur solidité. Les pièces de plastique seront réalisées par prototypage rapide permettant ainsi la fabrication de diverses formes. Pour réduire les coûts relatifs aux composantes du mécanisme ainsi que les délais de livraison, les ressorts seront achetés chez un quincaillier à grande surface puis testés pour évaluer leurs caractéristiques spécifiques.

Lors de la conception, aucune véritable optimisation n'a été faite. En raison du choix restreint au niveau des ressorts, la conception se fonde directement sur les éléments élastiques et limite ainsi une possible optimisation. Cependant, pour simplifier les équations d'équilibre générales, les points d'attache sur la plate-forme mobile seront positionnés sur un cercle coaxial comme exposé à la section 5.2.2. De plus, la plate-forme sera conçue de façon symétrique pour positionner le centre de masse le long de l'axe z . Il est à noter que les trois ressorts devront être identiques dans la mesure du possible pour pouvoir préserver la symétrie de l'arrangement.

La figure 6.1 montre l'aspect sommaire du prototype. Un complément de vues permettant de faciliter la compréhension a été inclus à l'annexe B pour alléger le corps du texte.

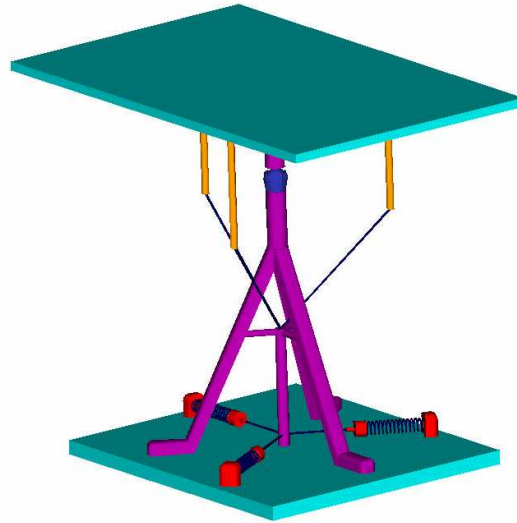


FIG. 6.1: Vue oblique du prototype.

6.2 Description du prototype

Le prototype repose sur une base d'aluminium. Cette base sert d'appui au reste du mécanisme et permet de fixer le trépied, le guide, ainsi que les ressorts. Le trépied, fait de plastique par prototypage rapide, supporte la plate-forme et permet de dégager l'espace nécessaire aux câbles. La plate-forme, montée sur une tige possédant une rotule, est faite d'aluminium. Cette rotule permet à la plate-forme de bouger librement selon les trois axes de rotation. Enfin, un guide de plastique dirige les trois câbles reliant les attaches supérieures aux ressorts. Le tableau 6.1 montre sommairement les dimensions de plusieurs composantes. Ces dimensions sont données à titre indicatif et pourraient faire l'objet de modifications lors de la construction même du prototype. L'ensemble du mécanisme a un poids approximatif de 4,25 kg.

Enfin, le système d'équilibrage proprement dit est composé de câbles légers possédant une très bonne rigidité. Les attaches supérieures permettent de ramener les points d'ancrage des câbles sous la table et ainsi d'obtenir un espace dégagé pour le travail. Selon la configuration actuelle, les ressorts devraient posséder individuellement une raideur de 1 N/m pour équilibrer le prototype. Avec un débattement de plus ou moins soixante degrés autour de chaque axe, les ressorts doivent pouvoir s'allonger d'au moins 12 cm. Le tableau 6.2 montre les coordonnées des points d'attache des ressorts par rapport au

<i>Pièce</i>	<i>Longueur</i>	<i>Largeur</i>	<i>Épaisseur</i>	<i>Hauteur</i>	<i>Diamètre</i>
Base	25	22	1,18	-	-
Plate-forme	35	22	0,75	-	-
Trépied	16,15	17,94	-	15,75	-
Tige de support	12,32	-	-	-	1,75
Guide	9,25	-	-	-	0,80
Attache supérieure	10,75	-	-	-	0,50

TAB. 6.1: Dimensions de diverses pièces (en cm)

centre de rotation.

<i>Point d'attache</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
A_1	0	0	-12
A_2	0	0	-12
A_3	0	0	-12
B_1	8,75	0	-3,118
B_2	-4,375	7,578	-3,118
B_3	-4,375	-7,578	-3,118

TAB. 6.2: Coordonnées des points d'attache par rapport au centre de rotation (en cm)

6.3 Améliorations futures

Quelques changements devraient probablement être apportés au prototype avant d'obtenir une conception optimale. En effet, le système de guide permettant de faire converger les câbles est approximatif et pourrait conduire à l'usure des câbles. On pourrait donc imaginer trois poulies situées à des hauteurs différentes qui permettraient de faire passer véritablement les câbles par l'axe vertical. Trois autres poulies fixées à la base rattacheraient les ressorts au système. Dans ce cas, il faudrait cependant modifier la valeur de chaque ressort en fonction de la hauteur de leur poulie respective.

Dans le cas de la construction d'un prototype de grandeur réelle, plusieurs modifications pourraient être apportées dans le but de commercialiser le concept. En plus d'utiliser des poulies pour augmenter la précision de l'équilibrage, on pourrait fixer un système de freinage mécanique sur la rotule. Ce frein permettrait d'immobiliser la plate-forme dans une position donnée entre chaque mouvement. Un système d'étau permettant de tenir des pièces pourrait, au besoin, être ajouté directement à la plate-forme pour l'inclure dans l'équilibrage statique du mécanisme. Enfin, la base nécessiterait l'ajout de trois autres degrés de liberté en translation permettant de soulever ou de déplacer l'ensemble du mécanisme. Cette dernière modification donnerait une plus grande adaptabilité à la table.

Conclusion

Les objectifs présentés au début de ce mémoire consistaient premièrement à démontrer qu'il est possible d'équilibrer statiquement un mécanisme sphérique à trois degrés de liberté avec des éléments élastiques linéaires. Nous avons vu qu'à partir de l'expression de l'énergie potentielle du mécanisme et des ressorts, on peut obtenir des équations d'équilibre qui s'appliquent à toutes configurations. Il faut cependant se rappeler que ces expressions ne sont valables que sous deux conditions. Il faut tout d'abord que les longueurs non déformées des ressorts soient nulles pour assurer qu'aucun terme non linéaire ne soit présent. De plus, les équations d'équilibre générales ne sont utilisables que pour un seul module et une seule orientation de la force gravitationnelle. Pour tout changement de cette force, les équations devront être ajustées.

Grâce à ces équations, nous avons pu démontrer qu'il est possible d'équilibrer un mécanisme sphérique à l'aide d'un seul ressort ($n = 1$) sans ajout de contrepoids, de forces ou de couples externes. Cependant, le positionnement des points d'attache est fortement restreint dans ce cas. Il est de plus possible d'équilibrer le mécanisme sphérique à l'aide de plus d'un ressort. Nous avons présenté en détail les situations où l'équilibrage est effectué avec deux, trois et plus de trois ressorts. L'augmentation du nombre de ressorts a plusieurs conséquences sur la conception d'un mécanisme. Parmi les plus importantes, on peut parler d'une plus grande liberté de positionnement des points d'attache des ressorts et d'une meilleure répartition de la masse qui doit être équilibrée. On note cependant une complexification du système d'équations ainsi qu'une

hausse de l'espace occupé par l'arrangement de ressorts lorsque leur nombre augmente.

Par la suite, l'optimisation des équations d'équilibre générales a été tentée selon le principe de la minimisation de l'espace. Pour atteindre cet objectif, la sommation des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i a été dérivée par rapport aux neuf variables inconnues pour permettre de trouver les minimums de la fonction. Des simplifications par hypothèse permettent aussi d'alléger l'utilisation des équations d'équilibre. En premier lieu, le positionnement du centre de masse de la plate-forme sur la verticale passant par l'origine permet de simplifier les équations et de ramener les points d'attache près de cette même verticale. De plus, un positionnement symétrique des points d'attache, comme sur un cercle coaxial présenté à la section 5.2.2, simplifie également les équations tout en restreignant les positions possibles. À la lumière des résultats obtenus, on peut affirmer que les optimisations et les simplifications réalisables dépendent énormément de la conception du mécanisme qui sera équilibré.

Enfin, la présentation d'un prototype pouvant démontrer physiquement le principe de l'équilibrage à l'aide d'éléments élastiques linéaires a été réalisée dans le dernier chapitre. De taille réduite pour des raisons pratiques, économiques et temporelles, il reproduira le comportement d'une table de travail réelle. Bien que la réalisation du projet ne soit pas encore commencée, les bases de la conception du mécanisme sont en place et permettront une construction rapide.

Outre la construction du prototype, la conception d'une table de pleine grandeur devrait faire partie des développements futurs. Plusieurs ajouts techniques pourraient aussi venir se greffer au concept pour amener la table à son plein potentiel. On peut parler ici de l'addition de trois degrés de liberté à la base et d'un frein mécanique pour immobiliser la plate-forme lors de son utilisation. D'autres utilisations nécessitant une plate-forme statiquement équilibrée (i.e. un manipulateur permettant l'orientation d'un objet lourd) pourraient d'ailleurs être développées.

Les prochains travaux de recherche pourraient porter sur deux aspects différents. Premièrement, il serait souhaitable que le principe d'équilibrage statique avec éléments élastiques linéaires puisse être appliqué à d'autres types d'architectures de manipulateurs sphériques ainsi qu'à des robots parallèles à plusieurs degrés de liberté. De plus, l'émergence d'une multitude de nouveaux manipulateurs et des progrès constants dans

le domaine de la robotique pourraient permettre le développement d'une méthode globale d'équilibrage statique pouvant s'adapter à un grand nombre de manipulateurs et de situations.

Références

- [1] Craver, W.M., (1989), Structural analysis and design of a three-degree-of-freedom robotic shoulder module, Mémoire de maîtrise, Département of Mechanical Engineering, University of Texas at Austin.
- [2] Dasgupta, B et Mruthyunjaya T.S., (2000), The Stewart platform manipulator : a review, *Mech. Mach. Theory*, vol. 35, No. 1, pp. 15-40.
- [3] Gosselin, C., (1999), Static balancing of spherical 3-DOF parallel mechanisms and manipulators, *The international Journal of Robotics Research*, vol. 18, No. 7.
- [4] Gosselin, C. et Angeles, J., (1989), The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator, *ASME J. Mech. Trans. Automat. Design*, vol. 111, No. 2, pp. 202-207.
- [5] Gosselin, C. et Lavoie, E., (1993), On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators, *Intl. J. Robot. Res.*, vol. 12, No. 4, pp. 394-402.
- [6] Gosselin C. et Wang, J., (1998) On the design of gravity-compensated six-degree-of-freedom parallel mechanisms, *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robot. and Automat.*, Leuven, Belgium.
- [7] Hervé, J.M., (1986), Device for counterbalancing the forces due to gravity in robot arm, United States patent 4, 620, 829.
- [8] Jean, M. et Gosselin, C., (1996), Static balancing of planar parallel manipulators,

- Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robot. and Automat.*, vol. 4, Washington DC, pp. 3732-3737.
- [9] Lowen, G.G., Tepper, F.R. et Berkof, R.S., (1983), Balancing of linkages - An update, *Mech. Mach. Theory*, vol. 18, No. 3, Washington DC, pp. 213-220
- [10] Merlet, Jean-Pierre, (1990), Les robots parallèles, *Traité des Nouvelles Technologies, série Robotique*, Éditions HERMES, France.
- [11] Nathan, R.H., (1985), A constant-force generation mechanism, *ASME J. Mech. Trans. Automat. Design*, vol. 107, No. 4, pp. 508-512.
- [12] Papadopoulos, E. et Abu-Abed, A., (1994), Design and planning for a zero reaction manipulator, *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robot. and Automat.*, vol. 2, San Diego, pp. 1554-1559.
- [13] Pouliot, N., Gosselin, C. et Nahon, M., (1998), Motion-simulation capabilities of three-degree-of-freedom flight simulators, *AIAA J. Aircraft*, vol. 35, No. 1, pp. 9-17.
- [14] Ricard, R. et Gosselin, C. (2000), On the development of reactionless parallel manipulators, *Comptes-Rendus de la ASME 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Baltimore, Usa, No. MECH-14098, septembre.
- [15] Streit, D.A., (1991), Equilibrator design for a spatial three-degree-of-freedom, *Proc. of the Second Natl. Conf. on Applied Mech. and Robot*, vol. VIII.B, pp 1-6.
- [16] Streit, D.A. et Gilmore, B.J., (1989), Perfect spring equi-librators for rotatable bodies, *ASME J. Mech. Trans. Automat. Design*, vol. 111, No. 4, pp. 451-458.
- [17] Streit, D.A. et Shin, E., (1990), (Chicago, IL), Equilibrators for planar linkages, *Proc. of the ASME Mech. Conf.*, vol. DE-25, New York ASME, pp. 21-28.
- [18] Ulrich, N. et Kumar, V., (1991), (Sacramento, CA), Passive mechanical gravity compensation for robot manipulators, *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Robot. and Automat.*, Los Alamitos, CA :IEEE, pp. 1536-1541.
- [19] Walker, M.J. et Oldham, K., (1978), General theory of force balancing using counterweights, *Mech. Mach. Theory*, vol. 13, pp. 175-185.
- [20] Walsh, G.J., Streit, D.A. et Gilmore, B.J., (1991), Spatial spring equilibrator theory, *Mech. Mach. Theory*, vol. 26, No. 2, pp. 155-170.
- [21] Wang, J. et Gosselin, C., (1999), Static balancing of spatial three-degree-of-freedom parallel mechanisms, *Mech. Mach. Theory*, vol. 34 No. 3, pp. 437-452.

- [22] Wang, J. et Gosselin, C., (2000), Static balancing of spatial four-degree-of-freedom parralel mechanisms, *Mech. Mach. Theory*, vol. 35 No. 4, pp. 563-592.
- [23] Ye, Z. et Smith, M.R., (1994), Complete balancing of planar linkages by an equivalence method, *Mech. Mach. Theory*, vol. 29, No. 5, Washington DC, pp. 701-712

Annexe A

Développements complets des équations d'équilibre générales

Cette annexe présente en détail les développements qui ont été faits sur les équations d'équilibre générales dans le but d'optimiser leur utilisation et qui sont présentés au Chapitre 5. On expose donc les dérivées partielles de la somme des modules des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i pour chacune des neuf variables.

A.1 Dérivées partielles de la somme des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i

Comme mentionné au Chapitre 3, la sommation des modules des vecteurs \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i , pour $i = 1, 2, 3$, nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i = & \\ \frac{([\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2]^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} & \\ + a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2 + a_{2x}^2 + a_{2y}^2 + a_{2z}^2 + a_{3x}^2 + a_{3y}^2 + a_{3z}^2. & \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

On peut ensuite dériver partiellement cette équation par rapport aux neuf composantes des vecteurs \mathbf{a}_i pour obtenir les minimums de la fonction. Les neuf équations suivantes montrent les résultats obtenus. Nous avons donc pour a_{1x}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{1x}} = & \\ \left(- \frac{2([\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2]^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2) [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_1]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. & \\ \left. + \frac{2[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_3^2 a_{3y} - 2[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_2^2 a_{2y}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 & \\ + 2a_{1x}. & \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Pour a_{1y} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{1y}} = & \\ \left(- \frac{2([\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2]^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2) [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_2]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. & \\ \left. + \frac{-2[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_3^2 a_{3x} + 2[(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_2^2 a_{2x}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 & \\ + 2a_{1y}. & \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pour a_{1z} :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{1z}} = \\
& -2 \left(\frac{([\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2]^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2)[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\
& \left. + \frac{([\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1]^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2)[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\
& + 2a_{1z}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Pour a_{2x} :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{2x}} = \\
& \left(-\frac{2([\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2]^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2)[(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_1]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\
& \left. + \frac{-2[(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_2^2 k_3^2 a_{3y} + 2[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_2^2 a_{1y}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\
& + 2a_{2x}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Pour a_{2y} :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{2y}} = \\
& \left(-\frac{2([\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2]^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2)[(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_2]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\
& \left. + \frac{2[(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_2^2 k_3^2 a_{3x} - 2[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_2^2 a_{1x}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\
& + 2a_{2y}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Pour a_{2z} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{2z}} = \\ & \left(\frac{-2 \left([(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 \right) [(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\ & \left. + \frac{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2 [(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\ & + 2a_{2z}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Pour a_{3x} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{3x}} = \\ & 2 \left(- \frac{2 \left([(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2 \right) [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_1]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\ & \left. + \frac{2 [(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_2^2 k_3^2 a_{2y} - 2 [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_3^2 a_{1y}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\ & + 2a_{3x}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Pour a_{3y} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{3y}} = \\ & 2 \left(- \frac{2 \left([(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2 \right) [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_2]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\ & \left. + \frac{-2 [(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3] k_2^2 k_3^2 a_{2x} + 2 [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3] k_1^2 k_3^2 a_{1x}}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\ & + 2a_{3y}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Pour a_{3z} :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \right)}{\partial a_{3z}} = \\
& \left(\frac{-2 \left([(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_3]^2 k_2^2 k_3^2 + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_3^2 \right) [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_2]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right. \\
& \left. + \frac{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1)^T \mathbf{e}_3]^2 k_1^2 k_2^2 [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{e}_2]}{[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \mathbf{a}_1]^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \right) \mathbf{r}^T \mathbf{r} g^2 m^2 \\
& + 2a_{3z}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Annexe B

Plans complets du prototype d'une table statiquement balancée à l'aide de ressorts

B.1 Vues obliques et dimensionnées

Cette annexe présente les plans complets du prototype qui pourra être construit pour illustrer le principe d'équilibrage statique démontré dans ce mémoire. Quelques vues dimensionnées ont aussi été ajoutées pour donner un aperçu des proportions du prototype. Les dimensions des composantes ont été omises puisqu'elles ne sont pas définitives et devront éventuellement faire l'objet de recherches plus poussées ou de modifications.

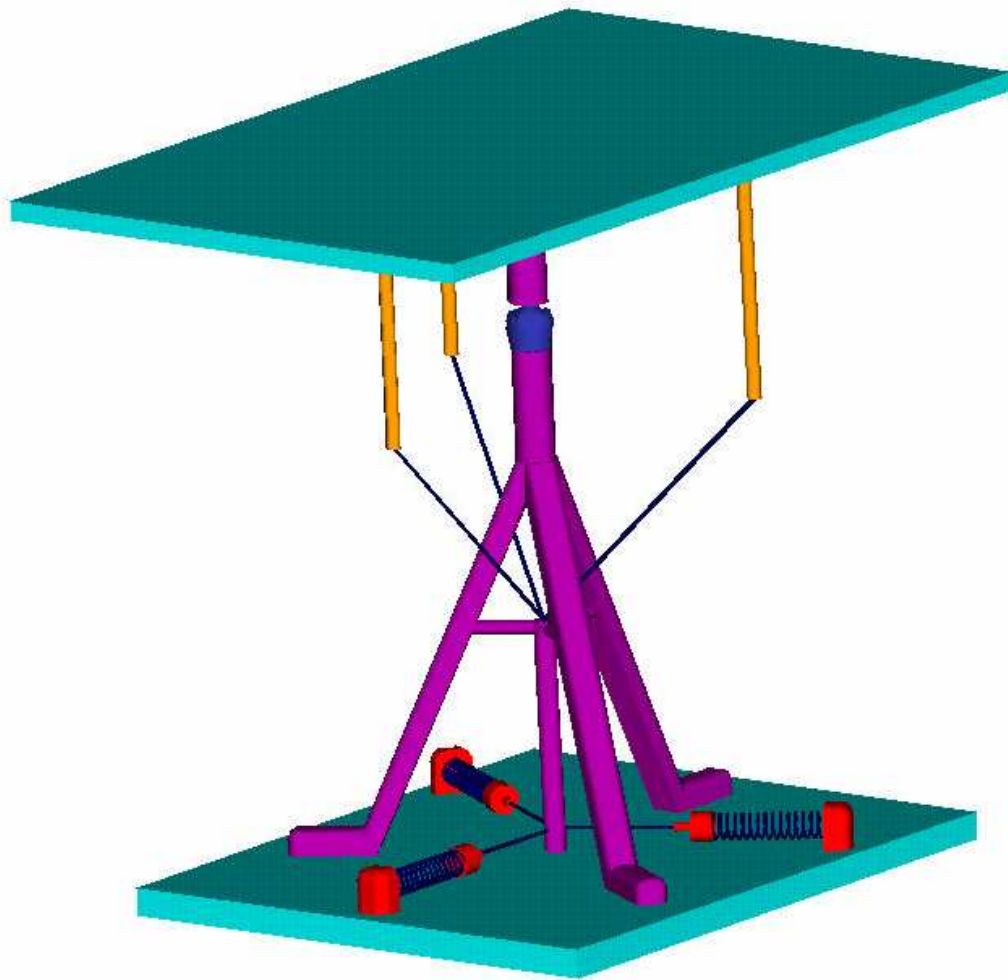


FIG. B.1: Vue oblique supérieure gauche.

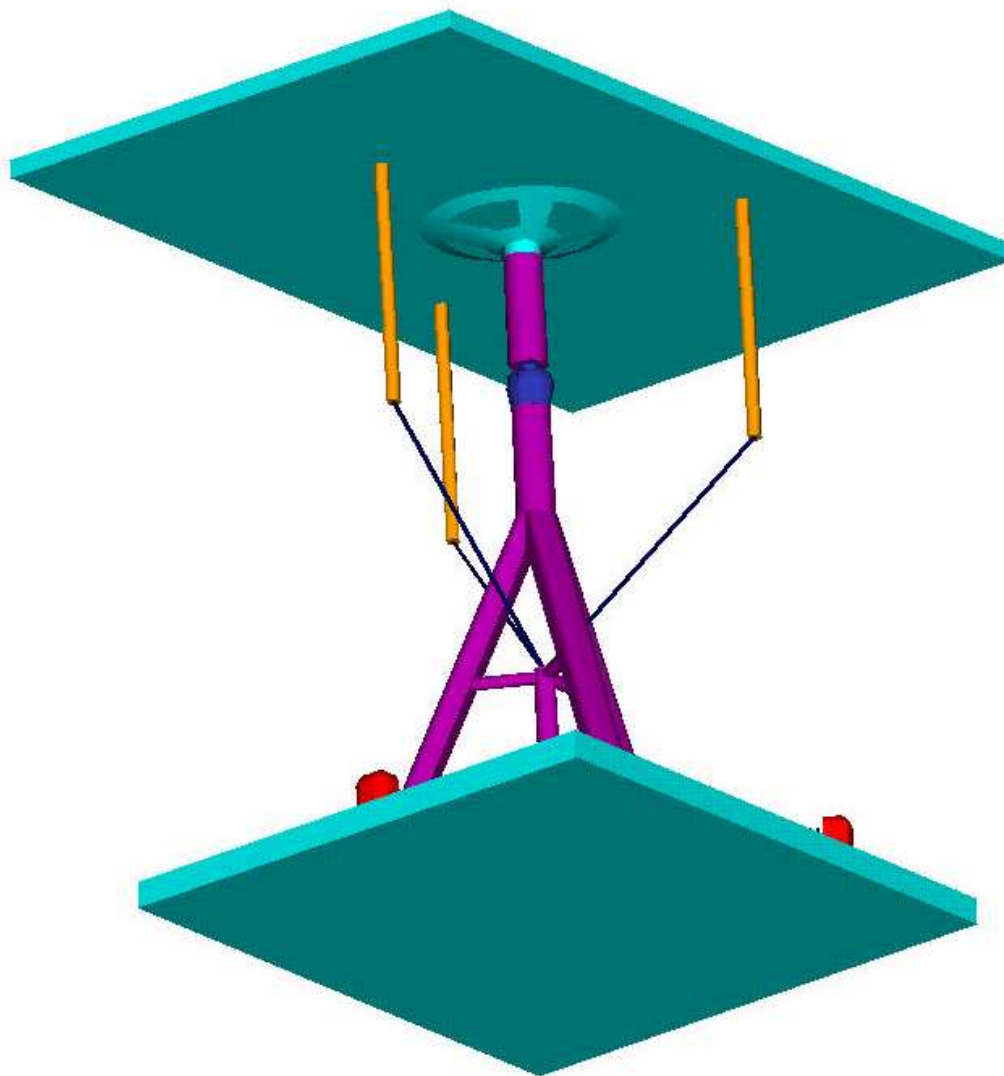


FIG. B.2: Vue oblique inférieure gauche.

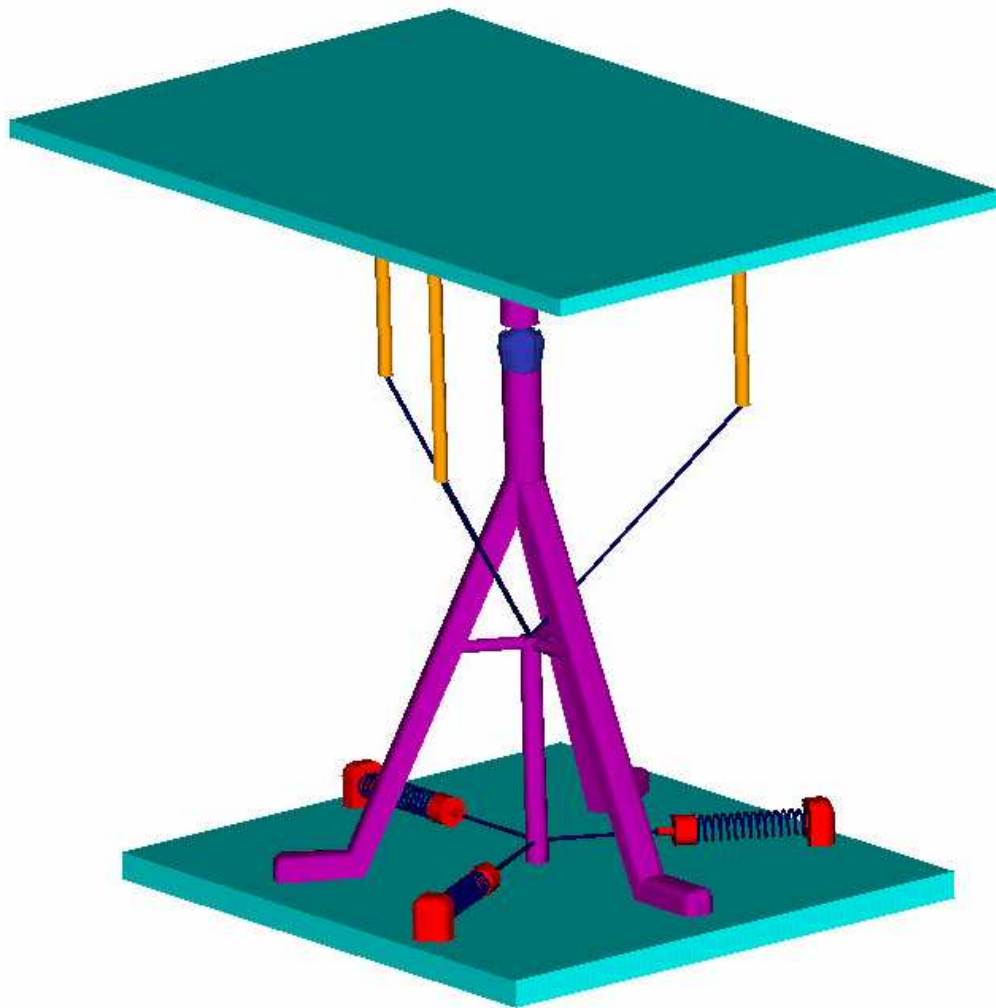


FIG. B.3: Vue oblique supérieure droite.

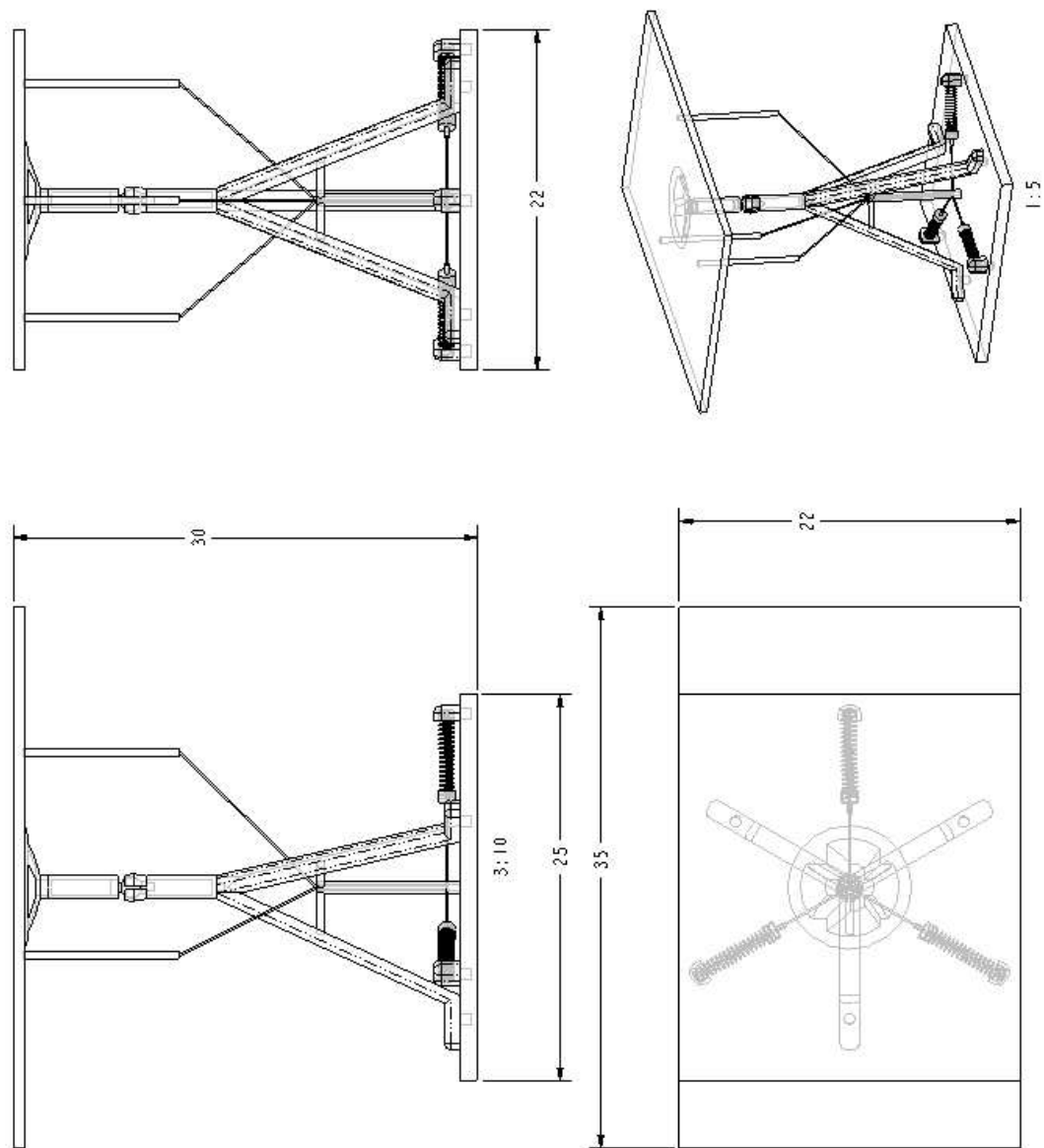


FIG. B.4: Vue dimensionnée.

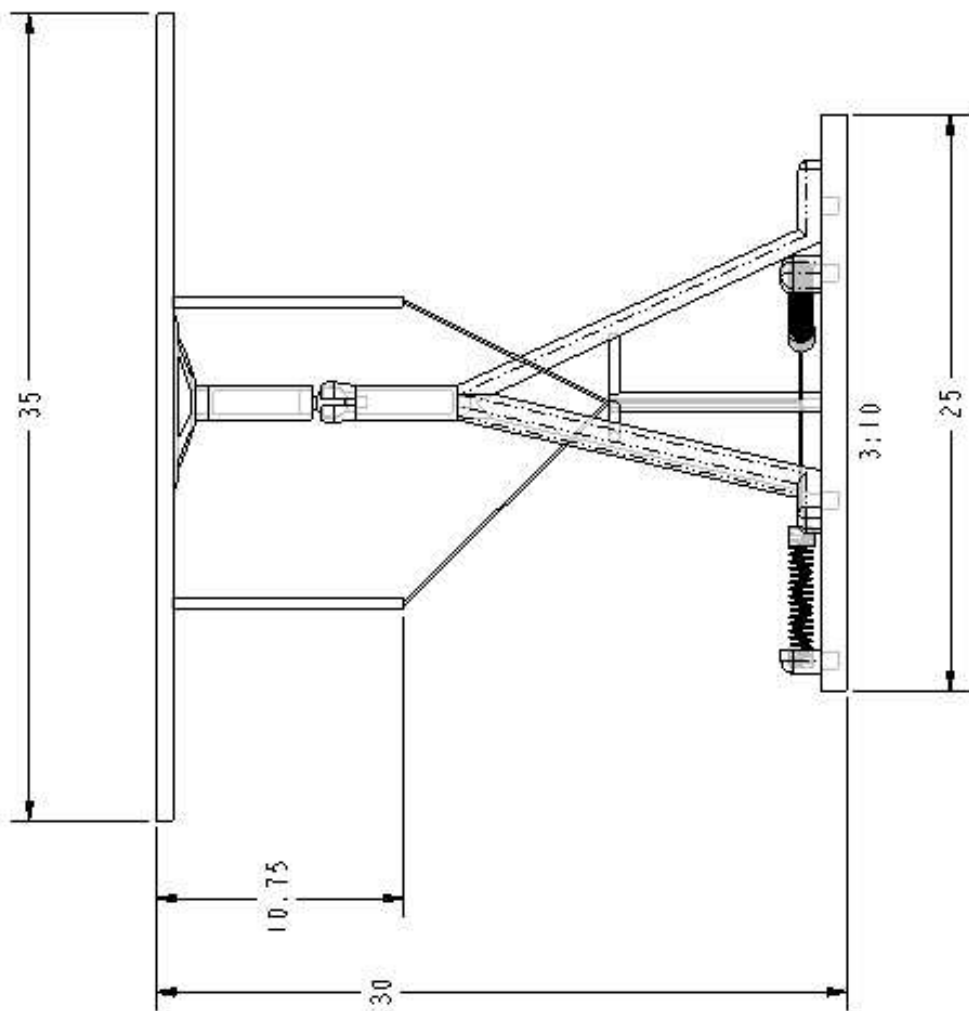


FIG. B.5: Vue frontale.

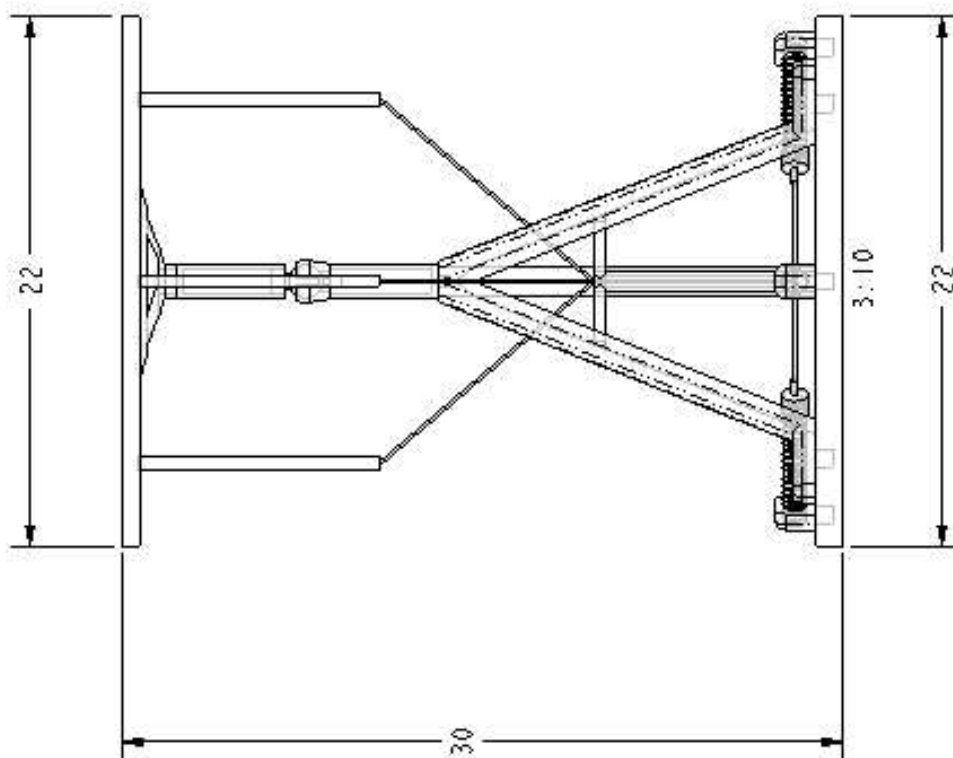


FIG. B.6: Vue du côté droit.

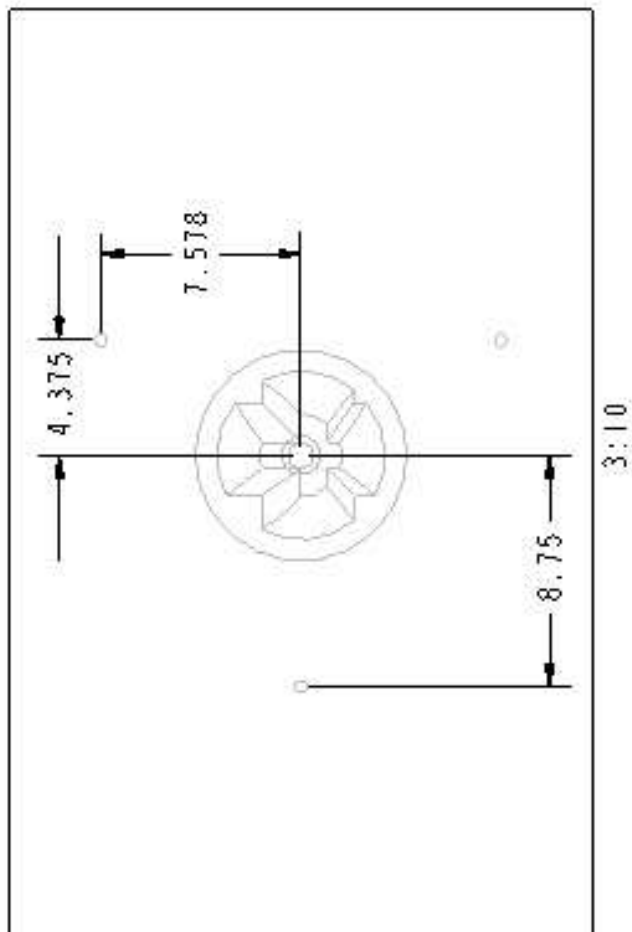


FIG. B.7: Vue de la position des attaches.