

JEAN-PHILIPPE JOBIN

**SYNTHÈSE ET ANALYSE D'UNE SCÈNE DE
SPECTACLE DYNAMIQUEMENT RECONFIGURABLE**

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2005

Résumé

Ce mémoire présente les travaux effectués dans le cadre d'une association entre le laboratoire de robotique ainsi que celui des nouvelles technologies de l'image, du son et de la scène (*Lantiss*), tous deux issus de l'Université Laval, relativement au développement d'une scène de spectacle dynamiquement reconfigurable. Une part importante de l'analyse traite de l'aspect esthétique des mouvements et des poses d'une telle surface, face à son utilisation dans le monde du spectacle. L'autre champ d'étude fait référence à des aspects techniques. Ainsi, les solutions qui sont artistiquement intéressantes sont analysées et optimisées afin de pouvoir être réalisées mécaniquement. C'est à cet effet que des études cinématiques et dynamiques de mécanismes ainsi que des optimisations de paramètres géométriques sont exposées. Finalement, ces démarches théoriques mènent à la fabrication et à la commande d'un prototype respectant les attentes artistiques de la scène mobile.

Avant-propos

Il est de mise, par politesse, de commencer en remerciant son directeur. Or, si mes premiers remerciements vont pour monsieur Clément Gosselin, ce n'est pas par courtoisie, mais bien par égard pour lui et pour ce qu'il a fait pour moi. Ses qualités de pédagogue, sa disponibilité, son enthousiasme ainsi que sa grande ouverture d'esprit font de lui un professeur et un directeur exceptionnel.

Je veux également souligner l'implication importante, dans mon projet de maîtrise, de Robert Faguy, coordonateur du *Lantiss*. Rien de tout cela n'aurait été possible sans sa détermination et son travail acharné. Si le *Lantiss* existe, et que des étudiants comme moi peuvent combiner dans leurs études l'art et la technologie, c'est bien grâce à lui !

Je tiens également à remercier mes collègues du laboratoire de robotique qui furent d'une grande aide tout au long de ma maîtrise. Je dois mentionner spécialement les contributions de Thierry Laliberté, Boris Mayer St-Onge, Simon Foucault ainsi que Marc Gouttefarde. Ils ont, chacun à leur façon, fait avancer le projet.

Finalement, je suis énormément redevable à mes proches, parents et amis, pour leur soutien durant toutes ces années d'études. Leur support fut d'une aide inestimable.

À tous, je veux simplement, mais sincèrement, vous dire merci !

À tous ces fous qui ont cru en moi!

*Il n'y a pas de maîtrise plus grande et plus
humble que celle que l'on exerce sur soi.*

Léonard De Vinci

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	ix
1 Introduction	1
1.1 Problématique	1
1.2 Structure du mémoire	5
2 Mise en situation	8
2.1 <i>Lantiss</i>	9
2.2 Castelet électronique	10
2.3 Cahier des charges simplifié	12
2.3.1 Valeurs à rencontrer	13
2.3.2 Définitions	13
2.3.2.1 Masse à mouvoir	13
2.3.2.2 Surface de la scène	14
2.3.2.3 Hauteur de la scène au repos	14
2.3.2.4 Amplitude de déplacement vertical	14
2.3.2.5 Temps de déplacement vertical	14
2.3.2.6 Type de mouvement	15
2.3.2.7 Conditions d'utilisation	15

3	Étude de concepts de solutions générales et analyse des mouvements scéniques	16
3.1	Concepts de solutions générales	16
3.1.1	Approche discrète	17
3.1.1.1	Poses et trajectoires	18
3.1.2	Approche continue	20
3.1.2.1	Poses et trajectoires	21
3.1.3	Approche hybride	23
3.2	Peaufinement des concepts	24
3.2.1	Moyennage	25
3.2.1.1	Différentes configurations du principe de moyennage par câbles	26
3.2.2	Modularité	28
3.3	Analyse des concepts face à l'utilisation des mouvements scéniques . . .	31
3.3.1	Utilisation actuelle de l'espace scénique	31
3.3.2	Comparaison des concepts	32
4	Analyse de différentes configurations modulaires moyennées	34
4.1	Système modulaire par étages	35
4.1.1	Mécanismes pour le premier étage	35
4.1.1.1	Plate-forme parallèle à trois pattes	36
4.1.1.2	Plate-forme parallèle à quatre pattes	37
4.1.1.3	Plate-forme hybride	37
4.1.2	Mécanismes pour le deuxième étage	38
4.1.3	Discussion	40
4.2	Système modulaire direct	40
5	Mécanisme bidimensionnel de moyennage par bielles	42
5.1	Description du mécanisme	43
5.2	Analyse cinématique	44
5.2.1	Problème géométrique direct	44
5.2.1.1	Hauteur de la marche centrale (p)	44
5.2.1.2	Orientation de la bielle centrale (θ)	50
5.2.2	Problème géométrique inverse	51
5.2.3	Équations de vitesse	53
5.2.3.1	Singularités	54
5.2.4	Analyse des erreurs	59

5.2.4.1	Première famille d'extremums	63
5.2.4.2	Deuxième famille d'extremums	65
5.2.4.3	Troisième famille d'extremums	65
5.2.4.4	Interprétation	66
5.2.5	Optimisation des paramètres géométriques	68
5.2.5.1	Méthode de calcul des paramètres géométriques	70
5.2.5.2	Exemple numérique	71
5.2.6	Cinématique simplifiée	72
5.3	Modèle dynamique	73
5.3.1	Méthodologie	73
5.3.2	Matrice \mathbf{T}	75
5.3.3	Matrice \mathbf{R}	77
5.3.4	Efforts dus à la gravité \mathbf{f}_g	78
5.3.5	Matrice $\dot{\mathbf{T}}$	79
5.3.6	Modèle dynamique épuré	80
6	Architectures spatiales du mécanisme de moyennage plan	82
6.1	Configurations relatives au nombre d'actionneurs	83
6.2	Configurations relatives à la position des actionneurs	86
6.2.1	Définition des agencements des actionneurs	86
6.2.1.1	Solutions uniques	89
6.2.1.2	Familles de solutions doubles	90
6.2.1.3	Familles de solutions quadruples	91
6.2.1.4	Familles de solutions octuples	91
6.2.1.5	Méthodologie	92
6.2.2	Agencements à trois degrés de liberté	93
6.2.3	Agencements à quatre degrés de liberté	95
6.3	Étude cinématique de l'architecture spatiale avec des actionneurs aux quatre coins	97
6.3.1	Définition des coordonnées cartésiennes et articulaires	97
6.3.2	Problème géométrique direct	100
6.3.3	Problème géométrique inverse	101
6.3.4	Équations de vitesse	101
6.4	Sommaire	102
7	Prototype	103
7.1	Composantes mécaniques	104

7.1.1	Plateaux et mécanismes de moyennage	104
7.1.2	Actionneurs linéaires et châssis	105
7.1.3	Contraintes supplémentaires	106
7.1.4	Design complet	109
7.2	Commande	109
7.2.1	Interface graphique	112
7.2.2	Commande sinusoïdale	112
7.3	Résultats	113
8	Conclusion	115
	Bibliographie	117
A	Animations, vidéos, illustrations et photos du CD-Rom d'accompagnement	119
B	Architecture sérielle versus architecture parallèle	121
C	Études cinématiques de différentes plates-formes mobiles	123
C.1	Plate-forme parallèle à trois pattes	124
C.1.1	Problème géométrique inverse	124
C.1.2	Équations de vitesse	125
C.1.3	Équations d'accélération	127
C.2	Plate-forme parallèle à quatre pattes	128
C.2.1	Problème géométrique inverse	128
C.2.2	Équations de vitesse	128
C.2.3	Équations d'accélération	130
C.3	Plate-forme hybride	130
C.3.1	Problème géométrique inverse	130
C.3.2	Équations de vitesse	131
C.3.3	Équations d'accélération	132
D	Illustration flottante du mécanisme de moyennage plan	133
E	Solution analytique d'une équation quartique	134

Liste des tableaux

2.1	Cahier des charges simplifié, critères numériques.	13
2.2	Cahier des charges simplifié, autres critères.	14
3.1	Tableau comparatif des différents concepts de solution.	33
5.1	Types de solutions pour le paramètre h si H et I étaient indépendants.	47
5.2	Types de solutions pour le paramètre h , considérant la dépendance entre H et I	49
5.3	Résumé des singularités du mécanisme de moyennage.	59
5.4	Résumé des extremums de l'erreur Δ	68
7.1	Caractéristiques techniques du prototype d'un module de la scène du castelet électronique.	113

Liste des figures

1.1	Conception artistique de la <i>méchanè</i> par Elaine Atkinson. Illustration tirée de <i>Classical Greek Theater : new views of an old subject</i> [3].	2
1.2	Lampe Quinquet sans le réflecteur de Lavoisier.	3
1.3	(a) Photo et (b) croquis d'une plate-forme élévatrice conçue par Josef Svoboda. Illustrations tirées de <i>Svoboda : Wagner, Josef Svoboda's Scenography for Richard Wagner's Operas</i> [6].	4
3.1	Planche à clous.	17
3.2	Vue plane de l'approche discrète utilisant des éléments carrés.	18
3.3	Vue en élévation des différentes caractéristiques de l'approche discrète.	19
3.4	Configuration à plusieurs étages réalisable avec l'approche discrète.	20
3.5	Schéma plan du maillage élastique de l'approche continue.	21
3.6	Schéma en élévation de l'approche continue.	21
3.7	Maquette de l'approche continue.	22
3.8	Schéma plan de l'approche hybride.	24
3.9	Illustrations (a) d'une scène droite et (b) d'une en forme d'escalier, toutes deux utilisant le principe de moyennage par câbles.	25
3.10	Schématisation de différentes configurations de l'approche discrète avec le système de moyennage. Les points représentent des actionneurs alors que les chiffres expriment le type de moyennage des éléments passifs.	27
3.11	Photos de la maquette d'un module discret moyenné passivement.	29
3.12	Schémas (a) de la configuration de base et (b) d'une vue explosée mettant en évidence les éléments permettant le moyennage du prototype d'un module discret.	30

4.1	Schématisation du système par étages.	36
4.2	Configuration schématique de la plate-forme parallèle à trois pattes. . .	37
4.3	Configuration schématique de la plate-forme parallèle à quatre pattes. .	38
4.4	Configuration schématique du mécanisme hybride.	39
4.5	Schéma du mécanisme du deuxième étage.	39
4.6	Schématisation du système modulaire direct.	41
5.1	Configuration schématique du mécanisme de moyennage plan.	43
5.2	Les quatre branches de solutions réelles du problème géométrique direct du mécanisme de moyennage par bielles.	50
5.3	Les quatre branches de solutions du problème géométrique inverse du mécanisme de moyennage par bielles.	53
5.4	Quatre configurations singulières du mécanisme de moyennage plan. . .	56
5.5	Une singularité de type <i>II</i>	57
5.6	Quatre configurations singulières de type <i>II</i> du mécanisme de moyennage plan.	58
5.7	Erreur Δ en fonction de l'orientation θ de la barre centrale, sous certaines conditions particulières.	69
5.8	Proportions des composantes mécaniques du mécanisme de moyennage pour l'exemple numérique de la section 5.2.5.2.	71
5.9	Positions des centres de masse des différents corps du mécanisme de moyennage plan dans le champ gravitationnel g	76
6.1	Schémas en vues (a) plane et (b) isométrique de l'assemblage des méca- nismes de moyennage bidimensionnels dans un module tridimensionnel à quatre degrés de liberté.	84
6.2	Schémas en vues (a) plane et (b) isométrique du blocage orthogonal d'un élément passif.	85
6.3	Schémas en vues (a) plane et (b) isométrique de l'assemblage des méca- nismes de moyennage bidimensionnels dans un module tridimensionnel à trois degrés de liberté.	86
6.4	Quatre solutions similaires d'un système à deux actionneurs.	88
6.5	Axes principaux d'un module.	88
6.6	Les six solutions uniques possibles.	90
6.7	Exemples de familles de solutions doubles à (a) deux et (b) trois action- neurs.	90
6.8	Exemple d'une famille de solutions quadruple.	91

6.9	Exemple d'une famille de solutions octuple.	92
6.10	Agencements distincts des actionneurs pour un module à trois degrés de liberté. Les solutions (1) et (2) font partie de familles doubles, celles (3) à (10) de familles quadruples et celles (11) à (16) de familles octuples.	94
6.11	Agencements distincts des actionneurs pour un module à quatre degrés de liberté. Les solutions (1) et (2) sont uniques, celles (3) à (13) font partie de familles quadruples et celles (14) à (23) de familles octuples.	96
6.12	Numérotation des éléments mobiles d'un module.	97
6.13	Schématisation de l'angle frontal α_f	98
6.14	Schématisation de l'angle latéral α_l	99
6.15	Schématisation de l'angle de distorsion α_d	99
7.1	Illustrations d'un élément mobile du prototype.	104
7.2	Illustrations d'une barre latérale du mécanisme de moyennage du prototype.	104
7.3	Illustrations de l'assemblage des plateaux mobiles et des mécanismes de moyennage du prototype.	105
7.4	Montage d'un actionneur linéaire du prototype.	106
7.5	Illustration du châssis du prototype.	107
7.6	(a) Numérotation et (b) plans de contraintes des éléments mobiles du prototype.	107
7.7	Illustration de l'articulation prismatique passive du bloc central imposant des contraintes supplémentaires au prototype.	108
7.8	Illustrations du prototype d'un module de la scène du castelet électronique.	109
7.9	Photo du prototype d'un module de la scène du castelet électronique.	110
7.10	Exemple simple de schéma-bloc.	111
7.11	Schéma des composantes physiques nécessaires à la commande du prototype.	111
B.1	Mécanismes plans à deux degrés de liberté de conceptions (a) sérielle et (b) parallèle.	122
C.1	Configuration schématique de la plate-forme parallèle à trois pattes.	124
C.2	Configuration schématique du mécanisme parallèle à quatre pattes.	129
C.3	Configuration schématique de la plate-forme hybride.	131

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique

De tous temps, les nouvelles connaissances technologiques ont été intégrées dans les prestations à caractères artistiques. Ainsi, même cinq siècles avant Jésus-Christ, à l'aube du théâtre occidental, les grecs de l'antiquité utilisaient différents mécanismes ingénieux — souvent appelés « machines » dans la littérature — pour accroître le réalisme de leurs performances scéniques. Le plus spectaculaire de ceux-ci est sans doute la *mèchanè* ou « machine à voler » ; une sorte de grue qui pouvait soulever des acteurs dans les airs. Cet appareil, aussi appelé *aioréma* (machine élévatoire) et *géranos* (grue), est resté célèbre grâce à l'expression latine *deus ex machina*, équivalent du grec *théos apo mèchanès*, qui désignait le moment où le dieu apparaissait en suspension au-dessus de la scène, pour dénouer l'intrigue [1], [2].

Le fonctionnement de cette machine était, malgré tout, assez simple et est représenté schématiquement à la figure 1.1. L'élément principal de la *méchanè* était un long mât en bois pouvant mesurer jusqu'à 13 mètres de long, lequel était fixé à une base à l'aide d'un joint de cardan permettant sa rotation selon deux axes. À l'extrémité la plus longue du mât était accroché l'acteur, alors qu'on suspendait, à l'autre extrémité, un contrepoids, formé de roches ou de sable, permettant la manipulation de l'engin par seulement une ou deux personnes. L'utilisation de multiples câbles et poulies rudimentaires était également possible afin d'empêcher la rotation de l'acteur ou pour permettre de descendre celui-ci jusqu'au sol sans que les spectateurs ne voient le mât.

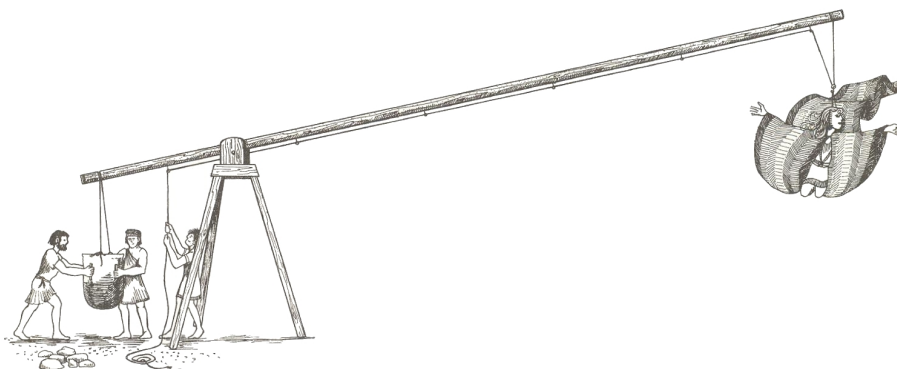


FIG. 1.1 – Conception artistique de la *méchanè* par Elaine Atkinson. Illustration tirée de *Classical Greek Theater : new views of an old subject* [3].

À une toute autre époque, en 1782, l'invention de la lampe à huile Quinquet, illustrée à la figure 1.2, marqua le début de la révolution de l'éclairage scénique, après des siècles de spectacles éclairés à la bougie, à la chandelle, au cierge et au lampion de toutes sortes. C'est le savant Lavoisier qui proposa à l'Académie des sciences une adaptation pour le théâtre de cette lampe en la munissant d'un réflecteur permettant de diriger la lumière [4].

Ces deux faits historiques ne sont que quelques exemples des innombrables cas d'utilisation technologique à travers les âges qui font en sorte qu'aujourd'hui, la technologie et les arts scéniques sont presque indissociables. De nos jours, la technologie scénique est en plein essor. Les éclairages sont maintenant majoritairement robotisés, la spatia- lisation des ambiances sonores les rendent de plus en plus réalistes et les projections ne se font plus uniquement sur de vulgaires écrans plats et rectangulaires mais aussi sur des surfaces tridimensionnelles et extensibles. Chose encore plus surprenante, les

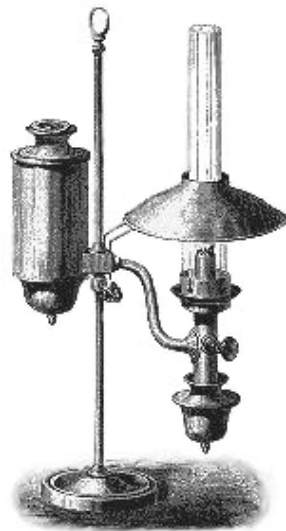


FIG. 1.2 – Lampe Quinquet sans le réflecteur de Lavoisier.

moyens technologiques ne sont plus seulement de simples outils servant l’imaginaire artistique ; ils font maintenant partie intégrante de la création. Ainsi, par exemple, plutôt que de faire jouer une trame sonore lors d’un spectacle de danse, on peut placer des capteurs sur le corps des danseurs pour créer les ambiances sonores. Ces capteurs, par l’entremise d’un ordinateur, produisent différents sons, selon les types de mouvements des danseurs.

C’est de cette manière qu’aujourd’hui la technologie prend place dans le processus artistique, à côté du chant, du théâtre ou de la musique. Ainsi utilisée, cette technologie devient un art. Certains diront que « la notion de spectacle doit être définie par ses origines et par son processus historique »¹. Historiquement et actuellement, force est d’admettre que la technologie est une part importante de nos vies, et puisque l’art est souvent utilisé comme miroir de la société, rien de plus naturel que de se servir de cette technologie comme médium dans les domaines artistiques. Plusieurs créateurs de chez nous ont d’ailleurs compris cela. On a qu’à penser au metteur en scène Robert Lepage, au Cirque du Soleil et même à Céline Dion avec son spectacle à Las Vegas. C’est donc vers cette dualité art-technologie que le monde du spectacle a évolué. Ainsi, en premier lieu, la technologie est au service des besoins artistiques, et à cet effet, permet une plus grande liberté aux créateurs. En second lieu, l’implication artistique unique qu’ont certaines avancées scientifiques dans les performances scéniques nous oblige à considérer la technologie au même titre que l’opéra, la danse et l’art clownesque dans le processus de création artistique.

1. Citation d’Yves Bonnat dans *L’éclairage des spectacles* [4].

Comme mentionné précédemment, plusieurs domaines technologiques reliés aux arts de la scène sont en pleine effervescence. Certains, par contre, n'ont guère évolué. C'est le cas des espaces scéniques. En effet, les planchers et murs de la majorité des spectacles sont, encore aujourd'hui, relativement primitifs ; plus souvent qu'autrement, la scène étant une surface horizontale, parfois distribuée sur quelques niveaux, alors que les murs sont des rideaux de scène ou des décors fabriqués en bois. Quelques innovations ont malgré tout vu le jour comme, par exemple, l'invention de trappes de scènes motorisées, facilitant l'apport d'éléments nouveaux sur la scène durant la prestation, ou les scènes tournantes, permettant de changer rapidement de décor. Autrement, les utilisations technologiques reliées aux espaces sont le résultat de demandes précises pour les besoins spécifiques d'une création donnée. Un des exemples les plus impressionnants de ceci est illustré à la figure 1.3. Il s'agit d'une plate-forme élévatrice conçue par le scénographe Josef Svoboda pour une courte série de créations présentées au théâtre *Covent Garden* de Londres dans les années 1970 [5]-[7]. Cette plate-forme de 37 pieds sur 32 pesait plus de trois tonnes. Elle pouvait s'enfoncer sous la scène et s'élever au-dessus de celle-ci d'une hauteur de 10 pieds. Cet appareil pouvait aussi s'incliner jusqu'à un angle de 45 degrés et tourner selon son axe vertical. Malheureusement, ces genres de mécanismes sont peu nombreux, vu leurs coûts élevés de fabrication, et sont très souvent détruits après la série de spectacles pour laquelle ils ont été conçus, étant donné leur utilisation trop spécifique.

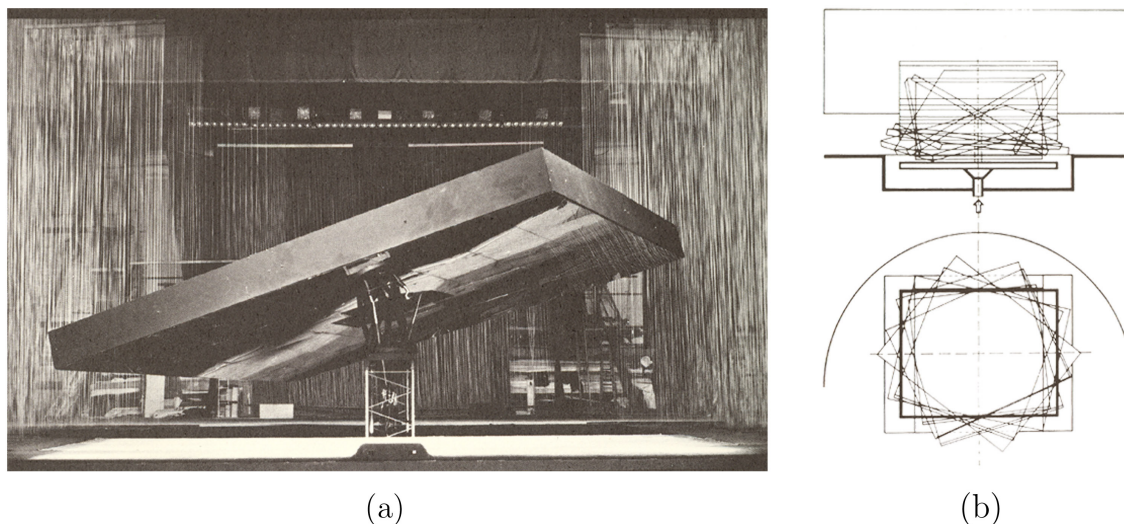


FIG. 1.3 – (a) Photo et (b) croquis d'une plate-forme élévatrice conçue par Josef Svoboda. Illustrations tirées de *Svoboda : Wagner, Josef Svoboda's Scenography for Richard Wagner's Operas* [6].

L'objectif de ce travail de maîtrise est donc d'étudier la possibilité de développer des espaces scéniques, plus spécifiquement le plancher d'une scène, qui puissent se reconfigurer dynamiquement au cours d'un spectacle. De plus, les mouvements et les positions de cette scène doivent être les plus versatiles possible. Le but ultime étant d'obtenir une surface de spectacle complètement reconfigurable permettant, dans la même salle, la diffusion des différents arts de la scène — théâtre, musique, opéra, danse, cirque, variétés, etc. — sans apporter de modifications à la structure du mécanisme. Cet objectif s'inscrit dans la première facette de la dualité entre l'art et la technologie, la scène offrant aux artistes un support d'une géométrie propre à leurs besoins. Évidemment, il serait intéressant que cette scène soit suffisamment versatile pour combler l'autre facette de la dualité. À cet égard, le mécanisme serait plus qu'un simple accessoire pour les autres arts ; il serait alors, comme eux, porteur de message et pourrait ainsi transmettre les émotions des artistes, comme le fait l'instrument de musique d'un musicien.

Quoi qu'il en soit, l'approche préconisée dans cette démarche favorise le rapprochement entre le domaine des arts et celui des sciences, trop souvent distants dans nos sociétés modernes. Il faut se rappeler qu'à une autre époque, les grands penseurs et créateurs s'intéressaient activement à la médecine et à la poésie, aux mathématiques et à la musique ou à la physique et à la philosophie. Comme quoi, chacun de ces domaines peut influencer positivement les autres.

1.2 Structure du mémoire

La démarche scientifique de ce mémoire est basée sur l'hypothèse qu'il est possible de développer une scène de spectacle dynamiquement reconfigurable, capable d'effectuer des poses et des mouvements artistiquement intéressants. À cet effet, le mémoire est construit de manière à suivre chronologiquement les étapes qui ont été franchies au cours de cette étude. Ainsi, en général, les conclusions d'un chapitre mènent aux propos du chapitre suivant. Contrairement à une démarche scientifique habituelle, l'avancement de la synthèse, exposée ici, n'est pas toujours dicté par des constatations techniques ou mathématiques. Ainsi, à plusieurs reprises, le choix d'une solution face à une autre est basé sur des résultats artistiques, comme par exemple la beauté d'un mouvement. Pour cette raison, un CD-Rom d'accompagnement est joint au mémoire, permettant au lecteur de consulter des données multimédias pertinentes à la compréhension.

Plus précisément, ce document contient huit chapitres. Le chapitre 2 présente le contexte de cette étude de scène de spectacle dynamiquement reconfigurable. Il y est présenté le *Lantiss*, un laboratoire de recherche de l'Université Laval. Celui-ci est à l'origine d'un tout nouveau concept de castelet électronique duquel découle ce mémoire. Un cahier des charges simplifié expose également les données techniques de base que doit connaître le lecteur.

Une étude de solutions générales est présentée au chapitre 3. Celle-ci fait état de trois concepts de solutions pouvant servir d'amorce à l'élaboration de la scène mobile, soit les approches discrète, continue et hybride. L'intérêt de cette étude concerne principalement les habiletés artistiques de ces trois approches et non pas leurs caractéristiques techniques. Quelques améliorations à ces concepts sont également proposées, notamment la modularité et le moyennage. Finalement, une étude des mouvements scéniques actuels ainsi que de ceux envisagés pour la solution finale permet de faire un choix entre les différentes approches proposées.

Au chapitre 4, les éléments techniques de la solution retenue, soit celle discrète, sont abordés avec plus de détails. Deux systèmes sont alors proposés permettant d'intégrer les éléments techniques, comme la modularité et le moyennage, au concept de base. Il s'agit des systèmes modulaires par étages et direct. Ce dernier retient plus particulièrement l'attention par sa simplicité mécanique ; simplicité qui est associée à l'utilisation d'un mécanisme de moyennage intégré entre les blocs des modules. Les chapitres suivants traitent donc de cet aspect technique.

Au chapitre 5, la version bidimensionnelle du mécanisme de moyennage par bielles est étudiée. Premièrement, une analyse cinématique permet d'élaborer les problèmes géométriques direct et inverse ainsi que les équations de vitesse. Ces dernières équations permettent également d'aborder les singularités du mécanisme. Par la suite, l'analyse des erreurs conduit à une optimisation des paramètres géométriques. L'optimisation proposée mène à la simplification de la cinématique du système. Finalement, un modèle dynamique du mécanisme de moyennage plan est développé.

Le chapitre 6 traite des configurations spatiales du mécanisme de moyennage par bielles. Tout d'abord, les configurations relatives au nombre d'actionneurs sont abordées. Ensuite, les agencements qui sont relatifs à la position des actionneurs sont traités. Dans cette section est également proposée une méthode permettant de trouver et de classi-

fier ces différents arrangements. Les cas à trois et quatre degrés de liberté sont alors analysés des points de vue mécanique et artistique. À cet effet, des animations sont présentées. Finalement la solution retenue est étudiée cinématiquement.

Les détails de la conception d'un prototype sont exposés au chapitre 7. Les composantes mécaniques et le système de commande sont les principaux thèmes abordés dans cette section. Encore une fois, des séquences vidéos viennent appuyer les propos.

Finalement, le chapitre 8 résume les points importants de la synthèse et de l'analyse de la scène dynamiquement reconfigurable.

Chapitre 2

Mise en situation

C'est à l'automne 2002 que ce projet de scène mobile a vu le jour, suite à une association entre le laboratoire de robotique du département de génie mécanique de l'Université Laval et ce qui deviendra plus tard le *Lantiss*. Afin de bien comprendre les démarches présentées dans ce mémoire, ce chapitre explique le contexte de cette collaboration. On y présente tout d'abord brièvement le *Lantiss* et son plus récent projet de castelet électronique. Ensuite, un cahier des charges sommaire de la scène dynamiquement reconfigurable est exposé, permettant de mieux comprendre les contraintes du projet.

2.1 *Lantiss*

Le *Lantiss* ou laboratoire des nouvelles technologies de l'image, du son et de la scène est un tout nouveau regroupement de chercheurs issu de la faculté des lettres de l'Université Laval. Son inauguration officielle remonte à avril 2004. Le directeur du projet est Luis Thenon, professeur en études théâtrales au département des littératures, alors que le coordonnateur est Robert Faguy, artiste multidisciplinaire œuvrant depuis plus de vingt ans dans le domaine de la création artistique.

L'objectif du *Lantiss* est de développer des nouvelles technologies de la scène tout en regroupant, dans un même lieu, des artistes et des chercheurs de sciences appliquées de toutes sortes. À cet égard, le *Lantiss* s'est doté d'une salle de spectacle à géométrie variable de 800 mètres carrés servant de laboratoire de recherche. Trois autres studios de moindre envergure (50 à 100 mètres carrés) sont annexés à la grande salle pour y faire des essais nécessitant moins d'espace. Ces locaux sont situés au pavillon Casault, sur le campus de l'Université Laval.

Les partenaires scientifiques de ce projet sont le laboratoire de robotique, le laboratoire de vision et systèmes numériques ainsi que le centre d'optique photonique et laser, tous issus de la faculté des sciences et de génie de l'Université Laval. Du côté artistique, on retrouve comme collaborateurs la compagnie *Ex Machina*, le centre d'artistes *Avatar*, membre de la coopérative *Méduse*, ainsi que l'atelier de recherche théâtrale de l'Université Laval.

À ce jour, plus de deux millions de dollars ont été investis dans ce laboratoire unique au Québec, notamment par la Fondation canadienne pour l'innovation (800 000\$) et le Gouvernement du Québec (800 000\$). Le reste du financement provient de l'Université Laval et de différents fournisseurs.

Pour plus d'informations, vous pouvez consulter le site internet du *Lantiss* au www.lantiss.ulaval.ca.

2.2 Castelet électronique

L'utilisation de maquettes est chose courante dans le domaine du spectacle. Les créateurs ont souvent recours à cet outil pour préparer des scènes avant même les répétitions d'un spectacle. Cela leur permet, entre autres, de valider les décors et accessoires du spectacle ou de peaufiner les déplacements des acteurs. D'un autre côté, certains logiciels informatiques permettant la visualisation de l'éclairage scénique sont maintenant disponibles sur le marché. Avec cet outil, il est possible de créer les ambiances lumineuses d'un spectacle à l'aide d'un simple ordinateur. Ces deux techniques ont comme avantages de faciliter le travail des artistes ainsi que de réduire les coûts de création, les répétitions en salle étant très dispendieuses.

Or, le *Lantiss* abonde en ce sens avec son premier projet d'envergure : la création d'un castelet électronique. Le mot « castelet », du terme anglais *castle* (château), est utilisé dans le domaine des marionnettes pour représenter l'espace scénique miniature de cet art. Le castelet électronique est donc une maquette, à l'échelle un dixième, d'un espace scénique comprenant plusieurs éléments technologiques du monde du spectacle : éclairage motorisé, projection d'images, réalité augmentée et évidemment une scène déformable. La difficulté majeure étant de développer des technologies miniatures qui représentent efficacement celles utilisées dans les spectacles grandeur nature. La qualité première du castelet électronique est de réunir les différents médias dans le même outil. Ceci permettra d'obtenir un résultat global des effets de chacun des paramètres d'un spectacle.

L'utilisation du castelet électronique servira à deux niveaux. Premièrement, comme outil de création, un peu comme une maquette standard. Les créateurs seront alors en mesure de bâtir les scènes de leur spectacle sans avoir recours à la salle de diffusion et à tout l'équipement s'y rattachant. Ils pourront ainsi ajuster, en plus des décors et des mouvements des acteurs, les éclairages, le son et tous les autres paramètres technologiques. Toutes ces informations seront enregistrées dans un système informatique et pourront être utilisées de nouveau lors du spectacle. Deuxièmement, le castelet servira aussi de cadre de diffusion. À cet égard, des spectacles miniatures pourront être présentés dans cet espace, avec des marionnettes par exemple. Ces spectacles pourront avoir lieu devant un petit auditoire ou être filmés et ensuite projetés dans de plus grandes salles.

Les différents objectifs techniques de cette maquette nouveau genre peuvent se regrouper sous différentes catégories. Voici quelques exemples de finalités recherchées par les membres et partenaires du *Lantiss* dans ce projet.

1. Éclairage
 - Adapter et concevoir des projecteurs de scène spécialisés à partir de sources non traditionnelles comme des *LED* (*Light-Emitting Diode*) ou des fibres optiques.
 - Motoriser certains de ces luminaires miniatures.
 - Contrôler les trajectoires des projecteurs robotisés selon la position d’objets dans l’espace.
2. Projection d’images
 - Adapter divers types d’écrans existants, comme les *LCD* (*Liquid Crystal Display*) ou viseurs analogiques, aux mécanismes de support scénique du castelet.
 - Trouver différentes façons de projeter une image dans un espace aussi restreint (miroirs, projecteurs laser).
 - Développer de nouvelles surfaces de projection vidéo.
3. Capture vidéo, environnements virtuels et télé-collaboration
 - Concevoir et réaliser un système de capture vidéo au moyen de micro-caméras.
 - Concevoir un programme de réalité augmentée où, à partir des références spatiales données par les éléments réels se trouvant dans la maquette, il serait possible de superposer et de visionner des objets virtuels.
 - Étudier la possibilité de télé-collaboration permettant à des intervenants à distance de manipuler le système de micro-caméras et le rendu des environnements de réalité augmentée.
4. Diffusion sonore
 - Adapter un programme « text to speech » permettant de contrôler en lecture synthétique le rendu (grain de la voix, débit, intonation) d’un texte écrit.
 - Adapter une architecture permettant de reproduire des données sonores pré-enregistrées ou générées en direct.
5. Mécanique de scène
 - Concevoir une surface de plancher dynamiquement reconfigurable.
 - Concevoir des surfaces mobiles pouvant évoluer ou se déplacer de diverses façons sur la scène.
 - Adapter des mécanismes de déplacement d’éléments marionnettisés.

Évidemment, chacun des partenaires du *Lantiss* a un rôle spécifique à jouer dans cette démarche. Celui du laboratoire de robotique concerne plus particulièrement le

volet relatif à la mécanique de scène. L'objectif premier étant de concevoir une version miniature d'une scène mobile. Or, aucune scène de ce genre n'est présentement disponible sur le marché ou à l'étude ; les recherches se rapprochant le plus d'une telle scène se rapportent au domaine de la simulation de surfaces tridimensionnelles [8]-[11]. Malheureusement, peu de résultats de ce domaine d'étude sont applicables dans le cas présent, et ceci fait en sorte que la tâche du projet est double : étudier à la fois les concepts pour l'engin grandeur réelle ainsi que pour sa version réduite. Évidemment, puisque l'objectif à court terme est la conception de la version réduite, les efforts de recherche, qui sont synthétisés dans les chapitres suivants, ont été concentrés sur cette partie. Il faut malgré tout mentionner que la majorité des concepts théoriques développés sont valides à la fois pour des scènes à grande et à petite échelles.

2.3 Cahier des charges simplifié

Cette section expose une partie du cahier des charges du projet. Il faut tout d'abord dire que l'objectif de cette portion du mémoire n'est pas de présenter une étude exhaustive des caractéristiques de la scène, mais plutôt de citer les plus importantes afin de permettre au lecteur de mieux comprendre les contraintes s'y rattachant. Encore par souci de simplicité et de compréhension, le cahier des charges est construit en fonction des attentes de la scène réelle, plutôt que de celle à l'échelle réduite ; ces premières valeurs étant plus simples à imaginer. Mentionnons, malgré tout, que nonobstant le ratio d'un dixième séparant les dimensions globales des deux types de scènes, tous les critères ne respectent pas systématiquement cette échelle¹. Les critères pour la scène du castelet ne sont donc pas toujours le dixième de celle réelle.

D'un point de vue organisationnel, les différentes caractéristiques sont représentées sous forme de tableaux à la section 2.3.1 alors que les descriptions s'y rattachant sont présentées à la section 2.3.2.

1. Donnons comme exemple le cas de la masse à mouvoir qui doit être de 200 kg par mètre carré pour la scène réelle comparativement à 1 kg par décimètre carré pour celle du castelet.

2.3.1 Valeurs à rencontrer

Cette partie présente les caractéristiques importantes du cahier des charges à l'aide de deux tableaux, soit les tableaux 2.1 et 2.2 qui synthétisent respectivement les caractéristiques numériques et non numériques. D'un point de vue scientifique, les critères du tableau 2.2 auraient avantage à être présentés avec des valeurs quantifiables. Malgré tout, des termes qualitatifs sont utilisés dans ce tableau afin de rendre plus facile au lecteur la compréhension des caractéristiques que doit posséder la scène.

Caractéristique	Valeur visée	Valeur minimale à rencontrer	Valeur maximale à ne pas dépasser
Masse à mouvoir (2.3.2.1)	2 personnes de 100 kg pour chaque surface de 1 m ²	200 kg/m ²	
Surface de la scène (2.3.2.2)	8 m × 8 m		
Hauteur de la scène au repos (2.3.2.3)	0,6 m		1 m
Amplitude de déplacement vertical (2.3.2.4)	2 m	1,5 m	
Temps de déplacement vertical (2.3.2.5)	2 m en 8 s		2 m en 12 s

TAB. 2.1 – Cahier des charges simplifié, critères numériques.

2.3.2 Définitions

2.3.2.1 Masse à mouvoir

Le système doit pouvoir mouvoir, en plus de son propre poids, deux personnes par mètre carré. Une personne ayant, par définition, une masse de cent kilogrammes.

Caractéristique	Valeur visée	Valeur minimale à rencontrer	Valeur maximale à ne pas dépasser
Type de mouvement (2.3.2.6)	Versatilité		
Conditions d'utilisation (2.3.2.7)	Pas de choc		

TAB. 2.2 – Cahier des charges simplifié, autres critères.

2.3.2.2 Surface de la scène

La surface prévue pour cette scène est d'environ huit mètres sur huit, soit une dimension courante dans le domaine du spectacle.

2.3.2.3 Hauteur de la scène au repos

Il est souhaitable que la scène ne soit pas trop élevée en position initiale (au repos) afin que les spectateurs des premières rangées puissent aisément voir au-dessus de celle-ci.

2.3.2.4 Amplitude de déplacement vertical

Pour qu'un certain effet de déplacement soit perçu par les spectateurs, il faudra que l'amplitude verticale de la scène soit d'au moins un mètre et demi.

2.3.2.5 Temps de déplacement vertical

Le système doit pouvoir effectuer un déplacement vertical de deux mètres, soit l'amplitude visée, en 12 secondes. L'utilisation de la distance parcourue en fonction du temps est choisie afin d'inclure les temps d'accélération à ce moment inconnus.

2.3.2.6 Type de mouvement

Le système doit pouvoir effectuer différents types de mouvements afin d'être le plus versatile possible. Ainsi, les mouvements devront pouvoir s'agencer à différentes disciplines artistiques telles que la danse, le théâtre, la musique, le cirque, etc.

2.3.2.7 Conditions d'utilisation

Le système doit effectuer des mouvements qui soient les plus fluides possible, donc aucun choc ne doit être ressenti par les artistes travaillant sur la scène.

Chapitre 3

Étude de concepts de solutions générales et analyse des mouvements scéniques

3.1 Concepts de solutions générales

Cette section présente différentes approches qui couvrent une vaste gamme de possibilités. L'objectif de cette démarche est qualitatif et non quantitatif ; c'est-à-dire qu'on s'intéresse plus particulièrement aux résultats esthétiques que pourrait avoir un type de solution plutôt qu'à la manière précise d'y arriver. Les propositions sont donc plus de l'ordre du concept que de la solution.

3.1.1 Approche discrète

Ce premier concept de solution consiste à découper la surface de la scène en une multitude d'éléments rigides. Ainsi, plus la densité d'éléments est grande, plus la définition de la surface est de qualité. Un bon exemple d'utilisation de cette technique est le jouet représenté à la figure 3.1(a) qui est souvent appelé planche à clous. Cet appareil consiste en une matrice de petites tiges de métal qui peuvent individuellement se déplacer, de façon passive, selon leur axe longitudinal. Ainsi, si on enfonce dans la matrice un objet, même aux surfaces continues et courbes comme une main (figure 3.1(b)), le jouet conservera une image discrète de cet objet tridimensionnel. Ici, puisque la quantité d'éléments discrets est grande (environ 2500 tiges métalliques), la définition de la surface générée par le mécanisme est relativement bonne et on reconnaît aisément la forme initiale (figure 3.1(c)).

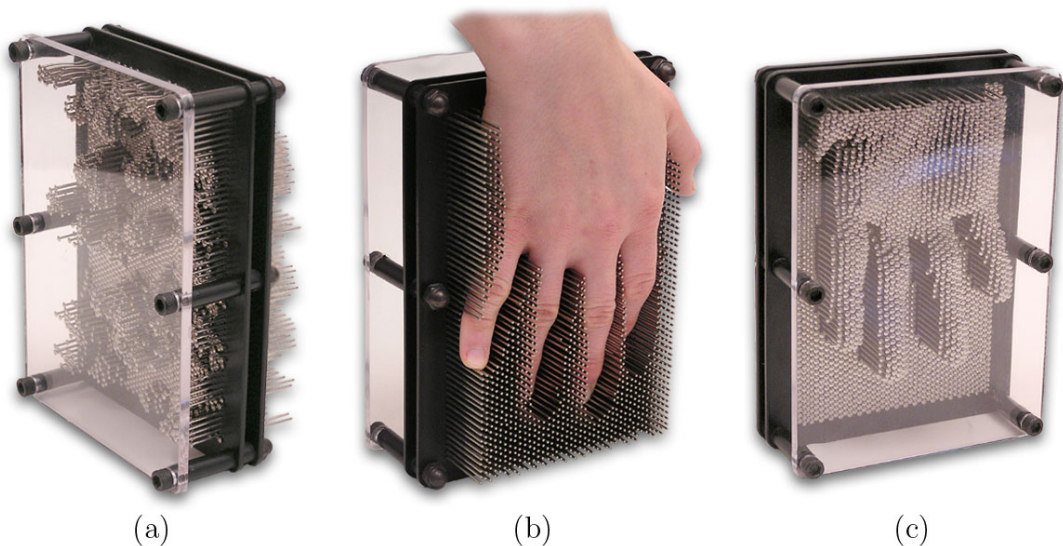


FIG. 3.1 – Planche à clous.

Dans l'approche discrète proposée comme scène de spectacle, une multitude d'éléments, de géométries et de dimensions qui peuvent être variables, sont utilisés pour générer une surface mobile. Par contre, en première analyse, on a recours à des éléments qui sont carrés et de même dimension afin de simplifier les représentations graphiques (voir figure 3.2). Notez qu'on aurait très bien pu utiliser des triangles ou d'autres polygones.

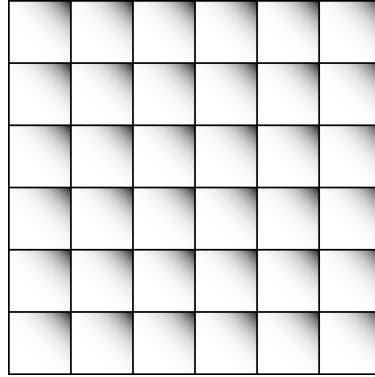


FIG. 3.2 – Vue plane de l’approche discrète utilisant des éléments carrés.

À titre fonctionnel, les déplacements verticaux de ces polygones sont engendrés par des actionneurs disposés sous leur surface. De cette manière, il est possible de déplacer verticalement chacun des éléments séparément et indépendamment des autres.

En plus de se déplacer verticalement, ces éléments pourraient aussi être libres de pivoter selon les axes perpendiculaires à la verticale. De cette manière, il serait possible de créer des plans inclinés. Encore une fois, en première analyse, on omettra cette caractéristique par mesure de simplicité.

Pour des questions de sécurité et d’esthétisme, il pourrait y avoir, entre les éléments mobiles, des toiles qui, comme les écrans servant à la projection d’images, s’enrouleraient ou se dérouleraient automatiquement sur des cylindres munis de ressorts, selon la position respective des polygones auxquels ces toiles sont fixées. De plus, ces toiles pourraient être autobloquantes, comme les ceintures de sécurité des voitures, pour retenir un artiste qui, par inadvertance, s’appuierait ou tomberait sur celles-ci. En plus d’assurer une certaine sécurité, ces toiles serviraient d’éléments de décor ou d’écrans de projection, tout en cachant les trous se formant entre les éléments mobiles lorsque ceux-ci seraient respectivement distants.

La figure 3.3 résume graphiquement les fonctionnalités d’un tel concept.

3.1.1.1 Poses et trajectoires

Cette section présente les avantages et inconvénients du concept discret face à l’objectif principal de la scène dynamiquement reconfigurable, soit de permettre une mul-

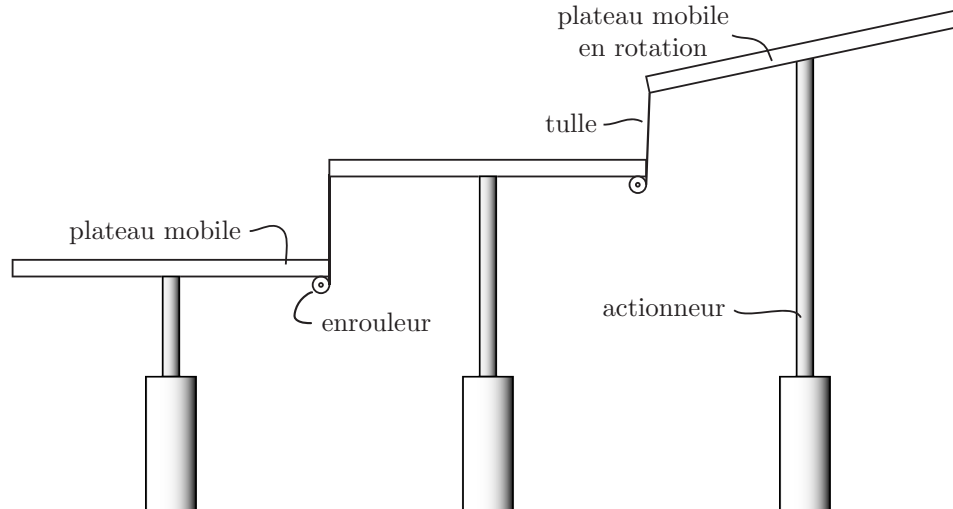


FIG. 3.3 – Vue en élévation des différentes caractéristiques de l’approche discrète.

titude de positions et d’animations de cette surface scénique. On s’intéresse donc à la qualité et à la diversité des poses et trajectoires qu’un tel concept permet.

Comme mentionné précédemment, les éléments sont actionnés individuellement dans ce concept. Ceci permet de positionner chaque plateau de manière indépendante. Ainsi, on dira que ce concept peut prendre n’importe laquelle des configurations de type discret pour une dimension de plateau mobile donnée. Or, si on considère que la définition de la scène n’est pas suffisamment bonne, on peut toujours réduire la dimensions des éléments. Évidemment, plus ces éléments sont petits, plus il en faut pour couvrir une surface donnée et plus le nombre d’actionneurs est élevé. Cette problématique sera discutée plus spécifiquement à la section 3.2.1 intitulée *moyennage*.

En pratique, pour des poses et des trajectoires discrètes, les éléments mobiles n’ont pas à être très petits, car les objets qu’ils doivent supporter ne le sont pas (artistes, décors, instruments de musique, accessoires d’éclairage, etc.). Certaines configurations possédant une quantité raisonnable d’éléments mobiles ont donc été testées avec des outils informatiques. Deux de celles-ci sont présentées dans les animations 1 et 2 du CD-Rom d’accompagnement¹. La figure 3.4 montre également une des configurations analysées. On remarque, dans cette figure, qu’il est possible de créer, avec ce type d’approche, une scène avec plusieurs plateaux situés à différentes hauteurs.

1. L’annexe A présente l’utilité et le fonctionnement du CR-Rom d’accompagnement. Notez qu’il est fortement suggéré de consulter cet outil au fur et à mesure qu’on y fait référence dans le texte, les éléments qui y sont présentés aidant grandement à la compréhension.

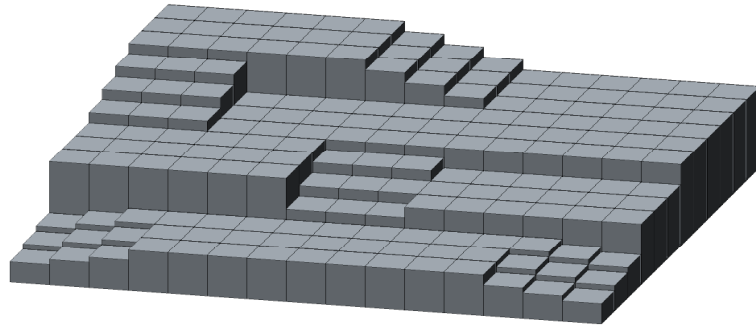


FIG. 3.4 – Configuration à plusieurs étages réalisable avec l’approche discrète.

D’un autre côté, il est évident que ce concept ne peut pas créer des surfaces courbes et sans discontinuité. Par contre, on peut se demander s’il est possible de générer un effet visuel qui donnerait l’impression qu’il s’agit de surfaces continues — un peu comme le fait la planche à clous lorsqu’on y insère notre main. Les simulations faites ont montré que c’était la cas. À titre d’exemples, les animations 3, 4 et 5 du CD-Rom d’accompagnement présentent des scènes qui donnent l’illusion du mouvement d’une vague. Ainsi, dans ces animations, malgré le fait qu’il y ait des discontinuités locales, on a l’impression que globalement il n’y en a pas.

Sommairement, on remarque que ce concept est relativement polyvalent par le fait qu’il peut créer des configurations discrètes et continues.

3.1.2 Approche continue

Par opposition au système discret, l’approche continue consiste en un concept qui ne permet pas de discontinuités — considérant les discontinuités comme des changements brusques de pentes qui sont visuellement perceptibles par l’apparition d’arêtes.

Afin de permettre cette caractéristique, le système est composé d’un maillage plan élastique. Ce maillage est, à son tour, constitué d’éléments linéaires pouvant s’étirer comme, par exemples, de gros élastique de type « bungee » ou un amalgame entre des câbles rigides et des composantes déformables, tels des ressorts (voir figure 3.5). Sur ce maillage est déposée une membrane unie et extensible permettant une continuité de surface. Cet ensemble forme un genre de grand trampoline sous lequel sont placés des actionneurs à différents endroits. Ces actionneurs peuvent pousser (vers le haut)

ou tirer (vers le bas) sur les câbles, ce qui a pour effet de déformer la surface de façon continue. Ici, chaque actionneur est contrôlé indépendamment, mais la position d'un point sur la surface ne dépend pas nécessairement d'un seul actionneur. La figure 3.6 montre schématiquement ce concept.

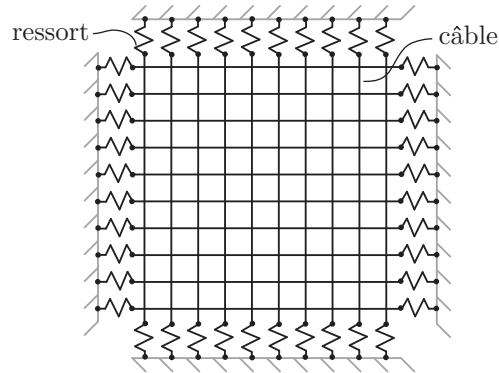


FIG. 3.5 – Schéma plan du maillage élastique de l'approche continue.

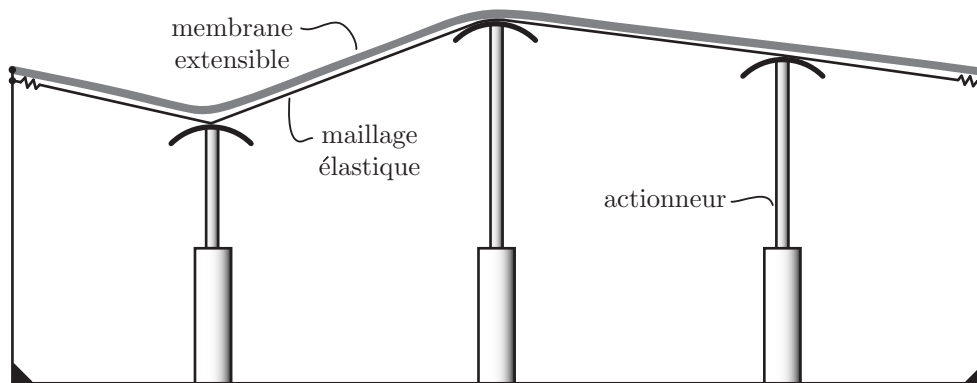


FIG. 3.6 – Schéma en élévation de l'approche continue.

3.1.2.1 Poses et trajectoires

Afin de visualiser certaines trajectoires envisageables de ce concept, un modèle cinématique a été développé à l'aide du logiciel *Adams*. Dans ce modèle, on considère que chaque portion de câble située entre deux points successifs — un point représentant l'intersection de deux câbles dans la figure 3.5 — reste rectiligne. Pour représenter le fait que les câbles peuvent s'allonger, chaque portion de câble est modélisée par un ressort ainsi qu'un amortisseur. De ce fait, l'allongement des câbles est exprimé ponctuellement, représentant ainsi le comportement d'un câble élastique. Plus spécifiquement,

on retrouve 364 ressorts et autant d'amortisseurs dans ce modèle. Entre autres choses, l'étude d'une trajectoire sinusoïdale représentant le mouvement de vagues a été réalisée avec ce modèle. Les résultats sont impressionnants : avec seulement neuf actionneurs répartis uniformément sous la surface extensible, la scène se transforme en une véritable mer houleuse. Les animations complètes de ces trajectoires sont disponibles sur le CD-Rom d'accompagnement (animations 6, 7 et 8).

Une maquette a aussi été construite pour visualiser les poses de ce concept. Il s'agit tout simplement d'un maillage d'élastiques sans l'ajout de la membrane de recouvrement (voir figure 3.7)². Malgré sa fabrication rudimentaire, cette maquette démontre bien les avantages et les inconvénients de cette approche. En effet, l'un des objectifs de cette maquette était de vérifier la rigidité de la surface. Il fut étonnant de constater que la surface est relativement rigide, malgré le fait qu'elle soit constituée d'éléments peu rigides. Bien sûr, il est important que la surface ne soit pas trop raide afin qu'elle puisse être déformée par les actionneurs. Par contre, il faut qu'elle soit assez ferme pour ne pas qu'elle s'enfonce sous le poids des artistes ou des éléments de décor. La rigidité de la scène est donc un aspect critique de l'approche continue.

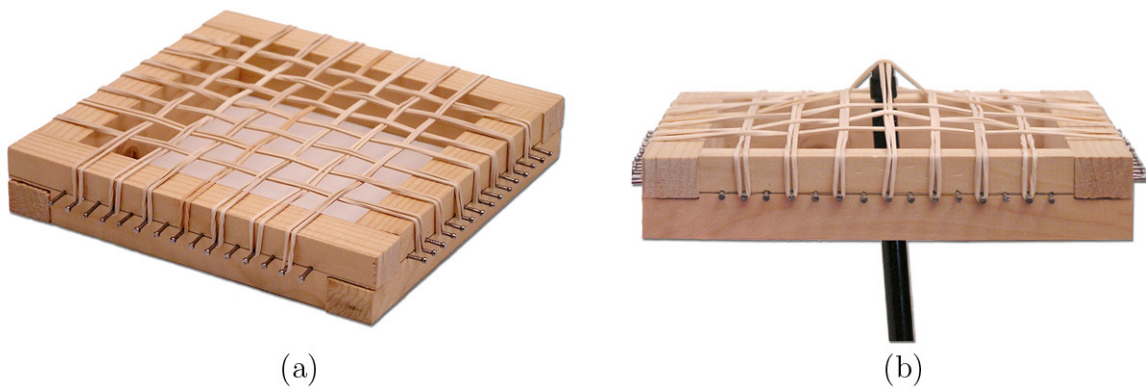


FIG. 3.7 – Maquette de l'approche continue.

Une autre caractéristique importante de ce concept a été découverte avec cette maquette : le fait qu'à de grandes amplitudes, les actionneurs créent des pics sur la surface de la scène (voir figure 3.7(b)). Il est à noter que ce phénomène a aussi été constaté avec les animations du modèle cinématique. Évidemment ces pics, qui génèrent des discontinuités, diminuent l'esthétisme des mouvements.

2. Une image en couleur est également disponible sur le CD-Rom d'accompagnement (photo 2).

Quelques options sont malgré tout envisageables pour atténuer ces discontinuités. Premièrement, lorsque les amplitudes sont faibles, le phénomène est moins apparent. Or, il est évident que cette solution n'est pas la plus avantageuse, car l'objectif premier du système est de générer des amplitudes suffisamment grandes pour que le résultat soit visuellement intéressant. Deuxièmement, en ajoutant des actionneurs et en les contrôlant de façon appropriée, les discontinuités pourraient être grandement réduites. Malheureusement, cette possibilité implique des coûts supplémentaires. Troisièmement, on peut croire que la membrane élastique qui recouvre les câbles aurait un effet atténuant sur ces discontinuités³. Finalement, il serait aussi possible de placer des embouts arrondis aux extrémités des actionneurs pour que la force soit appliquée aux câbles de façon moins ponctuelle.

Dans le même ordre d'idée, il faut mentionner qu'un des défauts de ce concept est la rigidité non uniforme de la scène. En effet, au-dessus d'un actionneur la raideur de la surface est presque infinie, ou du moins comparable à celle d'une scène fixe, alors qu'entre deux actionneurs, elle l'est beaucoup moins. Or, cette différence de rigidité risque de rendre moins naturels les déplacements des artistes sur la scène.

De manière générale, on constate que cette approche permet aisément de créer des mouvements qui sont du domaine continu. Malgré tout, certains désavantages lui sont associés : la création de pics — discontinuités — lors de mouvements de grandes amplitudes ainsi que la rigidité inégale de la surface de la scène. Il faut également mentionner que ce concept ne permet pas de générer des positions ou des déplacements discrets, comme par exemple la création d'escaliers. Somme toute, cette approche est très intéressante du point de vue théorique, mais demeure malgré tout quelque peu limitative.

3.1.3 Approche hybride

Cette dernière approche combine les concepts des deux précédentes sections. Évidemment, une multitude de combinaisons sont possibles. La figure 3.8 présente une configuration où les éléments discrets et continus sont presque parfaitement alternés.

3. Notez que ni la maquette ni le modèle cinématique ne tient compte de cet aspect.

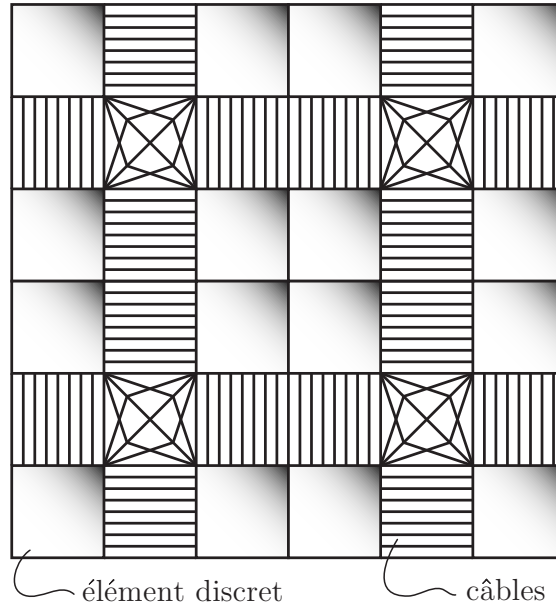


FIG. 3.8 – Schéma plan de l'approche hybride.

À prime abord, on pourrait croire que ce concept permet de combiner les avantages des approches discrète et continue. Malheureusement, la solution hybride tend à cumuler les défauts des deux systèmes plutôt que leurs qualités. C'est ainsi que la configuration présentée à la figure 3.8, par exemple, est à la fois moins efficace que le système discret pour effectuer des trajectoires discrètes et moins intéressante que le concept continu pour générer des animations sans discontinuité. De plus, ce design a la même problématique que l'approche continue face à l'inégalité de la rigidité de la scène.

On peut donc dire que ce concept est capable de faire un peu de tout, mais il ne fait rien de façon parfaite. Pour cette raison, mais aussi parce que les idées incluses dans cette approche sont analysées séparément dans les deux autres, ce concept a été moins développé.

3.2 Peaufinement des concepts

On développe ici quelques améliorations possibles des approches de base présentées à la section 3.1. L'intérêt de cette section est de vérifier si ces modifications, de l'ordre

technique, n'engendrent pas une diminution notable de l'esthétisme et de la diversité des poses et des trajectoires des concepts.

3.2.1 Moyennage

Un des problèmes avec l'approche discrète est que pour avoir un bon effet visuel, les polygones doivent être relativement petits. Ainsi, puisque la surface de la scène est grande, cela implique nécessairement beaucoup d'éléments mobiles et, par le fait même, beaucoup d'actionneurs. Or, puisqu'en général, les actionneurs sont ce qui coûte le plus cher dans un système, un principe de moyennage permettant de réduire ce nombre d'actionneurs a été développé.

Ce système, composé de câbles et de poulies, permet à un élément mobile non actionné de se retrouver à la hauteur médiane des éléments qui l'entourent. La figure 3.9 présente le mécanisme pour un moyennage plan de deux éléments. Conceptuellement, un câble est attaché, par ses extrémités, aux deux panneaux à moyenner (qui sont actionnés). Ce câble passe également par quatre poulies fixées au panneau central (non actionné). Ainsi, lorsque les plateaux extrêmes sont mus, celui du centre se positionne naturellement à la hauteur médiane des deux autres (figure 3.9(b)). Évidemment, si les éléments à moyenner sont à la même hauteur, la scène créée est parfaitement droite (figure 3.9(a)). L'animation 9 du Cd-Rom d'accompagnement présente également ce principe.

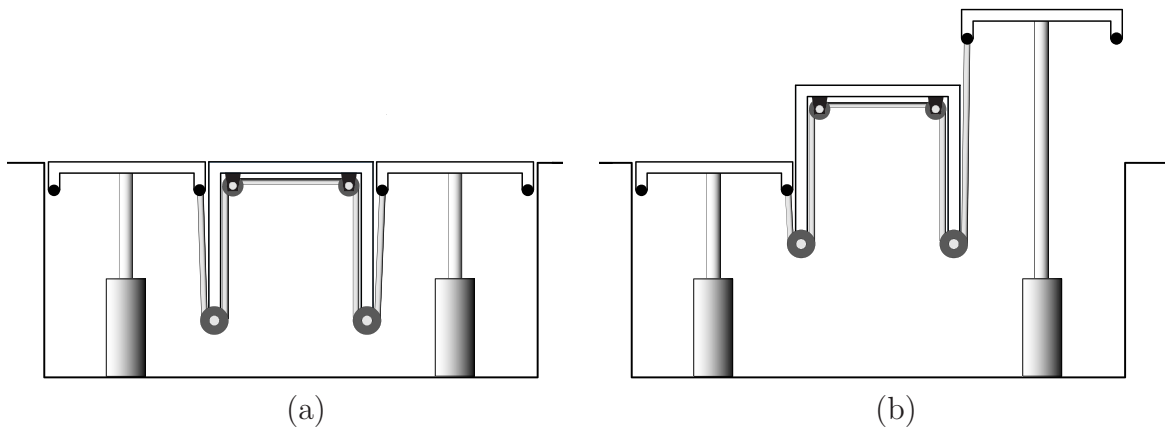


FIG. 3.9 – Illustrations (a) d'une scène droite et (b) d'une en forme d'escalier, toutes deux utilisant le principe de moyennage par câbles.

Le premier avantage de ce mécanisme est qu'il diminue la quantité d'actionneurs ; dans le cas qui vient d'être présenté, deux actionneurs sont nécessaires plutôt que trois. Une autre qualité de ce type de moyennage est sa passivité ; c'est-à-dire que l'action se fait automatiquement sans même avoir besoin de la contrôler. Finalement, il est aussi possible d'appliquer ce principe de moyennage à plus de deux éléments. Cela veut dire qu'on peut positionner un panneau carré, par exemple, en fonction de ses quatre panneaux voisins⁴. Évidemment, il existe différentes façons d'agencer ce mécanisme de moyennage. La section qui suit traite de certains cas.

3.2.1.1 Différentes configurations du principe de moyennage par câbles

Afin de visualiser la quantité d'actionneurs nécessaires pour actionner une scène, différentes configurations de moyennage ont été développées. Les plus intéressantes sont présentées dans ce qui suit. Pour chaque cas, les éléments mobiles sont modélisés par des carrés d'un mètre de côté, pour représenter une scène qui aurait neuf mètres sur neuf. Les points dans les carrés représentent des actionneurs, alors que les chiffres représentent le type de moyennage utilisé. Par exemple, un carré avec le chiffre 4 implique que cet élément se trouve à la hauteur moyenne des quatre éléments qui lui sont adjacents.

La première configuration nécessite 41 actionneurs sur 81 éléments. Elle est schématisée à la figure 3.10(a). Tous les éléments du pourtour qui ne sont pas actionnés sont des moyennes de trois éléments, car ici, on ne désire pas que la surface fixe entourant la scène mobile participe au moyennage.

La figure 3.10(b) présente une configuration avec 25 actionneurs où la moitié des éléments (40/81) sont positionnés en fonction de deux autres. De la même manière que pour la configuration précédente, le pourtour n'intervient pas dans les moyennages.

Finalement, la figure 3.10(c) schématise une configuration où seulement un élément sur cinq (16/81) est actionné. Dans cette configuration, le pourtour de la scène participe au moyennage des éléments. Ceci a comme avantage d'améliorer la continuité entre la scène mobile et son contour fixe. Cette particularité pourrait être très intéressante dans

4. Pour faire un moyennage à plus de deux éléments, il suffit de développer le mécanisme de moyennage plan d'une manière tridimensionnelle. Dans ce concept, le câble n'est plus fixé aux plateaux extrêmes mais est refermé sur lui-même pour former une boucle. Cette boucle passe en alternance par les poulies des éléments actionnés et par celles de l'élément qui ne l'est pas.

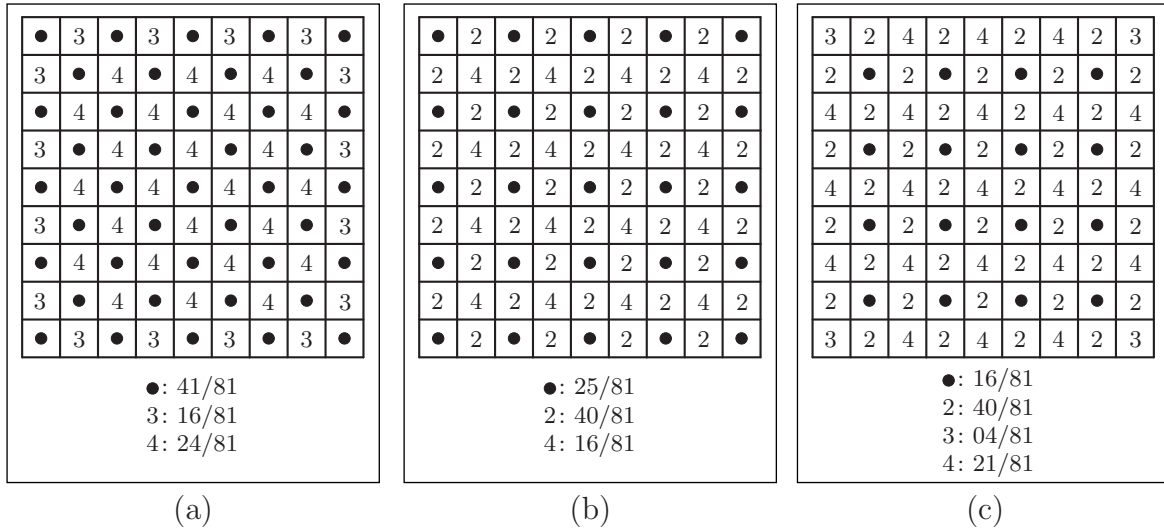


FIG. 3.10 – Schématisation de différentes configurations de l’approche discrète avec le système de moyennage. Les points représentent des actionneurs alors que les chiffres expriment le type de moyennage des éléments passifs.

le cas où la partie mobile de la scène serait plus petite que la scène totale. Par contre, le fait d’utiliser le pourtour pour moyenner diminue l’amplitude du mouvement des éléments mobiles situés sur le contour.

Évidemment, l’avantage majeur du moyennage est la réduction du nombre d’actionneurs. En contrepartie, chaque élément ne peut plus être déplacé individuellement ; la scène est donc moins polyvalente que sans moyennage⁵. Différents essais graphiques ont donc été faits pour vérifier que cette perte de polyvalence n’engendre pas de diminution notable des effets visuels de la scène. On a pu constater qu’un moyennage modéré, c’est-à-dire une configuration où la quantité d’actionneurs est grossièrement proportionnelle à celle des éléments passifs, comme par exemple les cas des figures 3.10(a) et 3.10(b), n’affecte pas de façon importante la qualité artistique des poses et des trajectoires de la scène. Finalement, certains exemples animés de ces configurations seront présentés dans la prochaine section.

En terminant, le moyennage possède malheureusement un inconvénient important : l’écart de hauteur possible entre les éléments doit généralement être limité. Ainsi, malgré le fait que théoriquement le moyennage puisse permettre des écarts très grands entre les différentes composantes, il est en général plus simple et plus avantageux techniquement

5. On dit que la scène est moins polyvalente car elle possède moins de degrés de liberté.

de restreindre cette amplitude au profit de la rétraction de la scène. Cette rétraction est caractérisée par la hauteur de la scène au repos. Comme mentionné dans le cahier des charges (section 2.3.2.3), il est important que la scène ne soit pas trop haute lorsqu'elle est dans sa position initiale. Or, de grands débattements dans un système de moyennage impliquent habituellement de grandes membrures qui prennent évidemment beaucoup d'espace et empêchent une bonne rétraction. Cette problématique a pour effet de réduire les possibilités artistiques puisqu'il est maintenant impossible de placer des plateaux adjacents avec un écart important de hauteurs.

3.2.2 Modularité

Une autre modification qui peut être apportée aux approches de base consiste à segmenter la scène en plusieurs sections identiques afin de rendre le système modulaire. Il y a quelques avantages techniques à procéder de la sorte. Premièrement, il est habituellement plus facile et moins coûteux de fabriquer un engin qui est formé de petites portions similaires plutôt que d'une grande section possédant plusieurs pièces différentes. Deuxièmement, les difficultés de transport et d'assemblage d'une scène modulaire seraient beaucoup moindres que si cette scène était construite en un seul bloc. Finalement, la facilité à transporter et à assembler cette scène permettrait de pouvoir s'en servir dans différents lieux.

Théoriquement, cette modularité pourrait être envisageable pour les trois approches de base présentées à la section 3.1. En pratique, par contre, les systèmes discret et hybride semblent plus adaptés à ce changement. En effet, il semble difficile de segmenter le maillage de l'approche continue tout en respectant une continuité globale entre les modules, puisque la modularité implique nécessairement une coupure entre les différentes sections. Or, un système qui posséderait à la fois des éléments continus et discontinus se rapporterait à l'approche hybride et non à celle continue.

Une maquette d'un module discret a donc été construite afin d'analyser son comportement. Ce module comporte neuf éléments mobiles disposés symétriquement. La figure 3.11 présente des photos de celui-ci⁶. Ce prototype est muni d'un système de moyennage qui est passif. Son fonctionnement est présenté à la figure 3.12. Les neuf

6. Une image en couleur est également disponible sur le CD-Rom d'accompagnement (photo 3).

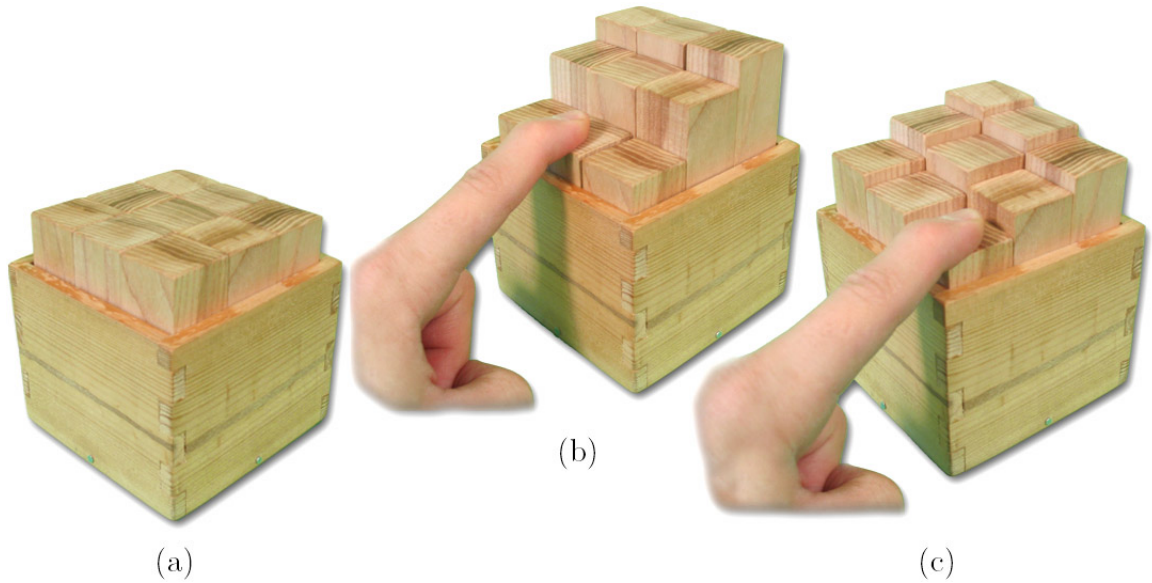


FIG. 3.11 – Photos de la maquette d’un module discret moyenné passivement.

éléments mobiles rectangulaires sont tout simplement déposés sur un plan qui est libre de pivoter sur une tige ayant le bout arrondi. Cette tige est quant à elle fixée à la base à l’aide d’une vis. Finalement, la base est formée d’un prisme rectangulaire creux permettant de guider latéralement les blocs mobiles lors de leurs déplacements verticaux. Avec cette maquette, on peut ainsi simuler le déplacement d’actionneurs en appuyant sur les blocs. Cela a comme effet de faire pivoter le plan et ainsi, de reconfigurer la position des autres éléments mobiles (figures 3.11(b) et (c)). Il est à noter que ce moyennage, malgré son mécanisme primitif, représente exactement les notions exposées à la section moyennage (section 3.2.1).

Du côté artistique, un concept modulaire fournirait aux créateurs une vaste gamme de scènes ayant des formes différentes, puisque les modules pourraient être agencés de plusieurs manières. Par contre, on peut se demander si le fait d’utiliser des modules aura un impact néfaste sur les résultats esthétiques de la scène mobile ? Pour répondre à cette question, plusieurs simulations informatiques ont été effectuées en incluant les contraintes⁷ de mouvements qui sont induites par le moyennage et la modularité. Ces simulations ont permis de constater que l’utilisation de modules n’affecte pas l’effet général des mouvements et des positions de la scène. En fait, les résultats sont comparables à ceux obtenus sans moyennage et sans module. On peut visualiser le mouvement scénique complet de ces simulations dans les animations 10 et 11 du CD-Rom d’accom-

7. Les contraintes utilisées représentent celles de la maquette de la figure 3.11.

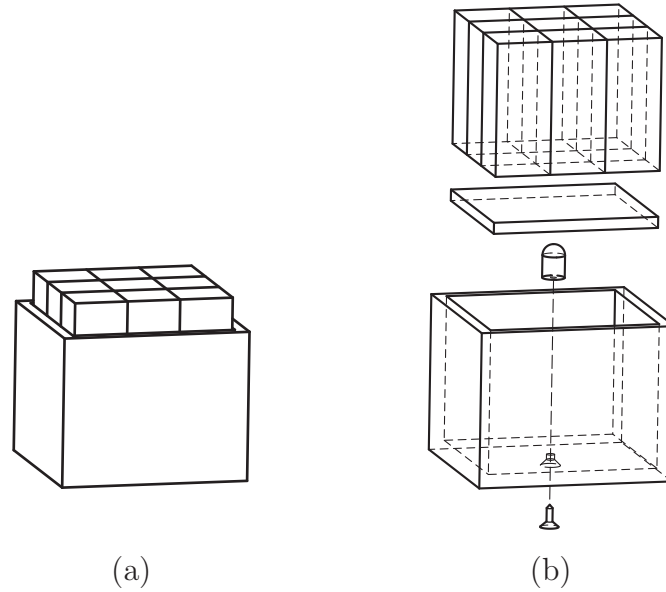


FIG. 3.12 – Schémas (a) de la configuration de base et (b) d’une vue explosée mettant en évidence les éléments permettant le moyennage du prototype d’un module discret.

pagnement⁸.

Une autre qualité artistique intéressante de la scène modulaire est qu’elle permet des écarts de hauteur importants entre les modules, palliant ainsi la lacune laissée par le moyennage⁹. Ainsi, à l’intérieur d’une section, l’écart maximum entre deux blocs serait limité, pour permettre d’avoir une scène au repos qui ne soit pas trop haute, alors que cet écart pourrait respecter les attentes du cahier des charges entre deux modules. À cet égard, les animations 1 et 2 du CD-Rom — qui ont déjà été présentées — sont de bons exemples de poses qui nécessitent simultanément des écarts limités pour former des escaliers et des écarts très grands pour des podiums plus élevés.

La modularité ajoute donc à la scène des avantages techniques, mais aussi des qualités artistiques qui la rendent plus versatile.

8. Il est aussi intéressant de comparer ces séquences avec celles sans moyennage (animations 4 et 5).

9. L’analyse faite à la section 3.2.1 a permis de constater que le moyennage ne permet pas d’avoir de grands écarts entre les éléments mobiles.

3.3 Analyse des concepts face à l'utilisation des mouvements scéniques

3.3.1 Utilisation actuelle de l'espace scénique

Les espaces scéniques, et particulièrement la scène proprement dite, sont utilisés de façons distinctes par les différents médiums artistiques. C'est ainsi qu'en danse classique, par exemple, on a recours plus souvent qu'autrement à la traditionnelle scène parfaitement horizontale alors qu'au théâtre, on ajoute fréquemment à la scène des éléments de décors — escaliers, plates-formes surélevées, plateaux tournants — pour lui donner du relief ou pour y retrouver différents environnements. Évidemment, même à l'intérieur d'un champ artistique propre, chaque production se servira différemment de l'espace scénique en fonction de son type de mise en scène, de son budget et de ses contraintes techniques. Les contraintes techniques sont reliées aux types de prestations offertes sur la scène. Par exemple, dans un spectacle de cirque où un monocycliste s'exécute ou même dans un spectacle de danse où une ballerine fait des pointes, il sera difficile pour les créateurs d'utiliser une scène en forme de montagne russe ; les prestations des artistes s'effectuant plus facilement et plus sécuritairement sur une surface plane. Voilà pourquoi on a tendance à utiliser les scènes les plus marginales dans le domaine théâtral, où la prestation des artistes ne dépend habituellement pas de la forme du plancher.

Ainsi, malgré les nombreuses productions présentées à chaque année, et ce dans de nombreux domaines artistiques, il est possible de cibler une catégorie de scènes plus fréquemment utilisées. Comme mentionné précédemment, puisque plusieurs types d'arts s'effectuent plus aisément sur des surfaces planes, les scènes à plateaux horizontaux sont plus souvent utilisées. L'utilisation majoritaire de ce type de surface est également due aux coûts moindres comparativement à l'élaboration d'une scène de type continu¹⁰. Voilà pourquoi les productions artistiques utilisent présentement plus fréquemment des scènes qui sont un amalgame d'éléments discrets pour former des plateaux de différentes hauteurs reliés par des escaliers plutôt que des scènes utilisant des surfaces continues.

10. La différence de prix vient du fait que les compagnies de location d'équipements scéniques offrent des sections de scènes, nommées praticables, de différentes dimensions qui peuvent s'assembler à peu près n'importe comment. À l'inverse, des scènes sans discontinuité ne sont présentement pas disponibles sur le marché ; il est donc nécessaire de les faire construire sur mesure.

3.3.2 Comparaison des concepts

Trois concepts de base ont été présentés dans les sections précédentes, soit les approches discrète, continue et hybride. Différents essais qualitatifs ont été faits pour vérifier les qualités esthétiques de ces concepts. Il a été démontré que les mouvements discrets et continus sont respectivement plus facilement reproductibles par l'approche discrète et celle continue. De plus, on a pu constater que les trajectoires discrètes ne sont pas réalisables par l'approche continue alors que celles continues sont relativement accessibles par l'approche discrète. Finalement, le concept hybride est capable d'effectuer des mouvements des deux créneaux, mais sans grande efficacité.

Un mécanisme de moyennage a également été étudié. Jusqu'à une certaine limite, ce système permet de combler une des lacunes du concept discret, soit la nécessité d'une grande quantité d'actionneurs. Il est à noter que l'idée générale de ce principe pourrait également être appliquée aux autres approches de base. Des modélisations informatiques ont démontré qu'une utilisation modérée du moyennage ne diminue pas de façon notable la qualité visuelle des mouvements. Malheureusement, le système de moyennage impose, dans la majorité des cas, un écart de hauteurs restreint entre les éléments discrets.

Cet inconvénient a partiellement été inhibé par le principe de modularité; celui-ci permettant un grand écart entre les modules. La modularité permet également de configurer la forme et les dimensions de la scène de plusieurs manières. Malheureusement, il a été démontré que ce système est presque uniquement utilisable pour les concepts discret et hybride.

Le tableau 3.1 résume donc les habiletés des concepts face à différents critères. Ces critères ont tous comme effet d'améliorer la versatilité de la scène. À titre d'exemple, une scène modulaire peut être géométriquement configurée de plusieurs manières, ce qui offre une vaste gamme de scènes aux créateurs, alors qu'une scène uniformément rigide permet de présenter tous les arts scéniques.

Il ressort de ce tableau que l'approche discrète est la plus intéressante des trois, compte tenu des objectifs envisagés. De plus, l'étude de l'utilisation actuelle des mouvements scéniques, présentée dans la section précédente, a permis de constater que le milieu artistique utilise majoritairement des surfaces agencées de manière discrète

Fonctionnalités	Approche discrète	Approche continue	Approche hybride
Positions ou mouvements discrets	+	-	+/-
Positions ou mouvements continus	+/-	+	+/-
Modularité	+	-	+
Uniformité de la rigidité de la scène	+	-	-

TAB. 3.1 – Tableau comparatif des différents concepts de solution.

plutôt que continue, ce qui avantage encore cette dernière approche. Pour toutes ces raisons, le concept discret, bonifié du moyennage et de la modularité, est celui qui est développé dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

Analyse de différentes configurations modulaires moyennées

L'étude des concepts de base présentée au chapitre précédent a permis de choisir l'approche discrète comme celle respectant le plus fidèlement les attentes d'une scène dynamiquement reconfigurable. Ont également été mis en lumière deux mécanismes, le moyennage et la modularité, qui améliorent grandement le concept discret. Tous ces éléments, ayant jusqu'à présent été développés de façon sommaire et indépendante, sont ici analysés globalement et avec un peu plus de détails techniques.

Sont donc présentées, dans ce chapitre, deux méthodes d'agencement de la modularité et du moyennage au sein du concept discret. Il s'agit du système par étages et du

système direct. L'intérêt de cette démarche est de sélectionner l'approche qui permettra de combiner le plus efficacement la modularité et le moyennage. On verra, dans ce qui suit, que le système direct est, à cet égard, plus avantageux que celui par étages.

4.1 Système modulaire par étages

Cette approche est une extension du principe de la maquette modulaire qui a été présentée à la section 3.2.2 (figures 3.11 et 3.12). Rappelons d'abord que pour des fins de simplicité, ce prototype a été fabriqué avec des composantes simplifiées. À titre d'exemples, le plan de moyennage pivote simplement sur une tige arrondie alors que le guidage vertical des blocs se fait par glissement sur les parois latérales de la base. De plus, cette maquette ne possède aucun actionneur ; le déplacement des blocs se fait manuellement. Malgré tout, ce prototype fonctionne relativement bien. Il a donc été proposé d'analyser un design de ce principe auquel on ajouterait des actionneurs et où on complexifierait les composantes mécaniques.

De manière fonctionnelle, le système par étages peut être décomposé en deux parties (figure 4.1). Le premier étage sert à positionner un plan de moyennage dans l'espace à partir de la base. Le nombre de degrés de liberté nécessaire est donc de trois : un pour le déplacement vertical et deux pour les rotations par rapport aux axes horizontaux. De son côté, le deuxième étage fait le transfert entre la pose (position et orientation) du plan de moyennage et la position des éléments mobiles.

Il est donc nécessaire d'avoir deux types de mécanismes pour répondre à ces deux étages. Ceux-ci sont présentés dans les sections suivantes.

4.1.1 Mécanismes pour le premier étage

L'objectif de ce premier étage est de positionner et d'orienter un plan dans l'espace. Or, plusieurs mécanismes ont déjà été étudiés, dans la littérature, pour accomplir cette tâche. On les retrouve dans des domaines aussi variés que la fabrication mécanique (pour des machines-outils)[12], l'astronomie (dans des télescopes)[13] et les industries

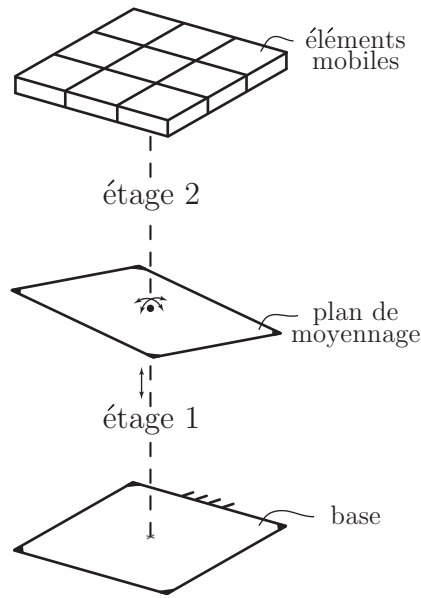


FIG. 4.1 – Schématisation du système par étages.

automobile et aéronautique (comme bases mobiles de simulateurs)[14]-[16]. Ces manipulateurs, qu'on nomme aussi plates-formes mobiles, ont très souvent des architectures dites parallèles. Par contre, on retrouve quelques fois des mécanismes hybrides, soit un amalgame des configurations sérielle et parallèle. À titre informatif, l'annexe B explique sommairement les différences entre ces architectures.

Les trois sections suivantes présentent des plates-formes mobiles qui sont peu ou pas abordées dans la littérature. Le fonctionnement de ces architectures est présenté dans le corps du texte alors qu'une étude cinématique pour chaque cas est disponible à l'annexe C. L'intérêt de cette démarche n'est pas d'analyser minutieusement ces mécanismes, mais plutôt d'avoir une idée générale de leur configuration, de leur fonctionnement et surtout de leur complexité mécanique. À cet égard, les plates-formes mobiles de ce type — même celles des références citées plus haut — sont relativement comparables et le choix de celles présentées ici est tout à fait arbitraire.

4.1.1.1 Plate-forme parallèle à trois pattes

Ce mécanisme possède trois pattes qui sont entraînées par des actionneurs linéaires — à titre d'exemple, des vérins ou cylindres hydrauliques. La chaîne cinématique centrale est rigidement fixée à la base et est reliée à l'effecteur (plan de moyennage) par

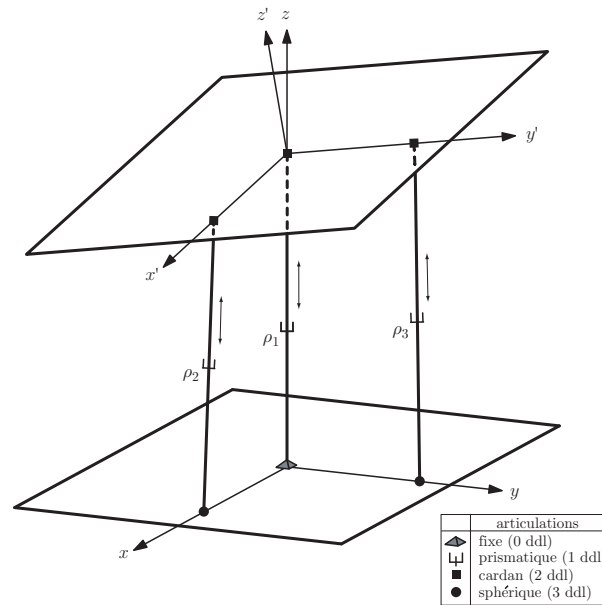


FIG. 4.2 – Configuration schématique de la plate-forme parallèle à trois pattes.

une articulation à deux degrés de liberté. Les deux autres pattes sont attachées à la base à l'aide de joints sphériques et à l'effecteur avec des joints de cardan. Dans ce concept, si on veut un mouvement de translation pure (sans rotation), il faut que les trois actionneurs soient mus. Autrement, pour les rotations, il est possible d'actionner seulement les vérins 2 et 3.

4.1.1.2 Plate-forme parallèle à quatre pattes

Cette plate-forme est constituée de trois pattes actionnées et d'une patte passive (celle du centre). Celle passive ne sert qu'à guider le mouvement vertical de l'effecteur, un peu comme le font les glissières d'un tiroir. Les trois pattes actionnées sont identiques : articulation sphérique à la base suivie d'un actionneur linéaire et d'un joint de cardan à l'effecteur. De même que pour le mécanisme précédent, les translations pures ne peuvent être effectuées qu'avec le mouvement des trois vérins, alors que certaines rotations peuvent être faites avec un seul actionneur.

4.1.1.3 Plate-forme hybride

Ce dernier mécanisme est un mélange d'architectures sériele et parallèle. En fait, les mouvements de translation et de rotation sont ici découplés, donc en série, alors

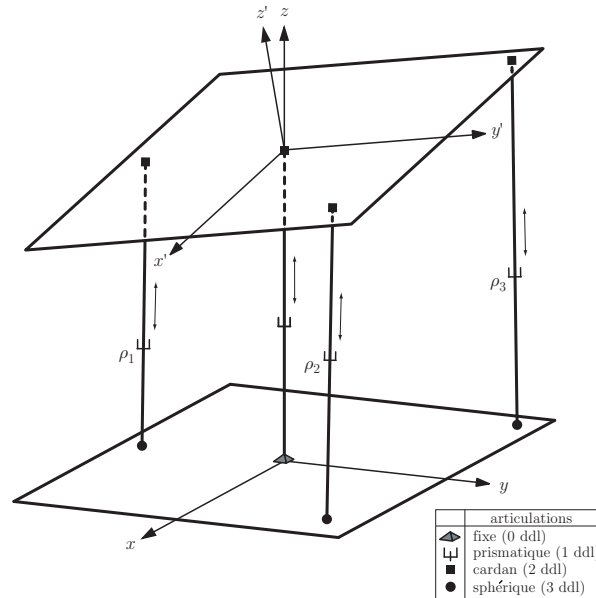


FIG. 4.3 – Configuration schématique de la plate-forme parallèle à quatre pattes.

que la rotation proprement dite est effectuée par un système parallèle. Ainsi, le premier actionneur linéaire positionne le plan intermédiaire à la hauteur désirée. Ce plan reste toujours dans la même orientation que la base. Ensuite, deux autres actionneurs linéaires peuvent faire tourner le plan de moyennage autour d'un joint de cardan ; celui-ci étant rigidement relié au plan intermédiaire.

4.1.2 Mécanismes pour le deuxième étage

Le deuxième étage fait le lien entre le plan de moyennage et les plateaux mobiles. Différentes solutions peuvent être envisagées pour accomplir cette tâche. La plus simple d'entre elles consiste à placer des roulettes multidirectionnelles sous les blocs mobiles (figure 4.5). Cela permettrait aux panneaux de la scène de se repositionner automatiquement (en roulant) selon l'orientation du plan de moyennage. Par contre, dans cette solution, les mouvements latéraux des éléments mobiles ne sont pas contraints. Un mécanisme d'appoint est donc nécessaire. Pour ce faire, il pourrait y avoir une cage de guidage qui envelopperait le module. Celle-ci pourrait être fixée au plan de moyennage à l'aide d'un joint de cardan. De plus, cette cage serait reliée au sol à l'aide de mécanismes à ciseaux passifs permettant de contraindre ses déplacements horizontaux. Ainsi, lorsque le plan de moyennage bougerait (sous l'action du mécanisme du premier

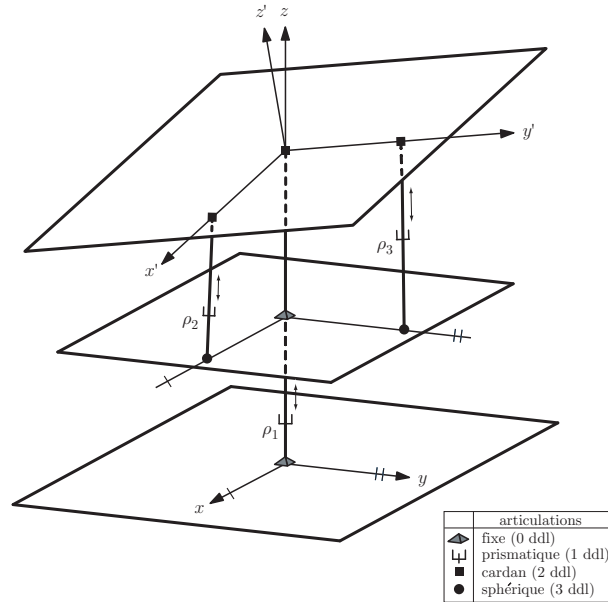


FIG. 4.4 – Configuration schématique du mécanisme hybride.

étage), la cage s'élèverait automatiquement avec lui. Finalement, pour guider les mouvements verticaux des plateaux, d'autres roulettes pourraient être disposées entre la cage et les plateaux.

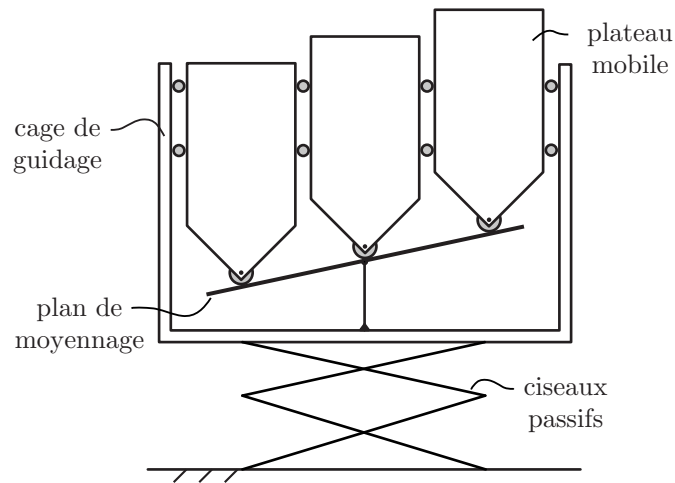


FIG. 4.5 – Schéma du mécanisme du deuxième étage.

4.1.3 Discussion

De manière fonctionnelle, les mécanismes développés pour le premier et le deuxième étage répondent adéquatement aux exigences. Malheureusement, une fois ces mécanismes combinés, le système modulaire par étages devient relativement complexe et possède surtout une grande quantité d'éléments mécaniques. Or, en mécanique, le fait d'avoir beaucoup de composantes est toujours un inconvénient. Premièrement, parce que plus il y a de pièces, plus il y a de chances qu'une d'entre elles se brise et deuxièmement, parce qu'une grande quantité d'éléments coûte plus cher à fabriquer. Voilà pourquoi cette approche n'a pas été plus approfondie.

Cette méthode, qui semblait au départ prometteuse vu les résultats impressionnants de la maquette simplifiée, donne un design réel trop complexe. Cette trop grande complexité mécanique provient d'une lacune dans le concept de base du système modulaire par étages. Ainsi, dans cette approche, on se sert d'actionneurs linéaires pour créer une rotation (orientation du plan de moyennage), pour ensuite retourner cette rotation en mouvements linéaires (poses des plateaux mobiles). On utilise donc un intermédiaire rotationnel pour relier des mouvements rectilignes. Cet intermédiaire implique indubitablement l'utilisation de composantes mécaniques superflues. Pour combler cette lacune, le système modulaire direct a été développé.

4.2 Système modulaire direct

On dit que cette approche est directe puisqu'elle ne fait pas intervenir de composantes intermédiaires. Ainsi, les actionneurs sont directement liés à quelques panneaux de la scène et génèrent donc automatiquement certains mouvements désirés (figure 4.6). De plus, ces actionneurs sont fixés à la base de manière à ne conserver que les mouvements verticaux. Cela a comme effet de contraindre également les blocs auxquels ils sont attachés, éliminant ainsi les degrés de liberté indésirables. Finalement, le moyennage est intégré entre les blocs mobiles pour permettre aux plateaux non actionnés d'être mus.

Deux éléments sont donc importants dans ce système, soit les actionneurs et le

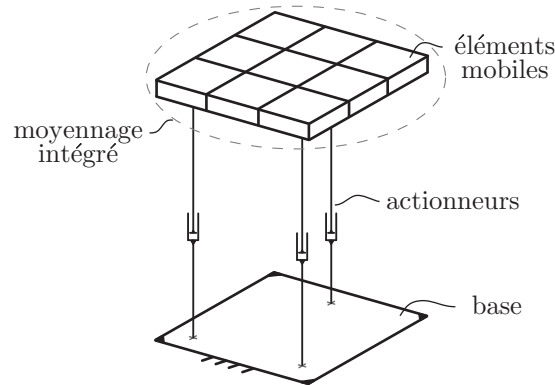


FIG. 4.6 – Schématisation du système modulaire direct.

mécanisme de moyennage. Évidemment, les actionneurs linéaires peuvent prendre différentes formes. Cela pourrait être des vérins, des agencements de bielles et moteurs rotatifs ou un système utilisant des vis sans fin. Cet aspect est tributaire des charges que doit supporter le module et dépend donc du type de scène à construire — scène à grandeur réelle ou à échelle réduite. Finalement, un exemple d'actionneur sera traité avec plus de détails au chapitre 7.

Pour le moyennage, le concept utilisant des câbles présenté à la section 3.2.1 pourrait théoriquement être utilisé dans ce design. Par contre, ce mécanisme n'est pas idéal pour ce genre d'application. En effet, il serait intéressant de pouvoir effectuer, avec la scène, des trajectoires avec des vitesses et des accélérations relativement élevées. Or, puisque les câbles ne peuvent retenir une charge qu'en tension, il serait difficile d'appliquer aux éléments mobiles des accélérations vers le bas plus grandes que celle de la gravité. Si cela était fait, les blocs moyennés ne seraient plus soutenus par les câbles, ce qui causerait des chocs dans les mouvements en plus d'augmenter le risque de coincement entre les câbles et les poulies¹. De plus, ce genre de système est souvent bruyant, ce qui n'est pas souhaitable lors d'une prestation scénique.

Pour contrer les problématiques de ce mécanisme de moyennage par câbles, une nouvelle version utilisant des membrures rigides a été développée. La version plane est étudiée au chapitre 5, alors que les configurations spatiales sont présentées au chapitre 6.

1. Le bon fonctionnement d'un mécanisme à câbles et poulies nécessite une tension continue dans les câbles. Lorsque les câbles ne sont plus tendus, ils deviennent lâches et peuvent ainsi sortir des rainures des poulies et se coincer.

Chapitre 5

Mécanisme bidimensionnel de moyennage par bielles

Dans ce chapitre, sont abordés plusieurs aspects théoriques d'un nouveau mécanisme de moyennage plan utilisant des bielles. Tout d'abord, une description générale du système est présentée. Ensuite, les équations des problèmes géométriques direct et inverse ainsi que celles des vitesses sont développées. Ces dernières permettent également d'aborder les singularités du mécanisme. Une analyse des erreurs de position cible également les configurations critiques et favorables. Cette démarche permet ensuite de faire une optimisation des paramètres géométriques afin de minimiser les erreurs de position. Suite à cette optimisation, un modèle cinématique simplifié est proposé. Celui-ci suppose que le mécanisme de moyennage est parfait. Finalement, une étude dynamique est réalisée.

5.1 Description du mécanisme

Ce mécanisme permet de positionner, presque parfaitement, un plateau mobile passif (centré en F) à la hauteur moyenne de deux autres qui sont actionnés, comme schématisé à la figure 5.1¹. On dit que le mécanisme ne permet pas un moyennage parfait, puisque les hauteurs des contremarches, h_1 et h_2 , ne sont pas identiques pour toutes les positions des actionneurs (ρ_1 et ρ_2). On verra les conséquences de cette imperfection un peu plus loin.

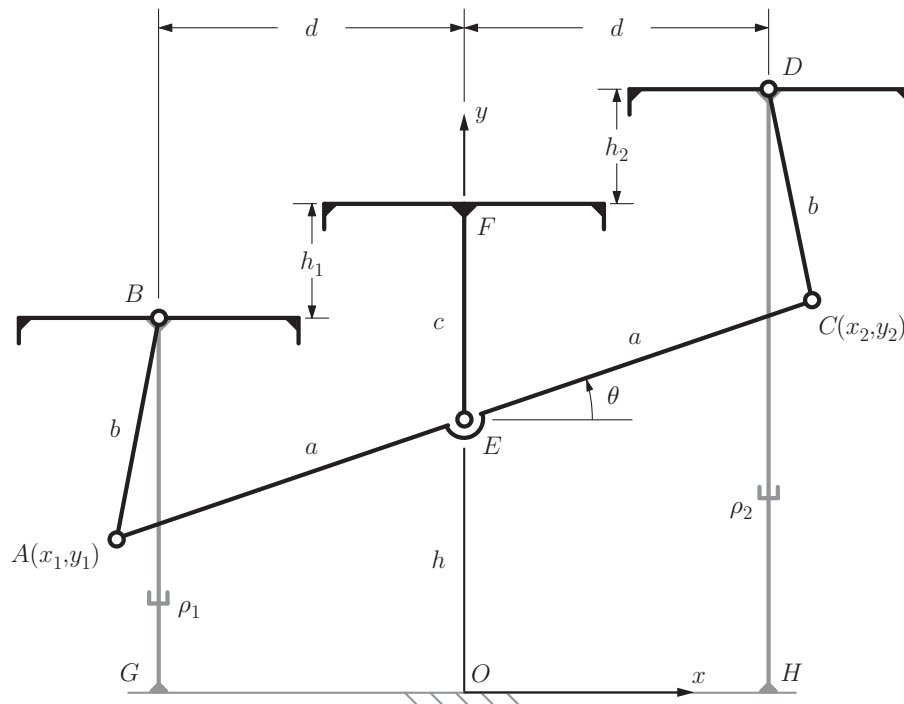


FIG. 5.1 – Configuration schématique du mécanisme de moyennage plan.

Cinématiquement, ce mécanisme est parallèle. Il est composé de deux plateaux mobiles se déplaçant verticalement grâce à deux actionneurs linéaires rigidement fixés à ceux-là (points B et D) ainsi qu'à la base (points G et H). Le plateau central est formé d'un plancher vertical ainsi que d'une extension (de longueur c); les deux éléments étant connectés en F ². Les trois panneaux mobiles sont reliés entre eux par des barres,

1. L'annexe D offre également une illustration flottante de ce mécanisme, permettant ainsi au lecteur d'y référer aisément tout au long de ce chapitre. Il est fortement suggéré de prendre connaissance de cette annexe avant de poursuivre la lecture du mémoire.

2. Pour des raisons de simplicité, dans cette analyse, le plateau moyenné est toujours considéré

celles latérales de longueur b et celle centrale de longueur $2a$, ainsi que des articulations rotoïdes (en A , B , C , D et E). Finalement, on suppose que l'élément central est contraint à se déplacer le long de l'axe y . Aucune rotation de ce plateau n'est donc permise. On verra au chapitre suivant comment cette contrainte s'impose. Une animation de ce mécanisme est disponible sur le CD-Rom d'accompagnement (animation 12).

5.2 Analyse cinématique

Cette section présente différents éléments de la cinématique du mécanisme de moyennage. Le mot cinématique vient du terme grec *kinêma* (ou *kinêmatos*) qui signifie mouvement. La cinématique est donc l'étude des mouvements des corps, sans tenir compte des forces qui les produisent, contrairement à la dynamique.

5.2.1 Problème géométrique direct

L'objectif de cette partie du mémoire est de définir le problème géométrique direct du mécanisme de moyennage. Plus précisément, il s'agit de trouver la hauteur de la marche du centre ($p = h + c$), donc celle moyennée, ainsi que l'orientation de la barre centrale (θ) en fonction des hauteurs des marches latérales (ρ_1 et ρ_2) qui sont actionnées. On peut aussi dire qu'on cherche les coordonnées cartésiennes en fonction de celles articulaires. Cette démarche est très importante pour le contrôle du mécanisme. Avec le problème géométrique direct, on est en mesure de savoir dans quelle configuration est le mécanisme lorsque les actionneurs sont dans une position donnée.

5.2.1.1 Hauteur de la marche centrale (p)

À partir de la figure 5.1, on peut écrire le système d'équations mathématiques nécessaire à l'obtention d'une portion du problème géométrique direct, soit la hauteur de la marche centrale. Premièrement, les barres latérales b pivotent autour des rotules A comme étant celui du centre. Malgré tout, le mécanisme peut être fonctionnel même lorsque cet élément moyenné est positionné à l'une des extrémités du système. D'ailleurs, les architectures spatiales du mécanisme de moyennage, présentées au chapitre 6, utilisent ces types de configurations.

et C . Les points B et D , aux extrémités de ces barres, se retrouvent donc sur les cercles de rayon b centrés respectivement en A et C (équations 5.1 et 5.2). Deuxièmement, la barre centrale pivote autour du point E . Le point A est donc sur un cercle de rayon a centré en E (équation 5.3). Troisièmement, puisque le plateau central (et du fait même le point E) est contraint à se déplacer le long de l'axe y , le point E est toujours à la hauteur médiane des point A et C (équation 5.4). Finalement, pour les mêmes raisons, ces deux derniers points sont toujours à une distance égale, mais de côtés opposés, de l'axe y (équation 5.5).

$$s.e.1 : \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + 2dx_1 - 2\rho_1 y_1 + d^2 + \rho_1^2 - b^2 = 0 & (5.1) \\ x_2^2 + y_2^2 - 2dx_2 - 2\rho_2 y_2 + d^2 + \rho_2^2 - b^2 = 0 & (5.2) \\ x_1^2 + y_1^2 + h^2 - 2hy_1 - a^2 = 0 & (5.3) \\ y_1 = 2h - y_2 & (5.4) \\ x_1 = -x_2 & (5.5) \end{cases}$$

Ce système d'équations possède donc cinq équations et cinq inconnues, soit les positions des point A et C (x_1, y_1, x_2 et y_2) ainsi que la hauteur du point E (h). Rappelons que l'objectif est de trouver la hauteur du plateau central (p) qui est une fonction de h ($p = h + c$). Or, en trouvant h , on trouve p , puisque c est une constante connue.

On peut donc réduire le premier système d'équations (*s.e.1*) en remplaçant les équations (5.4) et (5.5) dans (5.1) et (5.3) et en réutilisant l'équation (5.2). Ceci permet d'éliminer les inconnues x_1 et y_1 .

$$s.e.2 : \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + 4h^2 - 4hy_2 - 2dx_2 - 4\rho_1 h + 2\rho_1 y_2 + d^2 + \rho_1^2 - b^2 = 0 & (5.6) \\ x_2^2 + y_2^2 - 2dx_2 - 2\rho_2 y_2 + d^2 + \rho_2^2 - b^2 = 0 & (5.7) \\ x_2^2 + y_2^2 + h^2 - 2hy_2 - a^2 = 0 & (5.8) \end{cases}$$

La soustraction des deux premières équations de ce système (équation (5.6) moins équation (5.7)) permet de générer une première expression indépendante de la variable x_2 :

$$2(\rho_1 + \rho_2 - 2h)y_2 + 4h^2 - 4\rho_1 h + \rho_1^2 - \rho_2^2 = 0 \quad (5.9)$$

ou écrit autrement

$$(\rho_1 + \rho_2 - 2h)^2 + (2y_2 - 2\rho_2)(\rho_1 + \rho_2 - 2h) = 0 \quad (5.10)$$

On isole ensuite la variable x_2 en soustrayant l'équation (5.8) de l'équation (5.7), ce qui donne

$$x_2 = \frac{2hy_2 - h^2 - 2\rho_2 y_2 + \rho_2^2 + d^2 + a^2 - b^2}{2d}, \quad \forall d \neq 0 \quad (5.11)$$

La substitution de cette dernière dans l'équation (5.8) donne une deuxième expression indépendante de x_2 :

$$Ay_2^2 + By_2 + C = 0 \quad (5.12)$$

où

$$A = 1 + \frac{(h - \rho_2)^2}{d^2} \quad (5.13a)$$

$$B = \frac{(h - \rho_2)(d^2 + \rho_2^2 + a^2 - h^2 - b^2)}{d^2} - 2h \quad (5.13b)$$

$$C = \frac{(d^2 + \rho_2^2 + a^2 - h^2 - b^2)^2}{4d^2} + h^2 - a^2 \quad (5.13c)$$

On reprend donc les équations (5.9) et (5.12), indépendantes de x_2 , pour former le système suivant :

$$s.e.3 : \begin{cases} (\rho_1 + \rho_2 - 2h)^2 + (2y_2 - 2\rho_2)(\rho_1 + \rho_2 - 2h) = 0 & (5.14) \\ Ay_2^2 + By_2 + C = 0 & (5.15) \end{cases}$$

Or, l'équation (5.14) est valide pour deux situations. La première étant lorsque

$$(\rho_1 + \rho_2 - 2h)^2 = 0 \quad (5.16)$$

Cette dernière équation possède une racine double pour h qui n'est fonction que des hauteurs des marches latérales. Ceci permet d'écrire les deux premières solutions pour h .

$$h_{1,2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (5.17)$$

D'un autre coté, si l'équation (5.16) n'est pas vérifiée, on peut simplifier l'équation (5.14) et y isoler la variable y_2 pour obtenir

$$y_2 = h + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \quad (5.18)$$

La substitution de ce dernier résultat dans l'équation (5.15) donne la quartique en h suivante :

$$h^4 + Dh^3 + Eh^2 + Fh + G = 0, \quad d \neq 0 \quad (5.19)$$

avec

$$D = -2(\rho_1 + \rho_2) \quad (5.20a)$$

$$E = (\rho_1 + \rho_2)^2 + 2(\rho_1\rho_2 + a^2 + d^2 - b^2) \quad (5.20b)$$

$$F = 2 [(\rho_1 + \rho_2)(b^2 - a^2 - d^2) - \rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2\rho_1] \quad (5.20c)$$

$$G = \rho_1^2\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2(a^2 - b^2) + d^2(\rho_1^2 + \rho_2^2) + (a^2 + b^2 + d^2)^2 - 4(a^2d^2 + a^2d^2 + b^2d^2) \quad (5.20d)$$

Cette équation possède quatre autres solutions³ pour h , soit

$$h_{3-6} = \bar{\rho} \pm \frac{1}{2} \sqrt{H \pm 4d\sqrt{I}} \quad (5.21)$$

où

$$H = \delta\phi^2 - 4(a^2 + b^2 + d^2) = -4(b^2 + d^2) - I \quad (5.22a)$$

$$I = 4a^2 - \delta\phi^2 \quad (5.22b)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (5.22c)$$

$$\delta\phi = |\rho_1 - \rho_2| \quad (5.22d)$$

Notez que $\bar{\rho}$ et $\delta\phi$ ont des interprétations physiques particulières ; ils représentent respectivement la hauteur moyenne entre les plateaux latéraux et la différence de hauteurs entre ces mêmes plateaux.

Les quatre solutions pour h , présentées dans l'équation (5.21), peuvent être de différentes natures selon les valeurs des paramètres H et I . Ainsi, si ces deux paramètres étaient indépendants, plusieurs types de solutions seraient envisageables. Ces différents cas sont présentés dans le tableau 5.1.

Conditions		Types de solutions	
$I < 0$		4 imaginaires	
$I > 0$	$H > 0$	$H \geq 4d\sqrt{I}$	4 réelles
		$H < 4d\sqrt{I}$	2 réelles, 2 imaginaires
	$H < 0$	$ H \leq 4d\sqrt{I}$	2 réelles, 2 imaginaires
		$ H > 4d\sqrt{I}$	4 imaginaires
	$H = 0$	2 réelles, 2 imaginaires	
$I = 0$	$H \geq 0$	2 réelles	
	$H < 0$	2 imaginaires	

TAB. 5.1 – Types de solutions pour le paramètre h si H et I étaient indépendants.

H et I ne sont par contre pas indépendants, comme on peut le constater dans l'équation (5.22a). Il est donc possible de vérifier si cette dépendance entraîne des

3. La méthode analytique pour trouver les racines d'une équation polynomiale du quatrième degré est présentée à l'annexe E.

chevauchements dans les conditions présentées dans le tableau 5.1. Or, s'il y a chevauchements, certains cas de ce tableau — chaque ligne représentant un cas — seront éliminés.

On débute en représentant les conditions des deux premières colonnes du tableau 5.1 en fonction des paramètres géométriques du mécanisme et des conditions d'opération à l'aide des équations (5.22a) et (5.22b). Ceci donne six équivalences résumées dans les deux relations suivantes :

$$I \gtrless 0 \iff \delta\varphi \lesseqgtr 2a \quad (5.23)$$

$$H \gtrless 0 \iff \delta\varphi \gtrless 2\sqrt{a^2 + b^2 + d^2} \quad (5.24)$$

Ainsi, dire que I est supérieur à zéro, par exemple, est équivalent à dire que $\delta\varphi$ est inférieur à $2a$.

Analysons maintenant les cas où $I = 0$ et $I > 0$. Premièrement, si I est nul, $\delta\varphi$ sera égal à $2a$; résultat que l'on peut introduire dans l'équation (5.22a) pour obtenir

$$H = -4(b^2 + d^2) \quad (5.25)$$

Or, dans cette dernière, il est évident que H sera toujours inférieur à zéro. Ceci implique que lorsque I est nul, H est nécessairement négatif. Ainsi, le cas représenté à l'avant-dernière ligne du tableau 5.1 est irréalisable.

De la même manière, on peut montrer que si I est positif, H sera toujours négatif. Ceci élimine les lignes 2, 3 et 6 du tableau 5.1.

Il reste maintenant à vérifier les conditions de la troisième colonne du tableau 5.1. Ceci se résume à vérifier que H est supérieur, égal ou inférieur à $4d\sqrt{I}$, lorsque I est positif. Or, pour $I > 0$, la portion de droite de l'équivalence (5.23) peut se réécrire ainsi :

$$4a^2 - \delta\varphi^2 = \epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (5.26)$$

où ϵ est une valeur toujours positive. La substitution de ce dernier résultat dans les deux termes à comparer donne

$$H = -\epsilon - 4(b^2 + d^2) \quad (5.27)$$

$$4d\sqrt{I} = 4d\sqrt{\epsilon} \quad (5.28)$$

On remarque que pour b et d positifs, le terme de droite de l'équation (5.27) sera toujours négatif (ϵ étant une valeur positive), alors que celui de l'équation (5.28) sera toujours positif. Sommairement, lorsque I est positif, H est compris entre zéro et $4d\sqrt{I}$ exclusivement.

Finalement, les différents types de solutions réalisables de l'équation (5.21) sont résumés dans le tableau 5.2. Évidemment, le cas intéressant est celui de la deuxième ligne ($\delta\varphi < 2a$), puisque c'est le seul qui possède des solutions réelles.

Conditions	Types de solutions
$I < 0$ ($\delta\varphi > 2a$)	4 imaginaires
$I > 0$ ($\delta\varphi < 2a$)	2 réelles et 2 imaginaires
$I = 0$ ($\delta\varphi = 2a$)	2 imaginaires

TAB. 5.2 – Types de solutions pour le paramètre h , considérant la dépendance entre H et I .

Les équations (5.17) et (5.21) permettent maintenant d'écrire les six solutions possibles pour la hauteur p du plateau central, sachant que $p = h + c$. Ces solutions sont regroupées dans le système suivant :

$$\begin{cases} p_{1,2} = \bar{\rho} + c & (5.29) \\ p_{3-6} = \bar{\rho} + c \pm \frac{1}{2}\sqrt{H \pm 4d\sqrt{I}} & (5.30) \end{cases}$$

avec

$$H = \delta\varphi^2 - 4(a^2 + b^2 + d^2) \quad (5.31a)$$

$$I = 4a^2 - \delta\varphi^2 \quad (5.31b)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (5.31c)$$

$$\delta\varphi = |\rho_1 - \rho_2| \quad (5.31d)$$

Sur ces six solutions, quatre sont réelles. Elles sont présentées schématiquement à la figure 5.2. Un seul de ces résultats est pourtant envisageable pour l'utilisation du mécanisme dans une scène de spectacle, soit la configuration (a). En effet, les trois autres ont toutes l'inconvénient de faire apparaître au-dessus des plateaux une ou plusieurs bielles, ce qui est évidemment inconcevable. De plus, dans ces trois configurations,

le moyennage de l'élément du centre n'est pas atteint. La seule position acceptable pour le plateau central est donc représentée par l'équation

$$p = \bar{p} + c - \frac{1}{2} \sqrt{H + 4d\sqrt{I}} \quad (5.32)$$

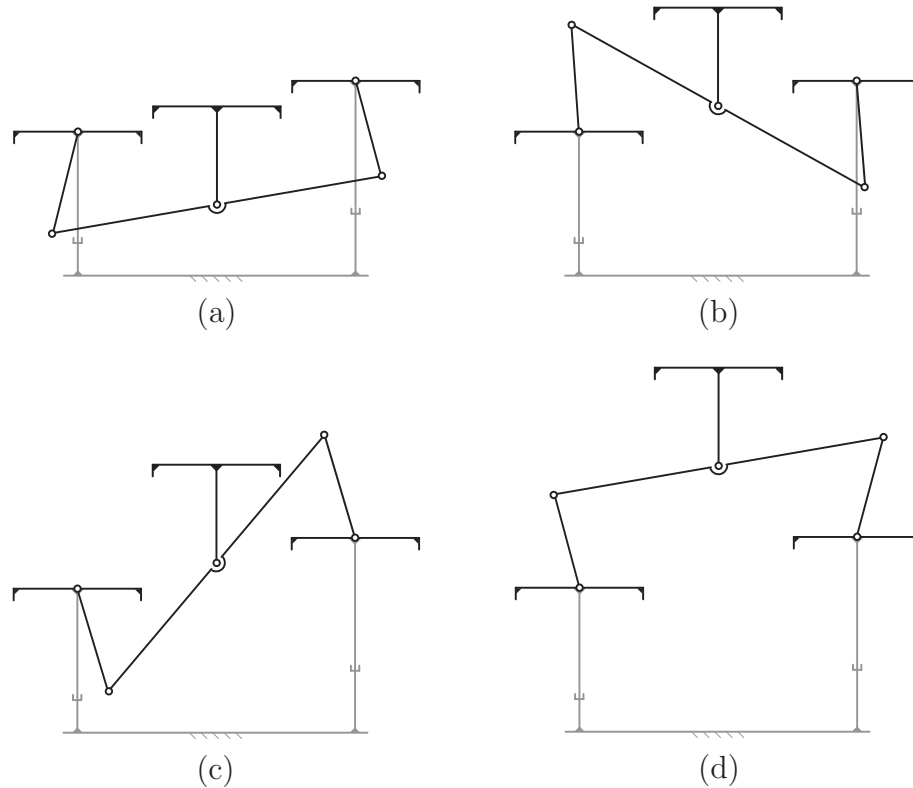


FIG. 5.2 – Les quatre branches de solutions réelles du problème géométrique direct du mécanisme de moyennage par bielles.

5.2.1.2 Orientation de la bielle centrale (θ)

On peut maintenant trouver l'orientation θ de la barre centrale. Évidemment, chaque branche de solution du problème géométrique direct possède sa propre orientation. Or, comme mentionnée précédemment, une seule configuration est possible pour ce genre d'application. Ainsi, seul l'angle associé à cette configuration est présenté dans ce qui suit.

À l'aide de la figure 5.1, on constate que la distance verticale entre les points A et B est la même que celle entre C et D . Donc, on peut dire que la distance verticale entre

A et C est la même que celle entre B et D , soit $\rho_2 - \rho_1$. Ceci permet de trouver l'angle θ :

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{2a} \right), \quad a \neq 0, \quad |\rho_2 - \rho_1| \leq 2a \quad (5.33)$$

Les équations (5.32) et (5.33) forment donc le problème géométrique direct de ce mécanisme de moyennage plan utilisé à titre de scène de spectacle mobile.

5.2.2 Problème géométrique inverse

Le problème géométrique inverse de ce mécanisme consiste à déterminer les longueurs des actionneurs (ρ_1 et ρ_2), qui sont en même temps les hauteurs des paliers latéraux, connaissant la pose du mécanisme, soit la hauteur du palier du milieu (p) ainsi que l'orientation de la membrure centrale (θ). On peut aussi dire qu'il s'agit de trouver les coordonnées articulaires en fonction de celles cartésiennes. De même que pour le problème géométrique direct, cette démarche est très importante pour le contrôle du mécanisme. Avec cette information, on est en mesure de connaître les positions que doivent prendre les actionneurs pour engendrer une configuration donnée du mécanisme.

Tout d'abord, connaissant la pose du mécanisme, il est facile de déterminer géométriquement — toujours à l'aide de la figure 5.1 — la position des points A (x_1, y_1) et C (x_2, y_2)

$$x_1 = -a \cos \theta \quad (5.34)$$

$$y_1 = h - a \sin \theta \quad (5.35)$$

$$x_2 = a \cos \theta \quad (5.36)$$

$$y_2 = h + a \sin \theta \quad (5.37)$$

où

$$h = p - c \quad (5.38)$$

On peut également écrire la position de ces points par l'entremise des barres latérales (reliant les points A et B ainsi que C et D); celles-ci décrivant des cercles autour des

points B et D :

$$(x_1 + d)^2 + (y_1 - \rho_1)^2 = b^2 \quad (5.39)$$

$$(x_2 - d)^2 + (y_2 - \rho_2)^2 = b^2 \quad (5.40)$$

La substitution des équations (5.34) à (5.37) dans (5.39) et (5.40) donne, après simplifications, les deux quadratiques en ρ_1 et ρ_2 suivantes :

$$\rho_1^2 + 2(a \sin \theta - h)\rho_1 + a^2 + d^2 + h^2 - b^2 - 2a(h \sin \theta + d \cos \theta) = 0 \quad (5.41)$$

$$\rho_2^2 - 2(h + a \sin \theta)\rho_2 + a^2 + d^2 + h^2 - b^2 + 2a(h \sin \theta - d \cos \theta) = 0 \quad (5.42)$$

qui possèdent deux solutions chacune, soit

$$\rho_1 = h - a \sin \theta \pm \sqrt{2ad \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta + b^2 - d^2} \quad (5.43)$$

$$\rho_2 = h + a \sin \theta \pm \sqrt{2ad \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta + b^2 - d^2} \quad (5.44)$$

Finalement, on réintroduit la hauteur de la marche centrale dans ces deux dernières équations à l'aide de l'équation (5.38), ce qui donne le problème géométrique inverse du mécanisme de moyennage :

$$\rho_1 = p - a \sin \theta - c + \gamma_1 \sqrt{\Lambda} \quad (5.45)$$

$$\rho_2 = p + a \sin \theta - c + \gamma_2 \sqrt{\Lambda} \quad (5.46)$$

avec

$$\gamma_i = \pm 1, \quad i = 1, 2 \quad (5.47)$$

$$\Lambda = 2ad \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta + b^2 - d^2 \quad (5.48)$$

où le facteur γ_i dépend de la branche de solution choisie pour la i ème patte. Notez également que le terme Λ représente un paramètre géométrique du mécanisme ; la racine carrée de Λ est la distance AB projetée sur l'axe BG .

Finalement, quatre solutions réelles sont possibles pour le problème géométrique inverse de ce mécanisme. Ces solutions sont représentées graphiquement à la figure 5.3. On remarque que pour une position du plateau médian ainsi qu'une orientation de la barre centrale donnée, il existe quatre combinaisons de hauteurs des plateaux latéraux. Par contre, dans l'application d'une scène de spectacle, seule la solution (a) est intéressante. En effet, dans les trois autres cas, des barres se retrouvent du côté supérieur des paliers, donc sur la scène. Cette situation n'est pas envisageable. De plus, pour les solutions

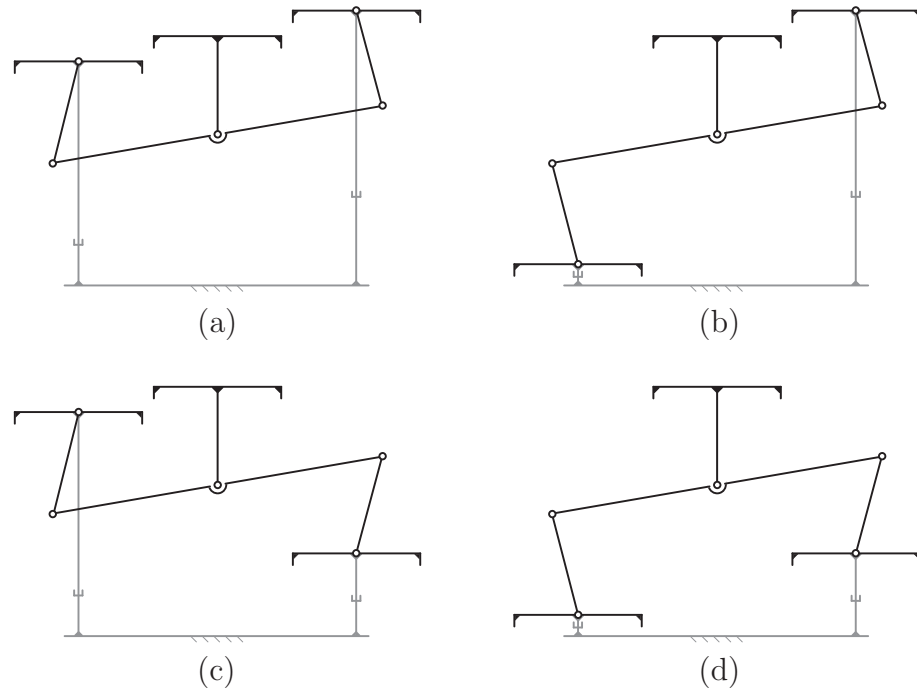


FIG. 5.3 – Les quatre branches de solutions du problème géométrique inverse du mécanisme de moyennage par bielles.

représentées en (b), (c) et (d), le moyennage du palier central n'est pas respecté. Pour ces raisons, seule la solution où toutes les barres se retrouvent sous les plateaux est retenue. Mathématiquement, cela se traduit dans les équations (5.45) et (5.46) par le cas où les facteurs γ_i sont positifs.

5.2.3 Équations de vitesse

Le contrôle du mécanisme nécessite la connaissance de la relation entre les vitesses articulaires et cartésiennes. Ce résultat sera également utile afin de définir les singularités du mécanisme. Pour obtenir cette relation, on dérive les équations du problème géométrique inverse⁴ — équations (5.45) et (5.46) — par rapport au temps. Ceci donne,

4. Notez que ceci n'est théoriquement valide que lorsque ρ_1 et ρ_2 sont à la fois positifs ou négatifs. En pratique, ces deux éléments étant des longueurs, ils sont toujours positifs ; cette analyse n'est donc pas limitative.

après réarrangement :

$$\sqrt{\Lambda}\dot{\rho}_1 = \sqrt{\Lambda}\dot{p} + a(\gamma_1(a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) - \sqrt{\Lambda} \cos \theta)\dot{\theta} \quad (5.49)$$

$$\sqrt{\Lambda}\dot{\rho}_2 = \sqrt{\Lambda}\dot{p} + a(\gamma_2(a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) + \sqrt{\Lambda} \cos \theta)\dot{\theta} \quad (5.50)$$

On peut également écrire ces équations de vitesse de façon matricielle

$$\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} \quad (5.51)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{\Lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Lambda} \end{bmatrix} \quad (5.52a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{\Lambda} & a(\gamma_1(a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) - \sqrt{\Lambda} \cos \theta) \\ \sqrt{\Lambda} & a(\gamma_2(a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) + \sqrt{\Lambda} \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (5.52b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & \dot{\rho}_2 \end{bmatrix}^T \quad (5.52c)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (5.52d)$$

où $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ sont respectivement les vecteurs des vitesses articulaires et cartésiennes alors que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont les jacobienues.

5.2.3.1 Singularités

Une portion importante de l'analyse des équations de vitesse consiste à trouver les configurations singulières. Ces configurations, qu'on nomme aussi lieux de singularités, font tout simplement référence à des postures du mécanisme qui engendrent une perte de rigidité de celui-ci. On peut aussi dire qu'à ces endroits, le système acquiert ou perd un ou plusieurs degrés de liberté. Cela entraîne la perte de contrôle du mécanisme. L'intérêt de cette section est donc de trouver ces singularités afin de pouvoir les éviter lors d'une éventuelle utilisation du mécanisme de moyennage.

De manière générale, il existe trois types de singularités pour les mécanismes parallèles [17], [18], par opposition à ceux sériels qui n'en possèdent qu'un seul. Ici, quelques informations générales sont données sur ce sujet, avant d'étudier plus précisément les cas relatifs au mécanisme de moyennage.

Premièrement, les singularités dites de type *I* se produisent lorsque la matrice jacobienne associée aux vitesses articulaires devient singulière. Dans le cas qui nous

concerne, il s'agit de la matrice \mathbf{B} . Or, cette matrice est singulière lorsque son déterminant est nul.

$$\text{Type } I \iff \det(\mathbf{B}) = 0 \quad (5.53)$$

Ainsi, ces lieux de singularités sont associés à une configuration pour laquelle le manipulateur est à la limite de son espace de travail ou est à une limite interne qui fait le lien entre deux régions où les problèmes géométriques inverses sont différents. Physiquement, ce type de singularités a comme conséquence de permettre aux actionneurs d'être mus localement sans que l'effecteur ne bouge.

Deuxièmement, les singularités de type *II* apparaissent lorsque la matrice jacobienne associée aux vitesses cartésiennes est singulière. Dans la notation proposée ici, il s'agit de la matrice \mathbf{A} . Cela permet d'écrire :

$$\text{Type } II \iff \det(\mathbf{A}) = 0 \quad (5.54)$$

Ces lieux de singularités correspondent à des configurations où deux branches du problème géométrique direct se rencontrent. Dans ce cas-ci, l'effecteur peut se déplacer localement même si les actionneurs sont bloqués.

Finalement, les singularités de type *III* sont différentes des deux autres puisqu'elles nécessitent des paramètres architecturaux spéciaux. De ce fait, elles peuvent, dans la plupart des cas, être évitées lors de la conception du mécanisme. Théoriquement, ces lieux de singularités correspondent à des postures où les équations de mouvement entre les coordonnées articulaires et cartésiennes dégénèrent.

Examinons maintenant les singularités du mécanisme de moyennage. Les déterminants des jacobienes sont :

$$\det(\mathbf{B}) = \Lambda \quad (5.55)$$

$$\det(\mathbf{A}) = a\sqrt{\Lambda} \left[2\sqrt{\Lambda} \cos \theta + (\gamma_2 - \gamma_1)(a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) \right] \quad (5.56)$$

En premier lieu, la matrice \mathbf{B} deviendra singulière lorsque Λ sera nul. Ceci correspond à l'équation suivante :

$$2ad \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta + b^2 - d^2 = 0 \quad (5.57)$$

On utilise la substitution $u = \cos \theta$ pour résoudre cette quadratique, ce qui donne après quelques manipulations :

$$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d \pm b}{a} \right), \quad a \neq 0 \quad (5.58)$$

Cette équation permet un maximum de

$$4 \text{ solutions si } a > d + b, \quad (5.59a)$$

$$3 \text{ solutions si } a = d + b, \quad (5.59b)$$

$$2 \text{ solutions si } d - b < a < d + b \text{ et } \quad (5.59c)$$

$$1 \text{ solution si } a = d - b \quad (5.59d)$$

Les quatre solutions possibles sont représentées à la figure 5.4. Ces lieux de singularités représentent les intersections des branches de solutions du problème géométrique inverse. On remarque que ceci correspond aux configurations où les barres latérales b sont horizontales. Finalement, une autre singularité de type I existe. Il s'agit des limites de l'espace de travail. Malheureusement, ce type de singularités n'apparaît pas dans l'analyse de la jacobienne \mathbf{B} , puisque les équations sont écrites en fonction des angles θ plutôt que des coordonnées articulaires. Par contre, on peut se convaincre que lorsque l'un des actionneurs atteindra une de ses limites — soit sa longueur minimale ou maximale ($\rho_i = \rho_{i_{min}}$ ou $\rho_{i_{max}}$, $i = 1, 2$) — il existera des vitesses cartésiennes qui ne pourront pas être produites à l'effecteur.

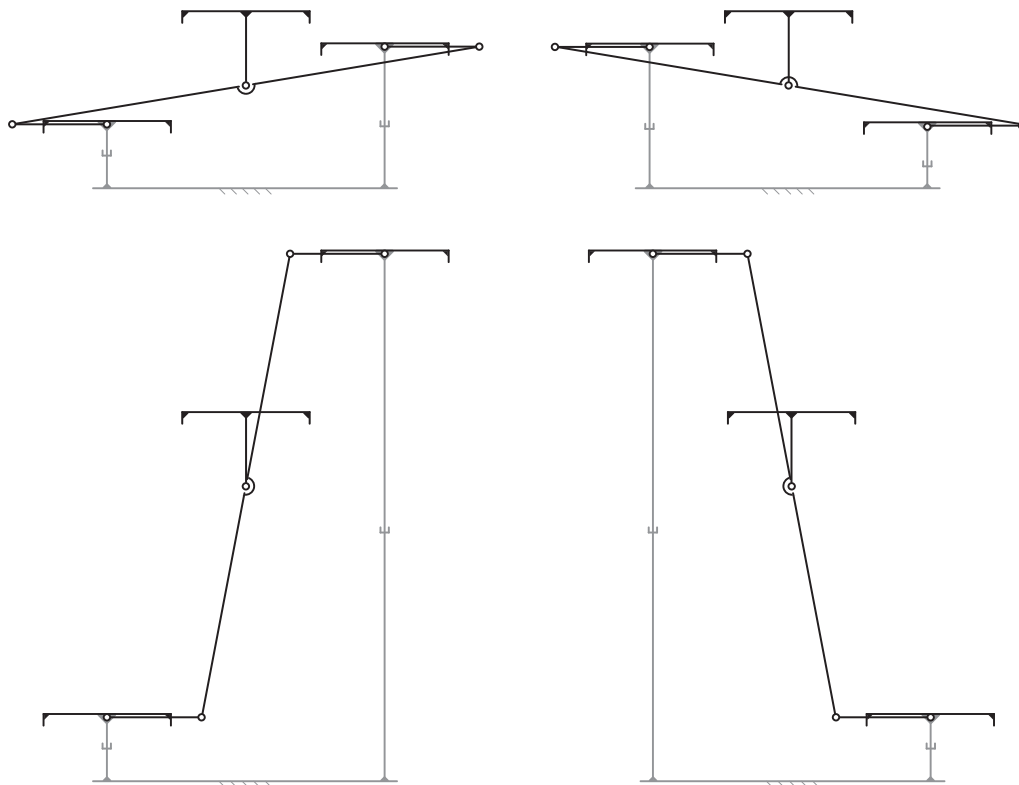


FIG. 5.4 – Quatre configurations singulières du mécanisme de moyennage plan.

En second lieu, on analyse les singularités du deuxième type. Selon l'équation (5.56), la matrice \mathbf{A} sera singulière lors des deux cas suivants :

$$\begin{cases} 2a\Lambda \cos \theta = 0, & \text{si } \gamma_1 = \gamma_2 \\ a\sqrt{\Lambda} \left[2\sqrt{\Lambda} \cos \theta \pm (a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) \right] = 0, & \text{si } \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases} \quad (5.60)$$

Ces deux dernières équations permettent de constater que les singularités de type *II* du mécanisme de moyennage sont fonction de la branche de solutions choisie pour le problème géométrique inverse.

Ainsi, dans un premier temps, la matrice \mathbf{A} sera singulière, et ce uniquement pour les deux branches de solutions représentées par l'équation (5.60), lorsque $\cos \theta$ sera nul. Cette singularité correspond à l'orientation

$$\theta = \frac{m\pi}{2}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (5.62)$$

soit lorsque la barre centrale est verticale. Ce cas est représenté à la figure 5.5. Dans cette situation, l'effecteur (le plateau central) peut subir un mouvement infinitésimal même si les actionneurs sont bloqués. Notez que cette singularité ne peut survenir qu'avec des paramètres géométriques spécifiques, soit lorsque les barres latérales b sont supérieures ou égales à la distance entre deux plateaux d ($b \geq d$).

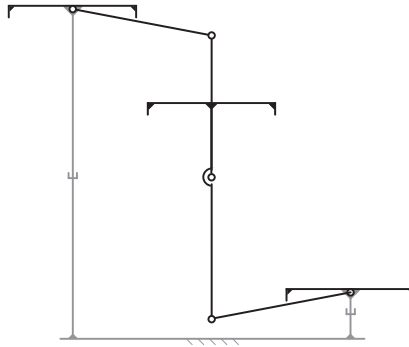


FIG. 5.5 – Une singularité de type *II*.

Dans un deuxième temps, il y a une singularité exclusive aux branches de solutions représentées par l'équation (5.61) lorsque

$$2\sqrt{\Lambda} \cos \theta \pm (a \cos \theta \sin \theta - d \sin \theta) = 0 \quad (5.63)$$

Or, en remplaçant la valeur de Λ dans cette dernière équation et en mettant le tout au carré, on obtient la quadratique en $\cos \theta$ suivante :

$$(b^2 - a^2) \cos^2 \theta + 2ad \cos \theta - d = 0 \quad (5.64)$$

qui possède quatre solutions pour θ , soit

$$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d}{a \pm b} \right) \quad (5.65)$$

Ces lieux de singularités sont schématisés à la figure 5.6. Ces configurations sont caractérisées par l'alignement des bielles latérales b avec la membrure centrale $2a$.

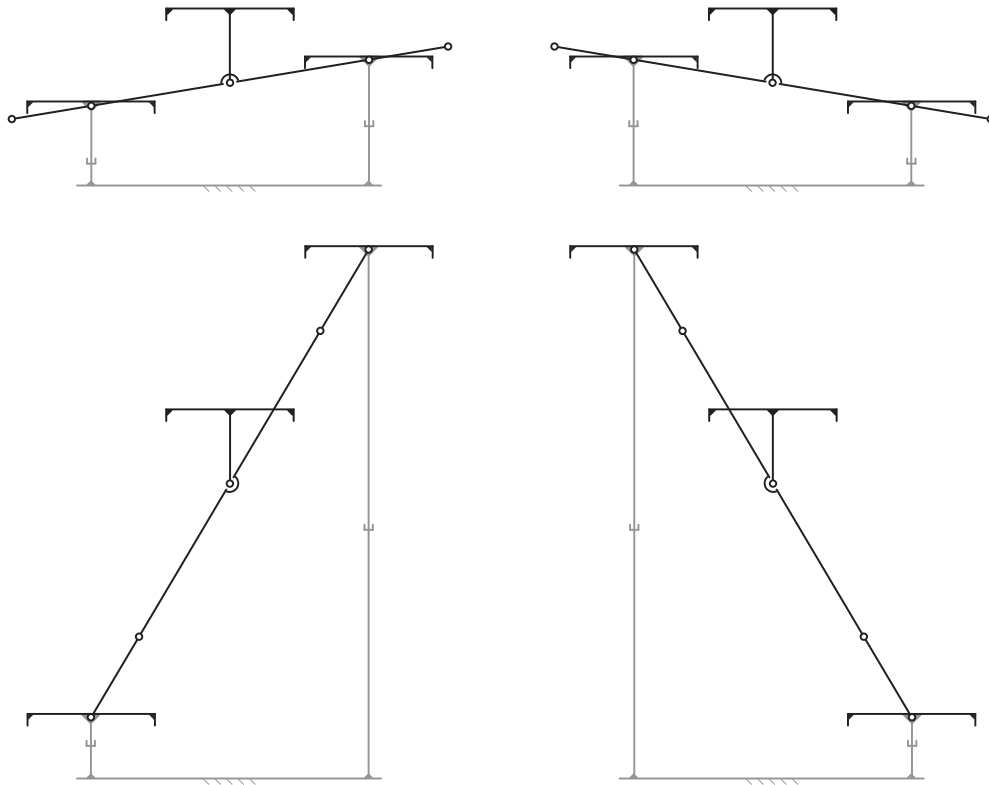


FIG. 5.6 – Quatre configurations singulières de type *II* du mécanisme de moyennage plan.

Finalement, deux cas entraînent des singularités de type *II* qui sont valides pour toutes les branches de solutions du problème géométrique inverse, soit lorsque a et Λ sont nuls. Ainsi, si la barre centrale est inexistante, le mécanisme est non fonctionnel. Autrement, les configurations où Λ est nul sont les mêmes qui ont été analysées pour la matrice \mathbf{B} (figure 5.4). Ainsi, à ces endroits, il existe conjointement des singularités des deux premiers types. Le lecteur remarquera que malgré le fait que les déterminants des deux matrices jacobiennes soient nuls, il ne s'agit pas d'une singularité de type *III*. Ici, les équations de mouvement entre les coordonnées articulaires et cartésiennes ne dégènèrent pas.

À titre récapitulatif, les différentes singularités pour ce mécanisme sont résumées dans le tableau 5.3.

Type de singularité	Conditions
<i>I</i>	$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d \pm b}{a} \right), \quad a \neq 0$
	$\rho_i = (\rho_{i_{min}} \text{ ou } \rho_{i_{max}}), \quad i = 1, 2$
<i>II</i>	$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d \pm b}{a} \right), \quad a \neq 0$
	$\theta = \frac{m\pi}{2}, \quad m = 1, 3, 5, \dots, \quad b \geq d, \quad a \neq 0$
	$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d}{a \pm b} \right)$
	$a = 0$
<i>III</i>	aucun cas connu

TAB. 5.3 – Résumé des singularités du mécanisme de moyennage.

Somme toute, cette portion de l'étude du mécanisme de moyennage permet de constater que la majorité des lieux de singularités sont présents, soit dans des branches de solutions du problème géométrique inverse qui n'ont aucun intérêt avec l'utilisation du mécanisme, soit dans des configurations marginales — par exemple, avec de grandes orientations de la barre centrale (2a) — ou lorsque les paramètres architecturaux sont disproportionnés — lorsque $a \geq d + b$ ou lorsque $a = d - b$. Ainsi, dans l'utilisation de ce mécanisme à titre de scène de spectacle, il sera possible d'éviter ces singularités en limitant l'orientation de la barre centrale et en choisissant judicieusement les dimensions des bielles. Cette tâche sera traitée avec plus de détails à la section 5.2.5. Finalement, les seules singularités qui ne peuvent pas être évitées lors de la conception sont celles rattachées aux limites physiques des actionneurs ($\rho_{i_{min}}$ et $\rho_{i_{max}}$).

5.2.4 Analyse des erreurs

Comme mentionné précédemment, le mécanisme de moyennage par bielles n'est pas parfait, en ce sens que les contremarches ne sont pas égales pour toutes les configurations du mécanisme. Cette section fait donc l'étude des erreurs de position générées par cette imperfection.

À partir du problème géométrique inverse, il est facile d'exprimer les valeurs des

contremarches h_1 et h_2 (en utilisant la configuration présentée à la figure 5.1).

$$\begin{aligned} h_1 &= |p - \rho_1| \\ &= |a \sin \theta + c - \sqrt{\Lambda}| \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} h_2 &= |\rho_2 - p| \\ &= |a \sin \theta - c + \sqrt{\Lambda}| \end{aligned} \quad (5.67)$$

Rappelons que $\Lambda = 2ad \cos \theta - a^2 \cos^2 \theta + b^2 - d^2$ (équation 5.48). On remarque, dans ces deux dernières équations, que les contremarches ne sont fonctions que de l'orientation du mécanisme (θ) et non pas de la hauteur absolue du plateau central (p). Ceci revient à dire que ces contremarches varient avec la différence de hauteur des paliers latéraux. On peut également remarquer que ces équations ne sont pas égales, ce qui prouve bien que le mécanisme de moyennage n'est pas parfait. On définit maintenant l'erreur perceptible (e_p) comme étant la différence positive entre les hauteurs h_1 et h_2 ($|h_1 - h_2|$). On utilise le terme visible puisqu'il s'agit d'une erreur qui peut être perçue facilement. Ainsi, si les contremarches ne sont pas de la même hauteur, on aura l'impression que l'erreur sera la différence entre les deux. Or, en introduisant dans cette erreur perceptible les équations (5.66) et (5.67), on obtient

$$\begin{aligned} e_p &= |h_1 - h_2| \\ &= ||p - \rho_1| - |\rho_2 - p|| \\ &= ||a \sin \theta + c - \sqrt{\Lambda}| - |a \sin \theta - c + \sqrt{\Lambda}|| \end{aligned} \quad (5.68)$$

Cette dernière équation est équivalente au système d'équations suivant :

$$e_p = \begin{cases} |2a \sin \theta|, & \text{si } (\rho_1 \text{ et } \rho_2) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} p \end{cases} \quad (5.69)$$

$$\begin{cases} |2\sqrt{\Lambda} - 2c|, & \text{si } (\rho_2 > p > \rho_1) \text{ ou si } (\rho_1 > p > \rho_2) \end{cases} \quad (5.70)$$

Malheureusement, cette erreur est relativement difficile à analyser en plus d'être quelque peu erronée ; elle ne représente pas exactement l'erreur créée.

Pour ces raisons, on définit l'erreur réelle comme étant la différence de hauteur positive entre la position du plateau central (p) et sa position idéale (p_i). On dit que cette erreur est réelle, puisque physiquement il s'agit de la distance manquante pour que le mécanisme soit parfaitement moyenné. Ainsi, pour que le moyennage soit parfait, la position du plateau central doit être à la mi-hauteur des plateaux latéraux ($p_i = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$). Ainsi, en utilisant les équations (5.45) et (5.46), on peut écrire l'expression de cette

erreur réelle :

$$\begin{aligned}
 e_r &= |p_i - p| \\
 &= \left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - p \right| \\
 &= |\sqrt{\Lambda} - c|
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

On remarque qu'en général, c'est-à-dire lorsque ($\rho_2 > p > \rho_1$) ou lorsque ($\rho_1 > p > \rho_2$), l'erreur perceptible est deux fois plus grande que celle réelle. Maintenant, afin d'éliminer la valeur absolue de l'équation (5.71), et ainsi faciliter l'analyse des extremums, on définit une nouvelle erreur nommée Δ qui est le carré de cette dernière

$$\Delta = e_r^2 = \Lambda - 2c\sqrt{\Lambda} + c^2 \tag{5.72}$$

Il est maintenant important de connaître les orientations θ de la barre centrale qui engendrent des erreurs minimales et maximales. Une fois ces cas connus, on sera en mesure de favoriser les poses du mécanisme où les erreurs sont les moins importantes. Pour ce faire, on calcule les extremums de Δ . Ces extremums sont calculés en utilisant la dérivée par rapport à θ .

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = 2a \sin \theta (a \cos \theta - d) \left(1 - \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \right), \quad \Lambda > 0 \tag{5.73}$$

Or, les extremums sont présents lorsque cette dérivée est nulle. Si on considère que a est une longueur et qu'on fait l'hypothèse que cette longueur ne peut être nulle, les extremums pour Δ , et par le fait même pour l'erreur réelle, sont trouvés lors des trois cas suivants :

$$\sin \theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.74}$$

$$a \cos \theta - d = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d}{a} \right), \quad a \geq d \tag{5.75}$$

$$\sqrt{\Lambda} = c \tag{5.76}$$

Analysons ces trois cas. Premièrement, l'équation (5.74) nous indique qu'un extremum est présent lorsque la barre centrale ($2a$) est horizontale. Deuxièmement, dans l'équation (5.75), on constate qu'un extremum ne peut exister, à cette orientation, que lorsque a est plus grand ou égal à d ; la fonction $\cos^{-1}(x)$ ne possédant une solution réelle que pour un argument (x) compris entre -1 et 1 inclusivement. De plus, dans le cas particulier où les paramètres a et d sont égaux, cet extremum se produira à un angle

$\theta = 0$, qui est à la même orientation que le cas de l'équation (5.74). Ceci permet de dire que pour que cet extremum soit distinct, il faut absolument que la demi-longueur de la barre centrale (a) soit supérieure à la distance entre deux plateaux (d). Finalement, un troisième extremum est atteint lorsque $\sqrt{\Lambda} = c$ (équation 5.76). Puisque ce cas est légèrement plus complexe, il est développé dans ce qui suit.

En introduisant la valeur de Λ (équation (5.48)) dans l'équation (5.76) et en réarrangeant les termes, on obtient

$$a^2 \cos^2 \theta - 2ad \cos \theta + c^2 + d^2 - b^2 = 0 \quad (5.77)$$

On utilise le changement de variable $u = \cos \theta$ dans cette dernière équation, ce qui donne la quadratique en u suivante :

$$a^2 u^2 - 2adu + c^2 + d^2 - b^2 = 0 \quad (5.78)$$

Les deux solutions de cette dernière équation sont

$$u_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{b^2 - c^2}}{a}, \quad a \neq 0 \quad (5.79)$$

Finalement, en réintroduisant $\cos \theta = u$, on obtient les angles associés à ces extremums

$$\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d \pm \sqrt{b^2 - c^2}}{a} \right), \quad a \neq 0, \quad a \geq |d \pm \sqrt{b^2 - c^2}|, \quad b \geq c \quad (5.80)$$

Ces trois familles d'extremums ayant été trouvées, il est maintenant important de définir la nature de ceux-ci. Pour ce faire, on remplace les équations (5.74), (5.75) et (5.76) dans la dérivée seconde de Δ . Si cette dérivée est positive, en ces points, il s'agit d'un minimum alors que si elle est négative, il s'agit d'un maximum (notez que lorsqu'elle est nulle, on ne peut rien stipuler). Malheureusement, on ne peut pas définir par cette méthode si les extremums sont locaux ou globaux.

La dérivée seconde de Δ s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta}{d\theta^2} = & 2a (\cos \theta (a \cos \theta - d) - a \sin^2 \theta) - \\ & \frac{2ac}{\sqrt{\Lambda}} (\cos \theta (a \cos \theta - d) - a \sin^2 \theta) + \frac{2a^2 c \sin^2 \theta (a \cos \theta - d)^2}{\Lambda^{3/2}} \end{aligned} \quad (5.81)$$

5.2.4.1 Première famille d'extremums

Le premier extremum à analyser est celui de l'équation (5.74), soit lorsque la barre centrale est horizontale. Deux orientations distinctes peuvent engendrer ce cas : lorsque θ est nul ou lorsque θ est de 180° . Ainsi, on remplace dans l'équation (5.81) ces deux possibilités et on obtient les deux équations suivantes :

$$\left. \frac{d^2\Delta}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = 2a(a-d) \left(1 - \frac{c}{\sqrt{b^2 - (a-d)^2}} \right) \quad (5.82)$$

$$\left. \frac{d^2\Delta}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi} = 2a(a+d) \left(1 - \frac{c}{\sqrt{b^2 - (a+d)^2}} \right) \quad (5.83)$$

Orientation I ($\theta = 0$)

Commençons par l'équation (5.82). Il y a un minimum à $\theta = 0$, lorsque cette expression est positive. Or, ceci peut se produire dans les deux cas suivants :

$$a \geq d \quad \& \quad b^2 - (a-d)^2 > c^2, \quad c \neq 0, \quad \text{ou} \quad (5.84)$$

$$a \leq d \quad \& \quad 0 < b^2 - (a-d)^2 < c^2 \quad (5.85)$$

D'un autre côté, il y a un maximum lorsque l'équation (5.82) est négative ; situation qui se produit lorsque

$$a \leq d \quad \& \quad b^2 - (a-d)^2 > c^2, \quad c \neq 0, \quad \text{ou lorsque} \quad (5.86)$$

$$a \geq d \quad \& \quad 0 < b^2 - (a-d)^2 < c^2 \quad (5.87)$$

Finalement, si l'équation (5.82) est nulle, il n'est pas possible de définir, par cette méthode, s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Cette situation survient dans les deux cas suivants :

$$a = d, \quad \text{ou} \quad (5.88)$$

$$c^2 = b^2 - (a-d)^2 \quad (5.89)$$

Pour vérifier la nature des extremums de ces deux derniers cas, il faudrait redériver Δ jusqu'à ce que

$$\left. \frac{d^n\Delta}{d\theta^n} \right|_{\theta=0} \neq 0 \quad (5.90)$$

Ainsi, si n était impair et que cette dérivée était positive, il s'agirait d'un minimum, alors que si elle était négative, il s'agirait d'un maximum. Dans le cas où n serait pair, l'extremum serait en fait un point d'inflexion. Or, puisque la dérivée de Δ devient de plus en plus complexe au fur et à mesure que n augmente, cette analyse n'est pas faite. Les points importants sont plutôt analysés en utilisant une autre méthode, alors que ceux plus marginaux sont laissés en suspend. Ainsi, on peut définir la nature de l'extremum lorsque $c^2 = b^2 - (a - d)^2$ (équation (5.89)) en remplaçant cette équation et celle (5.74) dans Δ (équation (5.72)). Le résultat de ceci donne une erreur nulle. Finalement, puisque l'erreur Δ doit — par définition — toujours être positive, cet extremum est donc un minimum global. Ceci permet d'écrire une première constatation.

Constatation 5.1 *Le mécanisme de moyennage plan peut être parfaitement moyenné à une orientation θ nulle — et de cette manière les trois plateaux sont parfaitement alignés — si et seulement si les paramètres géométriques respectent les proportions fournies par l'équation : $c^2 = b^2 - (a - d)^2$.*

Orientation II ($\theta = \pi$)

Analysons maintenant le deuxième cas de cette famille où θ est égal à π , représenté par l'équation (5.83). Encore une fois, si on fait l'hypothèse que a et d sont positifs (il s'agit de longueurs), il y a un minimum à $\theta = \pi$ lorsque cette équation est positive, soit lorsque

$$b^2 - (a + d)^2 > c^2 \quad (5.91)$$

De plus, il y a un maximum lorsque

$$0 < b^2 - (a + d)^2 < c^2 \quad (5.92)$$

Finalement, on ne peut rien dire sur la nature de l'extremum lorsque

$$b^2 - (a + d)^2 = c^2, \quad c > 0 \quad (5.93)$$

Évidemment, la deuxième orientation de cette famille donne des résultats qui ne sont intéressants qu'en théorie. Effectivement, il semble peu probable que, dans l'application d'une scène de spectacle, on fasse pivoter la barre centrale de 180° .

5.2.4.2 Deuxième famille d'extremums

La deuxième famille d'extremums se situe aux orientations $\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d}{a} \right)$ (équation (5.75)). Or, si on remplace cette valeur de θ dans la dérivée seconde de Δ (équation (5.81)), on obtient

$$\left. \frac{d^2 \Delta}{d\theta^2} \right|_{a \cos \theta = d} = 2a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{c}{b} - 1 \right) \quad (5.94)$$

On trouve des minimums à ces orientations si cette dernière est positive ; ce qui est le cas lorsque c est supérieur à b . D'autre part, ces positions angulaires laissent apparaître des maximums lorsque l'équation (5.94) est négative, ce qui advient lorsque c est inférieur à b . Finalement, si ces deux dimensions (c et b) sont équivalentes, on ne peut rien dire sur la nature des extremums, puisque la dérivée seconde est nulle. Encore une fois, ce cas spécifique ($c = b$) n'est pas traité plus profondément.

Le cas le plus intéressant de cette famille est celui où $c < b$ (on verra plus loin pourquoi). Or, sous ces conditions, on trouve un maximum. On peut donc remplacer l'équation (5.75) dans Δ (équation (5.72)) pour connaître la magnitude de cette erreur. Après simplifications, on trouve que cette erreur n'est fonction que des longueurs des bielles b et c :

$$\Delta = (b - c)^2, \quad \text{lorsque } \theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d}{a} \right) \text{ et } b > c \quad (5.95)$$

5.2.4.3 Troisième famille d'extremums

Finalement, la troisième famille d'extremums est présente lorsque Λ est égal à c^2 (équation (5.76)). Encore une fois, on remplace cette expression dans la dérivée seconde de Δ , ce qui donne

$$\left. \frac{d^2 \Delta}{d\theta^2} \right|_{\Lambda=c^2} = \frac{2a^2 \sin^2 \theta (a \cos \theta - d)^2}{c^2} \quad (5.96)$$

Si on élimine les cas où la barre centrale est horizontale (ceux-ci ayant été traités dans la première famille d'extremums), cette dernière équation est toujours positive ; il s'agit donc d'un minimum. Pour avoir plus de précisions sur ce minimum, on peut remplacer l'expression $\Lambda = c^2$ dans Δ (équation (5.72)) afin de connaître la magnitude de cette erreur. On obtient une erreur nulle. Ceci permet de dire qu'il s'agit d'un minimum global. Or, selon l'équation (5.80), le moyennage du plateau central sera parfait lorsque

l'orientation de la barre centrale sera à des angles $\theta = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d \pm \sqrt{b^2 - c^2}}{a} \right)$. On remarque que cette équation possède

$$4 \text{ solutions réelles si } a > d + \sqrt{b^2 - c^2} \quad (5.97a)$$

$$3 \text{ solutions réelles si } a = d + \sqrt{b^2 - c^2} \quad (5.97b)$$

$$2 \text{ solutions réelles si } d + \sqrt{b^2 - c^2} > a > d - \sqrt{b^2 - c^2} \quad (5.97c)$$

$$1 \text{ solution réelle si } a = d - \sqrt{b^2 - c^2} \quad (5.97d)$$

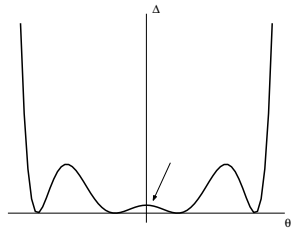
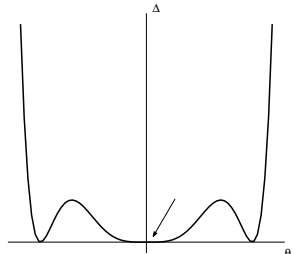
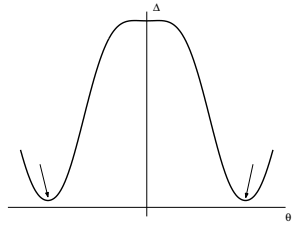
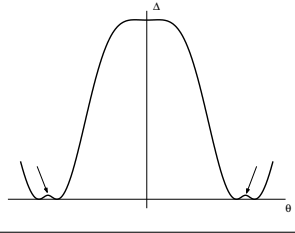
Dans tous les cas, b doit être supérieur ou égal à c . Or, l'équation qui dicte la situation à trois solutions réelles ($a = d + \sqrt{b^2 - c^2}$) est un cas particulier de celle (5.89) ($c^2 = b^2 - (a - d)^2$). Ces dernières informations permettent d'écrire une deuxième constatation.

Constatation 5.2 *Le mécanisme de moyennage plan peut être dans une configuration parfaite à un maximum de quatre orientations différentes et ce, si et seulement si $a > d + \sqrt{b^2 - c^2}$ et $b \geq c$. Par contre, dans ces circonstances, le moyennage parfait à un angle θ nul est irréalisable. Lorsqu'on impose une configuration parfaite à l'horizontale ($\theta = 0$), trois orientations, au maximum, peuvent donner des erreurs nulles, et ce, si et seulement si $a = d + \sqrt{b^2 - c^2}$ et $b > c$.*

5.2.4.4 Interprétation

Le tableau 5.4 résume les différents extremums du mécanisme de moyennage plan. Comme on peut le constater dans ce tableau, les extremums sont fonctions des paramètres géométriques du mécanisme. Il est ainsi possible de définir les longueurs des bielles en fonction des attentes du mécanisme afin de favoriser certains minimums. Ainsi, dans l'utilisation du système de moyennage pour une scène de spectacle, il est nécessaire de fournir une configuration parfaitement horizontale, donc une erreur Δ nulle à une orientation θ nulle (θ_0). Comme mentionné dans la constatation 5.1, cette condition implique la relation géométrique suivante : $c^2 = b^2 - (a - d)^2$. Ensuite, il est souhaitable d'obtenir le plus de configurations parfaites possible. À cet effet, la constatation 5.2 nous indique que deux autres orientations parfaites sont réalisables lorsque $a = d + \sqrt{b^2 - c^2}$. Ces deux orientations sont $\theta_{1,2} = \pm \cos^{-1} \left(\frac{2d-a}{a} \right)$. Finalement, ces deux dernières conditions impliquent que b est supérieur à c , donc qu'il y a deux maximums locaux aux orientations $\theta_{3,4} = \pm \cos^{-1} \left(\frac{d}{a} \right)$. L'amplitude de ces erreurs est $(b - c)^2$, selon l'équation (5.95). La figure 5.7 présente le graphique de l'erreur Δ en fonction de θ sous les conditions qui viennent d'être présentées.

Paramètres du mécanisme			
Positions (θ)	Extremums	Conditions	Visualisation
$\theta = \pm \cos^{-1}\left(\frac{d}{a}\right),$ $a \geq d, a \neq 0$	minimums	$c > b$	
	maximums	$c < b$	
	?	$c = b$	
$\theta = \pm \cos^{-1}(\psi),$ $\psi = \frac{d \pm \sqrt{b^2 - c^2}}{a}$	minimums globaux ($\Delta = 0$)	$b \geq c$ & $a \geq d \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ & $a \neq 0, c \neq 0$	
$\theta = m\pi,$ $m = 0, 2, 4, \dots$	minimums	$a > d$ & $b^2 - (a - d)^2 > c^2$ ——— ou ——— $a < d$ & $0 < b^2 - (a - d)^2 < c^2$	

Positions (θ)	Extremums	Conditions	Visualisation
$\theta = m\pi,$ $m = 0, 2, 4, \dots$ (suite)	maximums	$a > d$ & $0 < b^2 - (a - d)^2 < c^2$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> ou $a < d$ & $b^2 - (a - d)^2 > c^2$	
	minimums globaux ($\Delta = 0$)	$b^2 - (a - d)^2 = c^2$	
	?	$a = d$	
$\theta = k\pi,$ $k = 1, 3, 5, \dots$	minimums	$b^2 - (a + d)^2 > c^2$	
	maximums	$0 < b^2 - (a + d)^2 < c^2$	
	?	$b^2 - (a + d)^2 = c^2$	

TAB. 5.4 – Résumé des extremums de l'erreur Δ .

5.2.5 Optimisation des paramètres géométriques

Avec les outils développés précédemment et les constatations faites, il est possible d'optimiser les paramètres géométriques du mécanisme de moyennage pour son utilisation à titre de scène de spectacle. Ici, l'aspect le plus important est la minimisation des erreurs pour toute la plage d'utilisation du mécanisme. Il a été démontré, dans le chapitre précédent, que cette erreur n'est pas fonction de la hauteur brute du plateau

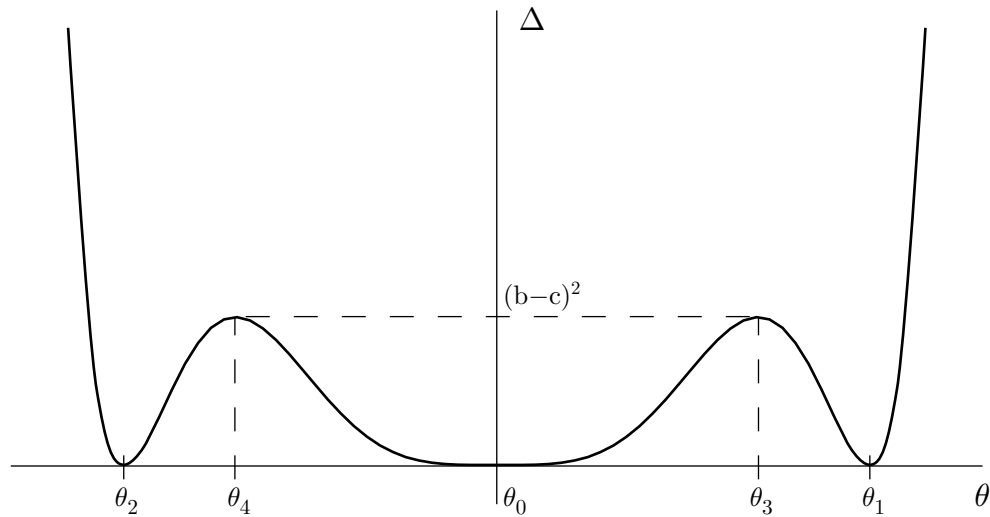


FIG. 5.7 – Erreur Δ en fonction de l’orientation θ de la barre centrale, sous certaines conditions particulières.

central, mais plutôt de la différence de hauteur des plateaux latéraux. L’amplitude de l’erreur est donc directement reliée à l’orientation de la bielle centrale θ . La méthode de minimisation des erreurs globales proposée ici consiste à définir les longueurs des bielles, de sorte que l’espace de travail du mécanisme demeure entre les orientations parfaites θ_1 et θ_2 (figure 5.7). On remarque qu’à l’extérieur de cet intervalle, l’erreur Δ augmente très rapidement. Cette méthode permet donc d’éviter ces deux régions critiques. De plus, en procédant de cette manière, on est en mesure de connaître les orientations qui donneront des erreurs maximales, soit θ_3 et θ_4 , et leur magnitude, soit $(b - c)^2$. En somme, la technique consiste à définir les dimensions des bielles à partir d’une plage de travail angulaire afin qu’il y ait des configurations de moyennage parfaites aux extrémités de l’espace de travail ainsi qu’à une orientation nulle.

Évidemment, tous les paramètres géométriques de ce mécanisme ne peuvent pas être optimisés, certains étant contraints par d’autres aspects techniques. Ainsi, la distance entre les plateaux (d) est une valeur qui est définie par la dimension des éléments mobiles. Elle est donc une constante dans cette optimisation. Ensuite, la distance c permet un dégagement entre les plateaux et les bielles. Or, malgré le fait que cette valeur possède une certaine souplesse, on considérera en première analyse qu’il s’agit d’une constante. Finalement, les bielles latérales et celle centrale sont mutuellement dépendantes par l’équation $a = d + \sqrt{(b^2 - c^2)}$ afin de respecter la configuration parfaite à un angle nul. Il reste donc un seul paramètre qui peut être optimisé, soit b ou a . On

choisit a de manière tout à fait arbitraire.

Pour optimiser la demi-longueur de la barre centrale, on pourrait exprimer celle-ci à l'aide des orientations angulaires θ . Malheureusement, avec ces angles, il est difficile de se faire une représentation physique simple de la configuration du mécanisme. Ainsi, on peut remarquer que lorsque le mécanisme est à une orientation différente de celle horizontale, les éléments mobiles forment un escalier. Il semble donc plus approprié, dans les circonstances, d'utiliser la hauteur des contremarches pour exprimer l'orientation du mécanisme.

Voici la démarche utilisée pour trouver la dimension optimale de a . On débute par l'addition des hauteurs des contremarches présentées aux équations (5.66) et (5.67), ce qui donne

$$h_1 + h_2 = 2a \sin \theta \quad (5.98)$$

Maintenant, considérant que le mécanisme est dans l'une des deux orientations, θ_1 ou θ_2 , présentant un moyennage parfait (figure 5.7), les hauteurs des contremarches sont donc égales. On définit cette hauteur par h_s , pour hauteur solution, et son orientation associée par θ_s , pour angle solution.

$$h_s \equiv h_1 \equiv h_2, \quad \text{lorsque } \theta = \theta_1 \text{ ou } \theta_2 \text{ } (\theta_s) \quad (5.99)$$

Ceci permet de réécrire l'équation (5.98)

$$a = \frac{h_s}{\sin \theta_s} \quad (5.100)$$

Finalement, la substitution de l'angle solution (équation (5.80)) dans cette dernière donne la dimension que doit avoir la demi-longueur de la bielle centrale, soit

$$a = d + \frac{h_s^2}{4d} \quad (5.101)$$

Ces dernières informations permettent de proposer une méthode pour définir les paramètres géométriques du mécanisme de moyennage tout en minimisant les erreurs de position du plateau central.

5.2.5.1 Méthode de calcul des paramètres géométriques

Voici une méthode qui permet de trouver les paramètres géométriques optimaux du mécanisme de moyennage plan pour son utilisation à titre de scène mobile.

Étape I En fonction de la dimension des modules désirée, définir les distances entre les plateaux d ainsi que celle de dégagement c .

Étape II Choisir une hauteur de contremarche maximale h_s .

Étape III Calculer la demi-longueur de la barre centrale à partir de l'équation (5.101)
 $(a = d + \frac{h_s^2}{4d})$.

Étape IV Calculer la dimension des bielles latérales b à l'aide de l'équation (5.89)
 $(b = \sqrt{c^2 + (a - d)^2})$.

5.2.5.2 Exemple numérique

Cette section présente un exemple numérique de l'utilisation de la méthode de calcul des paramètres géométriques. Cet exemple permet de tirer une conclusion importante.

Posons tout d'abord les distances entre les plateaux mobiles et celle de dégagement comme étant respectivement de un mètre et de 25 centimètres. Ensuite, établissons une hauteur de contremarche maximale de 30 centimètres. On peut maintenant calculer, à l'aide des étapes III et IV, les longueurs des bielles a et b , ce qui donne :

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{0,30^2}{4} \\ &= 1,023 \text{ m} \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{0,25^2 + (1,023 - 1)^2} \\ &= 0,251 \text{ m} \end{aligned} \tag{5.103}$$

À titre d'exemple, la figure (5.8) présente un mécanisme ayant des bielles respectant ces proportions.

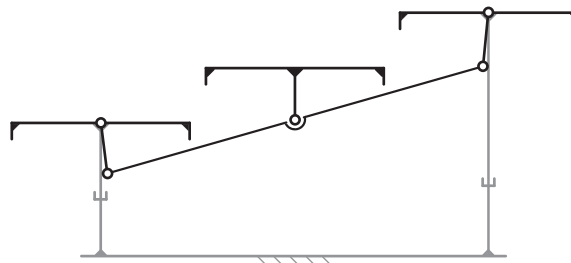


FIG. 5.8 – Proportions des composantes mécaniques du mécanisme de moyennage pour l'exemple numérique de la section 5.2.5.2.

Finalement, on peut s'interroger sur l'erreur maximale de position que générera ce mécanisme. On sait, dans ces conditions, que Δ est égale à $(b - c)^2$. Puisque Δ est le carré de l'erreur réelle (équation (5.72)), cette dernière sera

$$e_r = b - c = 0,001 \text{ m} \quad (5.104)$$

Ainsi, l'erreur maximale de ce mécanisme est de seulement un millimètre. Celle-ci est donc négligeable lorsqu'on la compare avec l'écart entre les marches (30 centimètres).

Sommairement, les paramètres géométriques du mécanisme de moyennage peuvent être optimisés de manière à réduire l'erreur de positionnement du plateau central à une valeur négligeable. Or, si cette erreur est négligeable, il est possible de simplifier les équations de la cinématique du système. Ceci est fait dans la section suivante.

5.2.6 Cinématique simplifiée

L'optimisation des paramètres géométriques du mécanisme a permis de constater que, dans certaines circonstances, l'erreur maximale de position est négligeable. Ainsi, dans le cas où cette erreur est négligeable pour tout l'espace de travail du système, il est possible de supposer que le mécanisme est parfaitement moyenné dans toutes les orientations. Ceci revient à dire que le plateau central est toujours à la hauteur médiane de ceux latéraux. Conséquemment, l'angle θ représente à la fois l'orientation de la bielle centrale et celle d'une droite passant par les points centraux des trois plateaux (points B , F , et D de la figure 5.1). Ces suppositions permettent de simplifier les équations du problème géométrique direct (équations (5.32) et (5.33)), pour obtenir celles-ci :

$$p \simeq \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (5.105)$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{2a} \right) \quad (5.106)$$

De même, les équations du problème géométrique inverse (équations (5.45) et (5.46)) peuvent être allégées

$$\rho_1 \simeq p - a \sin \theta \quad (5.107)$$

$$\rho_2 \simeq p + a \sin \theta \quad (5.108)$$

Notez que ces deux problèmes géométriques n'illustrent que la configuration de la figure 5.1. Les autres branches de solutions étant ici laissées pour contre.

En terminant, l'utilisation de ces dernières équations doit être faite avec précaution. En effet, ces résultats ne sont valides que si l'erreur perceptible du mécanisme est négligeable pour tout l'espace de travail du mécanisme.

5.3 Modèle dynamique

Le modèle dynamique permet de connaître les efforts que doivent fournir les actionneurs afin de faire bouger le mécanisme selon certaines vitesses et accélérations. À cet effet, la méthode présentée ici est tout à fait générale.

5.3.1 Méthodologie

Cette section présente l'approche mathématique utilisée pour obtenir les équations dynamiques du système. Les sections subséquentes offriront plus de détails sur les paramètres physiques cités dans ce qui suit.

La méthode trouve ses racines dans l'équation de Newton-Euler :

$$\sum \mathbf{f} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (5.109)$$

où \mathbf{f} est le vecteur des forces et des moments appliqués sur le système, \mathbf{M} , la matrice des masses et des inerties des différents corps composant le mécanisme et $\ddot{\mathbf{y}}$, le vecteur des accélérations. Les efforts sur le système peuvent être décomposés en deux parties, soit les forces et moments appliqués par des éléments extérieurs \mathbf{f}_a — dans le cas qui nous concerne, les actionneurs — ainsi que ceux engendrés par la gravité \mathbf{f}_g . On écrit donc

$$\sum \mathbf{f} = \mathbf{f}_a - \mathbf{f}_g \quad (5.110)$$

Dans l'application d'une scène de spectacle, la gravité sera dans la direction négative de l'axe y .⁵ Voilà pourquoi ces deux vecteurs sont de signes opposés. On ajoute ensuite à ces équations les vitesses virtuelles associées aux efforts ($\delta\mathbf{x}_a$, $\delta\mathbf{x}_g$ et $\delta\mathbf{x}_i$) pour obtenir l'équation des puissances virtuelles du système :

$$\delta\mathbf{x}_a^T \mathbf{f}_a - \delta\mathbf{x}_g^T \mathbf{f}_g - \delta\mathbf{x}_i^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}) = 0 \quad (5.111)$$

5. Pour visualiser le mécanisme par rapport aux axes principaux, référez-vous à la figure 5.1

Maintenant, puisque les positions d'application des efforts de gravité et d'inerties sont tous deux les centres de masses des différents corps, leur vitesse virtuelle respective ($\delta \mathbf{x}_g$ et $\delta \mathbf{x}_i$) est la même. On regroupe donc la position et l'orientation des centres de masses dans le vecteur \mathbf{y} , ce qui permet d'écrire :

$$\delta \mathbf{x}_g = \delta \mathbf{x}_i = \delta \mathbf{y} \quad (5.112)$$

De plus, la position et l'orientation des points où sont transmis les efforts externes (\mathbf{f}_a) sont regroupées dans le vecteur \mathbf{z}

$$\delta \mathbf{x}_a = \delta \mathbf{z} \quad (5.113)$$

Ainsi, en remplaçant les deux dernières expressions dans l'équation (5.111), on obtient

$$\delta \mathbf{z}^T \mathbf{f}_a - \delta \mathbf{y}^T \mathbf{f}_g - \delta \mathbf{y}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}) = 0 \quad (5.114)$$

Supposons maintenant qu'il soit possible d'exprimer les vecteurs $\dot{\mathbf{y}}$ et $\dot{\mathbf{z}}$ en fonction de coordonnées généralisées ($\mathbf{x} = [p \ \theta]^T$)⁶ en utilisant les matrices \mathbf{T} et \mathbf{R} , selon les équations suivantes :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T} \dot{\mathbf{x}} \quad (5.115)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}} \quad (5.116)$$

alors, il est possible de faire de même pour les vitesses virtuelles.

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{T} \delta \mathbf{x} \quad (5.117)$$

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{R} \delta \mathbf{x} \quad (5.118)$$

Maintenant, pour obtenir l'accélération des centres de masse des corps ($\ddot{\mathbf{y}}$), on dérive l'équation (5.115), ce qui donne :

$$\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{T}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{T} \ddot{\mathbf{x}} \quad (5.119)$$

Finalement, en introduisant les équations (5.117) à (5.119) dans l'équation (5.114), et après quelques manipulations algébriques, on obtient le modèle dynamique du mécanisme de moyennage plan :

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{R}^{-T} (\mathbf{T}^T \mathbf{f}_g + \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{W} \ddot{\mathbf{x}}) \quad (5.120)$$

avec

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{T}} \quad (5.121a)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (5.121b)$$

6. Dans ce qui suit, les coordonnées généralisées seront donc les coordonnées cartésiennes.

Ces équations sont tout à fait générales. Heureusement, comme on le verra dans ce qui suit, la version bidimensionnelle du moyennage permet de faire plusieurs simplifications.

5.3.2 Matrice \mathbf{T}

La matrice jacobienne \mathbf{T} fait le lien entre les vitesses cartésiennes et les vitesses des centres de masse des différents corps. Ici, six corps constituent le mécanisme de moyennage. Certains peuvent par contre être combinés pour simplifier les équations. Ainsi, si on considère que les bielles latérales sont identiques, il est possible de combiner les masses de ces barres à celles de leur plateau mobile respectif. Physiquement, ces deux barres ont toujours des mouvements de rotation qui sont de sens, de vitesses et d'accélération opposés. Or, si on considère que leurs masses et leurs inerties sont les mêmes, leurs composantes dynamiques en rotation ainsi que celles selon l'axe x seront toujours mutuellement annulées. En fait, seules les composantes dynamiques selon l'axe y ne sont pas nulles, puisque les bielles latérales n'ont pas toujours des mouvements cinématiques opposés selon cet axe. On peut donc rapporter ces masses à d'autres corps qui ont les mêmes déplacements. Ainsi, on combine les masses du plateau et de la bielle de gauche au centre de masse cm_1 , alors qu'on joint celles du plateau et de la bielle de droite au centre de masse cm_2 (figure 5.9). De cette manière, on considère que les plateaux latéraux et leur barre latérale associée ont des déplacements verticaux identiques. Par cette simplification, on néglige la légère variation de différence de hauteur entre le centre de masse d'un plateau et celui de sa bielle latérale (occasionnée par la rotation de cette dernière). Cette simplification ne modifie pas de façon notable les résultats du modèle dynamique. Par contre, cela permet d'alléger grandement les équations.

On commence par écrire la position et l'orientation des centres de masse des deux premiers corps, soit les ensembles des bielles et des plateaux latéraux (l'indice 1 fait référence aux éléments de gauche alors que le 2 est associé à ceux de droite).

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -d & \rho_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.122)$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} d & \rho_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.123)$$

Pour un mécanisme plan, les vecteurs position-orientation sont de dimension 3×1 , où les deux premiers éléments sont les positions en x et en y des centres de masse et où le

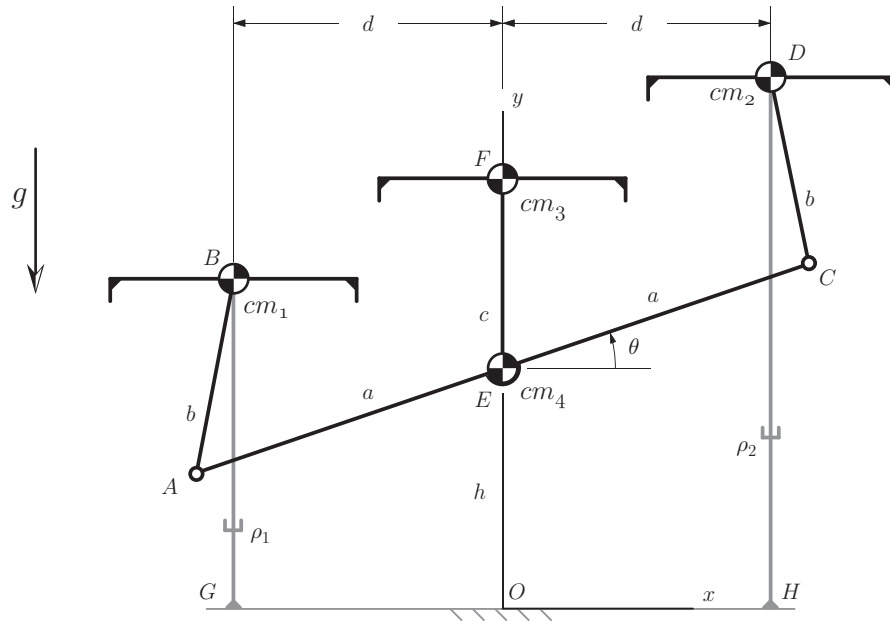


FIG. 5.9 – Positions des centres de masse des différents corps du mécanisme de moyennage plan dans le champ gravitationnel g .

troisième est l'orientation par rapport à l'axe x , positive dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Or, pour ces deux corps, les centres de masse peuvent être positionnés n'importe où le long de l'axe de déplacement de leur vérin respectif. En effet, puisque le seul degré de liberté de ces corps est le déplacement vertical, les positions des centres de masse selon l'axe y n'a pas d'importance, en autant qu'elles soient fonction de la longueur des vérins (ρ_i). On place donc arbitrairement cm_1 et cm_2 aux points B et D . Pour ce qui est des orientations, il est facile de voir que celles-ci demeureront constantes peu importe les trajectoires du mécanisme. Ainsi, encore de façon arbitraire, on choisit des orientations nulles pour les corps latéraux.

Similairement à ceci, les vecteurs position-orientation du plateau central (\mathbf{y}_3) et de la barre centrale (\mathbf{y}_4) sont donnés par ⁷ :

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.124)$$

$$\mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 & (p - c) & \theta \end{bmatrix}^T \quad (5.125)$$

Ici, la seule différence majeure est l'orientation de la barre centrale. En fait, on calcule celle-ci par rapport au vecteur reliant les points E et C . Cet angle (θ) est donc le même que celui utilisé dans l'étude cinématique.

7. Rappelons que $p = h + c$.

Maintenant, toutes ces positions et orientations peuvent être regroupées dans un même vecteur, soit \mathbf{y} , pour représenter la pose des centres de masse de tous les corps du mécanisme.

$$\mathbf{y} = \left[\mathbf{y}_1^T \quad \mathbf{y}_2^T \quad \mathbf{y}_3^T \quad \mathbf{y}_4^T \right]^T \quad (5.126)$$

La dérivation de cette dernière équation permet d'obtenir une relation entre $\dot{\mathbf{y}}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ qui peut s'écrire de façon matricielle⁸

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} \quad (5.127)$$

avec

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} - a \cos \theta \right) & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} + a \cos \theta \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.128)$$

Plusieurs éléments de cette dernière matrice sont nuls et vont, par le fait même, générer des termes nuls dans le vecteur $\dot{\mathbf{y}}$, peu importe les valeurs de $\dot{\mathbf{x}}$. Pour cette raison, il est préférable de modifier ces dernières équations en éliminant les termes qui ne donnent aucune information. On obtient ainsi

$$\dot{\mathbf{y}}' = \mathbf{T}'\dot{\mathbf{x}} \quad (5.129)$$

avec

$$\dot{\mathbf{y}}' = \left[\dot{y}_{1_y} \quad \dot{y}_{2_y} \quad \dot{y}_{3_y} \quad \dot{y}_{4_y} \quad \dot{\theta}_4 \right]^T \quad (5.130a)$$

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} - a \cos \theta \right) & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} + a \cos \theta \right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.130b)$$

où \dot{y}_{i_y} est la composante de vitesse verticale (dans la direction y) du centre de masse de l'élément i et où $\dot{\theta}_4$ est la vitesse angulaire de l'élément 4, soit la barre centrale.

5.3.3 Matrice R

Cette matrice fait le lien entre les vitesses cartésiennes et les vitesses des points d'application des efforts des actionneurs. Dans ce cas-ci, les efforts sont transmis aux

8. Les valeurs utilisées pour représenter les coordonnées articulaires (ρ_i) et les coordonnées cartésiennes (p et θ) sont celles qui ont été dérivées dans la cinématique du mécanisme (sections 5.2.1 et 5.2.2). Il ne s'agit donc pas des équations simplifiées de la section 5.2.6.

plateaux mobiles à partir des points B et D , dont les vecteurs position-orientation s'écrivent :

$$\mathbf{z}_b = \begin{bmatrix} -d & \rho_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.131)$$

$$\mathbf{z}_d = \begin{bmatrix} d & \rho_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.132)$$

Ces deux vecteurs sont regroupés dans \mathbf{z} ($\mathbf{z} = [\mathbf{z}_b^T \ \mathbf{z}_d^T]^T$) pour exprimer les positions et orientations de tous les points d'applications des efforts extérieurs. Ce dernier vecteur peut être dérivé pour obtenir une relation entre les vitesses

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_b^T & \dot{\mathbf{z}}_d^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\rho}_1 & 0 & 0 & \dot{\rho}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.133)$$

ou écrit de façon matricielle :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} \quad (5.134)$$

avec

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} - a \cos \theta\right) & 0 & 0 & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} + a \cos \theta\right) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.135)$$

Finalement, on peut simplifier ces équations pour faire disparaître les éléments nuls, ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{z}}' = \mathbf{R}'\dot{\mathbf{x}} \quad (5.136)$$

avec

$$\dot{\mathbf{z}}' = \begin{bmatrix} \dot{z}_{b_y} & \dot{z}_{d_y} \end{bmatrix}^T \quad (5.137a)$$

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} - a \cos \theta\right) \\ 1 & \left(\frac{a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta}{\sqrt{\Lambda}} + a \cos \theta\right) \end{bmatrix} \quad (5.137b)$$

où \dot{z}_{b_y} et \dot{z}_{d_y} sont respectivement les composantes de vitesse verticale (dans la direction y) des points d'application des efforts des vérins.

5.3.4 Efforts dus à la gravité \mathbf{f}_g

Pour obtenir les efforts de gravité, on utilise l'équation de Newton

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{M}\mathbf{a}_g \quad (5.138)$$

avec

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_1, J_1, m_2, m_2, J_2, m_3, m_3, J_3, m_4, m_4, J_4) \quad (5.139a)$$

$$\mathbf{a}_g = \begin{bmatrix} g_x & g_y & 0 & g_x & g_y & 0 & g_x & g_y & 0 & g_x & g_y & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.139b)$$

où \mathbf{M} est la matrice des masses et des inerties de tous les corps et où \mathbf{a}_g est le vecteur des composantes de l'accélération gravitationnelle selon les différents axes. Dans le cas qui nous concerne, la gravité agit selon la direction négative de l'axe y . Ces équations peuvent donc être simplifiées pour obtenir

$$\mathbf{f}'_g = \mathbf{M}'\mathbf{a}'_g \quad (5.140)$$

avec

$$\mathbf{M}' = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4, J_4) \quad (5.141a)$$

$$\mathbf{a}'_g = \begin{bmatrix} g & g & g & g & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.141b)$$

où m_i est la masse du corps i , J_4 , l'inertie de la barre centrale et g , l'accélération gravitationnelle.

5.3.5 Matrice $\dot{\mathbf{T}}$

Pour obtenir l'expression de la dérivée seconde du vecteur \mathbf{y} , selon l'équation

$$\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\ddot{\mathbf{x}} \quad (5.142)$$

il est nécessaire de dériver la matrice \mathbf{T} (équation 5.128). Ceci donne :

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{T}_{22} & 0 & 0 & \dot{T}_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.143)$$

avec

$$\dot{T}_{22} = \left(\frac{a^2(2\cos^2\theta - 1) - ad\cos\theta}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{(a^2\cos\theta\sin\theta - ad\sin\theta)^2}{\Lambda^{3/2}} + a\sin\theta \right) \dot{\theta} \quad (5.144a)$$

$$\dot{T}_{52} = \left(\frac{a^2(2\cos^2\theta - 1) - ad\cos\theta}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{(a^2\cos\theta\sin\theta - ad\sin\theta)^2}{\Lambda^{3/2}} - a\sin\theta \right) \dot{\theta} \quad (5.144b)$$

Encore une fois, plusieurs éléments de cette matrice sont nuls. Un autre défaut de cette matrice est qu'elle possède des informations sur les paramètres cartésiens. Ainsi, les

équations pour \dot{T}_{22} et \dot{T}_{52} sont toutes deux fonctions de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Or, il est préférable dans ce genre d'étude dynamique que les variables cartésiennes et articulaires soient regroupées dans des vecteurs. Pour ces deux raisons, l'équation (5.142) est modifiée pour obtenir

$$\ddot{\mathbf{y}}' = \dot{\mathbf{T}}'' \dot{\mathbf{x}}' + \mathbf{T} \ddot{\mathbf{x}} \quad (5.145)$$

où

$$\dot{\mathbf{T}}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{T}_{12}'' & \dot{T}_{22}'' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.146)$$

avec

$$\dot{T}_{12}'' = \frac{a^2(2 \cos^2 \theta - 1) - ad \cos \theta}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{(a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta)^2}{\Lambda^{3/2}} + a \sin \theta \quad (5.147a)$$

$$\dot{T}_{22}'' = \frac{a^2(2 \cos^2 \theta - 1) - ad \cos \theta}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{(a^2 \cos \theta \sin \theta - ad \sin \theta)^2}{\Lambda^{3/2}} - a \sin \theta \quad (5.147b)$$

et où

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 & \dot{p}^2 \end{bmatrix}^T \quad (5.148)$$

Il est à noter que $\dot{\mathbf{T}}''$ n'est pas la dérivée de \mathbf{T} ou de \mathbf{T}' , pas plus que $\dot{\mathbf{x}}'$ n'est celle de \mathbf{x} .

5.3.6 Modèle dynamique épuré

Suite aux simplifications faites dans les dernières sections, il est nécessaire de réécrire le modèle dynamique plan. Cette nouvelle version donne exactement les mêmes informations que le modèle présenté en début de chapitre. Par contre, les dimensions des équations matricielles sont beaucoup plus petites, ce qui facilite son traitement mathématique. Le modèle dynamique épuré du mécanisme de moyennage plan s'écrit donc

$$\mathbf{f}'_a = \mathbf{R}'^{-T} (\mathbf{T}'^T \mathbf{f}'_g + \mathbf{V}' \dot{\mathbf{x}}' + \mathbf{W}' \ddot{\mathbf{x}}) \quad (5.149)$$

avec

$$\mathbf{V}' = \mathbf{T}'^T \mathbf{M}' \dot{\mathbf{T}}'' \quad (5.150a)$$

$$\mathbf{W}' = \mathbf{T}'^T \mathbf{M}' \mathbf{T}' \quad (5.150b)$$

et

$$\mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix} f'_{a1} & f'_{a2} \end{bmatrix}^T \quad (5.151)$$

où f'_{ai} est la force dans la direction y qui doit être produite par l'actionneur i .

Sommairement, le modèle dynamique proposé dans cette section permet d'estimer les efforts que doivent produire les actionneurs afin de générer les déplacements désirés du mécanisme. À ce jour, aucun essai n'a été fait avec ce modèle, les mouvements du système de moyennage n'ayant été considérés que de manière cinématique. Néanmoins, dans la poursuite du projet, ce modèle dynamique plan pourra servir de base au développement d'un modèle dynamique global de la scène mobile, permettant, entre autres, d'étudier l'impact sur les mouvements de l'ajout d'acteurs ou de décors — en somme, de l'ajout de masses — sur les différents éléments discrets de la scène.

Chapitre 6

Architectures spatiales du mécanisme de moyennage plan

Il est maintenant temps d'analyser les différentes architectures spatiales possibles utilisant des agencements du mécanisme de moyennage plan. Tout d'abord, sont ici présentées certaines configurations relatives au nombre d'actionneurs ainsi qu'à leur position sous les éléments mobiles. Finalement, la dernière section développe une étude cinématique tridimensionnelle de l'architecture la plus intéressante.

6.1 Configurations relatives au nombre d'actionneurs

Le chapitre précédent a présenté le mécanisme de moyennage plan. Celui-ci permet de positionner un élément mobile par rapport à deux autres. En combinant plusieurs de ces mécanismes bidimensionnels, il est possible de créer des modules de scènes à neuf blocs possédant plus ou moins de degrés de liberté. Cette section présente les configurations modulaires relatives au nombre d'actionneurs qui sont les plus intéressantes.

De manière théorique, puisque le module est composé de neuf plateaux, il est possible d'avoir des systèmes possédant de un à neuf actionneurs. Ainsi, à un extrême, s'il n'y a aucun mécanisme de moyennage, il faut que chaque élément mobile soit actionné séparément, et de cette manière, le module possède neuf degrés de liberté. À l'autre extrême, une quantité suffisante de mécanismes de moyennage peut permettre au module d'être totalement contraint, c'est-à-dire que les neuf plateaux ne peuvent plus se déplacer les uns par rapport aux autres. Ainsi, un seul actionneur est nécessaire et celui-ci permet le déplacement vertical de tous les blocs à la fois. Évidemment, ces deux cas ne sont pas très intéressants, le premier nécessitant trop d'actionneurs et le second ne permettant pas au module d'être reconfiguré. Heureusement, entre ces deux cas marginaux, il existe quelques assemblages pertinents. Les deux cas les plus intéressants sont présentés dans ce qui suit.

La première configuration traitée est celle à quatre degrés de liberté schématisée à la figure 6.1. Ce système compte six mécanismes de moyennage bidimensionnels qui sont distribués orthogonalement. Ainsi, lorsqu'on regarde le module du dessus (figure 6.1(a)), trois mécanismes sont horizontaux (\mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3), alors que les trois autres sont verticaux (\mathcal{M}_4 , \mathcal{M}_5 et \mathcal{M}_6). Les animations 13, 14 et 15 du CD-Rom d'accompagnement proposent quelques mouvements de cette configuration. Dans les trois cas, les actionneurs sont positionnés arbitrairement dans les coins du module.

Dans le chapitre précédent, il a été mentionné que l'élément passif d'un mécanisme de moyennage doit être contraint à se déplacer verticalement (de haut en bas) le long d'un axe positionné à une distance d de ses plateaux voisins (voir section 5.1). Or, l'agencement des mécanismes de moyennage de manière orthogonale permet de contraindre automatiquement les déplacements des plateaux passifs. Pour expliquer ceci, on épure

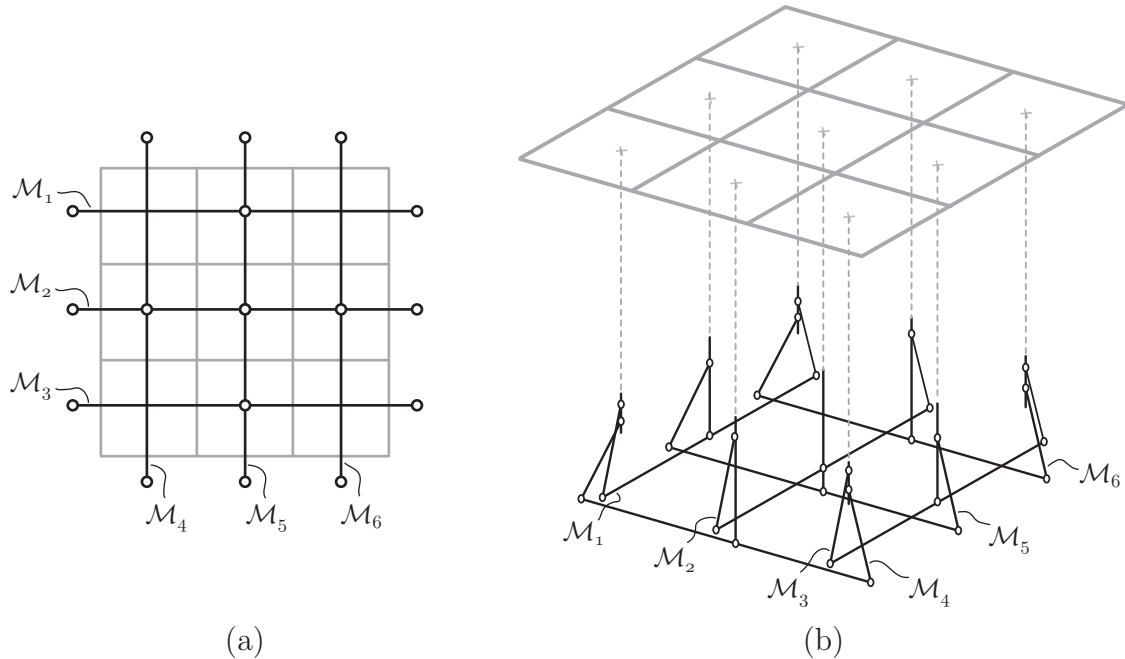


FIG. 6.1 – Schémas en vues (a) plane et (b) isométrique de l’assemblage des mécanismes de moyennage bidimensionnels dans un module tridimensionnel à quatre degrés de liberté.

la figure 6.1 pour ne conserver que les mécanismes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_5 (figure 6.2). De plus on suppose que des actionneurs — représentés par des points noirs dans la figure 6.2(a) — sont positionnés aux extrémités du mécanisme \mathcal{M}_1 ainsi qu’au centre du module. L’élément passif (qui est grisé) est donc contraint à se déplacer le long de l’intersection de ces deux plans, soit le long de l’axe \mathcal{S} , puisque les deux mécanismes de moyennage ne permettent des déplacements que le long de leur plan respectif, soit π_1 et π_5 . Finalement, cet axe est toujours distant d’une longueur d des trois blocs actionnés. Ainsi, de manière générale, dans une configuration où les mécanismes de moyennage sont placés de manière orthogonale, tous les plateaux moyennés sont contraints à se déplacer verticalement.

La seconde configuration proposée est celle à trois degrés de liberté schématisée à la figure 6.3. Comme pour le système à quatre actionneurs, six mécanismes de moyennage plans sont disposés orthogonalement. Par contre, dans ce cas-ci, une contrainte additionnelle est nécessaire pour éliminer un actionneur. Cette contrainte doit imposer à tous les points d’attache des éléments mobiles d’être sur un même plan, ce dernier étant libre de se déplacer verticalement et de pivoter selon deux axes horizontaux et or-

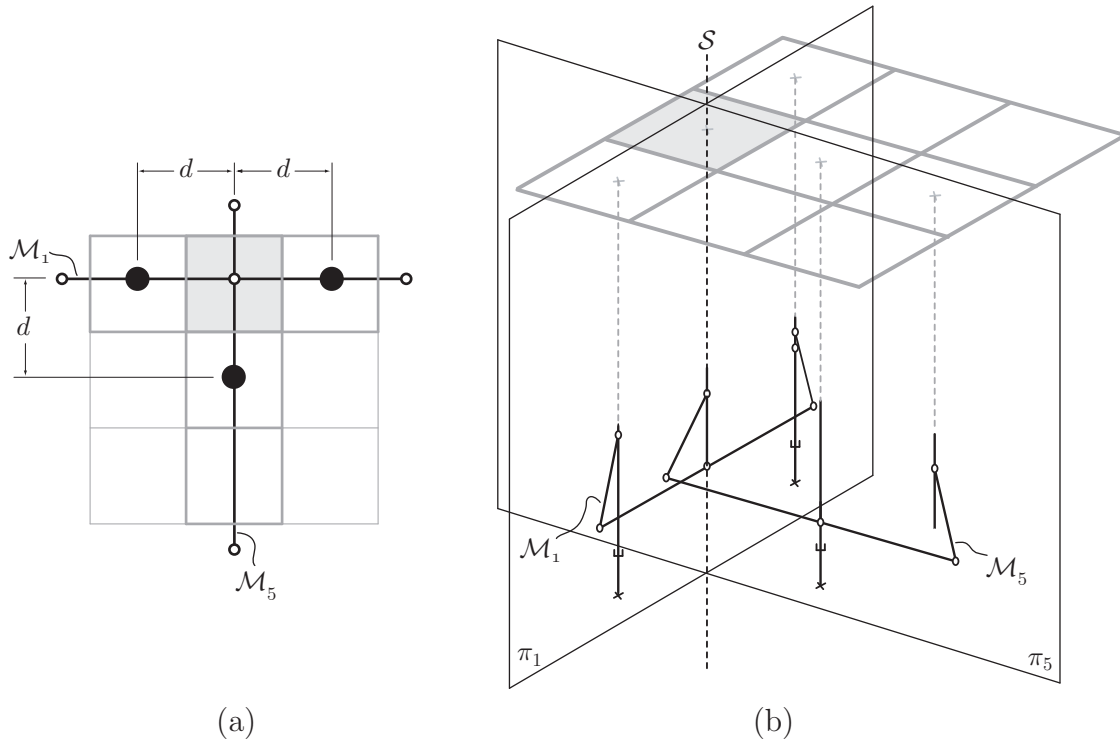


FIG. 6.2 – Schémas en vues (a) plane et (b) isométrique du blocage orthogonal d'un élément passif.

thogonaux. Mécaniquement, ceci est vérifié lorsque les barres centrales des mécanismes de moyennage \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 ainsi que celles \mathcal{M}_4 , \mathcal{M}_5 et \mathcal{M}_6 sont respectivement parallèles. De manière pratique, cette contrainte peut être imposée en ajoutant un mécanisme de moyennage plan (\mathcal{M}_7) le long d'une des diagonales, comme montré à la figure 6.3. Des animations de quelques trajectoires de ce système sont présentées sur le CD-Rom d'accompagnement (animations 16, 17 et 18).

Dans le cadre de ce mémoire, les cas à cinq, six, sept et huit actionneurs ne sont pas traités, puisqu'ils ne respectent pas adéquatement les attentes du cahier des charges. En effet, ces quatre systèmes nécessitent trop d'actionneurs. Malgré tout, le CD-Rom d'accompagnement présente, à titre informatif, des animations d'un système à cinq degrés de liberté (animations 19 et 20).

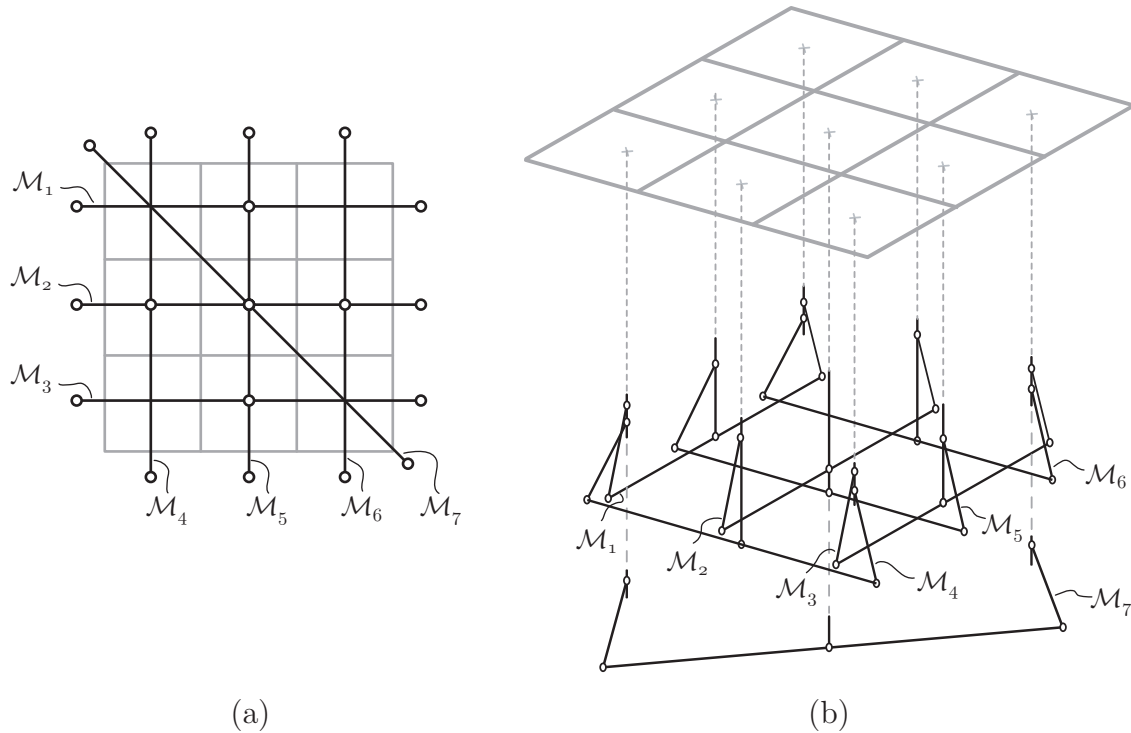


FIG. 6.3 – Schémas en vues (a) plane et (b) isométrique de l'assemblage des mécanismes de moyennage bidimensionnels dans un module tridimensionnel à trois degrés de liberté.

6.2 Configurations relatives à la position des actionneurs

L'intérêt de cette analyse est de trouver les différentes configurations des actionneurs pour chaque type de système. Ensuite, connaissant cet éventail de possibilités, il sera possible de les comparer et de sélectionner les cas les plus intéressants.

6.2.1 Définition des agencements des actionneurs

Cette section présente une méthode permettant de trouver les différentes configurations relatives à la position des actionneurs du mécanisme de moyennage tridimensionnel.

La méthode se base sur l'équation suivante :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (6.1)$$

où C_n^p représente le nombre de combinaisons possibles de p éléments parmi un ensemble en comprenant n . Voici un exemple simple. On veut connaître le nombre de combinaisons de deux éléments de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$. On remplace tout simplement le nombre d'éléments de chaque combinaison ($p = 2$) et le nombre d'éléments de l'ensemble ($n = 4$) dans l'équation (6.1), ce qui donne six solutions.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad (6.2)$$

Ces six possibilités sont :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\} \text{ et } \{c, d\}$$

On remarque que les combinaisons $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont les mêmes et c'est pourquoi elles ne sont pas répétées. En effet, l'intérêt de la formule de combinaisons est de trouver les dispositions non ordonnées d'un ensemble. Or, il est très important de ne pas confondre ce concept de « combinaison » avec un autre très utilisé en mathématiques probabilistes, soit celui « d'arrangement ». Pour les fins du mémoire, on se contentera de dire ici que l'arrangement consiste en une disposition ordonnée sans répétition d'un ensemble.

Dans le cas qui nous intéresse, le nombre d'éléments de l'ensemble n est la quantité de blocs dans un module, soit neuf, alors que le nombre d'éléments des combinaisons p est la somme des actionneurs utilisés dans la configuration suggérée. Ainsi, par exemple, une configuration avec deux actionneurs donne 36 combinaisons possibles.

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 36 \quad (6.3)$$

Or, toutes ces combinaisons n'offrent pas des résultats indépendants. En effet, vue la symétrie du système — un damier de trois carrés sur trois — certaines solutions sont redondantes du point de vue mécanique. En exemple, la figure 6.4 montre quatre solutions d'un système à deux actionneurs. Dans cette illustration, les points dans les carrés représentent des éléments qui sont actionnés alors que ceux vides ne le sont pas. Ces quatre combinaisons sont comptées individuellement dans l'équation (6.3), mais ne représentent qu'une seule configuration distincte. En effet, une rotation de 90° d'une solution de cette figure donne la suivante. D'un point de vue pratique, ces différents cas expriment la même chose, puisque leurs composantes mécaniques et leurs

résultats cinématiques sont les mêmes. Il est donc important de ne retenir qu'une seule configuration de ces solutions redondantes ; l'objectif étant de définir les arrangements distincts. De manière plus formelle, on dira que des solutions sont similaires si elles sont en accord avec la définition suivante :

Définition 6.1 *Deux configurations sont dites similaires, et sont donc considérées comme redondantes, si l'une est obtenue de l'autre par une rotation de $\frac{n\pi}{4}$, n pouvant être un entier de 1 à 3, ou par une réflexion selon l'un des quatre axes principaux \mathcal{I} , \mathcal{J} , \mathcal{K} et \mathcal{L} présentés à la figure 6.5.*

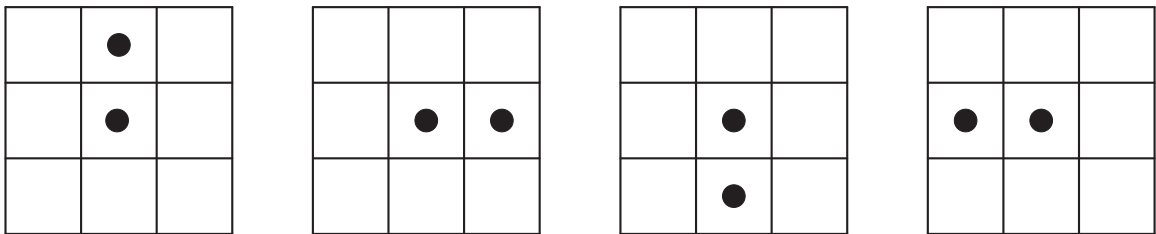


FIG. 6.4 – Quatre solutions similaires d'un système à deux actionneurs.

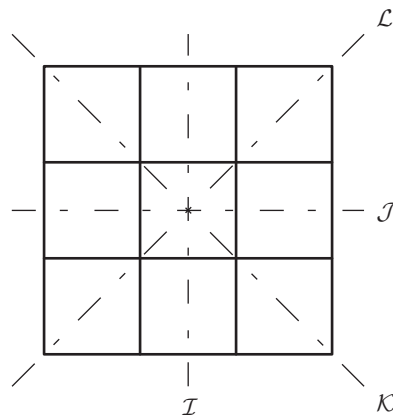


FIG. 6.5 – Axes principaux d'un module.

Suivant ces restrictions, il existe quatre types de solutions dans le damier d'éléments mobiles, soit des solutions qui sont uniques, d'autres qui sont couplées deux à deux et qui sont regroupées dans des familles doubles, des solutions qui sont similaires à trois autres et qui forment des familles de solutions quadruples et finalement, des solutions qui sont couplées avec sept autres et qui génèrent des familles octuples. Des exemples de ces subdivisions seront donnés un peu plus loin. Pour l'instant, on peut créer une variable pour chaque cas, soit x_1 , x_2 , x_4 et x_8 — x_i représentant le nombre de solutions

uniques lorsque i est égal à un et le nombre de familles possédants i individus autrement. Ainsi, il est possible de relier ces différentes configurations au nombre de combinaisons possibles de neuf éléments mobiles (C_9^p) par l'équation

$$C_9^p = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 \quad (6.4)$$

Or, l'intérêt de cette démarche est d'identifier les solutions distinctes (S_d). La quantité de ces solutions peut être calculée en additionnant le nombre de familles et les solutions uniques.

$$S_d = \sum x_i, \quad i = 1, 2, 4, 8 \quad (6.5)$$

Maintenant, il peut arriver que certaines configurations soient incompatibles mécaniquement. Il a été démontré, dans le précédent chapitre, que le mécanisme de moyennage possède deux degrés de liberté. De cette manière, un minimum d'un plateau par ligne de moyennage ne doit pas être actionné. Si tel est le cas, cette configuration sera irréalisable, puisque incompatible mécaniquement. Le nombre de ces solutions est représenté par la variable S_i . Finalement, le nombre de solutions réalisables (S_r), pour une quantité d'actionneurs donnée, est la différence entre les solutions distinctes et les solutions irréalisables, soit

$$S_r = S_d - S_i \quad (6.6)$$

Les sections suivantes présentent les familles de solutions avant de proposer une méthode pour trouver les configurations réalisables.

6.2.1.1 Solutions uniques

Les solutions uniques sont tout simplement des solutions qui ne peuvent pas être couplées avec d'autres pour former une famille. Physiquement, les actionneurs de ce type de configurations sont symétriquement disposés par rapport aux axes principaux présentés à la figure 6.5. Ainsi, si on fait la réflexion de la configuration des actionneurs par rapport à ces axes, on retombe sur la même solution. Pour cette raison, ces types d'architectures sont très faciles à trouver. En fait, pour toutes les configurations possibles, de un à neuf actionneurs, il n'existe que six solutions uniques. Celles-ci sont schématisées à la figure 6.6.

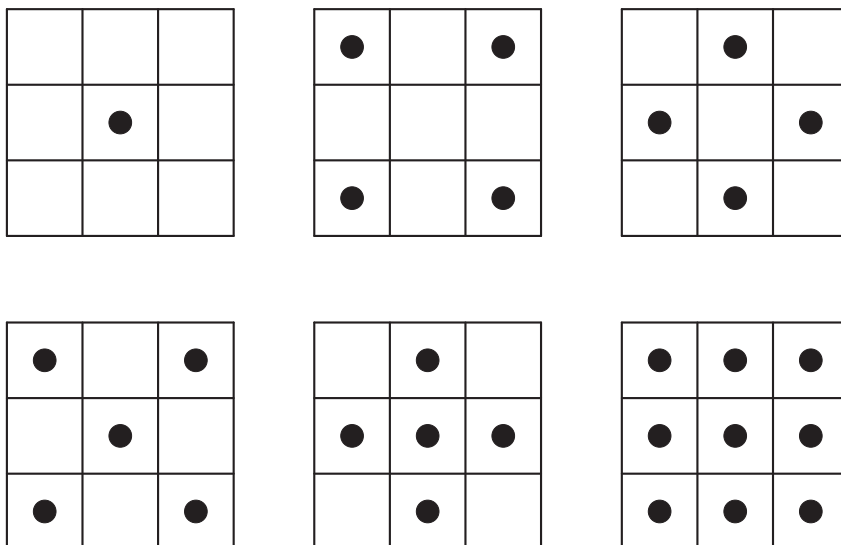


FIG. 6.6 – Les six solutions uniques possibles.

6.2.1.2 Familles de solutions doubles

Les familles de solutions doubles sont composées de deux solutions qui sont similaires. Évidemment, pour que cela soit physiquement possible, il faut que la symétrie d'une solution par rapport à deux axes principaux redonne cette première, alors que la symétrie par rapport aux deux autres axes fasse apparaître la deuxième solution redondante. Une autre façon de le voir est en utilisant les rotations. Ainsi, la rotation de 90 ou 270 degrés d'une solution doit donner la seconde, alors qu'une rotation de 180 degrés doit permettre de retrouver la configuration initiale. Finalement, les arrangements de cette famille sont en général relativement faciles à trouver. La figure 6.7 présente quelques exemples.

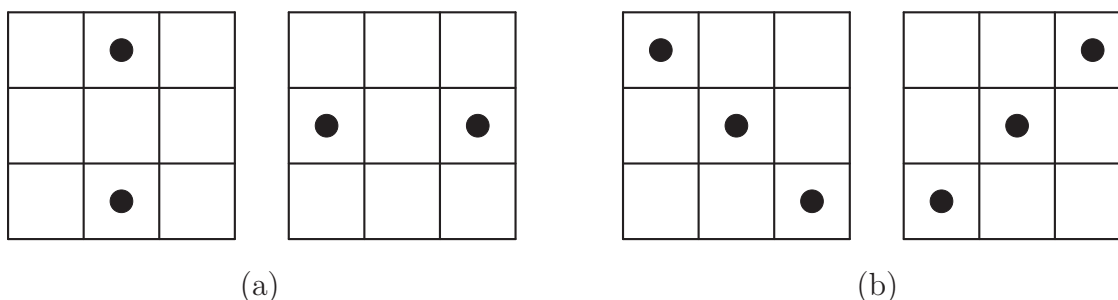


FIG. 6.7 – Exemples de familles de solutions doubles à (a) deux et (b) trois actionneurs.

6.2.1.3 Familles de solutions quadruples

Ces familles comptent quatre configurations redondantes. La symétrie de l'une d'entre elles par rapport à trois axes principaux permet de trouver les trois autres, alors que la symétrie par rapport au quatrième axe ne change rien. Une rotation successive de 90 degrés donne également le même résultat. Ces familles d'arrangements sont souvent plus difficiles à trouver car elles sont nombreuses. La figure 6.8 fait état d'une famille quadruple.

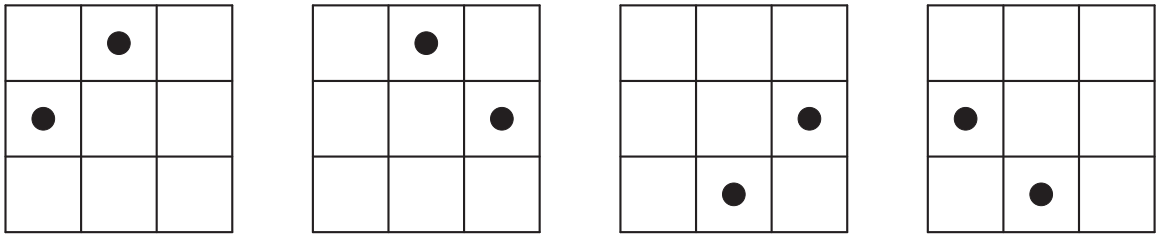


FIG. 6.8 – Exemple d'une famille de solutions quadruple.

6.2.1.4 Familles de solutions octuples

Les familles octuples sont légèrement différentes des trois autres. Celles-ci comptent huit arrangements similaires. Ces solutions sont couplées par une symétrie simple ou deux symétries successives par rapport aux axes principaux. De manière schématique, on peut dire que les familles octuples sont le regroupement de deux familles quadruples qui possèdent, entre elles, une symétrie par rapport à un axe principal. Évidemment, cette dernière mention est quelque peu erronée, puisqu'une solution ne peut pas être à la fois membre de deux familles. Par contre, cette schématisation est une bonne façon de visualiser et de trouver les arrangements octuples.

Voici un exemple : les solutions (1) et (2) de la figure 6.9 sont, à première vue, deux familles quadruples. Ainsi, par la rotation de 90 degrés — en sens horaire pour le premier cas et en sens anti-horaire pour le second — des configurations (a) on trouve les six autres (1b, 1c, 1d, 2b, 2c et 2d). Par contre, la symétrie des solutions (1) par rapport à l'axe principal \mathcal{J} donne les solutions (2). Ceci prouve que ces huit configurations font partie d'une même famille.

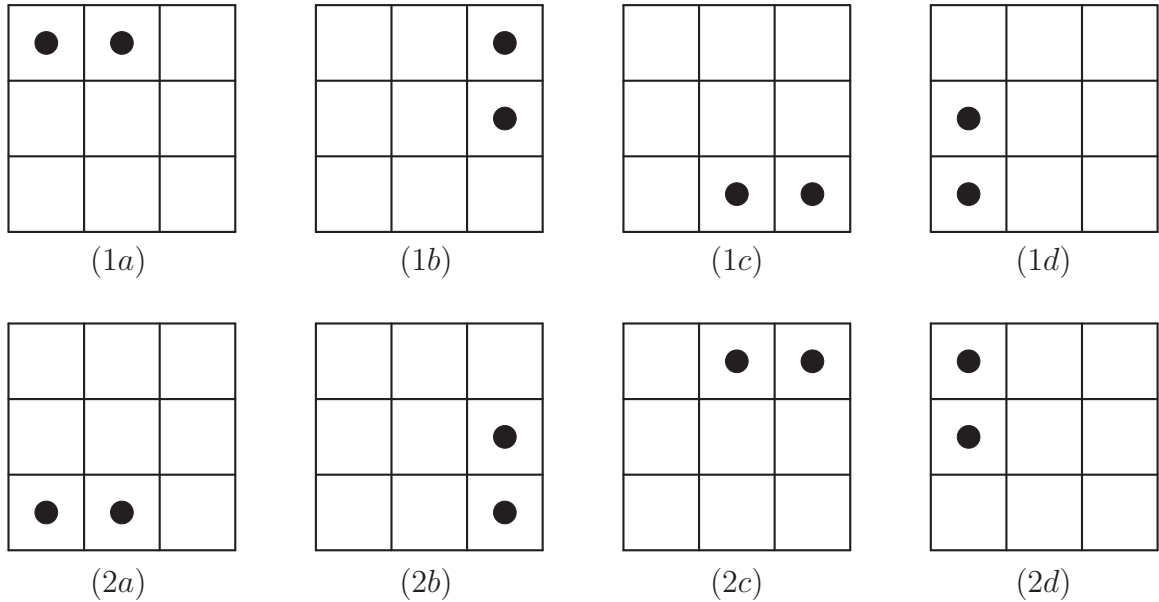


FIG. 6.9 – Exemple d’une famille de solutions octuple.

6.2.1.5 Méthodologie

Cette section fait un rappel sur les notions qui viennent d’être présentées en proposant une méthode permettant de trouver les différentes configurations d’actionneurs dans un module. Cette méthode sera par la suite utilisée pour les cas à trois et quatre actionneurs. Voici les étapes menant aux différents agencements réalisables.

Étape I Calculer le nombre de combinaisons d’actionneurs possibles à l’aide de l’équation (6.1) ($C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$), sachant que n est le nombre d’éléments mobiles, soit neuf, et p le nombre d’actionneurs.

Étape II Définir les solutions uniques à partir de la figure 6.6.

Étape III Trouver les configurations des familles de solutions doubles en utilisant les propriétés de symétrie présentées à la section 6.2.1.2.

Étape IV Calculer les configurations restantes (familles quadruples et octuples) en utilisant l’équation (6.4) modifiée suivante :

$$x_4 + 2x_8 = \frac{C_9^p - x_1 - 2x_2}{4} \quad (6.7)$$

Étape V Définir les configurations restantes en les regroupant en familles quadruples.

Étape VI Combiner et regrouper les familles quadruples possédant une symétrie pour former des familles octuples, comme expliqué à la section 6.2.1.4.

Étape VII Calculer les solutions distinctes avec l'équation (6.5) ($S_d = \sum x_i$, $i = 1, 2, 4, 8$).

Étape VIII Trouver les solutions mécaniquement incompatibles.

Étape IV Calculer et cibler les solutions réalisables en soustrayant des configurations distinctes celles mécaniquement incompatibles ($S_r = S_d - S_i$).

6.2.2 Agencements à trois degrés de liberté

La méthode de définition des actionneurs est maintenant utilisée pour trouver les arrangements d'un système à trois actionneurs. Tout d'abord, le remplacement du nombre d'éléments mobiles ($n = 9$) et de le nombre d'actionneurs ($p = 3$) dans l'équation (6.1) donne 84 combinaisons possibles.

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84 \quad (6.8)$$

Ensuite, un module à trois actionneurs ne possède aucune solution unique (selon la figure 6.6), donc $x_1 = 0$. Par contre, deux familles de solutions doubles existent ($x_2 = 2$). Celles-ci sont représentées par les configurations (1) et (2) à la figure 6.10. Ceci permet de calculer le nombre de configurations restantes à partir de l'équation (6.7), ce qui donne :

$$x_4 + 2x_8 = \frac{84 - 0 - (2 * 2)}{4} = 20 \quad (6.9)$$

De ces 20 configurations restantes, huit sont des familles quadruples, représentées par les solutions (3) à (10) de la figure 6.10, et les 12 autres forment six familles octuples schématisées par les cas (11) à (16) de la même figure. Ceci permet de calculer le nombre de solutions distinctes à l'aide de l'équation (6.5) :

$$S_d = x_1 + x_2 + x_4 + x_8 = 0 + 2 + 8 + 6 = 16 \quad (6.10)$$

Par contre, de ces 16 solutions distinctes, trois sont mécaniquement incompatibles, soit les configurations (1) à (3). En effet, dans ces solutions, les trois actionneurs se retrouvent sur un même mécanisme de moyennage plan, le rendant ainsi surcontraint. Ces agencements sont donc irréalisables mécaniquement. Les configurations réalisables sont donc au nombre de 11, soit les configurations (4) à (16).

Mécaniquement, les cas les plus intéressants sont ceux où les actionneurs sont les plus distants les uns des autres, par exemple les configurations (5) à (7). Ceci permet une

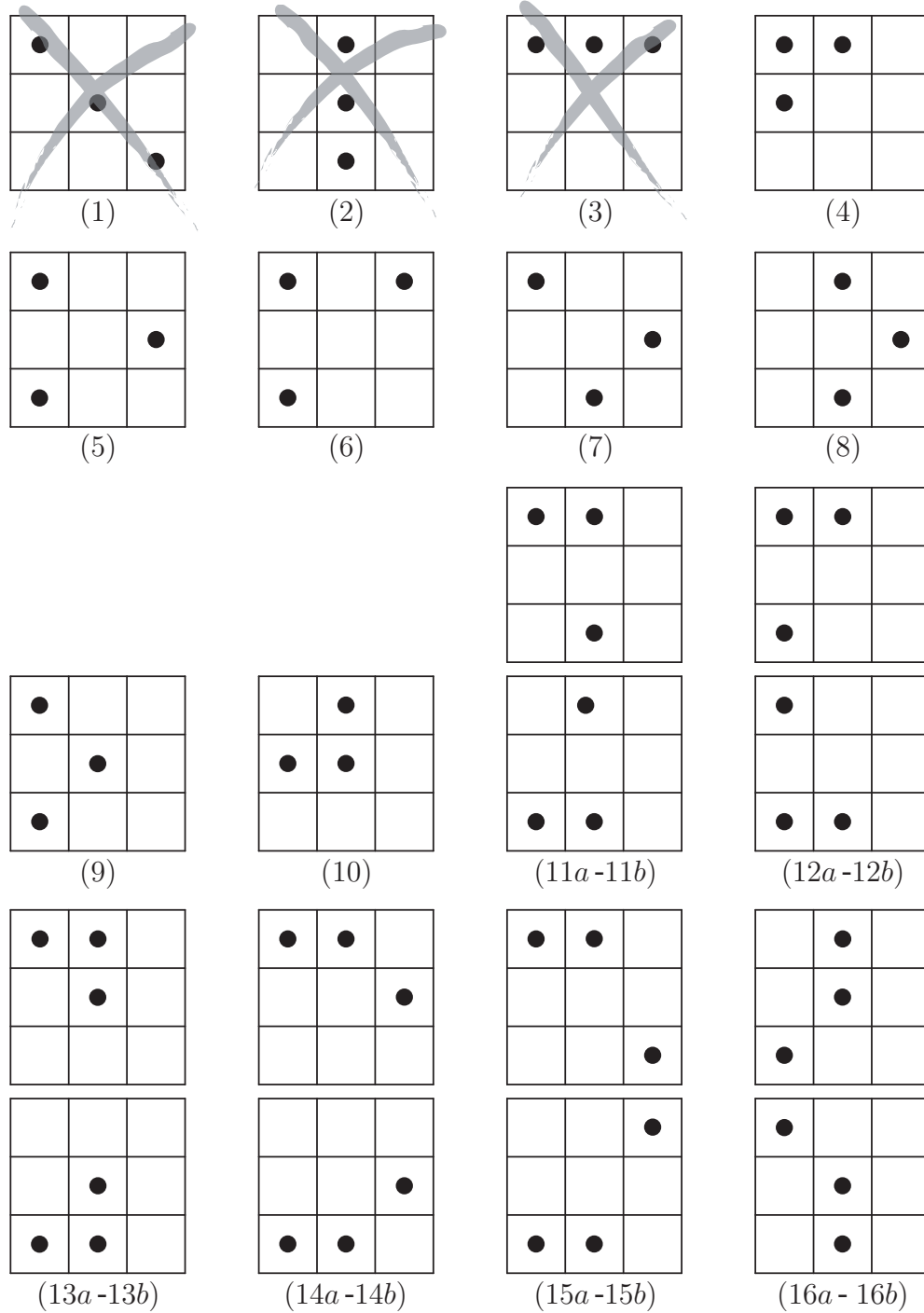


FIG. 6.10 – Agencements distincts des actionneurs pour un module à trois degrés de liberté. Les solutions (1) et (2) font partie de familles doubles, celles (3) à (10) de familles quadruples et celles (11) à (16) de familles octuples.

plus grande stabilité du mécanisme. On remarque, par contre, qu'aucun arrangement à trois actionneurs ne permet d'éviter que certains éléments mobiles soient en porte-à-faux. Ainsi, dans tous les cas, au moins un bloc mobile ne sera pas circonscrit dans le triangle formé en reliant la position des actionneurs. Ceci est une lacune de ce système.

6.2.3 Agencements à quatre degrés de liberté

Pour le système à quatre degrés de liberté, la substitution du nombre d'éléments mobiles ($n = 9$) et du nombre d'actionneurs ($p = 4$) dans l'équation (6.1) donne 126 combinaisons possibles, selon le calcul suivant :

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126 \quad (6.11)$$

Ensuite, la figure 6.6 donne deux cas de solutions uniques ($x_1 = 2$), soit les configurations (1) et (2) de la figure 6.11. De plus, il n'existe pas de familles de solutions doubles pour ce système ($x_2 = 0$). Ces informations permettent de calculer les solutions restantes :

$$x_4 + 2x_8 = \frac{126 - 2 - 0}{4} = 31 \quad (6.12)$$

De ces 31 solutions, onze sont des familles quadruples et sont représentées par les configurations (3) à (13) de la figure 6.11. Les vingt autres forment dix familles octuples présentées par les schémas (14) à (23). Les solutions distinctes sont donc au nombre de 23 suivant le calcul suivant :

$$S_d = x_1 + x_2 + x_4 + x_8 = 2 + 0 + 11 + 10 = 23 \quad (6.13)$$

Encore une fois, plusieurs solutions sont mécaniquement incompatibles. Ainsi, tous les agencements de la figure 6.11 qui sont biffés génèrent des surcontraintes et sont donc irréalisables. Premièrement, les configurations (6) à (8) et (21) à (23) sont faciles à identifier, puisqu'elles possèdent trois actionneurs sur un même mécanisme de moyennage plan. Il faut par contre rappeler que le système à quatre degrés de liberté ne possède pas de mécanisme de moyennage bidimensionnel sur ses diagonales. Pour cette raison, la solution (20) est viable. Deuxièmement, les configurations (9) et (10) sont plus difficiles à cibler. Dans ces deux cas, la contrainte faisant en sorte que le mécanisme n'est pas fonctionnel est créée par l'intersection de deux mécanismes de moyennage plans possédant chacun deux actionneurs. L'élément mobile faisant l'intersection (soit le seul qui n'est pas actionné) ne peut donc pas satisfaire simultanément la position requise

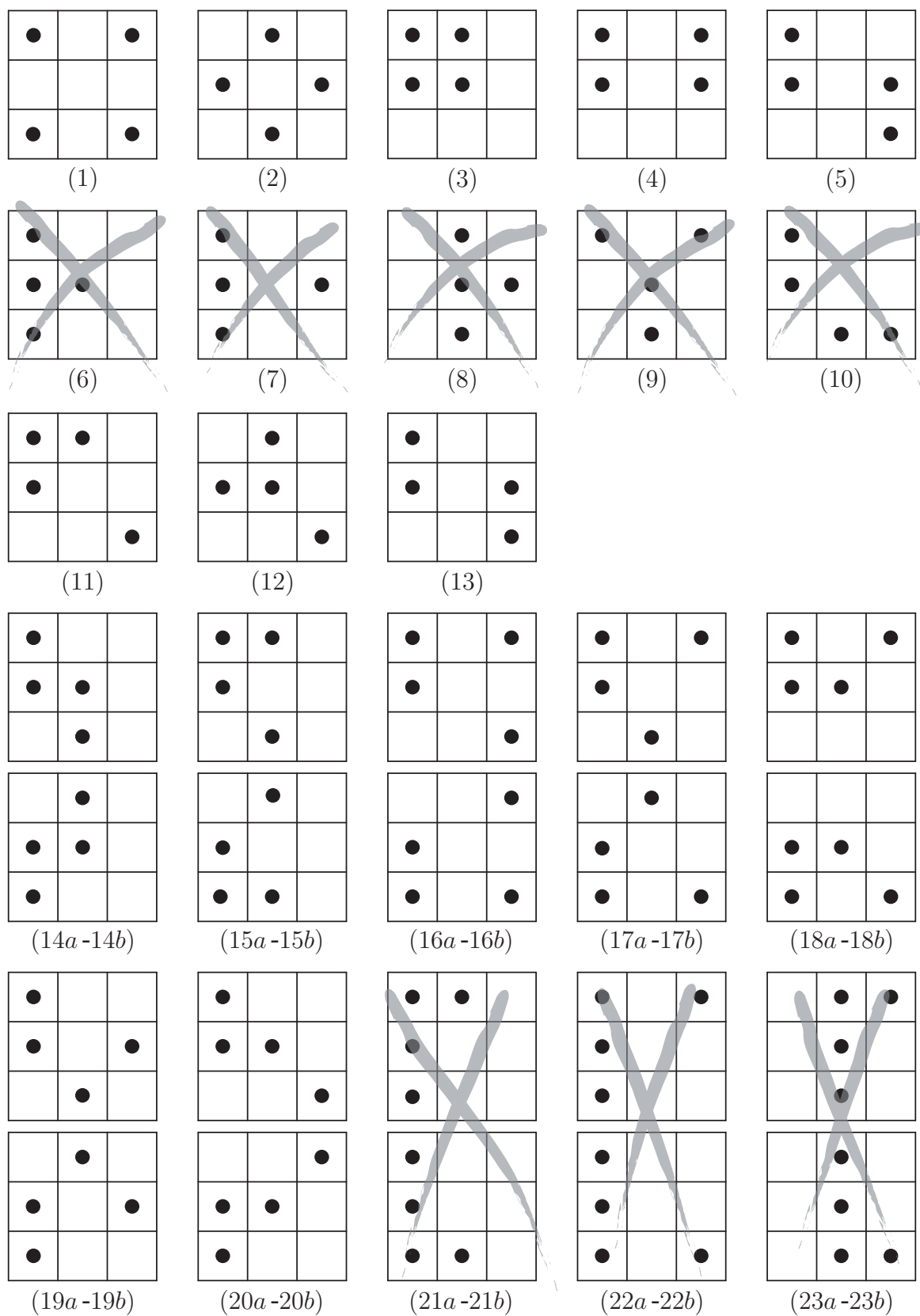


FIG. 6.11 – Agencements distincts des actionneurs pour un module à quatre degrés de liberté. Les solutions (1) et (2) sont uniques, celles (3) à (13) font partie de familles quadruples et celles (14) à (23) de familles octuples.

par les deux mécanismes de moyennage bidimensionnels. Il y a donc 15 arrangements réalisables dans ce système, soit les configurations (1) à (5) et (11) à (20). Les solutions (1) et (2) sont les plus intéressantes mécaniquement. La première est malgré tout plus pertinente, puisqu'elle est la seule qui englobe tous les blocs à l'intérieur du polygone formé en reliant la position de ses actionneurs. De plus, cette configuration possède une symétrie parfaite. Ceci peut être intéressant dans l'agencement des modules les uns à côté des autres ainsi que dans le contrôle de ceux-ci. Pour ces raisons, cet agencement est choisi comme étant le plus propice dans la confection de modules d'une scène dynamiquement reconfigurable.

6.3 Étude cinématique de l'architecture spatiale avec des actionneurs aux quatre coins

6.3.1 Définition des coordonnées cartésiennes et articulaires

Pour commencer, la figure 6.12 montre la numérotation des blocs d'un module de la scène qui est utilisée pour l'étude cinématique. Pour des raisons pratiques, l'élément du centre est nommé 1, alors que les blocs des quatre coins — qui sont actionnés — possèdent des chiffres pairs. Sont également placés, sur cette illustration, les axes x et y . Ces axes se croisent au centre de l'élément 1 et sont respectivement orientés vers les blocs 7 et 5.

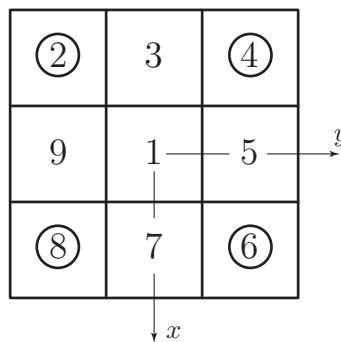


FIG. 6.12 – Numérotation des éléments mobiles d'un module.

Les coordonnées articulaires utilisées sont, tout simplement, les longueurs des ac-

tionneurs linéaires qui sont en même temps les hauteurs des plateaux 2, 4, 6 et 8. On regroupe ces quatre positions dans le vecteur des coordonnées articulaires $\boldsymbol{\rho}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} h_2 & h_4 & h_6 & h_8 \end{bmatrix}^T \quad (6.14)$$

où h_i représente la hauteur du plateau i .

Pour les coordonnées cartésiennes, une position — soit celle du bloc du centre (h_1) — ainsi que trois orientations sont utilisées. La première orientation est nommée angle frontal, α_f . Elle représente l'orientation — positive dans le sens anti-horaire — de la droite reliant les blocs 7, 1 et 3 par rapport à l'axe x (figure 6.13). Par ailleurs, pour toute la démarche de cette analyse, on considère que le mécanisme de moyennage est parfait. Ainsi, aucune erreur de position n'est prise en compte, en considérant que les éléments moyennés sont toujours à la hauteur médiane de ceux qui l'entourent. C'est seulement sous ces conditions qu'on peut dire que les centres des éléments 3, 1 et 7 sont sur une droite. Finalement, selon la figure 6.13, l'angle frontal est défini mathématiquement par l'équation :

$$\alpha_f = \tan^{-1} \left(\frac{h_3 - h_7}{2d} \right) \quad (6.15)$$

où d est la distance entre les centres de deux plateaux voisins.

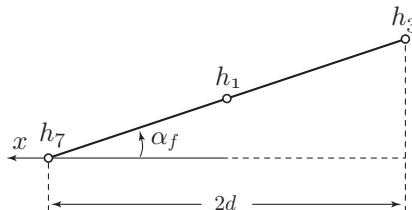
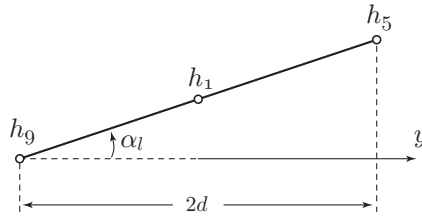


FIG. 6.13 – Schématisation de l'angle frontal α_f .

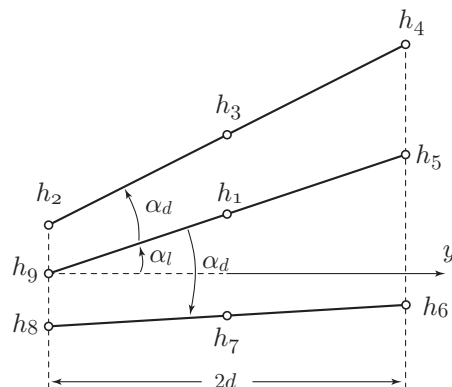
Le deuxième angle est celui latéral, α_l . Il représente l'orientation — encore une fois positive dans le sens anti-horaire — de la droite reliant les plateaux 9, 1 et 5 par rapport à l'axe y . Cet angle est schématisé à la figure 6.14. Mathématiquement, on peut écrire la valeur de cette orientation par l'équation :

$$\alpha_l = \tan^{-1} \left(\frac{h_5 - h_9}{2d} \right) \quad (6.16)$$

FIG. 6.14 – Schématisation de l'angle latéral α_l .

La dernière orientation est légèrement différente des deux autres. Cet angle est nommé angle de distorsion, α_d . Il a déjà été mentionné que pour un système modulaire à trois degrés de liberté, tous les centres des plateaux mobiles doivent être sur un même plan. Or, le système modulaire étudié dans cette section possède un quatrième degré de liberté permettant aux blocs de ne plus être alignés. Dans ces circonstances, on dit qu'il y a distorsion. L'animation 15 du CD-Rom d'accompagnement montre très bien ce phénomène. Supposons maintenant qu'on regarde le module à partir de l'axe x positif — on voit ainsi le devant des blocs 6, 7 et 8 (figure 6.15). Un angle de distorsion α_d positif correspond à une pente plus prononcée des blocs du fond (2, 3 et 4), et d'une plus petite de ceux du devant (6, 7 et 8), par rapport à l'orientation latérale positive (α_l). Physiquement, on définit l'angle de distorsion comme étant l'orientation — positive dans le sens anti-horaire — de la droite reliant les plateaux 2, 3 et 4 par rapport à celle passant par les blocs 9, 1 et 5. Cet angle est équivalent à l'orientation — positive dans le sens horaire — de la droite reliant les plateaux 8, 7 et 6 par rapport à celle passant par les blocs 9, 1 et 5. Mathématiquement cet angle est défini par l'équation :

$$\alpha_d = \tan^{-1} \left(\frac{(h_4 - h_5) - (h_2 - h_9)}{2d} \right) \quad (6.17)$$

FIG. 6.15 – Schématisation de l'angle de distorsion α_d .

Les quatre paramètres h_1 , α_f , α_l et α_d représentent donc chacun un degré de liberté du système. Ils sont regroupés dans le vecteur des coordonnées cartésiennes suivant :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_1 & \alpha_f & \alpha_l & \alpha_d \end{bmatrix}^T \quad (6.18)$$

6.3.2 Problème géométrique direct

Rappelons que le problème géométrique direct consiste à définir les coordonnées cartésiennes (\mathbf{x}) à partir de celles articulaires ($\boldsymbol{\rho}$). Premièrement, les mécanismes de moyennage font en sorte que les éléments 3, 5, 7 et 9 sont moyennés à partir de ceux 2, 4, 6 et 8 (voir figure 6.12) selon les relations

$$h_3 = \frac{h_2 + h_4}{2} \quad (6.19a)$$

$$h_5 = \frac{h_4 + h_6}{2} \quad (6.19b)$$

$$h_7 = \frac{h_6 + h_8}{2} \quad (6.19c)$$

$$h_9 = \frac{h_8 + h_2}{2} \quad (6.19d)$$

À l'aide de ces équations, on est en mesure d'écrire la position du bloc central, sachant que celui-ci est positionné au milieu des blocs 3, 5, 7 et 9, ce qui donne

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{h_3 + h_7}{2} = \frac{h_5 + h_9}{2} \\ &= \frac{h_2 + h_4 + h_6 + h_8}{4} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Pour les orientations, on remplace les expressions (6.19) dans leur définition mathématique respective, soit les équations (6.15) à (6.17), pour obtenir

$$\alpha_f = \tan^{-1} \left(\frac{h_2 + h_4 - h_6 - h_8}{4d} \right) \quad (6.21)$$

$$\alpha_l = \tan^{-1} \left(\frac{h_4 + h_6 - h_2 - h_8}{4d} \right) \quad (6.22)$$

$$\alpha_d = \tan^{-1} \left(\frac{h_4 + h_8 - h_2 - h_6}{4d} \right) \quad (6.23)$$

Les équations (6.20) à (6.23) constituent donc la solution au problème géométrique direct du système modulaire à quatre actionneurs.

6.3.3 Problème géométrique inverse

Pour obtenir les coordonnées articulaires à partir de celles cartésiennes, on débute en écrivant les positions des plateaux actionnés à l'aide des relations géométriques de la figure 6.15. Ceci donne les quatre équations suivantes :

$$h_2 = h_3 - d \tan(\alpha_l + \alpha_d) \quad (6.24)$$

$$h_4 = h_3 + d \tan(\alpha_l + \alpha_d) \quad (6.25)$$

$$h_6 = h_7 + d \tan(\alpha_l - \alpha_d) \quad (6.26)$$

$$h_8 = h_7 - d \tan(\alpha_l - \alpha_d) \quad (6.27)$$

Finalement, on fait apparaître, dans ces équations, les variables cartésiennes h_1 et α_f en y remplaçant les équations (6.19a) et (6.19c). On obtient ainsi la solution au problème géométrique inverse :

$$h_2 = h_1 + d \tan(\alpha_f) - d \tan(\alpha_l + \alpha_d) \quad (6.28)$$

$$h_4 = h_1 + d \tan(\alpha_f) + d \tan(\alpha_l + \alpha_d) \quad (6.29)$$

$$h_6 = h_1 - d \tan(\alpha_f) + d \tan(\alpha_l - \alpha_d) \quad (6.30)$$

$$h_8 = h_1 - d \tan(\alpha_f) - d \tan(\alpha_l - \alpha_d) \quad (6.31)$$

6.3.4 Équations de vitesse

Pour obtenir une relation entre les vitesses cartésiennes et articulaires, on dérive tout simplement les équations du problème géométrique inverse par rapport au temps. Or, sachant que

$$\frac{d}{dt}(\tan u) = (\sec^2 u) \frac{du}{dt}, \quad (6.32)$$

on obtient :

$$\dot{h}_2 = \dot{h}_1 + d \sec^2(\alpha_f) \dot{\alpha}_f - d \sec^2(\alpha_l + \alpha_d) (\dot{\alpha}_l + \dot{\alpha}_d) \quad (6.33)$$

$$\dot{h}_4 = \dot{h}_1 + d \sec^2(\alpha_f) \dot{\alpha}_f + d \sec^2(\alpha_l + \alpha_d) (\dot{\alpha}_l + \dot{\alpha}_d) \quad (6.34)$$

$$\dot{h}_6 = \dot{h}_1 - d \sec^2(\alpha_f) \dot{\alpha}_f + d \sec^2(\alpha_l - \alpha_d) (\dot{\alpha}_l - \dot{\alpha}_d) \quad (6.35)$$

$$\dot{h}_8 = \dot{h}_1 - d \sec^2(\alpha_f) \dot{\alpha}_f - d \sec^2(\alpha_l - \alpha_d) (\dot{\alpha}_l - \dot{\alpha}_d) \quad (6.36)$$

Ces équations de vitesse peuvent s'écrire de façon matricielle, suivant la relation

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.37)$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{h}_2 & \dot{h}_4 & \dot{h}_6 & \dot{h}_8 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad (6.38a)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 & \dot{\alpha}_f & \dot{\alpha}_l & \dot{\alpha}_d \end{bmatrix}^T \quad (6.38b)$$

et avec

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & d \sec^2(\alpha_f) & -d \sec^2(\alpha_l + \alpha_d) & -d \sec^2(\alpha_l + \alpha_d) \\ 1 & d \sec^2(\alpha_f) & d \sec^2(\alpha_l + \alpha_d) & d \sec^2(\alpha_l + \alpha_d) \\ 1 & -d \sec^2(\alpha_f) & d \sec^2(\alpha_l - \alpha_d) & -d \sec^2(\alpha_l - \alpha_d) \\ 1 & -d \sec^2(\alpha_f) & -d \sec^2(\alpha_l - \alpha_d) & d \sec^2(\alpha_l - \alpha_d) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Ici, les paramètres \dot{h}_i sont les vitesses linéaires des blocs i , alors que les variables $\dot{\alpha}_f$, $\dot{\alpha}_l$ et $\dot{\alpha}_d$ sont les vitesses angulaires des orientations cartésiennes.

6.4 Sommaire

L'étude des architectures spatiales du mécanisme de moyennage plan, présentée dans cette section, a permis de sélectionner la configuration possédant un actionneur dans chaque coin du module comme étant la plus propice dans l'application d'une scène de spectacle dynamiquement reconfigurable. Cette sélection fut basée sur l'analyse des configurations relatives au nombre d'actionneurs et à leur position sous les éléments mobiles. En somme, cette architecture est à la fois mécaniquement stable tout en permettant une grande quantité de mouvements différents. De plus, elle requiert une quantité respectable d'actionneurs, soit quatre par module. Finalement, une brève étude cinématique de cette solution a été développée. Celle-ci permettra ultérieurement de commander la position des éléments mobiles de la scène de spectacle.

Chapitre 7

Prototype

Suite aux analyses théoriques présentées dans les chapitres précédents, un prototype a été construit afin de valider les concepts mécaniques. De plus, cette étape a permis de faire des essais réels de simulations de mouvements en utilisant un système de commande. Le prototype fabriqué représente un module de la scène du castelet électronique. L'espace de travail des neuf plateaux mobiles a donc la forme d'un cube de 20 centimètres d'arête. Il a été construit selon la configuration où quatre actionneurs sont dans les coins du module. Ce chapitre présente donc les aspects importants de la conception et de la fabrication des composantes mécaniques ainsi qu'un bref aperçu du système de commande de ce prototype. Finalement, quelques résultats pratiques sont aussi exposés.

7.1 Composantes mécaniques

7.1.1 Plateaux et mécanismes de moyennage

Tout d'abord, les neuf blocs mobiles, servant de plateaux au module, ont tout simplement la forme de prismes rectangulaires creux et sans fond (figure 7.1). Sous ces prismes sont fixées des tiges de support qui possèdent des ouvertures permettant d'y joindre les barres des mécanismes de moyennage. Ces barres de moyennage, pour leur

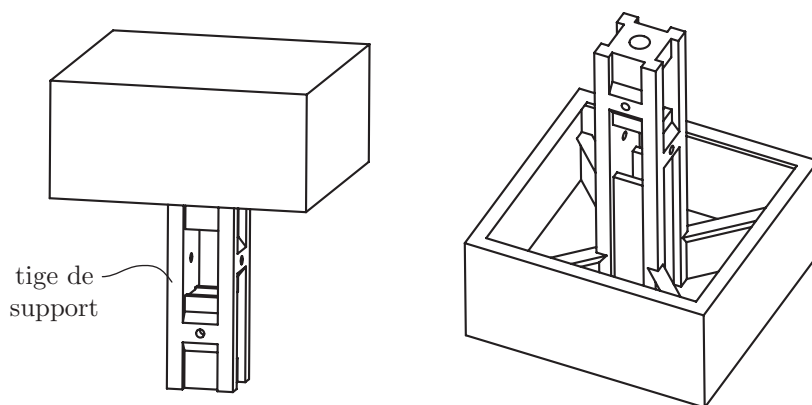


FIG. 7.1 – Illustrations d'un élément mobile du prototype.

part, n'ont rien de particulier, à l'exception de celles latérales qui ne sont pas rectilignes. Celles-ci ont la forme d'un berceau afin d'éviter les interférences mécaniques (figure 7.2).

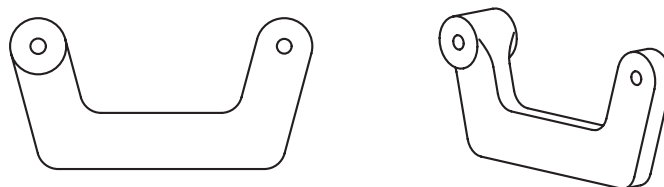


FIG. 7.2 – Illustrations d'une barre latérale du mécanisme de moyennage du prototype.

Toutes ces composantes ont été fabriquées à l'aide d'une machine à prototypage rapide utilisant la technologie *FDM* (*Fused Deposition Modeling*). Cet outil permet de construire des pièces, qui ont préalablement été dessinées à l'aide d'un logiciel de conception graphique, en déposant de minces couches de plastique fondu les unes par

dessus les autres. Les avantages de cette méthode sont d'accélérer le processus de fabrication tout en diminuant les coûts. De plus amples informations sur ce type de prototypage rapide peuvent être trouvées en consultant la référence [19].

Les plateaux mobiles et les bielles de moyennage ont finalement été assemblés à l'aide de petites tiges métalliques de manière à créer des liaisons rotoïdes. Le schéma final de ces composantes est présenté à la figure 7.3.

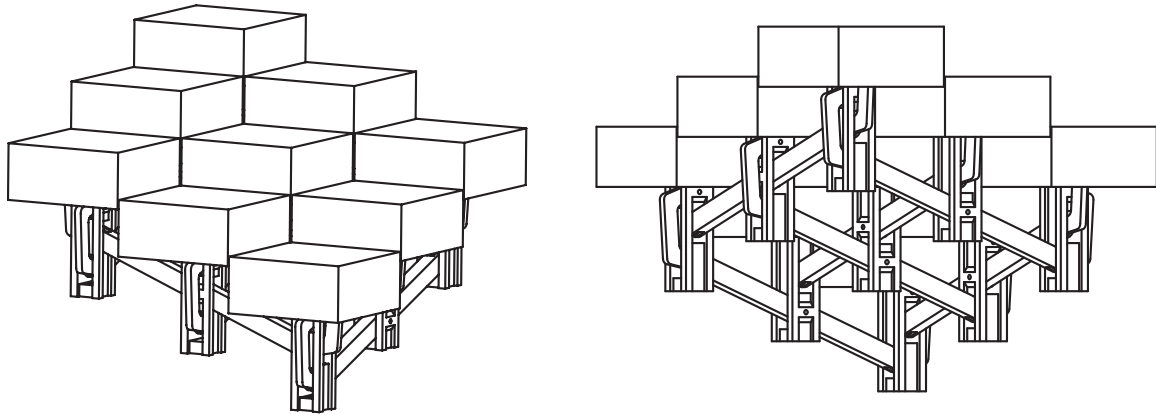


FIG. 7.3 – Illustrations de l'assemblage des plateaux mobiles et des mécanismes de moyennage du prototype.

7.1.2 Actionneurs linéaires et châssis

Pour ce prototype, quatre actionneurs linéaires sont nécessaires. Plusieurs éléments mécaniques peuvent être utilisés pour réaliser cette tâche ; par exemple, des vérins ou des agencements de bielles actionnées par des moteurs. Ici, la solution qui a été retenue fait usage d'une tige filetée actionnée par un moteur électrique. La figure 7.4 montre les différentes composantes d'un de ces montages.

Premièrement, le moteur est fixé à une plaque métallique à l'aide de vis. Sur l'arbre de ce moteur est placé un engrenage en plastique qui permet de transférer la puissance au groupe écrou par l'entremise d'une autre roue dentée. Le groupe écrou est composé d'un écrou en bronze, de deux roulements à billes ainsi que d'une cage en plastique¹. L'extrémité supérieure de la tige filetée est fixée à un bloc mobile (non illustré) alors

1. Pour ne pas alourdir la figure 7.4, ces composantes ne sont pas schématisées individuellement.

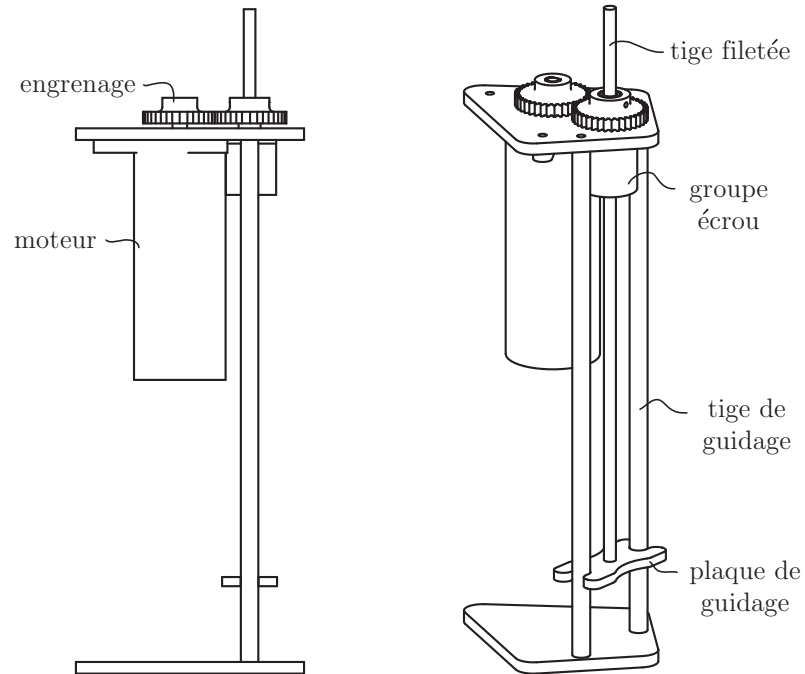


FIG. 7.4 – Montage d'un actionneur linéaire du prototype.

que celle inférieure est attachée à une plaque de guidage en plastique. Cette plaque de guidage coulisse le long de deux tiges métalliques qui font le lien entre les plaques supérieures et inférieures du châssis. De cette manière, lorsque le moteur est actionné, la tige filetée monte ou descend selon le sens de rotation du moteur. Une vidéo de ceci est présentée sur le CD-Rom d'accompagnement (vidéo 1).

Finalement, le châssis du prototype est composé de deux plaques métalliques qui sont parallèlement fixées à l'aide des tiges de guidage (figure 7.5). Ces éléments cylindriques servent donc à la fois de supports et de guides.

7.1.3 Contraintes supplémentaires

Il a été mentionné, dans le précédent chapitre, que les configurations à quatre actionneurs permettent en général d'avoir un module qui ne possède que quatre degrés de liberté. Il a également été démontré que quelques configurations relatives à la position des actionneurs font en sorte de perdre localement un ou plusieurs de ces degrés de liberté. Ces configurations furent nommées *solutions mécaniquement incompatibles*

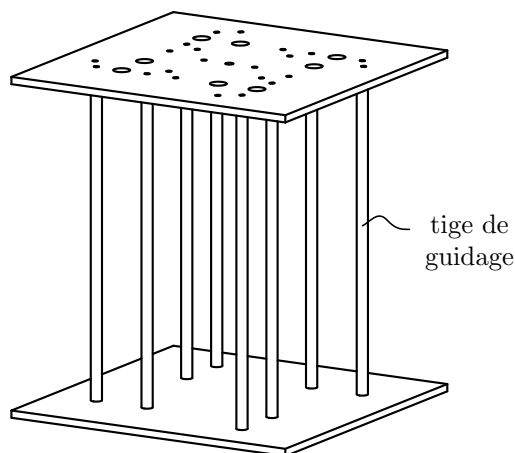


FIG. 7.5 – Illustration du châssis du prototype.

par le fait qu'elles ne permettent pas aux actionneurs d'être mus indépendamment les uns des autres. Or, à l'inverse, il existe d'autres configurations qui font en sorte d'augmenter le nombre de degrés de liberté d'un module. Ces solutions sont donc des cas mécaniquement sous-contraints. Ces situations n'ont pas été soulignées dans le chapitre précédent puisqu'il est de façon générale assez facile de les rendre fonctionnelles — elles étaient donc incluses dans les solutions réalisables. À cet effet, la configuration des actionneurs utilisée dans le prototype est un exemple de configuration sous-contrainte. Cette section explique donc la raison qui amène les mouvements superflus de ce cas précis — où les actionneurs sont placés aux quatre coins du module — et un moyen de les contraindre.

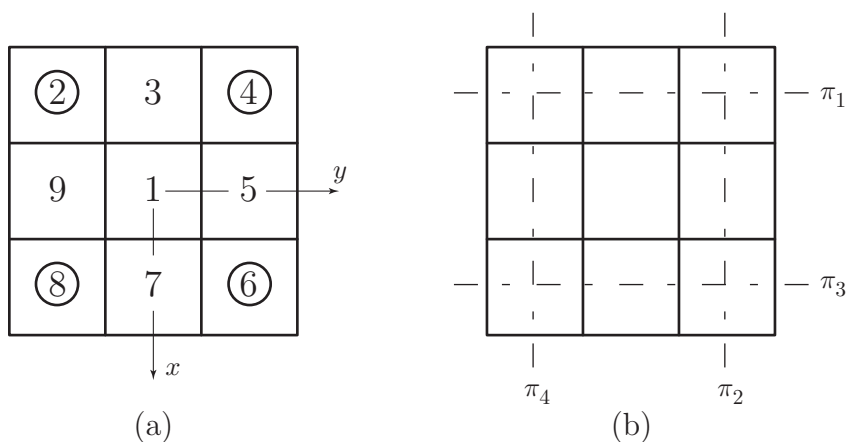


FIG. 7.6 – (a) Numérotation et (b) plans de contraintes des éléments mobiles du prototype.

Tout d'abord, si on regarde le module du dessus, comme à la figure 7.6, on peut remarquer que le mécanisme de moyennage, reliant les éléments actionnés 2 et 4, oblige le bloc 3 à se déplacer le long du plan π_1 ². De même, les blocs 5, 7 et 9 sont respectivement contraints à bouger dans les plans π_2 , π_3 et π_4 . Les plateaux 9, 1 et 5 peuvent donc se déplacer, en bloc, selon la direction de l'axe x ou pivoter par rapport à l'axe y , alors que les plateaux 3, 1 et 7 peuvent bouger librement selon l'axe y ou tourner autour de l'axe x . Évidemment, ces quatre degrés de liberté supplémentaires ne sont pas contrôlés et sont donc inutiles.

Pour empêcher ces mouvements superflus, il est possible d'obliger le bloc du centre à se déplacer verticalement. Ceci vient compléter les contraintes permettant d'empêcher les mouvements dans le plan x - y des cinq plateaux non-actionnés. Pour le prototype, cette imposition de mouvement a été effectuée à l'aide d'une articulation prismatique passive. Mécaniquement, une tige cylindrique est fixée, par son extrémité supérieure, à l'élément central. L'autre extrémité est attachée à une plaque de guidage — similaire à celles utilisées pour les actionneurs linéaires — coulissant contre deux tiges de guidage. Ceci est représenté à la figure 7.7.

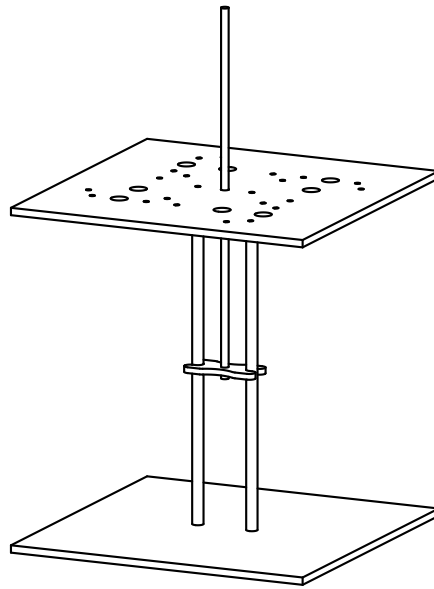


FIG. 7.7 – Illustration de l'articulation prismatique passive du bloc central imposant des contraintes supplémentaires au prototype.

2. À la figure 7.6(b), ce plan est représenté graphiquement en deux dimension par un axe.

7.1.4 Design complet

En assemblant toutes les composantes mécaniques présentées dans les sections précédentes, on obtient le design final du prototype d'un module de la scène du castelet électronique. Ce prototype est représenté schématiquement à la figure 7.8, alors que la figure 7.9 montre une photo du montage.

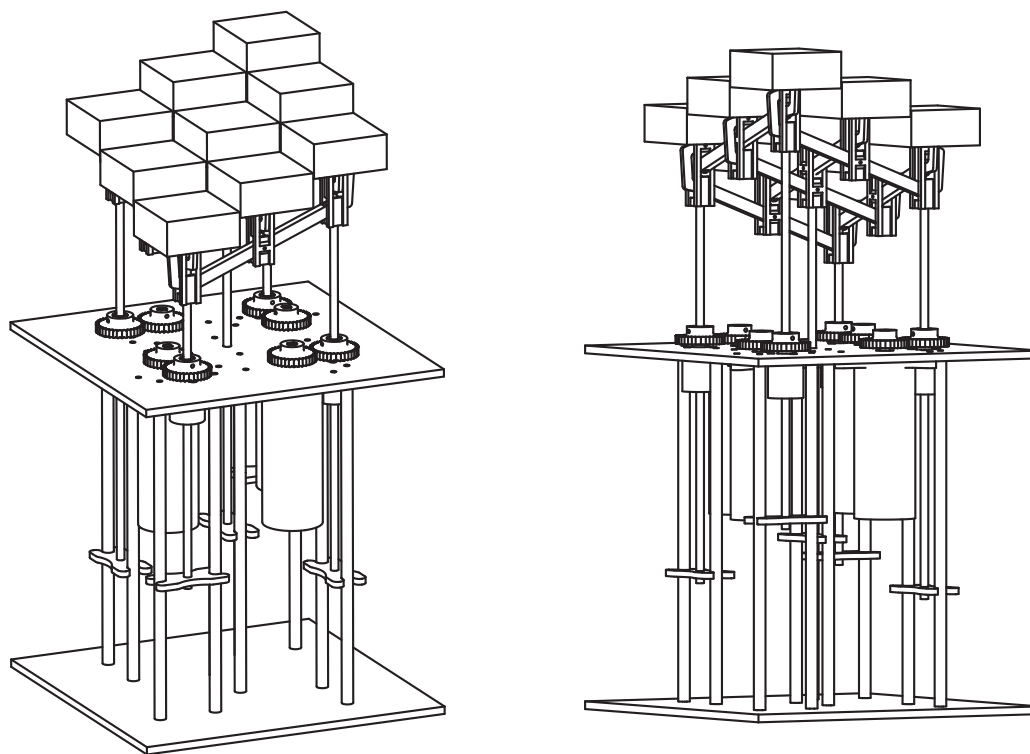


FIG. 7.8 – Illustrations du prototype d'un module de la scène du castelet électronique.

Plusieurs illustrations des composantes mécaniques du prototype sont disponibles sur le CD-Rom d'accompagnement (illustrations 1 à 10).

7.2 Commande

La commande de ce prototype est assurée par le système de simulation technique *RT-LAB* de la compagnie *Opal-RT*. Ce système permet, en plus de la simulation, de contrôler les actionneurs d'un montage en temps réel. La programmation du contrôleur

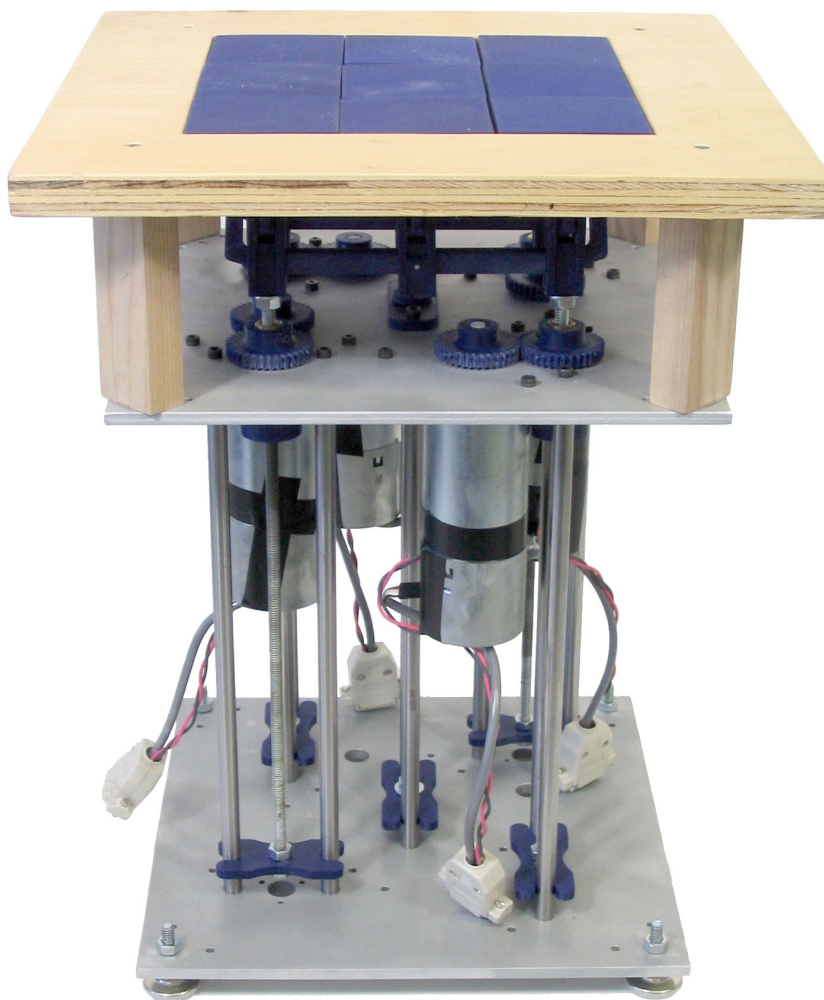


FIG. 7.9 – Photo du prototype d'un module de la scène du castelet électronique.

est faite en utilisant l'outil *Simulink* du logiciel *Matlab*. Ce logiciel est, en premier lieu, un langage de programmation, mais permet également d'utiliser différents produits complémentaires, notamment *Simulink*. L'outil *Simulink*, pour sa part, permet de faire de la programmation en utilisant des schémas-blocs. De manière simple, ce type de programmation consiste à relier des éléments graphiques — schématisant des fonctions mathématiques, des données acquises du système, des constantes, des éléments logiques, etc. — à l'aide de lignes représentant leurs connexions. Ainsi, la compilation de ces schémas-blocs permet de contrôler le prototype. Un exemple de schéma-bloc simple est présenté à la figure 7.10. Dans cet exemple, une variable α est d'abord multipliée par la constante dix. Le résultat de cette multiplication est ensuite assigné à l'argument de

la fonction sinus. Finalement, le résultat de la fonction trigonométrique est conservé dans la variable β .

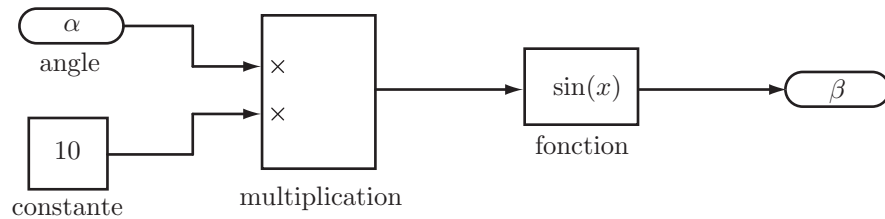


FIG. 7.10 – Exemple simple de schéma-bloc.

La commande du prototype nécessite plusieurs composantes physiques. Ces composantes communiquent entre elles selon le schéma de la figure 7.11. Ainsi, la commande (de position ou de mouvement) est donnée par l'utilisateur à partir d'un ordinateur. Cette information est ensuite transférée au nœud de calcul. Celui-ci n'est en fait qu'un ordinateur indépendant qui permet de calculer la position, la vitesse et l'accélération des actionneurs à chaque incrément de temps en fonction du type de commande programmée. Avec ces données, il est possible de connaître le couple mécanique nécessaire, ou proportionnellement, l'intensité électrique, qui doit être fourni par chaque moteur de type DC. Des intensités électriques sont ensuite envoyées aux moteurs du prototype à partir d'une boîte d'amplification. De manière inverse, chaque moteur possède un encodeur qui permet de mesurer sa position angulaire. Ces informations sont transférées au nœud de calcul via l'amplificateur afin de calculer la position des plateaux mobiles. Ces positions sont nécessaires pour le calcul des positions, vitesses et accélérations de l'incrément de temps suivant. Finalement, les données cinématiques du prototype — au-

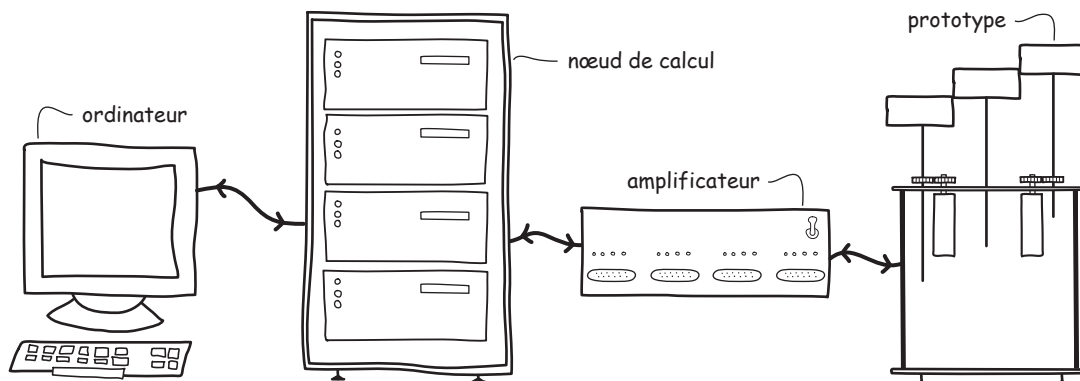


FIG. 7.11 – Schéma des composantes physiques nécessaires à la commande du prototype.

tant celles réelles que celles calculées — et les couples aux moteurs peuvent être envoyés du nœud de calcul à l'ordinateur de l'utilisateur pour être représentés graphiquement.

7.2.1 Interface graphique

Afin de faciliter l'utilisation du prototype, une interface graphique de commande a été réalisée. Celle-ci permet d'assigner au module une nouvelle position articulaire ou cartésienne selon un laps de temps défini. Ce type de commande est communément appelé *pick and place*. Il s'agit d'un type de commande où seules les positions initiales et finales ainsi que le temps de déplacement sont importants — la trajectoire effectuée ne l'étant pas.

L'interface graphique représente les neuf blocs du module de la scène (voir l'illustration 11 du Cd-Rom d'accompagnement). Il est ainsi possible de faire varier les coordonnées articulaires ou cartésiennes. La commande peut se faire de deux façons. La première permet d'augmenter ou de diminuer la valeur d'une coordonnée d'un certain incrément, tout simplement en cliquant sur les onglets *haut* et *bas* correspondants. La deuxième méthode consiste à écrire directement la position désirée dans une boîte de texte associée. Dans les deux cas, la commande utilise un laps de temps défini à l'avance par l'utilisateur (boîte de texte nommée *durée*).

7.2.2 Commande sinusoïdale

Pour obtenir des trajectoires plus complexes et plus fluides, une commande sinusoïdale a été développée. Ce type de commande permet de contrôler les coordonnées articulaires selon des trajectoires sinusoïdales de la forme

$$f(t) = a \sin(\omega t + c) \quad (7.1)$$

Il est ainsi possible d'obtenir des trajectoires différentes en modifiant l'amplitude a , la fréquence angulaire ω et la phase c . Quatre équations de ce type sont donc nécessaires pour commander indépendamment les quatre actionneurs.

Ce type de commande ainsi que celle utilisant l'interface graphique ont permis de

générer plusieurs mouvements du prototype. Les cas les plus intéressants sont maintenant présentés.

7.3 Résultats

D'une part, les caractéristiques techniques les plus importantes du prototype sont résumées dans le tableau 7.1. On remarque, entre autres, que les éléments mobiles peuvent se déplacer à une vitesse d'une hauteur de bloc par seconde (25 mm/s), ce qui permet au prototype de passer de sa configuration la plus basse à celle la plus haute en environ huit secondes. D'autre part, les résultats les plus intéressants à analyser

Caractéristiques	Valeurs numériques
Dimensions du prototype	330 mm×330 mm×440 mm
Espace de travail des plateaux mobiles	200 mm×200 mm×200 mm
Vitesse verticale maximale	25 mm/s
Accélération verticale maximale	200 mm/s ² (0,02g)
Écart vertical maximal entre deux éléments	25 mm
Écart vertical maximal entre deux modules	200 mm

TAB. 7.1 – Caractéristiques techniques du prototype d'un module de la scène du castelet électronique.

sont évidemment les mouvements du prototype. Or, pour bien apprécier les qualités artistiques de ces déplacements, plusieurs vidéos du prototype ont été réalisées et sont disponibles sur le CD-Rom d'accompagnement. Malgré le fait que ces vidéos soient très explicites, elles sont sommairement décrites dans ce qui suit.

En premier lieu, la méthode de commande utilisant une interface graphique a permis d'isoler les quatre mouvements de base du module qui correspondent à la variation indépendante des coordonnées cartésiennes. Ainsi, la vidéo 2 présente le déplacement vertical des blocs. Il s'agit donc d'une commande faite sur la position du bloc central. Ensuite, les vidéos 3 et 4 montrent respectivement les mouvements obtenus lorsque les angles frontal et latéral sont modifiés. Finalement, la distorsion du module est présentée dans la vidéo 5.

En second lieu, quelques mouvements plus complexes ont été générés à l'aide de la commande sinusoïdale. Ainsi, les vidéos 6 et 7 présentent respectivement des trajectoires où un et deux actionneurs sont mus. De plus, deux types de vagues sont montrés dans les vidéos 8 et 9. Les mouvements de ces deux derniers cas sont très intéressants.

En troisième lieu, les vidéos 10, 11 et 12 mettent l'accent sur le travail des composantes mécaniques. Ces vidéos n'apportent pas de trajectoires nouvelles, mais montrent les éléments qui ne seraient normalement pas visibles par les spectateurs. Finalement, quelques photos du prototype sont également disponibles sur ce CD-Rom (photos 4 à 8).

Évidemment, ces vidéos ne présentent que quelques possibilités de trajectoires de ce module à quatre degrés de liberté. Malgré tout, il est possible de constater la fluidité ainsi que la grande diversité des mouvements. Évidemment, en plaçant plusieurs de ces prototypes les uns à côté des autres, les résultats seraient encore plus impressionnants. De plus, on peut remarquer la corrélation entre les animations théoriques (animations 13 à 18) et les vidéos du prototype réel. Somme toute, le prototype permet de valider l'étude de la scène de spectacle faite dans ce mémoire et plus spécifiquement le choix de la solution retenue.

Chapitre 8

Conclusion

L'objectif premier de ce travail de maîtrise étant de concevoir une scène de spectacle dynamiquement reconfigurable, permettant une vaste gamme de positions et de trajectoires, nous avons étudié, en tenant compte d'un cahier des charges réaliste, différents aspects technologiques et artistiques menant à la réalisation d'un prototype d'un plancher de scène.

Conceptuellement, le design sélectionné utilise une approche discrète où une multitude d'éléments peuvent être positionnés verticalement. Ce concept fut, en grande partie, choisi puisqu'il permet une polyvalence de poses et de mouvements artistiquement intéressants. La modularité du système aide également à reconfigurer aisément les dimensions de la scène et à transporter celle-ci dans d'autres lieux, en plus de permettre des écarts de hauteur importants entre les modules. De plus, un mécanisme de moyennage diminue la quantité d'actionneurs nécessaires. Les modules, qui peuvent être

placés les uns à côté des autres de différentes manières, comptent donc neuf éléments discrets où quatre de ceux-ci (ceux des coins) sont actionnés. Cette configuration à quatre degrés de liberté fut sélectionnée, parmi plusieurs autres, pour sa simplicité et sa stabilité mécanique.

En ce qui concerne la commande, les équations régissant les problèmes géométriques direct et inverse de la version bidimensionnelle du mécanisme de moyennage sont relativement complexes. Or, l'optimisation des paramètres géométriques — qui est basée sur l'analyse des erreurs de position du mécanisme — a permis de simplifier grandement ces expressions. Finalement, un modèle dynamique plan a été proposé. Pour le module tridimensionnel, une étude cinématique simplifiée fut également réalisée.

En pratique, les résultats obtenus avec le prototype d'un module de la scène du castelet électronique sont prometteurs. Les mouvements étudiés sont fluides et d'une grande diversité. De plus, ces mouvements concordent parfaitement avec les animations théoriques. Il y a donc une corrélation parfaite entre les modèles théoriques et les résultats pratiques.

Somme toute, la synthèse et l'analyse d'une scène de spectacle dynamiquement reconfigurable, présentée dans ce mémoire, pose des bases dans ce domaine très peu étudié. Il a donc été prouvé, à l'aide de cette étude et du prototype, qu'il est possible de concevoir une scène de spectacle dynamiquement reconfigurable qui est artistiquement intéressante. Évidemment, dans la poursuite du projet avec le *Lantiss*, beaucoup de travail reste à faire. À court terme, la conception de la scène du castelet électronique nécessitera quelques ajustements. À titre d'exemple, certains éléments mécaniques, tels que les actionneurs, devront être modifiés afin de répondre plus adéquatement aux exigences du système. De plus, la commande efficace et abordable de plusieurs modules demeure encore un grand défi. À moyen terme, l'élaboration d'une scène à échelle réelle laisse présager également plusieurs embûches, dont entre autres, les aspects relatifs à la sécurité qui sont souvent très complexes. Néanmoins, les résultats théoriques et pratiques obtenus dans cette première étude permettent d'être optimiste face à l'avenir de ce projet. Souhaitons, en terminant, que les travaux présentés dans ce mémoire aident au développement d'une scène de spectacle mobile permettant l'amélioration artistique des créations scéniques.

Bibliographie

- [1] MORETTI, J.-C. *Théâtre et société dans la Grèce antique*, Librairie Générale Française, 2001, 321 p.
- [2] NAVARRE, O. *Le Théâtre grec*, Paris, Editions d'aujourd'hui, 1925, 280 p.
- [3] ASHBY, C. *Classical Greek Theater : new views of an old subject*, Iowa, University of Iowa Press, 1998, 191 p.
- [4] BONNAT, Y. *L'Éclairage des spectacles*, Paris, Librairie Théâtrale, 1982, 86 p.
- [5] BABLET, D. *Josef Svoboda*, Dole du Jura, La cité, 1970, 340 p.
- [6] BURIAN, J. *Svoboda :Wagner, Josef Svoboda's scenography for Richard Wagner's operas*, Middletown, Wesleyan university press, 1983, 117 p.
- [7] BURIAN, J. *The secret of theatrical space : The memoirs of Josef Svoboda*, New-York, Applause theatre book publishers, 1993, 144 p.
- [8] NOMA, H., T. SUGIHARA et T. MIYASATO. « Development of ground surface simulator for Tel-E-Merge system », *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Virtual Reality* , Orlando, Floride, mars 2000, p. 217-224.
- [9] ROSEN, D., A. NGUYEN et H. WANG. « On the geometry of low degree-of-freedom Digital clay human-computer interface devices », *Proceedings of the 2003 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, Illinois, septembre 2003.

- [10] CLARK, P. E. et *alii.* « PAM : Biologically Inspired Engineering and Exploration Mission Concept, Components, and Requirements for Asteroid Population Survey », *IAC*, Vancouver, 2004.
- [11] KAJIMOTO, H. et *alii.* « Pop Up! : A Novel Technology for Shape Display of 3D Objects », Conférence Siggraph, Los Angeles, 2004.
- [12] JOSHI, S. et L.-W. TSAI. « A comparison Study of Two 3-DOF Parallel Manipulators : One with Three and the Other with Four Supporting Legs », *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotic & Automation*, Washington, DC, mai 2002, p. 3690-3697.
- [13] CARRETERO, J. A. et *alii.* « Kinematic analysis of a three-DOF parallel mechanism for telescope applications », *Proceeding of the 1997 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference*, Sacramento, Californie, septembre 1997.
- [14] NAHON, M., R. RICARD et C. M. GOSSELIN. « A comparison of flight simulator motion-base architectures », *CEAS Symposium of Simulation Technology*, octobre 1995, p. 1-16.
- [15] POULIOT, N. A., M. A. NAHON et C. M. GOSSELIN. « Analysis and comparison of the motion simulation capabilities of three-degree-of-freedom flight simulators », *Proceedings of the 1996 AIAA Flight Simulation Technologies Conference*, San Diego, Californie, 1996, p. 29-41.
- [16] YANG, P.-H., K. J. WALDRON et D. E. ORIN. « Kinematics of a three degree-of-freedom motion platform for a low-cost driving simulator », *Proceedings of the 5th. International Symposium of Advances in Robot Kinematics*, 1996, p. 89-98.
- [17] GOSSELIN, C. et J. ANGELES. « Singularity analysis of closed-loop kinematic chains », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, n° 3, 1990, p. 281-290.
- [18] ZLATANOV, D., R. G. FENTON et B. BENHABIB. « Singularity analysis of mechanisms and robots via a motion-space model of the instantaneous kinematics », *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, 1994, p. 980-991.
- [19] LALIBERTÉ, T., C. M. GOSSELIN et G. CÔTÉ. « Rapid prototyping of lower-pair, geared-pair and cam mechanisms », *Proceedings of the 2000 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Baltimore, Maryland, septembre 2000.
- [20] BEYER, W. H. *Standard Mathematical Tables*, Boca Raton, CRC Press inc., 1980, 613 p.

Annexe A

Animations, vidéos, illustrations et photos du CD-Rom d'accompagnement

Un objectif important de l'analyse de la scène de spectacle dynamiquement reconfigurable est le résultat esthétique des mouvements. Or, il est important que le lecteur puisse apprécier, non seulement par des illustrations, mais également avec des séquences animées, les manoeuvres des différents concepts analysés. Pour cette raison, le CD-Rom d'accompagnement contient des données multimédia sur les solutions présentées dans les différents chapitres. Ainsi, afin de faciliter la compréhension du mémoire, il est fortement suggéré de consulter le CD-Rom au fur et à mesure qu'il est cité dans le texte.

De manière fonctionnelle, le CD-Rom possède quatre planches d'information, soit celle des animations, des vidéos, des illustrations et des photos. Pour avoir accès à ces différents menus, vous n'avez qu'à cliquer sur l'onglet correspondant. De la même manière, pour consulter un élément multimédia d'une planche d'information, vous n'avez qu'à cliquer sur son icône.

Note : le CD-Rom peut être consulté avec les systèmes d'exploitations *Windows*, pour les ordinateurs compatibles, ou celui *Mac OS X* pour ceux de la compagnie *Apple*.

Annexe B

Architecture sérielle versus architecture parallèle

Dans le cadre de ce mémoire sont utilisés à quelques reprises les termes mécanismes sériels et parallèles. Ces terminologies ayant une importance considérable, cette annexe explique brièvement ce qui les distingue l'une de l'autre

De manière simpliste, un mécanisme parallèle est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes. De façon analogue, un mécanisme sériel est un mécanisme en chaîne cinématique ouverte dont l'organe terminal est relié à la base par une seule chaîne cinématique. La figure B.1 présente un cas de chaque configuration pour une application à trois degrés de liberté. Dans ces deux cas, les mécanismes sont mus par trois actionneurs rotatifs. Ici, les effecteurs sont représentés par les deux cercles noirs. Dans

cette application, l'objectif est tout simplement de positionner et d'orienter l'effecteur dans le plan.

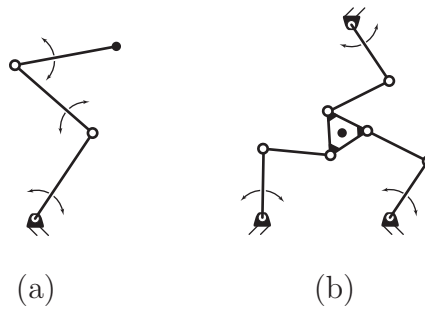


FIG. B.1 – Mécanismes plans à deux degrés de liberté de conceptions (a) sérielle et (b) parallèle.

En général, les manipulateurs parallèles ont une grande rigidité et permettent donc de faire des déplacements dynamiques avec une grande précision. Ils peuvent également transporter une plus grande charge et nécessitent des actionneurs moins puissants que les manipulateurs sériels. Par contre, les architectures sérielles ont généralement comme avantage d'avoir un espace atteignable plus important que celles parallèles.

Finalement, les robots sériels sont souvent utilisés dans des applications industrielles où la charge à mouvoir n'est pas importante, mais où le manipulateur doit contourner des objets pour effectuer sa tâche. Une utilisation typique est la soudure de carrosseries de voitures sur les chaînes de montage. Le bras robotique doit alors entrer à l'intérieur de l'automobile afin d'accomplir son travail. Pour leur part, les robots parallèles sont majoritairement présents dans des applications nécessitant le déplacement d'une charge utile élevée ou lorsque les vitesses et les accélérations sont importantes. L'utilisation la plus fréquente des plates-formes parallèles se fait dans le domaine de la simulation de vol.

Annexe C

Études cinématiques de différentes plates-formes mobiles

Une étude cinématique sommaire (problème géométrique inverse, équations de vitesse et équations d'accélération) de chaque plate-forme présentée à la section *ystème par étage* (4.1) est ici développée.

C.1 Plate-forme parallèle à trois pattes

C.1.1 Problème géométrique inverse

Pour les trois plates-formes analysées dans cette annexe, les coordonnées articulaires sont les longueurs des vérins ρ_i , alors que les coordonnées cartésiennes sont définies par la hauteur du plateau mobile h (distance entre les points O et O') ainsi que les deux orientations α et θ (voir, en exemple, la figure C.1). Ces deux derniers angles représentent une rotation, positive dans le sens anti-horaire, de la plate-forme mobile par rapport à l'axe x et y' respectivement.

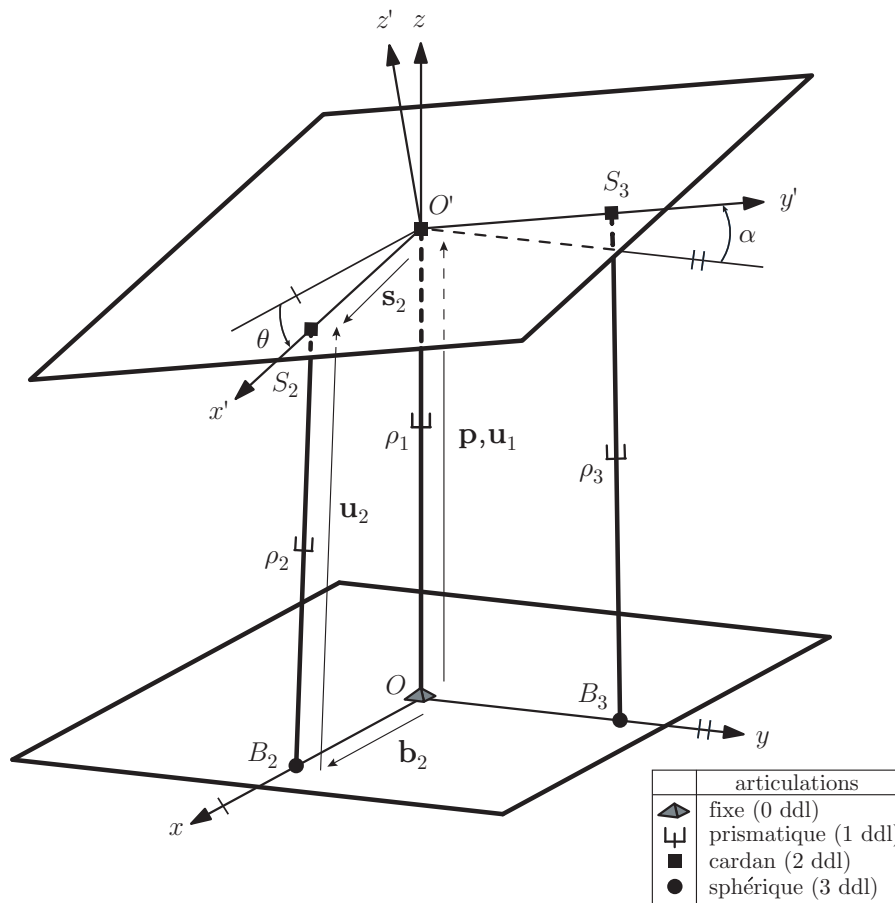


FIG. C.1 – Configuration schématique de la plate-forme parallèle à trois pattes.

Or, pour le cas de la plate-forme parallèle à trois pattes, le premier actionneur est

toujours aligné avec l'axe z . Ceci permet d'écrire directement

$$\rho_1 = h \quad (\text{C.1})$$

Les longueurs des deux autres actionneurs ($i = 2$ et 3) sont trouvées en utilisant les relations suivantes :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i) \quad (\text{C.3})$$

$$\rho_i = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)}, \quad i = 2, 3 \quad (\text{C.4})$$

Dans ces dernières équations, le vecteur \mathbf{u}_i fait le lien entre les points B_i et S_i — il est donc de longueur proportionnelle à l'allongement de l'actionneur ρ_i . Ensuite, le vecteur \mathbf{p} relie le point O au point O' . De plus, \mathbf{b}_i et \mathbf{s}_i lient respectivement les points O et B_i ainsi que O' et S_i . Finalement, les vecteurs \mathbf{s}_{i_0} sont les vecteurs \mathbf{s}_i exprimés dans le repère mobile \mathcal{R}' . Ces deux termes sont donc reliés par l'équation

$$\mathbf{s}_{i_0} = \mathbf{Q}\mathbf{s}_i \quad (\text{C.5})$$

où la matrice de rotation \mathbf{Q} est définie par

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \alpha \sin \theta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \theta \\ -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Les équations (C.1) et (C.4) forment donc le problème géométrique inverse de ce mécanisme.

C.1.2 Équations de vitesse

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive simplement les équations du problème géométrique inverse. La dérivée de l'équation (C.1) donne

$$\dot{\rho}_1 = \dot{h} \quad (\text{C.7})$$

alors que celle de l'équation (C.4) est exprimée par

$$2\rho_i \dot{\rho}_i = 2(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{i_0}) \quad (\text{C.8})$$

Dans cette dernière, la matrice $\dot{\mathbf{Q}}$ est la dérivée par rapport au temps de la matrice de rotation, soit

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 & \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta & -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta + \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta \\ \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \theta - \dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta & \dot{\alpha} \cos \alpha & -\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \theta - \dot{\theta} \cos \alpha \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Pour pouvoir exprimer le terme de droite de l'équation (C.8) en fonction des vitesses cartésiennes, on pose

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

ce qui permet d'écrire

$$\dot{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 & \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta & 0 & \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta \\ -\dot{\theta} \cos \alpha \cos \theta & 0 & -\dot{\theta} \cos \alpha \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.11})$$

$$\dot{\alpha} \mathbf{E}' \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta & -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta \\ \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \theta & \dot{\alpha} \cos \alpha & -\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

On peut donc combiner ces deux relations afin d'obtenir

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\alpha} \mathbf{E}' \mathbf{Q} + \dot{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{E} \quad (\text{C.13})$$

et l'équation (C.8) devient

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{u}_i^T (\dot{\alpha} \mathbf{E}' \mathbf{Q} + \dot{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{E}) \mathbf{s}_{i_0} \\ &= \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_i \dot{\alpha} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{i_0} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Finalement, les équations de vitesse (équations (C.7) et (C.14)) sont écrites de façon matricielle par la relation

$$\mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{C.15})$$

où

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & \dot{\rho}_2 & \dot{\rho}_3 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad (\text{C.16})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{h} & \dot{\alpha} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.17})$$

sont les vecteurs des vitesses articulaires et cartésiennes et où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} \\ u_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

sont les matrices jacobienues. Il est à noter que les scalaires u_i sont les composantes en z respectives des vecteurs \mathbf{u}_i . Il est possible de faire cette simplification puisque les contraintes naturelles du mécanisme empêchent les mouvements dans les directions x et y . Le vecteur $\dot{\mathbf{p}}$ est donc toujours de la forme

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{h} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.20})$$

et de cette manière le produit vectoriel $\mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}}$ peut-être remplacé par une simple multiplication ($u_i \dot{h}$).

C.1.3 Équations d'accélération

On dérive simplement les équations matricielles de vitesse (équation (C.15)) par rapport au temps, ce qui donne

$$\dot{\mathbf{A}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{C.21})$$

où

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \ddot{\rho}_1 & \ddot{\rho}_2 & \ddot{\rho}_3 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad (\text{C.22})$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{h} & \ddot{\alpha} & \ddot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.23})$$

sont les vecteurs des accélérations articulaires et cartésiennes et où

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\rho}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.24})$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{u}_2 & \dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_2 + \mathbf{u}_2^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_2 & \dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} + \mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} \\ \dot{u}_3 & \dot{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_3 + \mathbf{u}_3^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_3 & \dot{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} + \mathbf{u}_3^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

sont les dérivées des matrices jacobienues.

C.2 Plate-forme parallèle à quatre pattes

C.2.1 Problème géométrique inverse

De la même manière que pour la plate-forme à trois pattes, on obtient le problème géométrique inverse en utilisant les relations vectorielles suivantes :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i \quad (\text{C.26})$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i) \quad (\text{C.27})$$

$$\rho_i = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.28})$$

La notation des différents vecteurs et matrices est la même que celle présentée à la section précédente. Néanmoins, la figure C.2 montre schématiquement un cas de chaque famille de vecteurs.

C.2.2 Équations de vitesse

Pour obtenir les équations de vitesse, on dérive l'équation (C.28), ce qui donne :

$$2\rho_i \dot{\rho}_i = 2(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{i_0}) \quad (\text{C.29})$$

où $\dot{\mathbf{Q}}$ est la dérivée par rapport au temps de la matrice de rotation. Or, pour faire ressortir les vitesses articulaires de cette équation, on utilise le même artifice de calcul qu'à la section précédente, soit les équations (C.10) à (C.13), ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{u}_i^T (\dot{\alpha} \mathbf{E}' \mathbf{Q} + \dot{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{E}) \mathbf{s}_{i_0} \\ &= \mathbf{u}_i^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_{i_0} \dot{\alpha} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{i_0} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Le tout peut s'écrire de façon matricielle

$$\mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{C.31})$$

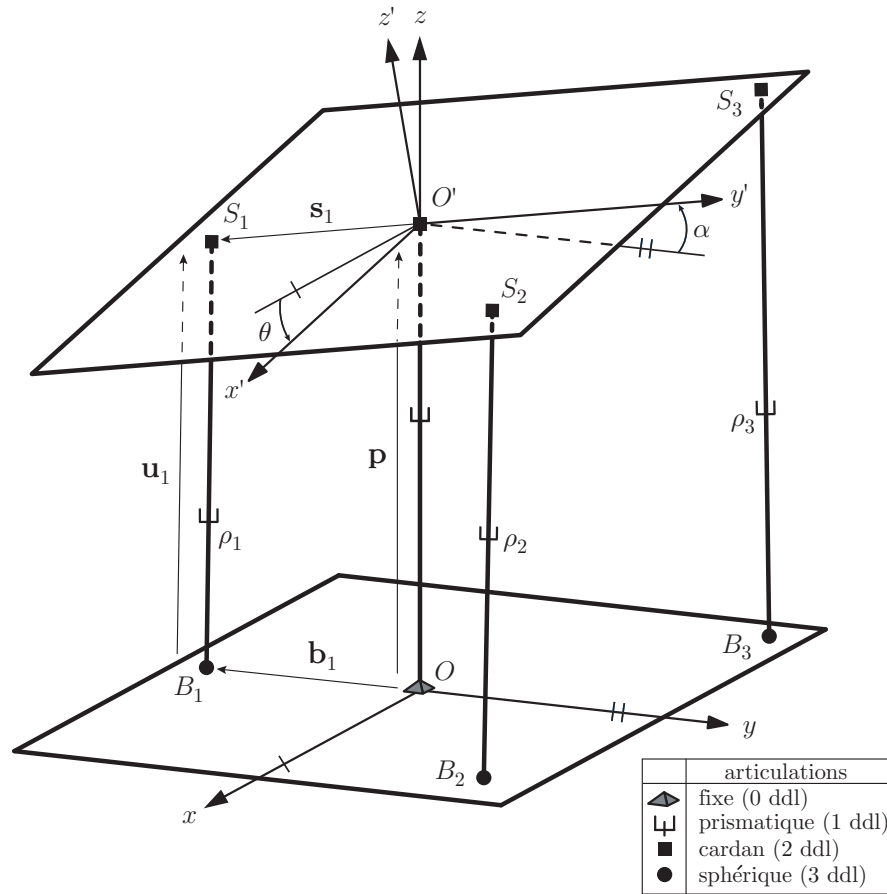


FIG. C.2 – Configuration schématique du mécanisme parallèle à quatre pattes.

où les matrices jacobiennes sont représentées par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.32})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} u_1 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_1 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{10} \\ u_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{20} \\ u_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{30} \end{bmatrix} \quad (\text{C.33})$$

C.2.3 Équations d'accélération

On dérive les équations matricielles de vitesse (équation (C.31)) par rapport au temps, ce qui donne

$$\dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{C.34})$$

où les dérivées des matrices jacobiennes s'écrivent ainsi :

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\rho}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.35})$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_1 + \mathbf{u}_1^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_1 & \dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{1_0} + \mathbf{u}_1^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{1_0} \\ \dot{u}_2 & \dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_2 + \mathbf{u}_2^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_2 & \dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} + \mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} \\ \dot{u}_3 & \dot{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_3 + \mathbf{u}_3^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_3 & \dot{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} + \mathbf{u}_3^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.36})$$

C.3 Plate-forme hybride

C.3.1 Problème géométrique inverse

Pour la plate-forme hybride, deux cas doivent être traités. Premièrement, on peut considérer que le premier actionneur est de la même longueur que la coordonnée cartésienne h :

$$\rho_1 = \sqrt{\mathbf{p}^T \mathbf{p}} = h \quad (\text{C.37})$$

Deuxièmement, pour les deux autres actionneurs ($i = 2$ et 3), on utilise la représentation graphique de la figure C.3 pour écrire

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v} + \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i \quad (\text{C.38})$$

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = (\mathbf{v} + \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{v} + \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i) \quad (\text{C.39})$$

$$\rho_i = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} = \sqrt{(\mathbf{v} + \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{v} + \mathbf{Q} \mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)}, \quad i = 2, 3 \quad (\text{C.40})$$

Ici, \mathbf{v} est le vecteur reliant le point O'' au point O' .

Le problème géométrique inverse de ce mécanisme est donc représenté par les équations (C.37) et (C.40).

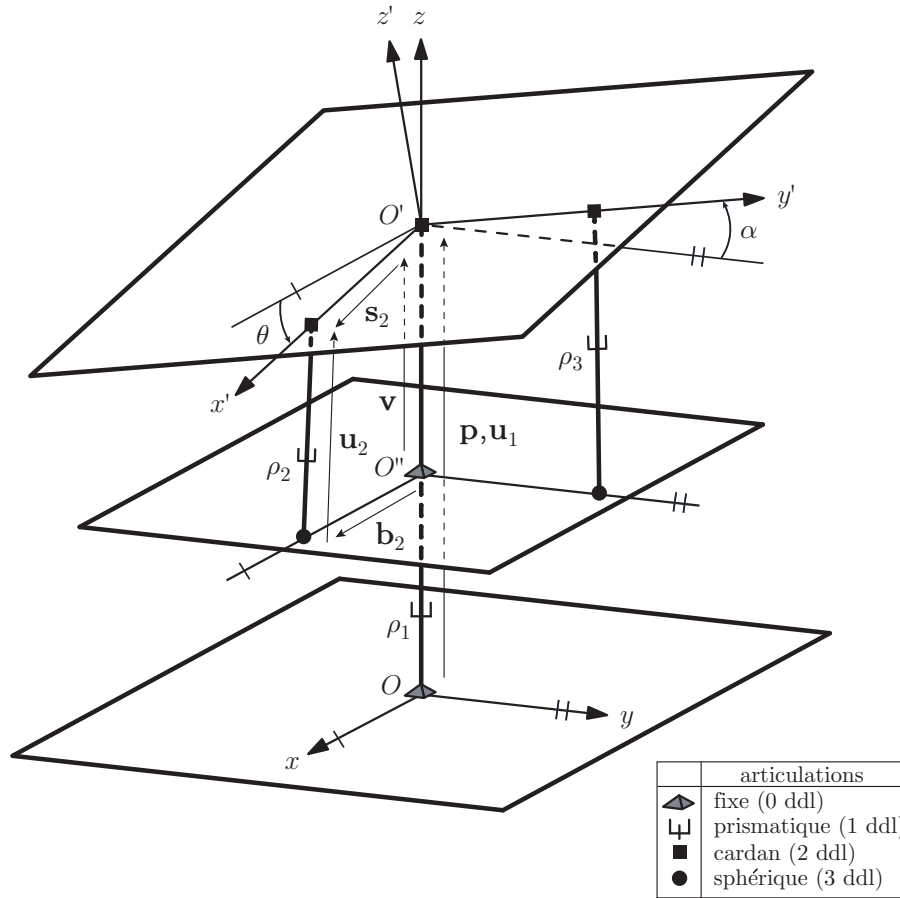


FIG. C.3 – Configuration schématique de la plate-forme hybride.

C.3.2 Équations de vitesse

Premièrement, en dérivant l'équation (C.37), on obtient

$$\dot{\rho}_1 = \dot{h} \quad (\text{C.41})$$

Deuxièmement, la dérivée de l'équation (C.40) donne

$$2\rho_i \dot{\rho}_i = 2(\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{i_0} - \mathbf{b}_i)^T (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{i_0}) \quad (\text{C.42})$$

Encore une fois, pour obtenir des équations qui soient fonctions des vitesses articulaires, on utilise le même artifice de calcul que pour les plates-formes parallèles, soit les équations (C.10) à (C.13), ce qui permet de réécrire l'équation (C.42) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_i \dot{\rho}_i &= \mathbf{u}_i^T (\dot{\alpha} \mathbf{E}' \mathbf{Q} + \dot{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{E}) \mathbf{s}_{i_0} \\ &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_i \dot{\alpha} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{i_0} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Encore ici, on utilise une représentation matricielle pour synthétiser les équations de vitesse :

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} \quad (\text{C.44})$$

où les matrices jacobiennes contiennent les informations suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.45})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_2 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} \\ 0 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_3 & \mathbf{u}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.46})$$

C.3.3 Équations d'accélération

La dérivée des équations de vitesse permet d'obtenir une relation entre les accélérations articulaires et cartésiennes suivant l'équation matricielle

$$\dot{\mathbf{A}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{C.47})$$

où les dérivées des matrices jacobiennes sont exprimées par

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\rho}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{C.48})$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_2 + \mathbf{u}_2^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_2 & \dot{\mathbf{u}}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} + \mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{2_0} \\ 0 & \dot{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{E}' \mathbf{s}_3 + \mathbf{u}_3^T \mathbf{E}' \dot{\mathbf{s}}_3 & \dot{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} + \mathbf{u}_3^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{E} \mathbf{s}_{3_0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.49})$$

Annexe D

Illustration flottante du mécanisme de moyennage plan

Pour faciliter le suivi des développements mathématiques présentés au chapitre 5, le schéma du mécanisme de moyennage plan (figure 5.1) est accessible à l'endos du rabat supérieur de cette page. Le lecteur est donc invité à faire usage de cette illustration flottante — en dépliant le haut de la feuille — tout au long du chapitre traitant du mécanisme bidimensionnel de moyennage par bielles.

Annexe E

Solution analytique d'une équation quartique

Le problème géométrique inverse du mécanisme de moyennage plan, présenté au chapitre 5, nécessite la résolution d'une équation polynomiale du quatrième degré. Une méthode analytique est donc proposée pour trouver les solutions de ce type d'équations. Cette méthode est tirée de la référence [20].

Soit l'équation de degré quatre suivante

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{E.1}$$

Cette équation possède une équation cubique associée qui peut s'écrire

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \tag{E.2}$$

Maintenant, considérant y comme n'importe laquelle des racines de cette équation, on définit

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y} \quad (\text{E.3})$$

Or, si $R \neq 0$, on pose

$$D = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}} \quad (\text{E.4a})$$

$$E = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}} \quad (\text{E.4b})$$

alors que si $R = 0$, on pose

$$D = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - 2b + 2\sqrt{y^2 - 4d}} \quad (\text{E.5a})$$

$$E = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - 2b - 2\sqrt{y^2 - 4d}} \quad (\text{E.5b})$$

Ainsi, on trouve les quatre solutions de l'équation du quatrième degré avec

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad (\text{E.6a})$$

$$x = -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2} \quad (\text{E.6b})$$

Cette démarche nécessite le calcul des racines de l'équation cubique associée. Voici une méthode de solution. Soit l'équation cubique générale suivante :

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0 \quad (\text{E.7})$$

Cette équation peut se réduire sous la forme

$$z^3 + uz + v = 0 \quad (\text{E.8})$$

où

$$u = \frac{1}{3}(3q - p^2) \quad (\text{E.9a})$$

$$v = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r) \quad (\text{E.9b})$$

en utilisant la substitution

$$y = z - \frac{p}{3} \quad (\text{E.10})$$

Maintenant, avec

$$A = \sqrt[3]{-\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{u^3}{27}}} \quad \text{et} \quad (\text{E.11a})$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{u^3}{27}}} \quad (\text{E.11b})$$

on trouve les trois racines de l'équation (E.8), soit

$$z_1 = A + B, \quad (\text{E.12a})$$

$$z_2 = -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3} \quad \text{et} \quad (\text{E.12b})$$

$$z_3 = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3} \quad (\text{E.12c})$$

et les valeurs des racines de l'équation cubique originale sont trouvées en utilisant la substitution de l'équation (E.10).