



Étude du lieu des singularités d'un manipulateur parallèle sphérique redondant

Mémoire

Jérôme Landuré

Maîtrise en génie mécanique
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Jérôme Landuré, 2017

Étude du lieu des singularités d'un manipulateur parallèle sphérique redondant

Mémoire

Jérôme Landuré

Sous la direction de:

Clément Gosselin, directeur de recherche

Résumé

Dans le domaine de la robotique les robots parallèles sont contraints à des tâches très spécifiques en comparaison avec leurs homologues sériels à cause de leur espace de travail plus restreint. L'objet de ce sujet de maîtrise est de présenter une architecture de robot parallèle dont l'espace de travail est agrandi par l'introduction d'une redondance cinématique dans son architecture pour le cas plus particulier des robots sphériques. La première partie du mémoire présente l'architecture du robot sphérique. Son modèle cinématique est décrit puis les variables et paramètres qui seront utiles pour les calculs et analyses sont introduits. Les relations cinématiques entrée-sortie sont présentées au travers des matrices Jacobiennes du robot et le concept de singularité est discuté à la fin de cette partie. Les deux phénomènes limitant l'espace de travail sont principalement les interférences mécaniques, ce qui se comprend facilement, et les singularités. Ce qu'on appelle singularité dans le contexte des architectures robotiques sont des configurations du robot où des mobilités entrantes ou sortantes sont inopérantes. Puis, dans la seconde partie, on s'intéresse à l'équivalent architectural du robot présenté dans la première partie auquel la partie redondante a été retirée dans le but de mesurer l'impact de l'introduction de la redondance cinématique sur l'espace de travail du robot. L'architecture du robot simple est alors brièvement présentée, puis les configurations singulières de ce robot sont analysées par deux méthodes différentes : une méthode numérique et une méthode géométrique. Ensuite dans la troisième partie une analyse des lieux des singularités de l'architecture redondante est présentée et quelques contraintes architecturales intéressantes au regard de l'analyse des singularités précédente sont discutées. Les effets de l'introduction de la redondance cinématique sur l'espace de travail sont discutés à la fin de cette partie en analysant les résultats précédents. Dans la quatrième partie on s'intéresse à la résolution du problème géométrique inverse du robot. La redondance cinématique fait que pour une pose spécifique de l'effecteur du robot il existe une infinité de solutions pour les coordonnées articulaires. Dans ce chapitre on explore plusieurs choix possibles pour les coordonnées articulaires, les avantages et inconvénients de plusieurs méthodes sont évalués, puis un exemple de suivi de trajectoire est présenté. Enfin le problème des interférences mécaniques est discuté, notamment son influence sur l'espace de travail du robot. La dernière partie concerne l'élaboration d'un prototype de test pour le robot sphérique redondant. Les différents choix de designs faits, le dimensionnement des actionneurs ainsi que plusieurs problèmes spécifiques sont présentés.

Table des matières

Résumé	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Remerciements	ix
Introduction	1
1 ARCHITECTURE DU ROBOT ET ANALYSE CINÉMATIQUE	4
1.1 Performances recherchées	4
1.2 Modèle cinématique	5
1.3 Modèle géométrique	7
1.4 Calcul des matrices jacobiniennes du robot	10
1.5 Notions de singularités	13
2 CAS DU ROBOT PARALLÈLE SPHÉRIQUE SIMPLE S/3-UPS	15
2.1 Architecture et modèle géométrique	15
2.2 Les difficultés de la recherche analytique des singularités	16
2.3 Analyse vectorielle et numérique	17
3 ÉTUDE DES SINGULARITÉS DU ROBOT SPHÉRIQUE REDON-	
DANT S/(2-UP)RS/2-UPS	21
3.1 Analyse vectorielle/visualisation sous GUI Matlab	21
3.2 Cas de l'architecture simplifiée	25
3.3 Conséquences sur la plage de travail en orientation du robot	29
4 SOLUTION DU PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE INVERSE	32
4.1 Description du choix de la méthode de solution du problème géométrique inverse	32
4.2 Application à un exemple numérique/comparaison avec un robot sphérique simple	39
4.3 Stratégie de pilotage prenant en compte les contacts mécaniques	41
5 ÉLABORATION D'UN PROTOTYPE DE TEST	46
5.1 Présentation des éléments mécaniques	46

5.2	Équivalence cinématique de la nouvelle architecture avec l'architecture initiale	48
5.3	Éléments de conception	56
5.4	Contrôle du robot	65
	Conclusion	67
	A Moteur utilisé	70
	Bibliographie	74

Liste des tableaux

2.1	Paramètres architecturaux du robot S/3- <u>UPS</u> étudié dans cette section.	18
3.1	Paramètres architecturaux du robot S/(2- <u>SP</u>)RS/2- <u>UPS</u> étudié dans cette section.	29
4.1	Paramètres architecturaux du robot étudié dans la section 4.2.	39
4.2	Paramètres architecturaux du robot étudié dans la section 4.3	45

Liste des figures

1.1	Exemple d'architecture d'un robot sphérique redondant.	5
1.2	Grphe des liaisons du robot sphérique redondant.	6
1.3	Architecture du robot sphérique-représentation par liaisons cinématiques.	8
1.4	Visualisation des angles de Tilt & Torsion dans l'espace cartésien. Le repère rouge est le repère lié à la plateforme, l'axe bleu est l'axe X du repère fixe et les axes jaunes et verts représentent ses transformations après les rotations successives qui amènent au repère de la plateforme.	9
2.1	Exemple d'architecture d'un robot sphérique minimal	15
2.2	Lieu des singularités d'un robot sphérique S/3-UPS dans l'espace des angles T&T.	17
2.3	Lieu des singularités d'un robot sphérique S/3-UPS dans l'espace des angles T&T dans un repère $(\theta \cos \phi, \theta \sin \phi, \sigma)$	19
2.4	Lieu des singularités d'un robot sphérique S/3-UPS dans l'espace des angles T&T dans un repère (ϕ, θ, σ)	20
3.1	Interface interactive pour l'étude du robot sphérique-GUI Matlab	23
3.2	Cas particulier d'architecture du robot sphérique redondant.	25
3.3	Comparaison des espaces de travail limité par les configurations singulières dans l'espace des angles T&T entre le robot sphérique S/3-UPS simple et le robot sphérique S/(2-UP)RS/2-UPS redondant.	30
3.4	comparaison des espaces de travail limité par les configurations singulières dans l'espace des angles T&T entre un robot sphérique redondant d'architecture quelconque et le robot sphérique redondant dont deux points d'attache sont alignés	30
4.1	Représentation de l'ensemble des valeurs admissibles pour le paramètre β	38
4.2	Évolution des coordonnées articulaires du robot lors de la trajectoire 1 avec optimisation de la redondance.	40
4.3	Évolution des coordonnées articulaires du robot lors de la trajectoire 2 avec optimisation de la redondance.	40
4.4	Comparaison de l'évolution de la valeur du déterminant de la matrice \mathbf{J} au cours de la trajectoire 1 entre l'architecture redondante et l'architecture classique. Le déterminant dans le cas redondant est multiplié par 10 pour des raisons d'échelle.	40
4.5	Comparaison de l'évolution de la valeur du déterminant de la matrice \mathbf{J} au cours de la trajectoire 2 entre l'architecture redondante et l'architecture classique. Le déterminant dans le cas redondant est multiplié par 10 pour des raisons d'échelle.	41

4.6	Illustration de la méthode de calcul des distances entre éléments barres. Le cas $n^{\circ}1$ illustre la distance entre deux droites et le cas $n^{\circ}2$ illustre la prise en compte de segments.	42
4.7	Représentation du volume de travail du robot sphérique limité par les interférences mécaniques et les singularités.	44
5.1	Illustration du changement d'architecture pour les pattes du robot.	47
5.2	Graphe des liaisons du robot sphérique redondant modifié.	48
5.3	Schéma cinématique du prototype.	49
5.4	Illustration des positions possibles pour la nouvelle architecture des longueurs actionnées.	50
5.5	Schéma cinématique initial d'une patte simple du robot. La liaison de Cardan du bas est remplacée par une liaison sphérique au début de l'analyse, dans le but de ne pas choisir prématurément les deux axes de rotations de cette liaison pour ne pas induire la perte involontaire d'un résultat utile.	53
5.6	Schéma cinématique d'une patte simple du robot après simplification.	56
5.7	Schéma cinématique et exemple de conception d'une liaison sphérique passive RRR.	57
5.8	Schémas de fonctionnement de la liaison sphérique passive RRRR redondante.	59
5.9	Concept d'architecture réaliste pour le dispositif de motorisation du robot.	60
5.10	Méthode d'estimation du couple moteur nécessaire au bon fonctionnement du robot. La figure de gauche représente l'évolution de la valeur du couple moteur nécessaire pour maintenir la structure en équilibre en fonction de la position de la plateforme par rapport à l'horizontale (angle de Tilt).	63
5.11	Concept de l'architecture générale du robot.	64
5.12	Contrôle et asservissement en position utilisé pour les moteurs.	65
5.13	Deux vues du prototype construit dans deux configurations différentes.	66

Remerciements

Avant toute chose je voudrais remercier le professeur Clément Gosselin, directeur du Laboratoire de Robotique de l'Université Laval, pour son encadrement lors de ces deux dernières années. Sa pédagogie et sa passion pour la robotique ont rendu mon temps passé ici très intéressant et formateur. Je voudrais aussi remercier Thierry et Simon, tout deux professionnels de recherche au laboratoire. Leurs compétences et leur disponibilité m'ont été d'une grande aide. Je remercie aussi les différents membres du laboratoire qui se sont succédés au laboratoire et dont les échanges furent des plus agréables : Din, Alexis, Bruno, André, les deux Pascal, Julien, Étienne, Jean-Philippe, Marianne, François et bien d'autres. Enfin je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien et leur amour.

Introduction

Les dispositifs permettant l'orientation d'objets dans l'espace sont des sujets d'études récurrents. Dans [7] un mécanisme permettant de simuler le mouvement d'une épaule est présenté. Les robots sphériques ont pour objectif de piloter ces mouvements d'orientation. L'architecture d'un robot sphérique comportant le minimum d'actionneurs nécessaires pour assurer les trois rotations principales a été étudiée à plusieurs reprises, que ce soit avec des actionneurs prismatiques dans [4] ou [6] par exemple ou bien rotoïdes dans [10] ou [22] où un manipulateur sphérique appelé "l'oeil agile" est présenté. Ce dernier a pour particularité de pouvoir atteindre des vitesses angulaires très élevées. Les différentes études ont mis en évidence les lieux des singularités, [13] effectue un calcul numérique de ces lieux et [4] détermine ces lieux analytiquement dans l'espace cartésien dans un cas particulier.

D'autres études traitent de robots sphériques tout en abordant d'autres aspects importants pour sa conception. Par exemple [16] propose un modèle mathématique pour la rigidité d'un robot sphérique 3-CRU dans le but de déterminer les bons matériaux à choisir ainsi que les dimensions du robot sous des cas de charge statique et dynamique connue, les modes de résonance vibratoire sont aussi déterminés. La référence [20] étudie les efforts aux actionneurs nécessaires pour assurer une trajectoire et une vitesse données pour un robot sphérique 3-RRP. Dans [21] il est question de la précision d'un robot sphérique 3-URU à travers différents indices de performances. Quant à [15] on y présente une architecture de robot sphérique 3-RUU où les mobilités internes parasites sont supprimées. D'autres études moins générales étudient des architectures visant à piloter une orientation mais leur architecture diffère d'un robot sphérique classique du fait de la nécessité de les adapter à un domaine spécifique. Par exemple [8] traite de la conception d'un manipulateur sphérique à 2 DDL qui a pour but d'orienter entre autres choses des objectifs de caméras, la torsion est donc ignorée. Dans [12] il est présenté un dispositif d'aide à la réhabilitation d'une épaule, [11] traite d'un dispositif de réhabilitation pour le genou et la cheville et [1] présente un robot 6DDL pour lequel les rotations sont découplées des translations et ont aussi la particularité de se faire par des galets entraînés en rotation qui orientent l'effecteur par friction. Plus récemment [17] présente un robot sphérique construit pour permettre un mouvement de torsion illimité dans n'importe quelle configuration.

Dans toutes ces études l'amplitude en orientation permise est un enjeu important limité principalement par les lieux de singularités du robot. On propose ici d'améliorer cet espace atteignable par le biais du caractère redondant du dispositif présenté. En effet une configuration singulière est une configuration du robot où on perd le contrôle des coordonnées cartésiennes, des coordonnées articulaires ou des deux à la fois à cause d'un agencement géométrique défavorable. De telles configurations synonymes de perte de contrôle du robot restreignent donc l'espace de travail. En plus des contraintes mécaniques le concepteur du robot doit faire face à ces contraintes supplémentaires bien moins intuitives pour obtenir les performances voulues. Ce problème fait partie des principaux obstacles qui restreignent les robots sphériques à des tâches requérant de faibles amplitudes. Le type d'architecture présentée ici pourrait donc diversifier le champ d'utilisation des robots sphériques. L'introduction d'un degré de liberté supplémentaire pour réduire ces lieux de singularité qui posent problème n'est pas récente : [19] présente l'étude d'un robot sphérique avec quatre actionneurs prismatiques. La nouveauté dans l'architecture présentée ici se situe dans la présence d'une bielle qui sert de liant entre deux actionneurs prismatiques et un point d'attache de la plateforme. Ainsi, la redondance introduite est purement cinématique. Le robot possède 4 degrés de liberté et les actionneurs peuvent être pilotés en position, comme dans un robot standard. En comparaison, dans l'architecture présentée en [19], le robot possède seulement 3 degrés de liberté et 4 actionneurs, ce qui implique que ceux-ci doivent être pilotés en tenant compte des forces internes, complexifiant ainsi la commande. L'introduction d'une redondance cinématique fut utilisée dans l'architecture d'un robot plan dont le concept est expliqué dans [18] puis dans l'architecture d'un robot à 6 degrés de liberté dans [14]. La bielle introduite permet dans le cas de ces robots d'éviter les singularités de type II. Cette étude présente une architecture qui adapte ce dispositif à un robot sphérique.

L'objet de cette étude est de présenter les avantages d'un robot parallèle sphérique redondant possédant une architecture particulière permettant un espace atteignable en orientation important.

Dans un premier lieu une description de l'architecture du robot est faite au chapitre 1 pour poser une base mathématique solide adaptée aux éléments que l'on souhaite étudier. Puis dans ce même chapitre la cinématique du robot est étudiée, ce qui mène au calcul des matrices jacobiniennes et au calcul du problème géométrique inverse du robot qui explicite les coordonnées articulaires pour une configuration spécifique de l'effecteur. Après une brève introduction au concept de singularité les avantages de l'architecture présentée sont introduits par une étude des limites des architectures classiques au chapitre 2. Ensuite enfin nous effectuons une étude des singularités du robot au chapitre 3 dans le but de présenter les avantages d'une telle architecture notamment sur l'espace de travail. Au chapitre 4 des éléments utiles pour le pilotage du robot, dont la solution au problème géométrique inverse, sont discutés dans des

cas de trajectoires choisies à titre d'exemple. Enfin au chapitre 5 les étapes de conception d'un prototype de test sont présentées.

Chapitre 1

ARCHITECTURE DU ROBOT ET ANALYSE CINÉMATIQUE

Un robot sphérique a pour objectif de produire des mouvements de rotation au niveau de son effecteur et donc de changer son orientation dans l'espace par rapport à un point fixe.

Nous nous intéressons ici à un tel type de manipulateur dont les caractéristiques architecturales sont présentées dans ce chapitre.

1.1 Performances recherchées

En général il existe trois aspects importants dans le cadre de l'étude d'une architecture mécanique pilotée : le positionnement, qui définit l'espace de travail du robot, la cinématique, qui caractérise les vitesses produites par le robot et ses trajectoires opérables et la dynamique, qui spécifie les charges opérables par l'effecteur et influe sur le dimensionnement des pièces qui composent le robot.

Nous ne nous intéressons dans la présente étude qu'à l'orientation de l'effecteur du robot. En effet l'architecture présentée ici a été conçue dans le but d'améliorer le débattement angulaire à l'effecteur par rapport à celui produit par les manipulateurs sphériques conventionnels, cependant les vitesses produites n'ont pas pour objectif d'être exceptionnelles. De plus le robot présenté ici est un manipulateur parallèle, il bénéficie donc naturellement de performances dynamiques importantes de par la répartition des efforts à encaisser sur l'ensemble de ses membrures à contrario d'un manipulateur sériel où les efforts s'accumulent sur les membrures successives.

La présente étude vise donc à concevoir un robot sphérique avec un débattement angulaire le plus important possible.

L'espace de travail d'un robot est principalement limité par deux phénomènes : les interférences mécaniques et les singularités. Il est facile de comprendre en quoi les interférences ou contacts mécaniques limitent l'espace de travail, quand des éléments mobiles rencontrent des

éléments fixes ou d'autres éléments mobiles lors d'une trajectoire du robot alors le contact physique entre les matériaux change la topologie du robot en limitant certains degrés de liberté auparavant permis et qui sont très probablement nécessaires à la poursuite de la trajectoire voulue. Les singularités quant à elles sont plus subtiles à détecter car elles dépendent de la configuration du robot. Lorsqu'un robot se trouve dans un état singulier le contrôle du robot s'en trouve affecté notamment dans le cas des singularités de type II où le robot peut effectuer des mouvements indépendamment des coordonnées articulaires.

1.2 Modèle cinématique

L'architecture d'un robot sphérique comportant le minimum d'actionneurs nécessaires pour assurer les trois rotations principales a été étudiée à plusieurs reprises, que ce soit avec des actionneurs prismatiques ([6] par exemple) ou rotoïdes ([10]). Les différentes études ont mis en évidence les lieux des singularités, [13] effectue un calcul numérique de ces lieux par exemple. L'idée d'introduire un degré de liberté supplémentaire pour réduire ces lieux de singularité qui posent problème n'est pas récente, [19] présente l'étude d'un robot sphérique avec quatre actionneurs prismatiques il y a vingt ans déjà. La nouveauté dans l'architecture présentée ici se situe dans la présence d'une bielle qui sert de liant entre deux actionneurs prismatiques et un point d'attache de la plateforme. L'introduction d'une redondance cinématique analogue fut utilisée dans l'architecture d'un robot plan dont le concept est expliqué dans [18] puis dans l'architecture d'un robot à 6 degrés de liberté dans [14]. Cette bielle permet dans le cas de ce robot d'éviter les singularités de type II. L'idée d'adapter ce mécanisme à un robot sphérique est à la base de la création de cette étude.

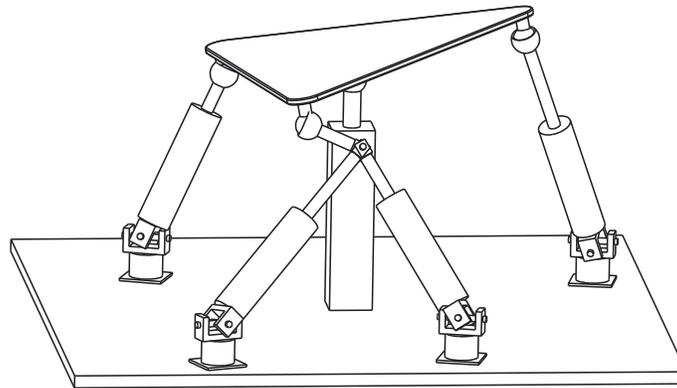


FIGURE 1.1 – Exemple d'architecture d'un robot sphérique redondant.

L'architecture d'un robot sphérique est plutôt simple. L'objectif étant d'orienter l'effecteur dans l'espace ce dernier est contraint sur toutes ses translations par une liaison sphérique reliée au bâti. Les trois rotations restantes sont pilotées par des actionneurs placés sur les

autres branches de liaisons reliant le bâti à l'effecteur qui forment le mécanisme parallèle. Le nombre minimum d'actionneurs fonctionnant de façon indépendante doit être supérieur ou égal au nombre de degrés de liberté que l'on souhaite piloter (les trois rotations dans notre cas).

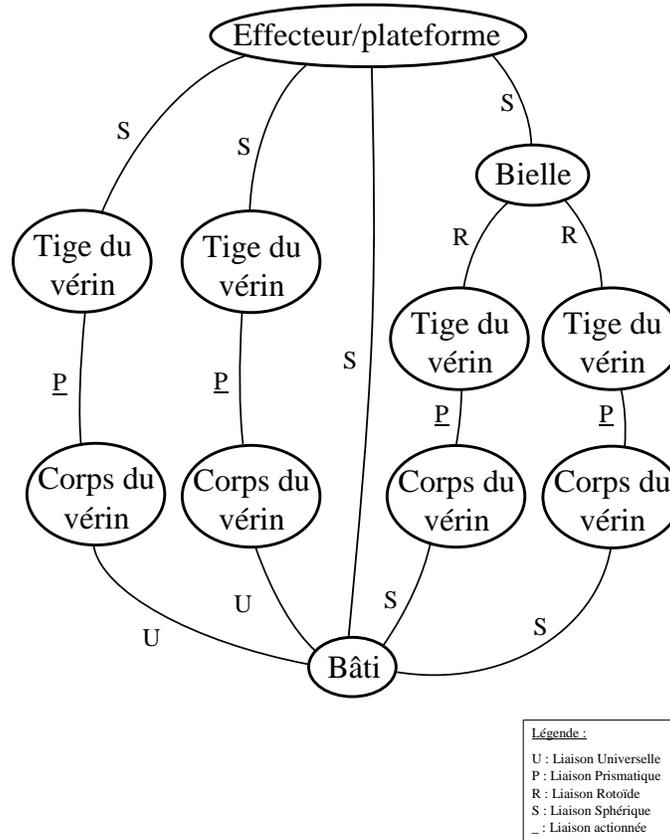


FIGURE 1.2 – Graphe des liaisons du robot sphérique redondant.

L'architecture du robot pourrait être décrite conventionnellement comme étant $S/(2 - SP)RS/2 - UPS$ ce qui signifie qu'on a une patte double formée par deux vérins qui se rejoignent sur une liaison rotoïde vers une bielle qui relie la plateforme par une liaison sphérique, comme présenté sur le graphe de liaisons à la Figure 1.2.

Cette architecture comporte quatre actionneurs, l'idée est d'avoir trois actionneurs pour piloter les trois rotations et un autre actionneur qui ajoute la possibilité au robot de changer de configuration pour sortir d'un état de singularité sans modifier les coordonnées cartésiennes de l'effecteur. Une exemple de construction d'une telle architecture est présenté à la Figure 1.1.

Cette architecture est l'architecture minimale permettant le nombre de degrés de liberté voulus, c'est-à-dire que seules les mobilités désirées sont permises par un tel agencement de liai-

sons. En effet si on utilise la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach aussi appelée critère de mobilité général à partir du graphe de la figure 1.2 nous obtenons :

$$l = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (1.1)$$

où l est le degré de liberté de la chaîne cinématique étudiée, d est la dimension de l'espace de mobilité générale, n est le nombre de corps rigides, g est le nombre d'articulations et f_i est le nombre de degrés de liberté permis par la i -ème articulation. Ici $d = 6$, $n = 11$, $g = 14$ et $\sum_{i=1}^{14} f_i = 6 \times 3 + 2 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times 1 = 28$ ce qui au final donne :

$$l = 6(11 - 14 - 1) + 28 = -24 + 28 = 4 \quad (1.2)$$

ce qui montre que ce mécanisme possède 4 mobilités, sans préciser lesquelles toutefois, que nous pouvons piloter par au moins autant d'actionneurs.

De façon analogue à l'architecture d'une plateforme de Gough-Stewart les actionneurs utilisés sont des vérins qui forment ce que l'on peut nommer les "pattes" du robot. D'ailleurs de par les similitudes entre ces architectures l'organe terminal du robot qui est la pièce que l'on souhaite orienter dans l'espace pourra être appelée par la suite "effecteur" ou "plateforme", les deux termes se référant au même objet.

1.3 Modèle géométrique

Nous allons ici présenter le modèle mathématique choisi pour mettre en équation la cinématique du robot à partir de son architecture.

La plateforme peut tourner autour du point O , qui est aussi choisi comme origine du repère pris pour les calculs. Les points A sont des points fixes sur le bâti et les points B sont des points sur la plateforme mobile. Le point C est le point de jonction où la bielle et les deux actionneurs de la patte double se rejoignent. Les indices qui suivent ces points servent à désigner la patte du robot considérée. Enfin chaque point possède un vecteur désigné par la même lettre mais en minuscule qui correspond aux coordonnées du point dans le repère choisi.

Les coordonnées articulaires étant des distances qui varient avec la longueur des vérins, nous désignerons par l_{11} et l_{12} les distances respectivement entre A_{11} et C , et entre A_{12} et C qui caractérisent la "patte double" de l'architecture du robot. Les deux autres coordonnées articulaires sont désignées par l_2 et l_3 et correspondent aux distances entre A_2 et B_2 , et entre A_3 et B_3 et caractérisent les "pattes simples". Le schéma cinématique à la Figure 1.3 résume l'ensemble des notations décrites plus haut. Pour plus de clarté la plateforme est représentée en bleu, les longueurs actionnées en rouge, la bielle orientable en vert et les liaisons en noir.

Le modèle choisi pour décrire les coordonnées cartésiennes est celui d'une matrice décrivant des angles de Tilt & Torsion (Inclinaison et Torsion en français) comme décrit dans [9]. Le

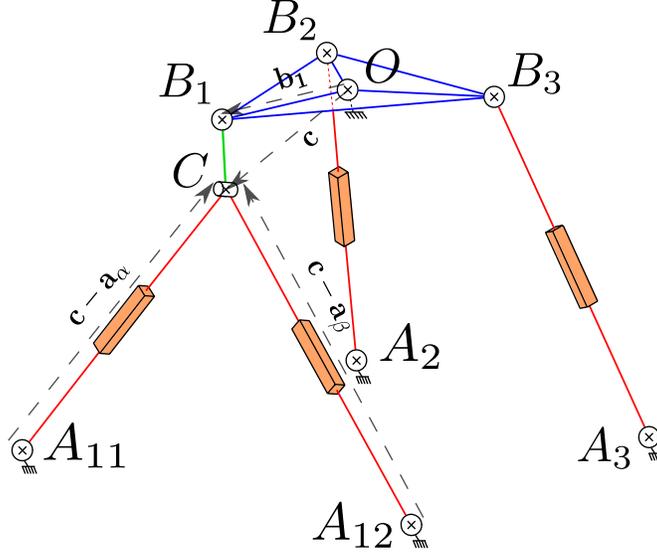


FIGURE 1.3 – Architecture du robot sphérique-représentation par liaisons cinématiques.

Tilt est un angle (appelé θ pour le modèle mathématique) autour d'un axe variable dans le plan horizontal dit "azimuth" localisé par un angle ϕ et la Torsion est un angle (appelé σ pour le modèle mathématique) autour d'un axe normal au plan formé par les trois points d'attache sur l'effecteur (B_1 , B_2 et B_3). Ces angles permettent de piloter simplement des mouvements intéressants à piloter dans le domaine de l'industrie. En effet le Tilt permet de "pencher" un objet et la Torsion décrit un mouvement de "vissage". La façon de définir cette matrice est proche de la méthode pour définir une matrice d'Euler ZYZ comme illustré à la figure 1.4.

Soit $R_i(j)$ la matrice de rotation autour d'un axe \mathbf{i} suivant un angle j . Le calcul de la matrice d'orientation de la plateforme est le suivant :

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = R_{\mathbf{Z}}(\phi)R_{\mathbf{Y}}(\theta)R_{\mathbf{Z}}(\sigma)R_{\mathbf{Z}}(-\phi) \quad (1.3)$$

$$= \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_{\sigma-\phi} - S_\phi S_{\sigma-\phi} & -C_\phi C_\theta S_{\sigma-\phi} - S_\phi C_{\sigma-\phi} & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_{\sigma-\phi} + C_\phi S_{\sigma-\phi} & -S_\phi C_\theta S_{\sigma-\phi} + C_\phi C_{\sigma-\phi} & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_{\sigma-\phi} & S_\theta S_{\sigma-\phi} & C_\theta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

où "C" désigne le cosinus et "S" désigne le sinus. Un point P de la plateforme a donc pour coordonnées :

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p}_0 \quad (1.5)$$

avec \mathbf{p}_0 les coordonnées de P à un état quelconque arbitrairement choisi comme l'état initial qui est défini par $\phi = \theta = \sigma = 0$.

De plus la vitesse de ce point sera donnée par la relation suivante issue des résultats classiques

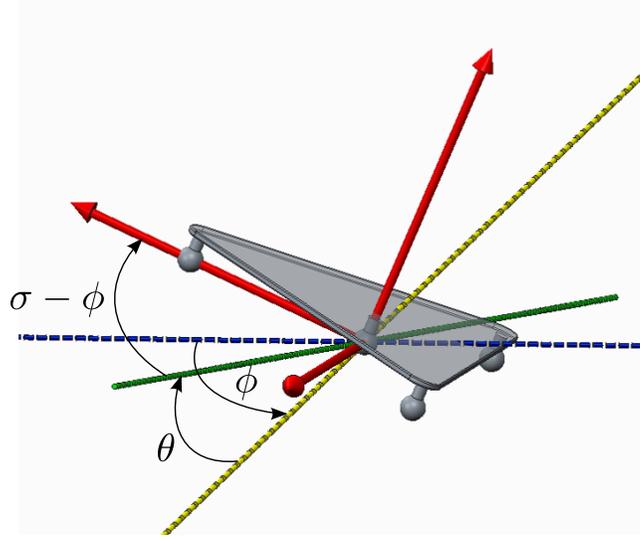


FIGURE 1.4 – Visualisation des angles de Tilt & Torsion dans l'espace cartésien. Le repère rouge est le repère lié à la plateforme, l'axe bleu est l'axe X du repère fixe et les axes jaunes et verts représentent ses transformations après les rotations successives qui amènent au repère de la plateforme.

de la cinématique du point :

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (1.6)$$

avec $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur des vitesses angulaires cartésiennes de l'effecteur.

L'architecture et plus particulièrement les liaisons qui joignent les différents solides qui constituent le robot induisent un certain nombre d'équations dites "équations de contraintes" qui vont beaucoup nous servir pour le calcul des matrices jacobiniennes.

Pour les pattes 2 et 3 respectivement délimitées par les couples de points (A_2, B_2) et (A_3, B_3) :

$$\forall i \in \{2, 3\} : (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) = l_i^2 \quad (1.7)$$

avec l_i la distance entre A_i et B_i qui est le paramètre variable du vérin " i " à une constante près et défini comme une coordonnée articulaire.

Pour la patte double formée par A_{11} , A_{12} , C et B_1 de façon analogue aux pattes simples on a :

$$\forall i \in \{11, 12\} : (\mathbf{c} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{c} - \mathbf{a}_i) = l_i^2 \quad (1.8)$$

à ces relations on ajoute la condition de coplanéité induite par la liaison rotoïde en C . Pour cela on introduit les vecteurs :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}_{12} - \mathbf{a}_{11}}{\|\mathbf{a}_{12} - \mathbf{a}_{11}\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e} \quad (1.9)$$

\mathbf{n} est donc un vecteur normal à ce plan, ce qui permet d'écrire la condition de coplanéité de la façon suivante :

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) = 0 \quad (1.10)$$

Il faut aussi rajouter la contrainte induite par la bielle :

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{c} - \mathbf{b}_1) = l^2 \quad (1.11)$$

Introduisons aussi une expression pour le point C qui sera utile par la suite :

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1) = \mathbf{R}(\phi, \theta, \sigma)\mathbf{b}_{10} + \mathbf{Q}\mathbf{u} \quad (1.12)$$

où $\mathbf{R}(\phi, \theta, \sigma)$ est la matrice qui spécifie l'orientation cartésienne du robot, \mathbf{b}_{10} est une constante de construction de la plateforme, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l \cos \beta & l \sin \beta & 0 \end{bmatrix}^T$ traduit les coordonnées du point C dans le plan formé par A_{11} , A_{12} et B_1 . Dans ce plan, le point C peut décrire un cercle de rayon l , l étant la longueur de la bielle B_1C , et centré en B_1 dans ce plan repéré par la matrice \mathbf{Q} . Cette mobilité est indépendante des coordonnées ϕ , θ et σ et donc de la configuration du robot. On peut prendre par exemple :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

où

$$\mathbf{q}_x = \mathbf{q}_x = \frac{\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1\|} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{q}_z = \frac{(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})}{\|(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})\|} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{q}_y = \mathbf{q}_z \times \mathbf{q}_x. \quad (1.16)$$

\mathbf{Q} peut être défini de plusieurs manières mais celle présentée possède l'avantage d'être valable tout le temps au vu des configurations du robot qui seront étudiées. Dans ces conditions β est le paramètre qualifiant le degré de liberté supplémentaire introduit par la redondance cinématique de l'architecture.

La précédente description permet d'étudier les trois mobilités

À partir de la description faite précédemment il est possible de déterminer les grandeurs importantes qui définissent la cinématique du robot.

1.4 Calcul des matrices jacobiennes du robot

Nous allons désormais déterminer les matrices jacobiennes du robot. La notation qui suit correspond à celle utilisée sur la figure 1.3.

La stratégie de résolution est de partir des équations de contraintes du mouvement présentées à la section précédente et de les dériver par rapport au temps pour obtenir une relation linéaire entre les vitesses articulaires et les vitesses cartésiennes.

On dérive les équations 1.7 par rapport au temps et on obtient :

$$\forall i \in \{2, 3\} : (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{b}}_i = l_i \dot{l}_i \quad (1.17)$$

ce qui s'écrit

$$(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i] = l_i \dot{l}_i \quad (1.18)$$

ce qui peut être réarrangé comme

$$[\mathbf{b}_i \times (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)]^T \boldsymbol{\omega} = l_i \dot{l}_i \quad (1.19)$$

et finalement en exploitant la distributivité du produit vectoriel on obtient

$$\forall i \in \{2, 3\} : [\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i]^T \boldsymbol{\omega} = l_i \dot{l}_i \quad (1.20)$$

avec $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur des vitesses angulaires cartésiennes de la plateforme.

Puis on dérive les équations 1.8 et 1.10 et on obtient alors :

$$\forall i \in \{11, 12\} : (\mathbf{c} - \mathbf{a}_i)^T \dot{\mathbf{c}} = l_i \dot{l}_i \quad (1.21)$$

$$[(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}]^T \dot{\mathbf{c}} + [\dot{\mathbf{b}}_1 \times \mathbf{e}]^T (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) = 0 \quad (1.22)$$

En utilisant la propriété de permutation circulaire du produit mixte on écrit que $[\dot{\mathbf{b}}_1 \times \mathbf{e}]^T (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) = [\mathbf{e} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11})]^T \dot{\mathbf{b}}_1$ ce qui nous donne sous forme vectorielle :

$$\mathbf{H} \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{w} \quad (1.23)$$

où :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11})^T \\ (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{12})^T \\ [(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}]^T \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

et

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} l_{11} \dot{l}_{11} \\ l_{12} \dot{l}_{12} \\ [(\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}]^T \dot{\mathbf{b}}_1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

où

$$\dot{\mathbf{b}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1 \quad (1.26)$$

Nous cherchons à déterminer l'expression de $\dot{\mathbf{c}}$ en fonction des vitesses articulaires et cartésiennes. Au vu de ce qu'on a déterminé plus haut on a $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{w}$ dans le cas où la matrice \mathbf{H} est non singulière, ce qui est vrai tout le temps sauf si le point C est aligné avec A_{11} et A_{12} . Ce cas est facilement évité si la distance OB_1 est construite plus petite que la distance entre O et la droite $A_{11}A_{12}$.

En utilisant la formule qui donne l'inverse d'une matrice en fonction de sa comatrice on obtient :

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

où :

$$d = [(\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{12})]^T [(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}] \quad (1.28)$$

$$\mathbf{h}_1 = (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{12}) \times [(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}] \quad (1.29)$$

$$\mathbf{h}_2 = [(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}] \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) \quad (1.30)$$

$$\mathbf{h}_3 = (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{12}) \quad (1.31)$$

Ce qui nous amène à :

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{w} = \frac{1}{d}(\mathbf{h}_1 l_{11} \dot{l}_{11} + \mathbf{h}_2 l_{12} \dot{l}_{12} + \mathbf{h}_3 [(\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}] \dot{\mathbf{b}}_1) \quad (1.32)$$

De plus en dérivant l'équation 1.11 par rapport au temps, on obtient :

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T \dot{\mathbf{c}} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T \dot{\mathbf{b}}_1 \quad (1.33)$$

Ensuite on combine cette expression avec les équations 1.26 et 1.32 :

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1) = (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T \frac{1}{d} (\mathbf{h}_1 l_{11} \dot{l}_{11} + \mathbf{h}_2 l_{12} \dot{l}_{12} + \mathbf{h}_3 [(\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) \times \mathbf{e}] \dot{\mathbf{b}}_1) \quad (1.34)$$

or

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1) = [\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}]^T \boldsymbol{\omega} \quad (1.35)$$

et

$$\mathbf{h}_3 \perp (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1) \quad (1.36)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$[\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}]^T \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T \mathbf{k}_{11} \dot{l}_{11} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T \mathbf{k}_{12} \dot{l}_{12} \quad (1.37)$$

où :

$$\mathbf{k}_{11} = \frac{l_{11}}{d} \mathbf{h}_1 \quad (1.38)$$

$$\mathbf{k}_{12} = \frac{l_{12}}{d} \mathbf{h}_2 \quad (1.39)$$

Au final à partir des équations 1.37 et 1.20 nous pouvons écrire :

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{i}} \quad (1.40)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des vitesses angulaires cartésiennes de la plateforme, $\dot{\mathbf{i}} = [\dot{l}_{11} \quad \dot{l}_{12} \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3]^T$ est le vecteur des vitesses linéiques articulaires,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{c})]^T \\ [\mathbf{b}_2 \times (\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2)]^T \\ [\mathbf{b}_3 \times (\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3)]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1]^T \\ [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2]^T \\ [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3]^T \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

est la matrice jacobienne "cartésienne" du robot,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_1 - \mathbf{c})^T \mathbf{k}_{11} & (\mathbf{b}_1 - \mathbf{c})^T \mathbf{k}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

est la matrice jacobienne "articulaire" du robot. Il est à noter que la matrice \mathbf{K} comporte plus de colonnes que de lignes, ce qui traduit le caractère de redondance cinématique du robot. Il est à noter que l'expression de la matrice \mathbf{J} est particulièrement simple et pratique du fait qu'elle est composée uniquement de vecteurs des points caractéristiques du robot. Ceci sera particulièrement avantageux pour l'analyse du rang de la matrice \mathbf{J} qui peut alors être faite par une analyse de vecteurs.

1.5 Notions de singularités

Ce que l'on appelle "singularité" dans le contexte des robots sériels ou parallèles est un état du robot dans lequel le contrôle de ce dernier ne peut être assuré correctement. On distingue communément trois types de singularité :

Les singularités de type I qui correspondent mathématiquement aux configurations du robot où la matrice \mathbf{K} n'est pas de plein rang. Ceci signifie que au moins une des vitesses articulaires ne peut plus influencer sur les vitesses cartésiennes, on perd virtuellement le pilotage d'un ou plusieurs degrés de liberté dans le sens où cette rotation ou translation restera inchangée quel que soit ce qu'on met en entrée. Dans ce cas il existe des configurations où certaines vitesses

cartésiennes ne peuvent être atteintes. Physiquement ce type de cas se traduit généralement par des positions extrêmes de fonctionnement des actionneurs et sont assez simplement écartés.

Les singularités de type II qui correspondent mathématiquement aux configurations du robot où le déterminant de \mathbf{J} est nul. Cette fois-ci on perd virtuellement le contrôle sur un des degrés de liberté mais le degré de liberté de l'effecteur concerné n'est pas fixé mais indéterminé dans le sens où il peut prendre virtuellement n'importe quelle valeur. Physiquement dans ce cas ce degré de liberté sera déterminé par un autre facteur que l'architecture des liaisons du système, le poids propre de l'effecteur par exemple, qui ne sera plus compensé suivant cette direction. On peut aussi noter que vu que la matrice \mathbf{J} dépend des coordonnées cartésiennes, le robot peut sortir de lui même de la configuration singulière très vite après y être rentré, le robot repartant dans une configuration de façon non contrôlée. Ce type de singularité est donc le plus préjudiciable au pilotage dans notre cas.

Les singularités de type III correspondent à des configurations où à la fois la matrice \mathbf{J} et la matrice \mathbf{K} ne sont pas de plein rang. Elles ne sont en général atteignables qu'en construisant le robot de façon très particulière, en formant un parallélogramme déformable avec les vérins par exemple, et ne sont donc pas ici un problème.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement ici aux singularités de type II car elles sont les plus préjudiciables au bon contrôle du robot.

Les singularités de type II arrivent quand la matrice \mathbf{J} n'est plus de plein rang. Par commodité d'écriture nous étudierons la transposée de \mathbf{J} , \mathbf{J} étant une matrice carrée dire que \mathbf{J} n'est pas de plein rang est équivalent à dire que sa transposée n'est pas de plein rang.

Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter l'architecture du robot étudié dans ce mémoire, les notations utilisées pour l'étudier, sa cinématique ainsi qu'une introduction au concept de singularité qui est primordial dans ce cas-ci pour atteindre les objectifs. En effet le modèle a été construit dans l'objectif d'obtenir l'expression la plus simple possible pour la matrice \mathbf{J} , ce chapitre pose donc les bases pour la suite de l'étude.

Chapitre 2

CAS DU ROBOT PARALLÈLE SPHÉRIQUE SIMPLE S/3-UPS

Dans ce chapitre nous allons discuter des limites de l'architecture sphérique minimale qui ont conduit à l'étude de l'architecture redondante. En effet l'architecture redondante vise spécifiquement à outrepasser les limites de l'espace de travail du robot sphérique simple dues aux singularités.

2.1 Architecture et modèle géométrique

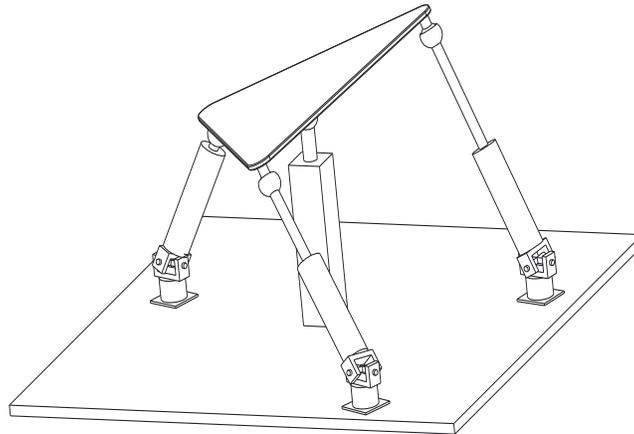


FIGURE 2.1 – Exemple d'architecture d'un robot sphérique minimal

L'architecture minimale pour un robot sphérique nécessite trois actionneurs pour piloter les trois rotations principales dans l'espace cartésien comme on peut le voir sur le montage de la figure 2.1. Ce montage très similaire à celui présenté au chapitre 1 ne comporte cependant que des pattes simples.

Une donnée importante pour un robot est l'expression des valeurs que doivent prendre les actionneurs contrôlés pour atteindre la configuration recherchée. On appelle cette information le Problème Géométrique Directe (PGI), elle donne le lien entre les grandeurs contrôllées par les actionneurs (appelées coordonnées articulaires) et les grandeurs d'états du robot qu'on souhaite contrôler (appelées coordonnées cartésiennes). Dans le cas de ce robot sphérique les coordonnées articulaires sont les longueurs des vérins notées l_i et les coordonnées cartésiennes sont les angles de la plateforme mesurés par le biais de la matrice $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ décrite à la section 1.3. L'expression du PGI est donc simple dans ce cas-ci est se présente de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) = l_i^2 \quad (2.1)$$

où :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{b}_{i0} \quad (2.2)$$

en utilisant la notation introduite au chapitre 1.

2.2 Les difficultés de la recherche analytique des singularités

Les matrices jacobiennes d'un tel robot s'obtiennent de manière analogue à la méthode présentée au chapitre 1. On obtient :

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{i}} \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur des vitesses angulaires de la plateforme, $\dot{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 & \dot{l}_2 & \dot{l}_3 \end{bmatrix}^T$ est le vecteur des vitesses linéiques articulaires,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1]^T \\ [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2]^T \\ [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3]^T \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

est la matrice jacobienne "cartésienne" du robot,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

est la matrice jacobienne "articulaire" du robot.

Plusieurs articles traitent de la détermination du lieu des singularités dans l'espace des coordonnées cartésiennes, comme [4], [5], [2] ou [3]. Cependant ces articles adoptent une approche purement calculatoire obtenues en mettant égale à zéro l'expression du déterminant de la

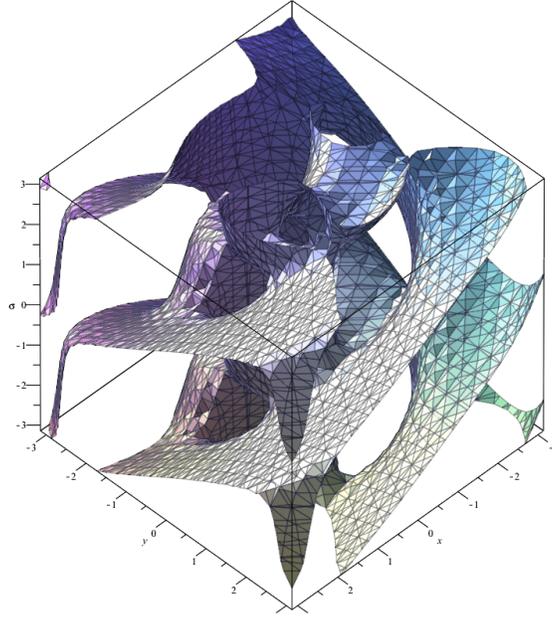


FIGURE 2.2 – Lieu des singularités d’un robot sphérique S/3-UPS dans l’espace des angles T&T.

matrice \mathbf{J} en fonction des coordonnées cartésiennes du robot, à savoir des angles d’orientation dans notre cas. Le résultat d’un tel calcul est particulièrement complexe du fait que l’équation à résoudre est une équation trigonométrique polynomiale à plusieurs variables interdépendantes. Une détermination numérique de ces lieux de singularité dans l’espace T&T est représentée sur la figure 2.2 qui illustre la complexité de tels lieux. On se propose ici de plutôt raisonner de façon vectorielle, cette façon de faire donne des résultats analogues, est plus simple à résoudre grâce aux expressions vectorielles de nos matrices jacobiniennes et donne directement des conditions liées à l’architecture du robot sur les lieux des singularités.

2.3 Analyse vectorielle et numérique

L’algèbre linéaire nous dit qu’une matrice carrée de dimension 3 n’est pas de plein rang si et seulement si :

- Au moins un des vecteurs engendrant l’espace image de cette matrice est nul.
- Il existe une ou plusieurs relations linéaires entre ces vecteurs ce qui géométriquement en dimension 3 peut se traduire par :
 - au moins deux de ces vecteurs sont colinéaires.
 - les 3 vecteurs sont coplanaires.

Ce qui se traduit dans notre cas par :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{0} \\ \text{ou } \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \\ \text{ou } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{alignement}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{0} \\ \text{ou } (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) = \mathbf{0} \\ \text{ou } (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{colinéarité}$$

$\left. [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)]^T (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) = 0 \right\}$ coplanéité Notons que l'alignement est un cas particulier de la colinéarité où les droites de direction sont colinéaires et confondues, de même que la colinéarité est un cas particulier de la coplanéité où les deux vecteurs générateurs du plan sont colinéaires. Ces cas sont cependant distingués pour deux raisons principales : tout d'abord pour distinguer des cas visuellement très distincts et ensuite car les expressions géométriques qui qualifient chacun de ces cas sont différentes.

À partir de ces conditions géométriques il est possible d'étudier l'espace de travail du manipulateur par le biais d'un volume qui représente les limites à ne pas franchir depuis l'état initial considéré dans l'espace des angles choisis. La méthode adoptée est la suivante : On part de la configuration initiale choisie arbitrairement qui correspond à $(\phi = 0, \theta = 0, \sigma = 0)$. Puis tout en conservant $\phi = 0$ et $\theta = 0$ on incrémente σ jusqu'à atteindre une configuration singulière repérée grâce aux conditions géométriques citées plus haut ce qui nous donne une limite supérieure sur σ . Ensuite on retourne à l'état initial et on décrémente σ jusqu'à obtenir la limite inférieure de la même façon. Puis pour chaque plan correspondant aux différentes valeurs des incréments de σ compris entre ses limites supérieures et inférieures on cherche les limites de l'espace de travail selon ϕ et θ . Pour cela on découpe l'espace $[0 \dots 2\pi]$ correspondant à ϕ en autant d'incrément que la résolution voulue selon ϕ et pour chaque incrément de ϕ , on part de $\theta = 0$ qu'on incrémente jusqu'à arriver à une position singulière. L'ensemble des points limites calculés est ensuite représenté dans un espace orthonormé x, y, σ où $x = \theta \cos \phi$ et $y = \theta \sin \phi$ qui forme l'espace de travail du robot.

vecteur	coordonnée x	coordonnée y	coordonnée z
\mathbf{a}_1	5	10	-16
\mathbf{a}_2	0	-10	-16
\mathbf{a}_3	-5	-10	-16
\mathbf{b}_{10}	12.4	-7.16	0
\mathbf{b}_{20}	-12.4	-7.16	0
\mathbf{b}_{30}	0	14.32	0

TABLE 2.1 – Paramètres architecturaux du robot S/3-UPS étudié dans cette section.

Si on applique cette méthode sur un robot possédant les paramètres architecturaux explicités au tableau 2.1 alors on obtient le volume de travail illustré à la figure 2.3.

Cette représentation est limitée par le choix de la convention choisie pour repérer l'orienta-

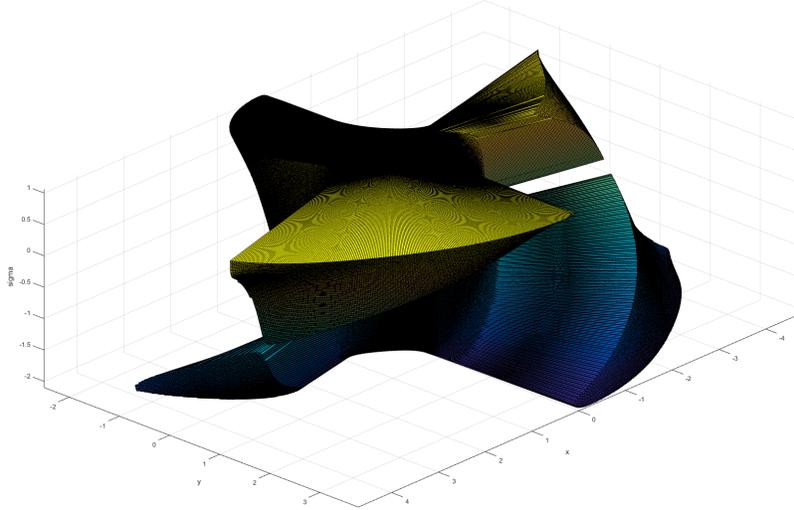


FIGURE 2.3 – Lieu des singularités d’un robot sphérique S/3-UPS dans l’espace des angles T&T dans un repère $(\theta \cos \phi, \theta \sin \phi, \sigma)$.

tion de l’effecteur. En effet selon la convention choisie le volume résultant sera complètement différent. De même la représentation doit être adaptée pour être compréhensible. Par exemple si on représente le résultat précédent dans un repère orthonormé dont les valeurs aux axes correspondent directement aux valeurs des précédents angles on obtient la figure 2.4 qui est difficile à analyser. Enfin il est à noter que le volume en lui même n’a de sens qu’au vu de la convention choisie qui doit refléter les trajectoires que l’on veut faire avec le robot. Il est inadapté de mesurer la performance du robot au vu de la valeur du volume obtenu, il est préférable d’avoir un volume homogène qui traduit une polyvalence dans l’espace de travail du robot plutôt qu’un volume imposant mais dont une grande partie de l’espace de travail correspondant est difficile d’accès ou limité dans le choix des directions potentielles.

Cependant ce résultat est tout de même utile car il permet de comparer efficacement deux robots sur une base équivalente. La comparaison des deux volumes correspondants permet de repérer celui qui possède l’espace de travail le plus grand. De plus sur la figure obtenue on peut constater de l’homogénéité de cet espace de travail qui est une caractéristique très importante pour un contrôle efficace du robot. En effet un robot dont l’espace de travail est très irrégulier possède de grandes chances d’être limité à des trajectoires très spécifiques même si elles sont le long de grandes amplitudes de mouvement alors qu’un robot dont l’espace de travail est régulier possèdera un vaste choix de trajectoire même si elles sont sur des amplitudes limitées.

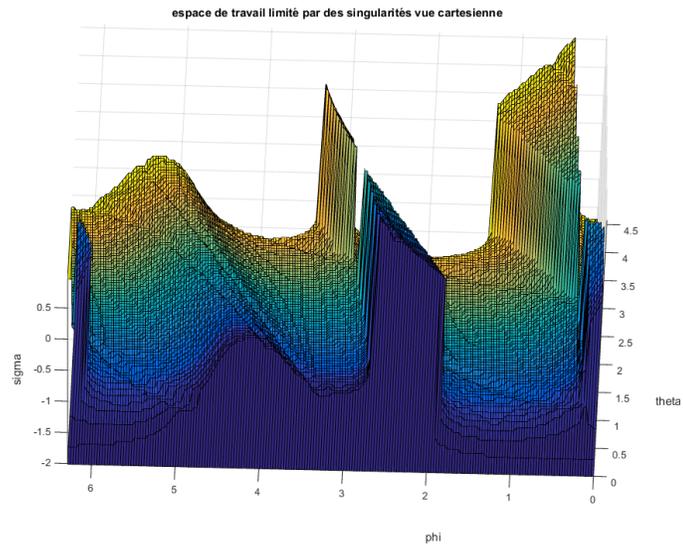


FIGURE 2.4 – Lieu des singularités d’un robot sphérique S/3-UPS dans l’espace des angles T&T dans un repère (ϕ, θ, σ)

Conclusion

Nous avons donc introduit dans ce chapitre les méthodes qui seront utilisées pour quantifier les performances d’un robot sphérique concernant son espace de travail ainsi que les outils de comparaison qui seront utilisés par la suite.

Chapitre 3

ÉTUDE DES SINGULARITÉS DU ROBOT SPHÉRIQUE REDONDANT S/(2-UP)RS/2-UPS

Nous venons de voir les limites imposées à la plage de travail du robot du fait de ses configurations singulières, nous allons alors comparer cette plage de travail théorique avec celle du robot redondant.

3.1 Analyse vectorielle/visualisation sous GUI Matlab

Nous allons nous intéresser plus particulièrement ici aux singularités de type II car elles sont les plus préjudiciables au bon contrôle du robot.

Les singularités de type II arrivent quand la matrice \mathbf{J} n'est plus de plein rang. Par commodité d'écriture nous étudierons la transposée de \mathbf{J} , dire que \mathbf{J} n'est pas de plein rang étant équivalent à dire que sa transposée n'est pas de plein rang.

Plusieurs articles traitent de la détermination du lieu des singularités dans l'espace des coordonnées cartésiennes, comme [4], [5], [2] ou [3]. Cependant ces articles adoptent une approche purement calculatoire en recherchant les solutions obtenues en égalant le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{J} à zéro. On se propose ici de plutôt raisonner de façon vectorielle, cette façon de faire donne des résultats équivalents, est plus simple à résoudre et donne directement des conditions liées à l'architecture du robot sur les lieux des singularités.

L'algèbre linéaire nous dit qu'une matrice carrée de dimension 3 n'est pas de plein rang si et seulement si au moins un des vecteurs engendrant l'espace image de cette matrice est nul, ou si il existe une ou plusieurs relations linéaires entre ces vecteurs ce qui géométriquement en dimension 3 peut se traduire par : soit au moins deux de ces vecteurs sont colinéaires, soit les 3 vecteurs sont coplanaires.

Ce qui se traduit dans notre cas par :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{0} \\ \text{ou } \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \\ \text{ou } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{alignement} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{0} \\ \text{ou } (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) = \mathbf{0} \\ \text{ou } (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{colinéarité} \quad (3.2)$$

$$[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)]^T (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) = 0 \quad \left. \right\} \text{coplanéité} \quad (3.3)$$

Maintenant considérons le point C . L'actionneur redondant dans notre système permet de positionner ce point à différents endroits sans changer l'orientation de la plateforme.

Le fait que la liaison en C soit une liaison rotoïde fait que l'ensemble de ces positions possibles du point C forme un cercle autour de B_1 dans le plan formé par A_{11}, A_{12} et B_1 .

Ce degré de liberté redondant nous permet donc d'éviter les cas de singularité suivants :

$$\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) = \mathbf{0} \text{ si } \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0} \quad (3.5)$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{0} \text{ si } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 \neq \mathbf{0} \quad (3.6)$$

$$[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)]^T (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) = 0 \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 \neq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Notons que l'on étudie le robot dans une configuration particulière, ce qui signifie que B_1 , B_2 et B_3 sont localement "fixes".

La question que l'on peut légitimement se poser maintenant est : existe-t-il des configurations

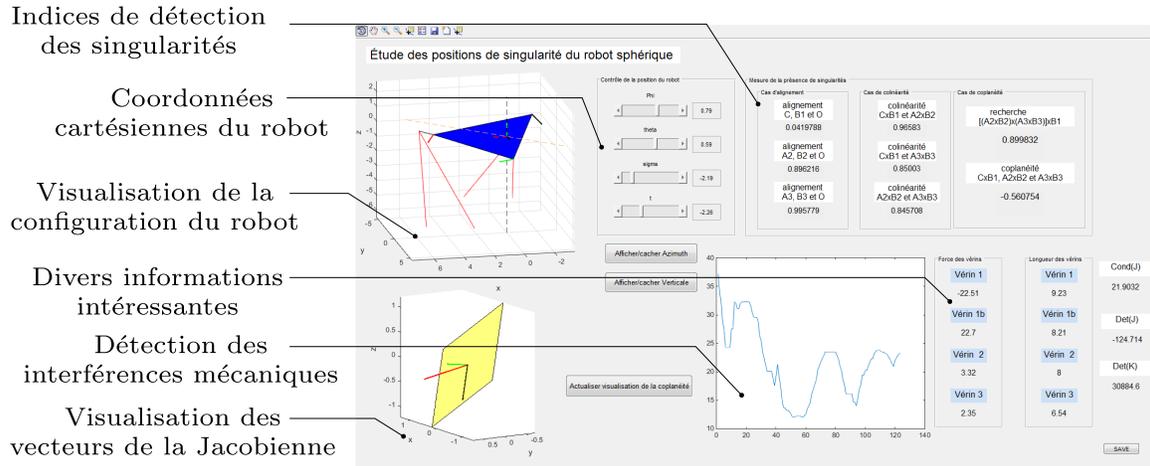


FIGURE 3.1 – Interface interactive pour l'étude du robot sphérique-GUI Matlab

liées à l'orientation et l'architecture du robot dans lesquelles on ne puisse pas éviter les cas de singularité ci-dessus ?

Pour analyser les cas énumérés précédemment, un GUI (Graphical User Interface) spécifique a été conçu sous Matlab dont un aperçu est visible à la figure 3.1. Cette interface permet de positionner le robot dans la configuration voulue, de visualiser son architecture en mouvement et fournit diverses informations qui permettent d'étudier ses cas de singularités. Les informations présentes sont : 8 indices géométriques relatifs aux positions de singularité décrites plus haut ; le robot est représenté simplement par ses points architecturaux ; les vecteurs de la matrice \mathbf{J} sont représentés pour analyser leurs positions relatives ; un graphique représente l'évolution de la distance entre deux éléments choisis au préalable lors de trajectoires quelconques choisies par l'utilisateur et permet d'étudier des cas de contacts mécaniques ; divers informations intéressantes telles que les coordonnées articulaires, les efforts statiques subis par les actionneurs (pour un cas de charge choisi au préalable) et les valeurs des déterminants et conditionnement des matrices \mathbf{J} et \mathbf{K} qui de façon toute relative permettent de connaître la proximité du robot avec un état singulier.

Pour le cas de l'équation 3.4, $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ arrive si : \mathbf{b}_1 est nul. Or \mathbf{b}_1 ne sera jamais nul car il se situe sur une sphère de centre l'origine O et de rayon $\|\mathbf{b}_1\| = OB_1 = \text{constante}$. Ou si \mathbf{c} est nul. \mathbf{c} étant situé sur un cercle autour de B_1 il suffit de s'assurer que O ne soit jamais sur ce cercle, ce qui se fait facilement par exemple en prenant la longueur de la bielle liant B_1 et C telle que $B_1C = \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{c}\| \neq \|\mathbf{b}_1\| = B_1O$. Ou si l'angle entre les vecteurs \mathbf{c} et \mathbf{b}_1 vaut 0 ou $\pi \Leftrightarrow C, B_1$ et O sont alignés. L'ensemble des configurations où C, B_1 et O sont alignés représente une droite dans l'espace (la droite passant par B_1 et O car on les considère

localement fixes). L'ensemble des positions possibles du point C est un cercle dans l'espace sur un plan particulier. Or une droite et un cercle dans l'espace soient ne s'intersectent pas, s'intersectent en 1 point ou s'intersectent en 2 points (notons que ce cas est le seul possible ici car la droite passe par le centre du cercle et est située dans le même plan que ce dernier). Il existe donc la plupart du temps un bon nombre de positions du point C pour lesquelles $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$.

Donc dans les cas des équation 3.5 et 3.6, à l'exception de cas très marginaux, $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1$ possède suffisamment de directions libres de choix pour éviter $(\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) = \mathbf{0}$ ou $(\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{0}$.

Dans le cas de l'équation 3.7, $[(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)]^T (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) = 0$, où $\mathbf{n} = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)$, on montre que $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1$ peut prendre n'importe quelle direction dans un plan normal à \mathbf{b}_1 . En effet $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1$ forme un vecteur qui correspond aux coordonnées d'un point parcourant une ellipse dans un plan spécifique, ce vecteur peut donc prendre n'importe quelle orientation dans ce plan. Prenons \mathbf{b}_1 avec des coordonnées quelconques non nulles soit $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ exprimées dans le repère du plan formé par A_{11} , A_{12} et B_1 . Dans ce repère $\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + l\mathbf{u}$ avec $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \end{bmatrix}^T$ et donc :

$$\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1 = l \begin{bmatrix} c \sin \beta \\ -c \cos \beta \\ b \cos \beta - a \sin \beta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$= l \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2+c^2}} \\ -\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 & \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+c^2} - \frac{b^2}{b^2+c^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{b^2+c^2} \cos \beta \\ \sqrt{a^2+c^2} \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$= l\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \sqrt{b^2+c^2} \cos \beta \\ \sqrt{a^2+c^2} \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

On démontre aisément que \mathbf{Q} est une matrice de rotation du plan formé par A_{11} , A_{12} et B_1 vers un plan de normal \mathbf{b}_1 et que $l \begin{bmatrix} \sqrt{b^2+c^2} \cos \beta & \sqrt{a^2+c^2} \sin \beta & 0 \end{bmatrix}^T$ décrit la trajectoire d'une ellipse avec pour demi-axes respectivement $l\sqrt{b^2+c^2}$ et $l\sqrt{a^2+c^2}$. Donc $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1$ peut être orienté dans n'importe quelle direction dans le plan de normale \mathbf{b}_1 .

Donc la configuration ci-dessus peut toujours être évitée sauf si \mathbf{n} et \mathbf{b}_1 sont colinéaires. Un autre cas est à éviter pour ne pas rendre la redondance cinématique inutile, celui où \mathbf{b}_1 appartient au plan de la bielle et en même temps que la normale au plan de la bielle appartient au plan formé par les deux vecteurs de la matrice \mathbf{J} . Dans ce cas l'ensemble des valeurs admissibles pour $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1$ dégénère en une droite qui peut alors se superposer avec la droite des valeurs à éviter. En effet le problème dans ce cas est que si \mathbf{b}_1 appartient au plan de la bielle alors $\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1$ possède une unique direction quelle que soit la position de la

bielle car l'ellipse décrite plus haut dégénère en une droite orthogonale au plan de la patte double, on perd alors grandement en capacité d'esquive des singularités. De plus, si cet unique vecteur appartient au plan formé par les vecteurs $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2$ et $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3$ alors on se retrouve dans un autre cas où les singularités par coplanéité ne peuvent être évitées. Ce cas sera d'ailleurs un problème majeur lors de l'élaboration du prototype dans le chapitre 5. En dehors de ces situations marginales les singularités par coplanéité peuvent être tout le temps évitées.

3.2 Cas de l'architecture simplifiée

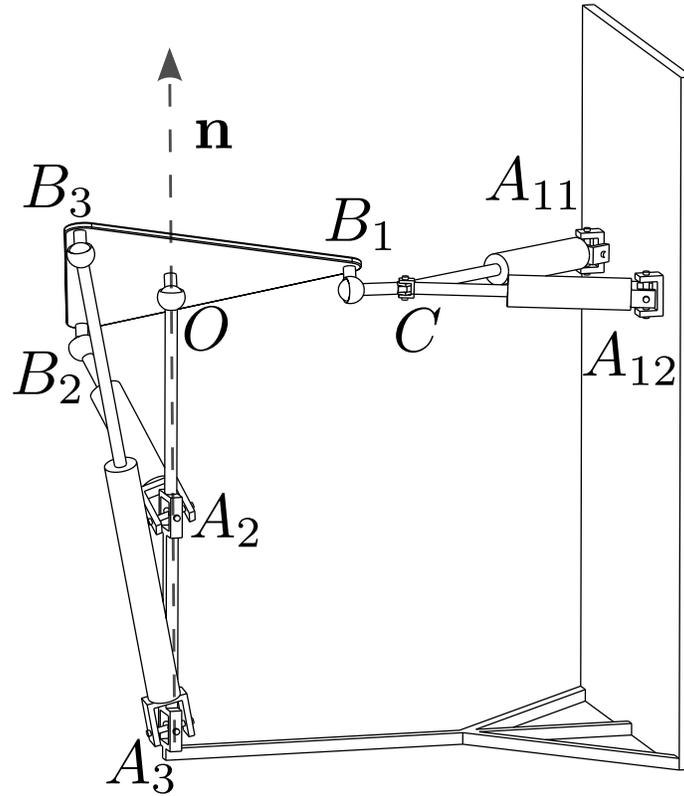


FIGURE 3.2 – Cas particulier d'architecture du robot sphérique redondant.

Cette section présente un cas plus particulier de l'architecture décrite plus haut. On s'arrange pour que B_1 , B_2 , B_3 et O soient coplanaires. De plus on place A_2 et A_3 sur un axe qui passe par O , c'est-à-dire que A_2 , A_3 et O sont colinéaires. Cet axe est considéré comme l'axe vertical. Un exemple de construction de ce robot est présenté à la Figure 3.2.

Nous pouvons donc aisément localiser le vecteur $\mathbf{n} = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)$. En effet $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2$ est orthogonal à \mathbf{a}_2 qui est colinéaire à \mathbf{z} (vecteur directeur de l'axe vertical) donc $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2$ est orthogonal à \mathbf{z} . De la même façon $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3$ est orthogonal à \mathbf{a}_3 qui est colinéaire à \mathbf{z} (vecteur directeur de l'axe vertical) donc $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3$ est orthogonal à \mathbf{z} lui aussi. Donc \mathbf{n} est colinéaire à

\mathbf{z} , ce qui fait que par transitivité :

$$\mathbf{b}_1 // \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{b}_1 // \mathbf{z} \quad (3.11)$$

Or si \mathbf{b}_1 et \mathbf{z} sont colinéaires alors A_2, A_3, B_2, B_3 et O sont coplanaires et donc $(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) // (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)$, on peut alors écrire :

$$\mathbf{b}_1 // \mathbf{z} \Rightarrow (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) // (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) \quad (3.12)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\mathbf{b}_1 // \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) // (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) \quad (3.13)$$

Or $\mathbf{b}_1 // \mathbf{n}$ correspond au pire cas où le degré de liberté redondant ne peut nous sortir du cas de singularité par coplanéité et $(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) // (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)$ correspond à un cas de singularité par alignement de deux vecteurs de la jacobienne que le degré de liberté redondant ne peut modifier et donc auquel on ne peut sortir grâce à la bielle. Ce qui signifie que le cas de singularité par coplanéité que l'on doit éviter car le degré de liberté redondant ne permet d'en sortir est inclus dans un cas de singularité par alignement dont on ne peut sortir quelle que soit la position choisie pour les points d'attache du robot. On "repousse" donc le cas qu'on veut éviter dans un cas qu'on ne peut de toute façon pas éviter. Ceci est possible par l'alignement de O, A_2 et A_3 .

Un des intérêts principaux de l'architecture présentée ici est d'obtenir un espace atteignable en orientation plus grand que celui des architectures plus simples. En effet, tel que mentionné en introduction les singularités sont la principale limitation de l'espace atteignable du robot, nous allons donc déterminer les zones singulières dans l'espace des angles de Tilt & Torsion. Pour ce faire nous allons, pour chacun des cas de singularité identifié auparavant, déterminer une matrice de rotation qui place le robot dans l'état singulier étudié puis nous allons égaliser cette matrice à celle de T&T pour déterminer les angles correspondants. Pour ce faire nous nous servirons du résultat sur l'expression d'une matrice de rotation en fonction de son axe et de son angle.

Singularité par alignement : La matrice d'orientation qui correspond à ce cas de singularité par alignement des points A, B et O peut s'obtenir par le produit de deux matrices de rotation successives : une première rotation qui "place" la plateforme dans la configuration d'alignement puis une deuxième rotation autour de l'axe de l'alignement qui correspond à l'ensemble des mouvements possibles sans que l'on sorte de cette configuration.

Pour $i = \{2, 3\}$ correspondant aux pattes 2 ou 3 du robot, la première rotation permet de placer le vecteur \mathbf{b}_{i0} (position initiale de ce point) dans la position où \mathbf{b}_i est aligné avec \mathbf{a}_i et peut se construire de la façon suivante : l'axe de rotation est $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}_{i0} \times \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{b}_{i0} \times \mathbf{a}_i\|}$ et l'angle de la rotation α est tel que $\cos \alpha = \frac{\mathbf{b}_{i0}^T \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{b}_{i0}\| \|\mathbf{a}_i\|}$. Le caractère aligné de deux vecteurs étant de période

π le cosinus de cet angle est suffisant. On peut alors écrire :

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \cos \alpha(\mathbf{1}_3 - \mathbf{e}\mathbf{e}^T) + \sin \alpha(\mathbf{1}_3 \times \mathbf{e}). \quad (3.14)$$

La seconde rotation s'effectue autour de l'axe décrivant l'alignement et caractérise l'ensemble des rotations possibles qui ne font pas sortir de ce cas d'alignement, en d'autres termes cette deuxième matrice permet de décrire l'ensemble des triplets (ϕ, θ, σ) pour lesquels le cas de singularité par alignement se produit, là où la première matrice ne donne qu'un cas possible mais conditionne les résultats que la seconde matrice permet d'obtenir. On obtient :

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T + \cos \eta(\mathbf{1}_3 - \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T) + \sin \eta(\mathbf{1}_3 \times \mathbf{u}_i) \quad (3.15)$$

où η est un angle qui peut prendre n'importe quelle valeur et \mathbf{u}_i un vecteur unitaire tel que :

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}. \quad (3.16)$$

La matrice globale qui caractérise ce cas de singularité est $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$. Il suffit alors de l'égaliser à la matrice de T & T pour déterminer les triplets d'angles (ϕ, θ, ψ) qui correspondent à ces lieux de singularité :

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{Q}. \quad (3.17)$$

L'avantage d'une telle méthode en comparaison de la recherche des racines du déterminant de la matrice Jacobienne est que les équations à résoudre sont ici bien plus simples. En effet l'équation du déterminant nécessite de résoudre en une fois l'ensemble des cas de singularité avec des termes trigonométriques non-linéaires là où avec cette méthode les cas de singularité sont découplés, de plus la résolution se déroule grâce à un système de 9 équations pour 3 inconnues où en général 5 de ces équations sont très simples à résoudre, bien que composées de termes très grands.

Prenons ici le cas où la plateforme est initialement dans un plan horizontal donc la composante z du vecteur b_{i_0} est égale à zéro. De plus les spécificités de l'architecture présentée en début de section font que les composantes x et y des vecteurs a_2 et a_3 sont nulles, ce qui diminue beaucoup la taille des termes des équations ci-dessus.

On trouve notamment :

$$q_{33} = \cos \theta = 0 \text{ soit } \theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ indépendamment de } \phi \text{ et } \sigma. \quad (3.18)$$

De plus, en posant $\frac{\mathbf{b}_{i_0}}{\|\mathbf{b}_{i_0}\|} = [\cos \gamma \quad \sin \gamma \quad 0]$ on obtient :

$$\begin{cases} q_{13} &= -\cos(\alpha + \gamma) &= \pm \cos(\phi) \\ q_{23} &= \sin(\alpha + \gamma) &= \pm \sin \phi \end{cases} \quad (3.19)$$

ce qui donne $\phi = \frac{1 \pm 1}{2} \pi - (\alpha + \gamma) = -\alpha + \text{constante}$ ce qui signifie que ϕ est libre de prendre n'importe quelle valeur.

$$\begin{cases} q_{31} &= -\sin \theta \cos(\sigma - \phi) = \text{signe}(a_{i_3}) \cos \gamma \\ q_{32} &= \sin \theta \sin(\sigma - \phi) = -\text{signe}(a_{i_3}) \sin \gamma \end{cases} \quad (3.20)$$

On trouve donc $\sigma - \phi = \frac{1 \pm \text{signe}(a_{i_3}) 1}{2} \pi + \gamma$ soit $\sigma - \phi = \text{constante}$.

Au final l'ensemble des cas de singularité par alignement dans l'espace des angles cartésiens se résume à :

$$\begin{cases} \phi &= \phi \\ \theta &= \pm \frac{\pi}{2} \\ \sigma &= \phi + \text{constante} \end{cases} \quad (3.21)$$

Soit une droite dans l'espace des coordonnées cartésiennes du robot.

Singularité par colinéarité : Un autre cas de singularité intervient quand les vecteurs $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2$ et $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3$ sont colinéaires. Ces deux vecteurs sont respectivement définis comme orthogonaux à deux autres vecteurs, on peut alors affirmer que ces vecteurs sont colinéaires quand les vecteurs dont ils sont issus sont coplanaires. De plus on sait que les vecteurs \mathbf{b}_2 et \mathbf{b}_3 sont de par l'architecture du robot dans un même plan qui est le plan de la plateforme. Donc la condition de coplanéité peut se traiter en cherchant quand à la fois le vecteur \mathbf{a}_2 et le vecteur \mathbf{a}_3 sont dans le plan de la plateforme. Pour cela dans un cas très général on calcule $\mathbf{b}_{20} \times \mathbf{b}_{30}$ et $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$, on calcule la matrice de rotation qui aligne ces deux vecteurs puis on calcule la matrice du degré de liberté qui conserve cette colinéarité, vraisemblablement la matrice d'une rotation d'angle libre autour de $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$. Cependant ici nous sommes dans un cas un peu particulier où $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ est nul car \mathbf{a}_2 et \mathbf{a}_3 sont architecturalement alignés. Il suffit alors de définir la matrice de rotation d'angle défini par le cosinus entre \mathbf{a}_2 et sa projection dans le plan initial de la plateforme $\mathbf{a}_{2p} = (\mathbf{1}_3 - \frac{(\mathbf{b}_{20} \times \mathbf{b}_{30}) \cdot (\mathbf{b}_{20} \times \mathbf{b}_{30})^T}{\|\mathbf{b}_{20} \times \mathbf{b}_{30}\|^2}) \mathbf{a}_2$ autour de l'axe $\mathbf{a}_{2p} \times \mathbf{a}_2$. La plateforme est alors libre à la fois de tourner autour de $(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)$ et de \mathbf{a}_2 sans que la condition de coplanéité ne soit rompue, on a ici deux degrés de liberté possibles. La méthode utilisée pour déterminer le lieux des singularités par alignement dans l'espace des coordonnées cartésiennes peut être réutilisée ici, mais il faut alors introduire non pas une mais deux matrices représentant la liberté de mouvement du robot une fois en position singulière.

Comme précédemment \mathbf{Q}_1 permet d'orienter la plateforme en configuration de singularité par colinéarité en plaçant \mathbf{a}_2 dans le plan de la plateforme, ensuite \mathbf{Q}_2 effectue la rotation d'angle libre autour de $(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)$ et enfin \mathbf{Q}_3 effectue la rotation d'angle libre autour de \mathbf{a}_2 . On obtient $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3$ que l'on égalise avec $\mathbf{R}(\phi, \theta, \sigma)$. Comme précédemment 5 équations parmi les 9

sont simples à résoudre et nous donnent :

$$\begin{cases} \phi &= \phi \\ \theta &= \pm \frac{\pi}{2} \\ \sigma &= \sigma \end{cases} \quad (3.22)$$

Autres cas de singularité : Les autres cas de singularité peuvent tous être évités par la redondance du robot, comme nous l'avons déjà montré auparavant.

Le résultat de ces calculs permet de résumer le lieu des singularités pour ce robot aux plans $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ dans l'espace des coordonnées cartésiennes. L'espace de travail théorique est donc très homogène et plus grand que dans le cas d'un robot sphérique classique.

3.3 Conséquences sur la plage de travail en orientation du robot

Nous cherchons ici à visualiser le gain d'espace de travail obtenu en reprenant la méthode utilisée en 2.3 pour visualiser des volumes de travail qui correspondent à l'ensemble des positions admissibles pour le robot dans l'espace des angles T&T.

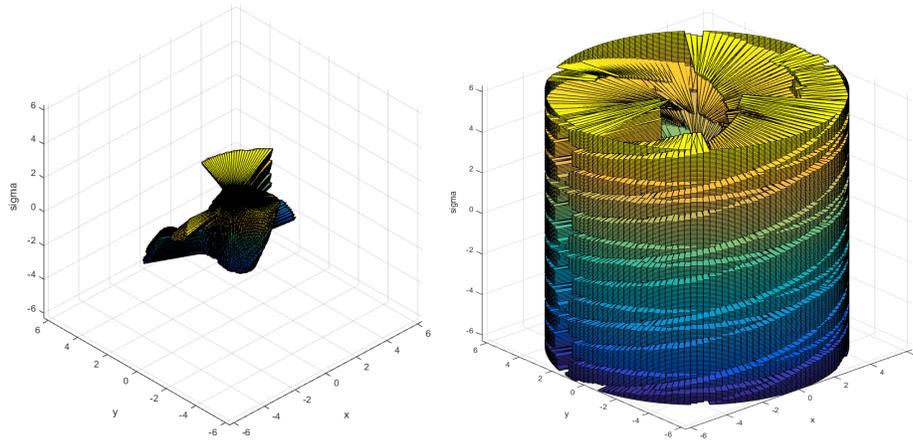
Pour traiter le cas du robot redondant il suffit d'utiliser une des méthodes discutées au chapitre 4 pour déterminer la configuration du robot à chaque incrément de position ainsi que sa matrice \mathbf{J} . Pour le reste, la méthode est équivalente.

vecteur	coordonnée x	coordonnée y	coordonnée z
\mathbf{a}_{11}	5	10	-16
\mathbf{a}_{12}	-10	11	-16
\mathbf{a}_2	0	-10	-16
\mathbf{a}_3	-5	-10	-16
\mathbf{b}_{10}	12.4	-7.16	0
\mathbf{b}_{20}	-12.4	-7.16	0
\mathbf{b}_{30}	0	14.32	0

TABLE 3.1 – Paramètres architecturaux du robot $S/(2\text{-SP})RS/2\text{-UPS}$ étudié dans cette section.

Pour la comparaison, le robot simple est construit suivant les paramètres architecturaux du tableau 2.1 et le robot redondant est construit suivant les paramètres architecturaux du tableau 3.1. Leurs architectures sont analogues, le robot redondant possédant simplement un point d'attache supplémentaire par rapport au robot simple pour former la patte double.

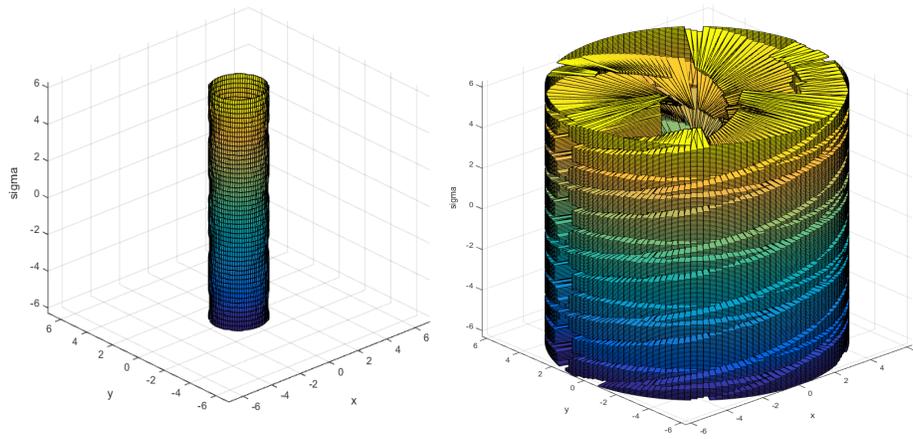
Enfin pour comparer les deux volumes obtenus ils suffit de les mettre côte à côte à la même échelle, ce qu'illustre la figure 3.3. Sur cette figure on voit très nettement le gain en espace de



Volume de travail robot simple Volume de travail robot redondant

FIGURE 3.3 – Comparaison des espaces de travail limité par les configurations singulières dans l’espace des angles T&T entre le robot sphérique S/3-UPS simple et le robot sphérique S/(2-UP)RS/2-UPS redondant.

travail apporté par la redondance, le volume étant bien plus grand dans le cas de l’architecture redondante.



volume de travail robot redondant cas particulier volume de travail robot redondant cas général

FIGURE 3.4 – comparaison des espaces de travail limité par les configurations singulières dans l’espace des angles T&T entre un robot sphérique redondant d’architecture quelconque et le robot sphérique redondant dont deux points d’attache sont alignés

Finalement on peut aussi faire la même comparaison entre le cas spécifique discuté en 3.2 et le cas précédent plus général. Cette comparaison est visible à la figure 3.4. On remarque que dans le cas spécifique on perd en volume général mais on gagne en homogénéité, le volume de travail dans le cas spécifique étant un cylindre de rayon $\frac{\pi}{2}$ dans cette représentation.

Conclusion

Dans ce chapitre la question de la recherche des singularités a été abordé. Au vu de l'analyse vectorielle présentée appuyée par une simulation interactive des choix de conception ont été abordé dans le but de maximiser les avantages apportés par l'introduction de la redondance cinématique dans l'architecture du robot.

Chapitre 4

SOLUTION DU PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE INVERSE

Dans le chapitre précédent il est démontré que le robot a la possibilité de se placer dans des configurations avantageuses pour éviter d'être dans un état singulier. Nous allons ici explorer plusieurs façons concrètes de piloter un tel robot efficacement.

4.1 Description du choix de la méthode de solution du problème géométrique inverse

Cette section présente trois méthodes de résolution du problème géométrique inverse du robot qui visent à répondre au problème des singularités : une méthode conventionnelle, une méthode algorithmique numérique et une méthode analytique. Les trois méthodes sont viables mais l'étude comparative faite dans cette section va conduire à préconiser une méthode par rapport aux autres.

Il existe bien des manières de piloter un robot et l'architecture présentée ici ne déroge pas à cette règle. Chaque méthode possède ses propres avantages et inconvénients qu'il convient de prendre en considération au moment de choisir celle qui sera utilisée en fonctionnement.

Tout d'abord nous avons pour objectif de simplement orienter la plateforme, en effet nous ne cherchons pas à optimiser ni la charge transportable ni la vitesse ou les accélérations du robot.

Trois méthodes assez différentes sont présentées dans cette section pour présenter un panel de possibilités intéressant. Elles sont toutes théoriquement viables bien que l'analyse de leurs forces et faiblesses permet de qualifier l'une d'entre-elles de meilleure au vu des conditions de fonctionnement voulues.

Pour la comparaison des méthodes, l'adaptabilité sera évaluée, c'est-à-dire la capacité de la méthode à s'adapter à n'importe quelle trajectoire voulue, le conditionnement de la matrice Jacobienne est un bon indice de performance car il traduit l'éloignement du robot par rapport à ses états singuliers, enfin si les deux critères précédents ne permettent pas de classer clairement deux solutions alors la "simplicité" sera évaluée, c'est-à-dire la complexité mathématique de la méthode qui, plus elle est élevée, plus elle augmente la probabilité d'apparition d'erreurs inattendues.

4.1.1 Solution conventionnelle

La première méthode se base sur la solution du problème géométrique inverse (PGI) d'un robot sériel redondant issue de [23]. Cette méthode est reprise dans [24] qui adapte sa formulation pour la rendre plus efficace. Cette méthode se sert de la solution à norme minimale (c'est-à-dire la solution qui permet d'avoir la norme du vecteur des vitesses la plus faible possible) auquel elle ajoute un terme qui permet d'assurer une fonction auxiliaire en plus de la trajectoire à suivre.

Cette approche correspond à la formule suivante :

$$\delta \mathbf{l} = \mathbf{K}^I \mathbf{J} \delta \boldsymbol{\gamma} + \delta t (\mathbf{1}_4 - \mathbf{K}^I \mathbf{K}) (k \frac{\partial p}{\partial \mathbf{l}}) \quad (4.1)$$

où \mathbf{K} et \mathbf{J} sont les matrices Jacobiennes du robot, \mathbf{K}^I étant la pseudo-inverse à norme minimale de \mathbf{K} définie telle que $\mathbf{K}^I = \mathbf{K}^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T)^{-1}$, $\delta \mathbf{l} = [\delta l_{11} \ \delta l_{12} \ \delta l_2 \ \delta l_3]^T$ est le vecteur des petites variations sur les coordonnées articulaires soit les longueurs des vérins, $\delta \boldsymbol{\gamma} = [\delta \phi \ \delta \theta \ \delta \sigma]^T$ est le vecteur des petites variations sur les coordonnées cartésiennes soit les angles de la matrice de T & T, δt est un petit incrément de temps, p est une expression mathématique qui sera maximisée par l'algorithme récursif et traduisant la consigne auxiliaire et k est un coefficient de pondération de la consigne auxiliaire.

Cette expression provient d'un développement limité au premier ordre de l'expression liant les vitesses articulaires et les vitesses cartésiennes à l'aide des matrices jacobiennes. Ceci explique la présence de l'incrément de temps δt et aussi pourquoi cette expression ne fonctionne que si on effectue de légères variations des coordonnées cartésiennes. Cette expression est parfaitement adaptée à un calcul numérique itératif des coordonnées articulaires où il suffit de connaître la position initiale du robot et de faire de petits incréments dans l'espace cartésien pour décrire la trajectoire désirée.

Pour le choix de la consigne auxiliaire p nous prenons ici le déterminant au carré de la matrice jacobienne \mathbf{J} . De cette façon les mobilités supplémentaire éloignent le robot de sa configuration où $\det(\mathbf{J}) = 0$, en l'éloignant vers des valeurs plus élevées du côté négatif ou positif, suivant sa configuration initiale. Le conditionnement $\text{cond}(\mathbf{J})$ peut aussi être utilisé mais il faut alors le minimiser pour s'éloigner des configurations singulières et utiliser l'opposé du conditionnement

par exemple. Cependant son calcul est sensiblement plus long que celui du déterminant pour des résultats analogues.

Il reste à déterminer \mathbf{c} en fonction des coordonnées articulaires, les autres paramètres étant connus.

Voici un exemple de méthode de calcul du point C en fonction des coordonnées articulaires. Les coordonnées du point C sont soumises aux équations de contrainte suivantes :

$$l_{11}^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11})^T (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11} - 2\mathbf{a}_{11}^T \mathbf{c} \quad (4.2)$$

$$l_{12}^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{12})^T (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{12}) = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{a}_{12} - 2\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{c} \quad (4.3)$$

$$l^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1)^T (\mathbf{c} - \mathbf{b}_1) = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_1^T \mathbf{c} \quad (4.4)$$

En soustrayant respectivement les équations 4.3 et 4.4 de l'équation 4.2 nous pouvons éliminer les termes $\mathbf{c}^T \mathbf{c}$ et nous obtenons :

$$l_{11}^2 - l_{12}^2 = \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{a}_{12} - 2(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})^T \mathbf{c} \quad (4.5)$$

$$l_{11}^2 - l^2 = \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 - 2(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1)^T \mathbf{c} \quad (4.6)$$

A ces expressions nous pouvons ajouter la condition de coplanéité entre A_{11} , A_{12} , B_1 et C :

$$[(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{12})]^T (\mathbf{c} - \mathbf{a}_{11}) = 0 \quad (4.7)$$

Si nous écrivons ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (l_{11}^2 - \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11}) - (l_{12}^2 - \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{a}_{12}) \\ (l_{11}^2 - \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11}) - (l^2 - \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1) \\ [(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{12})]^T \mathbf{a}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})^T \\ -2(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1)^T \\ [(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{12})]^T \end{bmatrix} \mathbf{c} \quad (4.8)$$

Et donc :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})^T \\ -2(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1)^T \\ [(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{12})]^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (l_{11}^2 - \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11}) - (l_{12}^2 - \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{a}_{12}) \\ (l_{11}^2 - \mathbf{a}_{11}^T \mathbf{a}_{11}) - (l^2 - \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1) \\ [(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}) \times (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_{12})]^T \mathbf{a}_{11} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Cette expression de \mathbf{c} est valable sur toute la plage de mouvement que nous désirons et correspond à la résolution de l'intersection de trois cercles en un point dans un même plan.

Cependant cette méthode pose plusieurs problèmes. Tout d'abord pour utiliser la formule de l'équation 4.1 à chaque itération nous avons besoin de calculer la "réelle" position du robot à l'aide de la solution du Problème Géométrique Direct (PGD) pour éviter tout écart de trajectoire dû à cette formule qui est une approximation linéaire d'une expression non-linéaire. Or dans le cas d'un robot sériel le PGD est facilement calculé mais pour un robot parallèle il faut passer par un système récursif convergent, ce qui ralentit considérablement les calculs.

De plus on se retrouve dans le cas où on souhaite avoir les incréments les plus grands possibles pour réduire le temps de calcul mais si ils sont trop grands en plus d'être imprécis nos calculs ont de grandes chances de diverger, un compromis doit donc être fait entre temps de calcul et précision. Ensuite les modèles en orientation ne s'adaptent pas bien du fait que le calcul du PGD numérique peut donner de multiples solutions différentes avec un modèle d'angles d'Euler. Par exemple dans le cas des angles de T & T les triplets $(\phi; \theta; \sigma)$ et $(\phi - \pi; -\theta; \sigma)$ sont parfaitement équivalents or cette singularité mathématique crée un saut de valeur qui fait diverger l'algorithme à la prochaine itération, le fait que ϕ soit indéterminé lorsque θ vaut zéro pose des problèmes similaires. Pour résoudre ce problème il faut passer par une représentation de l'orientation du robot avec des quaternions mais cela complexifie encore l'algorithme. De plus l'incrément sur les angles pour décrire la trajectoire voulue n'ont pas les mêmes "poids" du fait de la non linéarité du modèle, ce qui rend difficile le choix d'un incrément d'angle "suffisamment petit" pour que la formule soit valide. Enfin on a peu de contrôle avec cette formule sur la redondance cinématique, la redondance cinématique se traduit par la rotation de la bielle dans le plan de la patte double autour de son point d'attache avec la plateforme. Le mouvement auxiliaire correspond donc à une variation de l'angle de la bielle au cours du mouvement mais ce mouvement étant périodique la gestion de l'amplitude est donc primordiale pour ne pas avoir soit un mouvement trop peu réactif et donc inefficace ou trop rapide et tout aussi inefficace car certaines valeurs de l'angle de la bielle ne doivent être traversées sous peine de passer par une singularité. Enfin cette méthode ne fait que suivre la trajectoire objectif de façon approchée. Cette méthode s'avère donc trop peu avantageuse pour être jugée suffisante.

4.1.2 Solution numérique

La deuxième méthode présentée part de l'idée que les coordonnées articulaires sont simples à calculer pour un robot sphérique classique. En effet le PGI présenté à l'équation 2.1 donne l'expression des coordonnées articulaires en fonction des coordonnées cartésiennes. Cependant ces expressions ne permettent pas de gérer la redondance à elles seules. Il est choisi de gérer la redondance en prenant le conditionnement de la matrice Jacobienne pour indice de performance. Pour cela, l'idée est de calculer la dérivée numérique du déterminant par rapport au paramètre redondant. Le signe de cette expression permet de diriger le robot vers un état qui maximise l'indice de performance, en effet si la dérivée est positive alors il faut faire croître le paramètre redondant et si elle est négative alors il faut le faire décroître.

Cependant, bien que la valeur de la dérivée de l'indice de performance choisi nous donne une indication sur la quantité à ajouter au paramètre redondant elle reste trop imprécise et risque de traverser une singularité si elle est non maîtrisée. Dans les faits on borne le maximum d'angle que l'on peut ajouter au paramètre redondant. Cette valeur maximale autorisée entre deux itérations couplée à l'incrément de temps entre deux itérations borne la vitesse maximale

de la bielle, ce qui est bien par certains aspects mais peut nuire aux performances requises pour éviter les états singuliers. De plus cette solution fait osciller la bielle autour de son état optimal, ce qui n'est pas du tout favorable pour le fonctionnement des actionneurs. On doit alors lisser artificiellement le résultat mais ceci fausse toute proportion gardée ce dernier.

4.1.3 Solution analytique

Une troisième méthode est alors proposée. Les deux précédentes méthodes ont soulevé plusieurs problèmes notamment dus à une incompatibilité entre le caractère périodique du paramètre de redondance, l'incertitude sur la valeur de l'incrément d'angle à ajouter au paramètre redondant et le fait que mal choisir le paramètre redondant peut conduire le robot à un état singulier. L'objectif pour cette troisième méthode est alors de déterminer analytiquement les plages valides de fonctionnement pour le paramètre redondant. Pour cela reprenons la notation utilisée en 1.3. Si on introduit l'expression du point C à l'équation 1.12 dans la matrice \mathbf{J} dont l'expression se situe à l'équation 1.41 et qu'on développe cette expression grâce à la formule qui relie le déterminant au produit mixte on obtient :

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}^T) \quad (4.10)$$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} [\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1] & [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2] & [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3] \end{bmatrix} \right) \quad (4.11)$$

$$= [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)]^T (\mathbf{c} \times \mathbf{b}_1) \quad (4.12)$$

$$= [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3)]^T (\mathbf{Q} \begin{bmatrix} l \cos \beta \\ l \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{b}_1). \quad (4.13)$$

De plus la matrice \mathbf{Q} représentant la matrice de passage de l'espace cartésien à l'espace du plan où évolue la bielle peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

où \mathbf{q}_x est un vecteur de ce plan (arbitrairement il a été choisi $\mathbf{q}_x = \frac{\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1\|}$), \mathbf{q}_z est un vecteur orthogonal à ce plan (arbitrairement il a été choisi $\mathbf{q}_z = \frac{(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})}{\|(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{b}_1) \times (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12})\|}$) et \mathbf{q}_y complète le trièdre direct tel que $\mathbf{q}_y = \mathbf{q}_z \times \mathbf{q}_x$.

Ensuite on pose :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \times (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) \quad (4.15)$$

qui ne dépend que de l'orientation de la plateforme. On peut alors développer l'expression du déterminant de \mathbf{J} de la façon suivante :

$$\det(\mathbf{J}) = l\mathbf{v}^T(\mathbf{q}_y \times \mathbf{b}_1) \cos \beta - l\mathbf{v}^T(\mathbf{q}_x \times \mathbf{b}_1) \sin \beta \quad (4.16)$$

où β est le paramètre redondant indépendant de l'orientation de la plateforme.

Grâce à cette expression nous savons exactement quelles sont les bornes sur ce paramètre à ne pas franchir. En effet si on pose les variables suivantes uniquement dépendantes de l'orientation du robot :

$$k_1 = l\mathbf{v}^T(\mathbf{q}_y \times \mathbf{b}_1) \quad (4.17)$$

$$k_2 = -l\mathbf{v}^T(\mathbf{q}_x \times \mathbf{b}_1) \quad (4.18)$$

l'équation qui permet de déterminer le lieux des singularités en fonction du paramètre β devient :

$$\det(\mathbf{J}) = k_1 \cos \beta + k_2 \sin \beta = 0 \quad (4.19)$$

Cette équation a pour solutions :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma + n\pi \quad (4.20)$$

où $n \in \mathbb{Z}$ et γ sont définis par :

$$\sin \gamma = \frac{-k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (4.21)$$

$$\cos \gamma = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (4.22)$$

Appelons :

$$\eta_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (4.23)$$

$$\eta_2 = -\frac{\pi}{2} - \gamma \quad (4.24)$$

les deux solutions à cette équation dans l'intervalle $[-\pi \dots \pi]$ qui délimitent l'ensemble des valeurs admissibles pour β . De cette façon on démontre que le paramètre redondant β possède une plage de débattement de π dans laquelle on peut le faire varier librement et où les conditions de singularités par coplanéité des vecteurs de la matrice jacobienne sont évités.

Deux constatations importantes sont à noter. Premièrement cette formule est facilement dérivable par rapport au paramètre β , ce qui permet de dire que le maximum local du déterminant (qui correspond à l'état où le robot est dans sa configuration la plus éloignée d'un état de singularité) se situe au milieu de sa plage de débattement admissible. Cette valeur est donc par défaut une valeur idéale pour ce paramètre. Deuxièmement on retrouve dans k_1 et k_2 les résultats de l'analyse vectorielle des lieux à éviter pour ne pas rendre la redondance inopérante discutée en 3.1. En effet ces lieux correspondent aux lieux où $k_1 = k_2 = 0$ et donc quelle que

soit la valeur de β le robot se retrouve dans un état de singularité inévitable.

Cette méthode est à la fois la plus simple, la plus rapide en temps de calcul, la plus fiable et celle qui laisse le plus de marge de manœuvre. En effet la plage de valeurs possibles pour le paramètre redondant permet de prendre en compte bien plus aisément d'autres phénomènes que les seules singularités comme il est discuté en 4.3.

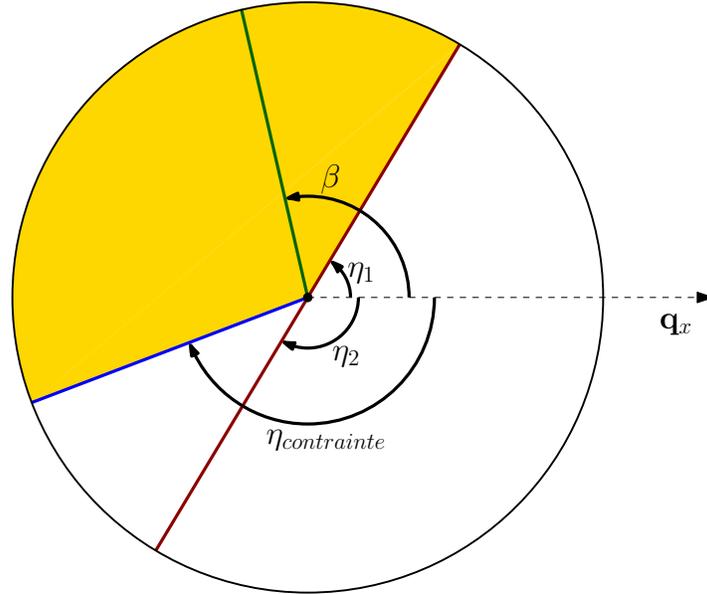


FIGURE 4.1 – Représentation de l'ensemble des valeurs admissibles pour le paramètre β .

La figure 4.1 présente l'ensemble des valeurs possibles pour le paramètre β qui satisfont aux conditions décrites ci-dessus. Cette figure représente l'orientation de la bielle définie par rapport à la direction du vecteur \mathbf{q}_x dans le plan défini et orienté par \mathbf{q}_z , les angles η_1 et η_2 pour lesquels le robot est dans un état de singularité et un angle $\eta_{contrainte}$ qui représente l'implémentation d'une condition supplémentaire telle que l'impossibilité pour β d'atteindre une valeur à cause d'un contact mécanique.

De cette façon on peut représenter l'espace de travail de la bielle en jaune qui est l'espace comprenant la valeur initiale de β délimité par les deux valeurs interdites les plus proches dans les deux directions. Cependant il faut comprendre que les valeurs limites dépendent de la configuration du robot et donc sont mobiles sur cette représentation. Ceci met en avant une difficulté non négligeable pour le pilotage du robot, car non seulement il faut faire constamment attention à ne jamais traverser ces limites pour ne pas perdre le contrôle du robot, il faut aussi que cette plage de possibilité soit la plus grande possible. Or, même si les limites dues au singularités laissent toujours un débattement possible de π , suivant les contraintes additionnelles ce débattement peut être considérablement réduit. Par exemple les contraintes mécaniques n'ayant aucun lien avec les contraintes liées aux singularités, il est possible que

dans certaines configurations du robot et pour certaines architectures ce débatement devienne nul. Ce problème est complexe et il paraît difficile de déterminer des conditions pour lesquelles ce cas indésirable apparaît forcément ou des cas pour lesquels ce cas peut toujours être évité.

De par sa simplicité et la flexibilité qu'elle autorise, cette dernière méthode est jugée la meilleure.

4.2 Application à un exemple numérique/comparaison avec un robot sphérique simple

Pour quantifier et visualiser les améliorations apportées par la redondance, deux trajectoires sont choisies. Ces deux trajectoires sont définies à l'aide des angles de T&T de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{— trajectoire 1 : } & \begin{cases} \phi = -0,9 \\ \theta = 0,5 \\ 0 \leq \sigma \leq 2\pi \end{cases} \\ \text{— trajectoire 2 : } & \begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ \theta = 1,8 \\ \sigma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les paramètres architecturaux choisis sont donnés au tableau 4.1 :

vecteur	coordonnée x	coordonnée y	coordonnée z
\mathbf{a}_{11}	6	3	-5
\mathbf{a}_{12}	3	4	-5
\mathbf{a}_2	0	0	-5
\mathbf{a}_3	0	0	-5
\mathbf{b}_{10}	0	2.3	0
\mathbf{b}_{20}	2	-1.15	0
\mathbf{b}_{30}	-2	-1.15	0

TABLE 4.1 – Paramètres architecturaux du robot étudié dans la section 4.2.

Pour chacune des trajectoires, l'évolution des coordonnées articulaires au cours du mouvement dans le cas où la redondance éloigne le robot d'un état singulier et l'évolution du déterminant de la matrice \mathbf{J} sont présentés. Le déterminant est un outil efficace pour détecter la présence des singularités car si ce dernier vaut 0 pour un état donné alors ceci signifie que le robot est dans une configuration singulière.

Les figures 4.2 et 4.3 représentent les évolutions des coordonnées articulaires pour les deux trajectoires dans le cas redondant et les figures 4.4 et 4.5 représentent les déterminants des matrices jacobiennes pour l'architecture redondante et une architecture classique de robot

sphérique. Pour construire cette architecture classique on remplace le dispositif redondant par un dispositif simple avec un vérin attaché en A_{11} sur la base et B_1 sur la plateforme.

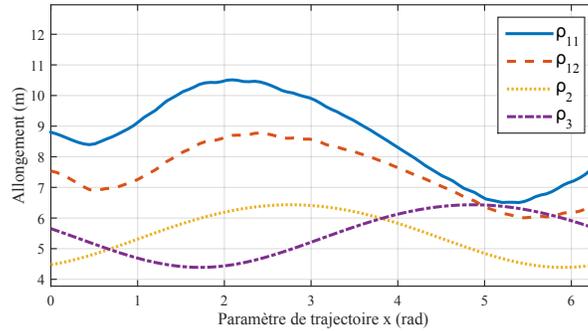


FIGURE 4.2 – Évolution des coordonnées articulaires du robot lors de la trajectoire 1 avec optimisation de la redondance.

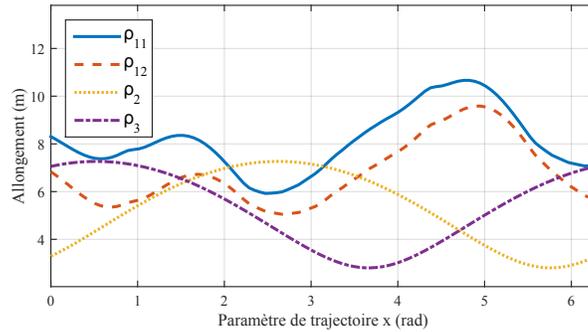


FIGURE 4.3 – Évolution des coordonnées articulaires du robot lors de la trajectoire 2 avec optimisation de la redondance.

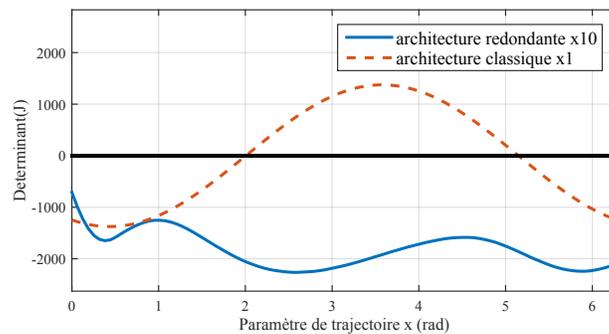


FIGURE 4.4 – Comparaison de l'évolution de la valeur du déterminant de la matrice \mathbf{J} au cours de la trajectoire 1 entre l'architecture redondante et l'architecture classique. Le déterminant dans le cas redondant est multiplié par 10 pour des raisons d'échelle.

Pour les deux exemples nous constatons principalement deux faits intéressants. Tout d'abord, malgré la redondance l'évolution des coordonnées articulaires reste plutôt stable et "lisse". Ensuite dans les deux cas l'architecture classique passe par plusieurs états singuliers au cours

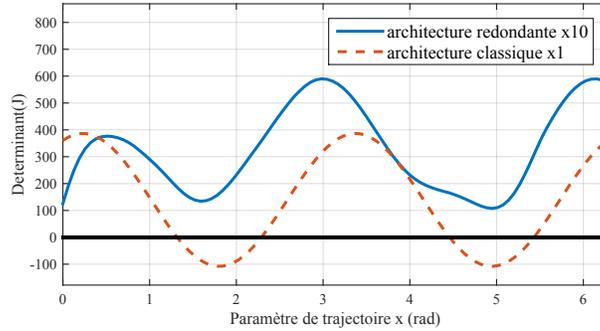


FIGURE 4.5 – Comparaison de l’évolution de la valeur du déterminant de la matrice \mathbf{J} au cours de la trajectoire 2 entre l’architecture redondante et l’architecture classique. Le déterminant dans le cas redondant est multiplié par 10 pour des raisons d’échelle.

du mouvement contrairement à l’architecture redondante. En effet le déterminant de la matrice Jacobienne pour le cas classique passe plusieurs fois par zéro contrairement au cas redondant.

4.3 Stratégie de pilotage prenant en compte les contacts mécaniques

Nous avons auparavant quantifié l’augmentation de l’espace de travail effectif du robot redondant par rapport au robot simple du point de vue des singularités. Cependant l’espace de travail pour un manipulateur parallèle est à la fois limité par les lieux des singularités et les lieux des interférences mécaniques. En effet, là où les singularités limitent l’espace de travail par une perte du contrôle total du robot, les interférences ou contacts mécaniques limitent l’espace de travail par l’impossibilité des matériaux à se superposer. La gestion des interférences mécaniques est complexe car elles dépendent de la forme des pièces utilisées, dont le choix est très étendu, ainsi que de l’architecture des liaisons employées. Notamment les liaisons sphériques, au nombre de 6 dans l’architecture étudiée ici, ne peuvent malheureusement pas être conçues avec des boules insérées dans des cavités sphériques comme jusqu’alors représentées sur les figures. En effet de telles liaisons, outre leur difficulté de fabrication, ont un débattement très faible qui limiterait notre espace de travail et rendrait le gain d’espace de travail dû à la gestion des singularités insignifiant, voire nul.

Une discussion plus approfondie sur les technologies de liaisons est faite dans le chapitre traitant de la conception du prototype. Supposons que nos liaisons ne soient jamais une limite dans notre mouvement, les éléments mobiles de notre manipulateur peuvent entrer en contact avec des éléments fixes ou même d’autres éléments mobiles du mécanisme. Ceci constitue une autre limite par interférence mécanique qui constitue un problème essentiel dans le cas des manipulateurs parallèles où plusieurs chaînes cinématiques fonctionnent en parallèle lors du mouvement et doivent se gêner le moins possible.

Même si de telles interférences dépendent en grande partie des formes des éléments utilisés fai-

sons tout d'abord l'hypothèse que tous les points d'un même corps sont reliés par des segments dont l'évolution de la distance entre eux nous permettra de détecter si il y a contact mécanique. Même si le résultat obtenu n'est pas strict au sens où si on ne se sert pas de segments droits mais de courbes pour les pièces il sera différent, il nous donnera tout de même un aperçu général et une base sur laquelle travailler pour améliorer cet espace de travail. L'avantage d'un tel modèle aussi est que nous pouvons le traiter de façon mathématique.

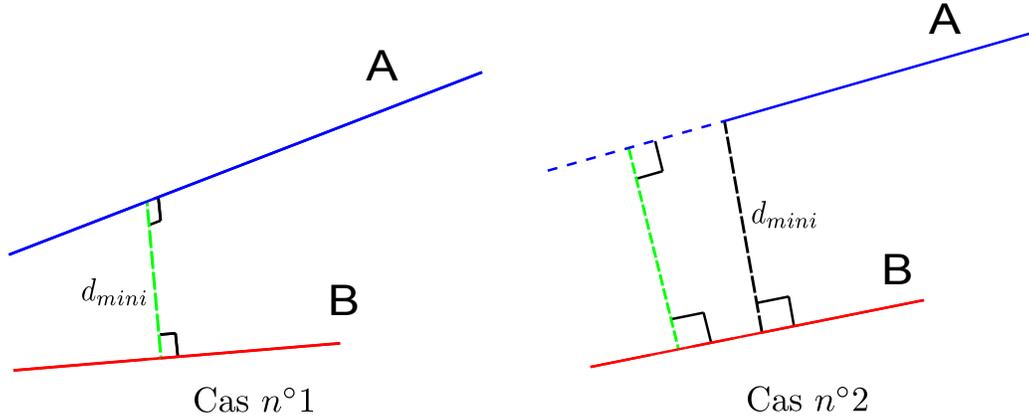


FIGURE 4.6 – Illustration de la méthode de calcul des distances entre éléments barres. Le cas $n^{\circ}1$ illustre la distance entre deux droites et le cas $n^{\circ}2$ illustre la prise en compte de segments.

La méthode de calcul choisie est la suivante :

Soient un segment A et un segment B repérés par les vecteurs de leurs points extrêmes appelés respectivement \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 pour le segment A et \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 pour le segment B . Pour repérer un point P sur ces segments utilisons la paramétrisation suivante :

$$\mathbf{p}_a(s) = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)s + \mathbf{a}_1 \quad s \in [0 \dots 1] \quad (4.25)$$

$$\mathbf{p}_b(t) = (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)t + \mathbf{b}_1 \quad t \in [0 \dots 1]. \quad (4.26)$$

Soit \mathbf{d} le vecteur reliant ces deux points et dont la norme représente une distance entre les segments A et B .

$$\mathbf{d}(s, t) = \mathbf{p}_b(t) - \mathbf{p}_a(s) = (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)t + \mathbf{b}_1 - ((\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)s + \mathbf{a}_1) \quad (4.27)$$

$$\|\mathbf{d}\|(s, t) = \sqrt{\mathbf{d}(s, t)^T \mathbf{d}(s, t)} \quad (4.28)$$

$$= \sqrt{\frac{(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) s^2 - 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) s + (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) t^2 + 2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) t - 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) st + (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)}{}} \quad (4.29)$$

Cette expression est une fonction de deux variables dont les extréma locaux se trouvent quand les dérivées partielles en s et en t s'annulent. Sans développement mathématique poussé on comprend bien que la distance ne possède pas de limite maximum finie mais seulement un minimum qui correspond à la distance minimale entre les deux droites et correspond à la distance recherchée. Notons que la recherche du minimum de cette fonction définie toujours positive est équivalente à la recherche du minimum du carré de cette fonction, ce qui simplifie partiellement les calculs. La détermination de ce minimum correspond au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \|\mathbf{d}\|^2(s,t)}{\partial s} = 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)s - 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)t - 2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^t(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) = 0 \\ \frac{\partial \|\mathbf{d}\|^2(s,t)}{\partial t} = -2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)s + 2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)t + 2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Ce système peut se résumer à l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{v} \quad (4.31)$$

où :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) & -(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \\ -(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) & (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^t(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \\ -(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

La résolution de ce système linéaire donne les valeurs des paramètres s et t permettant de calculer $\|\mathbf{d}\|_{mini}$.

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} \quad (4.34)$$

\mathbf{M} étant de dimension 2×2 l'expression de son inverse en utilisant la formule liant l'inverse d'une matrice à son déterminant et sa matrice adjointe donne :

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$det(M) = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) - (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \quad (4.36)$$

Cependant les objets étudiés étant de longueur finie, si les s et t calculés sont en dehors de plages $[0 \dots 1]$ alors il suffit de les ramener à la borne la plus proche pour calculer la vraie valeur $\|\mathbf{d}\|_{mini}$. Ce cas est illustré à la figure 4.6 où dans le cas $n^{\circ}2$ la distance calculée est représentée en vert mais la "vraie" distance minimale est représentée en noir. Il existe

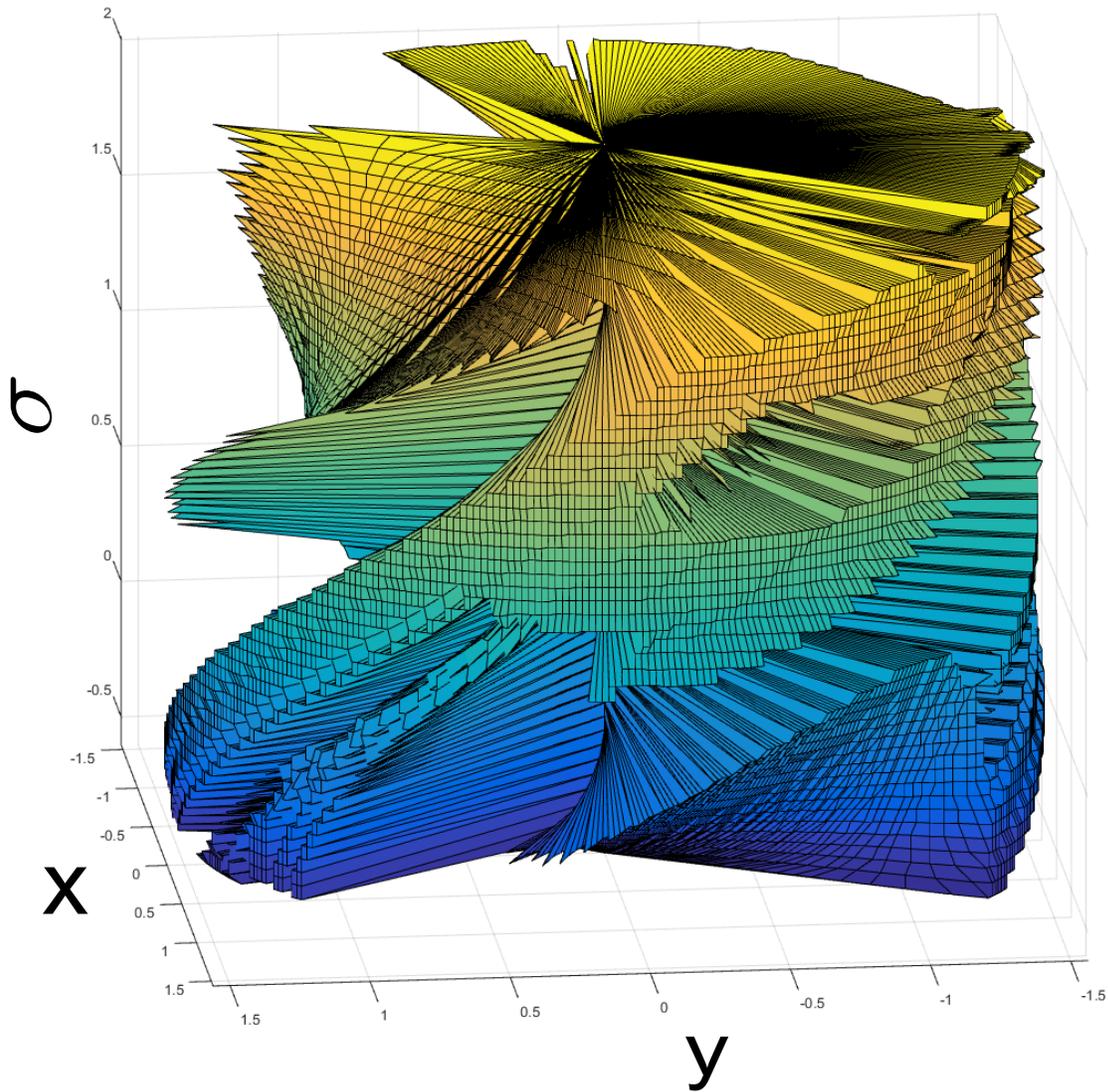


FIGURE 4.7 – Représentation du volume de travail du robot sphérique limité par les interférences mécaniques et les singularités.

d'autres méthodes de calcul de la distance minimale mais celle-ci présente l'avantage d'être particulièrement rapide à calculer avec des outils informatiques tout en étant totalement fiable.

On se sert de cette expression pour déterminer notre espace de travail limité par les interférences mécaniques par une méthode analogue à celle qui détermine l'espace de travail limité par les singularités vu précédemment. Il faut cependant faire quelques ajustements notamment au niveau du critère de détection de la limite de l'espace de travail. Un exemple de résultat est visible à la figure 4.7. En effet cet espace de travail est généré en prenant les paramètres architecturaux du tableau 4.2, en utilisant les changements d'architecture décrits au chapitre

5 avec $C_0 = 0.15$, en considérant 25 couples de segments qui peuvent potentiellement entrer en contact et avec une résolution découpant l'espace $[-2\pi \dots 2\pi]$ en 250 points pour σ , l'espace $[0 \dots 2\pi]$ en 400 points pour ϕ et l'espace $[0 \dots \frac{\pi}{2}]$ en 70 points pour θ . Les limites de l'espace en σ et ϕ sont choisies de la sorte car elles représentent le minimum grâce auquel on balaye tout l'espace des possibilités sans refaire deux fois le même calcul. Les limites en θ sont choisies en tenant compte du fait que $\frac{\pi}{2}$ est notre limite dans l'espace de travail dû aux singularités étudiées précédemment.

vecteur	coordonnée x	coordonnée y	coordonnée z
\mathbf{a}_{11}	15	30	-30
\mathbf{a}_{12}	-15	30	-30
\mathbf{a}_2	0	0	-20
\mathbf{a}_3	0	0	-30
\mathbf{b}_{10}	0	14.32	0
\mathbf{b}_{20}	12.4	-7.16	0
\mathbf{b}_{30}	-12.4	-7.16	0

TABLE 4.2 – Paramètres architecturaux du robot étudié dans la section 4.3

Conclusion

Plusieurs méthodes de calcul de la position optimale de la redondance cinématique ont été présentées dans ce chapitre. Il a été démontré qu'il est possible de trouver une solution analytique concernant les positions à proscrire, ce qui nous donne une plage de fonctionnement mobile pour les positions possibles de la redondance cinématique. Puis cette stratégie a été appliquée à des trajectoires concrètes qui valident l'efficacité de cette méthode. Enfin le problème des interférences mécaniques, second phénomène limitant l'espace de travail du robot, a été étudié.

Chapitre 5

ÉLABORATION D'UN PROTOTYPE DE TEST

Les chapitres précédents démontrent la capacité du robot à changer sa configuration pour éviter les états singuliers gênants. La dernière partie de l'étude vise à construire un prototype qui satisfait les éléments discutés précédemment, de cette façon il est possible de vérifier la faisabilité d'un tel robot. La conception d'un prototype est aussi l'occasion de discuter de problématiques concrètes telles que la gestion des interférences mécaniques. En premier lieu une présentation générale des éléments de conception et architecturaux choisis sera faite, puis une explication sur l'équivalence entre le modèle modifié et le modèle de l'étude sera discutée et enfin certains critères de performance du prototype seront discutés.

5.1 Présentation des éléments mécaniques

Tout d'abord la première contrainte est d'utiliser les moyens mis à disposition au laboratoire de robotique de l'Université Laval. Une imprimante 3D dédiée au prototypage rapide est disponible ainsi qu'un atelier d'usinage. Pour des raisons économiques et de liberté de formes, la majorité des pièces seront fabriquées en plastique par l'imprimante 3D. Certaines pièces jugées importantes pour la solidité et l'équilibre du mécanisme ou importantes pour la transmission des efforts seront tout de même en métal.

Pour ces mêmes raisons pratiques, très tôt dans la conception il a été décidé d'utiliser des moteurs plutôt que des vérins pour piloter les longueurs qui correspondent aux coordonnées articulaires. La nouvelle architecture qui résulte de ces choix est illustrée à la figure 5.1. Cette architecture implique quelques choix de conception supplémentaires. En effet nous remplaçons une membrure droite de longueur variable par deux membrures droites de longueur fixe mais dont l'angle entre elles est variable. La position de ces membrures doit donc être déterminée,

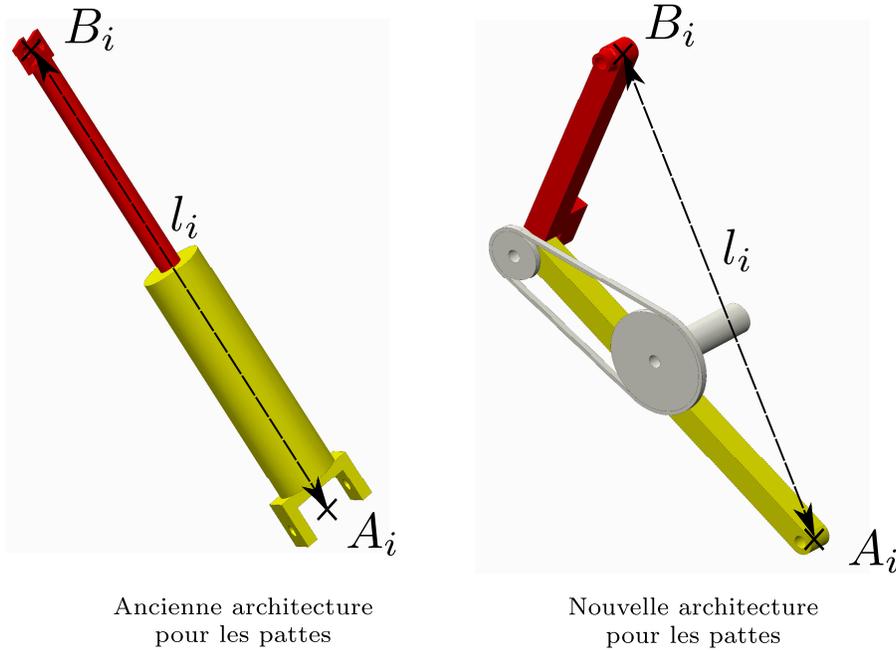


FIGURE 5.1 – Illustration du changement d’architecture pour les pattes du robot.

au travers du point de jonction entre elles qui évolue dans un plan défini. Les longueurs de ces membrures doivent aussi être judicieusement choisies.

Le nouveau graphe des liaisons pour cette architecture est illustré à la figure 5.2 et le schéma cinématique est illustré à la figure 5.3, les liaisons actionnées sont colorées pour les distinguer des liaisons passives. Notez l’alignement des points O , A_2 et A_3 dû aux préconisations du chapitre précédent. Si on refait l’analyse du degré de mobilité de ce mécanisme de la même façon qu’en 1.2 on obtient le résultat suivant :

$$l = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (5.1)$$

$$= 6(11 - 14 - 1) + (3 \times 6 + 2 \times 2 + 1 \times 6) = -24 + 28 = 4 \quad (5.2)$$

Le mécanisme possède donc 4 degrés de liberté de façon analogue au précédent. Par la suite il est démontré que ses mouvements sont identiques à ceux du mécanisme précédent.

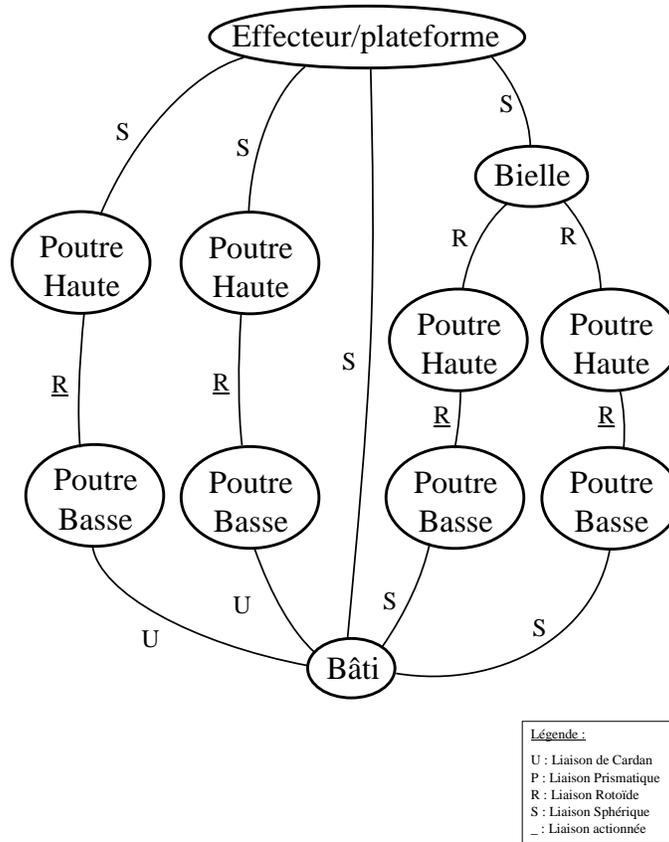


FIGURE 5.2 – Graphe des liaisons du robot sphérique redondant modifié.

5.2 Équivalence cinématique de la nouvelle architecture avec l'architecture initiale

Dans cette section nous démontrons l'équivalence cinématique de la nouvelle architecture avec celle étudiée dans les chapitres précédents ainsi que les méthodes entreprises pour concevoir le nouveau modèle. De cette façon toutes les analyses précédentes sont valides avec ce prototype. En utilisant la loi des cosinus nous obtenons l'expression qui relie la distance précédemment considérée comme coordonnée articulaire à l'angle entre les deux membrures qui forme l'actuelle coordonnée articulaire. On obtient :

$$\forall i \in \{11, 12, 2, 3\} \quad l_i^2 = g_i^2 + h_i^2 - 2g_i h_i \cos(\gamma_i) \quad (5.3)$$

où g_i est la longueur de la membrure basse (la plus proche de la base) de la i -ème patte, h_i est la longueur de la membrure haute et γ_i est la nouvelle coordonnée articulaire. Ces paramètres sont illustrés sur la figure 5.4. Si on dérive cette expression on obtient la relation entre les

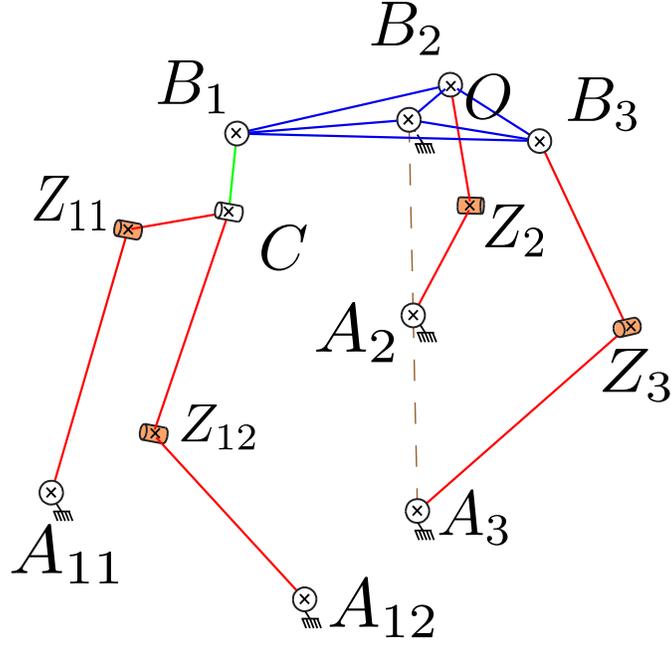


FIGURE 5.3 – Schéma cinématique du prototype.

vitesses articulaires :

$$\forall i \in \{11, 12, 2, 3\} \quad l_i \dot{l}_i = g_i h_i \sin(\gamma_i) \dot{\gamma}_i \quad (5.4)$$

soit sous forme vectorielle :

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (5.5)$$

où $\dot{\mathbf{l}}$ est l'ancien vecteur des vitesses articulaires, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ est le nouveau vecteur des vitesses articulaires et :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2g_{11}h_{11} \sin(\gamma_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2g_{12}h_{12} \sin(\gamma_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2g_2h_2 \sin(\gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2g_3h_3 \sin(\gamma_3) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Cette architecture introduit un nouveau point pour chaque membrure, appelé Z suivi de l'indice de la patte en question, qui n'est pas placé de façon anodine comme expliqué dans la section précédente. Pour l'étude des interférences mécaniques notamment, et pour la cinématique du robot en général, la position de ce point en fonction des autres est calculée de la façon suivante. Les notations utilisées sont celles de la figure 5.4, à la différence que dans le cas de la patte double il faut remplacer le point B_i par le point C :

$$\eta_i = \arccos\left(\frac{l_i^2 + g_i^2 - h_i^2}{2l_i g_i}\right). \quad (5.7)$$

La mobilité des deux membrures d'une patte est contrainte dans un plan, néanmoins pour une même position du point B il existe deux configurations possibles de la patte. Le signe de l'angle η_i permet de choisir entre ces deux configurations possibles. Le choix du plan se fait au travers du choix du vecteur \mathbf{n}_i qui est le vecteur normal au plan choisi. Il est choisi $\mathbf{n}_i = \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$ pour simplifier la gestion des interférences mécaniques.

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{v}_i \quad (5.8)$$

Où :

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T \\ (\mathbf{b}_i \times \mathbf{a}_i)^T \\ [\mathbf{n}_i \times (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)]^T \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i - g_i^2 + h_i^2 \\ 0 \\ [\mathbf{n}_i \times (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)]^T \mathbf{a}_i + g_i l_i \sin(\pm \eta_i) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

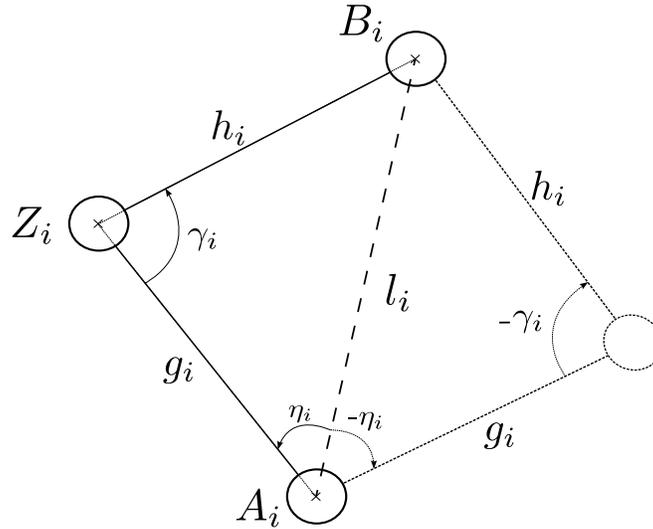


FIGURE 5.4 – Illustration des positions possibles pour la nouvelle architecture des longueurs actionnées.

Enfin il faut choisir des longueurs pour les membrures hautes et basses de chaque patte. La stratégie choisie pour déterminer ces longueurs est de calculer les longueurs minimales pour atteindre les longueurs extrémales des coordonnées articulaires, puis d'augmenter ces valeurs pour que la patte ne change jamais de configuration pour faciliter la gestion des interférences mécaniques et surtout pour que les configurations singulières de repli complet et d'étirement complet ne soient jamais atteintes.

Tout d'abord le calcul des longueurs minimales se présente comme suit. On suppose que les

longueurs minimales et maximales ne sont jamais "négatives", c'est-à-dire qu'on s'arrange avec les points d'attache sur la base pour que les longueurs ne passent jamais par zéro car cet état impliquerait que le robot serait dans un état singulier obligatoirement :

$$|g_i - h_i| \leq C_{i1} \quad (5.11)$$

$$|g_i + h_i| \geq C_{i1} \quad (5.12)$$

où pour les pattes simples :

$$C_{i1} = (1 - C_0)(\|\mathbf{a}_i\| - \|\mathbf{b}_{i0}\|) \quad (5.13)$$

$$C_{i1} = (1 + C_0)(\|\mathbf{a}_i\| + \|\mathbf{b}_{i0}\|) \quad (5.14)$$

et pour la patte double :

$$C_{i1} = (1 - C_0)(\|\mathbf{a}_i\| - \|\mathbf{b}_{i0} - l\|) \quad (5.15)$$

$$C_{i1} = (1 + C_0)(\|\mathbf{a}_i\| + \|\mathbf{b}_{i0} + l\|) \quad (5.16)$$

où C_0 est un coefficient d'ajustement. Si on s'intéresse au cas limite du système d'équation plus haut les inégalités deviennent des égalités donc :

$$\begin{cases} |g_i - h_i| = C_{i1} \\ |g_i + h_i| = C_{i2} \end{cases} . \quad (5.17)$$

On élève ce système au carré :

$$\begin{cases} (g_i - h_i)^2 = C_{i1}^2 \\ (g_i + h_i)^2 = C_{i2}^2 \end{cases} \quad (5.18)$$

et résoudre ce système donne :

$$\begin{cases} g_i = \sqrt{\frac{C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + 2C_{i1}C_{i2}}{4}} \\ h_i = \sqrt{\frac{C_{i1}^2 + C_{i2}^2 - 2C_{i1}C_{i2}}{4}} \end{cases} . \quad (5.19)$$

Nous pouvons choisir laquelle des deux membrures sera la plus grande, de par des suppositions sur la gestion des contacts mécaniques avec la base notamment, la membrure basse est choisie comme la plus grande. Cependant cette méthode implique que les positions extrémales que l'on souhaite atteindre placent la patte dans une position singulière. Pour corriger cela, plusieurs méthodes sont possibles mais celle qui est choisie ici est de simplement viser des positions extrémales théoriques un peu plus éloignées que les positions que l'on souhaite réellement atteindre. Il suffit pour cela d'utiliser le coefficient d'ajustement C_0 , par exemple on peut prendre $C_0 = 0,05$.

Ensuite il faut choisir l'architecture des liaisons qui vont être utilisées. Tout d'abord si on se réfère au schéma de la figure 5.2 alors l'architecture comprend 6 liaisons rotoïdes, 2 liaisons de Cardan et 6 liaisons sphériques. Les moyens présents permettent de facilement concevoir des liaisons rotoïdes à l'aide de goupilles, trous serrés, trous glissants et anneaux de retenue. Les liaisons de Cardan peuvent être construites par un mécanisme comprenant deux liaisons rotoïdes montées en série dont les axes de rotation s'intersectent. Enfin le troisième type de liaison utilisé, la liaison sphérique, pose quand à elle plus de problème pour la conception. En effet la méthode précédente de construction de liaison rotoïdes en série marche très bien pour une liaison de Cardan mais possède des limites pour la construction de liaisons sphériques. En effet une liaison sphérique construite par trois liaisons rotoïdes en série dont les axes sont concourants possède obligatoirement au moins deux positions de singularités de type I, dans ces configurations la liaison est bloquée suivant une ou plusieurs directions se qui se traduit par l'impossibilité de poursuivre une trajectoire dans certains cas et une hausse des contraintes dans des pièces très certainement pas dimensionnées pour cela qui entraîne un endommagement voire une rupture du modèle. Ces positions de singularité pour les liaisons sont donc des limites supplémentaires à l'espace de travail du robot. Or les lieux de singularités pour ce type de liaison sphérique limitent au mieux l'espace de travail représenté par l'ensemble des directions admissibles à une demi-sphère dans l'espace 3D, ce qui limite beaucoup leur utilisation.

La première façon de gérer ce problème est de se demander si l'espace de travail général est inclus dans l'espace de travail de chacune des liaisons et si ce n'est pas le cas si il est possible de concevoir la liaison de telle sorte que cette inclusion soit vérifiée? En se servant d'un modèle CAO pour le robot sphérique utilisant cette architecture pour ses liaisons sphériques on se rend compte que ce n'est pas possible pour 5 des 6 liaisons sphériques. Cependant la liaison sphérique liant la plateforme au bâti peut être conçue de cette façon car en effet l'architecture choisie voit son espace de travail limité à une demi-sphère à cause des singularités. L'espace de travail de cette liaison sphérique étant directement lié à l'espace de travail de la plateforme il suffit de faire correspondre les limites dues aux singularités de la liaison avec les limites dues aux singularités du robot. Il reste encore 5 liaisons à concevoir.

La deuxième méthode consiste en l'analyse des chaînes cinématiques utilisées pour repérer si le modèle actuel peut être légèrement modifié. En effet le choix des liaisons présentées à la figure 5.2 est fait dans le but d'avoir l'architecture comportant le minimum de libertés permettant les mouvements voulus à l'effecteur. Cet objectif est atteint si on s'en tient à la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach mais cette formule omet la présence de conditions géométriques qui rendrait certains mouvements inactifs et donc inutiles. Par exemple nous pouvons étudier la chaîne cinématique fermée correspondant à une patte simple du robot. Cette dernière est représentée à la figure 5.5. On considère la liaison de Cardan comme une liaison sphérique pour cet exercice pour ne pas limiter les résultats obtenus par un choix prématuré des axes

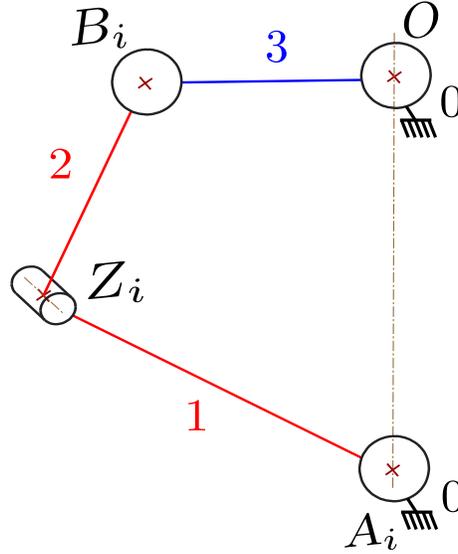


FIGURE 5.5 – Schéma cinématique initial d'une patte simple du robot. La liaison de Cardan du bas est remplacée par une liaison sphérique au début de l'analyse, dans le but de ne pas choisir prématurément les deux axes de rotations de cette liaison pour ne pas induire la perte involontaire d'un résultat utile.

de cette liaison. Tout d'abord écrivons les torseurs cinématiques de chaque liaison ramenés au point O et exprimés dans le repère de base \mathcal{R} . La notation utilisée est celle illustrée à la figure 5.5, 3 est la plateforme, 0 est la bâti, 1 et 2 sont les deux membrures qui composent la patte.

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{3/0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} \quad (5.20)$$

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{1/0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{A_i/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{1/0} \\ \mathbf{a}_i \times \boldsymbol{\omega}_{1/0} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} \quad (5.21)$$

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{2/1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{Z_i/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{2/1} \\ \mathbf{z}_i \times \boldsymbol{\omega}_{2/1} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} \quad (5.22)$$

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{3/2} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{B_i/\mathcal{R}} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_{3/2} \\ \mathbf{b}_i \times \boldsymbol{\omega}_{3/2} \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}} \quad (5.23)$$

On écrit ensuite la relation due au bouclage cinématique :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} = \{\mathcal{V}(0/3)\} + \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\} \quad (5.24)$$

ce qui nous donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{3/0} = \boldsymbol{\omega}_{3/2} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} + \boldsymbol{\omega}_{1/0} & (5.25) \\ \mathbf{0} = \mathbf{b}_i \times \boldsymbol{\omega}_{3/2} + \mathbf{z}_i \times \boldsymbol{\omega}_{2/1} + \mathbf{a}_i \times \boldsymbol{\omega}_{1/0} & (5.26) \end{cases} .$$

L'équation 5.25 traduit simplement une relation de composition des vitesses évidente. L'équation 5.26 quant à elle traduit la contrainte géométrique due à la boucle cinématique. L'objectif de cette boucle est de bloquer les mouvements de translation de la plateforme et de laisser libre ses trois rotations indépendantes tout en ayant l'une d'entre elle directement reliée à la rotation entre les membrures 1 et 2 qui est la rotation contrôlée. Pour assurer la première condition il faut un repère, c'est-à-dire une famille de vecteurs qui engendre tout l'espace. On prends l'ensemble $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)$ qui décrit bien tout l'espace tant que \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i ne sont pas colinéaires, or cette configuration du robot correspond aux limites de l'espace de travail dues aux singularités donc cet ensemble est valable. Ce repère n'est pas pris au hasard, en effet les vecteurs qui le composent sont les vecteurs des points où se situent les liaisons dont on souhaite modifier l'architecture. Pour que la plateforme (pièce 3 sur la figure 5.5) soit libre suivant ses trois rotations il faut que les projections du vecteur des rotations de la plateforme $\boldsymbol{\omega}_{3/0}$ dans ce repère ne soient jamais nulles. Ce qui signifie que :

$$\mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\omega}_{3/0} = \mathbf{a}_i^T (\boldsymbol{\omega}_{3/2} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} + \boldsymbol{\omega}_{1/0}) \neq \mathbf{0} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\omega}_{3/0} = \mathbf{b}_i^T (\boldsymbol{\omega}_{3/2} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} + \boldsymbol{\omega}_{1/0}) \neq \mathbf{0} \quad (5.28)$$

$$(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{3/0} = (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)^T (\boldsymbol{\omega}_{3/2} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} + \boldsymbol{\omega}_{1/0}) \neq \mathbf{0}. \quad (5.29)$$

Pour satisfaire à ces conditions il suffit qu'au moins une des liaisons de la chaîne cinématique possède une composante de mouvement non nulle suivant ces axes, ce qui peut se faire en construisant les liaisons considérées avec une liaison rotoïde d'axe colinéaire au vecteur de la condition. Par exemple étant donné que $\boldsymbol{\omega}_{3/2}$ est formé par une liaison située en B_i appartenant à une pièce qui ne peut que tourner alors la condition de l'équation 5.28 peut être vérifiée en construisant la liaison liant 3 à 2 avec une liaison rotoïde d'axe \mathbf{b}_i . De la même façon la condition 5.27 est vérifiée si la liaison reliant 1 à 0 est construite avec une liaison rotoïde d'axe \mathbf{a}_i . Enfin la condition 5.29 peut se vérifier en construisant la liaison reliant 2 à 1 avec une rotoïde d'axe $\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$. Vu de cette façon la construction paraît simple mais deux choses sont à remarquer tout de même. La première c'est qu'on ne peut pas permuter librement le choix des axes supportés par les liaisons car le positionnement de la liaison dans la chaîne est primordial pour que cette méthode fonctionne étant donné que les axes sont mobiles lors d'un mouvement de la plateforme. La colinéarité de l'axe d'une rotoïde en B_i avec le vecteur de ce point n'est possible lors du mouvement que parce que l'axe de la rotoïde intersecte le point de rotation de la plateforme qui est l'origine du vecteur et que cette liaison appartient à une pièce qui effectue la rotation. la condition 5.29 ne reste valide au cours du mouvement que si la patte est construite de telle sorte que le point Z_i est dans le plan formé par O , A_i et B_i .

De cette façon, ce plan tournant autour de l'axe liant O à A_i , un axe orthogonal à ce plan et donc aussi colinéaire à $\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$ conserve cette propriété au cours du mouvement.

La seconde remarque est que il faut aussi tenir compte de l'équation 5.26 pour savoir quels sont les mouvements couplés dus à la boucle cinématique. L'analyse de l'équation 5.25 nous dit que trois liaisons rotoïdes suffisent pour atteindre le mouvement désiré mais le bouclage cinématique fait que très certainement il faut autoriser plus de libertés de mouvement que cela. L'équation 5.26 est projetée suivant les axes du repère $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)$. Après simplification à l'aide de la propriété de permutation circulaire du produit triple on obtient :

$$0 = (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{3/2} + (\mathbf{a}_i \times \mathbf{z}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{2/1} \quad (5.30)$$

$$0 = (\mathbf{b}_i \times \mathbf{a}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{1/0} + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{z}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{2/1} \quad (5.31)$$

$$0 = [(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \times \mathbf{b}_i]^T \boldsymbol{\omega}_{3/2} + [(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \times \mathbf{z}_i]^T \boldsymbol{\omega}_{2/1} + [(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \times \mathbf{a}_i]^T \boldsymbol{\omega}_{1/0} \quad (5.32)$$

Les équations 5.30 et 5.31 donnent des conditions de fonctionnement pour la liaison en Z_i . En effet $\boldsymbol{\omega}_{2/1}$ ne possède qu'un seul axe de rotation indépendant qui ne peut se trouver dans le plan normal au vecteur $\mathbf{a}_i \times \mathbf{z}_i$ ou le plan normal au vecteur $\mathbf{b}_i \times \mathbf{z}_i$ pour n'importe quelle configuration du robot en raison de son architecture. Ce qui signifie que $(\mathbf{a}_i \times \mathbf{z}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{2/1}$ et $(\mathbf{b}_i \times \mathbf{z}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{2/1}$ doivent être non nuls pour ne pas bloquer la liaison rotoïde en Z_i qui est la liaison actionnée. Ce qui implique que $(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{3/2}$ et $(\mathbf{b}_i \times \mathbf{a}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{1/0}$ doivent être non nuls et donc que $\boldsymbol{\omega}_{3/2}$ et $\boldsymbol{\omega}_{1/0}$ doivent avoir pour toutes les configurations du robot des composantes suivant $(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)$. Pour l'instant la liaison en A_i possède une mobilité autour de \mathbf{a}_i et la liaison en B_i possède une mobilité autour de \mathbf{b}_i . Il est donc facile pour ces deux liaisons de leur accorder une mobilité supplémentaire autour de $(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)$ en ajoutant en série une liaison rotoïde à ces liaisons dont l'axe est orienté perpendiculairement au précédent. Cet axe est donc forcément orthogonal à respectivement \mathbf{a}_i pour la liaison en A_i et \mathbf{b}_i pour la liaison en B_i et l'orthogonalité autour de l'axe complémentaire est assurée par le fait que la liaison en Z_i , située entre la liaison en A_i et celle en B_i sur la chaîne cinématique, est une liaison rotoïde d'axe colinéaire à $\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$. Donc les équations de contraintes ne nécessitent pour l'instant que deux degrés de liberté bien choisis pour la construction des liaisons en A_i et B_i . De plus si on combine les équations 5.30 et 5.31 on obtient :

$$[(\mathbf{z}_i - \mathbf{b}_i) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)]^T \boldsymbol{\omega}_{2/1} = (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i)^T \boldsymbol{\omega}_{3/0}. \quad (5.33)$$

Ce qui signifie que l'axe actionné et plus particulièrement sa composante autour de $(\mathbf{z}_i - \mathbf{b}_i) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)$ pilote la rotation de la plateforme autour de $\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$. La rotation contrôlée par cette patte est déjà caractérisée totalement lors du calcul des matrices jacobiennes mais ce résultat donne l'information sur la composante de l'axe actionné qui est importante pour le pilotage et donc aide au choix de cette liaison.

Il reste cependant une dernière équation de contrainte à vérifier. Pour les raisons précédentes la liaison en Z_i est situées dans le plan OA_iB_i et d'axe orthogonal à ce plan quelle que soit la

configuration du robot. Donc :

$$[(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \times \mathbf{z}_i]^T \boldsymbol{\omega}_{2/1} = 0. \quad (5.34)$$

L'équation 5.32 devient donc :

$$0 = [(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \times \mathbf{b}_i]^T \boldsymbol{\omega}_{3/2} + [(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \times \mathbf{a}_i]^T \boldsymbol{\omega}_{1/0}. \quad (5.35)$$

Cette équation donne une contrainte qui lie une composante de la liaison en B_i et celle en A_i sans influencer la position de la plateforme. Donc ces composantes sont inutiles dans ce cas-ci d'où la raison pour laquelle des liaisons de type cardan sont suffisantes. Suivant les conditions énoncées précédemment l'équation 5.35 traduit la contrainte de mouvement d'une mobilité interne inactive et donc inutile.

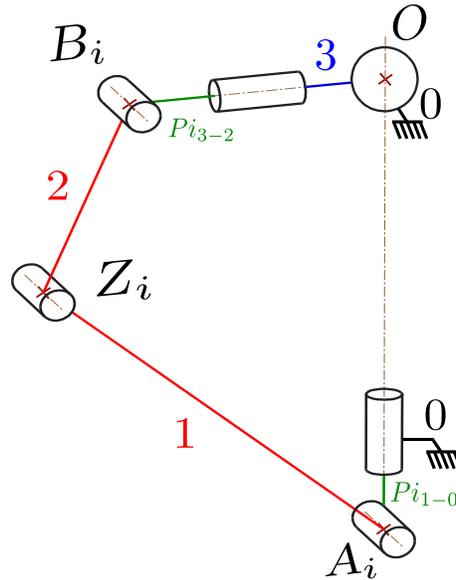


FIGURE 5.6 – Schéma cinématique d'une patte simple du robot après simplification.

Sur la figure 5.6 le schéma cinématique réel d'une patte simple est représenté. Toutes les constatations précédentes sur les équations qui contraignent la cinématique des pattes du robot démontrent le bon fonctionnement d'un tel mécanisme.

5.3 Éléments de conception

Dans cette section les principaux éléments de conception du prototype sont présentés. Tout d'abord les éléments de liaison mécanique sont discutés, puis la chaîne de motorisation choisie est détaillée, enfin le modèle complet du mécanisme est présenté.

5.3.1 Conception des liaisons du modèle

La figure 5.3 détaille l'ensemble des liaisons mécaniques employées pour construire l'assemblage. Les liaisons rotoïdes du mécanisme sont relativement simples à concevoir du fait des méthodes de fabrication choisies mais les liaisons sphériques sont quant à elles beaucoup plus problématiques. Après quelques simulations du mouvement du robot on se rend rapidement compte que ces dernières nécessitent des amplitudes de débattement démesurément grandes et compliquées à prévoir au vu de ce qu'il se fait en général pour concevoir de telles liaisons. Néanmoins, nous pouvons remarquer grâce à l'analyse faite au chapitre 5.2 que sur les 8 liaisons sphériques de la figure 5.3 seules deux sont absolument nécessaires. Toutes les autres liaisons étant des rotoïdes ou des liaisons de Cardan faciles à construire dans ce contexte avec un montage de goupilles permettant des débattements considérables, seules ces deux liaisons posent encore problème.

Une méthode adéquate de construction de liaisons sphériques dans ce contexte est un montage de trois liaisons rotoïdes en série dont les axes sont concourants en un point qui est cinématiquement le centre de rotation de la liaison sphérique équivalente. Un exemple d'architecture d'une telle liaison est présenté à la figure 5.7.

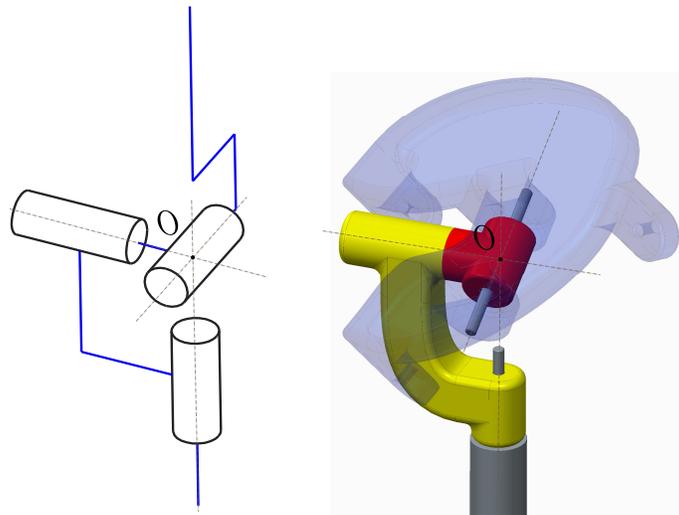


FIGURE 5.7 – Schéma cinématique et exemple de conception d'une liaison sphérique passive RRR.

On peut étudier une telle architecture de liaison en la considérant comme une architecture sérielle avec la notation de Denavit-Hartenberg. En utilisant cette relation on obtient une matrice jacobienne de la forme suivante :

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_2 & \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

où :

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.37)$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

alors :

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha_1 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_2 + \cos \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 + \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \cos \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_1 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_2 + \cos \alpha_1 \sin \theta_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 + \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \cos \alpha_2 \\ 1 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

À partir de l'expression précédente on peut calculer l'expression générale du déterminant de la matrice jacobienne d'une telle liaison, ce qui donne :

$$Det(\mathbf{J}_s) = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \theta_2. \quad (5.40)$$

On en déduit que pour α_1 et α_2 qui sont des paramètres de construction fixes il faut éviter les valeurs 0 et π et que quel que soit l'agencement choisi pour construire cette liaison il y a toujours deux solutions pour θ_2 qui placent la liaison dans un état de singularité synonyme de blocage cinématique dans une direction. Une telle configuration entraîne l'arrêt du suivi de la trajectoire et probablement la rupture de certains éléments mécaniques.

Ces solutions sont des valeurs incontournables pour θ_2 si on souhaite décrire tout l'espace des orientations mais il est possible de faire correspondre un espace de travail limité pour l'effecteur à un espace de travail pour la liaison qui ne fait pas intervenir ces valeurs pour θ_2 . En effet dans le cas de la liaison sphérique reliant la plateforme au bâti le débattement relatif voulu entre les deux corps reliés par la liaison est connu et correspond à l'espace de travail de la plateforme limité par les singularités discuté auparavant. Dans ce cas précis il est possible de faire correspondre les limites de l'espace de travail dues aux singularités de cette liaison sphérique aux limites de l'espace de travail dues aux singularités du mécanisme complet. En effet par exemple la liaison à la figure 5.7 a ses lieux de singularité situés en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ en prenant la convention des angles de T&T ce qui correspond aux lieux des singularités du mécanisme. Cette liaison est donc tout à fait adaptée au cas présent.

Cependant cette solution ne semble pas adaptée pour la liaison sphérique reliant la plateforme à la patte double. En effet le débattement utile de la liaison est trop important pour que

cette solution fonctionne à priori. Une autre solution est alors proposée pour ce cas précis. L'architecture présentée à la figure 5.8 fonctionne sur un principe analogue à la précédente

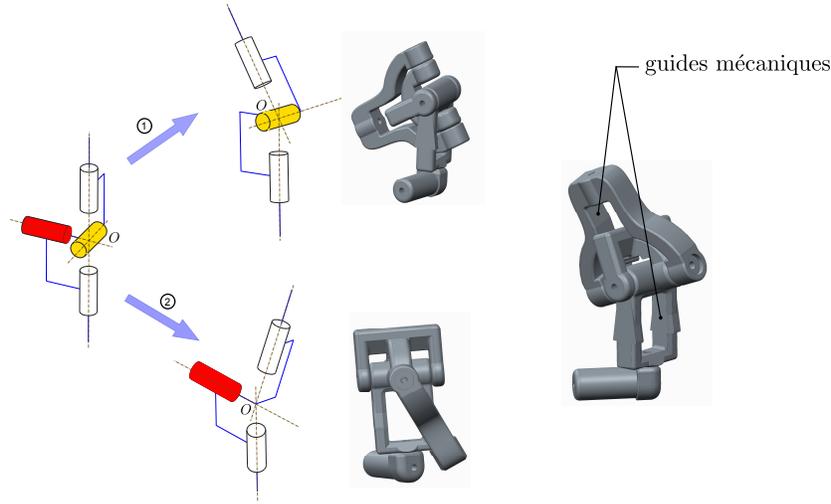


FIGURE 5.8 – Schémas de fonctionnement de la liaison sphérique passive RRRR redondante.

architecture où des liaisons rotoïdes sont montées en série en faisant en sorte que leurs axes de rotation soient concourants. À l'exception qu'on y ajoute une quatrième liaison rotoïde qui introduit un degré de liberté redondant au mécanisme. De façon analogue à la redondance introduite dans l'architecture du robot le degré de liberté ajouté permet de potentiellement éviter les configurations gênantes mais peut aussi à tout moment la placer dans une configuration singulière. Néanmoins là où la redondance dans l'architecture du robot est actionnée par l'ajout d'un moteur supplémentaire ce n'est pas le cas pour la liaison sphérique. L'idée est alors de ne se servir de la redondance cinématique que lorsqu'on se trouve dans le cas où la liaison simple serait dans un état singulier comme illustré à la figure 5.8. L'objectif est que dans la configuration normalement problématique tous les mouvements soient autorisés par la redondance et que dès qu'un changement se produit dans la configuration de la liaison alors cette dernière change de topologie pour se retrouver dans le cas d'une architecture non redondante.

Ce fonctionnement est illustré à la figure 5.8 où à partir de la configuration redondante à gauche la liaison adopte soit la nouvelle topologie du cas 1 ou celle du cas 2 suivant le mouvement qui a fait sortir la liaison de l'état redondant. Sur la droite de la figure 5.8 il y a un exemple de réalisation d'une telle liaison où pour changer la topologie de la liaison des rainures contraignent la liaison rotoïde voulue inactive. Les limites d'un tel concept sont la gestion des contacts mécaniques qui sont complexes et surtout la gestion du changement de topologie de la liaison pour des cas ambigus, car les conditions qui prédisposent au cas 1 ou au cas 2 sont très proches pour certains mouvements.

5.3.2 Système d'actionnement choisi

Dans cette partie, les éléments de motorisation choisis pour le robot sont présentés. En effet on parle ici de motorisation choisie car celle présentée ici est loin d'être ni la seule possible ni la plus performante. Cependant elle présente des avantages importants discutés ci-après.

Parce qu'il est simple de se les procurer dans une large gamme de possibilité, que leur fonctionnement est largement connu et que leur coût est dans ce cas-ci raisonnablement onéreux la solution des moteurs est choisie pour actionner le robot. L'objectif est de contrôler l'angle appelé γ_i sur les précédents schémas. Parce qu'un entraînement direct est peu avantageux du fait de la place disponible dans cette partie du dispositif, il est choisi de se servir d'un système poulies-courroie pour déporter le moteur à un emplacement jugé plus avantageux. Ce choix de conception donne aussi un peu de marge de manœuvre sur la dynamique désirée car on peut introduire un rapport de réduction avec se dispositif en choisissant des poulies de diamètres différents.

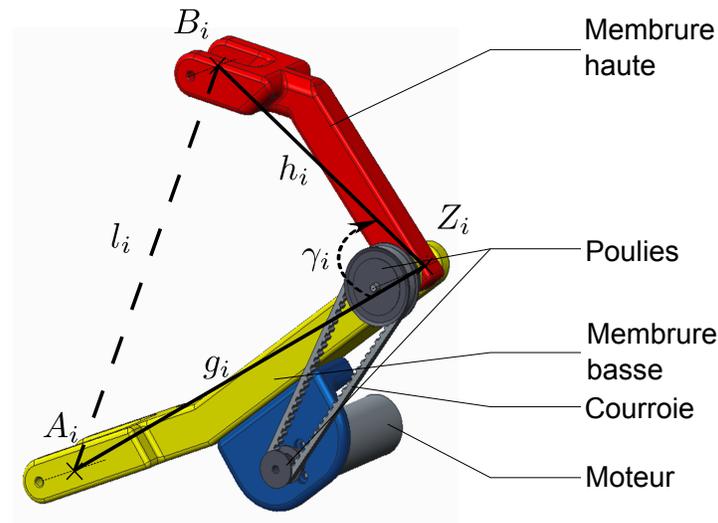


FIGURE 5.9 – Concept d'architecture réaliste pour le dispositif de motorisation du robot.

La figure 5.9 représente le système de motorisation installé sur une patte du robot. La notation du modèle mathématique y est présente pour faire le lien avec les précédentes discussions.

Étant donné que l'objectif du robot est d'atteindre une vaste gamme d'orientations différentes et non d'atteindre des vitesses élevées la plage de vitesses de fonctionnement du moteur à dimensionner est très souple. Le couple moteur est quand à lui bien plus important à estimer. Une approche classique quand on ne cherche pas des performances dynamiques élevées est de se placer dans un cas d'étude statique. Dans le cas des architectures actionnées un tel résultat peut s'obtenir rapidement grâce à l'équation de conservation de puissance et au résultat précédent sur la cinématique du robot. On obtient :

$$P_{actionneurs} = P_{effecteurs} \quad (5.41)$$

si on considère un rendement de 100% sur toutes les chaines de transmission du mécanisme. Soit :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^T \mathbf{c}_m = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{c}_{eff} \quad (5.42)$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_m$ est le vecteur des vitesses des moteurs, \mathbf{c}_m les couples aux moteurs, $\boldsymbol{\omega}$ les vitesses de la plateforme et \mathbf{c}_{eff} les efforts exercés sur la plateforme et transmis aux moteurs par les mobilités actionnés. En réutilisant les mêmes notations que celles présentées aux chapitres 1 et 5 pour les matrices \mathbf{J} , \mathbf{K} et \mathbf{P} on obtient :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{KPR} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m. \quad (5.43)$$

\mathbf{R} est la matrice de transformation des vitesses aux liaisons actionnées vers les vitesses des moteurs. Dans ce cas-ci :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r_4 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

où r_i est le rapport de réduction défini plus grand que 1 entre le moteur et la liaison pilotée. Ce dernier est le produit du rapport de réduction du réducteur monté en aval du moteur et du rapport de réduction du système poulie-courroie. On combine les équations 5.43 et 5.42 ce qui donne :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^T \mathbf{c}_m = \dot{\boldsymbol{\theta}}_m^T (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{KPR})^T \mathbf{c}_{eff}. \quad (5.45)$$

Cette équation étant valide quelles que soient les vitesses des moteurs on obtient le résultat suivant :

$$\mathbf{c}_m = (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{KPR})^T \mathbf{c}_{eff} \quad (5.46)$$

où \mathbf{c}_m est le couple moteur nécessaire pour équilibrer le système si l'effecteur (la plateforme) est soumis à un effort (moment) extérieur \mathbf{c}_{eff} . Cependant l'effort principal appliqué sur l'effecteur

est son propre poids dont les effets translationnels sont entièrement soutenus par la liaison sphérique en O et non pas par les moteurs. Le moment induit par le poids quand à lui est très faible car on s'arrange lors de la conception pour faire coïncider au plus près le centre de masse de l'effecteur avec le centre de rotation de la liaison en O . Après montage de la structure on se rend vite compte que le poids des éléments intermédiaires est loin d'être négligeable surtout dans le cas présent. En effet un ensemble moteur-réducteur-encodeur est environ quatre fois plus lourd que la plateforme (170g contre 40g environ dans ce cas-ci pour donner un ordre d'idée de l'importance de la prise en compte de ces éléments). Or la formule ci-dessus ne prend pas du tout en compte ces effets d'où une estimation des couples moteurs requis étonnamment faibles. Un autre modèle est alors utilisé. Pour faire une estimation rapide du couple moteur requis prenant en compte l'effet des éléments intermédiaires, on se propose d'étudier chaque branche cinématique actionnée séparément en faisant l'hypothèse que la grande majorité des efforts supplémentaires dus au poids des éléments intermédiaires composant une branche cinématique est soutenue par le moteur présent sur cette branche. On ne prend pas aussi en compte l'influence du frottement, non pas parce qu'il est négligeable mais parce qu'il est difficile à estimer. Les résultats obtenus seront donc volontairement raisonnablement majorés pour prendre en compte ce résultat. On utilise le théorème énergie-puissance pour résoudre ce modèle :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = P_{ext} + P_{int} \quad (5.47)$$

où E_c est la somme des énergies cinétiques des éléments mobiles du modèle, P_{ext} est la puissance induite par les efforts appliqués au système, le poids des éléments mobiles dans ce cas, et P_{int} est la puissance induite par les efforts générés par les actionneurs du système, les moteurs dans ce cas-ci. On néglige les effets inertiels, ce qui est valable si on fonctionne avec des accélérations faibles. Donc :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = 0. \quad (5.48)$$

De plus l'expression des puissances dans ce cas-ci est la suivante :

$$P_{ext} = \sum_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{v}_{Gi} \quad (5.49)$$

où \mathbf{f}_i est le vecteur des composantes du poids de l'élément i considéré et \mathbf{v}_{Gi} la vitesse de l'élément i à son centre de masse.

$$P_{int} = \mathbf{C}_m^T \boldsymbol{\omega}_m \quad (5.50)$$

où \mathbf{C}_m est le couple moteur requis et $\boldsymbol{\omega}_m$ la vitesse de rotation du moteur.

On en déduit donc l'expression du couple moteur en fonction de l'angle d'orientation de la plateforme et de la position du moteur. En effet le moteur est un élément supposé critique dans notre cas du fait de sa masse bien plus importante que celle des autres éléments.

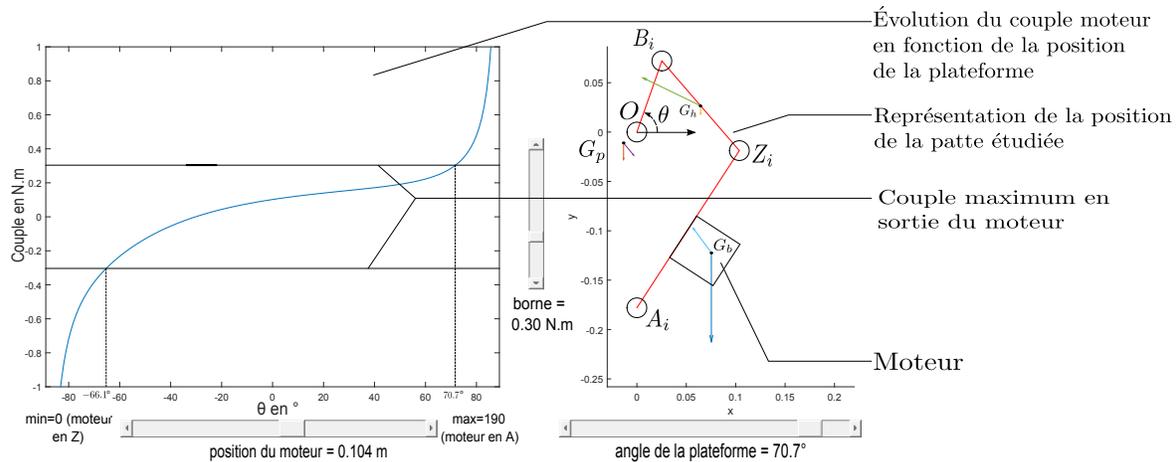


FIGURE 5.10 – Méthode d'estimation du couple moteur nécessaire au bon fonctionnement du robot. La figure de gauche représente l'évolution de la valeur du couple moteur nécessaire pour maintenir la structure en équilibre en fonction de la position de la plateforme par rapport à l'horizontale (angle de Tilt).

Un modèle interactif représenté à la figure 5.10 est alors développé pour étudier l'influence de ces paramètres. Sur le graphique à gauche sur la figure 5.10 est représentée la valeur du couple moteur requis en fonction de l'angle θ . θ est le paramètre d'état directement relatif à l'orientation de la plateforme contrôlé par la branche cinématique actionnée considérée, dans ce cas c'est l'angle de la plateforme dans le plan de fonctionnement de la chaîne cinématique. Ce graphique évolue en fonction de la position du moteur à l'aide du curseur en dessous et le curseur sur le côté permet d'ajuster les bornes qui représentent les valeurs maximales que le moteur peut déployer soit le couple moteur disponible. Tant que le couple moteur disponible est supérieur en valeur absolue au couple moteur requis le mouvement est supposé possible. On en déduit par exemple dans le cas de la figure 5.10 où on suppose qu'on a un couple moteur disponible de $0,3\text{N.m}$, la plage de fonctionnement disponible théorique selon θ est donc $[-66,1^\circ \dots 70,7^\circ]$. Concernant le couple moteur disponible il provient du couple maximum en fonctionnement continu du moteur, une donnée de construction visible à l'annexe A. Dans notre cas pour le moteur "222053" considéré cette valeur est de $11,7\text{mN.m}$ multipliée par le ratio du réducteur en sortie du moteur, 29 dans ce cas et le rendement du réducteur, 0,7 ici. Il faut aussi prendre en compte les valeurs réduction/rendement du système poulie-courroie en aval. La partie droite de la figure 5.10 est une représentation des éléments physiques calculés : la configuration de la patte considérée, le lieu des centres de masse des éléments mobiles, le poids et la vitesse instantanée de ces éléments mobiles par des vecteurs partant des centres de masse des éléments considérés. Ceci permet aussi de visualiser les positions limites calculées grâce à la figure de gauche.

Avec cette méthode tout d'abord on quantifie l'importance de placer le moteur le plus proche possible de la liaison fixe. Placer le moteur directement au niveau de la liaison fixe est l'idéal

au niveau des efforts mais très complexes pour la conception et pour la gestion des contacts mécaniques. On peut alors déterminer par essais successifs une position qui permet d'avoir un débattement décent et un montage simple. Pour cela il faut tout de même estimer au préalable quel est le couple moteur disponible.

$$C_{md} = C_{max} r_m \mu_m r_p \mu_p = 0,0117 \times 29 \times 0,7 \times r_p \mu_p = 0,237 r_p \mu_p \text{ N.m} \quad (5.51)$$

Donc à partir de ce résultat on constate qu'il faut un rapport de réduction grâce au système poulie-courroie. Sachant qu'il faudra vaincre les effets de friction non pris en compte ici, qu'il faut un peu de marge entre le couple disponible et le couple requis statique pour les performances dynamiques, qu'il faut prendre en compte le rendement du dispositif poulie-courroie, proche de 90% pour ce type de systèmes, et que C_{max} sera vraisemblablement plus faible que la valeur des données techniques. En effet à basse vitesse la contrainte de courant maximum risque d'être atteinte bien avant celle de couple maximum, ce qui fait que le couple maximum est plus faible que prévu. Le résultat du calcul avec un coefficient de sécurité de 100% dû aux considérations précédentes indique qu'un rapport de réduction de 3 pourrait être suffisant mais on choisi 5 pour être confortable.

5.3.3 Architecture globale

Au final au vu des différents choix présentés pour la conception du prototype et après plusieurs itérations de conception le résultat est présenté à la figure 5.11.

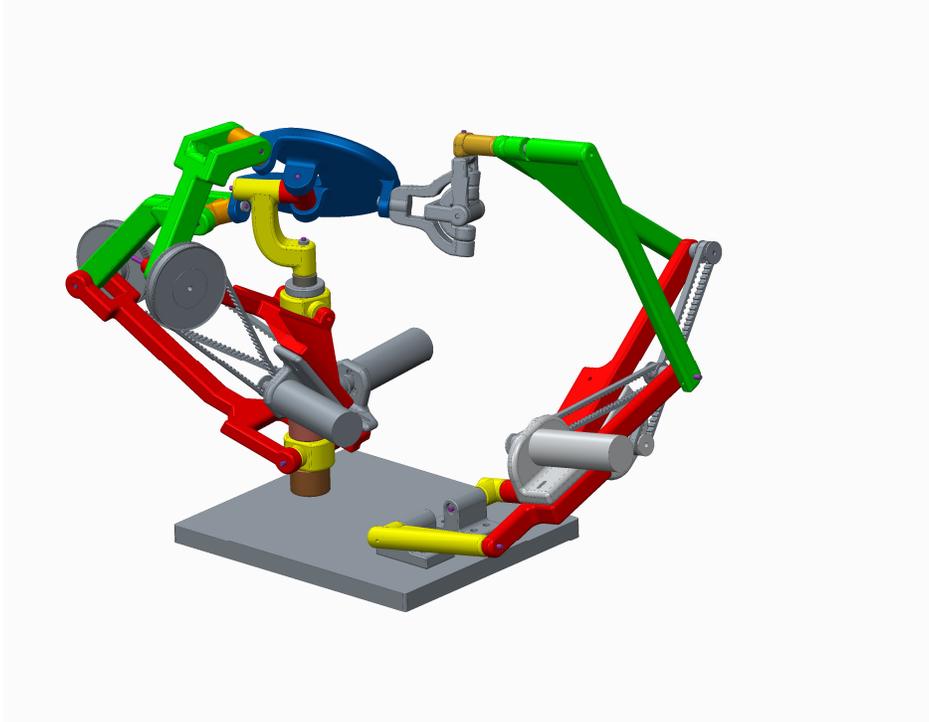


FIGURE 5.11 – Concept de l'architecture générale du robot.

Le code couleur permet d'identifier les différentes chaînes cinématiques du mécanisme partant du bâti en gris jusqu'à l'effecteur en bleu. On reconnaît les deux pattes simples et la patte double ainsi que les différents éléments de liaison mécanique et la motorisation utilisée.

5.4 Contrôle du robot

Dans cette section la méthode de contrôle est brièvement présentée. Vu que ce n'est pas l'objectif de l'étude et seulement un passage obligé pour le contrôle du robot la méthode utilisée est un contrôle en position fait au plus simple.

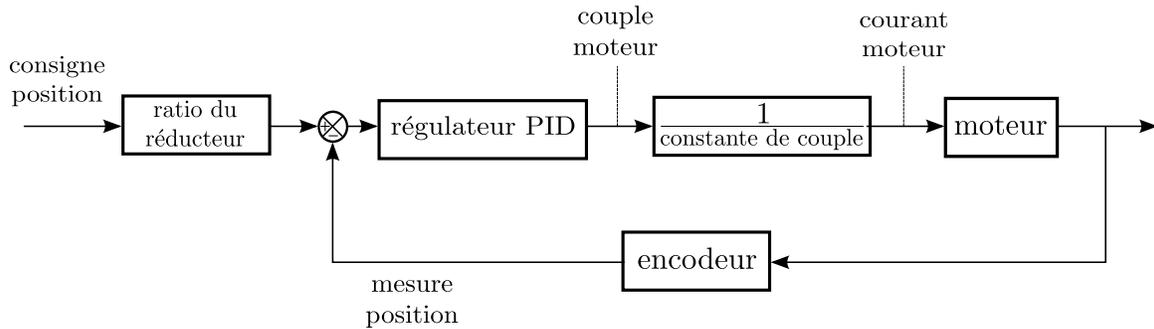
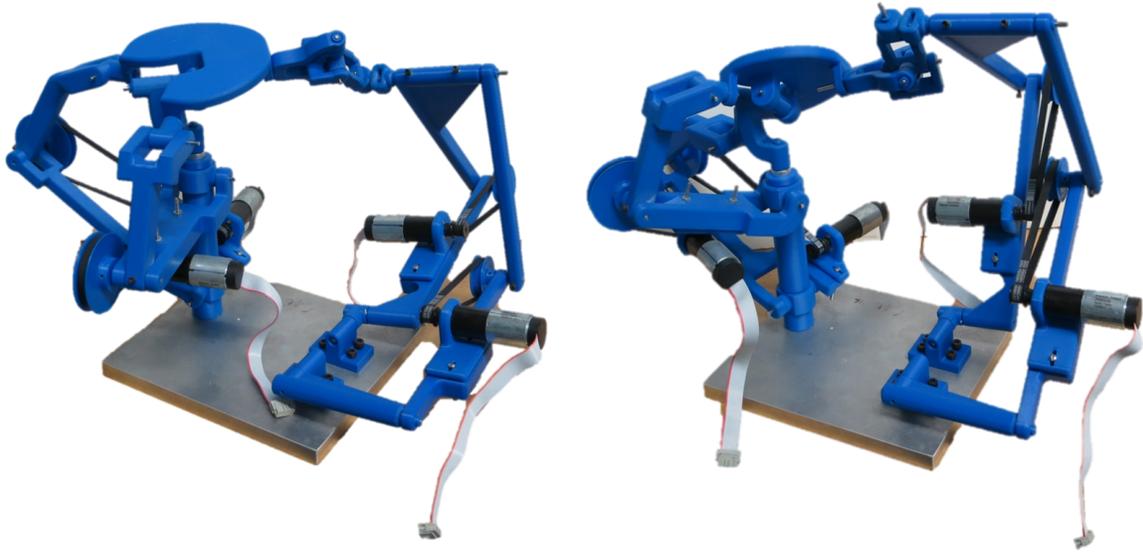


FIGURE 5.12 – Contrôle et asservissement en position utilisé pour les moteurs.

Sur la figure 5.12 la méthode de contrôle est présentée au travers du schéma bloc construit sous Simulink pour contrôler le robot. Le signal de consigne est issu de la trajectoire voulue à l'effecteur convertie en trajectoire à effectuer par les moteurs par le biais du PGI présenté au chapitre 4. La valeur renvoyée par l'encodeur est soustraite à la valeur de consigne pour calculer l'erreur qui après un ajustement par un PID s'ajoute à la valeur de commande pour garantir le bon suivi de la trajectoire. Le régulateur PID utilisé est construit suivant une architecture parallèle et les valeurs des coefficients proportionnel, intégrale et dérivé du régulateur sont basées sur un calcul qui permet d'obtenir le comportement le plus rapide possible en ajustant le taux d'amortissement du système à 0,7 et la pulsation propre à 10 Hz.

Le prototype construit est visible aux figures 5.13a et 5.13b. On reconnaît les différents éléments discutés précédemment.

Au moment d'écrire ces lignes le prototype n'est pas entièrement opérationnel à cause de problèmes inattendus. La conception proposée est donc potentiellement sujette à de légères modifications. On peut néanmoins tirer plusieurs conclusions grâce au chemin fait jusqu'ici. Tout d'abord les frottements sont très compliqués à gérer car ils dépendent beaucoup de l'état de surface des pièces en contact qui lui-même dépend du sens d'impression de la pièce, de la "qualité" du sablage et d'autres raisons difficiles à déterminer qui font que deux pièces similaires peuvent avoir des états de surface très différents. Ensuite les moteurs mobiles induisent des difficultés supplémentaires pour les interférences mécaniques mais aussi les câbles d'ali-



(a) vue 1

(b) vue 2

FIGURE 5.13 – Deux vues du prototype construit dans deux configurations différentes.

mentation alors eux-aussi mobiles peuvent se mêler avec le système, entre eux ou même avec l'environnement extérieur et créer des blocages inconstants et peu maîtrisés. De plus les courroies créent de l'amortissement dû au fait qu'il est compliqué de les tendre efficacement. Enfin les liaisons mécaniques furent complexes à réaliser car elles sortent des conceptions classiques.

Conclusion

Tout d'abord rappelons les objectifs de la présente étude. Les architectures parallèles sont intéressantes pour leurs performances mécaniques mais sont peu utilisées du fait de leur espace de travail restreint. Depuis peu une solution pour résoudre ce problème a été proposée, elle consiste en l'ajout de redondances cinématiques pilotées dans les chaînes cinématiques qui relient la base à l'effecteur. L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'efficacité de cette solution sur un robot qui contrôle les rotations de l'effecteur. Dans ce cas-ci il a été choisi d'étudier ce phénomène sur une architecture S/3-URS de robot sphérique en ajoutant une redondance cinématique sur une des chaînes URS qui devient alors (2-UR)RS.

Résumé des travaux accomplis

Avant de parler de l'efficacité de la redondance cinématique sur les architectures parallèles résumons ce qui a été présenté ici. Une architecture parallèle sphérique classique et générale a été choisie. Cette dernière présente l'avantage d'avoir déjà été étudiée à plusieurs reprises, notamment sur le plan des performances mécaniques et de l'espace de travail. De cette façon on connaît les avantages et limites de telles architectures et l'influence de la redondance cinématique est de cette façon mise en évidence. L'architecture du robot et la méthode employée sont présentées au chapitre 1, le modèle géométrique est choisi pour représenter au mieux la position de l'effecteur, les relations entre les vitesses pilotées des actionneurs et les vitesses de l'objet dont on veut contrôler les mouvements sont présentées. Ces relations sont résumées par un système matriciel qui introduit deux matrices dites jacobiennes qui dépendent de la configuration du robot et dont l'étude du rang permet de savoir si la maîtrise sur les mouvements de l'effecteur est assurée. L'évolution du rang de ces matrices permet de savoir si un mouvement ne peut plus être contrôlé et quels sont les mouvements concernés. Pour résumer une étude de rang matricielle est donc la méthode choisie pour repérer les limites de l'espace de travail. Au chapitre 2 on s'intéresse à l'architecture non redondante équivalente. De cette façon les performances étudiées servent de référence pour mesurer l'efficacité de l'architecture redondante. On voudrait que la méthode discutée au chapitre précédent permette d'exprimer les limites de l'espace de travail du robot dans l'espace des mouvements de l'effecteur. Or les rotations induisent des non linéarités dans le modèle mathématique qui rendent complexes

la résolution du système et donc l'obtention de solutions analytiques. Cependant le rang d'une matrice peut être étudié grâce à des relations géométriques entre les vecteurs qui la composent, en outre la matrice jacobienne qui reflète la capacité de maîtrise d'un mouvement de l'effecteur a pu être simplifiée de façon que les vecteurs qui la constituent correspondent à des vecteurs qui représentent la position de points caractéristiques de l'architecture et de la configuration du robot. L'analyse vectorielle permet donc dans ce cas précis de repérer les configurations singulières du robot de façon satisfaisante. On choisit alors de représenter visuellement l'espace de travail par une surface dans l'espace des angles de torsion et d'inclinaison. Ensuite dans le chapitre 3 on applique la méthode d'analyse de l'espace de travail au mécanisme redondant. À l'aide de l'analyse vectorielle on caractérise les configurations singulières du robot que l'on peut même représenter facilement. On démontre alors que la redondance cinématique permet d'éviter toutes les singularités liées à la patte où est présente cette redondance mais ne peut empêcher les singularités dues seulement aux pattes simples. Puis à partir des résultats sur l'analyse vectorielle quelques cas particuliers sont discutés notamment en vue d'optimiser les performances atteignables avec ce système ne contenant qu'une seule redondance cinématique. On en déduit alors le gain en espace de travail obtenu grâce à la redondance cinématique, le gain étant visible par simple comparaison des espaces de travail représentés par la surface dans l'espace des angles de torsion et inclinaison. Dans les chapitres précédents on a discuté de la possibilité d'éviter les singularités grâce à la redondance cinématique mais concrètement quelles sont les coordonnées articulaires à choisir pour que la redondance cinématique soit utile? En effet le problème géométrique inverse (PGI) devient particulier lorsqu'une redondance cinématique est introduite car pour une même position de l'effecteur il existe une infinité de solutions pour les coordonnées articulaires. Dans ces conditions il faut explorer différentes méthodes concernant le choix des coordonnées articulaires. Grâce à l'outil interactif développé pour le chapitre 3 on se rend très vite compte qu'on ne peut pas prendre n'importe quelles valeurs pour les coordonnées articulaires représentant l'ensemble des solutions possibles pour une configuration donnée du robot. Au contraire on remarque que quelque soit la configuration du robot il existe toujours au moins une solution dans cet espace des solutions pour laquelle le robot se retrouve dans une position singulière. Il est donc primordial de choisir la solution appropriée autrement la redondance cinématique ne permet pas d'éviter les configurations singulières, pire encore elle peut potentiellement créer des configurations singulières là où il n'y en a pas avec l'architecture simple non redondante. Dans ces conditions le chapitre 4 explore plusieurs méthodes pour choisir les coordonnées articulaires. Une méthode analytique robuste est choisie, cette dernière permet de connaître les positions à éviter pour la redondance cinématique qui est alors considérée comme une autre position contrôlée en plus des angles de rotation de l'effecteur. On connaît alors la plage des solutions possibles et donc on peut prendre par exemple la position la plus éloignée des positions interdites et être sûr grâce à la solution analytique qu'on ne risque pas de traverser les solutions interdites. Après un exemple d'illustration, un autre problème est discuté : celui des interférences mécaniques. Une mé-

thode géométrique est proposée pour détecter les interférences mécaniques, une visualisation de l'espace de travail limité par les contacts mécaniques est présentée mais ce problème étant par nature complètement indépendant de celui des singularités la redondance cinématique ne l'arrange pas au contraire elle ajoute des éléments mobiles à l'architecture et rend donc la gestion des interférences mécaniques plus complexe. Le chapitre 5 vise à illustrer les précédents concepts à l'aide d'un exemple concret. Le travail de conception du prototype est alors présenté tout en détaillant plus précisément les éléments les plus critiques du modèle.

Constatations sur l'efficacité de la redondance cinématique

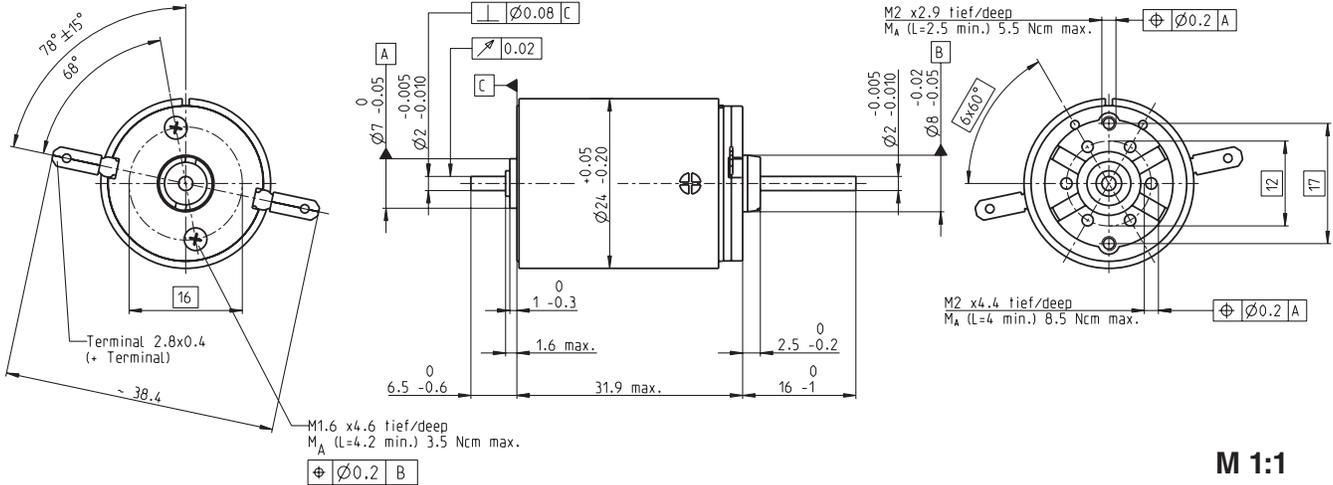
Les travaux présentés ici permettent de juger l'utilité de la redondance mécanique dans les mécanismes parallèles. Cette dernière permet en effet de supprimer une partie ou même toutes configurations singulières ce qui enlève une contrainte jusqu'alors très restrictive sur l'espace de travail des manipulateurs parallèles. Cependant il est aussi important de noter les limites d'une telle architecture. En effet la redondance mécanique introduite doit être pilotée soigneusement car même si elle permet d'éviter les configurations singulières inévitables dans la plupart des configurations du robot, elle permet aussi de placer le robot dans une configuration singulière à tout moment. La redondance induit alors un travail supplémentaire non négligeable au contrôle du robot. Un autre défaut de la redondance cinématique et que la seconde limite à l'espace de travail d'un manipulateur parallèle, les interférences mécaniques, n'est pas réduite, elle est même très probablement augmentée.

Annexe A

Moteur utilisé

Cette annexe regroupe les caractéristiques des moteurs et réducteurs utilisés dans le montage discuté au chapitre 5. Le moteur utilisé est un RE-max 24 dont la référence article est "222053" alimenté en 24V et le réducteur utilisé est un GP 22 C dont la référence article est "143979" de ratio de réduction 29 :1. Ces produits font partie de la gamme du fabricant suisse Maxon Motor et possèdent l'avantage d'être précis et assez puissant pour leur faibles dimensions.

RE-max 24 Ø24 mm, Graphite Brushes, 11 Watt



- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Article Numbers

222048 **222049** 222050 222051 222052 222053 222054 **222055** 222056 222057 **222058** 222059

Motor Data

Values at nominal voltage

	V	9	12	15	18	18	24	24	36	42	48	48	48
1 Nominal voltage	V	9	12	15	18	18	24	24	36	42	48	48	48
2 No load speed	rpm	8190	7530	8280	8870	8000	9310	7530	9110	8600	7400	5240	4720
3 No load current	mA	45.5	31	27.6	25	22.1	19.8	15.5	12.9	10.3	7.59	5.15	4.59
4 Nominal speed	rpm	6530	5830	6600	7190	6290	7610	5790	7390	6860	5630	3400	2890
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	10.8	12.1	12.2	12.1	12	11.7	11.8	11.7	11.6	11.6	11.6	11.7
6 Nominal current (max. continuous current)	A	1.08	0.834	0.735	0.651	0.584	0.5	0.407	0.324	0.261	0.197	0.139	0.127
7 Stall torque	mNm	54	54.2	60.6	64.5	56.7	64.7	51.7	62.3	57.9	49	33.4	30.6
8 Starting current	A	5.19	3.6	3.53	3.35	2.66	2.65	1.71	1.66	1.25	0.799	0.387	0.32
9 Max. efficiency	%	82	82	83	84	83	84	82	83	83	82	78	78

Characteristics

	Ω	1.73	3.34	4.25	5.37	6.76	9.06	14	21.6	33.5	60.1	124	150
10 Terminal resistance	Ω	1.73	3.34	4.25	5.37	6.76	9.06	14	21.6	33.5	60.1	124	150
11 Terminal inductance	mH	0.0735	0.154	0.2	0.251	0.309	0.406	0.618	0.952	1.45	2.56	5.06	6.22
12 Torque constant	mNm/A	10.4	15.1	17.2	19.2	21.3	24.4	30.1	37.4	46.3	61.3	86.3	95.6
13 Speed constant	rpm/V	919	634	557	497	448	391	317	255	206	156	111	99.8
14 Speed / torque gradient	rpm/mNm	153	140	138	139	142	145	147	148	150	153	159	156
15 Mechanical time constant	ms	6.41	6.23	6.21	6.22	6.24	6.37	6.37	6.39	6.41	6.42	6.49	6.45
16 Rotor inertia	gcm ²	4	4.25	4.3	4.29	4.19	4.2	4.13	4.13	4.09	4.02	3.9	3.94

Specifications

Thermal data

17 Thermal resistance housing-ambient	24 K/W
18 Thermal resistance winding-housing	5.1 K/W
19 Thermal time constant winding	8.32 s
20 Thermal time constant motor	637 s
21 Ambient temperature	-30...+85°C
22 Max. permissible winding temperature	+125°C

Mechanical data (sleeve bearings)

23 Max. permissible speed	9800 rpm
24 Axial play	0.05 - 0.15 mm
25 Radial play	0.012 mm
26 Max. axial load (dynamic)	1 N
27 Max. force for press fits (static) (static, shaft supported)	80 N
28 Max. radial loading, 5 mm from flange	420 N
	2.8 N

Mechanical data (ball bearings)

23 Max. permissible speed	9800 rpm
24 Axial play	0.05 - 0.15 mm
25 Radial play	0.025 mm
26 Max. axial load (dynamic)	3.3 N
27 Max. force for press fits (static) (static, shaft supported)	45 N
28 Max. radial loading, 5 mm from flange	440 N
	12.3 N

Other specifications

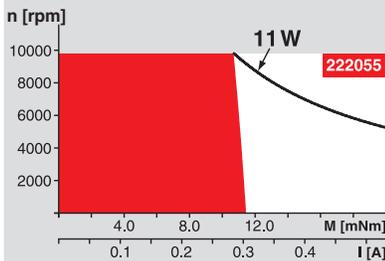
29 Number of pole pairs	1
30 Number of commutator segments	9
31 Weight of motor	71 g

Values listed in the table are nominal.
Explanation of the figures on page 49.

Option

Ball bearings in place of sleeve bearings
Pigtails in place of terminals

Operating Range



Comments

Continuous operation
In observation of above listed thermal resistance (lines 17 and 18) the maximum permissible winding temperature will be reached during continuous operation at 25°C ambient.
= Thermal limit.

Short term operation
The motor may be briefly overloaded (recurring).

— Assigned power rating

maxon Modular System

Planetary Gearhead

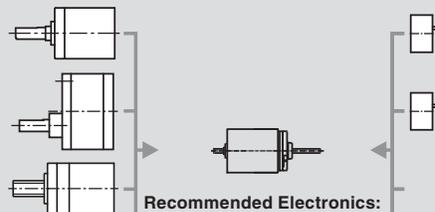
Ø22 mm
0.5 - 2.0 Nm
Page 225

Spur Gearhead

Ø38 mm
0.1 - 0.6 Nm
Page 241

Spindle Drive

Ø22 mm
Page 253/254



Recommended Electronics:
ESCON 36/2 DC Page 292
ESCON 50/5 292
EPOS2 24/2 312
EPOS2 Module 36/2 312
EPOS3 70/10 EtherCAT 319
Notes 18

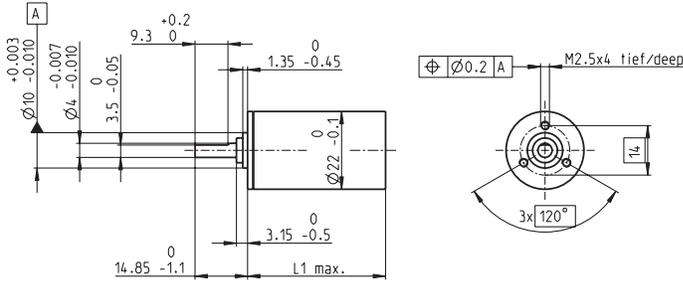
Overview on page 16 - 21

Encoder MR
32 CPT,
2 / 3 channels
Page 269

Encoder MR
128 / 256 / 512 CPT,
2 / 3 channels
Page 271

Planetary Gearhead GP 22 C $\varnothing 22$ mm, 0.5–2.0 Nm

Ceramic Version



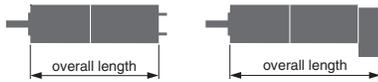
Technical Data	
Planetary Gearhead	straight teeth
Output shaft	stainless steel, hardened
Bearing at output	ball bearing
Radial play, 10 mm from flange	max. 0.2 mm
Axial play	max. 0.2 mm
Max. permissible axial load	100 N
Max. permissible force for press fits	100 N
Sense of rotation, drive to output	=
Recommended input speed	< 8000 rpm
Recommended temperature range	-40...+100°C
Number of stages	1 2 3 4 5
Max. radial load, 10 mm from flange	70 N 70 N 70 N 70 N 70 N

M 1:2

maxon gear

	Article Numbers										
	143971	143974	143980	143986	143990	143996	144002	144004	144011	144017	144023
Stock program	[Red background]										
Standard program	[White background]										
Special program (on request)	[Grey background]										
Gearhead Data											
1 Reduction	3.8 : 1	14 : 1	53 : 1	104 : 1	198 : 1	370 : 1	590 : 1	742 : 1	1386 : 1	1996 : 1	3189 : 1
2 Reduction absolute	15/4	225/16	3375/64	87723/845	50625/256	29198/79	59049/100	759375/1024	1583400/15/114434	285012027/144305	1594323/500
3 Max. motor shaft diameter	mm 4	4	4	3.2	4	3.2	4	4	3.2	3.2	4
Article Numbers	143972	143975	143981	143987	143991	143997	144003	144006	144012	144018	144024
1 Reduction	4.4 : 1	16 : 1	62 : 1	109 : 1	231 : 1	389 : 1	690 : 1	867 : 1	1460 : 1	2102 : 1	3728 : 1
2 Reduction absolute	57/13	855/52	12825/208	2187/20	192375/832	283169/676	1121931/1625	2885625/3328	3947535/2704	7105563/3380	30292137/8125
3 Max. motor shaft diameter	mm 3.2	3.2	3.2	4	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2
Article Numbers	143973	143976	143982	143988	143992	143998	144005	144007	144013	144019	144025
1 Reduction	5.4 : 1	19 : 1	72 : 1	128 : 1	270 : 1	410 : 1	850 : 1	1014 : 1	1538 : 1	2214 : 1	4592 : 1
2 Reduction absolute	27/5	3249/169	48735/676	41553/325	731025/2704	6561/16	531441/625	10965375/10816	98415/64	177147/80	14348907/3125
3 Max. motor shaft diameter	mm 2.5	3.2	3.2	3.2	3.2	4	2.5	3.2	4	4	2.5
Article Numbers		143977	143983	143989	143993	143999		144008	144014	144020	
1 Reduction		20 : 1	76 : 1	157 : 1	285 : 1	455 : 1		1068 : 1	1621 : 1	2458 : 1	
2 Reduction absolute		81/4	1215/16	19683/125	18225/64	1701938/13739		273375/1256	60162067/571293	135005697/154925	
3 Max. motor shaft diameter		mm 4	4	2.5	4	3.2		4	3.2	3.2	
Article Numbers		143978	143984		143994	144000		144009	144015	144021	
1 Reduction		24 : 1	84 : 1		316 : 1	479 : 1		1185 : 1	1707 : 1	2589 : 1	
2 Reduction absolute		1539/65	185193/2197		2777895/8788	124659/260		41668425/35152	15000633/8788	3365793/1300	
3 Max. motor shaft diameter		mm 3.2	3.2		3.2	3.2		3.2	3.2	3.2	
Article Numbers		143979	143985		143995	144001		144010	144016	144022	
1 Reduction		29 : 1	89 : 1		333 : 1	561 : 1		1249 : 1	1798 : 1	3027 : 1	
2 Reduction absolute		729/25	4617/52		69255/208	2368521/4225		1038825/832	373977/208	63950067/21125	
3 Max. motor shaft diameter		mm 2.5	3.2		3.2	3.2		3.2	3.2	3.2	
4 Number of stages	1	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5
5 Max. continuous torque	Nm 0.5	0.6	1.2	1.2	1.8	1.8	1.8	2.0	2.0	2.0	2.0
6 Intermittently permissible torque at gear output	Nm 0.8	0.9	1.9	1.9	2.7	2.7	2.7	3.0	3.0	3.0	3.0
7 Max. efficiency	% 84	70	59	59	49	49	49	42	42	42	42
8 Weight	g 42	55	68	68	81	81	81	94	94	94	94
9 Average backlash no load	° 1.0	1.2	1.6	1.6	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
10 Mass inertia	gcm ² 0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
11 Gearhead length L1*	mm 25.4	32.2	39.0	39.0	45.8	45.8	45.8	52.6	52.6	52.6	52.6

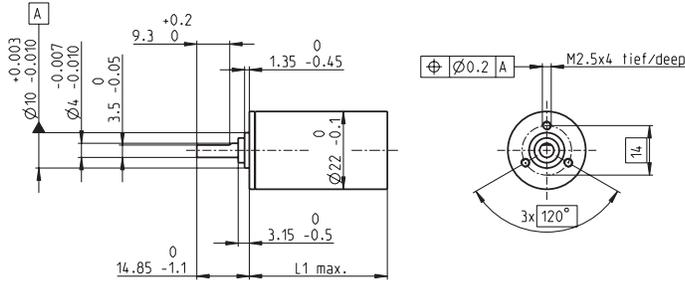
*L1 is ~2.8 mm for calculating the overall length



maxon Modular System												
+ Motor	Page	+ Sensor/Brake	Page	Overall length [mm] = Motor length + gearhead length + (sensor/brake) + assembly parts								
A-max 19	93/94			51.6	58.4	65.2	65.2	72.0	72.0	78.8	78.8	78.8
A-max 19, 1.5 W	94	MR	268/270	56.7	63.5	70.3	70.3	77.1	77.1	83.9	83.9	83.9
A-max 19, 1.5 W	94	Enc 22	275	66.0	72.8	79.6	79.6	86.4	86.4	93.2	93.2	93.2
A-max 19, 1.5 W	94	MEnc 13	284	59.1	65.9	72.7	72.7	79.5	79.5	86.3	86.3	86.3
A-max 19, 2.5 W	95/96			54.2	61.0	67.8	67.8	74.6	74.6	81.4	81.4	81.4
A-max 19, 2.5 W	96	MR	268/270	58.5	65.3	72.1	72.1	78.9	78.9	85.7	85.7	85.7
A-max 19, 2.5 W	96	Enc 22	275	68.6	75.4	82.2	82.2	89.0	89.0	95.8	95.8	95.8
A-max 19, 2.5 W	96	MEnc 13	284	61.7	68.5	75.3	75.3	82.1	82.1	88.9	88.9	88.9
A-max 22	97-100			54.6	61.4	68.2	68.2	75.0	75.0	81.8	81.8	81.8
A-max 22	98/100	MR	268/270	59.6	66.4	73.2	73.2	80.0	80.0	86.8	86.8	86.8
A-max 22	98/100	Enc 22	275	69.0	75.8	82.6	82.6	89.4	89.4	96.2	96.2	96.2
A-max 22	98/100	MEnc 13	284	61.7	68.5	75.3	75.3	82.1	82.1	88.9	88.9	88.9
RE-max 21	123/124			51.6	58.4	65.2	65.2	72.0	72.0	78.8	78.8	78.8
RE-max 21, 3.5 W	124	MR	268/271	56.7	63.5	70.3	70.3	77.1	77.1	83.9	83.9	83.9
RE-max 21	125/126			54.2	61.0	67.8	67.8	74.6	74.6	81.4	81.4	81.4
RE-max 21, 6 W	126	MR	268/271	58.5	65.3	72.1	72.1	78.9	78.9	85.7	85.7	85.7
RE-max 24	127-130			54.6	61.4	68.2	68.2	75.0	75.0	81.8	81.8	81.8
RE-max 24	128/130	MR	269/271	59.6	66.4	73.2	73.2	80.0	80.0	86.8	86.8	86.8

Planetary Gearhead GP 22 C $\varnothing 22$ mm, 0.5–2.0 Nm

Ceramic Version



Technical Data

Planetary Gearhead	straight teeth
Output shaft	stainless steel, hardened
Bearing at output	ball bearing
Radial play, 10 mm from flange	max. 0.2 mm
Axial play	max. 0.2 mm
Max. permissible axial load	100 N
Max. permissible force for press fits	100 N
Sense of rotation, drive to output	=
Recommended input speed	< 8000 rpm
Recommended temperature range	-40...+100°C
Number of stages	1 2 3 4 5
Max. radial load, 10 mm from flange	70 N 70 N 70 N 70 N 70 N

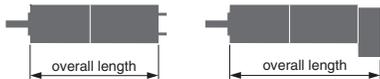
M 1:2

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Article Numbers

Gearhead Data	143971	143974	143980	143986	143990	143996	144002	144004	144011	144017	144023
1 Reduction	3.8 : 1	14 : 1	53 : 1	104 : 1	198 : 1	370 : 1	590 : 1	742 : 1	1386 : 1	1996 : 1	3189 : 1
2 Reduction absolute	15/4	225/16	3375/64	87723/845	50625/256	29198/79	59049/100	759375/1024	158340015/114244	265012027/142805	1594323/500
3 Max. motor shaft diameter	mm 4	4	4	3.2	4	3.2	4	4	3.2	3.2	4
Article Numbers	143972	143975	143981	143987	143991	143997	144003	144006	144012	144018	144024
1 Reduction	4.4 : 1	16 : 1	62 : 1	109 : 1	231 : 1	389 : 1	690 : 1	867 : 1	1460 : 1	2102 : 1	3728 : 1
2 Reduction absolute	57/13	855/52	12825/208	2187/20	192375/832	263169/676	1121931/1625	2885625/3328	3947535/2704	7105563/3380	30292137/8125
3 Max. motor shaft diameter	mm 3.2	3.2	3.2	4	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2
Article Numbers	143973	143976	143982	143988	143992	143998	144005	144007	144013	144019	144025
1 Reduction	5.4 : 1	19 : 1	72 : 1	128 : 1	270 : 1	410 : 1	850 : 1	1014 : 1	1538 : 1	2214 : 1	4592 : 1
2 Reduction absolute	27/5	3249/169	48735/676	41553/325	731025/2704	6561/16	531441/625	10965375/10616	98415/64	177147/80	14348907/3125
3 Max. motor shaft diameter	mm 2.5	3.2	3.2	3.2	4	2.5	3.2	4	4	4	2.5
Article Numbers	143977	143983	143989	143993	143999		144008	144014	144020		
1 Reduction		20 : 1	76 : 1	157 : 1	285 : 1	455 : 1	1068 : 1	1621 : 1	2458 : 1		
2 Reduction absolute		81/4	1215/16	19683/125	18225/64	1701938/3739	273375/256	601692057/371293	135005687/54025		
3 Max. motor shaft diameter	mm	4	4	2.5	4	3.2	4	3.2	3.2		
Article Numbers		143978	143984		143994	144000	144009	144015	144021		
1 Reduction		24 : 1	84 : 1		316 : 1	479 : 1	1185 : 1	1707 : 1	2589 : 1		
2 Reduction absolute		1539/65	185193/2197		2777895/8788	124659/260	41668425/35152	15000633/8788	3365793/1300		
3 Max. motor shaft diameter	mm	3.2	3.2		3.2	3.2	3.2	3.2	3.2		
Article Numbers		143979	143985		143995	144001	144010	144016	144022		
1 Reduction		29 : 1	89 : 1		333 : 1	561 : 1	1249 : 1	1798 : 1	3027 : 1		
2 Reduction absolute		729/25	4617/52		69255/208	2368521/4225	1038825/832	373971/208	63950067/21125		
3 Max. motor shaft diameter	mm	2.5	3.2		3.2	3.2	3.2	3.2	3.2		
4 Number of stages		1	2	3	4	4	5	5	5	5	5
5 Max. continuous torque	Nm	0.5	0.6	1.2	1.2	1.8	1.8	2.0	2.0	2.0	2.0
6 Intermittently permissible torque at gear output	Nm	0.8	0.9	1.9	1.9	2.7	2.7	3.0	3.0	3.0	3.0
7 Max. efficiency	%	84	70	59	59	49	49	42	42	42	42
8 Weight	g	42	55	68	68	81	81	81	94	94	94
9 Average backlash no load	°	1.0	1.2	1.6	1.6	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
10 Mass inertia	gcm ²	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
11 Gearhead length L1*	mm	25.4	32.2	39.0	39.0	45.8	45.8	45.8	52.6	52.6	52.6

*for EC-max 16 L1 is=2.8 mm



maxon Modular System

+ Motor	Page	+ Sensor/Brake	Page	Overall length [mm] = Motor length + gearhead length + (sensor/brake) + assembly parts									
EC 16, 60 W	147			81.5	88.3	95.1	95.1	101.9	101.9	101.9	108.7	108.7	108.7
EC 16, 60 W	147	MR	271	92.2	99.0	105.8	105.8	112.6	112.6	112.6	119.4	119.4	119.4
EC 22, 40 W	149			70.0	76.8	83.6	83.6	90.4	90.4	90.4	97.2	97.2	97.2
EC 22, 40 W	149	MR	271	76.0	82.8	89.6	89.6	96.4	96.4	96.4	103.2	103.2	103.2
EC 22, 100 W	151			88.2	95.0	101.8	101.8	108.6	108.6	108.6	115.4	115.4	115.4
EC 22, 100 W	151	MR	271	94.2	101.0	107.8	107.8	114.6	114.6	114.6	121.4	121.4	121.4
EC-max 16, 8 W	165			58.7	65.5	72.3	72.3	79.1	79.1	79.1	85.9	85.9	85.9
EC-max 16, 8 W	165	MR	271	66.0	72.8	79.6	79.6	86.4	86.4	86.4	93.2	93.2	93.2
EC-max 22, 12 W	166			57.5	64.3	71.1	71.1	77.9	77.9	77.9	84.7	84.7	84.7
EC-max 22, 12 W	166	MR	271	67.2	74.0	80.8	80.8	87.6	87.6	87.6	94.4	94.4	94.4
EC-max 22, 12 W	166	AB 20	328	93.1	99.9	106.7	106.7	113.5	113.5	113.5	120.3	120.3	120.3
EC 20 flat, 3 W, A	183			33.1	39.9	46.7	46.7	53.5	53.5	53.5	60.3	60.3	60.3
EC 20 flat, 3 W, B	183			32.5	39.3	46.1	46.1	52.9	52.9	52.9	59.7	59.7	59.7
EC 20 flat, 5 W	184			36.7	43.5	50.3	50.3	57.1	57.1	57.1	63.9	63.9	63.9
EC 20 flat, IE, IP 00	185			39.7	46.5	53.3	53.3	60.1	60.1	60.1	66.9	66.9	66.9
EC 20 flat, IE, IP 40	185			40.8	47.6	54.4	54.4	61.2	61.2	61.2	68.0	68.0	68.0
EC 20 flat, IE, IP 00	186			43.7	50.5	57.3	57.3	64.1	64.1	64.1	70.9	70.9	70.9
EC 20 flat, IE, IP 40	186			44.8	51.6	58.4	58.4	65.2	65.2	65.2	72.0	72.0	72.0
EC 32 flat, 6 W	187			39.8	46.6	53.4	53.4	60.2	60.2	60.2	67.0	67.0	67.0

Bibliographie

- [1] M. J. D. H. et Abraham Weiss et Robert G. Langlois. Atlas motion platform generalized kinematic model. In N. A. et O. Company et M. Gouttefarde et S. Krut et F. Pierrot, editor, *Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 227–234. 2008.
- [2] I. A. B. et Clément M. Gosselin. Singularity loci of spherical parallel mechanisms. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2968–2973, 2005.
- [3] I. A. B. et Clément M. Gosselin. Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(5) :2968–2973, October 2006.
- [4] J. S. et Clément M. Gosselin. Étude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques. *Mechanism and Machine Theory*, 29(4) :559–579, 1994.
- [5] J. W. et Clément M. Gosselin. Singularity loci of a special class of spherical 3-DOF parallel mechanisms with prismatic actuators. *Journal of Mechanical Design*, 126 :319–326, March 2004.
- [6] X. K. et Clément M. Gosselin et James M. Ritchie. Forward displacement analysis of a linearly actuated quadratic spherical parallel manipulator. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 3(12), January 2011.
- [7] D. J. C. et Delbert Tesar. *The Dynamic Model of a Three Degree of Freedom Parallel Robotic Shoulder Module*, pages 475–487. Springer Berlin Heidelberg, 1989.
- [8] J. Y. et Dengfeng Lu et Guangbo Hao. Design and analysis of a 2-DOF compliant parallel pan-tilt platform. In *Third International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. 2014.
- [9] I. A. B. et Dimiter Zlatanov et Clément M. Gosselin. Advantages of the modified euler angles in the design and control of PKMs. In *Comptes-Rendus de la 3rd Chemnitz Parallel*

Kinematics Seminar/2002 Parallel Kinematic Machines International Conference, pages 171–187, Chemnitz, Germany, avril 2002.

- [10] C. M. G. et Eric Lavoie. On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 12(4) :393–402, August 1993.
- [11] W. C. et Fang Yuefa et Guo Sheng et Chen Zhihong. Design and kinematics of a reconfigurable robot for ankle and knee rehabilitation. In *Third International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. 2014.
- [12] H. S. et Liangjie Yang et Jiamming et Ju Li et Xiaoyu Zhang. A parallel shoulder rehabilitation training mechanism and its kinematics design. In *Third International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. 2014.
- [13] C. M. G. et Louis Perreault et Charles Vallancourt. Simulation and computer-aided kinematic design of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 12(12) :857–869, July 1995.
- [14] C. M. G. et Louis-Thomas Schreiber. Kinematically redundant spatial parallel mechanisms for singularity avoidance and large orientational workspace. *IEEE Transactions on Robotics*, 2(32) :286–300, 2016.
- [15] J. M. H. et Mourad Karouia. The novel 3-RUU wrist with no idle pair. In C. M. G. et Imme Ebert-Uphoff, editor, *First International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 284–286. 2002.
- [16] A. C. et Rosario Sinatra. The elastodynamics of the 3-CRU spherical robot. In N. A. et O. Company et M. Gouttefarde et S. Krut et F. Pierrot, editor, *Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 159–165. 2008.
- [17] G. W. et Stéphane Caro et Jiawei Wang. Design and transmission analysis of an asymmetrical spherical parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, (94) :119–131, 2015.
- [18] C. M. G. et Thierry Laliberté et Audrey Veillette. Singularity-free kinematically redundant planar parallel mechanisms with unlimited rotational capability. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(2) :457–467, 2015.
- [19] R. K. et Vincent Hayward. Multiple-goal kinematic optimization of a parallel spherical mechanism with actuator redundancy. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(5) :644–651, October 1992.

- [20] R. L. et Yanjun Guo. Research on dynamics and simulation of 3-RRP spherical parallel mechanism. In *Third International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. 2014.
- [21] S. H. et Yukio Takeda et Shuta Hanagasaki. Kinematic design of 3-URU pure rotational parallel mechanism to perform precise motion within a large workspace. In N. A. et O. Company et M. Gouttefarde et S. Krut et F. Pierrot, editor, *Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pages 49–56. 2008.
- [22] C. M. G. et Éric St-Pierre et Martin Gagné. On the development of the agile eye : mechanical design, control issues and experimentation. *IEEE Robotics and Automation Society Magazine*, 3(4) :29–37, 1996.
- [23] A. Liegeois. Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 7(12) :868–871, 1977.
- [24] Y. Nakamura, H. Hanafusa, and T. Yoshikawa. Task-priority based redundancy control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(2) :3–15, 1987.