



Analyse de mécanismes parallèles translationnels suspendus entraînés par câbles

Mémoire

Jordan Longval

Maîtrise en génie mécanique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

Analyse de mécanismes parallèles translationnels suspendus entraînés par câbles

Mémoire

Jordan M. Longval

Sous la direction de:

Clément Gosselin, directeur de recherche

Résumé

Les robots parallèles suspendus entraînés par câbles utilisent, comme leur nom l'indique, des câbles afin de déplacer une plate-forme mobile suspendue appelée effecteur. Chaque câble du robot relie l'effecteur à une poulie statique fixée à une base et qui est actionnée par un moteur. Le mouvement de l'effecteur est une conséquence de l'enroulement et du déroulement des câbles autour des poulies actionnées. Ces robots requièrent un nombre de câbles supérieur ou égal au degré de liberté de mouvement de l'effecteur (soit trois dans un plan et six dans l'espace tridimensionnel).

Certaines applications des robots parallèles suspendus entraînés par câbles requièrent seulement la possibilité de déplacer en translation l'effecteur. Dans ces circonstances, il est possible de minimiser le nombre de moteurs requis en utilisant des arrangements de câbles en parallélogramme afin d'actionner deux câbles du robot avec un seul moteur. Ces câbles sont alors toujours parallèles et de même longueur tant et aussi longtemps que les câbles sont en tension.

L'objectif de ce mémoire est de présenter les capacités de deux Robots Parallèles Suspendus Entraînés par Câbles (RPSEC) translationnels possédant des arrangements de câbles en parallélogramme.

Afin de mieux introduire les sujets principaux étudiés dans ce mémoire, le premier chapitre présente une revue de la littérature scientifique. Cette revue est séparée en quatre sujets soit : Les RPSEC en général, les espaces de travail des RPSEC, la capacité des RPSEC à entreprendre des trajectoires dynamiques ainsi que les robots parallèles ayant des arrangements d'actionneurs en parallélogrammes.

Le second chapitre porte sur un RPSEC plan translationnel à 2 DDL. La géométrie spéciale de ce RPSEC utilisant des câbles en parallélogramme est d'abord présentée ainsi qu'une étude du degré de mobilité du robot. Une modélisation cinématique du mécanisme est par la suite effectuée qui permet de résoudre le Problème Géométrique Direct (PGD) et Inverse (PGI) du robot. Cette résolution du PGI et du PGD permet ensuite de dériver les équations de vitesse qui sont utilisées pour déterminer les lieux de singularité du robot. Une modélisation dynamique est par la suite effectuée qui permet de déterminer des inégalités algébriques qui, lorsqu'elles sont respectées, assurent que les câbles du mécanisme sont en tension. Ces inégalités sont ensuite utilisées pour étudier les limites de l'Espace de Travail Statique (ETS) et de l'espace de travail Statique avec Torseur (ETST) du robot en fonction des paramètres géométriques du robot. Les inégalités sont également utilisées pour planifier des trajectoires elliptiques qui permettent au robot de sortir de l'ETST.

Le troisième chapitre présente un RPSEC spatial translationnel à 3DDL. Comme le mécanisme du chapitre précédent, ce mécanisme utilise des câbles arrangés en parallélogrammes. Une étude de la cinématique de ce robot est présentée ce qui permet la résolution du PGD et du PGI. Cette étude permet ensuite de déterminer les lieux de singularité du robot ainsi que les possibles intersections entre les câbles du robot. Une modélisation de la dynamique du robot est par la suite effectuée qui permet de déterminer des conditions paramétriques qui assurent une tension dans les câbles. Ces conditions sont utilisées pour déterminer l'ETS du robot ainsi que son ETST. Une planification de trajectoire elliptique est également présentée pour ce robot.

Enfin, le dernier chapitre présente un prototype du robot présenté au troisième chapitre. Une méthodologie est d'abord élaborée qui permet de mettre en évidence les différentes étapes nécessaires à la réalisation d'un tel prototype. Le robot est par la suite testé en le déplaçant dans son espace de travail statique et en produisant des trajectoires de type elliptique qui lui permettent de sortir de son espace de travail statique

Table des matières

Résumé	iii
Table des matières	v
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Remerciements	xiii
Introduction	1
1 Revue de la littérature scientifique	3
1.1 Robots Parallèles Suspendus Entraînés par des Câbles (RPSEC)	3
1.2 Espace de travail des RPSEC	6
1.3 Capacité des RPSEC à entreprendre des trajectoires dynamiques	8
1.4 Robots parallèles utilisant des arrangements en parallélogramme	11
1.5 Conclusion	12
2 Robot plan à 2 DDL	14
2.1 Géométrie proposée	14
2.2 Degré de mobilité du mécanisme	15
2.3 Modélisation cinématique du mécanisme	16
2.4 Modélisation dynamique	21
2.5 Espace de travail statique	25
2.6 Capacité à recevoir un torseur d'action	32
2.7 Planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST	37
2.8 Planification de trajectoires à l'extérieur de l'ETST	39
2.9 Exemple d'application	51
2.10 Conclusion	58
3 Robot spatial à 3DDL en translation	60
3.1 Modélisation cinématique du mécanisme	61
3.2 Étude des lieux d'interférence entre les câbles du mécanisme	67
3.3 Modélisation dynamique	71
3.4 Espace de travail statique	74
3.5 Capacité du robot à recevoir un torseur d'action externe	83
3.6 Planification de trajectoire elliptique	94

3.7	Conclusion	105
4	Validation expérimentale du mécanisme à 3DDL en translation	107
4.1	Méthodologie	107
4.2	Résultat des expériences quasi statiques	122
4.3	Discussion sur les expériences quasi statiques	129
4.4	Résultats des expériences dynamiques	131
4.5	Discussion sur les expériences dynamiques	142
4.6	Conclusion	144
	Conclusion	145
4.7	Travaux futurs	147
A	Forme générale à forme paramétrique 2D	148
B	Forme générale à forme paramétrique 3D	151
C	Coefficients de conditions de tension	155
	Bibliographie	157

Liste des tableaux

2.1	Valeurs numériques de l'exemple d'application	53
2.2	Fréquences permettant la trajectoire dynamique de l'exemple d'application	55
3.1	Position des points d'attache sur l'effecteur	62
3.2	Valeur analytique des ζ	70
3.4	Résultat de l'optimisation de \mathcal{S}_{ETS}	83
3.5	Premier exemple d'optimisation	89
3.6	Second exemple d'optimisation	90
3.7	arrangement géométrique arbitraire exposé à des moments	91
3.8	Troisième exemple d'optimisation	93
3.9	arrangement géométrique arbitraire exposé à des forces et des moments	93
4.1	α, L, R et ℓ lors des expériences	111
4.2	Paramètres généraux du robot pour les expériences quasi statiques.	122
4.3	Dimensions et masses des composantes pour la première expérience quasi statique.	122
4.4	Dimensions et masses des composantes pour la seconde expérience quasi statique.	126
4.5	Valeurs des paramètres des ellipses des expériences dynamiques.	132
4.6	Dimensions et masses des composantes pour la seconde expérience dynamique.	136

Liste des figures

0.1	Exemple de RPECs	2
1.1	Le NIST Robocrane	3
1.2	Exemple d'utilisation de la skycam	4
1.3	Radiotélescope FAST	5
1.4	Tableau largeur vs poids	5
1.5	Exemple d'application pour un RPSEC dans une situation d'urgence	6
1.6	RPSEC utilisé comme imprimante 3D	6
1.7	Interface utilisateur d'ARACHNIS	7
1.8	RPSEC à 2DDL plan à masse ponctuelle	8
1.9	RPSEC à 3DDL spatial à masse ponctuelle	9
1.10	RPSEC à 3DDL plan avec un effecteur à corps rigide	10
1.11	RPSEC à 6DDL spatial avec un effecteur à corps rigide	10
1.12	Robot Delta	11
1.13	Le robot BetBot	12
1.14	Robot translationnel spatial à 3DDL	13
2.1	Mécanisme plan à 2DDL proposé	15
2.2	Graphe d'un mécanisme parallèle avec trois branches <i>RPR</i>	16
2.3	Graphe équivalent au mécanisme parallèle plan.	17
2.4	Allure de la singularité de type II.	20
2.5	DCL de l'effecteur avec forces externes	22
2.6	Tension dans les câbles en fonction de la position statique en y	26
2.7	Disposition géométrique maximisant la largeur de l'espace de travail statique.	28
2.8	Disposition géométrique minimisant la largeur de l'espace de travail statique.	29
2.9	Variation de \mathcal{L} en fonction de a_y et c_y	31
2.10	Tétraèdre des torseurs	33
2.11	ETST	36
2.12	Exemple de trajectoire dans l'ETST	40
2.13	Tension pendant la trajectoire repos-repos	41
2.14	Condition de tension lors d'une trajectoire elliptique.	45
2.15	Algorithme pour déterminer l' amplitude d'oscillation maximale.	46
2.16	Méthode pour déterminer un intervalle de fréquence d'oscillation.	48
2.17	Exemple de planification de trajectoire	52
2.18	Distances entre la caméra et l'effecteur du robot	53
2.19	ETS et ETST de la tâche de filmage	54
2.20	Tensions pendant la trajectoire repos-repos de l'exemple d'application	55
2.21	Intervalle de fréquence permettant L' amplitude requise.	56

2.22	Tension dans les câbles pendant la trajectoire elliptique en exemple.	57
3.1	Mécanisme 3DDL	61
3.2	Influence de l'angle α	66
3.3	Influence de l'angle α	70
3.4	Représentation du prisme de l'ETS	75
3.5	ETST	75
3.6	Première étape pour déterminer l'ETS	77
3.7	Deuxième étape pour déterminer l'ETS	78
3.8	Troisième étape pour déterminer l'ETS	79
3.9	Quatrième étape pour déterminer l'ETS	79
3.10	Méthode de calcul de l'aire de la l'ETS	81
3.11	Comparaison de l'évolution de \mathcal{S}_{ETS} pour deux configuration.	84
3.12	Croisement de plans formant l'ETST	87
3.13	Sommets de l'ETST	87
3.14	Effet d'une force sur l'orientation de l'ETST	90
3.15	Effet de composantes de moment sur un arrangement optimisé	91
3.16	Effet de composantes de moment sur un arrangement non-optimisé	92
3.17	Effet de composantes de mixte sur un arrangement optimisé	94
3.18	Effet de composantes mixtes sur un arrangement non-optimisé	95
3.19	Limites d'amplitudes en relation à la fréquence d'oscillation	100
3.20	Limites d'amplitudes en relation à la fréquence d'oscillation	102
4.1	Vue de proche de l'effecteur, des points d'attache et des câbles.	108
4.2	Vue d'ensemble de la base du robot.	108
4.3	Vue rapprochée de l'un des moteurs.	109
4.4	Figure explicative de la position des œillets	110
4.5	Projection au sol de l'ETS maximal	112
4.6	Vue de dessus de l'assemblage de l'effecteur et des câbles.	113
4.7	Schéma de contrôle des moteurs du robot.	114
4.8	Description des figures quasi statiques	118
4.9	Angles Roulis,Lacet,Tangage d'un téléphone intelligent.	119
4.10	Traitement des données : expériences quasi statiques	120
4.11	Disposition de l'effecteur pour la première expérience quasi statique.	122
4.12	Trajectoire effectuée lors de la première expérience quasi-statique	124
4.13	Position dans le temps de l'expérience à centre de masse centré	124
4.14	Données provenant de la centrale inertielle pour la première expérience quasi-statique	125
4.15	Puissance fréquentielle pendant la première expérience quasi-statique	125
4.16	Disposition de l'effecteur pour la première expérience quasi statique	126
4.17	Trajectoire effectuée lors de la seconde expérience quasi-statique	127
4.18	Position dans le temps de la première expérience quasi-statique	128
4.19	Données provenant de la centrale inertielle pour la deuxième expérience quasi-statique	128
4.20	Puissance fréquentielle pendant la seconde expérience quasi-statique	129
4.21	Trajectoire effectuée lors des expériences de trajectoires elliptiques dynamiques.	131
4.22	Tension théorique dans les câbles pour la première expérience dynamique	133
4.23	Conditions de tension pour la première expérience dynamique	133
4.24	Variation de l'orientation de l'effecteur pendant la première expérience dynamique	134
4.25	Puissance du signal à différentes fréquences pendant la première expérience	135

4.26	Tension théorique dans les câbles pour la deuxième expérience dynamique	136
4.27	Conditions de tension pour la deuxième expérience dynamique	137
4.28	Variation de l'orientation de l'effecteur pendant la deuxième expérience dynamique .	138
4.29	Puissance du signal à différentes fréquences pendant la deuxième expérience	139
4.30	Tension théorique dans les câbles pour la troisième expérience dynamique	140
4.31	Conditions de tension pour la troisième expérience dynamique	140
4.32	Variation de l'orientation de l'effecteur pendant la troisième expérience dynamique .	141
4.33	Puissance du signal à différentes fréquences pendant la troisième expérience	142
A.1	Trajectoire elliptique	148
B.1	Trajectoire elliptique en 3D	151

À Sarah, ma meilleure moitié.

Sapere aude !

Horace

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier le Pr. Clément Gosselin sans qui ce projet n'aurait jamais vu le jour. Clément c'est une chance incroyable que j'ai eu de pouvoir me joindre au laboratoire que tu as mis sur pied et qui est maintenant un fleuron de l'Université Laval. Travailler avec toi a été une expérience très enrichissante et je suis très heureux de pouvoir continuer à travailler avec toi sur un futur projet.

J'aimerais également remercier les professionnels de recherche Simon Foucault et Thierry Laliberté. Votre professionnalisme et votre savoir faire est l'un des points marquants du laboratoire et vous avez su m'aider à maintes reprises durant cette maîtrise.

J'aimerais également remercier mes collègues de recherche qui vont, eux aussi, compléter leur mémoire ou leur thèse sous peu. Nous avons passé de beaux moments ensemble. Les dîners, tournois de Spike-Ball, sorties et conférences ont certainement fait de ma maîtrise une période beaucoup plus plaisante.

J'aimerais également remercier ma famille. Maman, tu as su être une accompagnatrice psychologique hors pair dans mes moments difficiles. L'achèvement de ce mémoire est en grande partie grâce à toi. Papa, nos discussions philosophiques m'ont beaucoup aidé à relativiser mes problèmes et à réaliser la chance que j'avais d'avoir une vie aussi incroyable. Mary, you will always be the comic relief to my life. Like a breath of fresh air, you helped me go through some of the hard parts of this thesis and I am glad you've seen me fail miserably haha! Matante, tu as été présente dans ma vie dès mon jeune âge et tu as su me montrer l'importance de la vérité et de la vaillance. À mes grands-parents, j'aimerais vous dire merci pour la sagesse que vous m'avez transmise. Papi Marcel, je sais que tu seras fier de lire ce mémoire et sache que je garderai toujours ton prénom dans ma signature. Mamy Anita, I will always cherish the long conversations we have about God and the wonders of the universe. God bless you. Papi Jean-René, c'est toi qui m'a transmis cet intérêt pour l'ingénierie et les mathématiques et j'espère pouvoir continuer à suivre tes pas. Camil, Louise, Antoine et Annie, je suis très chanceux d'avoir une belle famille aussi extraordinaire et je vous remercie pour les beaux moments qu'on a passé ensemble ces deux dernières années.

Enfin, j'aimerais remercier ma très chère Sarah qui m'a supportée tout au long de cette longue épreuve. Je n'aurais jamais pu achever ce mémoire sans toi. Je t'aime.

Introduction

Les Robots Parallèles Entraînés par Câbles (RPEC) sont un sujet de recherche très populaire dans le domaine de la robotique. Dans l'article [16] faisant l'état de l'art des RPEC, on note plus de 140 articles de référence à ce sujet. La fonction principale de ces robots est de contrôler la pose d'un corps appelé effecteur à l'aide de câbles. Les câbles sont attachés à l'effecteur et sont enroulés autour de poulies actionnées par des moteurs rotatifs. L'actionnement des poulies change la longueur des câbles ce qui permet de contrôler la position et l'orientation de l'effecteur. Les RPEC sont séparés en deux catégories, soit les Robots Parallèles Pleinement Contraints Entraînés par Câbles (RPPCEC) et les Robots Parallèles Suspendus Entraînés par câbles (RPSEC). Les RPPCEC ont besoin d'au moins un câble de plus que de degrés de liberté de l'effecteur pour pleinement contraindre celui-ci. Certains de leurs câbles sont enroulés autour de poulies qui se situent sous l'effecteur. Cette disposition des câbles permet d'appliquer des efforts opposés sur l'effecteur ce qui permet de maintenir la tension dans les câbles. La figure 0.1a présente un RPPCEC possédant 8 moteurs rotatifs et 8 câbles. Les RPSEC, quant à eux, utilisent la gravité pour maintenir la tension dans leurs câbles ce qui fait en sorte qu'aucun de leurs câbles n'est enroulé sur des poulies se situant sous l'effecteur. Ces robots suspendus requièrent au moins autant de câbles que de degrés de liberté de l'effecteur pour pleinement contraindre la pose de l'effecteur. Comparativement au RPPCEC, les RPSEC ont l'avantage d'avoir un moins grand nombre de câbles ce qui facilite l'étude de leur espace de travail et de leur cinématique en plus de minimiser l'encombrement que causent les câbles se situant sous l'effecteur. La figure 0.1b présente un RPSEC spatial à 6 moteurs rotatifs et 6 câbles.

L'objectif de ce mémoire est de présenter les capacités de deux RPSECs translationnels possédant des arrangements de câbles en parallélogramme. L'arrangement en parallélogramme des câbles de ces RPSECs permet de contraindre cinématiquement leur orientation limitant ainsi le nombre de moteurs requis pour pleinement contraindre ces robots.

Afin de mieux introduire les sujets principaux étudiés dans ce mémoire, le premier chapitre présente une revue de la littérature scientifique. Cette revue est séparée en quatre sujets soit : Les RPSEC en général, les espaces de travail des RPSEC, la capacité des RPSEC à entreprendre des trajectoires dynamiques ainsi que les robots parallèles ayant des arrangements d'actionneurs en parallélogrammes.

Le second chapitre porte sur un RPSEC plan translationnel à 2 DDL. La géométrie spéciale de ce RPSEC utilisant des câbles en parallélogramme est d'abord présentée ainsi qu'une étude du degré de

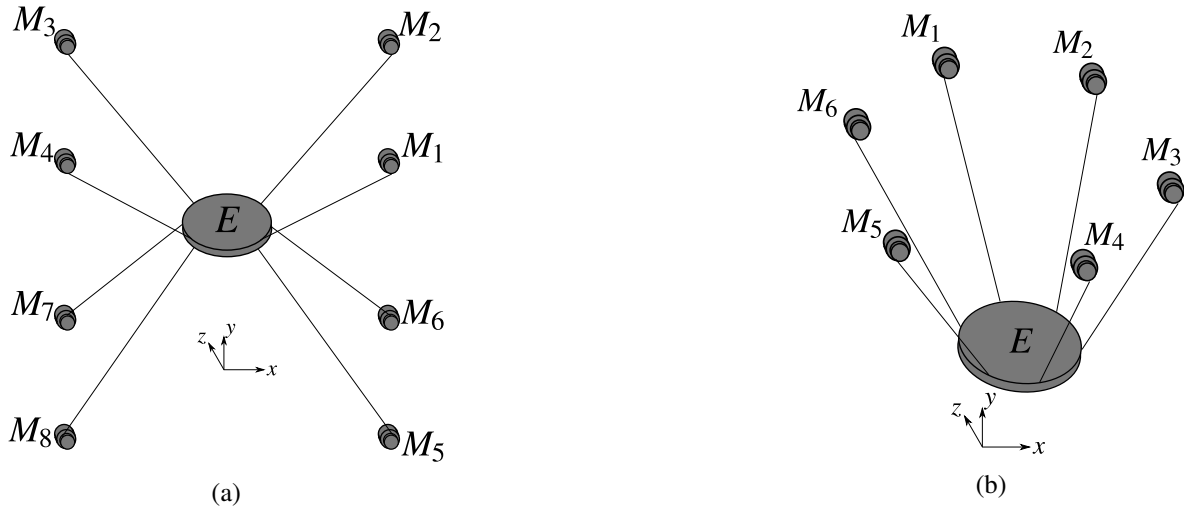


FIGURE 0.1 – Exemple de RPECs. En (a), un RPPCEC spatial à 6DDL à 8 moteurs et 8 câbles. En (b), un RPSEC spatial à 6 DLL à 6 moteurs et 6 câbles.

mobilité du robot. Une modélisation cinématique du mécanisme est par la suite effectuée qui permet de résoudre le Problème Géométrique Direct (PGD) et Inverse (PGI) du robot. Cette résolution du PGI et du PGD permet ensuite de dériver les équations de vitesse qui sont utilisées pour déterminer les lieux de singularité du robot. Une modélisation dynamique est par la suite effectuée qui permet de déterminer des inégalités algébriques qui, lorsqu'elles sont respectées, assurent que les câbles du mécanisme sont en tension. Ces inégalités sont ensuite utilisées pour étudier les limites de l'Espace de Travail Statique (ETS) et de l'espace de travail Statique avec Torseur (ETST) du robot en fonction des paramètres géométriques du robot. Les inégalités sont également utilisées pour planifier des trajectoires elliptiques qui permettent au robot de sortir de l'ETST. Un exemple d'application est également présenté qui permet de mettre en application toutes les études et méthodes présentées précédemment.

Le troisième chapitre présente un RPSEC spatial translationnel à 3DDL. Comme le mécanisme du chapitre précédent, ce mécanisme utilise des câbles arrangés en parallélogrammes. Une étude de la cinématique de ce robot est présentée ce qui permet la résolution du PGD et du PGI. Cette étude permet ensuite de déterminer les lieux de singularité du robot ainsi que les possibles intersections entre les câbles du robot. Une modélisation de la dynamique du robot est par la suite effectuée qui permet de déterminer des conditions paramétriques qui assurent une tension dans les câbles. Ces conditions sont utilisées pour déterminer l'ETS du robot ainsi que son ETST. Une planification de trajectoire elliptique est également présentée pour ce robot.

Enfin, le dernier chapitre présente un prototype du robot présenté au troisième chapitre. Une méthodologie est d'abord élaborée qui permet de mettre en évidence les différences étapes nécessaires à la réalisation d'un tel prototype. Le robot est par la suite testé en le déplaçant à l'intérieur de son ETST de façon quasi-statique et en produisant des trajectoires de type elliptiques qui lui permettent de sortir de son ETST. Une analyse des résultats est ensuite présentée.

Chapitre 1

Revue de la littérature scientifique

1.1 Robots Parallèles Suspendus Entraînés par des Câbles (RPSEC)

L'un des premiers RPSEC à avoir été proposé dans la littérature en [1] est le NIST Robocrane. Ce robot est un intermédiaire entre une plateforme de Gough-Stewart et une grue mécanique. La figure 1.1 présente une photo de ce RPSEC. Comme une grue, il permet de déplacer des objets sur de grandes



FIGURE 1.1 – Le NIST Robocrane.(Photo provenant du site web : <https://www.nist.gov/nist-time-capsule/fixe-life-nist-help/helping-clean-disaster-inside-chernobyl-mega-tomb>, consulté le 08/04/2019, Auteur :Chernobyl Nuclear Power Plant)

distances puisque les câbles contrairement à des liens rigides peuvent avoir des longueurs quasi arbitraires. Son architecture similaire à celle d'une plateforme de Gough-Stewart lui permet en plus de changer l'orientation de son effecteur. Il s'agit d'une nette amélioration du concept original de la grue mécanique où l'effecteur est non contraint et peut osciller comme un pendule.

Le NIST Robocrane montre les nombreux avantages qu'ont les RPSEC comparativement aux robots sériels et aux autres types de robots parallèles :

- Ils peuvent avoir un très grand espace de travail qui est seulement limité par la longueur de leurs câbles. Cela permet des déplacements sur de très grandes distances. La SkyCam proposée en [9] est un excellent exemple d'application qui utilise cette propriété des RPSEC. Il s'agit d'un RPSEC à 4 moteurs et 4 câbles qui permet de déplacer une caméra équilibrée dynamiquement dans un vaste espace tel que l'intérieur d'un stade. Il est alors possible de filmer des événements sportifs ou artistiques avec une vue en plongée unique. La figure 1.2 présente la skycam qui filme un match de football de la NFL. Un autre exemple d'application qui utilise le grand



FIGURE 1.2 – La skycam utilisée pour filmer un match de la NFL. (Photo provenant du site web <http://www.sportingnews.com/us/nfl/news/patriots-falcons-fog-skycam-camera-view-angle-nbc-nfl-broadcasts/15dfvpz7afjgd1xsdj4097n5k2>, consulté le 08/04/19, Auteur : Billie Weiss / Stringer, 22 October, 2017)

espace de travail des RPSEC est le radiotélescope FAST qui a notamment été étudié en [42]. Ce radiotélescope chinois est le plus grand du monde. Un RPSEC est utilisé pour déplacer une antenne au-dessus d'une parabole de 500 m de diamètre afin de capter des ondes radio provenant de l'espace. La figure 1.3 présente une vue aérienne d'un modèle CAO du radiotélescope FAST.

- Les câbles spécialisés offrent une excellente résistance mécanique en tension de sorte qu'il est possible de soulever des charges importantes. Par exemple, dans l'article [33] portant sur la théorie et les applications des RPEC, est présenté le tableau présenté à la figure 1.4. Dans ce tableau, les deux RPECs qui soulèvent les charges les plus élevées sont des RPSECs.
- Ils sont facilement montables et démontables, car ils ne requièrent que le montage et le démontage des moteurs/poulies à une base fixe. Cela permet de concevoir des RPSEC pouvant être utilisés dans des situations d'urgence comme celui proposé en [26], [6] et [27]. La figure 1.5 présente le RPSEC proposé en [27] pour transporter des individus dans une situation d'urgence.

Un bon exemple d'application illustrant les avantages présentés précédemment est le RPSEC proposé en [2]. Ce RPSEC agit comme une imprimante 3D à grande échelle afin de construire des structures complexes à base de polyuréthane. L'utilisation de câbles permet d'avoir un grand espace de travail

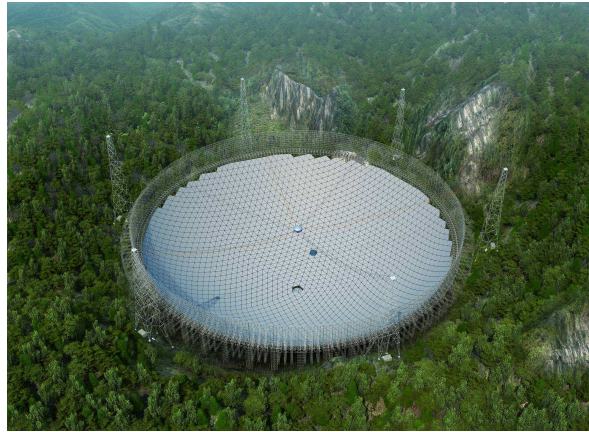


FIGURE 1.3 – Le radiotélescope FAST.(Source de la photo : <https://www.youtube.com/watch?v=J3Esw9nDQzE> - Space News - FAST Telescope, consulté le 08/04/19 Auteur : Fraser Kane)

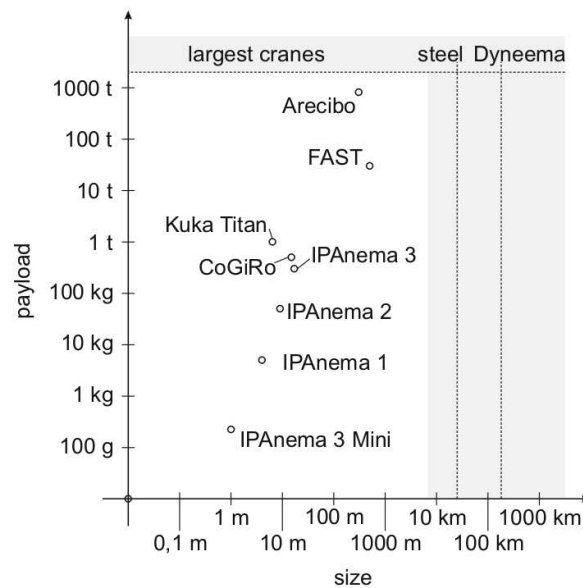


FIGURE 1.4 – Tableau montrant les capacités de divers RPEC à soulever des charges (tiré de [33])

en plus de déplacer un effecteur lourdement chargé. Il est également rapide d'installation. La figure 1.6 présente ce RPSEC. L'idée d'utiliser les RPSEC comme outils de construction a également été démontrée en [19] afin de construire des structures de grandes dimensions.

L'inconvénient principal des RPSEC est que les câbles ne peuvent soutenir que des efforts en tension. Pour cette raison, l'analyse de l'espace de travail des RPSEC est un sujet primordial qui a été étudié par de nombreux chercheurs qui ont proposé des méthodes pour déterminer l'espace dans lequel les RPEC peuvent déplacer leur effecteur sans perdre de tension dans leurs câbles.



FIGURE 1.5 – Exemple d'utilisation d'un RPSEC pour transporter des individus dans une situation d'urgence (Tiré de [27])



FIGURE 1.6 – RPSEC proposé par [2] pour faire de l'impression 3D.

1.2 Espace de travail des RPSEC

L'article [12] a été l'un des premiers articles portant sur l'analyse de l'espace de travail statique (ETS) des RPSECs, c'est-à-dire l'ensemble des poses où l'équilibre statique des RPSEC est maintenu lorsque tous les câbles du mécanisme sont en tension et que la seule force externe appliquée à l'effecteur est son propre poids. Selon leur définition de l'ETS, la tension dans chaque câble doit également se situer à l'intérieur d'un intervalle de tension prédéfini. Les robots qu'ils présentent dans leur premier article sont des robots plans. En dérivant les équations de l'équilibre statique, ils obtiennent des courbes

qui délimitent l'ETS des différents robots. Ces équations sont facilement obtenues du fait que les mécanismes étudiés sont plans et possèdent relativement peu de câbles. Similairement l'article en [34] présente l'étude de l'ETS d'un RPSECs, mais cette fois-ci spatial à 6 DDL. La complexité du plus grand nombre de câbles et de DDL fait que l'analyse de l'ETS est faite numériquement dans cet article. Pour ce faire, des conditions de tension sont dérivées des équations d'équilibre statique du robot et utilisées pour déterminer les limites de l'ETS. L'espace environnant le robot est par la suite discrétisé et chaque point est testé pour savoir s'il respecte les conditions de tension. L'ensemble des points qui respectent les conditions de tension donne l'allure de l'ETS. Cet article compare le volume de l'ETS pour différentes configurations géométriques et diverses orientations de l'effecteur.

Dans l'article [5], on propose plutôt le «Wrench Feasible Workspace» (WFW) qui représente l'ensemble des poses où l'équilibre statique du robot est maintenu lorsque tous les câbles du mécanisme sont à l'intérieur d'un intervalle de tension et que l'effecteur est en mesure d'appliquer un ensemble donné de forces et de moments appelé torseur sur son environnement. L'étude du WFW est encore davantage approfondie en [35] pour des RPSECs ayant un effecteur à masse ponctuelle.

Le concept est ensuite généralisé mathématiquement en [7] où l'on explique que le WFW est en réalité l'ensemble de toutes les poses dans l'espace cartésien où l'ensemble des torseurs requis est compris à l'intérieur du zonotope des torseurs disponibles. Cette formulation mathématique a permis le développement de nombreux outils de recherche concernant l'étude des espaces de travail des RP-SECS, notamment l'outil ARACHNIS présenté en [36] qui permet d'obtenir numériquement l'ETS et le WFW pour des RPECs ayant des arrangements géométriques arbitraires. La figure 1.7 suivante présente l'interface utilisateur d'ARACHNIS.

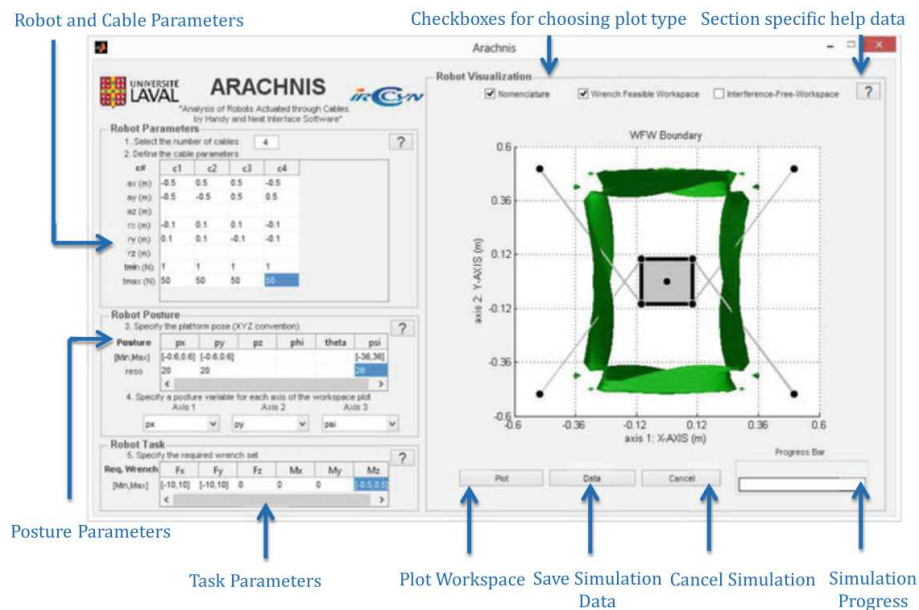


FIGURE 1.7 – Interface utilisateur d'ARACHNIS servant à déterminer les limites de l'ETS et du WFW pour des RPECs de géométries variées (tiré de [36]).

Les espaces de travail présentés précédemment tiennent compte du fait que l'effecteur est constamment en équilibre statique. Or, les RPECS ont également la possibilité de produire des trajectoires dynamiques tout en maintenant la tension dans leurs câbles.

1.3 Capacité des RPSEC à entreprendre des trajectoires dynamiques

Les capacités dynamiques des RPSEC ont été étudiées en profondeur en [3] où a été défini l'Espace Atteignable (EA). L'EA est défini comme l'ensemble des poses de l'espace cartésien où l'effecteur peut se trouver lorsqu'il subit une accélération donnée. L'EA n'est pas pleinement compris à l'intérieur de l'ETS de sorte qu'il est possible de sortir de l'ETS lorsque l'effecteur subit une accélération suffisamment importante. Il est cependant difficile d'utiliser l'EA pour produire des trajectoires puisque l'EA change en fonction de l'accélération de l'effecteur. Pour pallier ce problème, de nombreuses recherches ont porté sur la capacité des RPSEC à effectuer des trajectoires dynamiques données qui sortent de l'ETS. Dans un premier temps, un RPSEC plan a été présenté en [14] ayant comme effecteur une masse ponctuelle. Ce robot est muni de 2 moteurs et 2 câbles. La figure 1.8 présente le robot plan à masse ponctuelle. L'article présente une méthode permettant de déterminer des conditions algébriques

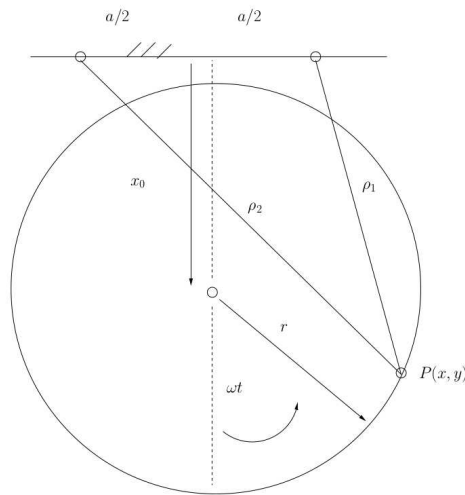


FIGURE 1.8 – RPSEC plan à 2DDL et à masse ponctuelle présenté par [14]. La figure présente le robot qui effectue une trajectoire circulaire qui déborde de l'ETS.

qui, lorsque respectées, assurent que les câbles du RPSEC sont tous sous tension. Ces conditions sont utilisées pour planifier des trajectoires elliptiques à l'extérieur de l'ETS. Une fréquence d'oscillation spéciale est également obtenue qui permet au robot d'entreprendre des trajectoires elliptiques ayant des amplitudes d'oscillation arbitrairement grandes. Le concept est repris en [15] mais pour un RPSEC spatial à masse ponctuelle muni de 3 moteurs et 3 câbles. Ce robot est présenté à la figure 1.9. Une méthode analogue à la méthode de l'article précédent est utilisée pour déterminer des conditions qui assurent la tension dans les câbles et qui sont utilisées pour planifier des trajectoires de nature elliptique. Comme pour le RPSEC plan, une fréquence d'oscillation spéciale est dérivée qui permet d'entreprendre des trajectoires elliptiques d'amplitude arbitraire. Les mêmes auteurs présentent par la

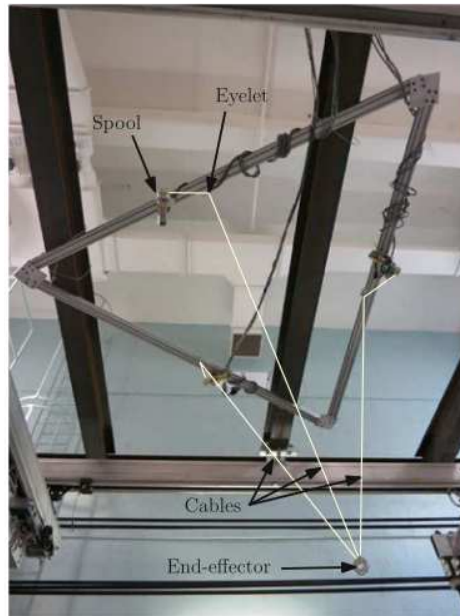


FIGURE 1.9 – RPSEC spatial à 3DDL et à masse ponctuelle présenté par [15].

suite un article portant sur des trajectoires de type point-à-point sortant de l'ETS pour un RPSEC plan à masse ponctuelle en [13]. L'article [18] présente ensuite une étude de la précision du robot spatial à 3DDL pendant l'exécution de trajectoires dynamiques. Les auteurs viennent à la conclusion que la précision d'exécution de trajectoires diminue plus la trajectoire s'éloigne du centre de l'ETS mais que la précision est acceptable considérant la dimension du robot. Concernant le même robot que celui présenté à la figure 1.9, de nombreux autres articles ont été présentés qui étudient ses capacités à produire des trajectoires dynamiques qui sortent de l'ETS. On notera par exemple les articles suivants : [23], [37], [22], [41], [40], [11], [24], [32], [31] et [10].

L'étude du robot présenté à la figure 1.9 est particulièrement intéressante puisque l'effecteur à masse ponctuelle limite le nombre de DDL à trois. Cependant, cet effecteur est très peu pratique pour des applications réelles de déplacement d'objets ou d'application d'efforts. Pour répondre à cette problématique, l'étude des capacités dynamiques des RPECs a également été faite pour des robots ayant des effecteurs à corps rigide. Les auteurs de l'article [23] ont d'abord présenté une étude portant sur un RPEC plan à 3DDL, 3 câbles et 3 moteurs dont l'effecteur est une tige sur laquelle les câbles s'attachent à des points distincts. La figure 1.10 présente ce robot. Les capacités de ce robot à effectuer des trajectoires de type elliptique sont présentées pour différentes orientations de l'effecteur. Une fréquence spéciale comme celle présentée en [14] est obtenue qui permet d'amplifier arbitrairement l'amplitude d'oscillation des trajectoires elliptiques pouvant être effectuées. L'étude des capacités dynamiques des RPECs ayant un effecteur à corps rigide a par la suite été présentée pour un robot spatial à 6DDL et ayant 6 moteurs en [21]. La figure 1.11 présente le robot utilisé dans l'article. Cette architecture à 6 câbles et 6 moteurs permet de contrôler à la fois la position de l'effecteur et son orientation tout en permettant à l'effecteur de sortir de l'ETS en effectuant des trajectoires elliptiques.

Cependant, comme mentionnées dans l'article, de nombreuses applications propices à l'utilisation de RPSEC requièrent simplement la possibilité de déplacer l'effecteur avec une orientation constante. Pour de telles applications, trois des six moteurs du robot présentés à la figure 1.11 serviraient simplement à contraindre l'orientation de l'effecteur. Pour diminuer le nombre de moteurs requis pour de telles applications tout en gardant un effecteur ayant un corps rigide, il est possible d'utiliser un arrangement des actionneurs (câbles) du robot en parallélogramme pour contraindre l'orientation.

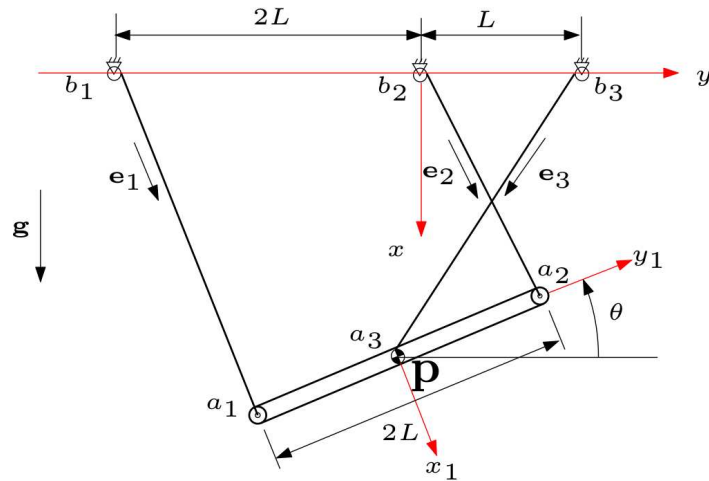


FIGURE 1.10 – RPSEC à 3DDL planaire avec un effecteur à corps rigide présenté en [23].

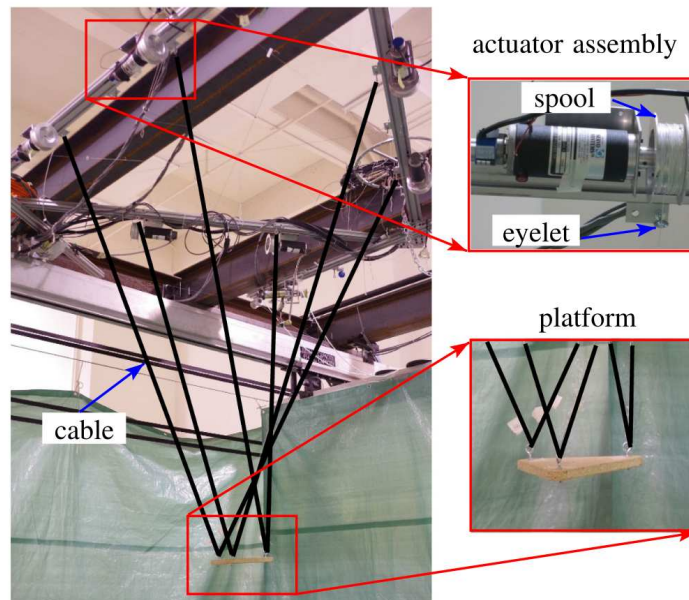


FIGURE 1.11 – RPSEC à 6DDL spatial avec un effecteur à corps rigide présenté en [21].

1.4 Robots parallèles utilisant des arrangements en parallélogramme

L'un des meilleurs exemples de robot parallèle utilisant un arrangement en parallélogramme pour contraindre l'orientation de son effecteur est le robot Delta introduit en [8]. Un exemple de robot Delta est présenté à la figure 1.12. Ce robot parallèle est l'un des plus utilisés en industrie à ce jour [28].



FIGURE 1.12 – Exemple de robot Delta : le SIAX D3 500 de SIPRO. (Source de la photo : www.sipro.vr.it/en/delta-robot/delta-robot-SIAX-D3-500.html, consulté le 08/04/19)

L'utilisation de parallélogrammes dans des applications de translation a été employée à plusieurs reprises après l'introduction du robot Delta. Notamment, en [25] on propose une grande variété de nouvelles architectures parallèles utilisant des arrangements de barres en parallélogramme. Dans le domaine des RPEC, le concept est également repris en [4] où l'on présente le BetBot, un RPEC spatial à 3DDL qui utilise trois arrangements de câbles en parallélogramme ainsi qu'un actionneur linéaire monté sur une articulation sphérique pour déplacer un effecteur en translation. Ce robot est présenté à la figure 1.13. L'avantage principal d'utiliser un actionneur linéaire supplémentaire est qu'il est possible de toujours assurer la tension dans les câbles. Cependant, puisqu'il est difficile de faire des actionneurs linéaires très longs, cette architecture limite le potentiel du robot à avoir un très grand espace de travail. Plus récemment, une nouvelle architecture de RPSEC proposée en [39] utilise également trois arrangements de câbles en parallélogramme afin de déplacer l'effecteur du robot. La disposition des arrangements de câbles en parallélogramme est cependant optimisée afin de maximiser la dimension de l'ETS du robot. Ce robot est présenté plus en détail au chapitre 3 de ce mémoire. La figure 1.14 présente une représentation du robot proposé en [39].

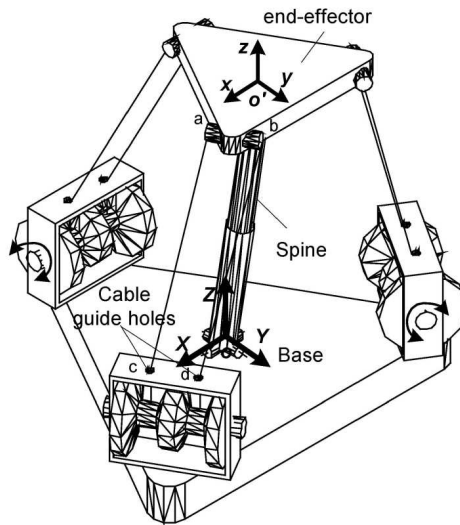


FIGURE 1.13 – Le robot BetBot introduit en [4].

1.5 Conclusion

Cette revue de la littérature a permis d'introduire quatre sujets qui seront présentés plus en détail dans les prochains chapitres. D'abord, une revue des RPSEC a permis de montrer que ces robots ont des qualités uniques qui sont propices à de nombreuses applications. Ensuite, une revue de la recherche concernant les espaces de travail des RPSEC a été présentée. Cette revue a permis de mettre en évidence deux espaces de travail principaux soit l'Espace de Travail Statique (ETS) et le Wrench Feasible Workspace (WFW). Ces espaces de travail sont fonction de la géométrie des RPSECS et peuvent être optimisés. Il a également été montré que de nombreux articles ont été écrits concernant les capacités dynamiques des RPSEC à masse ponctuelle. Cette architecture a été priorisée puisqu'elle facilite l'analyse des conditions algébriques qui assurent que les câbles sont en tension lors de l'exécution de trajectoires dynamiques. Certains articles ont également été écrits concernant les capacités dynamiques des RPSEC ayant un effecteur à corps rigide. Cependant, les architectures proposées dans ces articles utilisent un nombre de moteurs plus grand que le nombre de DDLs requis pour des tâches de translation particulièrement propices au RPSEC. Or, il a ensuite été montré qu'il est possible de contraindre l'orientation d'un robot parallèle à l'aide de chaînes cinématiques contenant des parallélogrammes. Cette technique a été utilisée par de multiples robots parallèles dont certains RPEC.

La présente revue de littérature permet de mettre en évidence la nécessité de développer des RPSECs translationnels pleinement contraints ayant un effecteur à corps rigide qui peuvent entreprendre des trajectoires dynamiques à l'extérieur de l'ETS en utilisant seulement autant de moteurs que de DDL en translation.

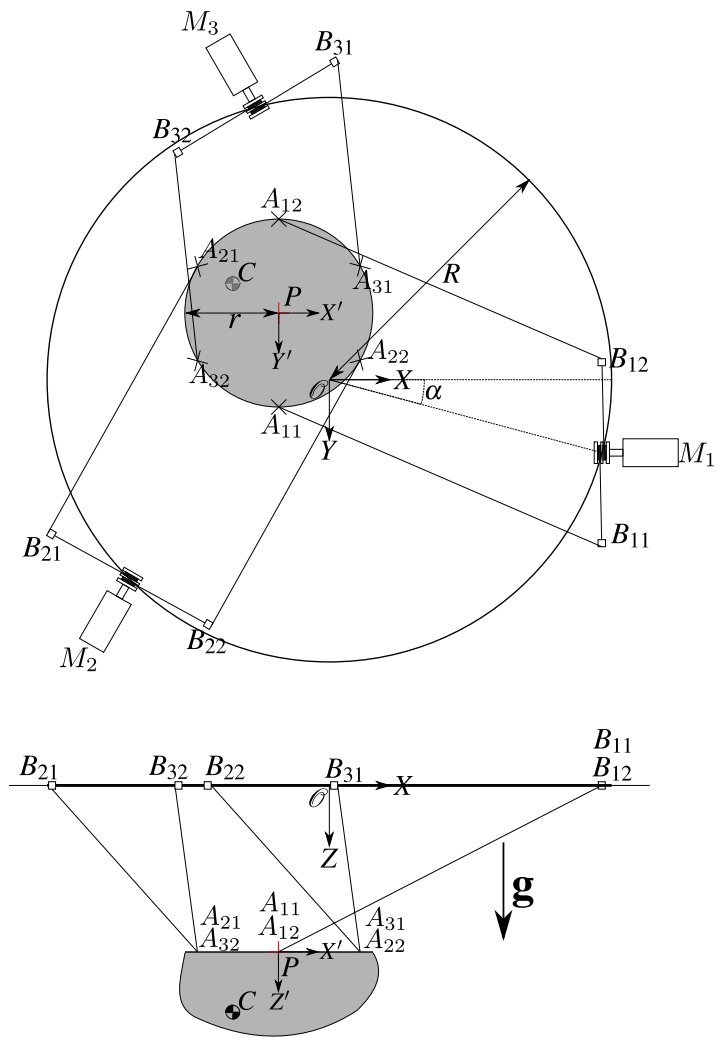


FIGURE 1.14 – Robot translationnel spatial à 3DDL introduit en [39].

Chapitre 2

Robot plan à 2 DDL

Le mécanisme présenté dans ce chapitre permet d’approfondir avec plus de facilité le concept de câbles arrangés en parallélogrammes, car son espace de travail est contraint à un plan ce qui facilite les analyses cinématiques et dynamiques. De plus, ce mécanisme sert de base de comparaison au mécanisme spatial du chapitre 3 qui présente de nombreuses similitudes avec le mécanisme plan au niveau cinématique et dynamique.

2.1 Géométrie proposée

La géométrie du robot est présentée à la figure 2.1 (Les variables présentes dans cette figure qui ne sont pas mentionnées dans cette section seront présentées dans la section portant sur la modélisation cinématique). Il s’agit d’un RPSEC à trois câbles dont chaque câble relie une poulie motorisée en B_1 , B_2 et B_3 à l’effecteur (désigné par une surface fermée grise) aux points respectifs A_1 , A_2 et A_3 . Les trois poulies sont attachées à une même base au-dessus de l’effecteur et ont des axes de rotation parallèles. Les deux câbles attachés aux extrémités de l’effecteur en A_2 et A_3 sont arrangés en parallélogramme et leurs poulies respectives, de mêmes dimensions, situées aux points B_2 et B_3 , sont contrôlées par un même moteur. L’arrangement en parallélogramme signifie que les câbles sont parallèles et de même longueur. De plus, les segments B_2B_3 et A_2A_3 sont également parallèles et de même longueur. Le troisième câble est attaché à l’effecteur au point A_1 qui se situe entre les points A_2 et A_3 . Sa poulie, située au point B_1 , est actionnée par un moteur indépendant.

La géométrie de ce mécanisme est particulièrement intéressante, puisqu’elle permet de contraindre cinématiquement le robot dans un plan avec seulement 2 moteurs lorsque les câbles sont maintenus sous tension.

La représentation géométrique du mécanisme de la figure 2.1 semble indiquer que le câble reliant B_1 à A_1 pourrait interférer avec le câble reliant B_2 à A_2 . Cependant, le croisement de ces câbles est la conséquence de la projection du mécanisme sur le plan XY . Un prototype de ce mécanisme utiliserait une paire de câbles en parallélogramme pour relier B_1 à A_1 .

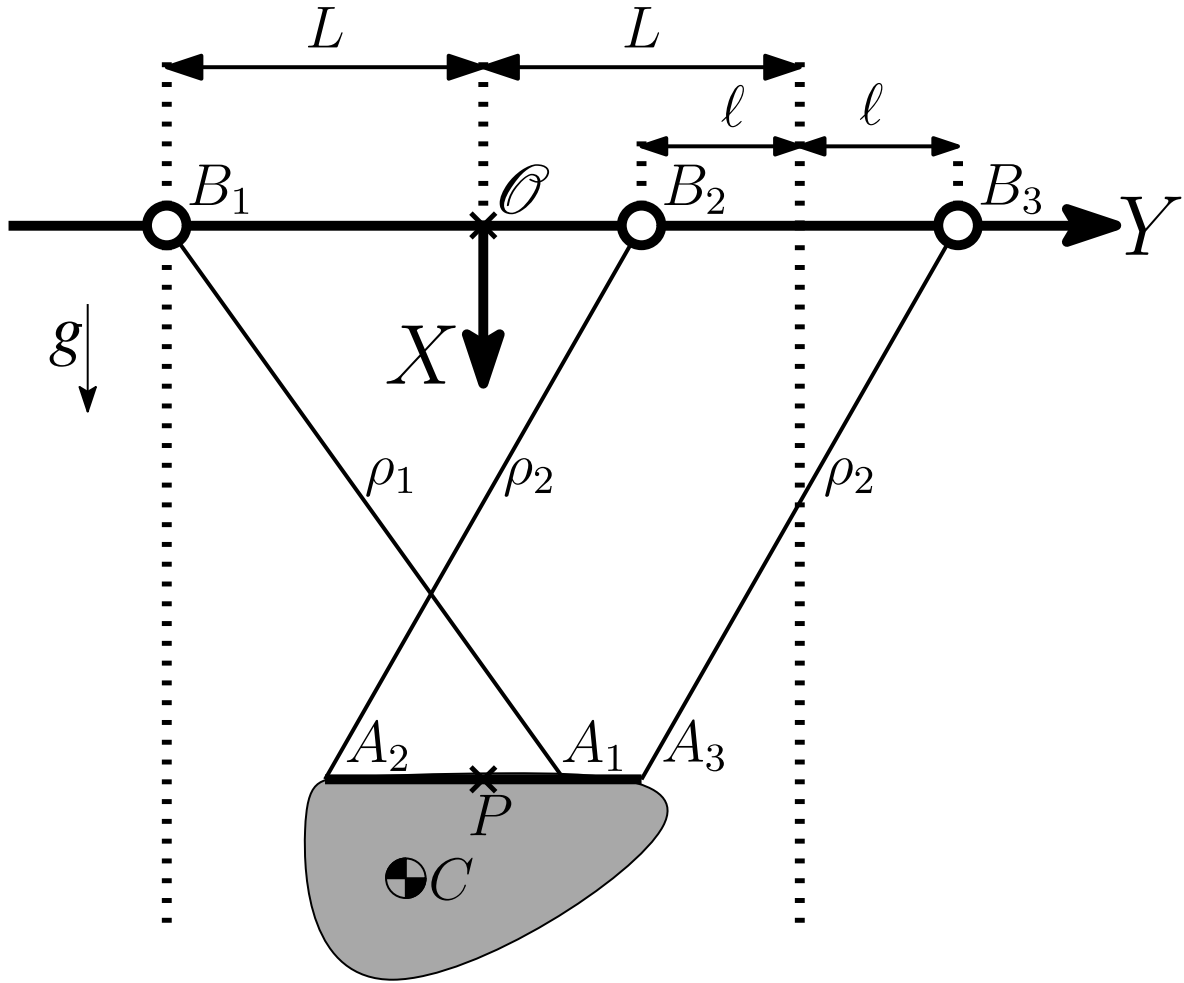


FIGURE 2.1 – RPSEC plan utilisant un arrangement de câbles en parallélogramme.

2.2 Degré de mobilité du mécanisme

Le degré de mobilité du mécanisme désigne le degré de liberté de la chaîne cinématique constituant le mécanisme [17]. Le critère de mobilité général de Tchebychev-Grübler-Kutzbach permet de déterminer le degré de mobilité d'un mécanisme à l'aide de la formule

$$l = d(n - h - 1) + \sum_{i=1}^h e_i \quad (2.1)$$

où l est le degré de liberté de la chaîne cinématique, d est la dimension du système de mouvement considéré ($d = 3$ dans un plan), n est le nombre de corps rigides dans la chaîne, h est le nombre d'articulations et e_i est le nombre de degrés de liberté permis par la i -ème articulation. Pour utiliser ce critère, il est primordial de considérer que les câbles du robot sont sous tension. Chaque câble peut alors être simplifié comme étant une jambe de type RPR, c.-à-d., une liaison rotoïde à la base, suivie d'une liaison prismatique qui représente la variation de longueur du câble, et une autre liaison rotoïde à l'effecteur. La représentation en graphe du mécanisme résultant de cette simplification est présentée

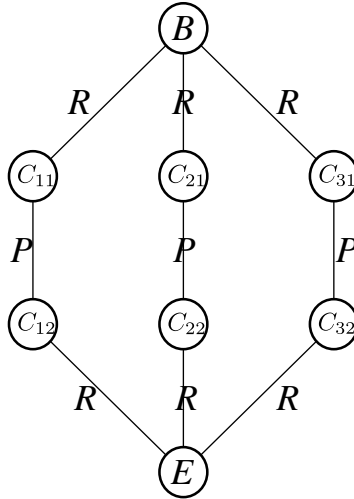


FIGURE 2.2 – Graphe d’un mécanisme parallèle avec trois branches *RPR*.

à la figure 2.2, où les cercles représentent des corps rigides et les lignes des articulations. Le corps rigide B est la base, les corps C_{ij} sont les corps associés aux câbles i (chaque câble est représenté par deux corps séparés par une liaison prismatique). En calculant directement le degré de mobilité, on trouve avec la figure 2.2 les valeurs : $n = 8$, $g = 9$, et $f_i = 1 \forall i$ pour un résultat de $l = 3$.

Cette valeur est erronée si on utilise l’architecture spéciale des câbles arrangés en parallélogramme. En effet, comme mentionné précédemment, cette architecture empêche la rotation et actionne les câbles formant le parallélogramme selon un même taux. Par conséquent, deux modifications doivent être apportées au graphe de la figure 2.2 afin de bien représenter le mécanisme. D’abord, les deux jambes *RPR* représentant les deux câbles parallèles doivent être représentées comme une seule jambe puisqu’elles sont actionnées par un seul moteur et donc couplées. Ensuite, puisque l’orientation de l’effecteur demeure constante en raison de l’architecture des câbles arrangés en parallélogramme, la dernière articulation *R* de la jambe *RPR* indépendante doit être enlevée. En effet, on considère le parallélogramme comme une seule jambe attachée en A_1 . La représentation en graphe du mécanisme est alors donnée par la figure 2.3. On trouve alors les valeurs $n = 5$, $h = 5$, $e_i = 1 \forall i$ pour un résultat de $l = 2$.

2.3 Modélisation cinématique du mécanisme

Afin de bien mettre en place les nombreuses étapes de la modélisation cinématique, il est important d’expliquer la signification de l’ensemble des variables présentées à la figure 2.1. D’abord, un référentiel fixe \mathcal{O} est situé sur la base où sont fixées les poulies actionnées. L’axe des Y du référentiel est colinéaire avec la base et croise les trois poulies en leur centre en pointant vers la droite. L’axe des X pointe verticalement vers le bas dans le même sens que la gravité (g). L’origine du référentiel fixe est située à une distance constante L de la poulie en B_1 . Le vecteur définissant la position de la poulie en B_1 est alors $\mathbf{b}_1 = [0, -L]^T$. L’origine est également située à une distance constante L du point

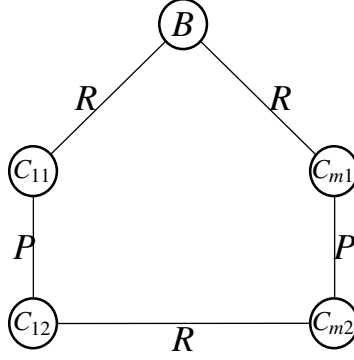


FIGURE 2.3 – Graphe équivalent au mécanisme parallèle plan.

milieu entre les deux poulies en B_2 et B_3 formant le parallélogramme. La distance séparant les poulies en B_2 et B_3 est définie comme étant 2ℓ . Les vecteurs donnant les positions constantes des poulies en B_2 et B_3 sont donc respectivement $\mathbf{b}_2 = [0, L - \ell]^T$ et $\mathbf{b}_3 = [0, L + \ell]^T$. La position de l'effecteur est donnée par le point P qui se situe à distance égale des points d'attache A_2 et A_3 sur l'effecteur. Il s'agit du point donnant la position de l'effecteur et, donc, le vecteur reliant l'origine au point P est donné par $\mathbf{p} = [x, y]^T$. L'orientation de l'effecteur est théoriquement constante tant et aussi longtemps que les câbles du mécanisme sont sous tension. Cependant, afin de maintenir l'équivalence entre les équations de la cinématique et de la statique du mécanisme, il est nécessaire de définir une matrice de rotation \mathbf{Q}_r qui représente l'orientation de l'effecteur par rapport au référentiel inertiel \mathcal{O} . Cette matrice sera mise égale à la matrice identité après la dérivation des équations de vitesse. Les vecteurs constants donnant la position des points d'attache A_2 et A_3 relativement au point P exprimés dans le référentiel de l'effecteur s'écrivent $\mathbf{a}_2 = [0, -\ell]^T$ et $\mathbf{a}_3 = [0, \ell]^T$. La position du point d'attache en A_1 du câble indépendant par rapport au point P exprimé dans le référentiel de l'effecteur est donné par $\mathbf{a}_1 = [0, a_y]$. La position du centre de masse de l'effecteur en C relativement au point P exprimé dans le référentiel de l'effecteur est donné par le vecteur constant $\mathbf{c} = [c_x, c_y]^T$. Les longueurs des câbles sont données par ρ_1, ρ_2 et ρ_3 .

2.3.1 Problème Géométrique Inverse (PGI)

Le PGI permet de déterminer la longueur des câbles du mécanisme en fonction de la position de l'effecteur. Il s'agit donc d'une étape clé afin de pouvoir contrôler le robot.

La première étape de résolution du PGI consiste à calculer une expression vectorielle pour les vecteurs partant des points B_i situés sur la base et allant vers leurs points d'attache respectifs en A_i sur l'effecteur. Cette expression est donnée par

$$\overrightarrow{B_i A_i} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

où $\overrightarrow{B_i A_i}$ est le vecteur partant du point B_i vers le point A_i . De l'équation précédente, on obtient ensuite la valeur de ρ_i en calculant la norme de $\overrightarrow{B_i A_i}$ à l'aide de l'expression

$$\rho_i = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)}, i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

2.3.2 Problème Géométrique Direct (PGD)

Le PGD permet de déterminer la pose de l'effecteur en fonction de la longueur des câbles. Puisque les câbles 2 et 3 sont tous les deux dans l'arrangement en parallélogramme, ils ont la même longueur et la même orientation de sorte que le problème géométrique est simplement un problème quadratique à deux équations et deux inconnues qui peut être résolu à l'aide des équations (2.3) où $i = 1$ et $i = 2$. Le système de deux équations à deux inconnues suivant est obtenu en élevant au carré les équations (2.3) pour $i = 1$ et $i = 2$ et en imposant que la matrice de rotation $\mathbf{Q}_r = \mathbf{I}_2$, où \mathbf{I}_2 désigne la matrice identité de dimension 2×2 . La forme scalaire de ce système d'équations est alors

$$x^2 + y^2 + E_1y + F_1 = 0, \quad (2.4)$$

$$x^2 + y^2 + E_2y + F_2 = 0, \quad (2.5)$$

où

$$E_1 = 2(a_y + L), \quad F_1 = (a_y + L)^2 - \rho_1^2 \quad (2.6)$$

$$E_2 = -2L, \quad F_2 = L^2 - \rho_2^2. \quad (2.7)$$

En soustrayant à l'équation (2.5) l'équation (2.4) et en isolant y , l'équation suivante est obtenue

$$y = \beta \quad (2.8)$$

où

$$\beta = \frac{F_1 - F_2}{E_2 - E_1}. \quad (2.9)$$

En substituant l'équation (2.8) dans l'équation (2.5), une équation quadratique qui est seulement fonction de x est obtenue. Les deux solutions de cette équation sont alors

$$x_1 = \sqrt{-(\beta^2 + E_2\beta + F_2)} \quad (2.10)$$

$$x_2 = -\sqrt{-(\beta^2 + E_2\beta + F_2)}. \quad (2.11)$$

Comme l'effecteur du mécanisme doit toujours être sous la base des poulies, seule la solution x_1 est valide. À l'aide des équations (2.10) et (2.8), il est possible de déterminer la position de l'effecteur en fonction de la longueur des câbles. La section suivante présente les équations de vitesse du mécanisme ce qui permettra par la suite de déterminer les lieux de singularité du mécanisme.

2.3.3 Équations de vitesse

Les équations présentées dans cette section sont seulement valides si les câbles du mécanisme sont tous en tension. Les équations de vitesse sont obtenues en dérivant les équations en (2.3) mises au carré. La dérivation prend la forme

$$\frac{d\rho_i^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left((\mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i) \right) \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \rho_i \dot{\rho}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T \mathbf{E} \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_i \dot{\phi}, i = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

où $\dot{\rho}_i$ et $\dot{\phi}$ sont respectivement la vitesse d'allongement du câble i et la vitesse angulaire de l'effec-
teur. En imposant $\mathbf{Q}_r = \mathbf{I}_2$ et en mettant les équations sous une forme matricielle, ce système à trois
équations prend la forme

$$\mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.14)$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)^T & (\mathbf{p} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_1 \\ (\mathbf{p} + \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)^T & (\mathbf{p} + \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_2 \\ (\mathbf{p} + \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3)^T & (\mathbf{p} + \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

où $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Afin de tenir compte de l'arrangement en parallélogramme des câbles 2 et 3, on
peut poser que $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2$, et les matrices et vecteurs de l'équation 2.15 peuvent alors être reformulés
comme

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)^T & (\mathbf{p} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_1 \\ (\mathbf{p} + \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)^T & (\mathbf{p} + \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_2 \\ -(\mathbf{p} - \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_3)^T & (\mathbf{p} - \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

En utilisant les matrices en 2.16 qui tiennent compte de l'arrangement en parallélogramme des câbles,
il est possible de montrer que le changement d'orientation de la plateforme $\dot{\phi}$ est nécessairement nul
tant et aussi longtemps que $x > 0$. Pour ce faire, on soustrait à la deuxième ligne la troisième ligne de
l'équation 2.14 ce qui donne

$$0 = (2\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)^T \dot{\mathbf{p}} + (2\mathbf{p} - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_2 \dot{\phi}. \quad (2.17)$$

Or, les équations se simplifient puisque

$$(2\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) = 0, \quad (2.18)$$

$$(2\mathbf{p} - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{a}_2 = 2 \begin{bmatrix} x & y - \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \end{bmatrix} = 2x\ell. \quad (2.19)$$

Ainsi, l'expression en 2.17 devient

$$2x\ell \dot{\phi} = 0. \quad (2.20)$$

Si $x \neq 0$ et $\ell \neq 0$ et que les câbles du mécanisme restent en tension, alors $\dot{\phi} = 0$ est assuré cinémati-
quement.

2.3.4 Lieux de singularité

À l'aide des équations de vitesse de la section précédente sous forme matricielle, il est possible de déterminer les lieux de singularité du mécanisme en calculant les déterminants respectifs des matrices \mathbf{K} et \mathbf{J} . Les lieux de singularité sont des positions de l'effecteur qui sont à éviter, car le contrôle du mécanisme, à ces positions, présente un défi important.

Singularité de type I

Ce type de singularité advient lorsque la matrice \mathbf{K} est singulière, c'est-à-dire lorsque $\det(\mathbf{K}) = 0$. Il est alors possible de produire des vitesses articulaires infinitésimales sans produire de vitesses cartésiennes à l'effecteur. Pour le présent mécanisme, ce type de singularité advient lorsque

$$\rho_1 \rho_2^2 = 0. \quad (2.21)$$

Cette équation nécessite que ρ_1 , ρ_2 ou ρ_1 et ρ_2 soit égale à 0. L'éventualité que l'une de ces situations advienne est simplement évitée si l'effecteur reste sous la base des poulies.

Singularité de type II

Ce type de singularité survient lorsque la matrice \mathbf{J} est singulière, donc lorsque $\det(\mathbf{J}) = 0$. Dans cette position, il est alors possible de produire des mouvements infinitésimaux à l'effecteur sans changer la position des actionneurs. Pour le mécanisme à l'étude, cette singularité advient lorsque

$$2L + a_y = 0. \quad (2.22)$$

Dans une telle configuration, les trois câbles du mécanisme deviennent parallèles ce qui entraîne une vitesse incontrôlable le long de l'axe Y . La figure 2.4 suivante présente ce à quoi ressemble cette singularité.

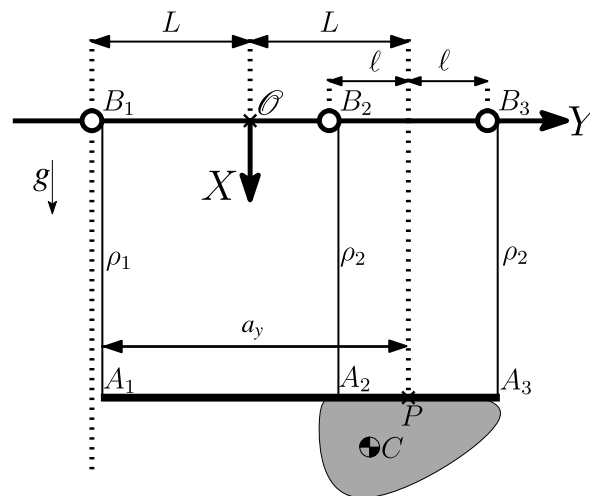


FIGURE 2.4 – Allure de la singularité de type II.

2.4 Modélisation dynamique

La modélisation dynamique du système permet de mettre en relation les forces agissant sur un système avec les accélérations de ce système. Cette modélisation est basée sur les équations de Newton-Euler qui prennent la forme vectorielle suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{cm} \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

où \mathbf{F} est le vecteur de la somme des forces agissant sur le centre de masse du système, \mathbf{G} est le vecteur de la somme des moments agissant sur le système, m est la masse du système, \mathbf{I}_k est une matrice identité de dimension k où k est le nombre de degrés de liberté en translation du système, \mathbf{I}_{cm} est le tenseur des moments d'inertie du système par rapport à son centre de masse, $\ddot{\mathbf{p}}$ est le vecteur des accélérations du centre de masse du système exprimé dans un référentiel inertiel, $\boldsymbol{\alpha}$ est le vecteur des accélérations angulaires du système et $\boldsymbol{\omega}$ représente le vecteur des vitesses angulaires du système. Comme présenté précédemment dans la dérivation des équations de vitesse, si l'effecteur demeure sous la ligne des poulies, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Puisque le robot est plan, le vecteur \mathbf{F} n'a que deux composantes de sorte que \mathbf{I}_k est une matrice identité de dimension deux et le vecteur \mathbf{G} devient un scalaire. L'application de l'équation (2.23) à l'effecteur du robot s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 (-f_i \mathbf{e}_i) + m\mathbf{g} + \boldsymbol{\tau}_e \\ \sum_{i=1}^3 (\mathbf{c} - \mathbf{a}_i)^T \mathbf{E} (-f_i \mathbf{e}_i) + M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\ddot{\mathbf{p}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

où

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i}{\rho_i}, i = 1, 2, 3 \quad (2.25)$$

sont des vecteurs unitaires parallèles aux câbles respectifs et partant de leur point B_i respectif, où f_i représente la tension dans le câble i (le câble i désigne le câble partant du point B_i vers le point A_i), où $\ddot{\mathbf{p}}$ désigne le vecteur des accélérations exprimé dans le repère de \mathcal{O} , où m est la masse équivalente de l'effecteur, où $\mathbf{g} = [g, 0]^T$ est le vecteur de l'accélération gravitationnelle où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

est une matrice permettant de faire des produits croisés dans un plan et où $\mathbf{c} = [c_x, c_y]^T$ est le vecteur de position du centre de masse relatif au point P . Le vecteur $\boldsymbol{\tau}_e$ représente une force externe au système appliquée au centre de masse de l'effecteur et M_e représente un moment externe au système appliqué au centre de masse de l'effecteur. Ces deux éléments forment les composantes d'un tenseur d'action \mathcal{T} externe qui est modélisé afin de pouvoir étudier l'aptitude du robot à recevoir des forces et des moments de son environnement. La figure 2.5 suivante présente un diagramme de corps libre de l'effecteur qui met en évidence l'ensemble des forces modélisées mentionnées précédemment qui sont appliquées sur l'effecteur du robot.

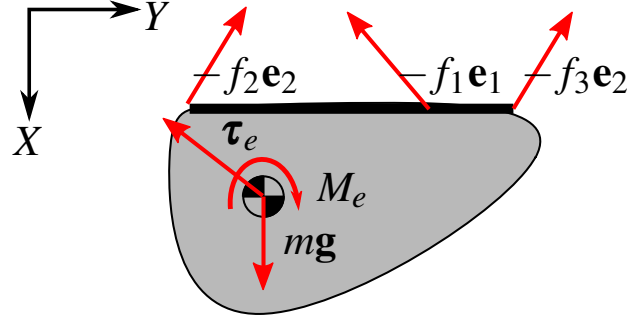


FIGURE 2.5 – Diagramme de corps libre de l'effecteur.

L'équation (2.24) peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{M}\mathbf{f} = \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.27)$$

où

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} m(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{p}}) \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} m(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{p}}) + \boldsymbol{\tau}_e \\ M_e \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\delta_i = (\mathbf{a}_i - \mathbf{c})^T \mathbf{E}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.31)$$

L'inversion de la matrice \mathbf{M} dans l'équation (2.27) permet d'obtenir des expressions pour les tensions dans les câbles en fonction de l'accélération, de la position de l'effecteur et du torseur d'action appliqué sur l'effecteur. Cette inversion s'écrit

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\gamma}. \quad (2.32)$$

Le calcul de la matrice inverse \mathbf{M}^{-1} peut se faire à l'aide de la méthode des cofacteurs qui prend la forme

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{Adj}(\mathbf{M})}{\det(\mathbf{M})}, \quad (2.33)$$

où $\text{Adj}(\mathbf{M})$ est la matrice adjointe de \mathbf{M} et $\det(\mathbf{M})$ est son déterminant. Cependant, il faut d'abord déterminer si \mathbf{M} n'est pas singulière, c'est-à-dire, si $\det(\mathbf{M}) \neq 0$. Le déterminant de la matrice se calcule

$$\det(\mathbf{M}) = \delta_1(\mathbf{e}_2^T \mathbf{E}\mathbf{e}_3) - \delta_2(\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}\mathbf{e}_3) + \delta_3(\mathbf{e}_1^T \mathbf{E}\mathbf{e}_2). \quad (2.34)$$

Or, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ puisque les câbles 2 et 3 sont parallèles. Par conséquent, l'équation (2.34), après substitutions des δ_i par leurs expressions respectives devient

$$\det(\mathbf{M}) = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_1^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2). \quad (2.35)$$

Pour que l'expression à la droite de l'égalité (2.35) soit égale à 0, il faut que l'une des éventualités suivantes se produise :

1. Si $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$. Cependant, si l'effecteur n'est pas une masse ponctuelle, cette éventualité n'est pas possible.
2. Si $\mathbf{e}_2 = 0$. Cette éventualité est coïncidente avec la singularité de type I présentée précédemment. Si l'effecteur reste sous la base des poulies, \mathbf{e}_2 ne sera jamais égale à 0.
3. Si $\mathbf{e}_1 = 0$. La même logique que pour le point précédent s'applique.
4. Si $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = 0$. Cela advient lorsque $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)$ devient colinéaire avec \mathbf{e}_2 . Le seul endroit où cela se produit est à la hauteur de la base des poulies. Par conséquent, si l'effecteur reste sous la base des poulies, cette éventualité ne peut pas se produire.
5. Si $\mathbf{e}_1^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = 0$. Pour que cela se produise, il faudrait que \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 deviennent colinéaires. Par conséquent, si l'effecteur demeure sous la base des poulies, cette éventualité n'advient jamais.

Plusieurs des éventualités dans la liste précédente sont coïncidentes avec la situation où l'effecteur est à la hauteur de la base des poulies. Or, si l'effecteur demeure sous cette base, le signe des termes composants le déterminant de la matrice \mathbf{M} demeure constant, peu importe la position sous la base des poulies. En effet, $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2$ est toujours positif tandis que $\mathbf{e}_1^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = 0$ est toujours négatif. Par conséquent, $\det(\mathbf{M})$ est toujours négatif.

La nature des câbles fait qu'ils doivent toujours être sous tension afin de maintenir le plein contrôle de l'effecteur, et ce, peu importe la position de l'effecteur. Mathématiquement, cette condition s'écrit

$$\mathbf{f} \succ \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

où \succ désigne l'inégalité pour chaque composante de \mathbf{f} . Considérant cette condition, l'équation (2.32) et le fait que $\det(\mathbf{M}) < 0$ lorsque l'effecteur se situe sous la base des poulies, il est possible d'écrire une condition mathématique vectorielle en fonction de la position, l'accélération de l'effecteur et le torseur d'action appliqué à l'effecteur qui assure que les câbles du mécanisme sont toujours en tension. Cette condition prend la forme

$$\text{Adj}(\mathbf{M}) \boldsymbol{\gamma} \prec \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

La matrice adjointe $\text{Adj}(\mathbf{M})$ se calcule alors comme

$$\text{Adj}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^T \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

La forme scalaire de (2.37) est un système de 3 inégalités qui s'écrit

$$(m(g - \ddot{x}) + \tau_x)(U_{1i} + U_{2i}y) + (m\ddot{y} - \tau_y)(U_{3i} + U_{2i}x) + U_{4i}M_e < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.42)$$

où

$$\begin{aligned} U_{11} &= -L, & U_{12} &= a_y(c_y - L) + 2Lc_y - \ell(a_y + L), & U_{13} &= a_y(L - c_y) - 2Lc_y - \ell(a_y + L), \\ U_{21} &= 1, & U_{22} &= a_y - \ell, & U_{23} &= -(a_y + \ell), \\ U_{31} &= 0, & U_{32} &= c_x(2L + a_y), & U_{33} &= -U_{32}, \\ U_{41} &= 0, & U_{42} &= (2L + a_y), & U_{43} &= -U_{42}, \end{aligned}$$

où τ_x et τ_y sont respectivement les composantes selon l'axe X et l'axe Y de la force $\boldsymbol{\tau}_e$, où \ddot{x} et \ddot{y} sont les composantes de l'accélération de l'effecteur et où c_x et c_y sont les composantes du vecteur de position du centre de masse par rapport au point P . Lorsque ces inégalités sont toutes satisfaites, la tension dans les câbles est assurée. Ces inégalités sont donc les critères principaux pour déterminer s'il est possible d'entreprendre une certaine trajectoire ou encore s'il est possible de rester au repos à une certaine position.

La méthode utilisée afin d'obtenir les conditions de tension est la même que celle utilisée dans de nombreux articles portant sur les mécanismes à câbles suspendus dont notamment ceux de [14],[15], [13] et [31]. Plus particulièrement, dans l'article présenté par [14], un mécanisme à câble suspendu dont l'effecteur est une masse ponctuelle est présenté. Les conditions de tension qui sont développées dans cet article ne tiennent pas compte de la présence d'un torseur d'action supplémentaire à l'effecteur. En comparant les conditions de tension en (2.42) et les conditions de tension du mécanisme plan à masse ponctuelle, on remarque qu'en mettant $a_y = c_y = c_x = \tau_x = \tau_y = M_e = 0$, on obtient exactement les mêmes conditions de tension qui prennent la forme

$$(g - \ddot{x})(y - L) + \ddot{y}x < 0 \quad (2.43)$$

$$(g - \ddot{x})(y + L) + \ddot{y}x > 0. \quad (2.44)$$

Dans cette configuration, le robot a son centre de masse au point P , c'est-à-dire à mi-distance entre les point B_2 et B_3 , le point d'attache B_1 se trouve également sur le point P et aucune force ou moment externe n'est appliqué sur l'effecteur. Cette comparaison des conditions de tension avec le modèle plus

simple de masse ponctuelle permet de valider les conditions de tension en (2.42) en plus d'illustrer un cas particulier où le mécanisme devient équivalent à un mécanisme à masse ponctuelle avec deux câbles.

La section suivante utilise les inégalités en (2.42) afin de déterminer l'ensemble des positions du centre de masse où l'effecteur peut être maintenu au repos.

2.5 Espace de travail statique

Le respect des inégalités en (2.42) permet d'assurer la tension dans les câbles du mécanisme en considérant la position, les accélérations ainsi que le torseur d'action de l'effecteur. Bien que ces équations soient la forme la plus générale possible, le nombre de variables qui les composent rend l'étude de ces équations assez difficile. À des fins de complexification graduelle, cette section étudie une forme simplifiée des équations afin de déterminer l'Espace de Travail statique (ETS), c'est-à-dire l'ensemble des positions du point P où l'effecteur peut être au repos par rapport au référentiel inertiel (dans le cas présent, \mathcal{O}) sans subir d'accélération autres que l'accélération gravitationnelle et sans recevoir de torseur d'action. Les conditions de tension de l'ETS sont une forme simplifiée des conditions en (2.42) car elles sont obtenues en posant $\ddot{x} = \ddot{y} = \tau_x = \tau_y = M_e = 0$. Les inégalités deviennent alors

$$U_{1i} + U_{2i}y < 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.45)$$

Le respect de ces inégalités assure que pour une position de l'effecteur donnée et un arrangement géométrique donné, le robot peut rester en équilibre statique si aucun torseur d'action externe n'est appliqué. En isolant la variable y dans les inégalités (2.45) précédentes, et en utilisant la règle que le point P de l'effecteur doit rester sous l'axe des poulies, l'ETS peut être mathématiquement défini comme

$$\text{ETS} \begin{cases} y \in \left] \max\left(-\frac{U_{12}}{U_{22}}, -\frac{U_{13}}{U_{23}}\right), L \right[, \\ x > 0, \end{cases} \quad (2.46)$$

où $\max()$ est une fonction qui retourne la valeur maximale de ses arguments. Comme mentionné précédemment, le point A_1 est situé entre les points A_2 et A_3 . Cela implique que le paramètre a_y est limité à l'intervalle $a_y \in]-\ell, \ell[$. Cette limitation du paramètre a_y implique également une limitation du paramètre c_y à l'intervalle $]-\ell, \ell[$. En effet, si le point A_1 se situe entre les points A_2 et A_3 , alors le centre de masse doit également se situer entre les points A_2 et A_3 car sinon, les moments appliqués par chaque câble autour du centre de masse seraient tous de même direction ce qui empêcherait l'effecteur d'avoir une orientation constante. Ce choix arbitraire permet de contraindre l'analyse de l'influence du paramètre a_y à un intervalle fermé plutôt que ouvert. La limitation de a_y à l'intervalle $]-\ell, \ell[$ permet également d'assurer que les conditions $i = 2$ et $i = 3$ en (2.45) forment les bornes inférieures potentielles de l'intervalle en (2.46) puisque en isolant y dans les conditions, la division par B_2 et U_{23} change respectivement le sens des inégalités $i = 2$ et $i = 3$ en (2.45) car ces termes ont des valeurs négatives lorsque a_y est limité à l'intervalle $]-\ell, \ell[$.

La borne supérieure de l'intervalle en (2.46) est toujours coïncidente avec la position, $y = L$ car il s'agit du point où les deux câbles parallèles sont verticaux. À ce moment, l'ensemble du poids de l'effecteur est supporté par ces deux câbles tandis qu'aucune tension n'est présente dans le câble indépendant. La borne inférieure de l'intervalle en (2.46) est coïncidente avec la position en y où l'un des deux câbles parallèles perd complètement sa tension. La fonction $\max()$ permet ainsi de distinguer lequel des deux câbles sera lâche en premier et délimitera donc en premier l'espace de travail statique.

Afin de bien visualiser la relation entre l'intervalle (2.46) et la tension dans les câbles du mécanisme, la figure 2.6 présente l'évolution de la tension dans les câbles en fonction de la position en y de l'effecteur. L'abscisse de la figure présente la position de l'effecteur en y divisé par L . Ce rapport

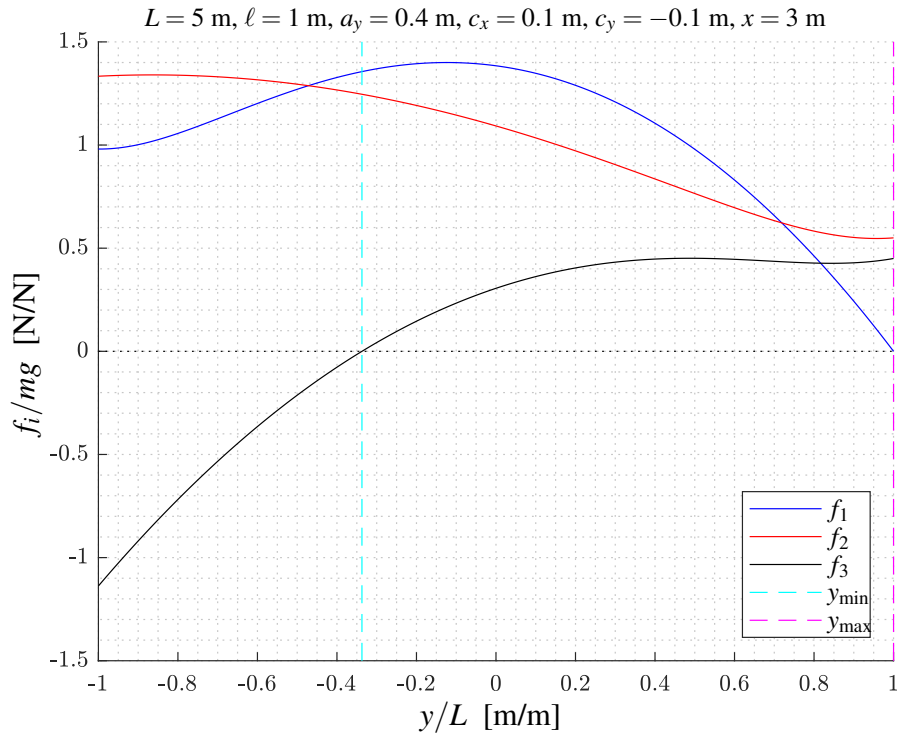


FIGURE 2.6 – Tension dans les câbles en fonction de la position statique en y .

permet de faire abstraction de l'ordre de grandeur de l'espace de travail en y . Les ordonnées représentent l'évolution de la tension dans les câbles divisée par le poids de l'effecteur mg . Cette quantité est renommée tension relative pour faciliter l'écriture. Les courbes pleines bleues, rouges et noires représentent respectivement les tensions relatives dans les câbles 1, 2 et 3. La ligne en trait discontinu magenta, y_{max} désigne la borne supérieure de l'intervalle en (2.46). La ligne en trait discontinu cyan, y_{min} , représente, quant à elle, la borne inférieure. Les valeurs des paramètres géométriques du mécanisme (L, ℓ, a_y, c_x, c_y) sont toutes définies dans le haut de la figure.

La ligne y_{min} croise la ligne de tension nulle en pointillé à la même position que la courbe montrant la tension relative du câble 3. Dans cette configuration du mécanisme, le câble 3 est donc celui qui limite l'espace statique de travail. La ligne y_{max} croise la ligne de tension nulle au point $y = L$, ce

qui coïncide avec l'intersection entre la courbe de tension relative du câble 1 avec la ligne de tension nulle. Par conséquent, à cette position, c'est le câble 1 qui limite l'espace de travail statique.

Le paramètre c_x n'a aucune influence sur l'espace statique de travail. Cela est dû au fait que la distance entre chaque point d'attache $A_i, i = 1, 2, 3$ et le centre de masse C projetée sur l'axe X est égale. Par conséquent, chaque « levier » de moment le long de l'axe X est équivalent, et l'équilibre, pour cette composante du moment est simplement conservée si la somme des forces, projetée sur l'axe des Y , est égale à 0.

Largeur de l'ETS

D'après l'intervalle en (2.46) définissant l'ETS, la largeur de l'espace de travail statique \mathcal{L} se calcule

$$\mathcal{L} = L - \max\left(-\frac{U_{12}}{U_{22}}, -\frac{U_{13}}{U_{23}}\right). \quad (2.47)$$

Dans l'équation (2.47), \mathcal{L} est fonction des paramètres L, ℓ, a_y et c_y et peut donc être utilisé afin de déterminer quelle combinaison des paramètres géométriques maximise la largeur de l'ETS.

Un bon début afin d'optimiser la largeur de l'ETS est d'observer comment les valeurs $-\frac{U_{12}}{U_{22}}$ et $-\frac{U_{13}}{U_{23}}$ évoluent en fonction de variations des valeurs de l'arrangement géométrique. Pour ce faire, on commence par définir deux grandeurs, \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 qui sont définies comme suit

$$\mathcal{L}_2 = L + \frac{U_{12}}{U_{22}} = \frac{(2L + a_y)(c_y - \ell)}{a_y - \ell} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{L}_3 = L + \frac{U_{13}}{U_{23}} = \frac{(2L + a_y)(c_y + \ell)}{a_y + \ell}. \quad (2.49)$$

En mettant $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3$, on obtient $a_y = c_y$. En substituant a_y pour c_y dans l'une ou l'autre des équations \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 , la largeur de l'espace de travail lorsque $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3$ est obtenue. Cette nouvelle largeur est ici nommée \mathcal{L}_m et prend la valeur

$$\mathcal{L}_m = 2L + c_y. \quad (2.50)$$

Rapidement, on remarque que sur l'intervalle $c_y \in]-\ell, \ell[$, la valeur maximale que peut prendre \mathcal{L}_m est $2L + \ell$. Si \mathcal{L}_m est l'expression de la plus grande valeur possible de \mathcal{L} pour un arrangement géométrique de l'effecteur, alors $2L + \ell$ est également la valeur maximale de \mathcal{L} . Si l'on définit deux valeurs ΔL_{m2} et ΔL_{m3} comme

$$\Delta L_{m2} = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_2 = \frac{(2L + \ell)(a_y - c_y)}{a_y - \ell} \quad (2.51)$$

$$\Delta L_{m3} = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_3 = \frac{(2L - \ell)(a_y - c_y)}{a_y + \ell}, \quad (2.52)$$

qui représentent la différence entre \mathcal{L}_m et \mathcal{L}_2 et entre \mathcal{L}_m et \mathcal{L}_3 respectivement, on remarque que ces deux valeurs n'ont généralement pas le même signe au même moment¹. Cela veut dire que lorsque

1. Le terme «généralement» est ici utilisé puisque lorsque $\ell = 2L$, il est possible d'avoir un même signe pour ΔL_{m2} et ΔL_{m3} . Il s'agit cependant d'un cas dégénéré du mécanisme où aucun mouvement selon l'axe des Y ne serait possible.

\mathcal{L}_2 croît par rapport à \mathcal{L}_m , \mathcal{L}_3 décroît par rapport à \mathcal{L}_m et vice versa. Puisque l'on garde seulement la plus petite des valeurs de \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 et que ces deux valeurs croissent et décroissent par rapport à \mathcal{L}_m , \mathcal{L}_m est donc l'expression de la plus grande largeur de l'ETS pour un arrangement géométrique donné et la plus grande valeur possible de \mathcal{L} est $2L + \ell$ et advient lorsque $a_y = c_y = \ell$. Ce résultat aurait pu être déduit par simple inspection de la figure 2.1. En effet, lorsque la condition $a_y = c_y = \ell$, le robot devient équivalent à un robot à masse ponctuelle avec seulement deux câbles, les câbles 1 et 3. La figure 2.7 suivante présente le mécanisme dans cette condition en mettant en évidence le robot équivalent à deux câbles. Dans cette condition, les vecteurs de tension dans les câbles 1 et 3 passent par le centre de masse de sorte qu'ils n'appliquent aucun moment sur le centre de masse. De plus, puisque la force due au poids de l'effecteur passe également par le centre de masse, la tension dans le câble 2 est nulle.

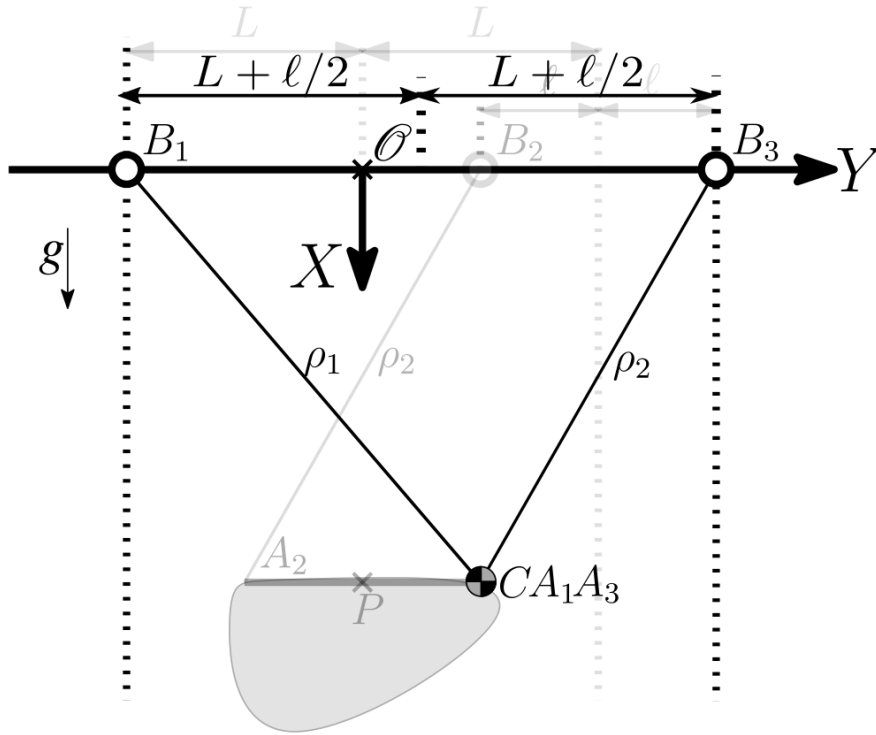


FIGURE 2.7 – Disposition géométrique maximisant la largeur de l'espace de travail statique.

Puisque \mathcal{L} est une grandeur nécessairement positive, la valeur minimale qu'elle peut prendre est de 0. L'arrangement géométrique qui minimise \mathcal{L} est alors obtenu lorsque \mathcal{L}_2 ou \mathcal{L}_3 sont égales à 0. Par observation des équations (2.48) et (2.49), on remarque que les deux conditions qui résultent en une largeur de l'ETS nulle sont

$$c_y = \pm \ell, \quad a_y \neq c_y. \quad (2.53)$$

Ce résultat aurait également pu être déduit par inspection de la figure 2.1. En effet, dans l'une ou l'autre des possibilités en (2.53), le robot devient équivalent à un pendule qui est suspendu seulement au câble

2 ou au câble 3 respectivement. La figure 2.8 présente le robot dans une configuration où $c_y = -\ell$ et $a_y = \ell$ en mettant en évidence le pendule. Dans cette condition, les câbles 1 et 3 appliquent leur tension à partir du même point sur l'effecteur du robot et ont, par conséquent, le même levier. À toutes les positions sous la base des poulies, ces câbles appliquent donc des moments dans la même direction. Or, le câble 2 n'applique aucun moment sur l'effecteur puisque son point d'attache est coïncident avec le centre de masse de l'effecteur. Les tensions dans les câbles 1 et 3 sont alors nulles, car l'ensemble de la force nécessaire à l'équilibre statique passe dans le câble 2. Cependant, puisque seul le câble 2 est en tension, celui-ci est nécessairement vertical afin de conserver un équilibre statique (aucune autre force n'est appliquée sur l'effecteur dans l'axe des Y). Comme il s'agit de la seule configuration possible pour le robot dans cette condition, la largeur de l'espace statique est alors nulle.

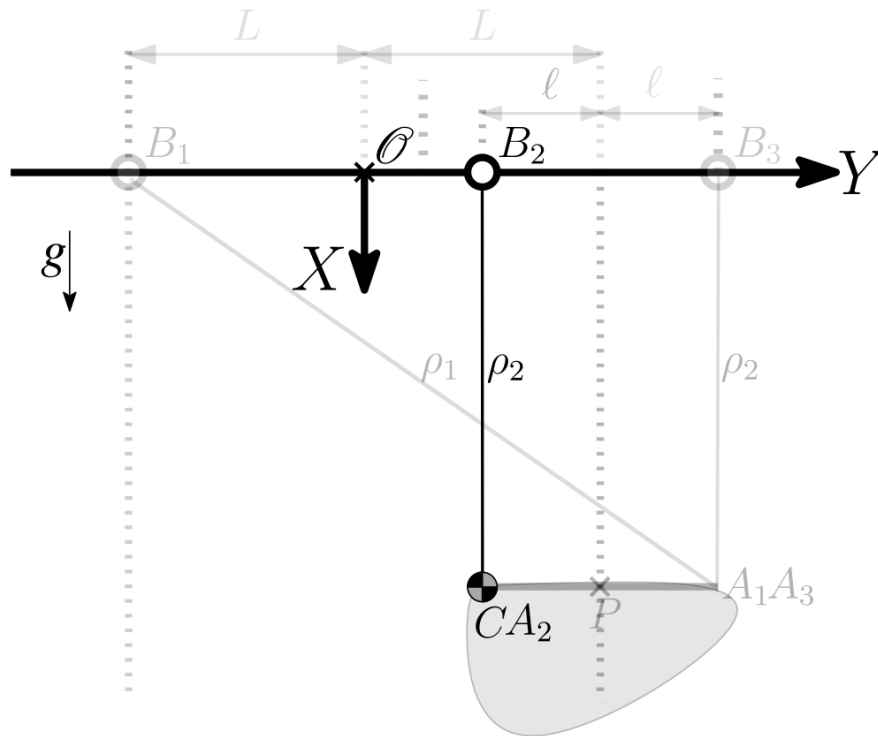
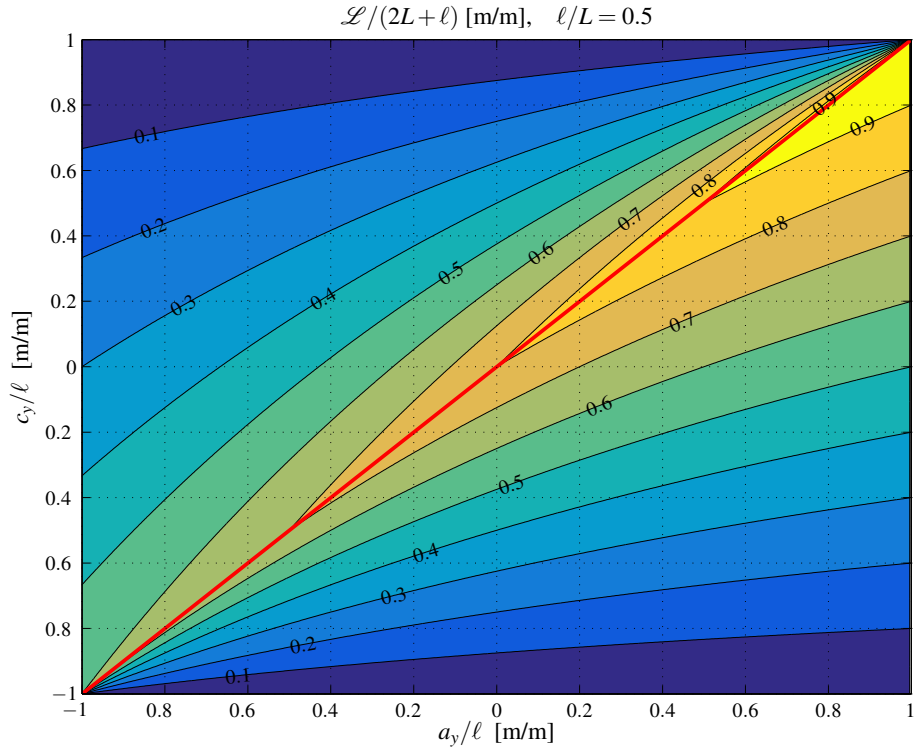
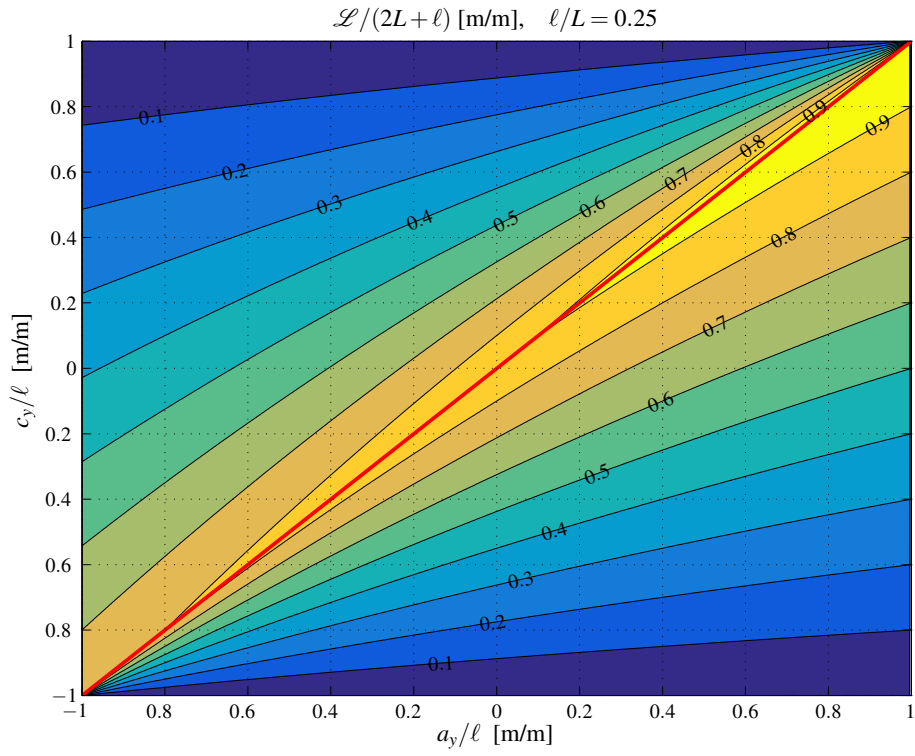


FIGURE 2.8 – Disposition géométrique minimisant la largeur de l'espace de travail statique.

Les deux cas précédents montrent des arrangements géométriques extrêmes de l'effecteur. Or, il existe une quantité infinie d'arrangements différents qui offrent une largeur de l'espace de travail statique \mathcal{L} plus ou moins grande. Les figures en 2.9 présentent la variation de \mathcal{L} en fonction des paramètres a_y et c_y variant de $-\ell$ à ℓ pour différentes valeurs de ℓ .



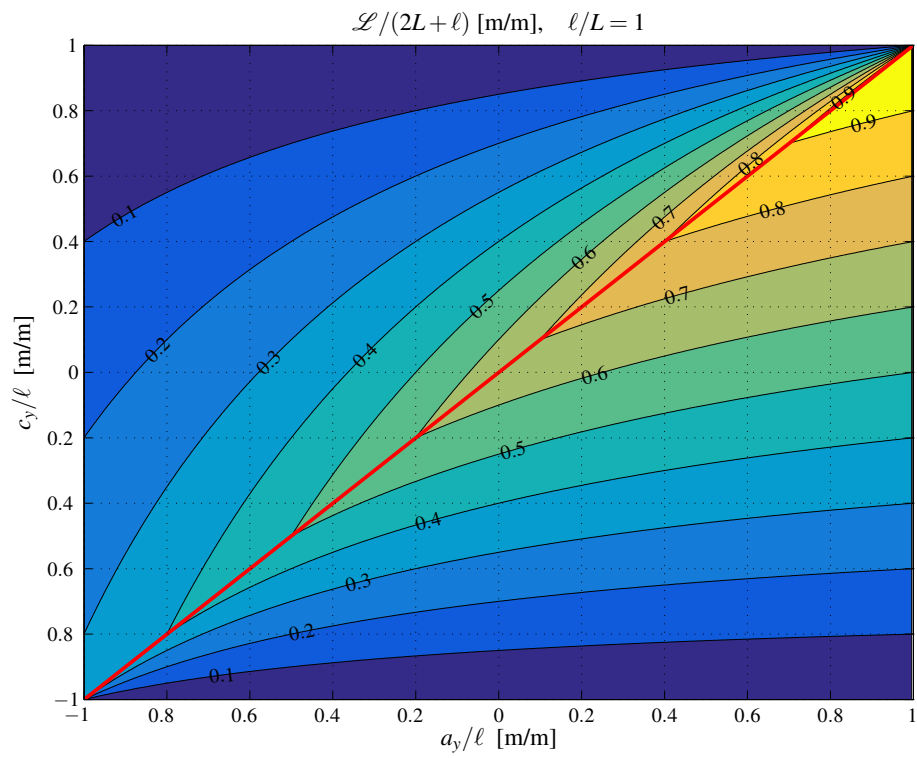
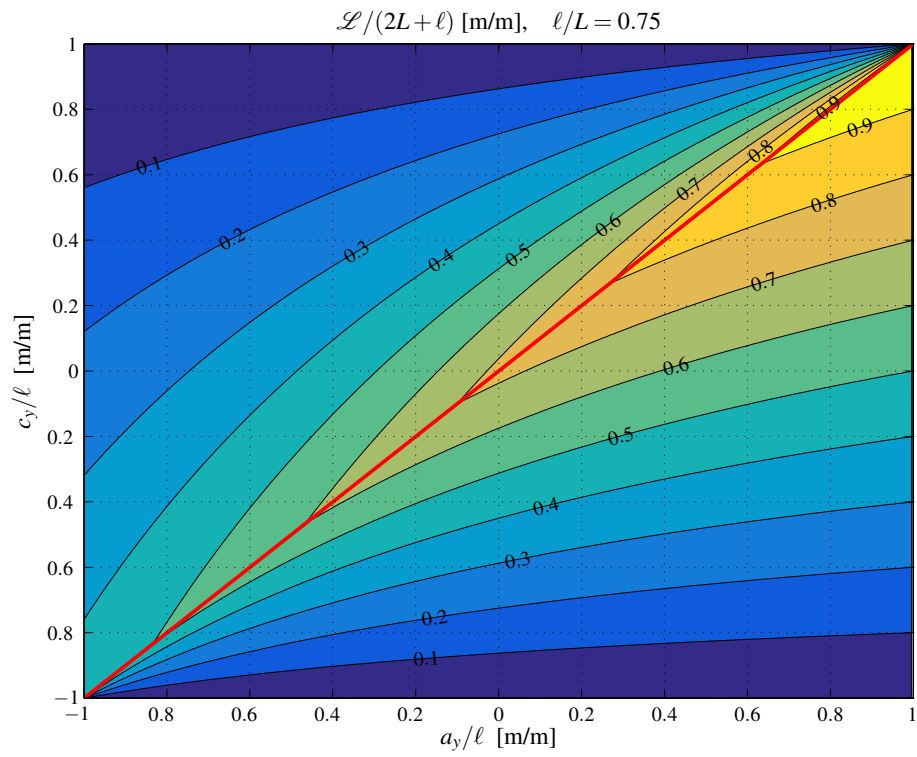


FIGURE 2.9 – Courbes de niveau de \mathcal{L} en fonction des paramètres a_y et c_y et ℓ .

Dans chaque sous-figure de la figure 2.9, l'abscisse présente des valeurs de a_y/ℓ afin de mettre en évidence l'influence de la variation de a_y dans la plage $]-\ell, \ell[$. Pour cette même raison, l'ordonnée présente des valeurs de c_y/ℓ . Les courbes de niveau sont obtenues en calculant le rapport $\mathcal{L}/(2L + \ell)$ à chaque couple (a_y, c_y) pour une valeur de ℓ donnée dans le titre de chaque sous-figure respective. Le rapport de $\mathcal{L}/(2L + \ell)$ permet de normaliser la variation de \mathcal{L} par rapport à sa valeur maximale et d'ainsi mieux comprendre l'influence de ℓ sur la variation de \mathcal{L} . La ligne rouge présente dans chaque sous-figure met en évidence la largeur \mathcal{L}_m qui se situe sur la crête de la surface. Ces figures permettent de montrer qu'il est avantageux d'avoir des valeurs de a_y et c_y près de ℓ afin d'obtenir la plus grande largeur possible de l'espace de travail statique. De plus, la présence de la ligne rouge permet de mettre en évidence le fait que la distance entre les courbes de niveau est plus importante en dessous qu'au-dessus de la ligne $a_y = c_y$ lorsque a_y et c_y sont près de ℓ et qu'il est donc préférable d'avoir $c_y < a_y$ pour une valeur de \mathcal{L} maximale. Une comparaison de la taille des sections jaunes dans les différentes figures montre qu'un faible rapport ℓ/L génère des valeurs de \mathcal{L} plus importantes.

Le premier point à retenir de l'analyse de l'ETS est que sa largeur est fonction des paramètres a_y, c_y, ℓ et L d'après l'intervalle défini en (2.46). De plus, les limites de l'ETS sont définies comme les lieux dans le plan XY où l'un des câbles du mécanisme voit sa tension tomber à zéro. La largeur maximale de l'ETS est obtenue à l'aide de l'équation (2.47). Enfin, une analyse plus approfondie de cette équation a permis de déterminer qu'il est préférable d'avoir le point A_1 et C près du point A_3 afin d'avoir la largeur maximale de l'espace de travail statique. La section suivante considère l'application d'un torseur d'action à l'effecteur.

2.6 Capacité à recevoir un torseur d'action

De nombreuses tâches en robotique requièrent que le robot puisse recevoir de son environnement différents torseurs d'action. Dans le cas d'un robot à câble, cela peut causer la perte de tension dans les câbles du robot ce qui entraînerait une perte de contrôle du robot. Pour cette raison, il est important d'étudier l'influence d'un torseur d'action sur l'effecteur du robot lorsque celui-ci est statique ainsi que l'espace de travail statique dans lequel le robot peut supporter ce torseur d'action.

2.6.1 Ensemble des torseurs recevables

En mettant $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ dans les conditions de tension en (2.42), les conditions suivantes sont obtenues qui décrivent la relation entre l'arrangement géométrique de l'effecteur, le torseur d'action à l'effecteur ainsi que sa position

$$(U_{1i} + U_{2i}y)(mg + \tau_x) - (U_{3i} + U_{2i}x)\tau_y + U_{4i}M_e < 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.54)$$

Ces inégalités décrivent trois demi-espaces définis dans l'espace des torseurs d'action et délimités par trois plans \mathcal{P}_i respectifs dont les équations sont données par

$$\mathcal{P}_i : (U_{1i} + U_{2i}y)\tau_x - (U_{3i} + U_{2i}x)\tau_y + U_{4i}M_e + (U_{1i} + U_{2i}y)mg = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.55)$$

L'espace formé par la conjonction des trois demi-espaces dans l'espace des composantes du torseur \mathcal{T} présenté en (2.54) forme un tétraèdre de hauteur infinie dont la disposition et l'orientation sont fonction de l'arrangement géométrique de l'effecteur ainsi que de la position de l'effecteur. Ce tétraèdre est une version simplifiée du zonotope de l'ensemble des torseurs disponibles décrit par [7]. Cependant, contrairement à ce zonotope, la tension dans les câbles n'est pas ici contrainte à se trouver à l'intérieur d'un intervalle positif. Une partie du tétraèdre est représentée à la figure 2.10 pour un arrangement et une position de l'effecteur donnés dans le haut de la figure. Le sommet du tétraèdre est toujours situé

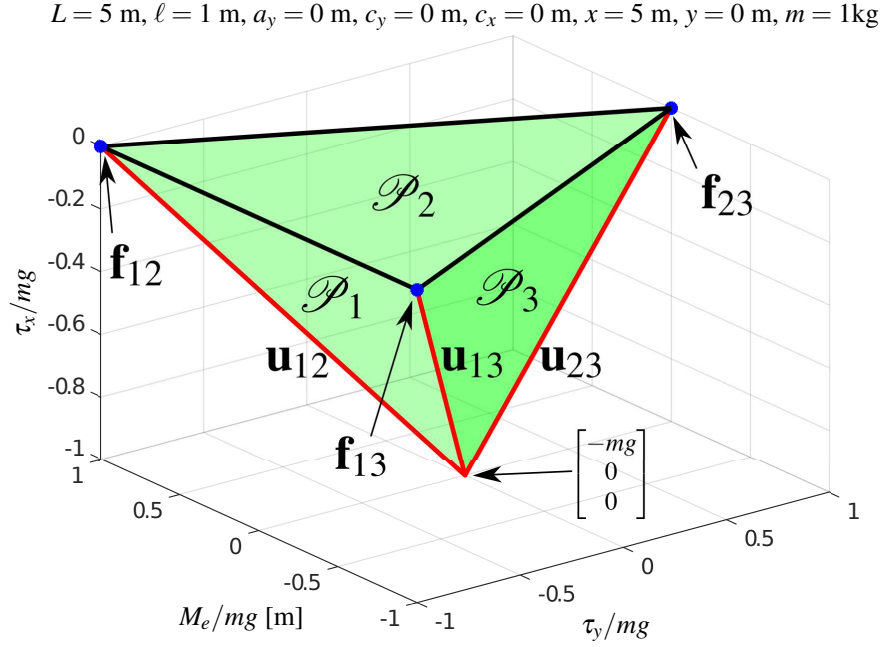


FIGURE 2.10 – Intersections des plans \mathcal{P}_i formant un tétraèdre dans l'espace des composantes du torseur \mathcal{T} .

au point $[-mg, 0, 0]^T$ peu importe l'arrangement géométrique de l'effecteur. Cela peut facilement être vérifié en résolvant le système d'équations suivant

$$\begin{bmatrix} U_{11} + U_{21}y & -(U_{31} + U_{21}x) & U_{41} \\ U_{12} + U_{22}y & -(U_{32} + U_{22}x) & U_{42} \\ U_{13} + U_{23}y & -(U_{33} + U_{23}x) & U_{43} \end{bmatrix} \mathcal{T} = -mg \begin{bmatrix} U_{11} + U_{21}y \\ U_{12} + U_{22}y \\ U_{13} + U_{23}y \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

dont la solution est $\mathcal{T} = [-mg, 0, 0]^T$. La signification physique de ce point d'intersection est que lorsqu'une force de mg est appliquée au centre de masse de l'effecteur et dans la direction opposée à l'axe des X (expliquant le signe négatif de la composante du torseur), l'effecteur devient alors automatiquement déséquilibré et il ne peut subir aucun autre moment ou force. Puisque, peu importe l'arrangement géométrique et la position de l'effecteur, le mécanisme sera en déséquilibre si $\tau_x = -mg$, la condition

$$\tau_x + mg > 0 \quad (2.57)$$

est nécessaire pour garder sous tension l'ensemble des câbles.

Le fait que le tétraèdre ne possède pas de base est une conséquence directe du fait qu'aucune tension maximale dans les câbles n'a été établie. Cela signifie également que plus $\tau_x + mg$ est important, plus il est possible d'appliquer des composantes de forces latérales τ_y et de moments M_e importants. Par conséquent, une solution possible afin de pouvoir appliquer des torseurs d'action plus importants avec le robot est d'augmenter la masse de celui-ci.

Afin de pouvoir déterminer l'influence des paramètres géométriques sur l'espace des torseurs d'action possibles, un plan à $f_x = 0$ est établi comme étant la base du tétraèdre. La hauteur du tétraèdre est alors de mg et le volume de celui-ci peut être utilisé comme un outil de mesure pour quantifier l'aptitude du mécanisme à recevoir un torseur d'action pour un arrangement géométrique donné de l'effecteur. La première étape afin de calculer le volume du tétraèdre consiste à calculer les vecteurs qui coïncident avec les arêtes latérales du tétraèdre partant du sommet en $[-mg, 0, 0]^T$ jusqu'aux trois autres sommets à la hauteur $\tau_x = 0$, c'est-à-dire les vecteurs $\mathbf{u}_{12}, \mathbf{u}_{13}$ et \mathbf{u}_{23} tracés en rouge dans la figure 2.10. Les positions des sommets à $\tau_x = 0$, $\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f}_{13}$ et \mathbf{f}_{23} , sont obtenues en imposant $\tau_x = 0$ dans les équations en (2.55) et en résolvant les trois systèmes d'équations suivants

$$\begin{bmatrix} U_{3i} + U_{2ix} & U_{4i} \\ U_{3j} + U_{2jx} & U_{4j} \end{bmatrix} \mathbf{f}_{ij} = -g \begin{bmatrix} U_{1i} + U_{2jy} \\ U_{1j} + U_{2iy} \end{bmatrix}, i = 1, 2, j = 2, 3, i \neq j. \quad (2.58)$$

Une fois les positions des sommets calculées, les vecteurs \mathbf{u}_{ij} peuvent facilement être calculés à l'aide de la relation suivante

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{t}_{ij} - \begin{bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, j = 2, 3, i \neq j, \quad (2.59)$$

où $\mathbf{t}_{ij} = [\mathbf{f}_{ij}^T, 0]^T$. Le volume du tétraèdre, \mathcal{V} , peut alors être calculé à l'aide de l'équation

$$\mathcal{V} = \frac{|\det(\mathbf{u}_{12}, \mathbf{u}_{13}, \mathbf{u}_{23})|}{2}, \quad (2.60)$$

où $|\ast|$ signifie la valeur absolue de \ast .

Le calcul analytique de \mathcal{V} donne la valeur suivante

$$\mathcal{V} = \left| \frac{(mg)^3 \ell (2L + a_y)}{x} \right|. \quad (2.61)$$

Cette équation analytique est très intéressante puisqu'elle montre que \mathcal{V} est indépendant de la position en y de l'effecteur ainsi que de la position de son centre de masse. Également, plus x est petit, c'est-à-dire plus l'effecteur est proche de la base des poulies, plus \mathcal{V} est important. Cette relation est logique puisque la tension dans les câbles est plus importante plus l'effecteur est haut et donc l'effecteur peut subir ou appliquer des torseurs d'actions avec des composantes f_y et M_e plus importants. \mathcal{V} augmente linéairement avec ℓ et a_y . L'augmentation de \mathcal{V} avec ℓ est intuitive puisqu'elle indique que

les moments appliqués par les deux câbles parallèles au centre de masse seront plus importants et donc qu'ils pourront résister ou appliquer des torseurs d'action plus importants. L'augmentation de \mathcal{V} avec le terme a_y signifie qu'une valeur positive de a_y aide le robot à résister à des torseurs d'action de plus grande magnitude. Enfin, \mathcal{V} augmente proportionnellement au cube du poids de l'effecteur ce qui suggère qu'ajouter du poids à l'effecteur est une bonne solution afin de pouvoir appliquer des forces et des moments importants avec l'effecteur du robot.

Une nette amélioration qu'apporte le robot présenté dans ce chapitre par rapport au robot plan à masse ponctuelle est que ce robot peut supporter des moments. Il s'agit d'une propriété importante pour des applications de transport où la position du centre de masse de l'effecteur est variable ou incertaine.

2.6.2 Espace de travail statique avec torseur

Les conditions en (2.54) ont été présentées à la section précédente comme des demi-espaces dans l'espace des composantes des torseurs d'action appliqués à l'effecteur. Ces conditions peuvent également être utilisées afin de définir trois demi-plans dans le plan (X, Y) , dont les frontières sont des droites qui ont pour équation

$$y_i = qx + r_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.62)$$

$$q = \left(\frac{\tau_y}{\tau_x + mg} \right), \quad (2.63)$$

$$r_i = \left(\frac{U_{3i}\tau_y - U_{4i}M_e - U_{1i}(\tau_x + mg)}{U_{2i}(\tau_x + mg)} \right) \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.64)$$

Pour un torseur donné, les trois droites en (2.62) sont parallèles et forment les limites de l'espace de travail statique lorsqu'un torseur $\mathcal{T} = [\tau_x, \tau_y, M_e]^T$ est appliqué à l'effecteur. Cet espace de travail statique est ici appelé Espace de Travail Statique avec Torseur (ETST). Géométriquement, cet espace correspond à l'ensemble des positions de l'effecteur où le zonotope des torseurs disponible présenté à la figure 2.10 contient le point $\mathcal{T} = [\tau_x, \tau_y, M_e]^T$. Puisque ces trois droites sont parallèles, l'ETST peut être exprimé en utilisant seulement deux de ces droites. En effet, par inspection, il est possible de définir l'ETST comme suit

$$\text{ETST} : \begin{cases} y \in]\max(y_2, y_3), y_1[\\ x > 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

À des fins de validation, il est intéressant de remarquer qu'en mettant $f_x = f_y = M_e = 0$, la définition de l'ETST est alors équivalente à la définition de l'ETS. En réalité, l'ETS est un cas particulier de l'ETST. La figure suivante présente l'ETST pour une configuration et un torseur d'action donnés et dont les valeurs sont présentées dans le haut de la figure. Les droites $y'_i, i = 1, 2, 3$, représentent les droites limites de l'ETS pour une même configuration de l'effecteur.

Comme le présente la figure 2.11, l'application d'un torseur d'action à l'effecteur du robot peut élargir l'espace de travail statique ce qui peut être intéressant pour certaines applications. Comme ce qui a

$$L = 5\text{m}, \ell = 1\text{m}, a_y = 0.2\text{m}, c_y = -0.1\text{m}, c_x = 0.1\text{m}, \tau_x = 0\text{ N}, \tau_y = 10\text{ N}, M_e = 3\text{ N}$$

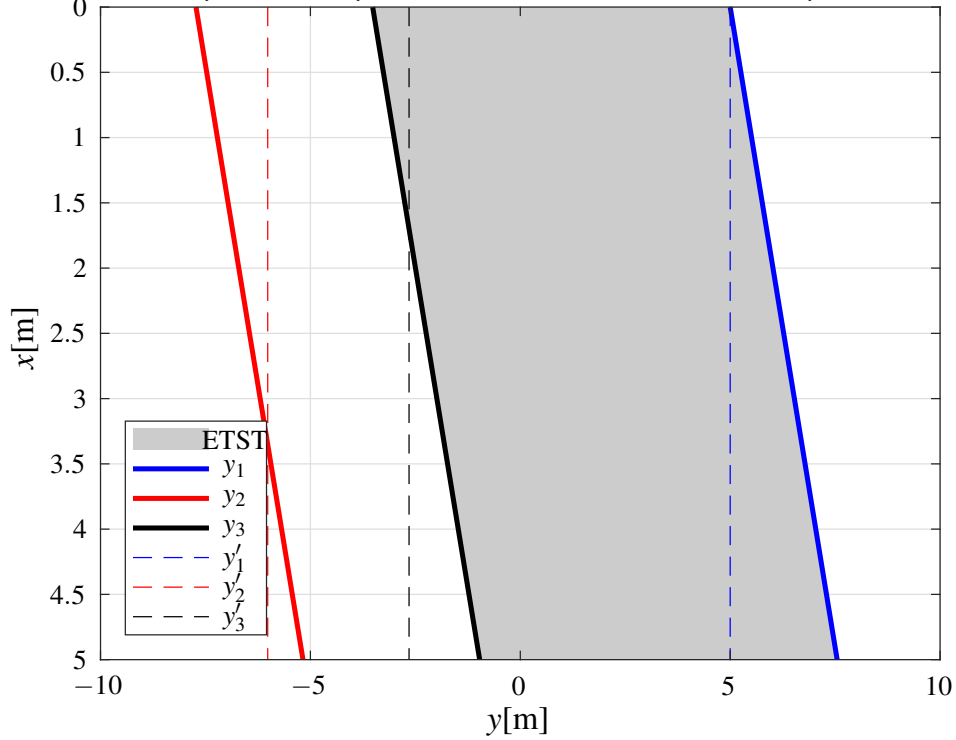


FIGURE 2.11 – Espace de Travail Statique avec Torseur (ETST) pour une configuration et un torseur donnés.

été fait à l'équation (2.47), il est possible de définir la largeur de l'ETST comme

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}} = y_1 - \max(y_2, y_3). \quad (2.66)$$

La largeur $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ n'est pas fonction de la position en x de l'effecteur puisque toutes les droites ont la même pente. Il est donc possible de simplifier l'équation (2.66) pour

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}} = r_1 - \max(r_2, r_3). \quad (2.67)$$

Dans le même ordre d'idée que ce qui a été fait pour déterminer la largeur maximale de l'ETS, les valeurs $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_2}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_3}$ sont ici définies comme

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}_2} = r_1 - r_2 \quad (2.68)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}_3} = r_1 - r_3. \quad (2.69)$$

En mettant $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_2} = \mathcal{L}_{\mathcal{T}_3}$, la relation suivante est obtenue

$$-c_x \tau_y + M_e + (c_y - a_y)(mg + \tau_x) = 0. \quad (2.70)$$

La valeur de $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_2}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_3}$ lorsque l'expression en (2.70) est vérifiée est ici appelée $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_m}$ et prend la valeur

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}_m} = 2L + a_y. \quad (2.71)$$

Intuitivement, en faisant varier les différents paramètres géométriques de l'effecteur ainsi que les composantes du torseur d'action, on remarque que lorsque $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_2}$ augmente, $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_3}$ diminue et vice versa. Par conséquent, il est possible que la valeur $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_m}$ soit l'expression de la valeur maximale que peut prendre $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$. Pour prouver ceci, on définit deux nouvelles valeurs comme suit

$$\Delta\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{m2}} = \mathcal{L}_{\mathcal{T}_m} - \mathcal{L}_{\mathcal{T}_2}, \quad (2.72)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{m3}} = \mathcal{L}_{\mathcal{T}_m} - \mathcal{L}_{\mathcal{T}_3}, \quad (2.73)$$

qui représentent respectivement la variation des valeurs $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_2}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_3}$ par rapport à la valeur $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_m}$. En développant les expressions en (2.72) et (2.73), les expressions suivantes sont obtenues

$$\Delta\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{m2}} = \frac{(2L + a_y)(c_x \tau_y - M_e + (a_y - c_y)(mg + \tau_x))}{(a_y - \ell)(mg + \tau_x)}, \quad (2.74)$$

$$\Delta\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{m3}} = \frac{(2L + a_y)(c_x \tau_y - M_e + (a_y - c_y)(mg + \tau_x))}{(a_y + \ell)(mg + \tau_x)}. \quad (2.75)$$

La seule différence entre ces deux termes sont les expressions $(a_y - \ell)$ et $(a_y + \ell)$ qui se situent en leurs dénominateurs. Comme mentionné précédemment, nous considérons seulement une variation du terme a_y dans l'intervalle $] -\ell, \ell[$. Par conséquent, les valeurs $\Delta\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{m2}}$ et $\Delta\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{m3}}$ n'ont jamais les mêmes signes pour une même configuration de l'effecteur et un même torseur. On peut donc affirmer que $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_m}$ est l'expression de la valeur maximale de la largeur de l'ETST et survient lorsque l'expression en (2.70) est validée. Comme pour l'ETS, la valeur maximale possible de $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ est donc de $2L + \ell$.

2.7 Planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST

De nombreuses applications robotiques propres au RPSEC requièrent que l'effecteur du robot puisse se déplacer à différents points à l'intérieur de l'ETST en partant au repos et en finissant au repos. Pour assurer que les câbles du robot restent en tension pendant les déplacements, il est nécessaire de planifier une trajectoire à cet effet pour le robot. De nombreux types de trajectoires repos à repos existent dans la littérature. Les trajectoires paramétriques basées sur des polynômes de degré 5 sont cependant particulièrement intéressantes, car elles permettent d'assurer des valeurs initiales et finales d'accélération en plus d'être des fonctions continues. Ces trajectoires sont présentées dans de nombreux articles de référence dont notamment [20]. Si $\mathbf{p}(t)$ donne la position de l'effecteur du robot, $\mathbf{v}(t)$ sa vitesse et $\mathbf{a}(t)$ son accélération, la forme paramétrique cartésienne de ces trajectoires prend la forme

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_I + q_1(t)\Delta\mathbf{p}, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{q_2(t)}{T}\Delta\mathbf{p}, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{q_3(t)}{T^2}\Delta\mathbf{p}, \quad (2.78)$$

où

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I, \quad (2.79)$$

$$q_1(t) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3, \quad (2.80)$$

$$q_2(t) = 30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2, \quad (2.81)$$

$$q_3(t) = 120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau, \quad \tau = \frac{t}{T}. \quad (2.82)$$

Dans les équations précédentes, \mathbf{p}_I est la position initiale de l'effecteur du robot, \mathbf{p}_F est la position finale de l'effecteur du robot, t est le temps et T est la période requise pour effectuer la trajectoire.

Par simple analyse de l'expression de l'accélération en (2.78), on remarque que l'accélération diminue au carré de la période requise pour effectuer la trajectoire. Or, si un RPSEC effectue des trajectoires à l'intérieur de son ETST, si l'accélération pendant son déplacement est quasi nulle, la tension dans les câbles est garantie puisque l'ETST représente l'ensemble des positions où la tension dans les câbles est positive pour un arrangement géométrique de son effecteur et un torseur donné lorsque l'effecteur est statique. Par conséquent, il doit exister une période T suffisamment grande qui assure une tension dans les câbles à tous moments pendant une trajectoire de type polynôme de degré 5.

Afin de déterminer une période T assez grande pour assurer la tension dans les câbles pendant une trajectoire de type polynôme de degré 5, on utilise les conditions de tension en (2.42). En substituant les trajectoires paramétriques dans ces conditions, on trouve des conditions de tension propres à une trajectoire de type polynôme de degré 5 qui prennent la forme suivante

$$u_i + \frac{v_i}{T^2} < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.83)$$

où

$$u_i = (U_{1i} + U_{2i}(y_I + q_1(t)\Delta y))(mg + \tau_x) - (U_{3i} + U_{2i}(x_I + q_1(t)\Delta x))\tau_y + U_{4i}M_e, \quad (2.84)$$

$$v_i = m(U_{3i}\Delta y - U_{1i}\Delta x + U_{2i}(x_I y_F - x_F y_I))q_3(t), \quad (2.85)$$

$$\Delta_x = x_F - x_I, \quad \Delta_y = y_F - y_I \quad (2.86)$$

où $\mathbf{p}_I = [x_I, y_I]^T$ et $\mathbf{p}_F = [x_F, y_F]^T$. Lorsque les positions \mathbf{p}_I et \mathbf{p}_F sont à l'intérieur de l'ETST, les u_i sont toujours négatifs. En effet, ces termes représentent les conditions en (2.54) qui évoluent avec le temps entre deux positions qui sont à l'intérieur de l'ETST. Le signe des termes v_i n'est pas évident, cependant, comme mentionné précédemment, un T trop grand ne peut pas causer une perte de tension dans les câbles si les positions \mathbf{p}_I et \mathbf{p}_F sont à l'intérieur de l'ETST. Il est donc possible d'obtenir une inégalité pour T qui assure la tension dans les câbles et qui prend la forme

$$T > \max(T_1, T_2, T_3), \quad (2.87)$$

$$T_i = \sqrt{\frac{-v_i}{u_i}}, i = 1, 2, 3. \quad (2.88)$$

Cette expression n'est cependant pas très utile puisque les termes u_i et v_i évoluent en fonction du temps et donc les T_i également. Pour obtenir une valeur constante de T qui assure la tension dans les câbles, il suffit de trouver des bornes supérieures aux T_i qui sont seulement fonction des termes géométriques et du torseur d'action appliqué à l'effecteur.

Les moments où $\tau = 0$ et $\tau = 1$ minimisent nécessairement les u_i , puisque plus l'effecteur est proche des frontières de l'ETST, plus la tension dans l'un de ses câbles est basse. De plus, la fonction $q_3(t)$ dans les expressions de v_i a pour maximum et minimum respectivement $q_{3_{max}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ et $q_{3_{min}} = -\frac{10\sqrt{3}}{3}$. En utilisant ces deux faits, il est possible de définir une fonction qui assure de trouver une valeur de T suffisamment grande pour assurer la tension dans les câbles. Cette fonction prend la forme

$$T > \max(T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, T_{31}, T_{32}), \quad (2.89)$$

$$T_{i1} = \sqrt{\frac{-v'_i}{u_i^I}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.90)$$

$$T_{i2} = \sqrt{\frac{-v'_i}{u_i^F}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.91)$$

$$v'_i = |m(U_{3i}\Delta y - U_{1i}\Delta x + U_{2i}(x_I y_F - x_F y_I))| \left(10 \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad (2.92)$$

$$u_i^I = (U_{1i} + U_{2i}y_I)(mg + \tau_x) - (U_{3i} + U_{2i}x_I)\tau_y + U_{4i}M_e, \quad (2.93)$$

$$u_i^F = (U_{1i} + U_{2i}y_F)(mg + \tau_x) - (U_{3i} + U_{2i}x_F)\tau_y + U_{4i}M_e. \quad (2.94)$$

Pour illustrer que cette méthode fonctionne, l'exemple suivant présente une trajectoire de type polynôme de degré 5 entre deux points dans l'ETST.

Exemple de planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST

La trajectoire à effectuer est illustrée à la figure 2.12 suivante. La trajectoire à effectuer consiste en une ligne droite entre les points $\mathbf{p}_A = [1, -2]^T$ et $\mathbf{p}_B = [4.5, 4]^T$. La configuration géométrique ainsi que les composantes du torseur d'action appliqué à l'effecteur sont présentées dans le haut de la figure. La trajectoire de type polynôme de degré 5 est effectuée sur deux périodes. La première est la période minimale où la tension dans au moins un des câbles devient nulle pendant la trajectoire. Cette période est ici appelée T^- . L'autre période est celle obtenue en utilisant la fonction en (2.89). Cette période est appelée T^+ . La figure 2.13 présente la tension dans les câbles du robot lors de l'exécution de la trajectoire sur les deux périodes. Comme le montre cette figure, la période T^+ est significativement plus longue que la période T^- . Cependant, le temps de calcul de T^+ est beaucoup plus rapide que celui de T^- puisqu'aucune itération n'est nécessaire. L'exécution des trajectoires à l'intérieur de l'ETST sur des périodes obtenues avec la méthode de la période T^+ est donc avantageuse si la durée de la trajectoire n'est pas un critère important. Dans le cas contraire, une moyenne pondérée entre T^+ et T^- pourrait être utilisée.

2.8 Planification de trajectoires à l'extérieur de l'ETST

Les équations scalaires en (2.42) établissent les conditions qui doivent être satisfaites en tout point d'une trajectoire afin que l'ensemble des câbles du mécanisme soient sous tension. Cette section du

$L = 5\text{m}, \ell = 1\text{m}, a_y = -0.1\text{m}, c_y = 0.1\text{m}, c_x = 0.2\text{m}, \tau_x = 0\text{ N}, \tau_y = 0\text{ N}, M_e = 0\text{ Nm}, m = 1\text{ kg}$

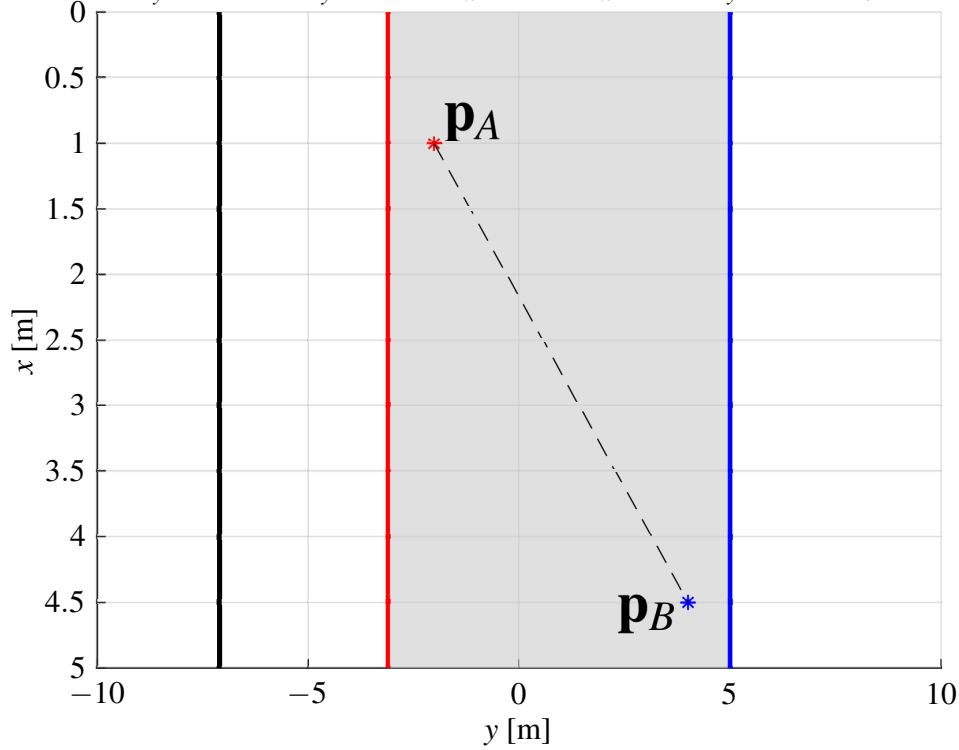


FIGURE 2.12 – Exemple de trajectoire à l’intérieur de l’ETST partant du point \mathbf{p}_A et allant au point \mathbf{p}_B .

mémoire utilise ces conditions afin de planifier des trajectoires elliptiques générales ainsi que les trajectoires de transition vers ces trajectoires elliptiques. L’attrait des trajectoires elliptiques est qu’elles peuvent représenter à la fois des lignes et des cercles en plus d’utiliser des combinaisons de fonctions trigonométriques, ce qui permet certaines simplifications. Cette section présente dans un premier temps la forme paramétrique d’une trajectoire elliptique ainsi que ses dérivées. Ensuite, l’équation paramétrique et sa dérivée sont substituées dans les conditions générales établies en (2.42) afin d’obtenir des conditions propres aux trajectoires elliptiques qui assureront que les câbles du mécanisme sont toujours sous tension. Enfin, des trajectoires de transition sont établies qui permettent de faire la transition du repos vers la trajectoire elliptique générale.

2.8.1 Forme simplifiée de trajectoire elliptique générale

L’expression générale des trajectoires elliptiques utilisée ici permet de simplifier un peu le développement mathématiquement relativement à la forme paramétrique standard. L’annexe A présente comment la forme simplifiée est équivalente à la forme paramétrique standard. La forme simplifiée s’écrit

$$\mathbf{p}_e(t) = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d(t), \quad (2.95)$$

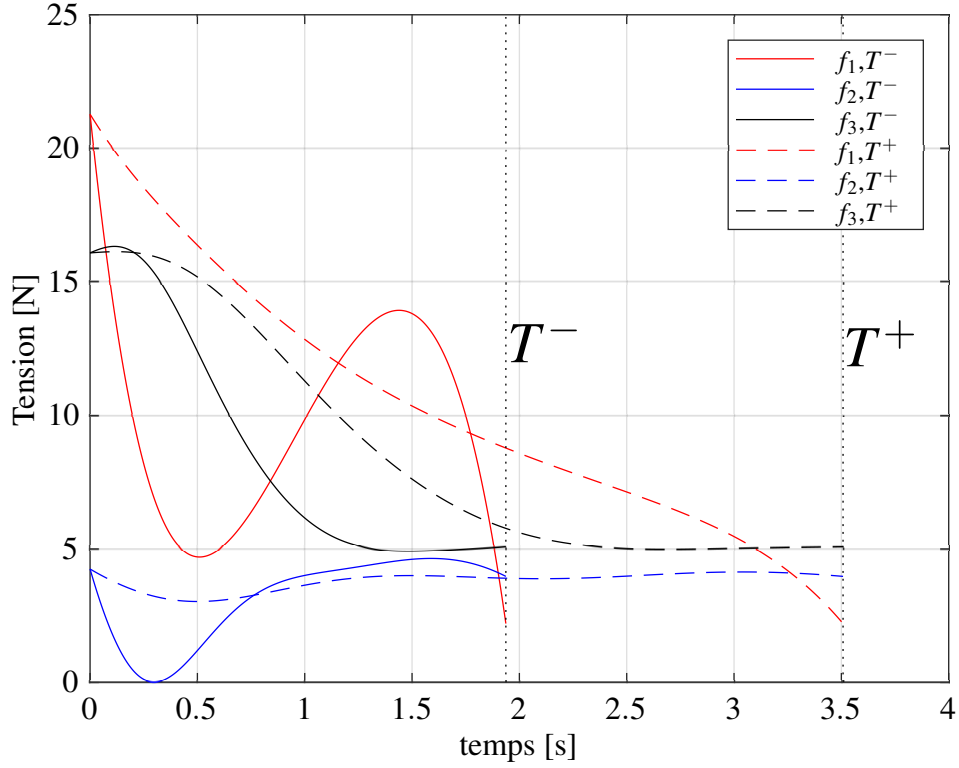


FIGURE 2.13 – Comparaison des tensions dans les câbles pendant l'exécution d'une trajectoire repos-repos de type polynôme de degré 5 sur les périodes T^- et T^+ .

$$\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

où x_c et y_c sont les composantes de la position du centre de la trajectoire elliptique, $2r_x$ et $2r_y$ sont respectivement la largeur et la hauteur de la boîte dans laquelle la trajectoire elliptique est pleinement comprise, t est le temps en secondes, ω est la fréquence angulaire de la trajectoire qui définit combien de fois par seconde (s) une période de la trajectoire est effectuée. Conséquemment, la période de cette trajectoire est de $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Les termes ϕ_x et ϕ_y sont fonction de la position initiale de la trajectoire, des dimensions de l'ellipse ainsi que de son orientation.

La dérivée et la dérivée seconde par rapport au temps de la trajectoire en (2.95) donnent respectivement la vitesse et l'accélération de la trajectoire en fonction du temps, c'est-à-dire

$$\dot{\mathbf{p}}_e(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_e(t) = \omega \begin{bmatrix} r_x \cos(\omega t + \phi_x) \\ r_y \cos(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}_e(t) = -\omega^2 \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

où $\dot{\mathbf{p}}_e(t)$ et $\ddot{\mathbf{p}}_e(t)$ sont respectivement les vecteurs de vitesse et d'accélération de la trajectoire.

La sous-section suivante présente la substitution des équations (2.95) et (2.98) dans les conditions

scalaires en (2.42) pour déterminer des conditions propres aux trajectoires elliptiques qui assurent la tension dans les câbles.

2.8.2 Substitutions dans les conditions de tension générales

Les conditions permettant d'assurer la tension dans les câbles du mécanisme lors de trajectoires elliptiques générales sont obtenues en substituant les expressions (2.95) et (2.98) dans les conditions générales de tension en (2.42). En manipulant les résultats de la substitution à l'aide d'identités trigonométriques, les résultats suivants sont obtenus

$$h_i(t) < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.99)$$

où

$$h_i(t) = r_y (\Delta_{1i} \sin(\omega t) + \Delta_{2i} \cos(\omega t)) + \kappa_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.100)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_{1i} &= K\Phi_i \cos(\phi_x) + \Upsilon_i \cos(\phi_y), \\ \Delta_{2i} &= K\Phi_i \sin(\phi_x) + \Upsilon_i \sin(\phi_y), \\ \Phi_i &= m\omega^2\Psi_i - U_{2i}\tau_y, \\ \Upsilon_i &= (mg + \tau_x)U_{2i} - m\omega^2\Omega_i, \\ \Psi_i &= U_{1i} + U_{2i}y_c, \\ \Omega_i &= U_{3i} + U_{2i}x_c, \\ \kappa_i &= \Psi_i(mg + \tau_x) - \Omega_i\tau_y + U_{4i}M_e, \\ K &= r_x/r_y. \end{aligned}$$

2.8.3 Conditions suffisantes pour assurer la tension dans les câbles lors d'une trajectoire elliptique

Toutes les fonctions en (2.99) sont des fonctions périodiques. Par conséquent, une preuve suffisante que les câbles sont sous tension à tous moments pendant une trajectoire elliptique est de montrer que toutes les valeurs extrêmes des $h_i(t)$ sont inférieures à 0, c'est-à-dire que toutes les conditions en (2.99) sont respectées lorsque les fonctions périodiques sont évaluées à leurs extrêmes. Les extrêmes des $h_i(t)$ peuvent être trouvés en calculant la dérivée temporelle des $h_i(t)$ et en mettant égal à zéro les résultats, ce qui donne

$$\frac{dh_i(t)}{dt} = r_y\omega (\Delta_{1i} \cos(\omega t) - \Delta_{2i} \sin(\omega t)) = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.101)$$

Les extrêmes des fonctions trigonométriques sont alors trouvés en solutionnant les équations suivantes

$$\Delta_{1i} \cos(\omega t) = \Delta_{2i} \sin(\omega t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.102)$$

Pour résoudre ces équations, l'identité trigonométrique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ est utilisée ce qui donne les solutions suivantes

$$\cos(\omega t) = \pm \frac{\Delta_{2i}}{\Theta_i}, \quad \sin(\omega t) = \pm \frac{\Delta_{1i}}{\Theta_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.103)$$

où

$$\Theta_i = \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2}.$$

En substituant les valeurs en (2.103) dans les conditions en (2.100), 4 fois 3 pour un total de 12 conditions sont obtenues qui doivent être satisfaites afin d'assurer la tension dans les câbles du robot lors d'une trajectoire elliptique générale. Ces conditions prennent la forme

$$\frac{r_y (\pm \Delta_{1i}^2 \pm \Delta_{2i}^2)}{\Theta_i} + \kappa_i < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.104)$$

où les quatre conditions pour chaque câble (i) sont analogues aux quatre combinaisons différentes possibles des deux \pm . Les conditions en (2.104) sont toutes indépendantes du temps et permettent ainsi de mettre directement en relation l'amplitude d'oscillation r_y et la fréquence d'oscillation ω . Effectivement, pour chaque i , il est possible d'isoler r_y dans les conditions en (2.104) pour obtenir des relations qui limitent l'amplitude d'oscillation. Ces conditions s'écrivent

$$r_y > r_{yi} = \frac{\kappa_i \Theta_i}{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2} \quad (2.105)$$

$$r_y < r_{yi} = \frac{-\kappa_i \Theta_i}{|\Delta_{2i}^2 - \Delta_{1i}^2|} \quad (2.106)$$

$$r_y < r_{yi} = \frac{-\kappa_i \Theta_i}{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2}, i = 1, 2, 3 \quad (2.107)$$

où les conditions en (2.106) satisfont à la fois les conditions avec $(+\Delta_{1i}^2 - \Delta_{2i}^2)$ et $(-\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2)$ en (2.104). Il est possible de diminuer le nombre de conditions à respecter en déterminant si l'un des groupes de conditions assure le respect des deux autres. Par inspection, les r_{yi} sont nécessairement des valeurs positives réelles, car elles représentent la largeur de la boîte contenant la trajectoire elliptique. Δ_{1i}^2 et Δ_{2i}^2 sont deux valeurs positives puisqu'elles représentent respectivement des valeurs élevées au carré. Enfin, Θ_i est nécessairement une valeur positive, car elle représente un terme en racine carrée et doit être réelle afin que les r_{yi} puissent être réels. Cette inspection porte à la conclusion que κ_i doit nécessairement être négatif et que par conséquent, le seul respect de la condition (2.107) assure le respect des deux autres conditions (2.105) et (2.106). En effet, si κ_i est positif, alors aucun des trois groupes de condition en (2.105), (2.106) et (2.107) ne peut être respecté simultanément. Or, si la valeur de κ_i est plus petite que zéro, toutes les conditions peuvent être respectées en même temps. Puisque κ_i doit être négatif, les conditions en (2.105) deviennent inutiles, car elles sont toutes respectées si $r_{yi} > 0$. Enfin, puisque $\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2$ est toujours plus grand que $|\Delta_{2i}^2 - \Delta_{1i}^2|$, le respect des conditions en (2.107) assure le respect des conditions en (2.106). Le respect des conditions en (2.107) assure donc le respect de toutes les autres conditions.

Un fait important mentionné dans le paragraphe précédent est que $\kappa_i < 0$ est nécessaire afin de pouvoir assurer la tension dans les câbles du mécanisme lors d'une trajectoire elliptique. L'interprétation physique de cette condition mathématique est que le centre de la trajectoire elliptique, le point (x_c, y_c) , doit se trouver à l'intérieur de l'ETST. Il s'agit d'une condition importante qui concorde avec les travaux présentés par [32] portant sur des trajectoires elliptiques en 3D. Cependant, dans les articles mentionnés précédemment, aucun torseur d'action n'était considéré.

Les conditions en (2.107) peuvent être simplifiées sous la forme

$$r_y < r_{y_i} = \frac{-\kappa_i}{\sqrt{K^2\Phi_i^2 + \Upsilon_i^2 + 2K\Phi_i\Upsilon_i \cos(\eta)}}, i = 1, 2, 3, \quad (2.108)$$

où

$$\eta = \phi_x - \phi_y. \quad (2.109)$$

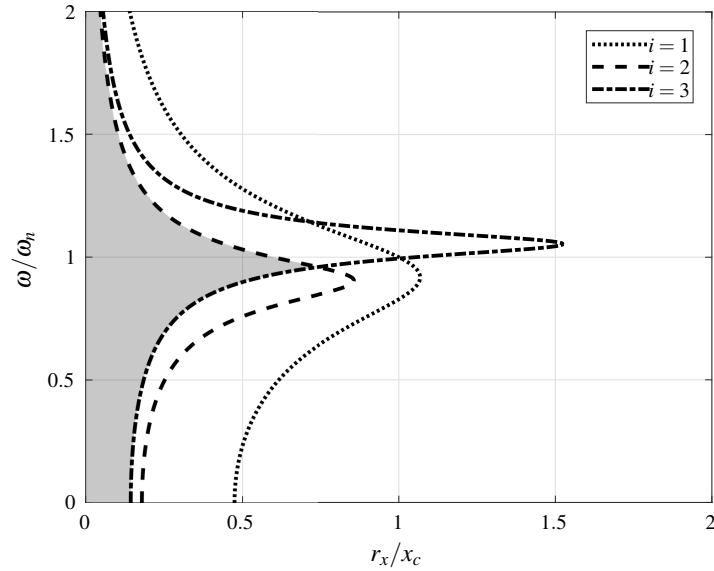
En utilisant la relation $K = r_x/r_y$, il est également possible d'obtenir des conditions pour r_x à l'aide des conditions en (2.108). Ces conditions prennent la forme

$$r_x < r_{x_i} = \frac{-K\kappa_i}{\sqrt{K^2\Phi_i^2 + \Upsilon_i^2 + 2K\Phi_i\Upsilon_i \cos(\eta)}}, i = 1, 2, 3. \quad (2.110)$$

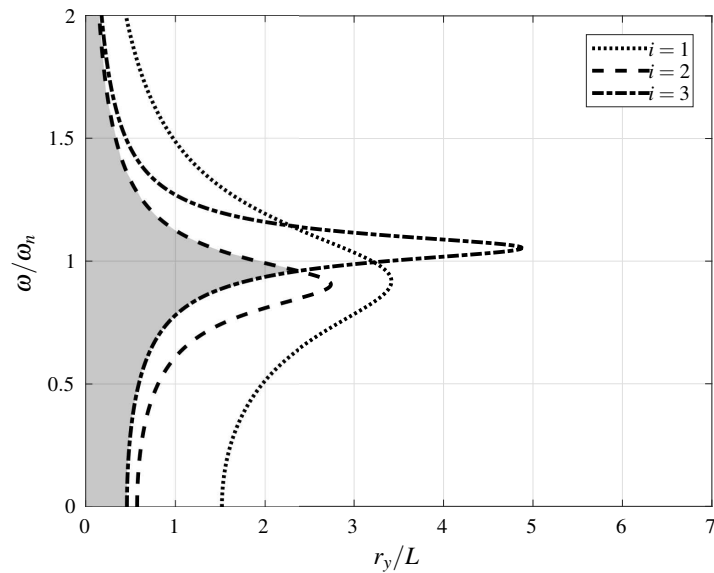
2.8.4 Analyse des conditions suffisantes de tension dans les câbles lors d'une trajectoire elliptique

Les conditions en (2.108) et (2.110) mettent en relation les conditions de tension r_{x_i} et r_{y_i} avec les paramètres géométriques de l'effecteur ainsi que la fréquence d'oscillation. Afin de mieux illustrer ces relations, les figures 2.14a et 2.14b suivantes présentent les conditions comme des surfaces dans les plans (r_x, ω) et (r_y, ω) pour un arrangement géométrique et un torseur d'action donnés.

Dans les figures 2.14a et 2.14b, les surfaces ombragées représentent l'ensemble des couples (r_x, ω) et (r_y, ω) qui respectent les trois conditions en (2.110) et (2.108) respectivement. Les ordonnées sont divisées par $\omega_n = \sqrt{g/x_0}$ afin de mettre en évidence cette fréquence spéciale qui sera présentée dans la sous-section suivante. En 2.14a, les valeurs des abscisses sont divisées par x_c afin de mettre en évidence la valeur maximale que peut prendre r_x afin de rester en dessous de l'axe des poulies. Advenant le cas où la surface ombragée dépasserait la limite $r_x/x_c = 1$, les couples (r_x, ω) de cette section ne devraient pas être considérés. En 2.14b, les valeurs des abscisses sont divisées par L afin de montrer que la trajectoire elliptique peut sortir de l'espace statique tout en respectant les conditions de tension en (2.108). La sous-section suivante présente un algorithme permettant de déterminer les limites de l'espace ombragé dans les figures 2.14a et 2.14b, en plus de déterminer la fréquence qui maximise les amplitudes atteignables pour une trajectoire elliptique, une configuration géométrique et un torseur d'action donné.



(a)



(b)

FIGURE 2.14 – Conditions de tension dans les câbles du mécanisme pendant une trajectoire elliptique d’amplitudes r_x et r_y , effectuée à une fréquence angulaire de ω et dont l’arrangement géométrique et le torseur d’action sont donnés par les valeurs suivantes : $L = 5$ m, $\ell = 1$ m, $a_y = 0.2$ m, $c_y = -0.1$ m, $c_x = -0.2$ m, $x_c = 8$ m, $y_c = -1$ m, $m = 1$ kg, $\tau_x = 0$ N, $\tau_y = 2$ N, $M_e = 2$ Nm.

Algorithme pour déterminer les limites d’amplitudes maximales

Les différentes étapes de l’algorithme sont illustrées dans la figure 2.15 suivante. Avant de commencer l’algorithme, la variable ω est discrétisée sur une plage arbitrairement grande qui permet de couvrir les parties intéressantes des fonctions r_{y_i} . L’étape 1 de l’algorithme consiste à déterminer laquelle des fonctions r_{y_i} possède la plus petite valeur lorsque $\omega = 0$ rad. Ce r_{y_i} devient alors la fonction qui

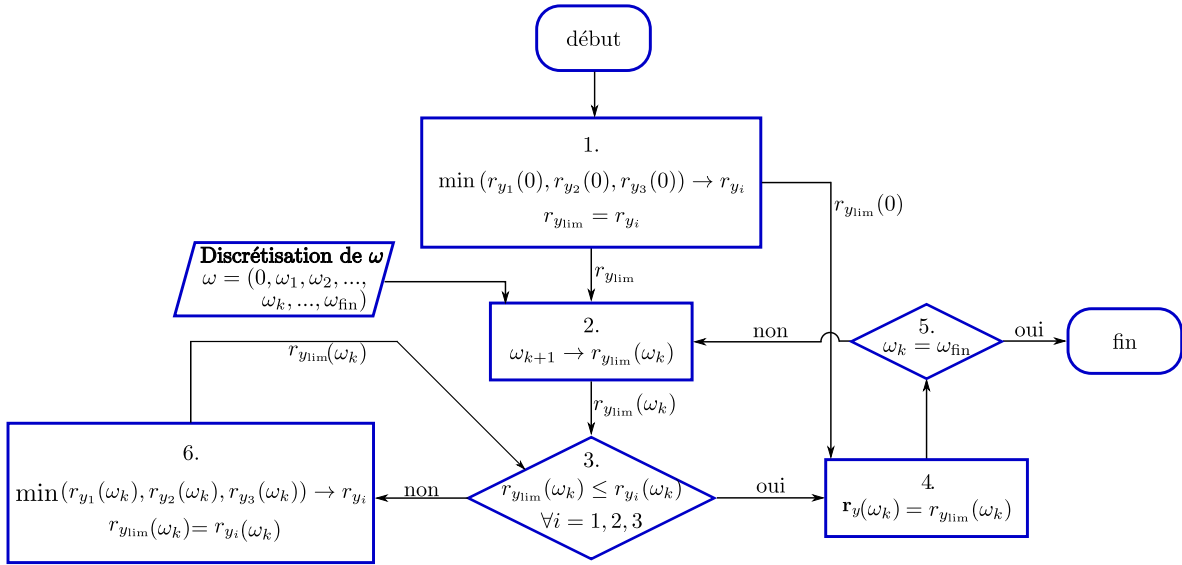


FIGURE 2.15 – Algorithme pour déterminer l’ amplitude d’ oscillation maximale.

délimite l’espace des couples (r_y, ω) possibles et est appelée r_{ylim} . La valeur de r_{ylim} lorsque $\omega = 0$ est entreposée dans la liste \mathbf{r}_y . À l’étape suivante, l’étape 2, ω est incrémenté en injectant ω_{k+1} dans ω_k où k est l’indice d’incrément et $r_{ylim}(\omega_k)$ est calculé. À l’étape 3, on vérifie que la valeur de $r_{ylim}(\omega_k)$ nouvellement calculée est inférieure ou égale à toutes les fonctions $r_{y_i}, i = 1, 2, 3$. Si c’est le cas, on ajoute $r_{ylim}(\omega_k)$ à la liste \mathbf{r}_y . Si ce n’est pas le cas on passe à l’étape 6 où l’on détermine laquelle des fonctions r_{y_i} est minimale lorsque $\omega = \omega_k$ et cette fonction devient la nouvelle fonction r_{ylim} . On utilise alors la nouvelle fonction r_{ylim} pour calculer $r_{ylim}(\omega_k)$ que l’on réinjecte dans l’étape 3. Lorsque l’ensemble des incréments de ω sont passés dans l’algorithme, la liste \mathbf{r}_y résultante contient l’ensemble des r_y limites dans l’espace des couples (r_y, ω) . La valeur maximale de la liste \mathbf{r}_y est alors la valeur maximale que peut avoir r_y tout en respectant l’ensemble des conditions r_{y_i} . La fréquence ω_k associée à la valeur maximale de \mathbf{r}_y est la fréquence qui maximise l’amplitude possible d’oscillation. Pour obtenir la liste des r_x limites, il suffit de multiplier l’ensemble des éléments de la liste par K . Comme mentionné précédemment, puisque r_x est limité à être inférieur à x_c pour ne pas que le mécanisme soit dans une situation de singularité, les amplitudes qui respectent les conditions de tension mais qui sont telles que $r_x > x_c$ ne devraient pas être considérées.

Il est possible qu’il ne soit pas particulièrement intéressant de savoir quelle est la fréquence d’oscillation qui maximise l’amplitude d’oscillation et qu’il soit plutôt préférable de connaître un intervalle de fréquences d’oscillation qui permettent une amplitude d’oscillation égale à une valeur r_{y0} . Pour obtenir cet intervalle, la première étape consiste à remplacer les r_{y_i} dans les équations en (2.108) par r_{y0} et d’inverser les fonctions, c’est-à-dire exprimer la fréquence d’oscillation ω en fonction de r_{y0} . Cette inversion prend la forme

$$\omega_{k1}, \omega_{k2} = \sqrt{\frac{-\mathcal{Y}_k \pm \sqrt{\mathcal{Y}_k^2 - 4\mathcal{X}_k\mathcal{Z}_k}}{2\mathcal{X}_k}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.111)$$

(2.112)

où

$$\mathcal{X}_k = m^2 (K^2 \Psi_k^2 + \Omega_k^2 - 2K\Psi_k \Omega_k \cos(\eta)), \quad (2.113)$$

$$\mathcal{Y}_k = -2mB_k (K\Psi_k \tau_y + (mg + \tau_x)\Omega_k), \quad (2.114)$$

$$\mathcal{Z}_k = B_k^2 (\tau_y^2 + (mg + \tau_x)^2 - 2K\tau_y(mg + \tau_x) \cos(\eta)) - \frac{K_k^2}{r_{y0}^2}. \quad (2.115)$$

Chaque ω_{k1} et ω_{k2} représente géométriquement les valeurs le long de l'axe ω des points d'intersection des courbes $r_{yk}(\omega)$ avec la droite $r_y = r_{y0}$ dans le plan (r_y, ω) . Puisqu'il y a 3 courbes, il y a donc 6 points d'intersection potentiels dont seuls ceux ayant des fréquences positives doivent être considérés. La fréquence d'oscillation des points d'intersection qui respectent l'ensemble des conditions en (2.108) sont les limites de l'intervalle des fréquences d'oscillation qui permettent une amplitude d'oscillation supérieure ou égale à r_{y0} . Cette conclusion peut facilement être observée par la figure 2.16 suivante qui montre l'intersection de la droite $r_y = r_{y0} = 7.5\text{m}$ avec les courbes délimitant les conditions de tension en (2.108) pour une trajectoire et un arrangement géométrique du robot présenté dans la description de la figure. Dans cet exemple, l'intervalle des fréquences qui permet une amplitude d'oscillation égale à $r_{y0} = 7.5$ est donné par

$$\omega \in]\omega_{31}, \omega_{12}[. \quad (2.116)$$

Pour obtenir numériquement les limites de l'intervalle, les étapes suivantes sont requises.

1. Pour chaque $\omega_{kj}, k = 1, 2, 3, j = 1, 2$, vérifier que les conditions complémentaires à la condition k en (2.108) sont respectées lorsque $r_y = r_{y0}$. Les conditions complémentaires sont les conditions en (2.108) où $i \neq k$. Il est seulement nécessaire de vérifier les conditions complémentaires puisque les conditions $i = k$ en (2.108) seront nécessairement non respectées puisque, (r_{yk}, ω_k) se situe sur la courbe limite de la condition $i = k$ en (2.108). Seuls les ω_{kj} réels doivent être considérés pour ce test.
2. Garder les valeurs $\omega_{kj}, k = 1, 2, 3, j = 1, 2$ qui respectent les conditions complémentaires et qui sont réelles et les mettre dans une liste $\mathbf{I}_{\omega 0}$.
3. La valeur maximale de $\mathbf{I}_{\omega 0}$ est la fréquence maximale de l'intervalle tandis que la valeur minimale de $\mathbf{I}_{\omega 0}$ est la fréquence minimale de l'intervalle qui permet une oscillation égale à r_{y0} . Si la liste contient seulement une valeur, alors la valeur minimale de l'intervalle sera de 0. Si la liste ne contient aucun élément, alors aucune valeur de ω ne permet une oscillation plus grande ou égale à r_{y0} . Mathématiquement, on peut écrire que l'intervalle qui permet une oscillation supérieure ou égale à r_{y0} est donc donné par

$$\omega \in \left\{ \begin{array}{ll}]\min(\mathbf{I}_{\omega 0}), \max(\mathbf{I}_{\omega 0})[& , \text{ nb. elem} = 2 \\]0, \max(\mathbf{I}_{\omega 0})[& , \text{ nb. elem} = 1 \\ \emptyset & , \text{ nb. elem} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.117)$$

Cette démarche mathématique a d'abord été présentée par [32] pour un RPSEC spatial à 3DDL à masse ponctuelle.

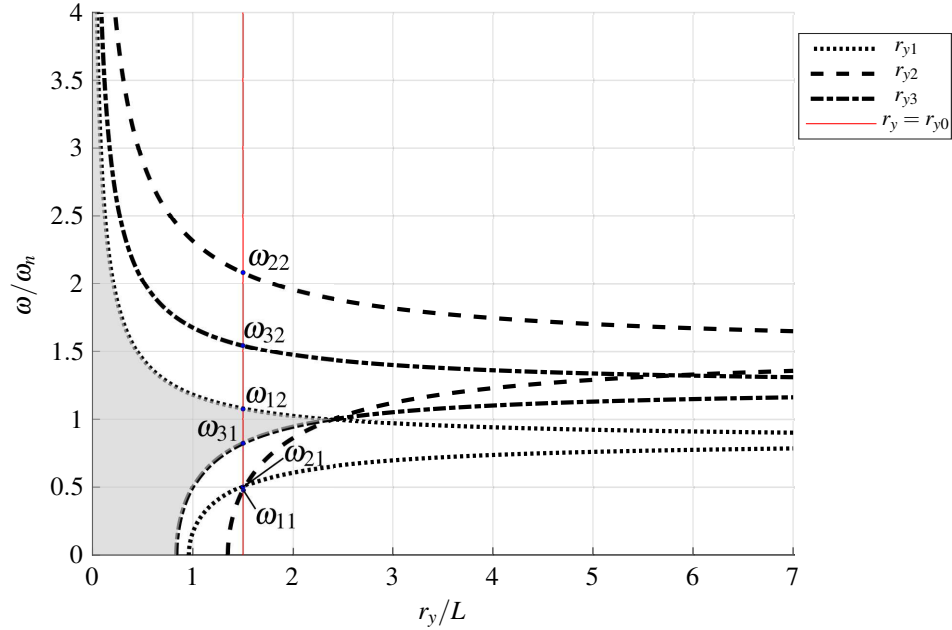


FIGURE 2.16 – Exemple d'utilisation de la méthode pour déterminer l'intervalle de fréquences qui permettent une amplitude d'oscillation donnée. Dans cet exemple, $L = 5\text{m}$, $\ell = 0.8\text{m}$, $x_0 = 12\text{m}$, $y_0 = 0.2\text{m}$, $m = 2\text{kg}$, $K = 1$, $a_y = 0.1\text{m}$, $c_y = 0\text{m}$, $c_x = 0\text{m}$, $\phi_x = \phi_y = 0\text{rad}$, $\mathcal{T} = [0, 0, 0]^T$, $r_{y0} = 7.5\text{m}$.

Cas particulier permettant une amplitude d'oscillation maximale

Dans les articles [14],[15],[31] et [21] concernant les RPSEC à masse ponctuelle effectuant des trajectoires dynamiques de type elliptique, on présente une fréquence spéciale d'oscillation pour des trajectoires de type elliptique permettant d'effectuer des trajectoires avec des amplitudes arbitrairement grandes tant et aussi longtemps que l'effecteur demeure sous les poulies du mécanisme (c.-à-d. que le mécanisme reste suspendu). La fréquence spéciale appelée ω_n prend la valeur suivante

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{x_c}}, \quad (2.118)$$

où g est l'accélération gravitationnelle et x_c est la hauteur du centre de la trajectoire elliptique (la hauteur est ici la distance entre le centre de la trajectoire elliptique et la base des poulies).

Pour la modélisation du mécanisme présenté dans ce chapitre, un torseur d'action externe est considéré de sorte que la fréquence d'oscillation spéciale n'est pas la même en raison de la présence de la composante τ_x du torseur d'action externe. Cependant, en raison de l'équivalence entre la composante verticale du torseur d'action externe et une augmentation de la masse de l'effecteur on peut redéfinir une fréquence d'oscillation équivalente qui prend en compte cette force et qui s'écrit

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mg + \tau_x}{mx_c}}. \quad (2.119)$$

En substituant la nouvelle fréquence spéciale définie en (2.119) dans les conditions en (2.108) et

(2.110), les termes Υ_i se simplifient à

$$\Upsilon_i = (mg + \tau_x) \left(\frac{-U_{3i}}{x_c} \right), i = 1, 2, 3. \quad (2.120)$$

Dans l'équation précédente, tous les Υ_i deviennent égaux à 0 lorsque $c_x = 0$. Dans ce cas, si le centre de l'ellipse se trouve à l'intérieur de l'ETST, les conditions (2.108) et (2.110) deviennent respectivement

$$r_y < r_{y_i} = \frac{x_c}{k} (1 + R_i), i = 1, 2, 3, \quad (2.121)$$

$$r_x < r_{x_i} = x_c (1 + R_i), i = 1, 2, 3, \quad (2.122)$$

$$R_i = \frac{U_{4i} M_e}{(\Psi_i (mg + \tau_x) - U_{2i} x_c \tau_y)}, i = 1, 2, 3. \quad (2.123)$$

Dans les conditions précédentes, lorsque $M_e = 0$, les conditions de tension deviennent simplement

$$r_y < \frac{x_c}{K}, \quad (2.124)$$

$$r_x < x_c. \quad (2.125)$$

Les deux conditions en (2.124) et (2.125) signifient que lorsque $c_x = M_e = 0$, que $\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{mg + \tau_x}{mx_c}}$ et que le centre de la trajectoire elliptique se trouve à l'intérieur de l'ETST, alors l'amplitude d'oscillation r_y peut être choisie arbitrairement grande si $r_x < x_c$ tout en gardant l'ensemble des câbles en tension. S'il est possible de remplir l'ensemble de ces critères, l'utilisation de cette propriété dynamique facilite grandement la planification de trajectoire elliptique.

L'ensemble des analyses effectuées dans les deux dernières sous-sections ont permis de déterminer des conditions qui assurent que les câbles sont en tension lors de l'exécution de trajectoire elliptique. La prochaine sous-section présente une trajectoire de transition permettant de passer du repos vers une trajectoire elliptique et d'une trajectoire elliptique vers le repos ainsi que les conditions suffisantes permettant d'assurer la tension dans les câbles lors de ces transitions.

2.8.5 Trajectoires de transition

Les trajectoires de transition utilisées pour passer du repos vers une trajectoire elliptique sont comme celles présentées à la sous-section 2.8.1 prennent la forme suivante

$$\mathbf{p}_e(t) = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_t(t) \quad (2.126)$$

$$\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}, \mathbf{p}_t(t) = \begin{bmatrix} K \delta_1 \sin(\omega t + \phi_x) \\ \delta_1 \sin(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

où

$$\delta_1 = \begin{cases} r_y (6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3), & 0 \leq t < T, \\ r_y, & t \geq T \end{cases} \quad (2.128)$$

où T est la période de transition en s et $\tau = t/T$. Le polynôme utilisé en (2.128) permet d'augmenter graduellement l'amplitude d'oscillation de l'ellipse sur la période T et est continu jusqu'à l'accélération. Il s'agit du même polynôme utilisé dans la section précédente pour la planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST. La dérivée et la dérivée seconde par rapport au temps de la trajectoire en (2.127) donnent respectivement la vitesse et l'accélération de la trajectoire de transition et se calculent

$$\dot{\mathbf{p}}_e(t) = \dot{\mathbf{p}}_t(t) = \begin{bmatrix} K(\delta_2 \sin(\omega t + \phi_x) + \omega \delta_1 \cos(\omega t + \phi_x)) \\ (\delta_2 \sin(\omega t + \phi_y) + \omega \delta_1 \cos(\omega t + \phi_y)) \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e(t) = \ddot{\mathbf{p}}_t(t) = \begin{bmatrix} K((\delta_3 - \delta_1 \omega^2) \sin(\omega t + \phi_x) + 2\delta_2 \omega \cos(\omega t + \phi_x)) \\ (\delta_3 - \delta_1 \omega^2) \sin(\omega t + \phi_y) + 2\delta_2 \omega \cos(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

où

$$\delta_2 = \frac{d\delta_1}{dt} = \frac{r_y(30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2)}{T} \quad (2.131)$$

$$\delta_3 = \frac{d\delta_2}{dt} = \frac{r_y(120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau)}{T^2}. \quad (2.132)$$

En substituant les termes en (2.127) et en (2.130) dans les conditions de tension générale en (2.42), les conditions suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned} h_i^*(t) + \delta_3 [\Omega_i \sin(\omega t + \phi_y) - k\Psi_i \sin(\omega t + \phi_x)] \\ + \delta_2 [\Omega_i \cos(\omega t + \phi_y) - k\Psi_i \cos(\omega t + \phi_x) + 2\delta_1 kU_{2i} \sin(\eta)] < 0, i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.133)$$

où

$$h_i^*(t) = \delta_1 (\Delta_{1i} \sin(\omega t) + \Delta_{2i} \cos(\omega t)) + \kappa_i, i = 1, 2, 3. \quad (2.134)$$

Les deux derniers termes des conditions en (2.133) sont inversement proportionnels à la période de transition T ce qui veut dire que plus la période de transition est grande, moins ces termes auront d'influence sur le respect des conditions. De plus, puisque $\delta_1 \leq r_y$ lorsque $t \leq T$, le terme h_i^* est inférieur à 0 si les conditions en (2.99) sont respectées. On peut interpréter ceci de la façon suivante : si la trajectoire elliptique finale répond aux conditions suffisantes pour assurer la tension dans les câbles lors de l'exécution de cette trajectoire, alors il existe une période de transition assez longue qui assure que les câbles demeureront sous tension lors de la trajectoire de transition du repos vers la trajectoire elliptique. En ce qui concerne la trajectoire de transition d'elliptique vers repos, on peut également tenir la même affirmation si cette trajectoire de transition est la version miroir de la transition de repos vers elliptique. Pour obtenir la période de transition la plus rapide, il suffit de l'augmenter graduellement et tester à chaque incrément si les conditions en (2.133) sont respectées. Il s'agit de la même méthode utilisée pour trouver T^- à la section précédente sur la planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST. La plus petite valeur de T qui satisfait à l'ensemble des conditions en (2.133) est la période de transition la plus rapide. Cependant, cette méthode est numériquement très longue à calculer. Par analyse des conditions en (2.133), il est possible de déterminer des conditions qui sont toujours respectées lorsque les conditions en (2.133) sont respectées mais qui sont indépendantes du temps t .

D'abord, l'analyse mathématique faite entre les équations (2.104) et (2.107) permet de constater que la valeur maximale de l'expression des $h_i(t)$ est de $r_y \Theta_i + \kappa_i$. Par conséquent, puisque $h_i(t)^* \leq h_i(t) \forall t$, $r_y \Theta_i + \kappa_i$ est également la valeur maximale possible de $h_i(t)^*$. De plus, cette valeur maximale est toujours négative si la trajectoire finale est possible. Les deuxièmes et troisièmes termes des conditions en (2.133) sont composés de fonctions trigonométriques ainsi que de certaines valeurs qui sont positives et d'autres qui sont négatives ce qui rend difficile la détermination de leurs signes. Cependant, en prenant la valeur absolue de chaque valeur et en évaluant chaque fonction à sa valeur maximale, il est possible d'obtenir une expression qui n'est pas fonction du temps qui borne toutes les valeurs possibles de la somme des deux derniers termes de (2.133). Les conditions bornes prennent alors la forme

$$r_y \Theta_i + \kappa_i + \frac{10\sqrt{3}}{3T^2} (|\Omega_i| + K|\Psi_i|) + \frac{15}{8T} (|\Omega_i| + K|\Psi_i| + 2K|U_{2i}|) < 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.135)$$

De ces conditions bornes, il est possible de déterminer les valeurs de T qui rendent les termes de gauche des expressions en (2.135) égaux à 0. Ces valeurs sont ici appelées T_1^+ , T_2^+ et T_3^+ , et sont obtenues en résolvant les équations quadratiques suivantes

$$\mathcal{A}_i Z_i^2 + \mathcal{B}_i Z_i + \mathcal{C}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.136)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= \frac{10\sqrt{3}}{3} (|\Omega_i| + K|\Psi_i|) \\ \mathcal{B}_i &= \frac{15}{8} (|\Omega_i| + K|\Psi_i| + 2K|U_{2i}|) \\ \mathcal{C}_i &= r_y \Theta_i + \kappa_i \\ Z_i &= \frac{1}{T_i}. \end{aligned}$$

Puisque \mathcal{C}_i est négatif si la trajectoire elliptique finale est possible, les T_i seront toujours réels. Une fois tous les T_i obtenues, la valeur de T est choisie à l'aide de la fonction suivante

$$T = \max(T_1, T_2, T_3). \quad (2.137)$$

La période de transition obtenue à l'aide de cette méthode est nécessairement beaucoup plus longue que la période minimale. Cependant, son temps de calcul est beaucoup plus rapide, car il n'est pas nécessaire de faire des itérations pour l'obtenir. Il s'agit ainsi d'une meilleure solution pour des applications de type temps réel.

La prochaine section présente un exemple de planification de trajectoire à l'intérieur et à l'extérieur de l'ETST pour le mécanisme présenté dans ce chapitre.

2.9 Exemple d'application

Considérons l'exemple illustré à la figure 2.17.

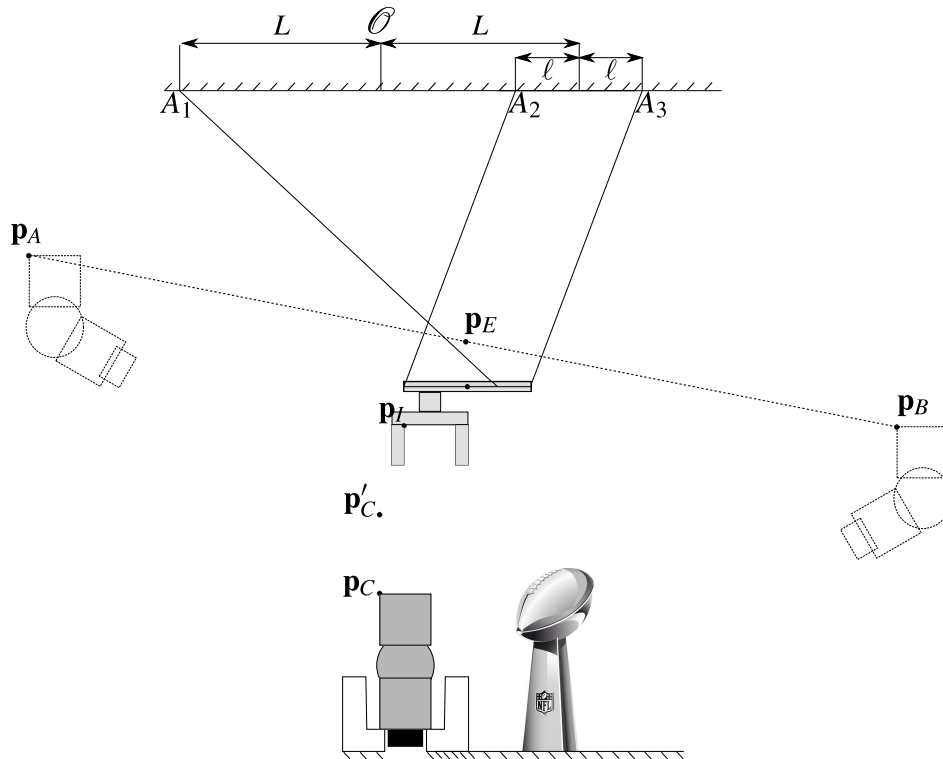


FIGURE 2.17 – Exemple d’application demandant une planification de trajectoire.(source de la photo du trophée :https://en.wikipedia.org/wiki/Super_Bowl, consulté le 08/04/19)

L’objectif dans cet exemple est de filmer un objet (le trophée Vince Lombardi) de 2 angles de vue séparés avec une caméra qui n’est pas initialement fixée à l’effecteur du robot. Pour ce faire, le robot est muni d’une pince robotique simple qui lui permet de saisir une caméra articulée initialement positionnée en \mathbf{p}_C et de la soulever. Le robot est initialement positionné en \mathbf{p}_I . Il doit par la suite se rendre au-dessus de la caméra au point \mathbf{p}'_C afin d’être en bonne position pour descendre et saisir la caméra en \mathbf{p}_C . Une fois la caméra saisie, l’effecteur doit se rendre au point \mathbf{p}_E qui se trouve à mi-chemin entre les points \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B . De là, une planification de trajectoire est effectuée qui permet à la caméra de se déplacer selon une trajectoire linéaire oscillatoire entre les points \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B . Une fois la trajectoire effectuée 4 fois à pleine amplitude, la caméra est redéposée à sa position originale. Les tensions dans les câbles de la caméra doivent rester positives à tout moment. Pour tester la faisabilité de cet exemple, trois étapes sont requises :

1. Calculer l’ETS et l’ETST du robot avant et après que la pince saisisse la caméra et déterminer si les points \mathbf{p}_I , \mathbf{p}_C , \mathbf{p}'_C et \mathbf{p}_E s’y trouvent.
2. Planifier les trajectoires de type polynôme de degré 5 entre les différentes positions où doit se rendre le robot pour récupérer la caméra et initier la trajectoire elliptique.
3. Planifier la trajectoire elliptique entre les \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B et vérifier sa faisabilité.

1. Calculer l'ETS et l'ETST du robot.

Les limites de l'ETS et de l'ETST sont déterminées à l'aide des définitions en (2.46) et (2.65). Le calcul des limites de l'ETS permet de déterminer les limites de l'espace dans lequel l'effecteur du robot peut se déplacer lorsqu'il ne soulève pas la caméra. Le calcul des limites de l'ETST permet de déterminer l'espace dans lequel l'effecteur du robot peut se déplacer lorsque la pince robotique tient la caméra. Les valeurs numériques suivantes sont fixées pour le problème. Dans le tableau 2.1, m_R

L [m]	ℓ [m]	c_x [m]	c_y [m]	a_y [m]	m_R [kg]	m_C [kg]	d_x [m]	d_y [m]	e_x [m]	e_y [m]
5	0.8	0.2	-0.1	0.3	2	1	0.4	-0.2	0.3	-0.3
$\mathbf{p}_C = [5, 0]^T$ m				$\mathbf{p}'_C = [4, 0]^T$ m			$\mathbf{p}_I = [3, 0.5]^T$ m			
$\mathbf{p}_E = [2.5, 1]^T$ m				$\mathbf{p}_A = [2, -7]^T$ m			$\mathbf{p}_B = [3, 9]^T$ m			

Tableau 2.1 – Valeurs numériques de l'exemple d'application.

représente la masse de l'effecteur du robot tandis que m_C représente la masse de la caméra articulée. Les quatre derniers termes sont des distances qui sont illustrées dans la figure 2.18 suivante. Les

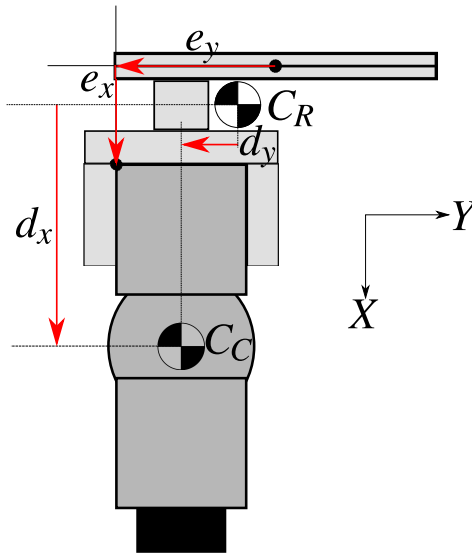


FIGURE 2.18 – Représentation explicative des dernières valeurs dans le tableau des valeurs numériques.

valeurs e_x et e_y sont les composantes du vecteur entre le point donnant la position de l'effecteur et le coin de la pince robotique. Les valeurs d_x et d_y donnent la distance entre le centre de masse du robot et de la pince en C_R et le centre de masse de la caméra en C_C . Le vecteur entre C_R et C_C ainsi que la masse de la caméra permettent de calculer le torseur d'action appliqué au centre de masse du robot lorsque la caméra est saisie. Ce torseur est ici appelé \mathcal{T}_C et son expression est donnée par

$$\mathcal{T}_C = m_C g [1, 0, d_y]^T. \quad (2.138)$$

À l'aide des valeurs numériques données dans le tableau 2.1 ainsi que le torseur d'action \mathcal{T}_C , les limites de l'ETS et de l'ETST du robot sont calculées et représentées dans la figure 2.19 suivante.

Clairement, les points \mathbf{p}_C , \mathbf{p}'_C , \mathbf{p}_I et \mathbf{p}_E sont tous à l'intérieur de l'ETS et de l'ETST. Par conséquent,

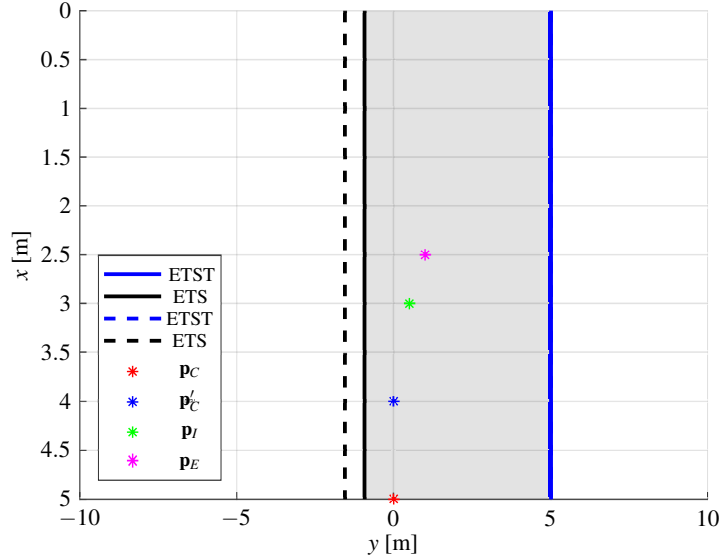


FIGURE 2.19 – ETS du robot sans caméra et ETST du robot avec caméra

il est possible de se rendre à chacun de ses points à l'aide de trajectoire repos à repos de type polynôme de degré 5.

2. Planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST.

La méthode présentée à l'équation 2.89 est utilisée pour déterminer les périodes T de chaque mouvement à l'intérieur de l'ETST. La figure 2.20 suivante présente la tension dans les câbles du robot pendant les déplacements de \mathbf{p}_I à \mathbf{p}'_C , de \mathbf{p}'_C à \mathbf{p}_C , de \mathbf{p}_C à \mathbf{p}'_C avec le torseur \mathcal{T}_C et de \mathbf{p}'_C à \mathbf{p}_E avec le torseur \mathcal{T}_C . Comme le montre cette figure, la tension dans les câbles est toujours positive.

3. Planification de trajectoire à l'extérieur de l'ETST.

Pour bien planifier la trajectoire elliptique reliant les points \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B , deux étapes sont requises. D'abord, il faut vérifier que la trajectoire elliptique finale (celle qui relie les deux points \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B) est possible et il faut déterminer à quelle fréquence d'oscillation doit être effectuée la trajectoire. Ensuite, il faut déterminer la période de transition requise pour passer du repos vers la trajectoire finale.

3.1 Vérification de la trajectoire finale et détermination de la fréquence d'oscillation.

Puisque la valeur de c_x n'est pas nulle dans l'exemple présenté dans cette section, il n'est pas possible d'utiliser directement la fréquence spéciale ω_n pour faciliter la planification de trajectoire. Cependant, il est tout de même possible d'utiliser l'algorithme présenté à la figure 2.16 pour déterminer si une trajectoire elliptique permettant d'osciller entre les points \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B est faisable et si oui à quelle fréquence on doit effectuer la trajectoire.

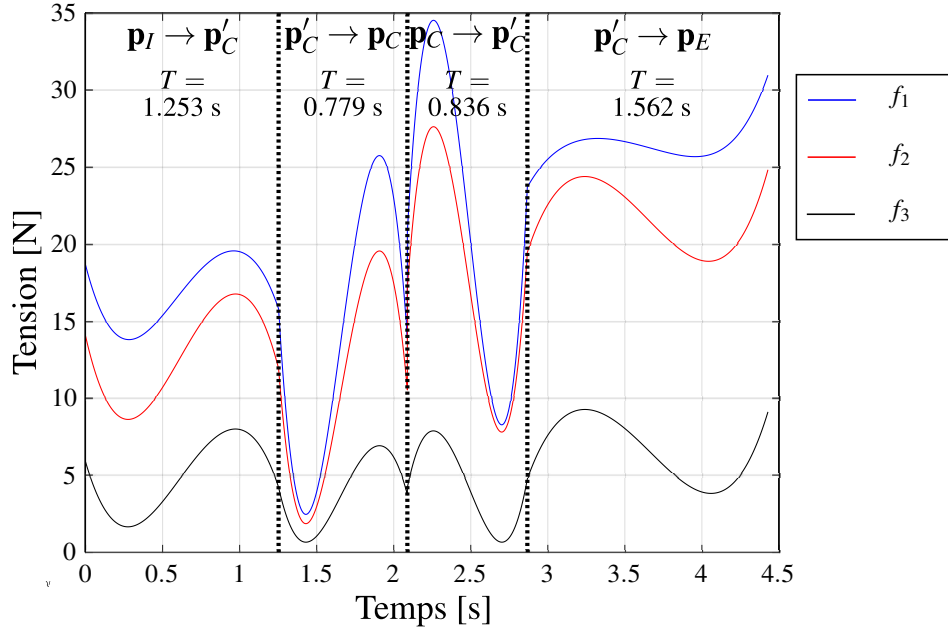


FIGURE 2.20 – Tension dans les câbles pendant les différentes trajectoires repos-repos pour aller chercher la caméra et se rendre au centre de la trajectoire elliptique.

D'après les valeurs numériques des points \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B présentés dans le tableau 2.1, il est possible de modéliser une trajectoire elliptique prenant la forme d'une ligne droite entre ces deux points dont la forme paramétrique est

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_E + r_y \sin(\omega t) \begin{bmatrix} K \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.139)$$

où

$$r_y = \frac{y_B - y_A}{2} = \frac{9 - (-7)}{2} = 8\text{m} \quad (2.140)$$

$$K = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{3 - 2}{9 - (-7)} = 1/16. \quad (2.141)$$

Avec ces valeurs numériques, il est possible de déterminer un intervalle de fréquence qui permet cette trajectoire en utilisant la méthode présentée à la figure 2.16. Les résultats de cette méthode sont présentés à la figure 2.21 suivante et dans le tableau 2.2 suivant. Dans le tableau 2.2, le terme $\bar{\omega}$ est

ω_{\max} rad/s	ω_{\min} rad/s	$\bar{\omega}$ rad/s
2.086	1.634	1.860

Tableau 2.2 – Fréquences permettant la trajectoire dynamique de l'exemple d'application.

obtenu à l'aide de l'équation suivante

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (2.142)$$

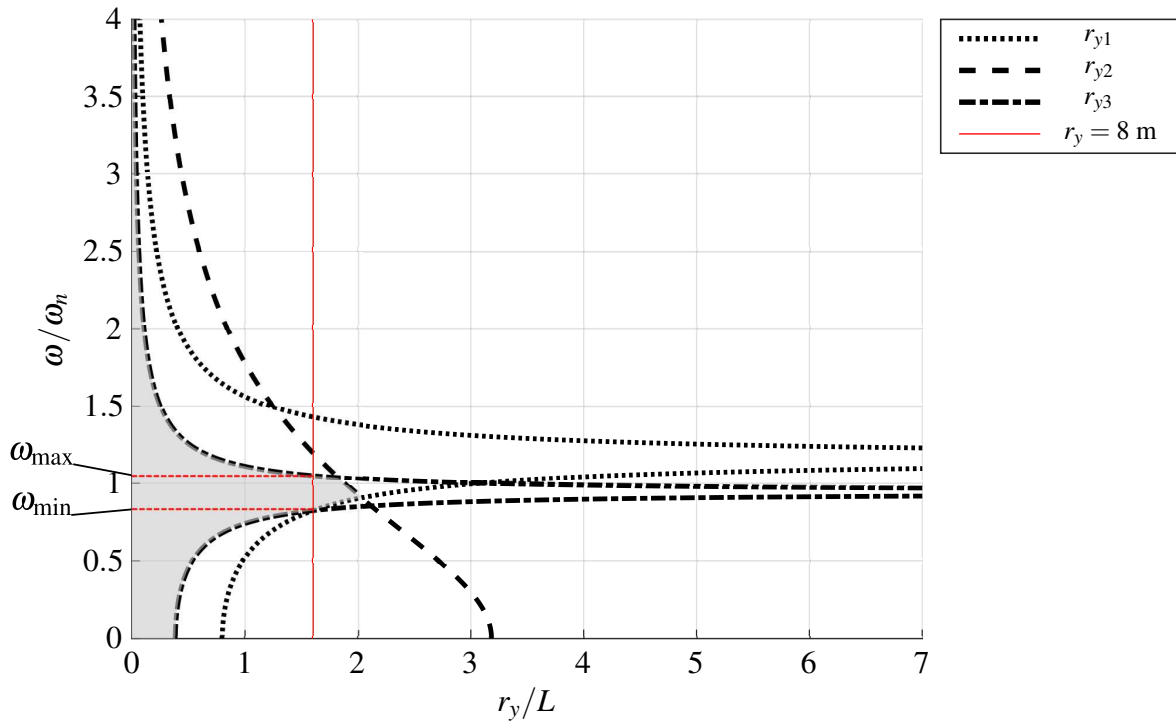


FIGURE 2.21 – Interval de fréquences permettant l’amplitude requise pour l’exemple d’application.

Par définition, si la trajectoire elliptique est effectuée à la fréquence d’oscillation ω_{\max} ou ω_{\min} , la tension dans l’un des câbles du robot sera nulle à un certain moment de la trajectoire. Pour éviter que cela advienne, l’utilisation de la fréquence $\bar{\omega}$ est idéale, car il s’agit de la fréquence la plus éloignée des deux valeurs limites de l’intervalle de fréquence qui permet l’amplitude d’oscillation.

3.2 Détermination d’une période de transition de repos vers trajectoire finale qui assure la tension dans les câbles.

Pour déterminer une période de transition qui assure la tension dans les câbles, il suffit d’utiliser la méthode présentée en (2.137). En utilisant cette méthode, on trouve que la période de transition doit être telle que $T > 4.5697\text{s}$. Pour assurer une coïncidence entre la fin de la trajectoire de transition et le début de la trajectoire finale, la période de transition T est choisie comme étant le plus petit multiple de $\pi/\bar{\omega}$ qui respecte la condition $T > 4.5697 \text{ s}$. Cette valeur est $4\pi/\bar{\omega}$. Pour la transition de trajectoire finale vers repos, la même période de transition est utilisée. La figure 2.22 présente la tension dans les câbles du robot pendant la trajectoire dynamique. Dans la figure 2.22, les f_i^+ indiquent les traits qui représentent les tensions dans les câbles pendant la période de transition de repos vers trajectoire elliptique finale, les f_i indiquent la tension dans les câbles pendant la trajectoire elliptique finale et les f_i^- indiquent la tension dans les câbles pendant la transition de la trajectoire elliptique finale au repos. On remarque d’abord que la tension est supérieure à zéro pendant toute la trajectoire ce qui confirme la possibilité d’effectuer cette trajectoire. Ensuite, on remarque que les trajectoires de transition initiales et finales sont parfaitement synchronisées avec le début de la trajectoire elliptique finale. Cela est dû

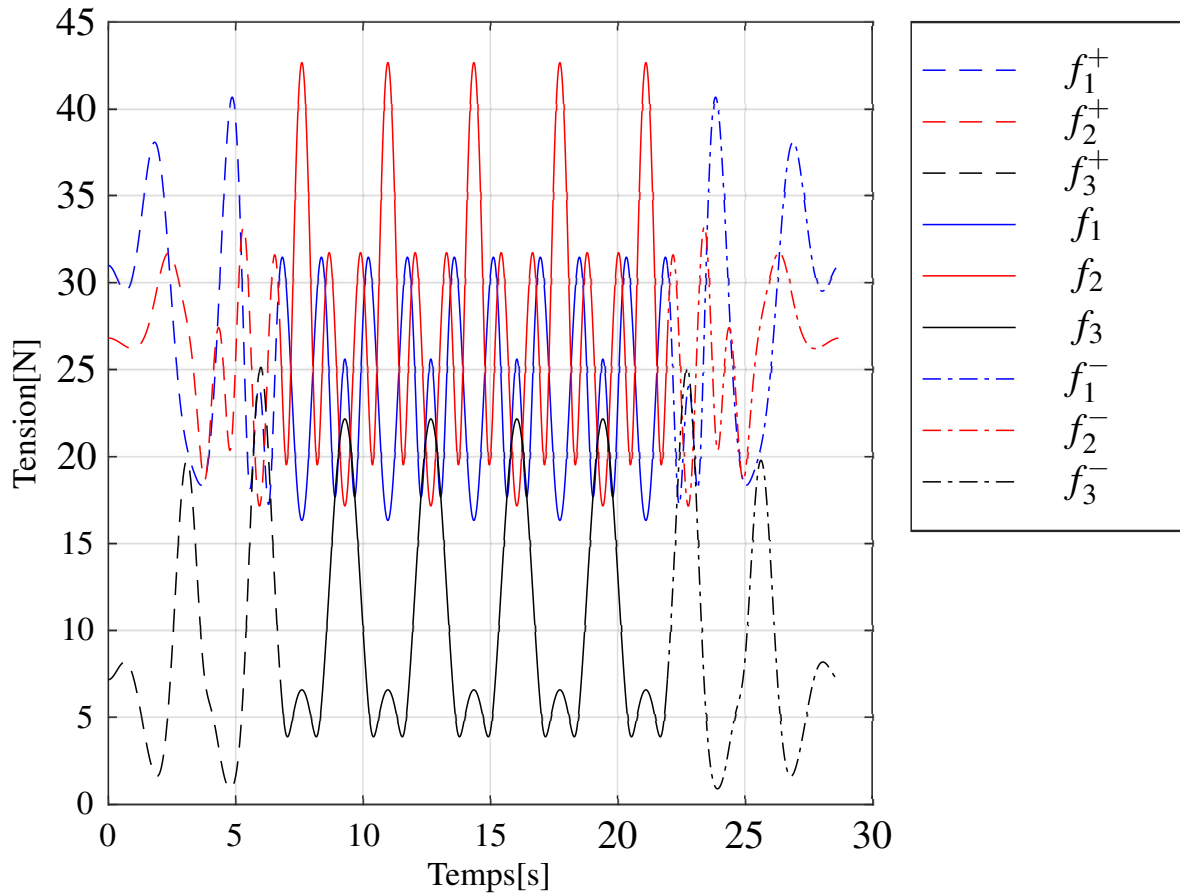


FIGURE 2.22 – Tension dans les câbles pendant la trajectoire elliptique en exemple.

au fait que la période de transition a été choisie comme étant le plus petit multiple de $\pi/\bar{\omega}$ qui était supérieur à 4.5697 s, soit $4\pi/\bar{\omega}$.

Comme la tension reste positive à toutes les étapes de l'exemple d'application, on peut affirmer qu'il est possible d'effectuer la tâche décrite dans l'énoncé. Cet exemple a permis de mettre en application toutes les étapes décrites dans les sections précédentes de ce chapitre. D'abord, les limites de l'ETS et de l'ETST ont été calculées. Ensuite, il a été vérifié que les positions requises de l'effecteur pour aller chercher et déposer la caméra et pour initier la trajectoire elliptique étaient tous dans l'ETS et dans l'ETST. Ensuite, la planification de trajectoire entre ces différentes positions a été effectuée afin d'assurer la tension dans les câbles pendant le mouvement du robot. Par la suite, la planification de trajectoire a été effectuée ce qui a permis de déterminer à quelle fréquence il était possible d'exécuter la trajectoire ainsi que la période de transition qui était requise pour assurer une tension dans les câbles pendant la transition de repos vers trajectoire elliptique finale de trajectoire elliptique finale vers repos.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, un RPSEC à 3 câbles et 2 DDL a été présenté. Deux des câbles du robot sont arrangés en parallélogramme et sont actionnés par une même poulie actionnée ce qui contraint l'orientation de l'effecteur à être constante et à être parallèle à la base sur laquelle les poulies actionnant le robot sont installées lorsque les câbles sont sous tension.

L'étude du degré de mobilité de ce mécanisme a permis de montrer que la mobilité de ce robot est équivalente celle d'un RPSEC à 2 câbles et 2 DDL étudié à plusieurs reprises dans la littérature scientifique portant sur les RPSEC.

Une modélisation cinématique du mécanisme a par la suite permis de montrer que l'espace se situant sous les poulies actionnées du robot était libre de singularité. Il a également été montré dans cette section que la variation d'orientation du robot est nulle en raison de l'arrangement en parallélogramme du robot.

La modélisation dynamique du robot a par la suite été effectuée. Grâce à cette modélisation, des inégalités algébriques ont été obtenues qui sont fonction de l'arrangement géométrique du robot, de sa position, de son accélération et du torseur d'action appliqué à son centre de masse. Lorsque ces inégalités sont respectées, la tension dans les câbles est assurée d'être positive ce qui garantit la possibilité de contrôler le robot si les câbles et les moteurs peuvent soutenir la tension.

Les inégalités algébriques ont ensuite été utilisées pour déterminer l'ETS, soit l'ensemble des positions de l'effecteur où celui-ci peut rester en équilibre statique en gardant l'ensemble de ses câbles sous tension et en ne subissant aucun torseur d'action externe autre que son propre poids. Il a été montré que la largeur de l'ETS est fonction de l'arrangement géométrique du robot et qu'il est possible de maximiser cette quantité.

La capacité du robot à recevoir un torseur d'action externe a par la suite été étudiée. D'abord, une analyse géométrique de l'ensemble des torseurs recevables a permis de déterminer certains paramètres géométriques du robot indépendants de la position latérale de l'effecteur du robot qui permettent d'augmenter la magnitude des torseurs d'actions que l'effecteur du robot peut recevoir tout en restant en équilibre statique. Cette étude a par la suite été suivie d'une analyse de l'ETST qui est l'espace de travail dans lequel l'effecteur du robot peut être en équilibre statique tout en recevant un torseur d'action externe donné. Il a été montré que pour un torseur d'action donné, il est possible de maximiser la largeur de l'ETST en changeant l'arrangement géométrique de l'effecteur.

Après avoir étudié l'ETS et l'ETST du robot, la planification de trajectoire à l'intérieur de l'ETST a été étudiée. Pour ce faire, des trajectoires de type polynôme de degré 5 ont été étudiées qui permettent une transition repos-repos entre deux points à l'intérieur de l'ETST. En combinant ce type de trajectoire avec les inégalités algébriques qui assurent la tension dans les câbles du robot, il a été possible de montrer une méthode permettant de déterminer une période de temps suffisamment longue pour assurer la tension dans les câbles pendant l'exécution de trajectoires de type polynôme de degré 5.

La section suivante a présenté une méthode permettant de planifier des trajectoires elliptiques qui permettent à l'effecteur de sortir de l'ETST tout en gardant les câbles du robot sous tension à tout moment pendant la trajectoire. Pour ce faire, des inégalités algébriques propres aux trajectoires elliptiques ont été établies qui mettent en relation l'amplitude d'oscillation et la fréquence d'oscillation des trajectoires elliptiques et qui assurent la tension dans les câbles du robot même lorsque l'effecteur n'est pas situé à l'intérieur de l'ETST.

Par analyse de ces inégalités algébriques, il a été possible d'établir des conditions spéciales ainsi qu'une fréquence d'oscillation spéciale qui permettent à l'effecteur d'exécuter des trajectoires elliptiques d'amplitude arbitrairement grande.

Des méthodes ont également été présentées afin de déterminer, pour une configuration géométrique et un torseur d'action donné, la fréquence qui maximise l'amplitude d'oscillation possible de l'effecteur ainsi qu'un intervalle de fréquence d'oscillation à l'intérieur duquel il est possible d'exécuter une trajectoire ayant une amplitude d'oscillation donnée.

Ensuite, une planification des trajectoires de transition entre un état de repos à l'intérieur de l'ETST vers une trajectoire elliptique a été effectuée. Les trajectoires de transition qui ont été présentées consistent en une amplification graduelle de l'amplitude d'oscillation de la trajectoire jusqu'à atteindre la pleine amplitude d'oscillation de la trajectoire elliptique finale. Une méthode a été présentée qui permet d'obtenir une période de transition qui assure la tension dans les câbles si la trajectoire elliptique finale est possible.

Enfin, un exemple d'application a été présenté qui a permis de mettre en application l'ensemble des études et des méthodes présentées dans ce chapitre.

Chapitre 3

Robot spatial à 3DDL en translation

Le robot à l'étude dans ce chapitre a d'abord été présenté en [39] lors de la conférence cablecon 2017. Dans ce papier, on présente comment cette architecture est un cas particulier d'un mécanisme avec trois paires de câbles en parallélogramme utilisant 3 moteurs. On y présente également une méthode pour déterminer les limites de son espace statique.

Le présent chapitre s'inspire du travail déjà fait dans cet article pour déterminer l'espace de travail statique du robot lorsque le centre de masse de celui-ci n'est pas coïncident avec le centre de l'effecteur et lorsqu'un torseur d'action est appliqué au centre de masse de l'effecteur. De plus, ce chapitre présente, comme au chapitre 1, une planification de trajectoire elliptique permettant à l'effecteur de sortir de l'espace de travail statique.

La géométrie du robot est présentée à la figure 3.1.

Il s'agit d'un robot suspendu à 3 paires de câbles arrangés en parallélogrammes. Chaque paire de câbles est actionnée par un moteur indépendant en M_1 , M_2 ou M_3 . Afin d'actionner deux câbles à la fois, chaque moteur entraîne une poulie double comme celle présentée à la figure 3.1. Le centre de chaque poulie double se situe sur un disque de rayon R situé sur un plan parallèle au sol. On appelle ce disque la base du robot. De chaque poulie double, chaque câble d'une paire de câbles passe par un oeillet B_{ij} pour rejoindre un point d'attache sur l'effecteur en A_{ij} . Les points d'attache sur l'effecteur sont tous situés sur un disque de rayon r et les points d'attache associés à une paire de câbles sont placés en opposition à 180 degrés. Le disque de rayon r représente la périphérie de l'effecteur du robot. Les points d'attache sur l'effecteur sont disposés d'une telle façon qu'il y ait un angle de $\pm 2\pi/3$ entre chaque paire de points d'attache. Pour que les paires de câbles forment des parallélogrammes, la distance entre deux oeillets d'une même paire de câbles situés sur la base du robot est de $2r$.

Comme pour le robot à 2DDL, l'utilisation des câbles arrangés en parallélogramme permet de contraindre l'orientation de l'effecteur du mécanisme lorsque les câbles sont en tension. Par rapport au mécanisme à 2 DDL, l'ajout de deux autres paires de câbles en parallélogramme ajoute un degré de translation de plus en plus de contraindre deux directions de rotation supplémentaires.

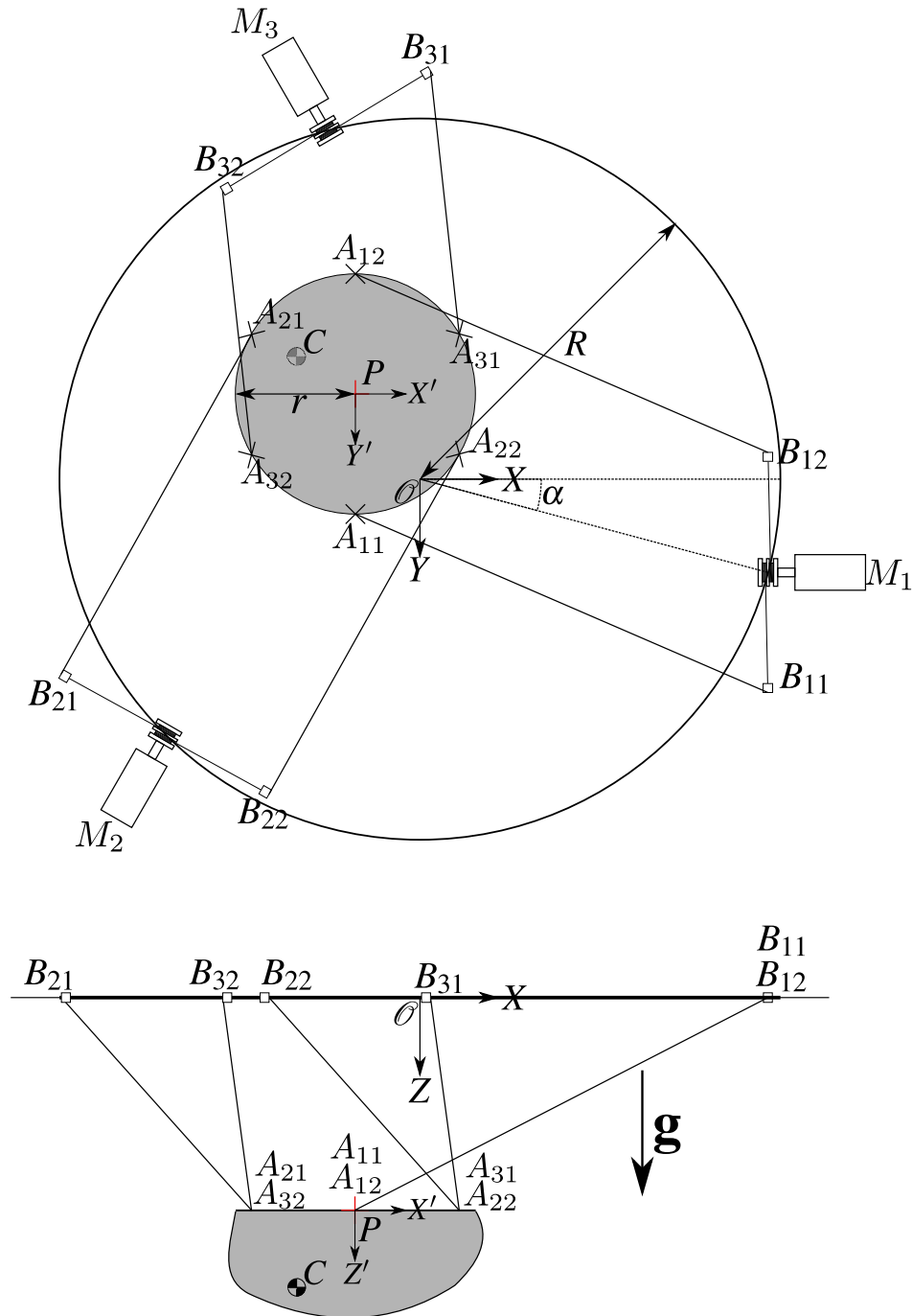


FIGURE 3.1 – Mécanisme parallèle suspendu entraîné par câble utilisant 3 paires de câbles arrangés en parallélogramme.

3.1 Modélisation cinématique du mécanisme

La figure en 3.1 présente un référentiel inertiel \mathcal{O} dont les axes X et Y sont coplanaires avec la base du robot. Les trois moteurs actionnant les poulies doubles sont indiqués comme M_1 , M_2 et M_3 . L'axe Z du référentiel est perpendiculaire au plan de la base et pointe vers le bas dans la même direction que

la gravité indiquée par le vecteur $\mathbf{g} = [0, 0, g]^T$. Le centre du référentiel de l'effecteur est donné par le point P et sa position par rapport au référentiel inertiel \mathcal{O} est donnée par le vecteur $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$. Les axes du référentiel de l'effecteur en P sont X', Y' et Z' . L'orientation de l'effecteur est constante et parallèle à celle du référentiel inertiel. Cependant, à des fins de modélisation de la cinématique, il est nécessaire de définir une matrice de rotation \mathbf{Q}_r qui représente l'orientation de l'effecteur par rapport au référentiel inertiel exprimée dans le référentiel inertiel. On imposera après la dérivation des équations de vitesse que la matrice de rotation soit égale à la matrice identité. La position des points d'attache A_{ij} sur l'effecteur par rapport au point P est donnée par les vecteurs \mathbf{a}_{ij} qui sont présentés dans le tableau 3.1 suivant.

A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_{32}
$\mathbf{a}_{11} = r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{a}_{12} = -\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{Q}_s \mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{22} = -\mathbf{a}_{21}$	$\mathbf{a}_{31} = \mathbf{Q}_s \mathbf{a}_{21}$	$\mathbf{a}_{32} = -\mathbf{a}_{31}$
$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$					

Tableau 3.1 – Position des points d'attache sur l'effecteur par rapport au point P .

Chaque paire d'oeillets associée à un moteur est orientée de telle manière à compléter le parallélogramme, c'est-à-dire que l'orientation du segment $B_{i1}B_{i2}$ par rapport au référentiel inertiel est la même que celle du segment $A_{i1}A_{i2}$ par rapport au référentiel en P . Chaque groupe poulie/paire d'oeillets est arrangé de sorte que le centre de la poulie double coïncide avec le milieu du segment $B_{i1}B_{i2}$ que l'on appelle le point B_{im} . La position de chaque point B_{im} est donnée par le vecteur \mathbf{r}_i qui peut être calculé comme suit

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{Q}_s^{i-1} \begin{bmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

À l'équation (3.1), α est présenté dans la figure 3.1 et représente en quelque sorte un angle de construction de l'arrangement des moteurs. La position de chaque oeillet B_{ij} par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur \mathbf{b}_{ij} qui peut être calculé à l'aide du vecteur \mathbf{a}_{ij} , de la matrice de rotation \mathbf{Q}_r et du vecteur \mathbf{r}_i avec l'équation suivante

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{r}_i + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2. \quad (3.2)$$

La position du centre de masse en C par rapport au point P exprimée dans le référentiel de l'effecteur est donnée par le vecteur $\mathbf{c} = [r_c \cos \phi_c, r_c \sin \phi_c, h_c]^T$, où r_c est la longueur de la projection du segment

PC dans le plan XY , ϕ_c est l'angle entre le segment PC et l'axe X et h_c est la composante de hauteur du point C le long de l'axe Z .

Les longueurs des câbles du mécanisme sont obtenues en solutionnant le PGI du mécanisme. Cette étape est présentée à la sous-section suivante.

3.1.1 Problème Géométrique Inverse (PGI)

La longueur de chaque câble est ici définie comme la longueur du vecteur partant du point A_{ij} vers le point B_{ij} . Par principe de fermeture de boucle, ce vecteur est obtenu à l'aide de l'équation suivante

$$\overrightarrow{B_{ij}A_{ij}} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{b}_{ij}, = \mathbf{p} - \mathbf{r}_i, i = 1, 2, 3, j = 1, 2. \quad (3.3)$$

De l'équation précédente, la longueur de chaque câble ρ_{ij} est obtenue en calculant la norme du vecteur $\overrightarrow{B_{ij}A_{ij}}$ à l'aide de l'expression

$$\rho_{ij} = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2. \quad (3.4)$$

Les longueurs des deux câbles d'une même paire, ρ_{i1} et ρ_{i2} sont égales de sorte que l'on peut remplacer chaque paire de ρ_{i1}, ρ_{i2} par

$$\rho_i = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)}, i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

3.1.2 Problème géométrique Direct (PGD)

La résolution du PGD de ce mécanisme s'effectue un peu de la même façon que celui du mécanisme à 2DDL du chapitre précédent, soit en mettant au carré les trois équations en (3.5) et en solutionnant le système d'équations non linéaire. À des fins de simplification, il est également nécessaire d'évaluer les expressions en (3.5) lorsque $\mathbf{Q}_r = \mathbf{I}_3$. Le système d'équations non linéaire à résoudre prend alors la forme suivante

$$x^2 + y^2 + z^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0, \quad (3.6)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0, \quad (3.7)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + D_3x + E_3y + F_3 = 0, \quad (3.8)$$

où

$$D_1 = -2R \cos \alpha, \quad E_1 = -2R \sin \alpha, \quad F_1 = R^2 - \rho_1^2,$$

$$D_2 = 2R \cos(\alpha - \pi/3), \quad E_2 = -2R \cos(\alpha + \pi/6), \quad F_2 = R^2 - \rho_2^2,$$

$$D_3 = 2R \cos(\alpha + \pi/3), \quad E_3 = 2R \sin(\alpha + \pi/3), \quad F_3 = R^2 - \rho_3^2.$$

La première étape pour résoudre ce système est de calculer la différence entre l'équation (3.6) et l'équation (3.7) et entre l'équation (3.8) et (3.7) ce qui donne le système linéaire de deux équations suivant :

$$(D_2 - D_1)x + (E_2 - E_1)y + F_2 - F_1 = 0 \quad (3.9)$$

$$(D_3 - D_2)x + (E_3 - E_2)y + F_3 - F_2 = 0. \quad (3.10)$$

La solution de ce système pour x et y est

$$x_s = \frac{(F_2 - F_3)(E_2 - E_1) + (F_2 - F_1)(E_3 - E_2)}{(D_3 - D_2)(E_2 - E_1) + (D_1 - D_2)(E_3 - E_2)} \quad (3.11)$$

$$y_s = \frac{F_1 - F_2 + (D_1 - D_2)x_s}{E_2 - E_1}. \quad (3.12)$$

On peut alors trouver la valeur de z avec l'équation (3.6),

$$z = \pm \sqrt{-(x_s^2 + y_s^2 + D_1 x_s + E_1 y_s + F_1)} \quad (3.13)$$

dont on prendra la solution positive puisque l'on considère seulement la situation où l'effecteur est suspendu sous le disque des moteurs.

Un fait important à noter par rapport à la solution du problème géométrique direct est qu'il s'agit de la même solution que pour un robot parallèle suspendu entraîné par câble à 3 câbles et à masse ponctuelle comme celui présenté par [42; 15; 18; 40; 31]. Cela montre une certaine équivalence entre ces deux mécanismes distincts et qu'il est possible de contrôler les deux mécanismes avec un même contrôleur.

3.1.3 Équations de vitesse

Les équations de vitesse permettent d'obtenir les matrices jacobiennes du mécanisme. Ces équations sont obtenues en dérivant pas rapport au temps les solutions du PGI en (3.5) comme ce qui a été fait au chapitre 1. Le système d'équation issu de ces dérivations prend la forme

$$\mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.14)$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_{11} \\ \dot{\rho}_{12} \\ \dot{\rho}_{21} \\ \dot{\rho}_{22} \\ \dot{\rho}_{31} \\ \dot{\rho}_{32} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1)^T ((\mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{11}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1)^T ((\mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{12}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2)^T ((\mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{21}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2)^T ((\mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{22}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3)^T ((\mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{31}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3)^T ((\mathbf{Q}_r \mathbf{a}_{32}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3))^T \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Dans les équations précédentes, la matrice \mathbf{Q}_r peut être remplacée par une matrice identité 3×3 si l'on considère que le robot est construit de manière à ce que l'effecteur soit parallèle à la base du robot, ce qui est nécessaire afin que les arrangements de câbles forment des parallélogrammes. La matrice \mathbf{J} devient

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1)^T & (\mathbf{a}_{11} \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1)^T & (\mathbf{a}_{12} \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_1))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2)^T & (\mathbf{a}_{21} \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2)^T & (\mathbf{a}_{22} \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_2))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3)^T & (\mathbf{a}_{31} \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3))^T \\ (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3)^T & (\mathbf{a}_{32} \times (\mathbf{p} - \mathbf{r}_3))^T \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Singularité de type I

Les lieux de singularité de type I sont obtenus en déterminant à quelle position le déterminant de la matrice \mathbf{K} égale à 0. Ici, la condition pour que le déterminant de la matrice \mathbf{K} soit zéro est

$$\prod_{i=1}^6 \rho_i = 0. \quad (3.18)$$

Si l'effecteur reste sous le disque des moteurs, alors cette condition n'advientra jamais.

Singularité de type II

Le calcul du déterminant de la matrice \mathbf{J} donne

$$\det(\mathbf{J}) = 54R^3 r^3 z^3 \cos \alpha. \quad (3.19)$$

Il y a 4 conditions possibles qui font en sorte que $\det(\mathbf{J}) = 0$. Les deux premières sont des conditions dégénérées où R ou r sont égaux à 0. La troisième condition advient lorsque $z = 0$ ce qui ne peut advenir que lorsque l'effecteur est à la hauteur du disque des moteurs. La dernière condition requiert que $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$. Cette condition est particulière et moins intuitive que les autres. Pour mieux la visualiser, la figure 3.2 présente cette condition en montrant l'influence de l'évolution de l'angle α sur la construction du mécanisme.

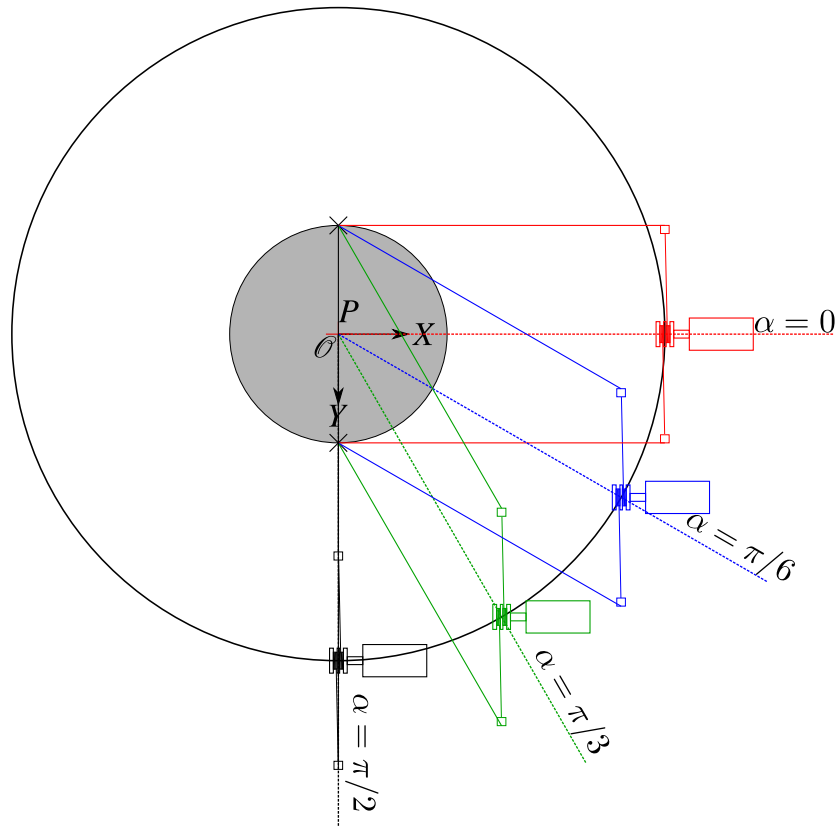


FIGURE 3.2 – Différentes configurations de l'effecteur en fonction de l'angle α .

Comme le montre la figure, lorsque $\alpha = n\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$, les projections sur le plan XY des deux câbles de chaque paire deviennent coïncidentes, ce qui veut dire que les vecteurs normaux respectifs aux trois plans formés par chaque paire de câbles sont tous coplanaires. Cependant, puisqu'aucune composante de position n'est incluse dans le calcul de $\det(\mathbf{J})$, cela veut dire que la matrice est singulière à tous les points de l'espace et donc que les vecteurs normaux sont coplanaires peu importe la position de l'effecteur.

Puisque cette singularité est de type II, cela signifie qu'il est possible d'appliquer des mouvements infinitésimaux à l'effecteur tout en gardant les câbles à une longueur constante. Plus précisément,

puisque les vecteurs normaux aux plans des paires de câbles sont coplanaires, il est impossible de contrôler un changement d'orientation autour de l'axe perpendiculaire au plan contenant ces vecteurs coplanaires.

Cette analyse des lieux de singularité du mécanisme a permis de déterminer qu'il existe deux conditions qui mettent le mécanisme en situation de singularité. La première requiert que le point P de l'effecteur soit à la hauteur du disque des moteurs. La deuxième requiert que l'angle de construction α soit égal à $n\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$. Dans cette configuration, il devient impossible de pleinement contraindre le mécanisme. En évitant ces situations, le mécanisme devient alors libre de singularités.

La section suivante porte sur l'étude des lieux d'interférence des câbles du mécanisme.

3.2 Étude des lieux d'interférence entre les câbles du mécanisme

Contrairement au mécanisme à 2DDL du chapitre précédent, le mécanisme présenté dans ce chapitre présente un arrangement des câbles qui peut rendre possible l'interférence entre des câbles. Pour cette raison, il est important de déterminer quelles conditions, si elles existent, font en sorte que certains câbles du mécanisme s'intersectent.

3.2.1 Intersection de deux segments

Un segment de droite s est ici défini comme un vecteur de longueur variable défini comme suit

$$\mathbf{s} = \mathbf{q} + \zeta(\mathbf{o} - \mathbf{q}), \quad (3.20)$$

où \mathbf{q} et \mathbf{o} sont des vecteurs exprimés dans un même repère et pointant vers les deux extrémités respectives du segment s et où $0 \leq \zeta \leq 1$.

Pour que deux segments s_1 et s_2 se croisent, il faut que l'équation

$$\mathbf{q}_1 + \zeta_1(\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) = \mathbf{q}_2 + \zeta_2(\mathbf{o}_2 - \mathbf{q}_2) \quad (3.21)$$

ait une solution (ζ_1, ζ_2) et que cette solution soit telle que $\zeta_1, \zeta_2 \in [0, 1]$.

L'équation (3.21) peut se réécrire sous une forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) & (\mathbf{q}_2 - \mathbf{o}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Si ce système d'équations a une solution pour le vecteur $\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix}^T$, le vecteur $\begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 \end{bmatrix}$ est alors dans l'espace colonne de la matrice $\begin{bmatrix} (\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) & (\mathbf{q}_2 - \mathbf{o}_2) \end{bmatrix}$. Si les segments sont exprimés dans l'espace

tridimensionnel, c'est-à-dire que $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2 \in \mathbb{R}^3$, la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) & (\mathbf{q}_2 - \mathbf{o}_2) & (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \end{bmatrix}$$

est donc nécessairement singulière de sorte que son déterminant doit être égal à 0. On peut donc écrire

$$\det \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) & (\mathbf{q}_2 - \mathbf{o}_2) & (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \end{bmatrix} \right) = (\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{o}_2) \times (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = 0. \quad (3.23)$$

L'équation en (3.23) peut être développée comme

$$(\mathbf{o}_1 - \mathbf{q}_1) \cdot (\mathbf{o}_2 \times \mathbf{q}_2) + (\mathbf{o}_2 - \mathbf{q}_2) \cdot (\mathbf{o}_1 \times \mathbf{q}_1) = 0. \quad (3.24)$$

Si cette dernière équation est vérifiée, on peut affirmer qu'il existe une solution à l'équation (3.22), mais il faut tout de même déterminer si cette solution est telle que $\zeta_1, \zeta_2 \in [0, 1]$ pour savoir s'il y a interférence.

3.2.2 Application au mécanisme 3DDL

On peut facilement utiliser les équations (3.23) et (3.24) pour déterminer si les câbles du mécanisme se croisent. La première étape consiste à déterminer si les droites coïncidentes à chaque câble du mécanisme se croisent et sous quelles conditions elles se croisent. La deuxième étape consiste à déterminer si le croisement des droites se fait à l'intérieur des limites des câbles. Si c'est le cas, alors il y a intersection de certains câbles.

1) Déterminer les conditions de croisement des droites coïncidentes aux câbles du mécanisme

Chaque câble est représenté par un vecteur \mathbf{s}_{ij} qui part du point A_{ij} et qui se rend au point B_{ij} et qui s'écrit

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}_{ij} + \zeta_{ij}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_i). \quad (3.25)$$

où $\zeta_{ij} \in [0, 1]$.

La droite coïncidente au câble \mathbf{s}_{ij} et ici appelée d_{ij} . En remplaçant les valeurs propres au câble \mathbf{s}_{ij} dans les équations, on peut alors écrire le système d'équations propre à l'intersection des câbles \mathbf{s}_{ij} et \mathbf{s}_{kl}

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{r}_i) & (\mathbf{r}_k - \mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{ij} \\ \zeta_{kl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k + \mathbf{a}_{kl} - \mathbf{r}_i - \mathbf{a}_{ij} \end{bmatrix}, i, k = 1, 2, 3, \quad i \neq k, \quad j, l = 1, 2. \quad (3.26)$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{a}_{kl}, \mathbf{r}_i$ et \mathbf{r}_k sont tous coplanaires (aucun de ces vecteurs ne possède de composante en z), on trouve avec la dernière ligne du système d'équations en (3.26) que $\zeta_{ij} = \zeta_{kl}$ de sorte que le système d'équations peut être réécrit

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i + \mathbf{a}_{kl} - \mathbf{a}_{ij}) \zeta = \mathbf{a}_{kl} - \mathbf{a}_{ij} \quad (3.27)$$

où $\zeta \in [0, 1]$.

Pour déterminer les conditions qui font en sorte que ce système d'équations a une solution, c'est à dire si les droites d_{ij} et d_{kl} se croisent, on remplace les valeurs dans l'équation (3.24) ce qui donne

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \mathbf{a}_{ij}) \cdot ((\mathbf{p} - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{a}_{kl}) + (\mathbf{p} - \mathbf{r}_k - \mathbf{a}_{kl}) \cdot ((\mathbf{p} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{a}_{ij}) = 0. \quad (3.28)$$

qui se simplifie à

$$\mathbf{p} \cdot [(\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{a}_{kl} + \mathbf{a}_{ij})] = 0. \quad (3.29)$$

Le fait que le mécanisme soit symétrique signifie qu'il n'est pas nécessaire de tester toutes les combinaisons de droites. En effet, il suffit de vérifier les 8 combinaisons suivantes (d_{11}, d_{21}) , (d_{11}, d_{22}) , (d_{11}, d_{31}) , (d_{11}, d_{32}) , (d_{12}, d_{21}) , (d_{12}, d_{22}) , (d_{12}, d_{31}) et (d_{12}, d_{32}) qui représentent toutes les interactions possibles entre les deux câbles de la première paire de câbles parallèles avec l'ensemble des autres câbles. En testant ces 8 ensembles de droites avec l'équation (3.29), on trouve que lorsque l'effecteur se situe sous la base du robot, il existe deux conditions qui font en sorte que certains ensembles de droites se croisent. Pour les ensembles (d_{11}, d_{21}) , (d_{11}, d_{31}) , (d_{12}, d_{22}) et (d_{12}, d_{32}) , la condition est

$$Rr \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

Pour les ensembles (d_{11}, d_{22}) , (d_{11}, d_{32}) , (d_{12}, d_{21}) et (d_{12}, d_{31}) , la condition est

$$Rr \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.31)$$

Il y a donc différentes valeurs de α qui rendent possible le croisement de certaines droites. La prochaine étape consiste à déterminer si le croisement des droites s'effectue quelque part sur les segments des câbles.

2) Déterminer si les intersections des droites surviennent le long des segments de câbles.

Pour déterminer ceci, on doit prendre chaque ensemble de droite listé plus haut et les tester dans le système d'équations en (3.27) avec la condition spéciale qui assure que cet ensemble de droite se

croise, soient les conditions en (3.30) et (3.31). On calcule ensuite la valeur analytique de ζ pour déterminer si cette valeur se trouve entre 0 et 1. Les résultats de cette démarche sont présentés dans le tableau 3.2.

α	(d_{11}, d_{21})	(d_{11}, d_{22})	(d_{11}, d_{31})	(d_{11}, d_{32})	(d_{12}, d_{21})	(d_{12}, d_{22})	(d_{12}, d_{31})	(d_{12}, d_{32})
0	-	$\frac{3R-\sqrt{3}r}{3R}$	-	$\frac{3R+\sqrt{3}r}{3R}$	$\frac{3R+\sqrt{3}r}{3R}$	-	$\frac{3R-\sqrt{3}r}{3R}$	-
$\pi/2$	$\frac{R+r}{R}$	-	$\frac{R+r}{R}$	-	-	$\frac{R-r}{R}$	-	$\frac{R-r}{R}$
π	-	$\frac{3R+\sqrt{3}r}{3R}$	-	$\frac{3R-\sqrt{3}r}{3R}$	$\frac{3R-\sqrt{3}r}{3R}$	-	$\frac{3R+\sqrt{3}r}{3R}$	-
$3\pi/2$	$\frac{R-r}{R}$	-	$\frac{R-r}{R}$	-	-	$\frac{R+r}{R}$	-	$\frac{R+r}{R}$

Tableau 3.2 – Valeurs analytiques des ζ pour chaque angle α et chaque ensemble de droites.

Dans le tableau 3.2, en considérant que le rayon de l'effecteur r est inférieur au rayon du disque des moteurs R , les expressions analytiques de ζ qui ont une valeur entre 0 et 1 sont surlignées en gris. On remarque qu'en fonction de l'angle α , un câble peut croiser un ou deux autres câbles du mécanisme. Par exemple, lorsque $\alpha = 0$, on trouve qu'il y a croisement des câbles associés aux droites d_{11} et d_{22} et croisement des câbles associés aux droites d_{12} et d_{31} . Puisqu'il s'agit de deux ensembles de droites complètement distincts, on comprend que l'intersection de chaque ensemble de câbles n'inclut que les câbles dans cet ensemble. Lorsque $\alpha = 3\pi/2$, il y a croisement des câbles associés aux droites d_{11} et d_{21} et croisement des câbles associés aux droites d_{11} et d_{31} . Puisque la droite d_{11} est présente dans ces deux ensembles et que le ζ du croisement de ces deux ensembles est à la même valeur, cela veut dire que le croisement de ces deux ensembles se produit au même point. Pour mieux visualiser ces «modes» de croisement, la figure 3.3 suivante présente le mécanisme lorsque $\alpha = 0$ et lorsque $\alpha = \pi/2$.

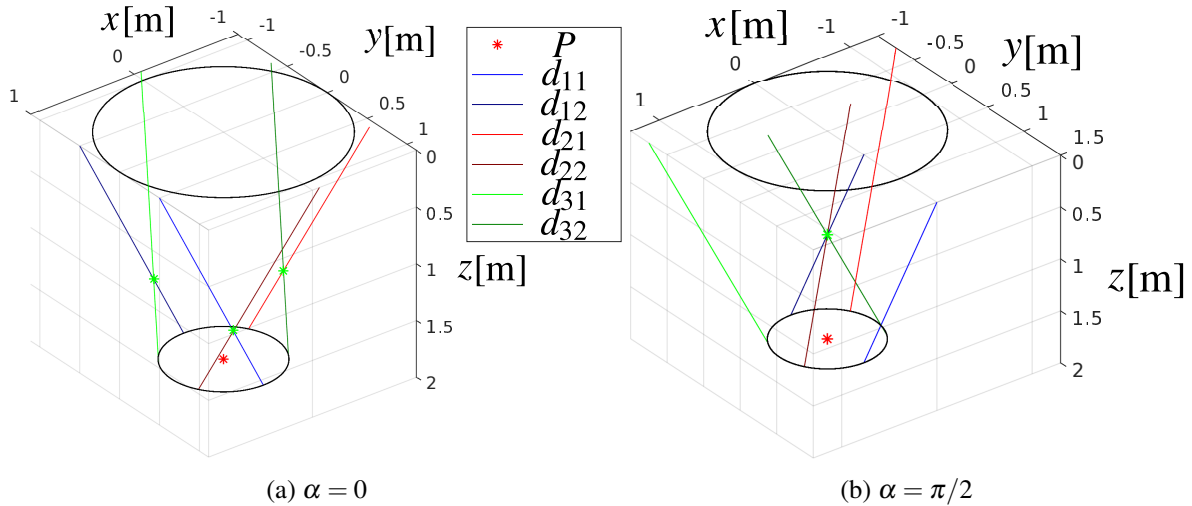


FIGURE 3.3 – Différentes configurations de l'effecteur en fonction de l'angle α .

Dans cette figure, les étoiles vertes représentent le lieu des intersections des câbles.

L'analyse des lieux d'intersection des câbles en fonction de la configuration du mécanisme permet de constater que dans la majorité des configurations du mécanisme, ses câbles ne se croisent jamais.

En effet, seules les constructions ayant des angles de construction $\alpha = n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ou $\alpha = n\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$ sont à éviter. Cette analyse laisse cependant une marge de manoeuvre sur la valeur que peut prendre α .

La prochaine section porte sur la modélisation dynamique du système qui permettra non seulement de déterminer les conditions de tension générales du mécanisme, mais également de déterminer les limites de l'espace statique ainsi que la capacité du mécanisme à supporter un torseur d'action.

3.3 Modélisation dynamique

L'application des équations générales de Newton-Euler en (2.23) au mécanisme présenté dans ce chapitre conduit au système d'équations suivant qui est très similaire à celui du mécanisme plan du chapitre précédent

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (-f_{ij} \mathbf{e}_i) + m\mathbf{g} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{c}) \times (-f_{ij} \mathbf{e}_i) \end{bmatrix} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} m\ddot{\mathbf{p}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

où

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{r}_i}{\rho_i}, i = 1, 2, 3, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Le vecteur \mathbf{t} représente le torseur d'action externe appliqué au centre de masse de l'effecteur et résulte de l'ensemble des efforts externes pouvant être appliqués sur l'effecteur. Chaque terme f_{ij} est la grandeur de la tension dans le câble partant du point A_{ij} vers le point B_{ij} .

L'équation (3.32) peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{M}\mathbf{f} = \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.36)$$

où

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} m(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{t}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{21} & f_{22} & f_{31} & f_{32} \end{bmatrix}^T, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\delta}_{11} & \boldsymbol{\delta}_{12} & \boldsymbol{\delta}_{21} & \boldsymbol{\delta}_{22} & \boldsymbol{\delta}_{31} & \boldsymbol{\delta}_{32} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{ij} = (\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{c}) \times \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3, j = 1, 2. \quad (3.40)$$

L'inversion de la matrice \mathbf{M} dans l'équation (3.36) permet d'obtenir des expressions analytiques pour les tensions f_{ij} en fonction de la position, de l'accélération, de la position et du torseur d'action appliqué sur l'effecteur. Cette inversion s'écrit

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.41)$$

où \mathbf{M}^{-1} se calcule comme

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{Adj}(\mathbf{M})}{\det(\mathbf{M})} \quad (3.42)$$

où Adj et det sont les mêmes deux opérateurs que ceux présentés dans le chapitre précédent pour le mécanisme plan. Le calcul de $\det(\mathbf{M})$ donne la même expression que celle présentée en (3.19), soit

$$\det(\mathbf{M}) = 54R^3 r^3 z^3 \cos \alpha. \quad (3.43)$$

En considérant seulement la situation où l'effecteur est suspendu, c'est à dire lorsque $z > 0$, le signe du déterminant est alors seulement fonction de l'angle de construction α . Lorsque $0 < \alpha < \pi/2$, le déterminant est positif. Les arrangements où $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$ et $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ sont cependant des réflexions composées par rapport aux axes Y et X du repère inertiel \mathcal{O} . Par conséquent, l'étude des propriétés du mécanisme lorsque α est contraint au premier quadrant est équivalent aux trois autres quadrants. Pour cette raison, seules les valeurs de α telles que $0 < \alpha < \pi/2$ seront considérées pour les études subséquentes, et le déterminant de la matrice \mathbf{M} , par analyse de l'équation (3.43) est considéré comme étant positif.

En (3.41), le vecteur \mathbf{f} est un vecteur composé des tensions dans chaque câble du mécanisme. Puisque les câbles sont seulement fonctionnels en tension, la condition suivante doit être imposée

$$\mathbf{f} \succ \mathbf{0}, \quad (3.44)$$

où \succ représente l'inégalité pour chaque composant de \mathbf{f} . Considérant cette condition et le fait que $\det(\mathbf{M}) > 0$, la condition suivante

$$\text{Adj}(\mathbf{M}) \succ \mathbf{0}, \quad (3.45)$$

devient une condition suffisante pour assurer que l'ensemble des câbles du mécanisme sont en tension. La condition vectorielle en (3.45) est équivalente au système des 6 inégalités suivantes obtenues à l'aide de l'outil de gestion d'équations analytiques de MATLAB

$$(\mathbf{p}^T \mathbf{N}_i + \mathbf{n}_i^T) \mathbf{t}^* - m (\mathbf{p}^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T) \ddot{\mathbf{p}} > 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.46)$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_i &= \begin{bmatrix} 0 & b_{xi} & c_{xi} \\ a_{yi} & 0 & c_{yi} \\ a_{zi} & b_{zi} & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\lambda}_i^T &= \begin{bmatrix} a_{ki} & b_{ki} & c_{ki} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_i &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_i & \begin{bmatrix} d_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & e_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & h_{zi} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{n}_i^T &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_i^T & d_{ki} & e_{ki} & h_{ki} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{t}^* &= \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z + mg \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et où les coefficients $a_{yi}, a_{zi}, a_{ki}, b_{xi}, b_{zi}, b_{ki}, c_{xi}, c_{yi}, c_{ki}, d_{xi}, d_{ki}, e_{yi}, e_{ki}, h_{zi}, h_{ki}$ sont tous présentés à l'annexe C. Le respect de toutes les inégalités en (3.46) pour une position, un torseur d'action, une configuration et une accélération donnée de l'effecteur signifie que tous les câbles du mécanisme sont en

tension. Chacune des inégalités est associée à l'un des câbles du mécanisme de sorte que lorsque l'une des inégalités n'est pas respectée, le câble associé à cette inégalité n'est plus en tension.

La section suivante utilise les conditions en (3.46) afin de déterminer l'espace de travail statique du mécanisme.

3.4 Espace de travail statique

Comme pour le mécanisme à 2 DDL du chapitre 2, afin de déterminer l'ETS du mécanisme, les conditions générales assurant la tension dans les câbles sont utilisées. L'espace statique est obtenu en mettant $\mathbf{t} = \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, ce qui réduit les conditions de tension à

$$\mathcal{C}_i > 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.47)$$

où

$$\mathcal{C}_i = c_{xi}x + c_{yi}y + c_{ki}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.48)$$

Ces conditions sont géométriquement équivalentes à des demi-espaces dans l'espace tridimensionnel XYZ où le plan délimitant chaque demi-espace est parallèle à l'axe Z . L'intersection des demi-espaces en (3.47) donne lieu à un prisme triangulaire convexe qui est l'ETS. Mathématiquement, on peut écrire que l'ETS est défini comme

$$\text{ETS} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{C}_i(x, y, z) > 0 \wedge z > 0, \quad \forall i \in 1, \dots, 6 \right\}. \quad (3.49)$$

La figure 3.4 suivante présente le prisme de l'ETS pour une géométrie donnée du robot. Dans cette figure, les étoiles rouges se situant sur le disque noir représentent les points M_1 , M_2 et M_3 se situant sur la base du robot et le prisme bleu représente l'ETS.

Les conditions en (3.47) peuvent également représenter des demi-plans dans le plan XY . Les droites qui délimitent ces demi-plans sur le plan XY sont définies comme

$$\mathcal{D}_i : \mathcal{C}_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.50)$$

La surface d'intersection de tous les demi-plans donne la base de l'ETS.

Bien que dans la figure 3.4, l'ETS semble avoir une hauteur finie, l'ETS est vraiment de hauteur infinie puisqu'il inclut toutes les valeurs de z supérieures à 0. Il est possible d'en venir à cette conclusion

$$R = 1\text{m}, r = 0.2\text{m}, \alpha = \pi/3\text{rad}, r_c = 0.04\text{m}, \phi_c = \pi/3\text{rad}, h_c = 0\text{m}$$

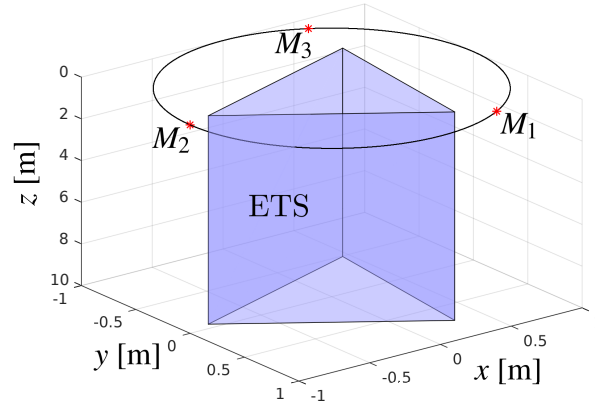


FIGURE 3.4 – Représentation du prisme de l’ETS pour une configuration donnée de l’effecteur.

puisque les inégalités en (3.47) sont respectées peut importe la position en z de l’effecteur. Le prisme de l’ETS est cependant limité à être sous le plan $z = 0$ puisque ce plan représente un lieu de singularité de l’effecteur et que l’équilibre statique de l’effecteur au-dessus de ce plan est impossible tout en ayant les câbles sous tension.

Pour mieux visualiser la base de l’ETS, les figures en 3.5 présentent, pour deux arrangements de l’effecteur donnés au tableau 3.3, l’allure de ce polygone.

Config.	α [rad]	R [m]	r [m]	r_c [m]	ϕ_c [rad]
(a)	$\pi/8$	1	0.2	0.12	$\pi/8$
(b)	$\pi/8$	1	0.2	0	$\pi/8$

Tableau 3.3 – Configuration de l’effecteur.

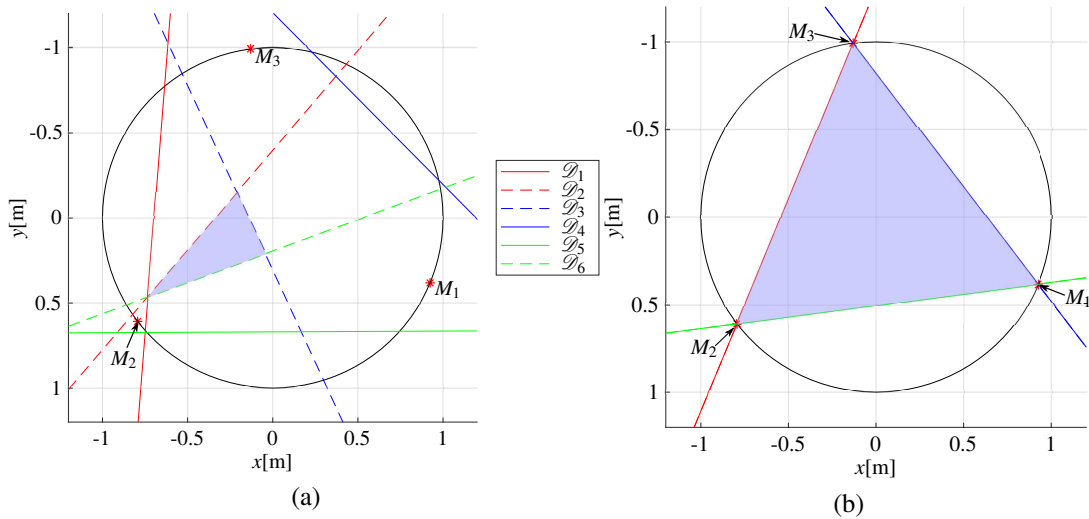


FIGURE 3.5 – Espace de Travail Statique pour un arrangement donné de l’effecteur.

Les points M_1 , M_2 et M_3 sont les positions des poulies doubles, le cercle noir est la base du robot, la

zone ombragée bleue indique la projection de l'ETS sur le plan XY et les droites rouge bleu et vertes pleines et en traits indiquent les droites \mathcal{D}_i associées à chaque condition i en (3.47).

La dimension de la base de l'ETS, lorsque le centre de masse est coïncident avec le centre de l'effecteur a d'abord été présentée dans l'article [39]. Dans cet article, seule la configuration $\alpha = -\pi/3$ a été considérée, mais la base de l'ETS prenait également la forme d'un triangle dont les trois sommets étaient coïncident avec les points M_1 , M_2 et M_3 . En fait, lorsque $r_c = 0$, il est possible de démontrer que la forme de la base de l'ETS sera toujours celle d'un triangle dont les trois sommets sont coïncidents avec les points M_1 , M_2 et M_3 et dont l'orientation sera déterminée par l'angle α , tant que $\alpha \neq n\pi/2, n = 1, 2, 3, \dots$. L'aire de la base de l'ETS \mathcal{S}_{ETS} sera alors donnée par l'équation

$$\mathcal{S}_{ETS} = \frac{\|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\|}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}. \quad (3.51)$$

Dans le cas où le centre de masse n'est pas coïncident avec le centre de l'effecteur, l'algorithme de la prochaine sous-section permet de déterminer les segments limites de la base de l'ETS ainsi que sa surface. L'aire de la base de l'ETS est en quelque sorte un indice de performance qui permet de comparer différentes configurations du robot et de déterminer laquelle offre la plus grande base de l'ETS. Bien que l'ETS soit en réalité un volume, le calcul de l'aire de sa base est suffisant pour comparer différentes configurations de l'effecteur puisque le volume d'un prisme est simplement obtenu en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur. En considérant donc la même hauteur pour deux prismes, la comparaison de leurs volumes respectifs revient à comparer les aires de leurs bases.

3.4.1 Algorithme pour déterminer les limites de la projection de l'ETS

L'algorithme utilisé pour déterminer les limites de l'aire de la base de l'ETS est composé de 4 étapes. Chaque étape est ici présentée avec une figure explicative.

1. Calculer l'ensemble des points de croisement sur une droite \mathcal{D}_i

La première étape consiste à calculer l'ensemble des points de croisements qui s'effectuent entre l'une des droites, la droite \mathcal{D}_i , avec l'ensemble des autres droites. Par exemple, pour déterminer le point de croisement entre la droite \mathcal{D}_i et la droite \mathcal{D}_j , il faut résoudre le problème suivant pour \mathbf{x}_{ij}

$$\begin{bmatrix} c_{xi} & c_{yi} \\ c_{xj} & c_{yj} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} -c_{ki} \\ -c_{kj} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

où c_{xi} , c_{yi} et c_{ki} sont les composantes de \mathcal{D}_i et c_{xj}, c_{yj} et c_{kj} sont les composantes de \mathcal{D}_j d'après l'équation (3.50). La figure 3.6 suivante présente l'ensemble des points de croisement sur la droite \mathcal{D}_3 par des cercles rouges pour une configuration donnée.

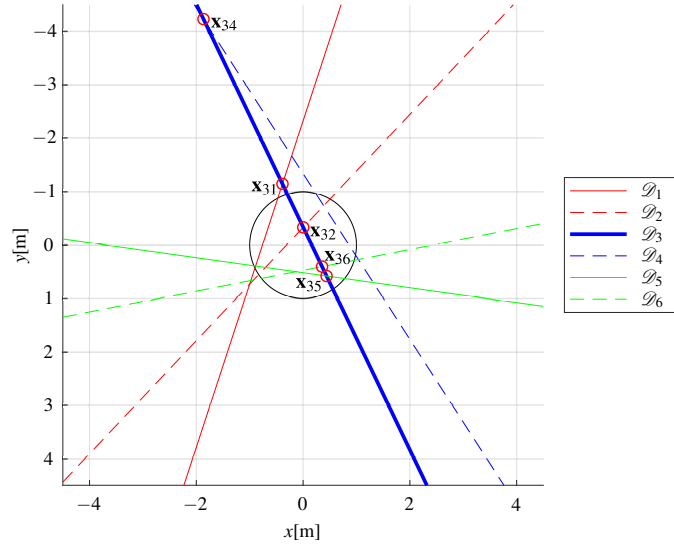


FIGURE 3.6 – Première étape pour déterminer les limites de l’ETS : Déterminer les points de croisement entre une droite \mathcal{D}_i et toutes les autres droites. Les paramètres pour cette figure sont : $R = 1$ m, $r = 0.2$ m, $\alpha = \pi/6$ rad, $r_c = 0.08$ m, $\phi_c = \pi/4$ rad.

2. Placer en ordre lexicographique les points de croisement dans une liste l_i

La seconde étape consiste à placer les 5 points de croisement calculés précédemment dans une liste et de les classer selon un ordre lexicographique vectoriel. Une liste en ordre lexicographique l de n points est ici définie comme une liste ordonnée dont le premier point est celui dont la valeur en x est la plus petite et le $n^{\text{ième}}$ point est celui dont la valeur en x est la plus grande. Advenant la situation où deux points avaient la même valeur en x , le point ayant la valeur en y la plus faible serait placé en premier. On appelle ce type d’ordre un ordre lexicographique puisqu’il fonctionne de la même façon que l’ordre utilisé pour classer les mots dans un dictionnaire. La liste l peut être écrite mathématiquement pour deux points comme

$$l = \{[x_1, y_1]^T, [x_2, y_2]^T\} \iff x_1 < x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 < y_2). \quad (3.53)$$

Par exemple, dans le cas de la liste l_3 pour la configuration présentée à la figure 3.6, les éléments de la liste seraient ordonnés comme suit

$$l_3 = \{y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}, y_{35}\} = \{x_{34}, x_{31}, x_{32}, x_{36}, x_{35}\}. \quad (3.54)$$

L’arrangement des points de croisement de la figure 3.6 selon l’ordre lexicographique est présenté à la figure 3.7.

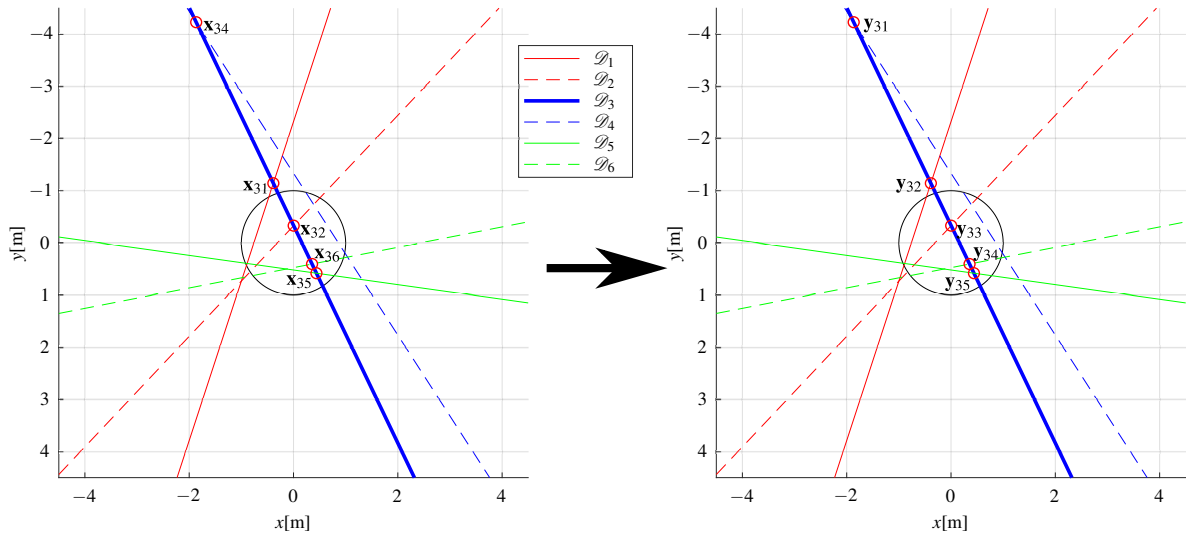


FIGURE 3.7 – Deuxième étape pour déterminer les limites de l’ETS : Classe les points en ordre lexicographique le long de la droite \mathcal{D}_i .

3. Tester les segments reliant deux points subséquents dans la liste l_i

La troisième étape consiste à déterminer quel segment de droite s_{ij} reliant deux points subséquents de la liste l_i est une limite de l’ETS. Comme il y a 5 droites, il y aura au maximum 5 points de croisement sur chaque droite \mathcal{D}_i ce qui veut dire qu’il y aura un maximum de 4 segments s_{ij} par droite. Pour déterminer si l’un des segments s_{ij} délimite l’ETS, il suffit de tester si un point se situant sur le segment s_{ij} respecte toutes les conditions complémentaires à la condition i dans les conditions en 3.47. Si c’est le cas, alors le segment délimite la projection de l’ETS du robot sur le plan XY. Il n’est pas nécessaire de vérifier que le point choisi respecte la condition i en (3.47) puisque ce point se situe exactement sur la droite qui délimite cette condition.

Pour facilement déterminer un point se situant sur la droite s_{ij} , il suffit de prendre le point moyen entre les deux points de la liste l_i qui délimitent le segment s_{ij} .

Dans l’exemple présenté aux figures 3.6 et 3.7, le segment reliant les points y_{33} et y_{34} provenant de la liste l_3 respecte l’ensemble des conditions complémentaires à la condition $i = 3$ en (3.47). Par conséquent, le segment reliant les points y_{33} et y_{34} est une limite de l’ETS. Il est possible qu’aucune paire de points subséquents de la liste l_i ne respecte l’ensemble des conditions en (3.47). Cela veut dire qu’aucune partie de la droite \mathcal{D}_i ne délimite l’ETS. La figure 3.8 suivante montre, pour le même exemple que dans les figures précédentes, le segment de la droite \mathcal{D}_3 qui délimite l’ETS et dont les bouts sont les points y_{33} et y_{34} .

4. Répéter les étapes 1 à 3 pour les autres droites

La quatrième étape consiste à répéter le processus des trois premières étapes pour les autres droites. La figure 3.9 suivante présente, pour le même exemple que dans les figures précédentes, tous les segments

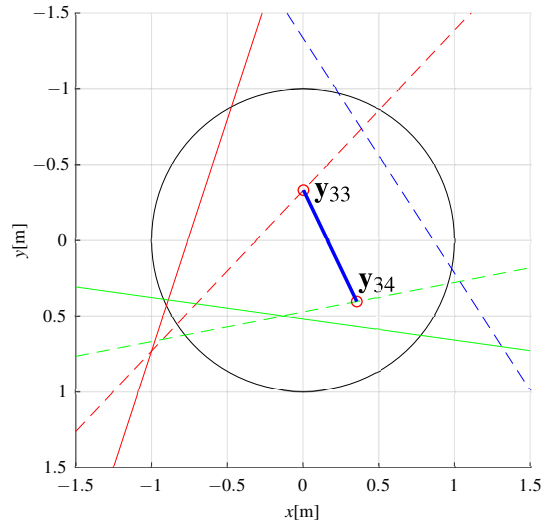


FIGURE 3.8 – Troisième étape pour déterminer les limites de l’ETS : Tester si l’une des paires de points subséquent de la liste l_i forme un segment qui respecte l’ensemble des conditions en (3.47).

limites de l’ETS ainsi que les points délimitant ces segments.

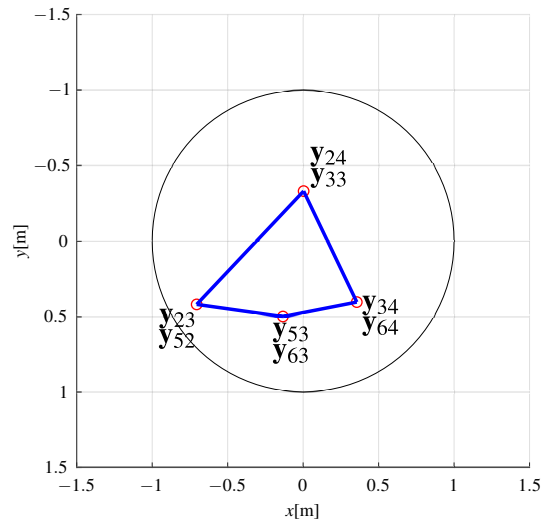


FIGURE 3.9 – Quatrième étape pour déterminer les limites de l’ETS : Refaire les étapes 1 à 3 pour les autres droites.

3.4.2 Méthode de calcul de l’aire de la base de l’ETS

Lorsque les segments délimitant la base de l’ETS ont été déterminés, il est facile de calculer l’aire de la base de l’ETS. Pour ce faire, on peut utiliser le principe de triangulation. Le principe de triangulation consiste d’abord à subdiviser un polygone convexe en plusieurs triangles. Ensuite, l’aire de chaque triangle est calculée. En additionnant l’aire de chaque triangle, on obtient alors l’aire du polygone convexe.

Une méthode pour subdiviser un polygone en plusieurs triangles consiste à prendre un point à l'intérieur du polygone et calculer les vecteurs partant de ce point et qui se rendent à chaque sommet du polygone. Un bon choix pour un tel point central est le barycentre de tous les sommets du polygone qui se trouve nécessairement à l'intérieur de celui-ci si le polygone est convexe. Si la position des sommets d'un polygone convexe sont donnés par les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$, la position du barycentre, $\bar{\mathbf{a}}$ se calcule

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i. \quad (3.55)$$

Une fois le barycentre calculé, il faut ensuite calculer les vecteurs qui partent de ce barycentre et qui se rendent jusqu'à chaque sommet du polygone. Mathématiquement, chaque vecteur \mathbf{v}_i reliant le barycentre $\bar{\mathbf{a}}$ au sommet \mathbf{a}_i se calcule

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \bar{\mathbf{a}}, \quad i = 1 \dots n. \quad (3.56)$$

L'aire S_i du triangle délimité par les vecteurs \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_{i+1} , $i = 1 \dots n - 1$, est obtenue à l'aide de l'équation suivante

$$S_i = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_{i+1} + \bar{\mathbf{a}} \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})\|, \quad i = 1 \dots n - 1. \quad (3.57)$$

L'aire totale S_T du polygone se calcule en additionnant tous les S_i ainsi que l'aire du triangle engendré par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_n . L'équation compacte qui donne S_T en fonction des positions des sommets du polygone est alors donnée par

$$S_T = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_n + \bar{\mathbf{a}} \times (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_n)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_{i+1} + \bar{\mathbf{a}} \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})\| \right) \quad (3.58)$$

La figure 3.10 présente le principe de triangulation pour calculer l'aire de la base de l'ETS présentée à la figure 3.9. Dans cette figure, les sommets de la base de l'ETS sont représentés par des cercles rouges dont les vecteurs de position sont $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ et \mathbf{a}_4 . Le barycentre est représenté par une étoile bleue et son vecteur de position est $\bar{\mathbf{a}}$. Les vecteurs partant du barycentre et se rendant au sommet de la base de l'ETS, soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ et \mathbf{v}_4 , sont représentés par des lignes bleues à l'intérieur de la base de l'ETS. L'aire de chaque triangle engendré par une paire de vecteurs \mathbf{v}_i subséquents est représentée par une couleur différente pour chaque triangle.

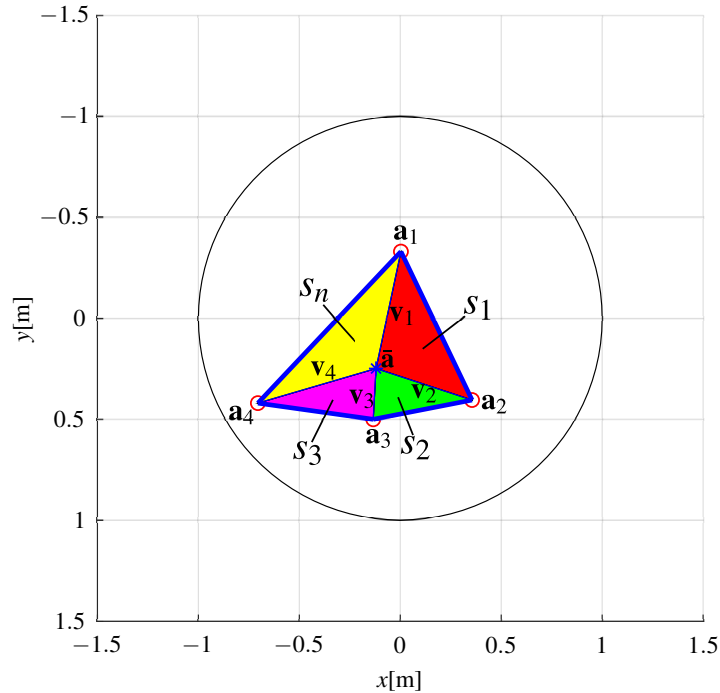


FIGURE 3.10 – Principe de triangulation pour calculer l'aire de la base de l'ETS.

Utilisant l'algorithme pour déterminer les segments limites de la base de l'ETS ainsi que la méthode de calcul de l'aire de la base de l'ETS, la prochaine sous-section étudie l'influence des paramètres géométriques sur l'aire de la base l'ETS.

3.4.3 Influence des paramètres géométriques de l'aire de la base de l'ETS

Le critère de performance étudié dans cette sous-section est la grandeur de l'aire de la base de l'ETS qui est ici appelée \mathcal{S}_{ETS} . Cette valeur devrait être la plus grande possible afin de permettre au mécanisme la plus grande liberté de mouvement possible. Les trois paramètres géométriques d'intérêt de l'effecteur pouvant influencer ce critère de performance sont r_c et ϕ_c qui donnent la position de l'effecteur ainsi que α qui est l'angle de construction du mécanisme. Cependant, en testant diverses combinaisons sur les plages possibles de ces valeurs ($r_c > 0$, $0 \leq \phi_c \leq 2\pi$ et $0 < \alpha < \pi/2$) on remarque que lorsque $r_c = 0$, on obtient toujours la valeur donnée à l'équation (3.51) qui est la valeur maximale possible de \mathcal{S}_{ETS} . Pour cette raison, il est davantage intéressant d'étudier l'influence des paramètres ϕ_c et α , pour des r_c données, sur \mathcal{S}_{ETS} .

Optimisation de \mathcal{S}_{ETS}

Comme mentionné précédemment, lorsque $r_c = 0$ on obtient toujours la valeur maximale possible pour \mathcal{S}_{ETS} . Or, lorsque $r_c \neq 0$ il est nécessaire de déterminer quelles valeurs de α et ϕ_c optimisent \mathcal{S}_{ETS} . Afin de tenir compte des différentes valeurs possibles de r_c , la fonction objectif $\bar{\mathcal{S}}_{ETS}$ à optimiser est définie comme suit

$$\bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{S}_{\text{ETS}} \left(R, r, r_c + \frac{i}{n}(\bar{r}_c - r_c), \phi_c, \alpha \right), \quad (3.59)$$

où r_c et \bar{r}_c sont les valeurs limites inférieures et supérieure de r_c . La fonction exprimée en (3.59) retourne la moyenne de toutes les aires de l'ETS calculées pour des r_c variants entre r_c et \bar{r}_c . Les limites des plages de valeurs sur lesquelles α et ϕ_c sont optimisés sont obtenues par analyse de la géométrie du mécanisme. En effet, des choix judicieux pour ces limites de plages d'optimisation sont $\underline{\alpha} = 0$ et $\bar{\alpha} = \pi/2$ pour α et $\underline{\phi}_c = 0$ et $\bar{\phi}_c = \pi/3$ pour ϕ_c . Les limites de α sont ainsi déterminées puisque comme mentionné précédemment, l'ensemble des arrangements uniques des câbles est contenu sur la plage $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ puisque les arrangements où $\alpha > \pi/2$ sont équivalents à une rotation des arrangements sur la plage $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Les limites de la plage d'optimisation de ϕ_c sont ainsi choisies puisqu'elles délimitent une surface de l'effecteur qui est répétée 6 fois autour du centre de l'effecteur. En effet, cette subdivision divise l'effecteur en 6 secteurs égaux avec un point d'attache par secteur. De plus, chaque point d'attache se situe sur la bissectrice de son secteur.

Maintenant que la fonction objectif et les contraintes (les limites des plages de valeur de ϕ_c et α) ont été déterminées, le problème d'optimisation peut être posé comme

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha, \phi_c}{\text{maximiser}} && \bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}} \\ & \text{sujet à} && \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \underline{\phi}_c \leq \phi_c \leq \bar{\phi}_c \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, la fonction *fmincon* dans MATLAB est utilisée. Il s'agit d'une fonction qui résout des problèmes de minimisation sujets à des contraintes. Afin d'utiliser cette fonction de minimisation pour maximiser $\bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}}$, il suffit de réécrire le problème d'optimisation en (3.60) comme

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha, \phi_c}{\text{minimiser}} && -\bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}} \\ & \text{sujet à} && \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \underline{\phi}_c \leq \phi_c \leq \bar{\phi}_c \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

La fonction **fmincon** requiert également une estimation initiale des variables à optimiser. Les estimés initiaux α_0 et ϕ_{c_0} sont choisis comme les valeurs médianes des plages d'optimisation de α et ϕ_c soit $\alpha_0 = \pi/4$ et $\phi_{c_0} = \pi/6$. Les valeurs numériques imposées pour ce problème d'optimisation ainsi que les résultats de l'optimisation sont présentés au tableau 3.4.

Comme présenté au tableau 3.4, les valeurs optimales de α et ϕ_c sont respectivement de $\alpha_{\text{opt}} = 1.0473 \approx \pi/3$ rad et $\phi_{c_{\text{opt}}} = 0.5236 \approx \pi/6$ rad. Pour mieux illustrer comment ces angles optimisent $\bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}}$, la figure 3.11 suivante présente l'évolution de $\bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}}$ lorsque α et ϕ_c sont non optimaux et

R [m]	r [m]	\underline{r}_c [m]	\bar{r}_c [m]	$\underline{\alpha}_c$ [rad]	$\bar{\alpha}$ [rad]	α_0 [rad]	$\underline{\phi}_c$ [rad]	$\bar{\phi}$ [rad]	ϕ_{c0} [rad]	n
1	0.2	0	0.2	0	$\pi/2$	$\pi/4$	0	$\pi/3$	$\pi/6$	100
$\alpha_{\text{opt}}[\text{rad}]$						$\phi_{c_{\text{opt}}}[\text{rad}]$				
$1.0473 \approx \pi/3$						$0.5234 \approx \pi/6$				

Tableau 3.4 – Valeurs imposées et résultat du problème d’optimisation de $\bar{\mathcal{S}}_{\text{ETS}}$.

lorsque α et ϕ_c sont optimaux. L’évolution de \mathcal{S}_{ETS} en fonction de r_c est présentée pour des valeurs non optimisées de $\alpha = \pi/2 - 0.1$ rad et $\phi_c = 0$ rad en 3.11a et pour des valeurs optimales de $\alpha = \pi/3$ rad et $\phi_c = \pi/6$ rad en 3.11b. Dans les figures 3.11a et 3.11b, chaque surface de couleur distincte représente la base de l’ETS pour une valeur de r_c donnée. Les couleurs distinctes permettent de bien représenter l’évolution de l’aire de la base de l’ETS. Chaque surface dans les figures 3.11a et 3.11b est associée à un point dans la figure 3.11c, la surface la plus importante étant associée à la plus petite valeur de r_c et la surface la plus petite à la plus grande valeur de r_c . Les étoiles rouges représentent les surfaces de la figure 3.11a et les étoiles bleues représentent les surfaces de la figure 3.11b.

La différence importante entre les surfaces de la figure 3.11b et les surfaces de la figure 3.11a montre qu’un choix judicieux des valeurs de α et ϕ_c permet d’améliorer grandement la liberté de mouvement du mécanisme même lorsque le centre de masse n’est pas coïncident avec le centre de l’effecteur.

3.5 Capacité du robot à recevoir un torseur d’action externe

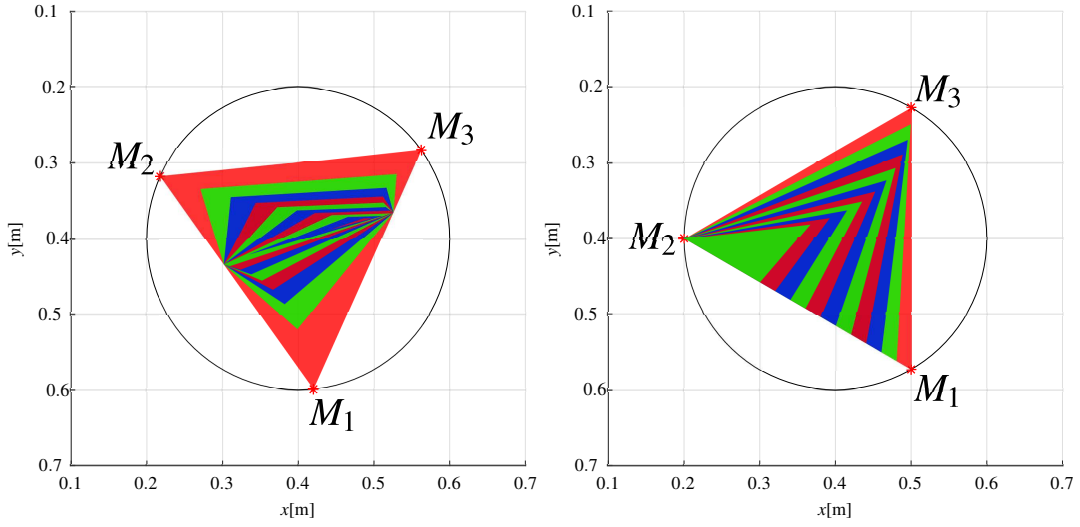
Ce sujet a déjà été étudié pour le robot du chapitre précédent. Comme le robot du chapitre 2 est plan, le torseur d’action qu’il est possible d’appliquer au centre de masse de l’effecteur est de dimension 3. Cela permettait de bien représenter, dans l’espace des composantes du torseur, le zonotope des torseurs disponibles. Or, puisque le robot présenté dans le présent chapitre est spatial, le torseur d’action pouvant être appliqué au centre de masse de son effecteur est de dimension 6. Cela rend impossible la représentation du zonotope des torseurs disponibles pour ce robot. Cependant, il est tout de même possible d’étudier l’ETST du robot qui consiste en l’ensemble des positions de l’effecteur ou celui-ci peut recevoir un torseur d’action précis tout en restant en équilibre statique.

3.5.1 Espace de Travail Statique avec Torseur(ETST)

L’ETST a déjà été présenté pour le mécanisme plan du chapitre précédent. Comme pour ce mécanisme, l’ETST est obtenu en mettant $\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ dans les conditions de tension générale du mécanisme, où $\mathbf{t}_0 = [\tau_{x0}, \tau_{y0}, \tau_{z0}, M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}]^T$ est un torseur d’action donné. Pour le mécanisme présenté dans ce chapitre, les conditions de tension deviennent alors

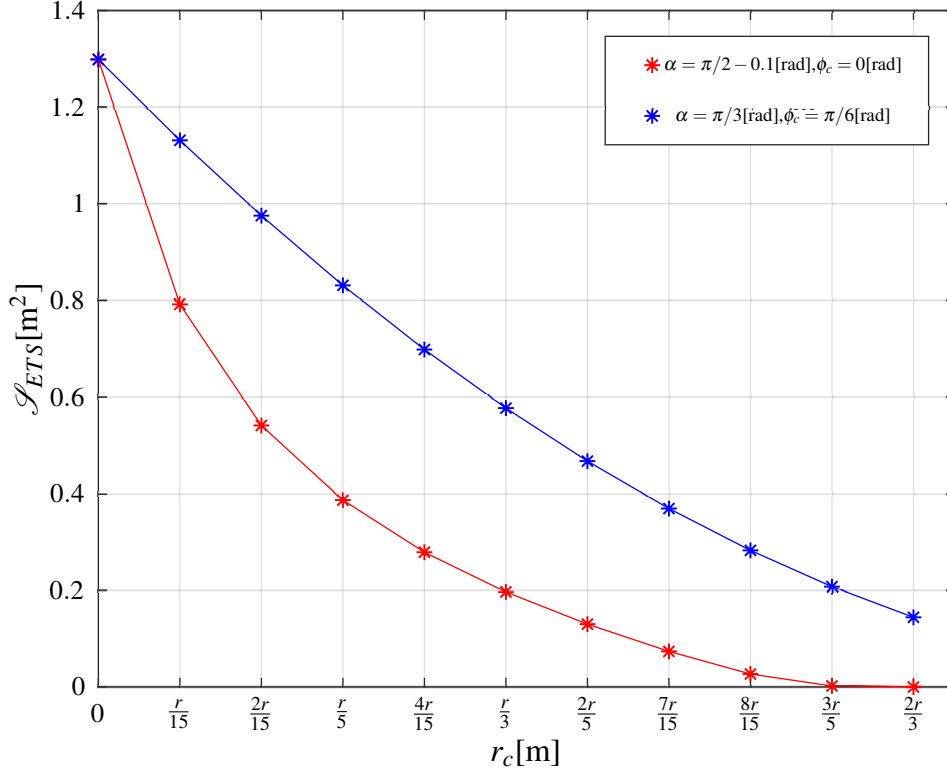
$$\mathcal{C}_i^t > 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.62)$$

où



(a) $\alpha = \pi/2 - 0.1[\text{rad}], \phi_c = 0[\text{rad}]$

(b) $\alpha = \pi/3[\text{rad}], \phi_c = \pi/6[\text{rad}]$



(c) Évolution de \mathcal{S}_{ETS} en fonction de r_c pour deux configurations.

FIGURE 3.11 – Comparaison de l'évolution de \mathcal{S}_{ETS} pour deux configurations.

$$\mathcal{C}_i' = C_{xi}x + C_{yi}y + C_{zi}z + C_{ki} \quad (3.63)$$

$$C_{xi} = \tau_{y0}b_{xi} + (\tau_{z0} + mg)c_{xi} + M_{x0}d_{xi} \quad (3.64)$$

$$C_{yi} = \tau_{x0}a_{yi} + (\tau_{z0} + mg)c_{yi} + M_{y0}e_{yi} \quad (3.65)$$

$$C_{zi} = \tau_{x0}a_{zi} + \tau_{y0}b_{zi} + M_{z0}h_{zi} \quad (3.66)$$

$$C_{ki} = \tau_{x0}a_{ki} + \tau_{y0}b_{ki} + (\tau_{z0} + mg)c_{ki} + M_{x0}d_{ki} + M_{y0}e_{ki} + M_{z0}h_{ki}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.67)$$

Les six conditions en (3.62) décrivent des demi-espaces dans l'espace XYZ. Chaque demi-espace est délimité par un plan \mathcal{P}_i dont l'équation est donnée par

$$\mathcal{P}_i : \mathcal{C}'_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.68)$$

Le volume qui résulte de l'intersection de tous les demi-espaces des conditions en (3.62) ainsi que le demi-espace $z > 0$ représente l'ETST. Lorsque $\mathbf{t}_0 = \mathbf{0}$, l'ETST coïncide avec l'ETS. Comme pour le mécanisme plan, l'ETS est donc un cas particulier de l'ETST. Mathématiquement, l'ETST est défini comme

$$\text{ETST} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{C}'_i(x, y, z, \mathbf{t}_0) > 0 \wedge z > 0, \quad \forall i \in 1, \dots, 6 \right\}. \quad (3.69)$$

Contrairement à l'ETS, cependant, l'ETST n'est pas nécessairement un prisme. Effectivement, dans le cas de l'ETS, les conditions en (3.47) étaient indépendantes de la variable z ce qui indiquait que l'ETS était nécessairement un prisme si les plans étaient indépendants les uns des autres. Or, les conditions en (3.62) ne sont pas indépendantes de z . Cela signifie que si les plans ne sont pas dépendants les uns des autres, il est possible qu'ils se croisent en un seul point. Si ce point s'avère respecter l'ensemble des conditions en (3.62) et qu'il se trouve sous les poulies, alors l'ETST aura un sommet supplémentaire et ne sera pas un prisme. Par conséquent, le calcul de la base de l'ETS ne peut pas être utilisé comme indice de performance. Afin de pouvoir comparer différentes configurations de l'effecteur sur la base de leur ETST, il faudra plutôt calculer le volume de l'ETST sur une hauteur donnée.

La raison pour laquelle le volume de l'ETST sera calculé sur une hauteur donnée est que l'ETST peut ne pas avoir de valeur maximale en z . Par conséquent, une hauteur maximale devra être attribuée afin de calculer un volume.

La prochaine sous-section présente la méthode utilisée afin de déterminer le volume de l'ETST sur une hauteur prescrite arbitrairement.

3.5.2 Algorithme pour déterminer les limites de l'ETST

Comme l'ETST n'est pas nécessairement un prisme, il n'est pas possible de calculer son volume simplement en multipliant l'aire de sa base par une hauteur donnée. Il est cependant possible d'utiliser la nature plane des équations en (3.68) afin de calculer le volume de l'ETST sur une hauteur donnée. Pour ce faire, la première étape consiste à déterminer l'ensemble des points de croisement entre les plans qui délimitent l'ETST sur une hauteur donnée. Par la suite, on déterminera lesquels de ces

points sont en réalité des sommets de l'ETST à l'aide des conditions en (3.62). Une fois les sommets déterminés, il sera enfin possible de calculer le volume de l'ETST sur une hauteur donnée.

1. Calculer les points d'intersection entre les plans

La première étape consiste à déterminer les points d'intersection entre l'ensemble des plans \mathcal{P}_i définis en (3.68) et les plans $z = z_{\min}$ et $z = z_{\max}$ qui représentent respectivement la hauteur minimale et maximale de l'effecteur. Comme il y a alors 8 plans et qu'un point est obtenu de l'intersection de 3 plans, il y aura $\binom{8}{3} = 56$ points d'intersection possibles. Pour calculer les points d'intersection, il suffira de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Par exemple, pour déterminer le point d'intersection des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3$ et le plan $z = z_{\min}$, il suffira de résoudre le système suivant pour \mathbf{x}

$$\begin{bmatrix} C_{x1} & C_{y1} & C_{z1} \\ C_{x3} & C_{y3} & C_{z3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{k1} \\ -C_{k3} \\ z_{\min} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Puisque trois plans ne se croisent pas forcément en un seul point, il se peut que ce système d'équations n'ait pas de solution ou que les plans s'intersectent à l'infini. Pour éviter d'avoir à gérer ces situations, une solution facile est de déterminer le rang de la matrice 3×3 à l'équation (3.70). Si la matrice est de rang 3, alors les 3 plans s'intersectent en un point.

La figure 3.12 montre une représentation de l'intersection des 8 plans ainsi que certains points d'intersection. Dans cette figure, les directions des demi-espaces associés à chaque plan sont indiquées par une flèche. Les points d'intersection de 3 plans sont indiqués par un cercle rouge.

2. Déterminer les points d'intersection qui sont des sommets de l'ETST

Une fois l'ensemble des points d'intersection calculés, il reste à déterminer ceux qui sont des sommets de l'ETST. Pour ce faire, on doit vérifier si les points d'intersection respectent les conditions en (3.62). Cela consiste simplement à injecter les valeurs x, y, z des points d'intersection dans les conditions en (3.62) et de vérifier si les conditions sont respectées. Il ne faut cependant pas tester les conditions associées aux plans qui ont donné lieu au point d'intersection que l'on teste puisque, par définition, ce point se situe sur les trois plans et, par conséquent, en raison de la nature stricte des inégalités, ne respecterait pas toutes les conditions.

Les points qui respectent alors toutes les conditions forment les sommets de l'ETST sur la hauteur donnée partant de z_{\min} jusqu'à z_{\max} . La figure 3.13 présente les points d'intersection de la figure 3.12 qui sont les sommets de l'ETST.

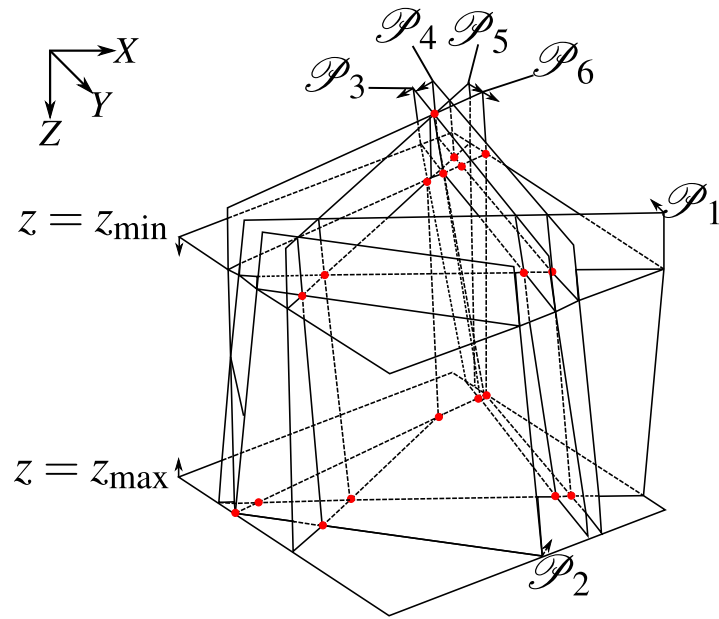


FIGURE 3.12 – Jeux de 8 plans délimitant 8 demi-espaces dont l'intersection est l'ETST.

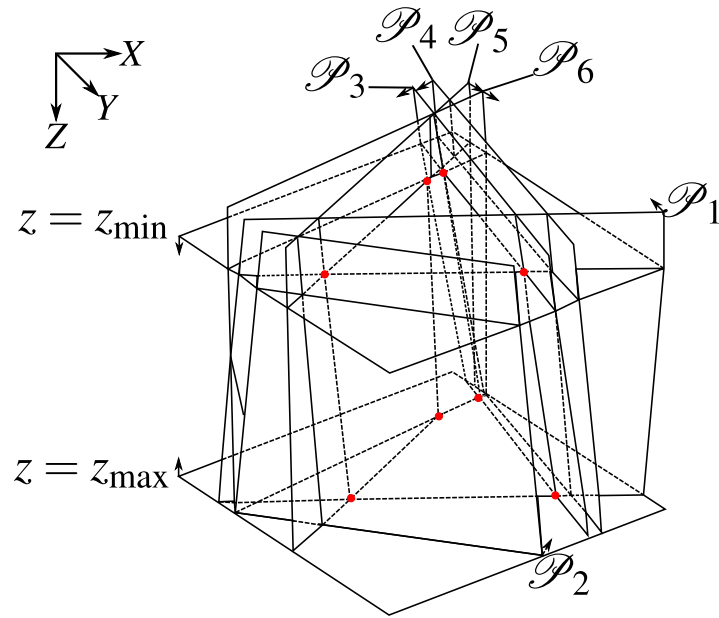


FIGURE 3.13 – Ensemble de points formant les sommets de l'ETST.

3. Calculer le volume de l'ETST et déterminer si un point se trouve à l'intérieur de l'ETST

Une fois les sommets de l'ETST déterminés, il est possible de calculer le volume de l'ETST. Pour calculer le volume, on utilise simplement la fonction MATLAB *convexhulln* qui calcule le volume du polyèdre convexe qui contient l'ensemble des points trouvés précédemment.

Comme pour l'ETS, le calcul du volume de l'ETST peut être utilisé comme un critère de performance permettant de déterminer le meilleur arrangement géométrique lorsqu'un torseur d'action est appliqué au robot. La prochaine sous-section présente une optimisation de l'ETST pour divers torseurs d'action appliqués à l'effecteur.

3.5.3 Optimisation de l'ETST

Pour optimiser l'ETST, la fonction *fmincon* dans MATLAB est utilisée. La fonction à optimiser est appelée *calc_ETST*. Cette fonction calcule les sommets de l'ETST à l'aide de l'algorithme de calcul des sommets de l'ETST présenté précédemment et calcule ensuite le volume de l'ETST à l'aide de la fonction MATLAB *convhulln*. Cette fonction retourne la valeur scalaire $\mathcal{V}_{\text{ETST}}$. Les valeurs en entrée de *calc_ETST* sont les paramètres géométriques du robot : $R, r, \alpha, r_c, \phi_c, h_c$, la hauteur sur laquelle l'ETST est calculé : z_{\min}, z_{\max} , la masse de l'effecteur : m ainsi que le torseur d'action appliqué à l'effecteur : \mathbf{t} . De ces paramètres, les paramètres d'optimisation sont α, r_c, ϕ_c et h_c . Le paramètre R n'est pas un paramètre d'optimisation dans ce problème puisque le volume de l'ETST est directement proportionnel à R . Le paramètre r n'est également pas un paramètre à optimiser, car, comme le paramètre R , l'ETST est directement proportionnel à cette valeur. Cela peut être expliqué par le fait qu'un rayon r plus important augmente le levier de chaque câble. Enfin, la masse n'est pas un paramètre à optimiser, car une augmentation de la masse augmente linéairement la tension dans les câbles.

Pour utiliser la fonction d'optimisation *fmincon*, il est nécessaire de déterminer des plages de valeur pour chaque paramètre d'optimisation. Pour les paramètres α et ϕ_c , les mêmes plages que celles utilisées pour l'optimisation de l'ETS peuvent être utilisées. Pour les paramètres r_c et h_c , on impose ici une plage de $\pm r$. La fonction *fmincon* requiert également des valeurs initiales pour chaque paramètre. Comme pour l'optimisation de \mathcal{S}_{ETS} , les valeurs initiales sont choisies comme des moyennes des bornes respectives de chaque paramètre. Le problème d'optimisation s'écrit

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha, \phi_c, r_c, h_c}{\text{minimiser}} && -\mathcal{V}_{\text{ETST}} \\ & \text{sujet à} && \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \underline{\phi_c} \leq \phi_c \leq \bar{\phi_c} \\ \underline{r_c} \leq r_c \leq \bar{r_c} \\ \underline{h_c} \leq h_c \leq \bar{h_c} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Le problème d'optimisation est ici appliqué à différentes situations. Ces exemples permettent également de constater l'effet de certains types de torseurs d'action sur le volume de l'ETST.

R [m]	r [m]	\mathbf{t} [N,Nm]	$\Delta \mathbf{r}_c$ [m]	$\Delta \phi_c$ [rad]	$\Delta \mathbf{h}_c$ [m]	$\Delta \alpha$ [rad]	m [kg]
1	0.2	$[20 \ -10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$	10
$r_{c_0} = r/2$ m		$\phi_{c_0} = \pi/6$ rad		$h_{c_0} = r/2$ m		$\alpha_0 = \pi/4$ rad	
$\mathcal{V}_{\text{ETST}} = 11.6913 \text{ m}^3$							
$r_{c_{\text{opt}}} = 0$ m		$\phi_{c_{\text{opt}}} = 0.4130$ rad		$h_{c_{\text{opt}}} = 0$ m		$\alpha_{\text{opt}} = 0.9756$ rad	

Tableau 3.5 – Premier exemple d’optimisation avec torseur composé seulement de composantes de forces.

Torseur composé seulement de composantes de force.

Le tableau 3.5 présente les paramètres d’optimisation ainsi que les résultats d’optimisation pour un premier exemple d’optimisation où le torseur d’action appliqué au centre de masse est seulement composé de composantes de force.

On remarque que dans une telle situation, la position optimale du centre de masse est au centre de l’effecteur. Bien que des valeurs de $\phi_{c_{\text{opt}}}$ et de α_{opt} soient retournées par la fonction *fmincon*, ces valeurs n’optimisent pas réellement \mathcal{V} . En effet, la valeur de \mathcal{V} pour un tel torseur et un centre de masse au centre de l’effecteur est maximal peut importe l’angle α et l’angle ϕ_c . En fait, la base de l’ETST dans cette circonstance (l’aire de l’ETST évalué à z_{min}) est équivalente à l’aire maximale possible de l’ETS qui peut être calculée à l’aide de l’expression en (3.51). Le volume de l’ETST est obtenu en multipliant cette aire par la hauteur d’évaluation de l’ETST (de z_{min} à z_{max}) puisque l’ETST est un prisme dans cette situation. C’est donc dire que l’application d’une force au centre de masse de l’effecteur n’a pas d’effet sur la le volume de l’ETST. Cependant, l’application d’une force au centre de masse de l’effecteur change la direction de l’axe principal du prisme de l’ETST. Les figures en 3.14 permettent de mieux illustrer cette idée.

Dans les figures en 3.14, les traits discontinus en noir sont les projections de l’ETST sur les plans orthogonaux de l’espace tridimensionnel XYZ .

Torseur composé de moments pures

Le tableau 3.6 présente les paramètres d’optimisation ainsi que les résultats d’optimisation pour un second exemple où le torseur d’action appliqué au centre de masse de l’effecteur est un moment pur. On remarque d’abord que la valeur du volume optimal de $\mathcal{V}_{\text{ETST}}$ est beaucoup moins importante que pour l’exemple d’optimisation précédent même si les composantes du torseur dans le deuxième exemple sont d’un ordre de grandeur significativement plus petit. Ensuite, on remarque que la valeur optimale de $r_{c_{\text{opt}}}$ n’est pas nulle. Ceci montre que dans certaines conditions, il peut être préférable de ne pas avoir un centre de masse au milieu de l’effecteur du robot. Les figures en 3.15 présentent visuellement l’arrangement géométrique optimisé du robot (en 3.15a et 3.15b) ainsi que le volume de l’ETST (en 3.15c). Dans les figures 3.15a et 3.15b, le cercle bleu est la base du robot, le cercle rouge est l’effecteur du robot, les lignes noires pleines et discontinues sont les câbles du robot. Chaque paire

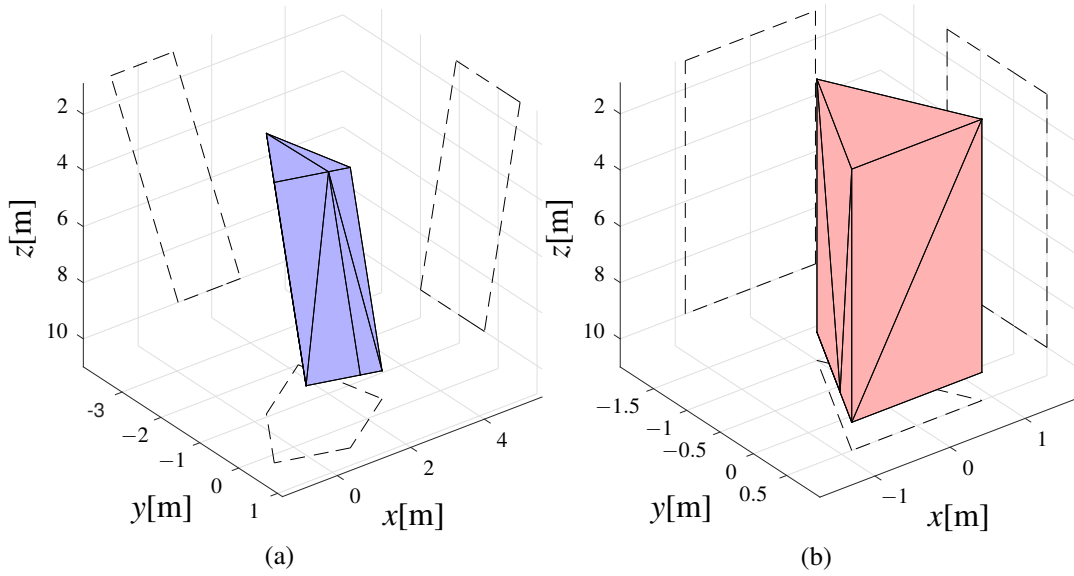


FIGURE 3.14 – En (a), le prisme bleu représente l’ETST lorsque avec les conditions du tableau 3.5. En (b), le prisme rouge représente l’ETST avec les mêmes conditions que celle du tableau 3.5 à l’exception du fait que $\mathbf{t} = \mathbf{0}_6$.

R [m]	r [m]	\mathbf{t} [N,Nm]	$\Delta\mathbf{r}_c$ [m]	$\Delta\phi_c$ [rad]	$\Delta\mathbf{h}_c$ [m]	$\Delta\alpha$ [rad]	m [kg]
1	0.2	$[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -1 \ 1]^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$	10
$r_{c_0} = r/2$ m		$\phi_{c_0} = \pi/6$ rad		$h_{c_0} = r/2$ m		$\alpha_0 = \pi/4$ rad	
$\mathcal{V}_{\text{ETST}} = 4.3341 \text{ m}^3$							
$r_{c_{\text{opt}}} = 0.0543$ m		$\phi_{c_{\text{opt}}} = 0.9596$ rad		$h_{c_{\text{opt}}} = 0$ m		$\alpha_{\text{opt}} = 0.2360$ rad	

Tableau 3.6 – Second exemple d’optimisation avec torseur composé seulement de composantes de moment.

de câbles est présentée dans les légendes des figures. Le point vert indique la position du centre de masse.

Afin de comparer l’arrangement géométrique optimisé et son effet sur le volume de l’ETST, un autre arrangement géométrique est présenté au tableau 3.7. Cet arrangement géométrique est trivialement choisi afin que le centre de masse soit au centre de l’effecteur. Les figures en 3.16 présentent cet arrangement géométrique ainsi que le volume de son ETST. On remarque rapidement qu’une optimisation des paramètres géométriques du robot a un effet important sur le volume de l’ETST. En effet, le rapport entre les volumes des deux arrangements est de 3.37. De plus, on remarque une différence significative de l’angle α entre les deux configurations. L’angle α permet d’optimiser le torseur que chaque câble applique sur l’effecteur.

R [m]	r [m]	\mathbf{t} [N,Nm]	r_c [m]	ϕ_c [rad]	h_c [m]	α [rad]	m [kg]
1	0.2	$[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -1 \ 1]^T$	0	$\pi/6$	0	$\pi/6$	10
$\mathcal{V}_{\text{ETST}} = 1.2861 \text{ m}^3$							

Tableau 3.7 – Arrangement géométrique arbitraire non optimisé exposé à un même torseur d'action composé seulement de composantes de moment.

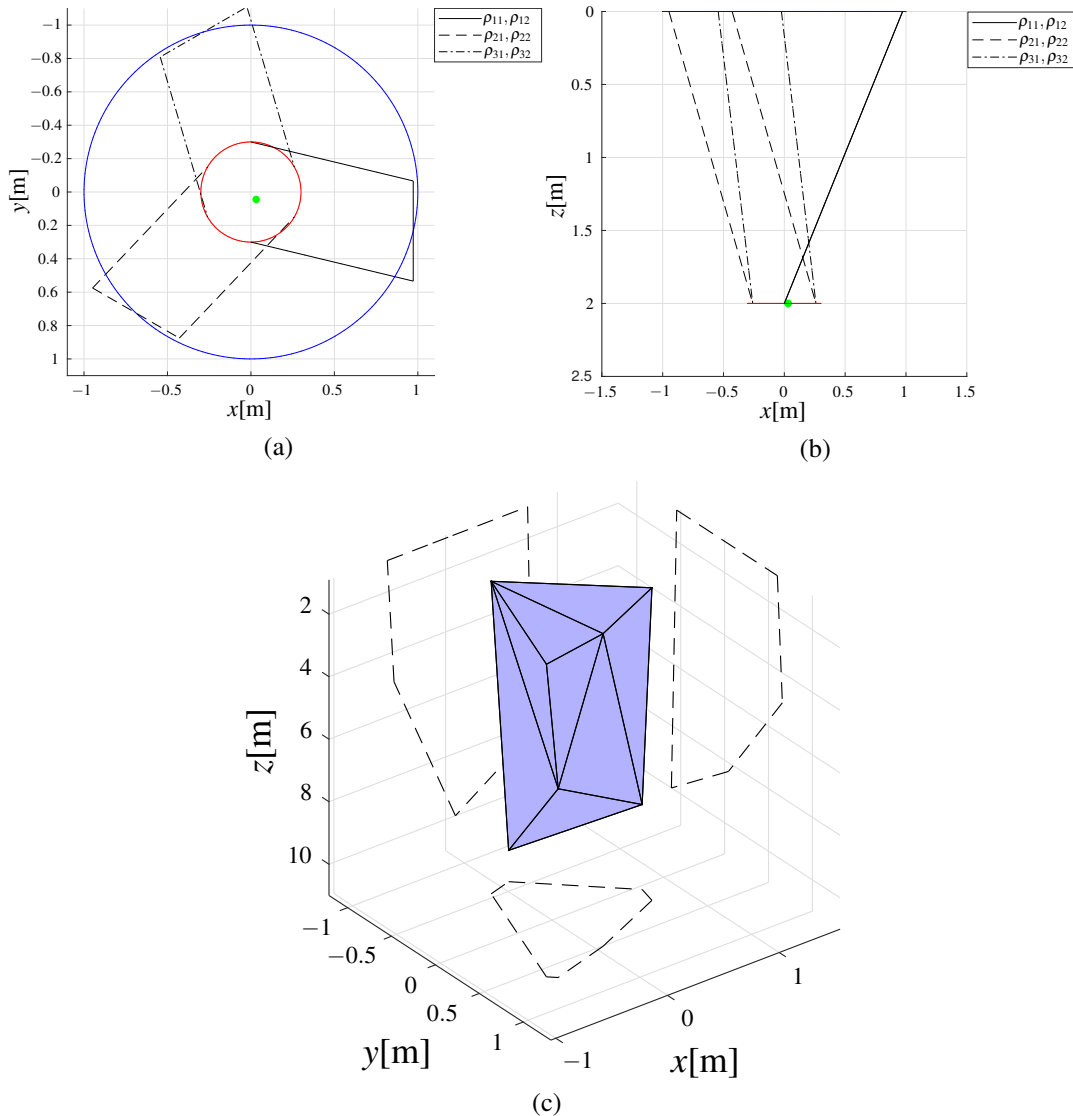


FIGURE 3.15 – En (a), une vue de haut de l'arrangement géométrique optimisé du tableau 3.6. En (b), une vue de côté de l'arrangement géométrique optimisé du tableau 3.6. En (c), le prisme bleu représente l'ETST de l'arrangement géométrique optimisé du tableau 3.6.

Torseur composé de composantes mixtes.

Le tableau 3.8 présente les paramètres d'optimisation ainsi que les résultats d'optimisation pour un troisième exemple où le torseur d'action appliqué au centre de masse de l'effecteur est composé de

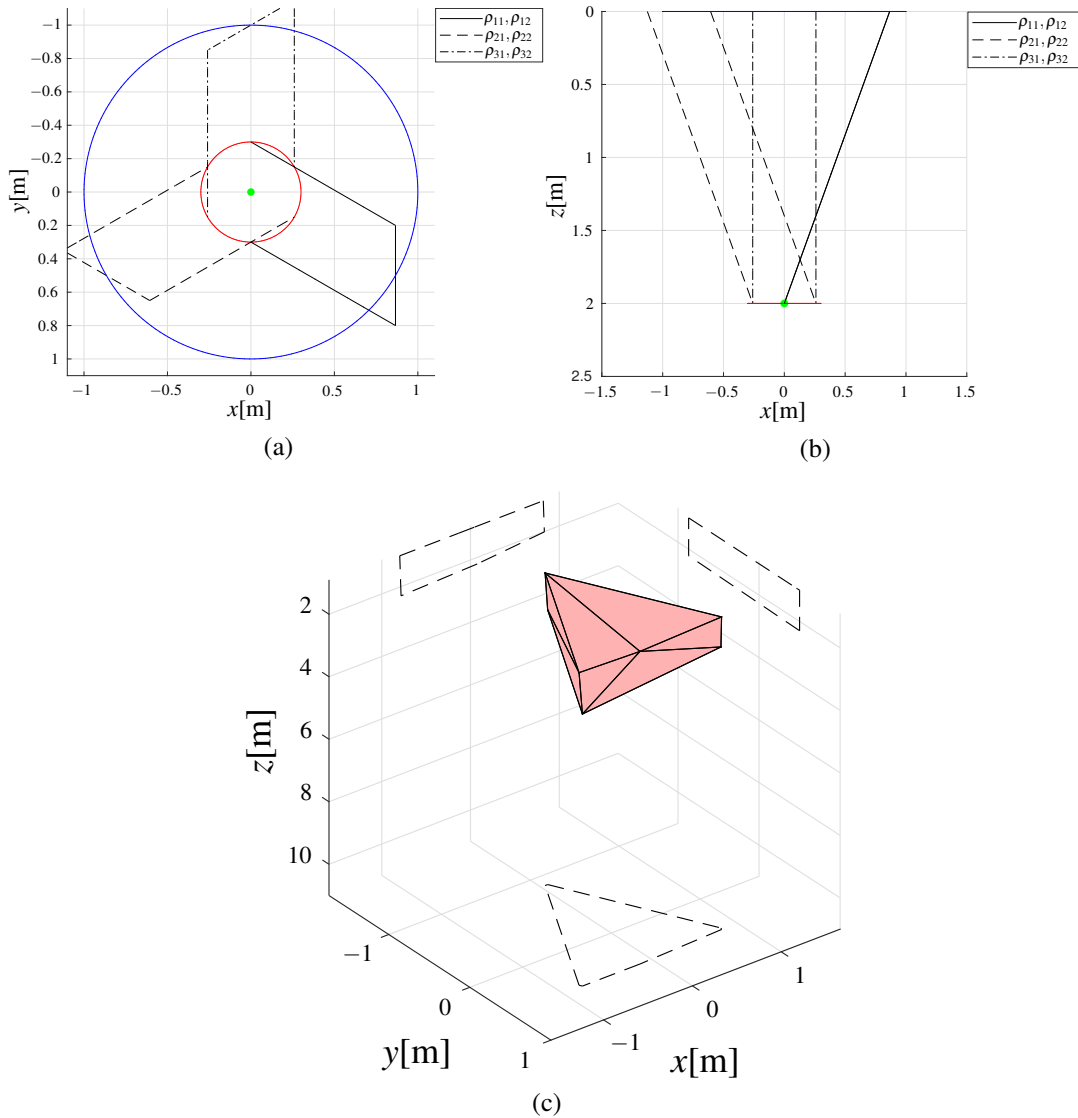


FIGURE 3.16 – En (a), une vue de haut de l’arrangement géométrique du tableau 3.7. En (b), une vue de côté de l’arrangement géométrique non-optimisé du tableau 3.7. En (c), le prisme rouge représente l’ETST de l’arrangement géométrique non-optimisé du tableau 3.6.

composantes de force et de composantes de moment. Dans cet exemple, la valeur $h_{c_{opt}}$ n’est pas nulle ce qui est différent des exemples précédents. Également, la valeur de $r_{c_{opt}}$ est assez importante comparé aux autres exemples. On remarque également que le volume optimal est très petit comparé à celui obtenu dans les autres exemples. Cela pouvait être attendu puisque la norme du torseur d’action est plus importante dans cet exemple. Les figures en 3.17 présentent visuellement l’arrangement géométrique optimisé du robot (en 3.17a et 3.17b) ainsi que le volume de l’ETST (en 3.17c). Afin de comparer l’arrangement géométrique optimisé et son effet sur le volume de l’ETST, un autre arrangement géométrique est présenté au tableau 3.9. Cet arrangement géométrique est trivialement choisi afin que le centre de masse soit au centre de l’effecteur. Les figures en 3.18 présentent cet arrangement géométrique ainsi que le volume de son ETST.

R [m]	r [m]	\mathbf{t} [N,Nm]	$\Delta \mathbf{r}_c$ [m]	$\Delta \phi_c$ [rad]	$\Delta \mathbf{h}_c$ [m]	$\Delta \alpha$ [rad]	m [kg]
1	0.2	$[-20 \ -10 \ 0 \ 2 \ -1 \ 2]^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$	10
$r_{c_0} = r/2$ m		$\phi_{c_0} = \pi/6$ rad		$h_{c_0} = r/2$ m		$\alpha_0 = \pi/4$ rad	
$\mathcal{V}_{ETST} = 2.3287 \text{ m}^3$							
$r_{c_{opt}} = 0.0928$ m		$\phi_{c_{opt}} = 0.8178$ rad		$h_{c_{opt}} = -0.1386$ m		$\alpha_{opt} = 0.1432$ rad	

Tableau 3.8 – Troisième exemple d’optimisation avec torseur composé de composantes de force et de composantes de moment.

R [m]	r [m]	\mathbf{t} [N,Nm]	r_c [m]	ϕ_c [rad]	h_c [m]	α [rad]	m [kg]
1	0.2	$[-20 \ -10 \ 0 \ 2 \ -1 \ 2]^T$	0	$\pi/6$	0	$\pi/6$	10
$\mathcal{V}_{ETST} = 0.3079 \text{ m}^3$							

Tableau 3.9 – Arrangement géométrique arbitraire non optimisé exposé à un même torseur d’action composé de composantes de force et de composantes de moment.

Le rapport entre le volume de l’ETST de l’arrangement géométrique optimisé et non optimisé est de 7.5632. Ce rapport important justifie l’utilisation d’une optimisation de l’arrangement géométrique lorsque la norme du torseur d’action appliqué au centre de masse de l’effecteur est importante.

Analyse des trois exemples d’optimisation

Les trois exemples précédents ont d’abord permis de montrer l’influence de l’application de torseurs d’action variés au centre de masse du robot. Le premier exemple a permis de montrer qu’un torseur composé seulement de composantes de force n’influence pas le volume de l’ETST, mais change l’orientation de l’axe principal du prisme de l’ETST. Ensuite, le deuxième et le troisième exemple ont permis de montrer que des composantes de moment dans le torseur d’action influencent significativement le volume de l’ETST et qu’il est particulièrement important d’optimiser l’arrangement géométrique de l’effecteur dans cette situation.

Ensuite, le deuxième et le troisième exemple ont permis de montrer que pour certains torseurs d’action appliqués à l’effecteur, il était préférable de ne pas avoir le centre de masse au centre de l’effecteur. Également, ces exemples ont permis de montrer que l’angle α pouvait être utilisé comme une variable d’optimisation afin d’optimiser le volume de l’ETST.

La présente section portant sur l’ETST ainsi que la section précédente portant sur l’ETS du robot ont permis de mettre en lumière l’influence des paramètres géométriques du robot ainsi que les efforts appliqués à l’effecteur du robot sur la dimension de son ETS et de son ETST. La détermination de ces espaces de travail est une étape clé nécessaire à l’utilisation d’un tel robot dans de réelles applications robotiques. De plus, on verra à la prochaine section qu’il est nécessaire de pouvoir déterminer les limites de ces espaces de travail afin d’effectuer des trajectoires elliptiques dynamiques avec le robot.

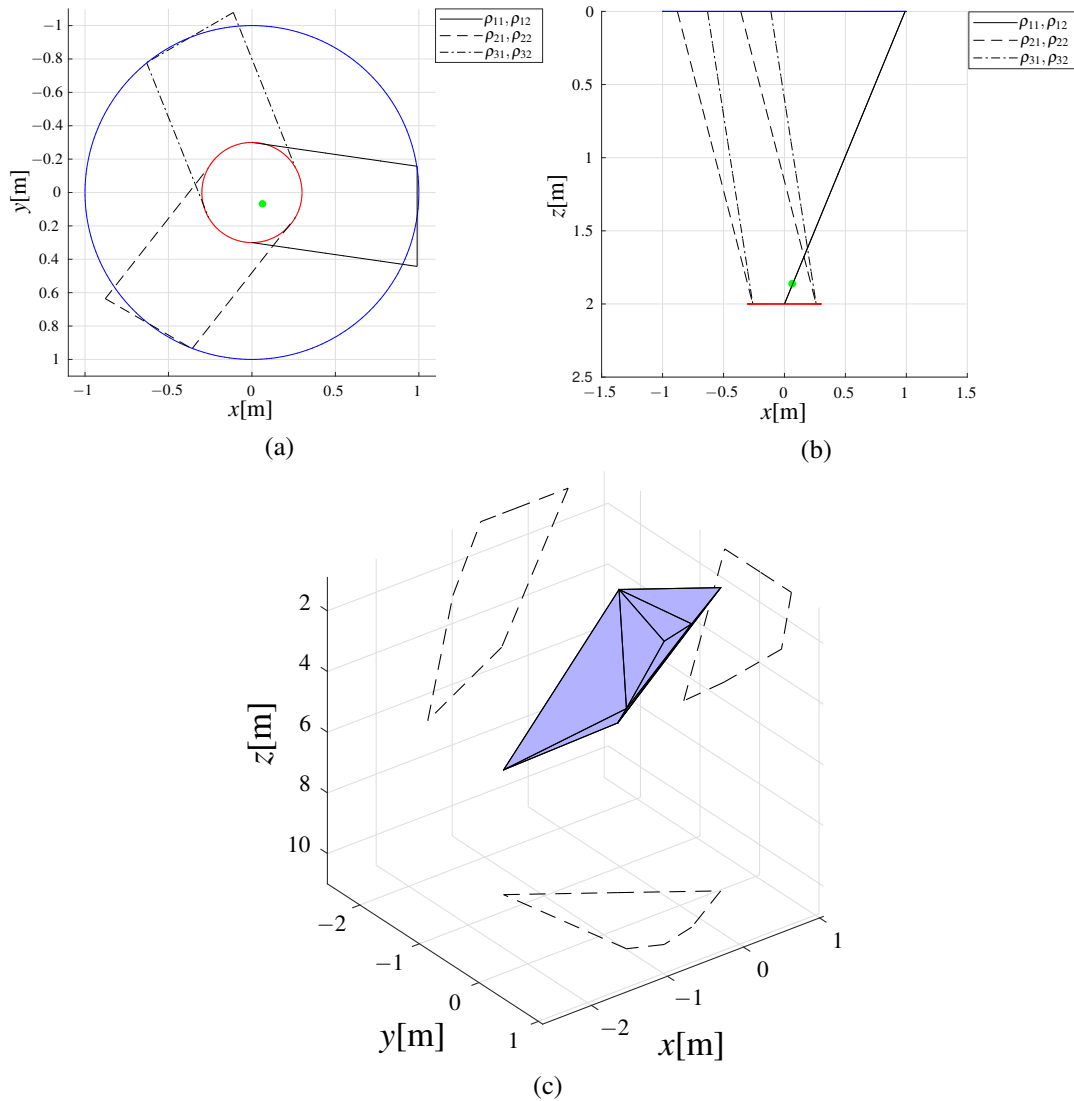


FIGURE 3.17 – En (a), une vue de haut de l’arrangement géométrique du tableau 3.8. En (b), une vue de côté de l’arrangement géométrique optimisé du tableau 3.8. En (c), le prisme bleu représente l’ETST de l’arrangement géométrique optimisé du tableau 3.8.

3.6 Planification de trajectoire elliptique

La planification de trajectoire elliptique pour le robot à 3DDL du présent chapitre est très similaire à celle faite dans le chapitre précédent pour le robot à 2DDL. La première étape consiste à substituer la forme paramétrique d’une trajectoire elliptique dans les conditions de tension en (3.46). Par la suite, une dérivation mathématique est effectuée afin de déterminer les points de la trajectoire où les tensions dans les câbles du robot sont à leurs extremums. De ces dérivations, de nouvelles inégalités de tension sont obtenues qui, lorsqu’elles sont toutes respectées, assurent que l’ensemble des câbles soient en tension lors de l’exécution de la trajectoire elliptique.

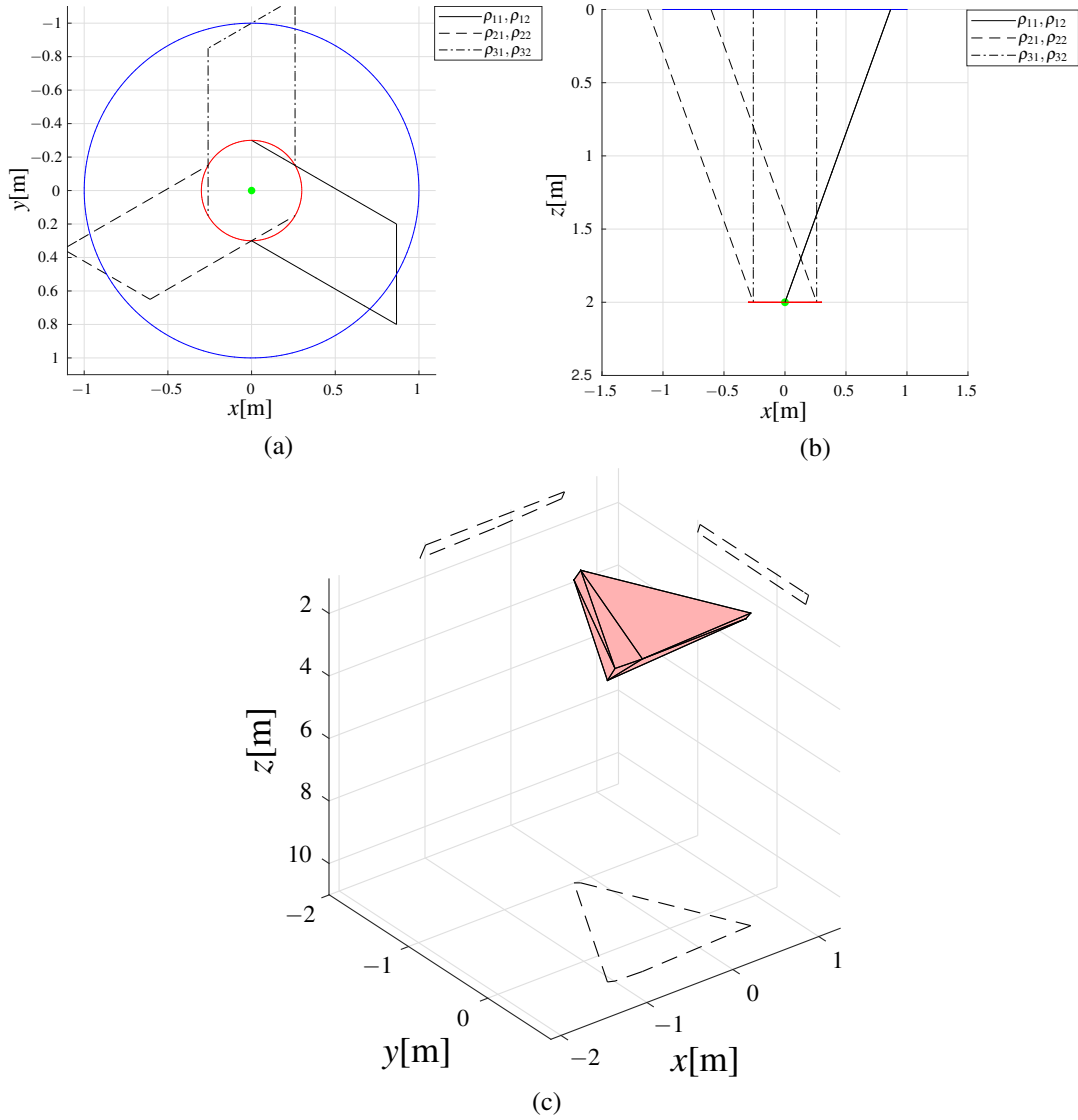


FIGURE 3.18 – En (a), une vue de haut de l'arrangement géométrique du tableau 3.9. En (b), une vue de côté de l'arrangement géométrique non-optimisé du tableau 3.9. En (c), le prisme rouge représente l'ETST de l'arrangement géométrique non-optimisé du tableau 3.9.

3.6.1 Forme paramétrique simplifiée d'une trajectoire elliptique générale

Comme pour le robot à 2DDL, une forme paramétrique simplifiée d'une trajectoire elliptique est utilisée. Cette forme paramétrique simplifiée s'écrit

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_e(t), \quad (3.72)$$

$$\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ y_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_e(t) = \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

où \mathbf{p}_c est le vecteur de position du centre de l'ellipse, $2r_x, 2r_y$ et $2r_z$ sont les dimensions de la boîte dans laquelle l'ellipse est pleinement comprise, t est le temps, ω est la fréquence angulaire de la trajectoire et ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z sont des paramètres qui sont fonction de la position initiale de la trajectoire (lorsque $t = 0$), des dimensions de l'ellipse ainsi que de son orientation dans l'espace. Le passage de la forme paramétrique générale à cette forme simplifiée est présenté à l'annexe B .

La double dérivée par rapport au temps de la trajectoire en (3.72) s'écrit

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p}(t) = -\omega^2\mathbf{p}_e(t). \quad (3.74)$$

3.6.2 Substitution dans les inégalités de tension

En substituant les équations (3.72) et (3.74) dans les inégalités de tension générales en (3.46), les inégalités suivantes sont obtenues

$$\left(m\omega^2 \left((\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_e(t))^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \right) + \mathbf{t}^{*T} \mathbf{N}_i^T \right) \mathbf{p}_e(t) + (\mathbf{p}_c^T \mathbf{N}_i + \mathbf{v}_i^T) \mathbf{t}^* > 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.75)$$

En analysant les termes des inégalités en (3.75), on trouve que les termes $\mathbf{p}_e(t)^T \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{p}_e(t)$, sont nuls. On peut alors réécrire les inégalités comme

$$h_i(t) > 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.76)$$

où

$$h_i(t) = \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_e(t) + v_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.77)$$

où

$$\mathbf{u}_i^T = m\omega^2 \left(\mathbf{p}_c^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \right) + \mathbf{t}^{*T} \mathbf{N}_i^T, \quad (3.78)$$

$$v_i = (\mathbf{p}_c^T \mathbf{N}_i + \mathbf{v}_i^T) \mathbf{t}^* \quad (3.79)$$

sont tous des termes qui sont indépendants du temps. On peut encore transformer les inégalités en(3.77) définissant les termes $K_x = r_x/r_y$ et $K_z = r_z/r_y$ et en transformant chaque composante du vecteur $\mathbf{p}_e(t)$ en une somme de fonctions trigonométriques. Ce développement mathématique s'écrit

$$\mathbf{p}_e(t) = \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix} = r_y \begin{bmatrix} K_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ \sin(\omega t + \phi_y) \\ K_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix} = r_y \mathbf{K} \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

où

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} K_x \cos \phi_x \\ \cos \phi_y \\ K_z \cos \phi_z \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} K_x \sin \phi_x \\ \sin \phi_y \\ K_z \sin \phi_z \end{bmatrix}, \quad r_y \neq 0. \quad (3.83)$$

On peut alors réécrire les termes $h_i(t)$ comme

$$h_i(t) = r_y \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} + v_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.84)$$

3.6.3 Conditions suffisantes pour assurer la tension dans les câbles lors d'une trajectoire elliptique

En reprenant la forme développée des $h_i(t)$ en (3.84), il est facile de déterminer des conditions suffisantes qui assurent une tension dans les câbles lors de l'exécution de trajectoires elliptiques, de la même façon que pour le robot du chapitre 2. Pour ce faire, on doit déterminer les extremums des fonctions trigonométriques $h_i(t)$. Pour ce faire, on procède de la même façon qu'au chapitre 2 en dérivant les expressions des $h_i(t)$ par rapport au temps et en mettant le résultat égal à 0. Ce développement donne les expressions suivantes :

$$\frac{dh_i(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{bmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.85)$$

En utilisant l'identité trigonométrique de base $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on obtient alors

$$\sin(\omega t) = \pm \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_1}{\Theta_i}, \quad \cos(\omega t) = \pm \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_2}{\Theta_i}, i = 1, \dots, 6, \quad (3.86)$$

où

$$\Theta_i = \sqrt{(\mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_1)^2 + (\mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_2)^2}. \quad (3.87)$$

Pour que les expressions en (3.86) puissent satisfaire les équations en (3.85), il faut que la racine pour le terme égal à $\sin(\omega t)$ et que la racine pour le terme égal à $\cos(\omega t)$ soient de même signe.

En remplaçant les termes en (3.86) dans les conditions en (3.76), on obtient alors 12 inégalités (on double les inégalités en raison des deux paires de racines possibles en (3.86)), qui prennent la forme

$$\pm r_y \Theta_i + v_i > 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.88)$$

Ces inégalités reviennent à limiter l'amplitude d'oscillation à être dans un certain intervalle symétrique par rapport à $r_y = 0$ qui s'écrit

$$r_y \in \left] \frac{-v_i}{\Theta_i}, \frac{v_i}{\Theta_i} \right], \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.89)$$

Or, puisque cet intervalle est symétrique et que le signe de r_y influence simplement la direction de la trajectoire, un choix arbitraire est ici appliqué comme au chapitre 2 de ne garder que les valeurs positives de r_y dans l'intervalle précédent. Ainsi, en prenant la racine négative des inégalités en (3.88) et en isolant r_y , on obtient

$$r_y < r_{yi} = \frac{v_i}{\Theta_i}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.90)$$

On remarque que les termes v_i ne sont rien d'autre que les termes \mathcal{C}_i^l développés dans la section précédente sur l'ETST et évalués au point $\mathbf{p}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$, soit le centre de l'ellipse. Cela veut dire que si le centre de l'ellipse que décrit une trajectoire elliptique est à l'intérieur de l'ETST (si les conditions $\mathcal{C}_i^l > 0$ évaluées au point $\mathbf{p}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ sont toutes respectées), alors les termes v_i seront supérieurs à 0. Or, puisque l'intersection d'un jeu de demi-espace est nécessairement un espace unique, une condition nécessaire pour que l'ensemble des inégalités en (3.90) soit respecté est que le point $\mathbf{p}_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ se trouve à l'intérieur de l'ETST. Comme pour la planification de trajectoire du chapitre 2, il s'agit d'une condition primordiale qui assure la tension dans les câbles lors de l'exécution de trajectoires elliptiques.

Bien que dans les inégalités en (3.90), l'amplitude r_y soit isolée, ces inégalités sont propres à une trajectoire elliptique ayant un ensemble d'amplitude r_x, r_y et r_z donné puisque les conditions incluent également les termes K_x et K_z . Pour obtenir des inégalités qui isolent spécifiquement r_x ou r_z , il suffit de multiplier les inégalités en (3.90) par K_x ou K_z respectivement, ce qui donne

$$r_x < r_{xi} = \frac{K_x v_i}{\Theta_i}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.91)$$

$$r_z < r_{zi} = \frac{K_z v_i}{\Theta_i}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.92)$$

Le fait que les inégalités en (3.90) sont dépendantes des trois amplitudes r_x, r_y et r_z signifie que si l'ensemble des inégalités en (3.90) sont respectées, l'ensemble des inégalités (3.91) et (3.92) le seront également. Algébriquement, il s'agit d'une évidence puisque les ensembles d'inégalités en (3.91) et (3.92) sont simplement obtenues en multipliant les inégalités en (3.90) des deux côtés par une même constante, ce qui ne change pas la logique des inégalités.

Dans la situation où $r_y = 0$ les équations précédentes ne tiendraient pas. Il serait cependant tout de même possible d'obtenir des conditions ayant la même forme que celles présentées en (3.91) et (3.92). Si $r_y = 0$, on pourrait réécrire les conditions en (3.84) comme

$$h_i(t) = r_x \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}' \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} + v_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.93)$$

où \mathbf{K}' s'écrit

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \cos \phi_x & \sin \phi_x \\ 0 & 0 \\ K'_z \cos \phi_z & K'_z \sin \phi_z \end{bmatrix}, \quad K'_z = r_z / r_x. \quad (3.94)$$

Le développement mathématique permettant d'obtenir des conditions indépendantes du temps serait alors le même que celui effectué lorsque $r_y \neq 0$. Dans la situation où $r_x = r_y = 0$, on réécrirait les conditions en (3.84) comme

$$h_i(t) = r_z \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}'' \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} + v_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.95)$$

où \mathbf{K}'' s'écrit

$$\mathbf{K}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \phi_z & \sin \phi_z \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

3.6.4 Analyse des conditions suffisantes

Comme au chapitre précédent, il est possible de représenter les inégalités en (3.90) dans le plan (r_y, ω) . Cette représentation permet de bien mettre en évidence l'influence de la fréquence d'oscillation sur l'amplitude d'oscillation qui est permise. La figure 3.19 suivante présente les inégalités en (3.90) pour une disposition géométrique de l'effecteur, des paramètres d'ellipse ainsi qu'un torseur donné appliqué au centre de masse de l'effecteur.

Dans cette figure, la surface ombragée représente l'ensemble des couples (r_y, ω) qui respectent l'ensemble des inégalités de tension. Les valeurs sur l'abscisse sont divisées par la valeur R afin de donner un ordre de grandeur des amplitudes possibles. Les valeurs sur les ordonnées sont divisées par la fréquence spéciale ω_n . Cette fréquence d'oscillation spéciale a les mêmes propriétés spéciales que dans le chapitre 2, mais elle s'exprime comme

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mg + \tau_z}{mz_c}}. \quad (3.97)$$

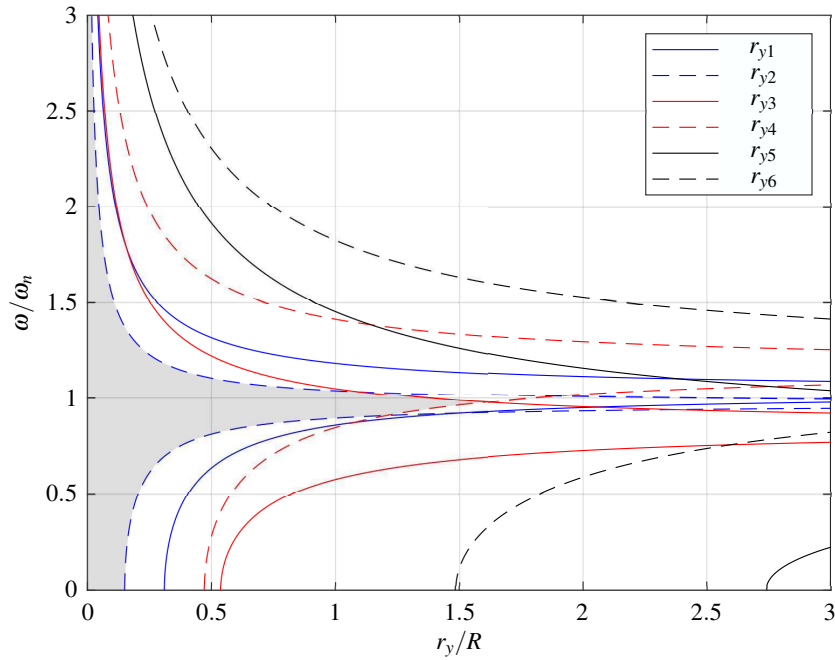


FIGURE 3.19 – Relations entre l'amplitude d'oscillation selon l'axe Y et la fréquence d'oscillation d'une trajectoire elliptique. Les paramètres géométriques du robot sont donnés par les valeurs suivantes : $R = 1$ m, $r = 0.2$ m, $r_c = 0.02$ m, $\phi_c = \pi/8$ rad, $h_c = 0.1$ m et $m = 10$ kg. Les composantes du torseur \mathbf{t} appliqué au centre de masse de l'effecteur sont les suivantes : $\tau_x = 0$ N, $\tau_y = 4$ N, $\tau_z = 0$ N, $M_x = 2$ Nm, $M_y = 2$ Nm et $M_z = 0$ Nm. Les propriétés du type de trajectoire elliptique testé sont les suivantes : $K_x = 1$, $K_z = 0.2$, $\phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$ rad, $\mathbf{p}_c = [0, 0, 5]^T$ m.

Les méthodes permettant de déterminer l'amplitude d'oscillation maximale ainsi que l'intervalle de

fréquence qui permet une amplitude d'oscillation donnée qui ont été présentées au chapitre précédent peuvent être réutilisées pour le robot présenté dans ce chapitre.

Cas particulier permettant une amplitude d'oscillation maximale

Comme au chapitre précédent, il est possible d'utiliser une fréquence d'oscillation spéciale ω_n afin de maximiser l'amplitude d'oscillation possible d'une trajectoire elliptique.

En substituant la fréquence ω_n exprimée en (3.97) dans les inégalités en (3.90), en mettant le paramètre $h_c = 0$ et en mettant tous les composantes de moment dans le torseur t égales à 0, on trouve que les inégalités en (3.90) se simplifient à

$$r_y < r_{yi} = \frac{z_c}{K_z}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.98)$$

De même, on trouve que les inégalités en (3.91) et en (3.92) deviennent respectivement

$$r_x < r_{xi} = \frac{K_x z_c}{K_z}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.99)$$

$$r_z < r_{zi} = z_c, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.100)$$

Puisque les constantes K_x et K_z sont des valeurs choisies, les inégalités en (3.98), (3.99) et (3.100) signifient que lorsque le centre de masse est au niveau des points d'attache des câbles sur l'effecteur et qu'aucun moment n'est appliqué sur l'effecteur, il est possible d'effectuer des trajectoires elliptiques d'amplitude arbitrairement grande tant et aussi longtemps que le point P de l'effecteur demeure sous la base du robot.

Pour mieux illustrer ce concept, l'exemple de la figure 3.20 est repris, mais avec $h_c = M_x = M_y = M_z = 0$. La figure 3.20 montre clairement que la fréquence d'oscillation ω_n est celle qui permet l'amplitude d'oscillation la plus grande. En fait, pour cet exemple précis, l'amplitude d'oscillation possible selon l'axe X et selon l'axe Y dans le référentiel \mathcal{O} est de 25 m. Ces amplitudes maximales ne sont pas infinies car $K_z \neq 0$ dans cet exemple.

Comme pour le robot du chapitre précédent, la fréquence spéciale ω_n peut être utilisée pour simplifier le processus de planification de trajectoire lorsque $h_c = M_x = M_y = M_z = 0$. Lorsque ce n'est pas le cas, les méthodes pour déterminer l'amplitude maximale possible ainsi que l'intervalle de fréquences permettant une amplitude donnée présentées au chapitre précédent peuvent être utilisées.

La prochaine sous-section présente la planification de la trajectoire de transition entre l'état de repos et la trajectoire elliptique.

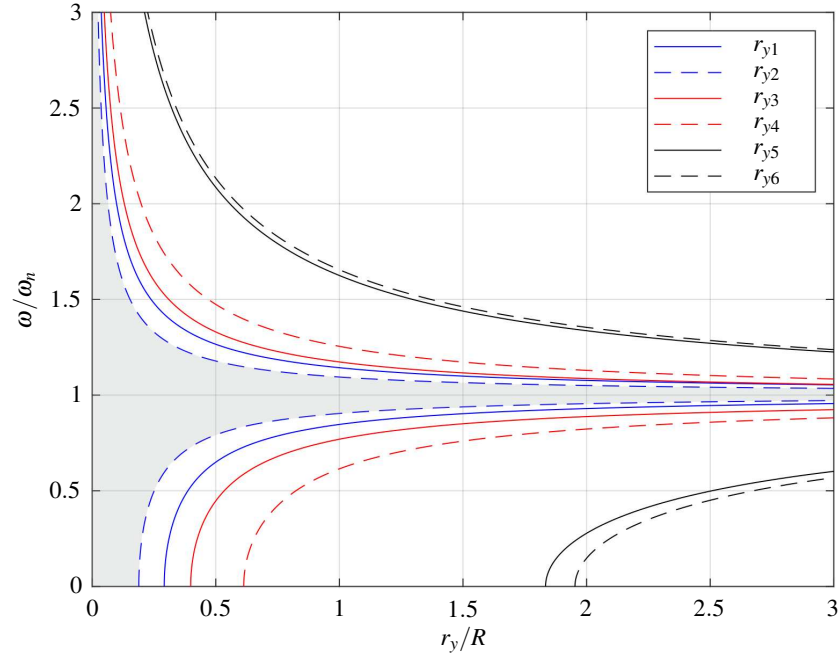


FIGURE 3.20 – Relations entre l’amplitude d’oscillation selon l’axe Y et la fréquence d’oscillation d’une trajectoire elliptique. Les paramètres géométriques du robot sont donnés par les valeurs suivantes : $R = 1$ m, $r = 0.2$ m, $r_c = 0.02$ m, $\phi_c = \pi/8$ rad, $h_c = 0$ m et $m = 10$ kg. Les composantes du torseur \mathbf{t} appliqué au centre de masse de l’effecteur sont les suivantes : $\tau_x = 0$ N, $\tau_y = 4$ N, $\tau_z = 0$ N, $M_x = 0$ Nm, $M_y = 0$ Nm et $M_z = 0$ Nm. Les propriétés du type de trajectoire elliptique testé sont les suivantes : $K_x = 1$, $K_z = 0.2$, $\phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$ rad, $\mathbf{p}_c = [0, 0, 5]^T$ m.

3.6.5 Trajectoire de transition

La planification de trajectoire de transition pour le robot présenté dans ce chapitre est assez similaire à celle présentée dans le chapitre précédent. En effet, un polynôme de degré 5 est encore utilisé pour effectuer une amplification graduelle de l’amplitude de mouvement et une méthode permettant de déterminer une période de temps minimale assurant une tension dans les câbles est utilisée.

Mathématiquement, on peut écrire la position d’un point suivant cette trajectoire comme

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_c + \delta_1(t)\mathbf{p}_e(t), \quad (3.101)$$

où

$$\delta_1(t) = \begin{cases} (6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3), & 0 \leq t < T, \\ 1, & t \geq T, \end{cases} \quad (3.102)$$

où t est le temps et T est la période de transition.

On peut réécrire l'expression en (3.101) sous une autre forme qui permettra plus facilement de dériver les équations. Cette nouvelle forme de l'expression s'écrit

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_c + r_y \delta_1(t) \mathbf{K} \mathbf{s}(t), \quad (3.103)$$

où les termes \mathbf{K} et $\mathbf{s}(t)$ ont été présentés dans la sous-section précédente.

En dérivant deux fois l'expression en (3.101) par rapport au temps, on obtient l'expression de l'accélération d'un point suivant la trajectoire de transition et qui s'écrit

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t) = r_y \left((\delta_3(t) - \omega^2 \delta_1(t)) \mathbf{K} \mathbf{s}(t) + 2\omega \delta_2(t) \mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{s}(t) \right), \quad (3.104)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_2(t) &= \frac{d\delta_1}{dt} = \frac{30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2}{T} \\ \delta_3(t) &= \frac{d\delta_2}{dt} = \frac{120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau}{T^2}, \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En substituant les expressions en (3.103) et (3.104) dans les conditions de tension en (3.46), on obtient alors

$$h_i(t)^* + p_i(t) > 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.105)$$

où

$$h_i(t)^* = r_y \delta(t) \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{s}(t) + v_i, \quad (3.106)$$

$$p_i(t) = -mr_y \left(\delta_3(t) \left(\mathbf{p}_c^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \right) \mathbf{K} + 2\delta_2(t) \omega \left(\left(\mathbf{p}_c^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \right) \mathbf{K} \mathbf{E} + \delta_1(t) \mathbf{s}(t)^T \mathbf{K}^T \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{K} \mathbf{E} \right) \right) \mathbf{s}(t). \quad (3.107)$$

Comme mentionné précédemment, les termes v_i sont positifs si le centre de la trajectoire elliptique finale est à l'intérieur de l'ETST. De plus, la condition suivante doit tenir puisque $\delta_1(t)$ varie entre 0 et 1

$$|r_y \delta_1(t) \mathbf{u}_i^T \mathbf{Ks}(t)| \leq |r_y \mathbf{u}_i^T \mathbf{Ks}(t)|. \quad (3.108)$$

On trouve donc que $h_i(t)^* \geq h_i(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Puisque $p_i(t)$ est inversement proportionnel à T , la période de transition, il est donc certain qu'il existe une période de transition suffisamment longue pour que les conditions en (3.105) soient toutes respectées. On peut faire la même affirmation pour la trajectoire de transition de trajectoire elliptique vers repos si cette transition et une version miroir de la trajectoire de transition de repos vers trajectoire elliptique.

Une méthode simple permettant de déterminer la période de transition la plus courte possible est d'incrémenter graduellement la période de transition et de vérifier si l'ensemble des conditions en (3.105) sont satisfaites. Pour déterminer rapidement une période de transition qui assure que toutes les conditions en (3.105) sont respectées, il est possible de déterminer des conditions qui, lorsque respectées, assurent le respect des conditions en (3.105) mais qui sont indépendantes du temps. Pour ce faire, on définit une fonction q_i qui s'écrit

$$q_i = \min(h_i^*(t)) - m r_y (\beta_{1i} \max(\delta_3(t)) + \beta_{2i} \max(\delta_2(t))), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.109)$$

où

$$\beta_{1i} = \left| \left(\mathbf{p}_c^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \right) \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|, \quad (3.110)$$

$$\beta_{2i} = 2\omega \left| \left(\mathbf{p}_c^T \boldsymbol{\Lambda}_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \right) \mathbf{K} \mathbf{E} + \max(\delta_1(t)) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}^T \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{K} \mathbf{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|. \quad (3.111)$$

Or, $\max(\delta_3(t)) = \frac{10\sqrt{3}}{3T^2}$, $\max(\delta_2(t)) = \frac{15}{8T}$ et $\max(\delta_1(t)) = 1$.

On a également

$$\min(h_i^*(t)) = \min(h_i(t)) = r_y \Theta_i + v_i, \quad (3.112)$$

d'après le développement mathématique fait entre (3.76) et (3.88).

Par conséquent, on peut réécrire les $q_i(t)$ comme

$$q_i = r_y \Theta_i + v_i - m r_y \left(\beta_{1i} \frac{10\sqrt{3}}{3T^2} + \beta_{2i} \frac{15}{8T} \right) > 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.113)$$

En utilisant les équations (3.113), il est alors possible d'utiliser la même méthode que celle présentée à l'équation (2.136) du chapitre précédent afin de déterminer directement une période de transition assez longue qui assure le respect des conditions en (3.105).

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, un RPSEC à 6 câbles et 3 DDL en translation a été présenté. Les 6 câbles sont arrangés en 3 paires de câbles arrangés en parallélogrammes. Chaque paire de câbles est actionnée par un moteur indépendant à l'aide d'une poulie à double gorge. L'utilisation d'un arrangement de câbles en parallélogramme permet de contraindre l'orientation de l'effecteur du mécanisme lorsque les câbles sont en tension.

La modélisation cinématique du robot a par la suite été effectuée. Cela a permis de solutionner le PGI ainsi que le PGD. De ces solutions, il a ensuite été possible de développer les équations de vitesse du robot qui ont permis d'établir les lieux de singularité du robot. Il a été montré que seules deux conditions mettaient le robot dans un mode de singularité : Lorsque l'effecteur du robot se situe à la hauteur de la base du robot et lorsque l'angle de construction $\alpha = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \dots$. Ces deux conditions de singularité sont facilement évitables.

Une étude des lieux d'interférence entre les câbles du robot a ensuite été présentée. Cette étude a permis de mettre en évidence deux possibilités de croisement des câbles en fonction de l'angle de construction α . Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots$, un groupe de trois câbles provenant de paires de câbles distinctes s'intersectent tous en un seul point. Lorsque $\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$, chaque câble intersecte un câble provenant d'une paire de câbles adjointe. Ces deux valeurs d'intersection ont permis de mettre en lumière une plage de valeur disponible pour l'angle α entre 0 et $\pi/2$. Sur cette plage, le robot est libre de singularités et libre d'interférences entre les câbles, ce qui rend cette architecture particulièrement intéressante.

Une modélisation dynamique du robot a par la suite été présentée. Cette modélisation dynamique a permis de déterminer des inégalités algébriques qui assurent une tension supérieure à 0 dans les câbles lorsqu'elles sont respectées.

L'élaboration des conditions algébriques assurant la tension dans les câbles a d'abord été utilisée pour déterminer les limites de l'ETS du robot, c'est-à-dire l'ensemble des positions où l'effecteur du robot peut être situé tout en étant en équilibre statique sans qu'aucun effort externe ne soit appliqué sur l'effecteur. Une analyse de la forme géométrique de cet ensemble de points a permis d'établir qu'il s'agit d'un prisme de hauteur infinie dont l'aire de la base est fonction des paramètres géométriques du robot (Le rayon de la base R , le rayon de l'effecteur r , la position relative du centre de masse ainsi que l'angle de construction α). Une méthode permettant de calculer l'aire de la base de l'ETS a ensuite été présentée et a été utilisée afin de déterminer les paramètres géométriques qui optimisent l'aire de la base de l'ETS. Cette optimisation a pu montrer que l'aire de la base de l'ETS était optimale lorsque

le centre de masse était coïncident avec le centre de l'effecteur, mais que si cette coïncidence n'était pas possible, certains arrangements géométriques du robot étaient préférables.

Les conditions algébriques assurant la tension dans les câbles ont également été utilisées afin de déterminer les limites de l'ETST du robot, c'est-à-dire l'ensemble des positions où l'effecteur du robot peut être maintenu en équilibre statique pendant qu'un torseur d'action externe y est appliqué. Une méthode de calcul du volume de l'ETST a été présentée. Le volume de l'ETST a ensuite été utilisé comme critère de performance dans un problème d'optimisation afin de choisir l'arrangement géométrique du robot qui optimise le volume de l'ETST pour un torseur d'action donné. Ce problème d'optimisation a permis de montrer que, dans certains cas, il était préférable d'avoir un centre de masse qui n'était pas coïncident avec le centre de l'effecteur.

La section suivante a porté sur la planification de trajectoires dynamiques elliptiques. Cette planification de trajectoire a permis de déterminer des conditions suffisantes qui assurent une tension dans les câbles en fonction des amplitudes d'oscillation des trajectoires elliptiques ainsi que de la fréquence à laquelle la trajectoire elliptique est produite. Ces conditions ont également permis de mettre en évidence des conditions particulières qui permettent à l'effecteur d'effectuer des trajectoires elliptiques d'amplitudes arbitraires : le torseur d'action appliqué au centre de masse de l'effecteur ne doit pas contenir de composantes de moment ; la trajectoire elliptique doit toujours rester sous la base du robot ; la fréquence d'oscillation doit être fixée à $\omega = \omega_n$; le centre de l'ellipse doit se trouver à l'intérieur de l'ETST. Une forme de trajectoire de transition permettant au robot de passer du repos à une trajectoire elliptique a également été présentée.

Contrairement au chapitre précédent, un exemple d'application des sujets présentés dans ce chapitre n'a pas été développé. Cependant, le chapitre suivant présente une validation expérimentale de la méthode présentée pour calculer les limites de l'ETS et de l'ETST en plus de valider expérimentalement une trajectoire de type elliptique sortant de l'ETST pour un effecteur dont le centre de masse est décentré.

Chapitre 4

Validation expérimentale du mécanisme à 3DDL en translation

L'objectif de ce chapitre est de présenter différentes expériences qui ont été effectuées dans le cadre de cette maîtrise afin de valider les résultats théoriques obtenus au chapitre 3. Plus particulièrement, deux différents types d'expériences ont été entreprises : des expériences dites quasi statiques et des expériences dynamiques. Les expériences quasi statiques présentent une validation de l'ETST lorsque le centre de masse est coïncident avec le centre de l'effecteur ainsi qu'une validation de l'ETST lorsque le centre de masse est décentré. Les expériences dynamiques présentent une planification de trajectoire elliptique qui sort l'effecteur du robot à l'extérieur de l'ETST avec différents arrangements de l'effecteur .

La première section de ce chapitre présente la méthodologie utilisée lors des expérimentations. On y présente les différentes pièces du robot, la procédure d'assemblage du robot, la méthode de contrôle des moteurs du robot, la méthode utilisée pour générer des trajectoires repos à repos et la méthode pour générer des trajectoires elliptiques. Les sections suivantes présentent les modalités de chaque expérience mentionnée précédemment ainsi que les résultats des expérimentations et des discussions concernant les résultats.

4.1 Méthodologie

4.1.1 Éléments constitutifs du robot

Le robot utilisé lors des expériences est présenté aux figures 4.1, 4.2 et 4.3.

La figure 4.1 présente une vue rapprochée de l'effecteur et des câbles qui y sont attachés. Comme le robot présenté au chapitre 3, les points d'attache des câbles (indiqués par des cercles rouges) sont disposés de façon symétrique en périphérie de l'effecteur (soit avec un angle de $\pi/3$ rad entre chaque œillet). Le point d'attache de chaque câble se situe 4 cm plus haut que le centre de l'effecteur. Les

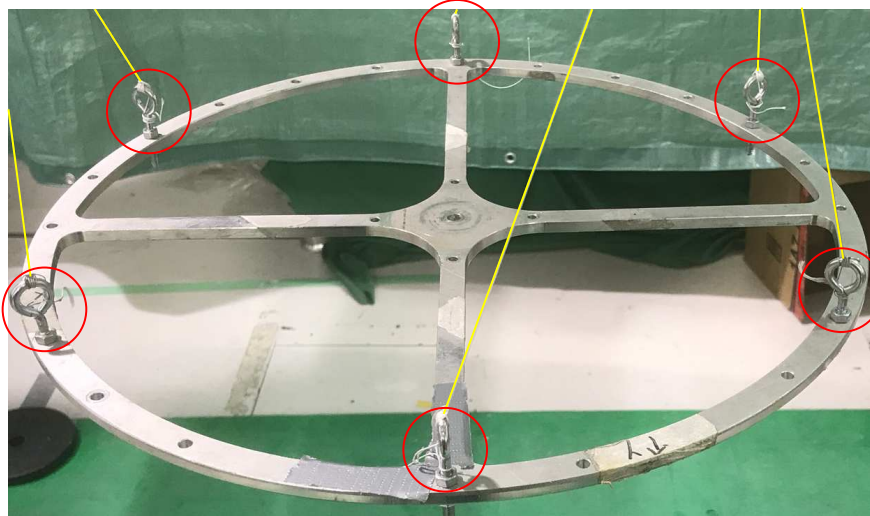


FIGURE 4.1 – Vue de proche de l’effecteur, des points d’attache et des câbles.

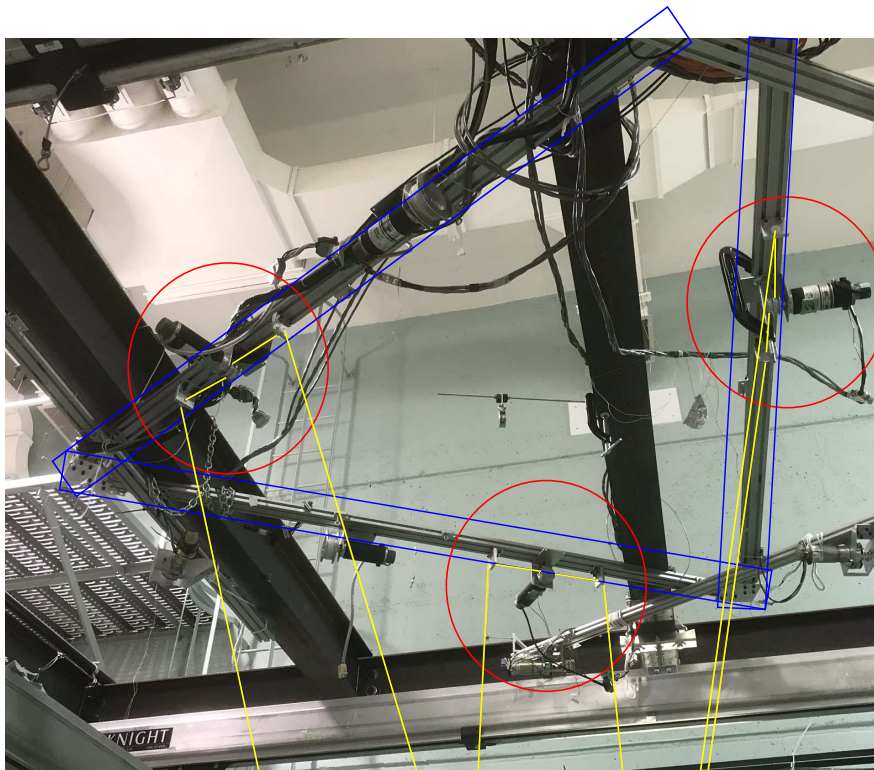


FIGURE 4.2 – Vue d’ensemble de la base du robot.

câbles d’une paire de câbles en parallélogramme sont attachés à des œillets diamétralement opposés. Les câbles du robot sont des câbles à cerf-volant pouvant résister à une tension d’au plus 70 lb (environ 311 N). Les câbles sont mis en évidence par des lignes jaunes dans les figures 4.1 à 4.3 .

La figure 4.2 présente une vue d’ensemble de la base du robot incluant les moteurs. Chaque moteur, entouré d’un cercle rouge dans la figure, est fixé à un bâti qui forme un triangle équilatéral fait d’ex-

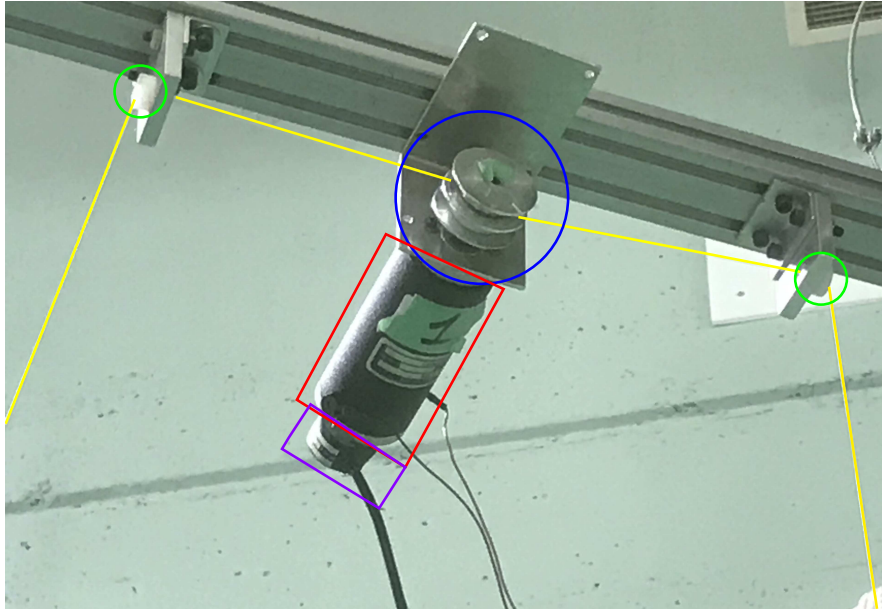


FIGURE 4.3 – Vue rapprochée de l'un des moteurs.

trusions en aluminium. Ces extrusions sont indiquées par des encadrés bleus. Les câbles du robot sont mis en évidence par des lignes jaunes.

La figure 4.3 présente une vue rapprochée de l'un des moteurs. Dans cette figure, le moteur est indiqué par un encadré rouge. Les moteurs n'ont pas de réducteurs et entraînent une poulie à double gorge (indiquée par un cercle bleu) permettant de mouvoir deux câbles (indiqués par des lignes jaunes) à la fois. La figure montre également des œillets en plastique indiqués par des cercles verts fixés au bâti par des cornières. La distance entre les deux œillets associés à un moteur est égale au diamètre de l'effecteur du robot. Cette disposition est nécessaire afin que les paires de câbles soient arrangées en parallélogrammes. Un encodeur incrémental, indiqué par un encadré violet, permet de mesurer la rotation du moteur.

Pour que le robot puisse mouvoir l'effecteur sans changer son orientation dans l'espace, des mesures spéciales doivent être prises lors de son assemblage. La prochaine section porte sur la procédure d'assemblage du robot.

4.1.2 Procédure d'assemblage du robot

1. Placer les œillets de la base du robot

La première étape requise pour assembler le robot est de fixer les œillets (indiqués en vert dans la figure 4.3) au bâti en aluminium. La position relative des œillets par rapport au bâti en aluminium détermine le rayon R de la base. La figure 4.4 permet de mieux expliquer cette idée. Dans la figure 4.4, le triangle équilatéral vert représente le bâti fait d'extrusion en aluminium dont les côtés ont une longueur L connue. Le disque bleu au centre de la figure représente l'effecteur du robot de rayon r

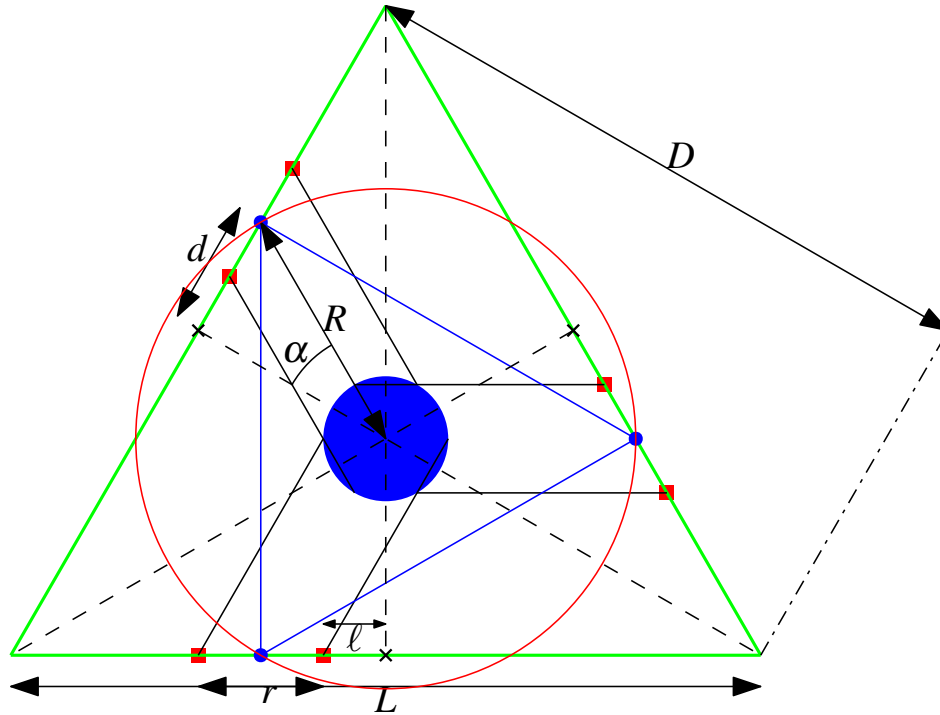


FIGURE 4.4 – Figure explicative de la relation entre R et la position des œillets.

connu. Le cercle rouge est le cercle de la base du robot de rayon R . Le triangle bleu représente l'ETST du robot lorsque le centre de masse est coïncident avec le centre de l'effecteur. On renomme ici ce triangle le triangle maximal de l'ETS. Les carrés rouges représentent les œillets sur la base du robot. L'angle α est l'angle de construction du robot. Afin de déterminer les limites de l'ETST du robot, il est nécessaire de connaître r , R et α . Or, puisque le bâti est déjà mis en place, il n'est pas possible de choisir chacune de ces valeurs. On devra ainsi déterminer la valeur de R en fonction de r et α en plus de déterminer la distance relative des œillets ℓ nécessaire pour obtenir une architecture ayant un angle de construction α . Pour ce faire, on commence par définir la distance d comme

$$d = \ell + \frac{r}{2}. \quad (4.1)$$

Ensuite, puisque le triangle vert est équilatéral, on a

$$D = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}L}{2}. \quad (4.2)$$

Le point d'intersection des bissectrices du triangle équilatéral vert est nécessairement concentrique avec le point central du cercle rouge puisque les points bleus sont tous déplacés le long du triangle vert d'une même distance d par rapport aux points milieux des côtés du triangle vert. De plus, les bissectrices d'un triangle équilatéral s'intersectent toujours au tiers de la hauteur du triangle. On peut donc écrire

$$\tan \alpha = \frac{d}{\frac{D}{3}} = \frac{3d}{D}. \quad (4.3)$$

L [m]	α [rad]	R [m]	ℓ [m]
2.11	$\frac{\pi}{6}$	0.703	0.252

Tableau 4.1 – Valeurs de L , α , R et ℓ utilisées lors des expériences.

De cette dernière équation, on trouve alors la relation entre ℓ et α , soit

$$\ell = \frac{\sqrt{3}L \tan \alpha - 3r}{6}. \quad (4.4)$$

De même, on trouve que la relation entre R et α est donnée par

$$R = \frac{\frac{D}{3}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}L}{6 \cos \alpha}. \quad (4.5)$$

Avec l'équation (4.4), on peut déterminer la position relative des œillets en fonction d'un angle de construction α souhaité. Dans le cadre des expériences présentées dans ce chapitre, les valeurs de L et α utilisées sont présentées au tableau 4.1. Ce tableau présente également les valeurs de R et ℓ dérivées des équations (4.4) et (4.5).

L'étape suivante permet ensuite de tracer la projection du triangle bleu de la figure 4.4 (le triangle maximal de l'ETS) au sol. Puisque ce triangle est théoriquement un triangle équilatéral, il sera également possible de déterminer son point central.

2. Tracer la projection du triangle de l'ETS au sol

Pour ce faire, on laisse pendre une masse au bout d'une corde que l'on attache aux œillets de la base du robot (les carrés rouges dans la figure 4.4). Par gravité, la masse se stabilise alors directement au-dessus de la projection de la position de l'œillet. On trace alors la position de cette projection au sol et l'on répète la procédure pour l'autre œillet de la même paire de câbles. On trace ensuite une ligne entre les deux points de projections et l'on marque le point milieu de cette ligne. Ce point est l'un des sommets du triangle maximal de l'ETS. En répétant pour les œillets des autres paires de câbles, on obtient alors les sommets du triangle maximal de l'ETS. En traçant des lignes entre ces points, on obtient alors les côtés du triangle maximal de l'ETS. Avec les points milieux des côtés ainsi que les sommets du triangle maximal de l'ETS, on peut tracer les bissectrices du triangle. Le point d'intersection des trois bissectrices est le point milieu du triangle maximal de l'ETS. En raison des erreurs de mesure et de traçage effectuées lors de cette étape, il est possible que les trois bissectrices ne se croisent pas en un point. On prendra alors la meilleure approximation possible (le point milieu du petit triangle formé par les trois intersections des bissectrices près du point théorique d'intersection des trois bissectrices). Le tracé des bissectrices et des côtés du triangle maximal de l'ETS est présenté à la figure 4.5.

À la figure 4.5, les points bleus indiquent les positions des projections des œillets de la base du robot sur le sol, les lignes rouges indiquent les côtés du triangle maximal de l'ETS, les lignes jaunes en traits

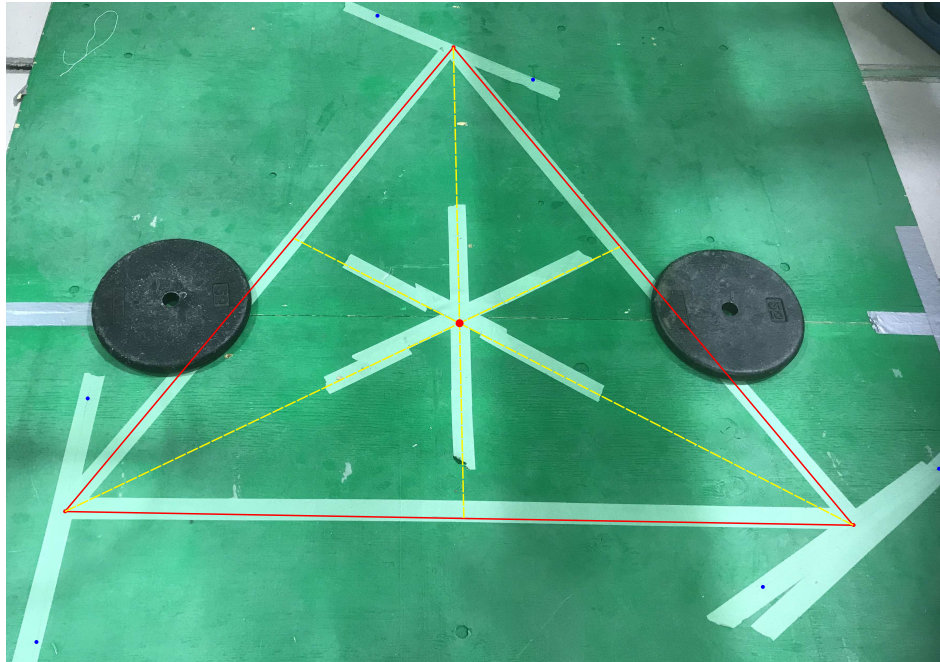


FIGURE 4.5 – Projection au sol du triangle maximal de l'ETS.

discontinus sont les bissectrices et le point rouge au centre est le point central du triangle maximal de l'ETS. Les poids présents dans la figure permettent de garder les planches du plancher stable.

Une fois que le point central du triangle maximal de l'ETS a été déterminé, ce point ainsi que les bissectrices du triangle sont utilisés à l'étape suivante afin d'attacher l'effecteur du robot à ses câbles.

3. Assembler les câbles à l'effecteur

Pour s'assurer que toutes les paires de câbles forment des parallélogrammes lorsque les câbles sont sous tension, il est nécessaire d'attacher les câbles à l'effecteur lorsque le centre de l'effecteur est précisément au centre du triangle maximal de l'ETST. Pour que les paires de câbles forment des parallélogrammes, il faut également s'assurer que l'orientation de l'effecteur par rapport à la base permet de compléter le parallélogramme. Pour ce faire, il suffit d'orienter l'effecteur afin que les œillets situés sur l'effecteur soient alignés avec les bissectrices du triangle maximal de l'ETST. La figure 4.6 permet de montrer cette configuration. Dans la figure 4.6, les bissectrices sont indiquées par des lignes jaunes en traits discontinus et les œillets de l'effecteur sont identifiés par des cercles rouges.

Lorsque l'effecteur est en place, il faut ensuite attacher les câbles aux œillets de l'effecteur. Pour ce faire, les moteurs sont mis en marche et une commande de position constante est envoyée afin que les moteurs puissent agir comme des freins (ils résisteront à la tension dans les câbles afin de garder leur position constante). Un poids est également mis sur l'effecteur afin d'éviter qu'il ne se déplace lors de l'assemblage des câbles aux œillets de l'effecteur (comme montré dans la figure 4.6). Puisque l'effecteur et les moteurs sont alors statiques, il est possible d'attacher les câbles aux œillets

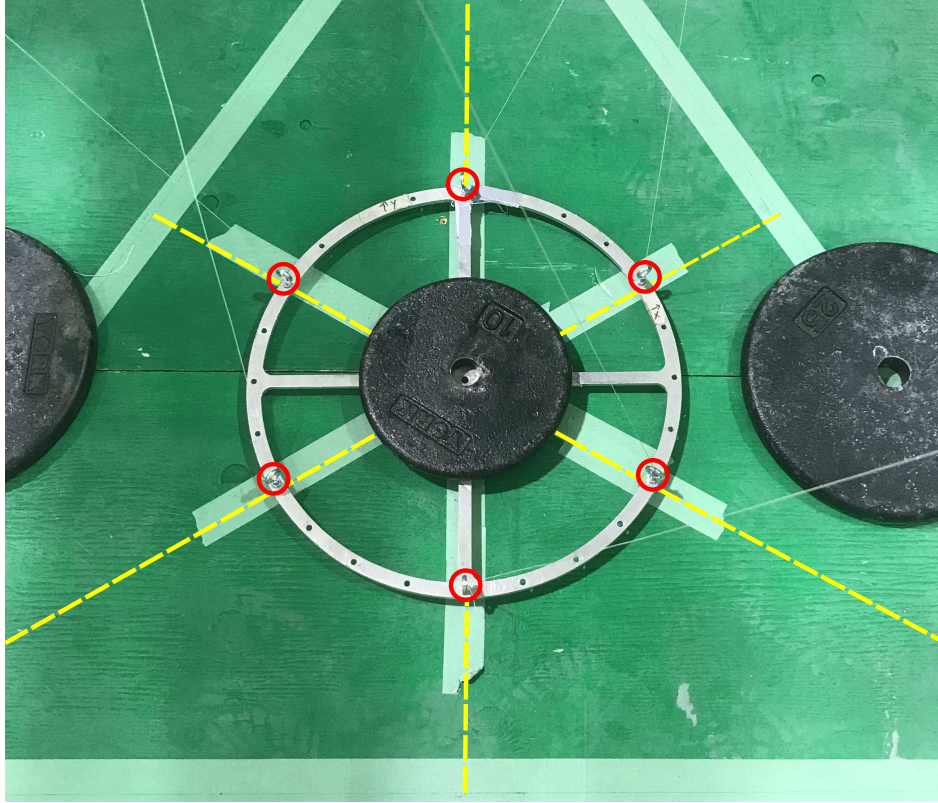


FIGURE 4.6 – Vue de dessus de l’assemblage de l’effecteur et des câbles.

en mettant sous tension les câbles lors de l’attache. Cette mise sous tension permettra d’assurer une même longueur de câble dans tous les câbles. Après cette étape, les moteurs peuvent être éteints et le poids peut-être retiré. Le robot est prêt à être utilisé.

4.1.3 Contrôle des moteurs

Un contrôleur temps réel de type PID et intégré à l’aide des logiciels RT-LAB et Simulink est utilisé pour contrôler les moteurs du robot. Ce contrôleur fonctionne à une fréquence de 500 Hz. Le contrôleur PID a pour objectif de minimiser l’erreur entre la longueur désirée des câbles et les longueurs réelles. Il est plutôt difficile de mesurer directement la variation de longueur des câbles. Cependant, en faisant la supposition que les câbles sont bien enroulés autour des poulies doubles, il est possible de mesurer la variation des longueurs des câbles à l’aide de la variation de la position des moteurs. Pour ce faire, on utilise l’équation suivante

$$\Delta\rho_i = r_p\Delta\theta_i, \quad (4.6)$$

où $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_0$ est la variation de longueur de la paire de câble i , ρ_0 est la longueur initiale des câbles, r_p est le rayon des poulies doubles (on considère que les trois poulies doubles ont le même rayon), $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_0$ est une variation de la position angulaire du moteur i et θ_0 est la position angulaire initiale des poulies. Puisque des encodeurs incrémentaux sont utilisés, on peut mettre $\theta_0 = 0$, et on

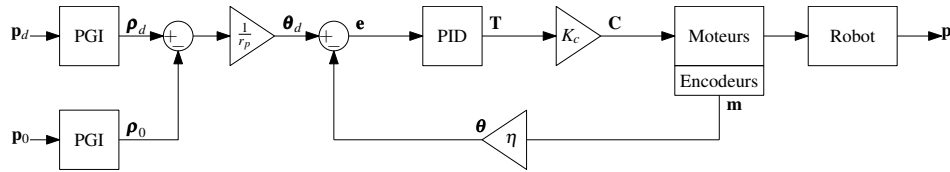


FIGURE 4.7 – Schéma de contrôle des moteurs du robot.

peut alors réécrire l'équation (4.6) comme

$$\theta_i = \frac{1}{r_p} (\Delta \rho_i). \quad (4.7)$$

En utilisant cette équation et en implémentant une boucle de commande PID, le schéma de commande des moteurs du robot prend alors la forme de la figure 4.7. Dans cette figure, le premier vecteur en entrée du système est le vecteur de la position désirée \mathbf{p}_d . Ce vecteur est transformé à l'aide du PGI en un vecteur des longueurs de câbles désirées $\boldsymbol{\rho}_d$. Le second vecteur en entrée est le vecteur \mathbf{p}_0 qui représente la position initiale du robot. Cette position est la position de l'effecteur lorsqu'il est au sol par rapport à la base du robot. Grâce au PGI, ce vecteur est transformé en un vecteur $\boldsymbol{\rho}_0$ des longueurs de câble initiales. En utilisant l'équation (4.7) ainsi que le gain $\frac{1}{r_p}$, on obtient ensuite le vecteur $\boldsymbol{\theta}_d$ des positions angulaires désirées. Ce vecteur est ensuite comparé au vecteur de la position angulaire réelle des moteurs, $\boldsymbol{\theta}$, et la différence de ces deux vecteurs, l'erreur en position angulaire \mathbf{e} , est transformée en un vecteur des couples à appliquer aux moteurs \mathbf{T} . Ce vecteur est par la suite transformé en vecteur de courants \mathbf{C} à l'aide de la constante de couple des moteurs K_c . Les valeurs de courant sont ensuite envoyées aux moteurs. Les encodeurs incrémentaux mesurent la rotation des moteurs et retournent des valeurs numériques qui sont représentées dans le schéma par le vecteur \mathbf{m} . Ces valeurs numériques sont par la suite transformées en valeurs de position angulaire des moteurs $\boldsymbol{\theta}$ par le gain η .

4.1.4 Intégration de trajectoires repos à repos

Afin de tester les limites de l'ETST, il est primordial de pouvoir déplacer le robot dans cet espace. Cependant, il ne faut pas que la trajectoire utilisée pour déplacer l'effecteur ait une influence significative sur la tension dans les câbles du robot. Pour cette raison, des trajectoires de type polynôme de degré 5 avec des périodes arbitrairement longues sont utilisées afin de minimiser l'effet des accélérations entre deux positions sur la tension dans les câbles. L'algorithme d'implémentation de ces trajectoires est le suivant :

Data : $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, v_{\max}, a_{\max}, dt$

Result : Position désirée \mathbf{p}_d à chaque pas de temps du système de contrôle dt

```
1 Calcul de la période de la trajectoire :  $calc\_T(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, v_{\max}, a_{\max}) \rightarrow T$ ;  
2 Initialisation d'une variable de temps :  $t = 0$ ;  
3 while  $t < T$  do  
4    $\tau = t/T$ ;  
5    $\delta_1 = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3$ ;  
6    $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_i + \delta_1(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$ ;  
7    $t = t + dt$ ;  
8 end
```

Algorithme 1 : Méthode d'intégration de trajectoires repos à repos.

Dans cet algorithme, \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_f sont respectivement la position initiale et finale de l'effecteur pendant la trajectoire. Les variables v_{\max} et a_{\max} sont les valeurs maximales possibles de vitesse et d'accélération des composantes de vitesse et d'accélération de l'effecteur. Ces valeurs sont utilisées avec \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_f dans la fonction $calc_T$ pour déterminer la durée de la trajectoire T qui sera suffisamment longue pour assurer que les vitesses et accélérations de l'effecteur seront inférieures aux valeurs maximales. La méthode présentée à la section 2.7 pourrait également être utilisée pour déterminer la durée de la trajectoire qui assurerait une tension dans les câbles. Cependant, la méthode utilisant la vitesse et l'accélération maximale avait déjà été implémentée dans des projets antérieurs portant sur des RPSEC de sorte que cette méthode a été utilisée pour les expérimentations. Dans l'algorithme t est une variable de temps qui se réinitialise chaque fois qu'une nouvelle trajectoire est demandée. À la fin de chaque boucle de l'algorithme, cette variable est incrémentée de dt , soit l'intervalle de temps égal à $1/f_s$, où f_s est la fréquence du système. Enfin, la valeur de δ_1 est calculé à chaque cycle de l'algorithme afin d'envoyer au système de commande des moteurs la valeur désirée de \mathbf{p}_d .

Puisque la charge de calcul pour cet algorithme est très faible et que la position est calculée pour une seule valeur de temps, il est facile à implémenter dans un système temps réel. Il aurait également été possible de calculer l'ensemble des points de la trajectoire au début de l'algorithme. Cependant, cette démarche aurait demandé un temps de calcul significativement plus long au début de la trajectoire ce qui aurait pu causer des difficultés dans l'implémentation temps réel de l'algorithme. Cet algorithme a été écrit par Giovanni Mottola lors de ses expérimentations pour l'article [30]. La méthode d'intégration des trajectoires elliptique a également été écrite par Giovanni Mottola.

4.1.5 Intégration de trajectoires elliptiques

Une méthode similaire est utilisée pour que l'effecteur puisse effectuer une trajectoire elliptique. L'algorithme à cet effet est l'Algorithme 2.

Data : $\mathbf{p}_c, T, N, \omega, r_x, r_y, r_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z, dt$

Result : Position désirée \mathbf{p}_d à chaque pas de temps du système de contrôle dt

```

1 Initialisation d'une variable de temps :  $t = 0$ ;
2 while  $t < 2T + N\pi$  do
3   if  $t < T$  then
4      $\tau = t/T$ ;
5      $\delta_1 = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3$ ;
6      $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_c + \delta_1 \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix}$ ;
7      $t = t + dt$ ;
8   else if  $t < T + N\pi$  then
9      $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_c + \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix}$ ;
10     $t = t + dt$ ;
11  else
12     $t_2 = t - T - N\pi$ ;
13     $\tau = t_2/T$ ;
14     $\delta_2 = 6(1 - \tau)^5 - 15(1 - \tau)^4 + 10(1 - \tau)^3$ ;
15     $\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_c + \delta_2 \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix}$ ;
16     $t = t + dt$ ;
17  end
18 end

```

Algorithme 2 : Méthode d'intégration de trajectoires elliptiques.

Les valeurs en entrée de cet algorithme sont la position du centre de l'ellipse \mathbf{p}_c , la période de transition T , le nombre de tours à pleine amplitude N , la fréquence d'oscillation ω , les amplitudes de l'ellipse r_x, r_y et r_z , les angles de phases ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z ainsi que le pas de temps du système dt . La période de transition est choisie arbitrairement grande afin d'assurer que la tension dans les câbles soit principalement une fonction de la trajectoire elliptique à pleine amplitude. Une simulation numérique est effectuée afin de s'assurer que la période de transition soit suffisamment longue pour que la tension théorique des câbles soit positive. La fréquence d'oscillation peut être choisie comme étant $\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{mg + \tau_z}{mz_c}}$, ou une autre valeur qui respecte l'ensemble des conditions de tension en (3.90). La structure de l'algorithme est assez simple. Si la valeur de temps t est inférieure à la période de transition, le robot est en train d'effectuer la trajectoire de transition de repos vers la trajectoire elliptique de pleine amplitude. Si la valeur de temps est supérieure à la période de temps de la transition mais inférieure à la somme de la période de transition et la période à pleine amplitude, l'effecteur est

en train d'effectuer la trajectoire à pleine amplitude. Sinon, si le temps est supérieur à la somme de la période de transition et de la période à pleine amplitude mais inférieur à la période totale, l'effecteur est entrain d'effectuer la transition de pleine amplitude vers repos.

4.1.6 Méthodologie des expériences quasi statiques

Les expériences quasi statiques sont les expériences où l'effecteur se déplace à l'intérieur de l'ETST sans que la trajectoire influence trop significativement la tension dans les câbles. L'objectif de ces expériences est de déterminer approximativement les limites expérimentales de l'ETST lorsque l'effecteur est soumis à différentes conditions. Dans la première condition, le centre de masse est centré sur l'effecteur de sorte que l'ETST est maximal et est donné par un prisme à base triangulaire dont la base relie les trois points milieux des paires de poulies doubles. Dans la seconde condition, le centre de masse de l'effecteur est artificiellement décentré à l'aide d'une masse supplémentaire qui est attachée à la circonférence de l'effecteur.

Pour déterminer une approximation des limites expérimentales de l'ETST dans ces deux conditions, la première étape est de définir une trajectoire qui permet de graduellement approcher l'effecteur des limites théoriques de l'ETST. Ces trajectoires sont présentées dans la figure 4.8. Dans cette figure, le triangle noir représente l'ETST maximal du robot lorsque le centre de masse est centré sur l'effecteur et qu'aucune force externe n'est appliquée. L'effecteur du robot est représenté par un cercle noir plein. Pour déterminer la trajectoire à suivre, il faut d'abord déterminer les sommets théoriques de l'ETST à une hauteur donnée à l'aide des méthodes présentées au chapitre précédent en fonction de la position du centre de masse et du torseur d'action appliqué sur l'effecteur. Dans la figure 4.8, ces sommets sont représentés par des points verts. Les lignes vertes représentent des trajectoires rectilignes entre les sommets. Le barycentre des sommets verts est par la suite calculé (représenté par un x vert dans la figure). L'effecteur est déplacé à cette position. L'effecteur entreprend par la suite une première trajectoire représentée par le quadrilatère rouge dans la figure 4.8. Ce quadrilatère est semblable au quadrilatère vert reliant les sommets théoriques de l'ETST à une hauteur donnée et lui est concentrique par rapport à son barycentre. Le rapport de similitude entre le quadrilatère rouge et le quadrilatère vert est de 0.6, comme indiqué dans la figure 4.8. Une fois que la trajectoire passant par tous les sommets du quadrilatère rouge a été effectuée, la trajectoire passe par les sommets du quadrilatère bleu et ainsi de suite pour les autres quadrilatères jusqu'au quadrilatère cyan.

Si les sommets du quadrilatère vert sont donnés par l'ensemble de points $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$, on peut alors définir la trajectoire $\mathbf{q}_\eta(t)$ qui passe par le quadrilatère associé à la valeur η de la façon suivante

$$\mathbf{q}_\eta(t) = \begin{cases} \mathbf{q}_{1,\eta} + \delta(T_1)(\mathbf{q}_{2,\eta} - \mathbf{q}_{1,\eta}), & 0 < t < T_1 \\ \mathbf{q}_{2,\eta} + \delta(T_2)(\mathbf{q}_{3,\eta} - \mathbf{q}_{2,\eta}), & T_1 + T_{p1} < t < \sum_{i=1}^2 T_i + T_{pi} \\ \mathbf{q}_{3,\eta} + \delta(T_3)(\mathbf{q}_{4,\eta} - \mathbf{q}_{3,\eta}), & \sum_{i=1}^2 T_i + T_{pi} < t < \sum_{i=1}^3 T_i + T_{pi} \\ \mathbf{q}_{4,\eta} + \delta(T_4)(\mathbf{q}_{1,\eta} - \mathbf{q}_{4,\eta}), & \sum_{i=1}^3 T_i + T_{pi} < t < \sum_{i=1}^4 T_i + T_{pi} \end{cases} \quad (4.8)$$

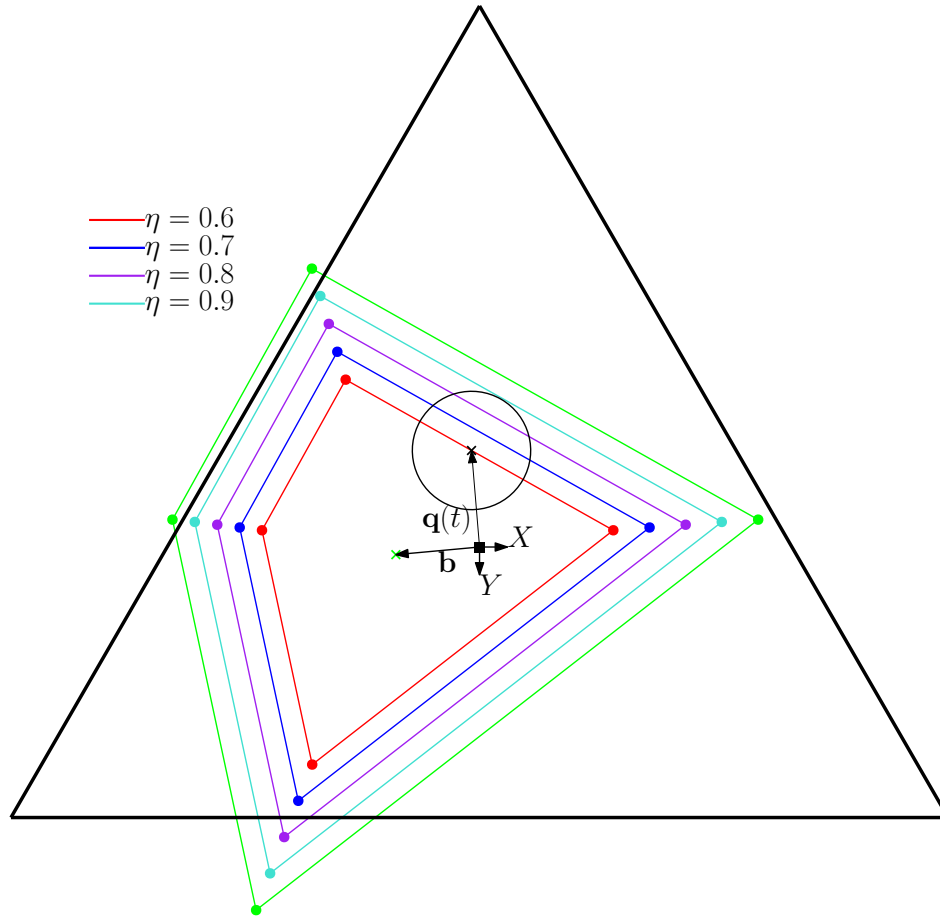


FIGURE 4.8 – Description des figures quasi statiques

où

$$\mathbf{q}_{i,\eta} = \mathbf{b} + \eta (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.9)$$

Dans l'équation (4.9), les $\mathbf{q}_{i,\eta}$ sont les vecteurs position des sommets du quadrilatère η . Le vecteur \mathbf{b} est la position du barycentre par rapport au référentiel inertiel, η est le rapport de similitude entre le quadrilatère η et le quadrilatère vert. Les valeurs de η pour chaque quadrilatère semblable dans la figure 4.8 sont indiquées dans la figure. Les vecteurs \mathbf{p}_i sont les vecteurs de position des sommets du quadrilatère vert des limites théoriques de l'ETST. Dans l'équation (4.8), les fonctions $\delta(T_i)$ sont les fonctions de type polynôme de degré 5 présentées dans l'algorithme 1. Les T_i sont également calculés de la même façon que la méthode présentée dans l'algorithme 1. Les valeurs T_{pi} sont des périodes de pause pendant lesquelles l'effecteur du robot est statique à l'un des sommets du quadrilatère η . Les périodes T_i et T_{pi} respectent l'équation suivante $T_i + T_{pi} = T_k$, où T_k est une période de temps choisie arbitrairement grande pour que les T_{pi} soient toutes des périodes positives de temps qui laisse T_i être assez longue pour respecter les limites de vitesse et d'accélération.

Pour déterminer approximativement les limites expérimentales de l'ETST du robot, la seconde étape consiste à mesurer, pendant l'exécution des trajectoires $\mathbf{q}_\eta(t)$, l'orientation de l'effecteur du robot.

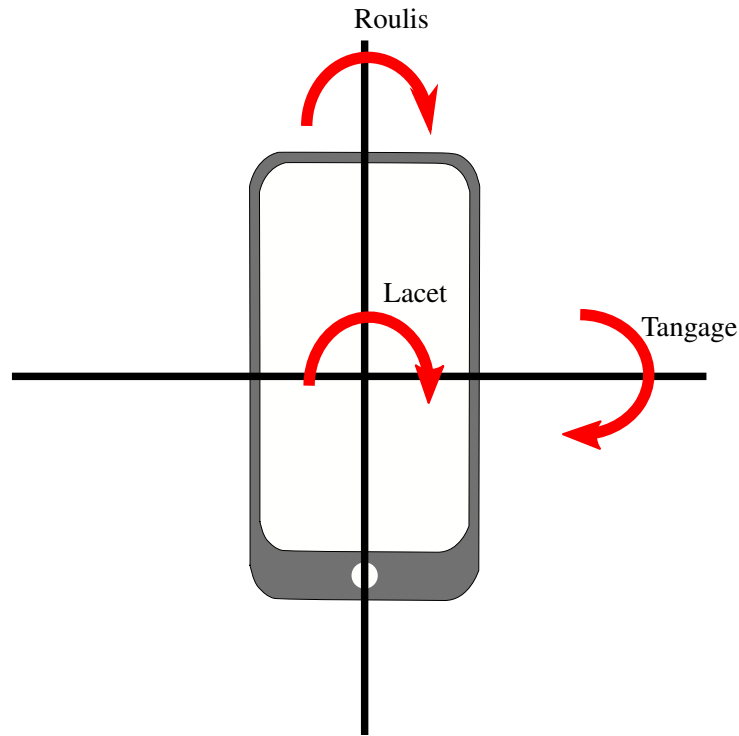


FIGURE 4.9 – Angles Roulis,Lacet,Tangage d’un téléphone intelligent.

Cette mesure de l’orientation du robot permet de déterminer si le robot se situe à l’extérieur de l’ETST expérimental, car son orientation est théoriquement seulement constante lorsque tous ses câbles sont en tension, c’est à dire, lorsque le robot est à l’intérieur de l’ETST.

Pour mesurer l’orientation de l’effecteur à intervalle régulier pendant l’exécution des trajectoires $\mathbf{q}_\eta(t)$, un téléphone intelligent muni d’une centrale inertielle est fixé à l’effecteur du robot. La centrale inertielle récupère alors des valeurs d’angles d’Euler Roulis (Roul),Tangage (Tang),Lacet (Lac) à une fréquence de $f_s = 100$ Hz par intégration des signaux du gyroscope présent dans la centrale inertielle du téléphone intelligent. Les angles Roulis,Tangage,Lacet du téléphone intelligent sont présentés dans la figure 4.9. Une même méthode a été utilisée dans l’article [38] où la précision du signal des angles d’Euler provenant d’un téléphone intelligent semblable avait été évaluée à environ 4 % .

L’article [38] a également montré que même si l’architecture du robot utilisée dans les expériences garde théoriquement une orientation constante de l’effecteur lorsque les câbles sont sous tension, l’orientation de l’effecteur change tout de même un peu en fonction de la position de l’effecteur. En fait, les expériences faites en [38] ont montré que l’orientation de l’effecteur pouvait changer de plus ou moins 2 degrés à chaque angle d’Euler donnant l’orientation de l’effecteur pendant des déplacements à l’intérieur de l’ETST. Ce changement d’orientation de l’effecteur est principalement causé par l’assemblage non parfait du robot.

Pour distinguer le changement d’orientation causé par la sortie de l’effecteur de l’ETST et le changement d’orientation causé par l’assemblage non parfait du robot, une analyse fréquentielle du signal est

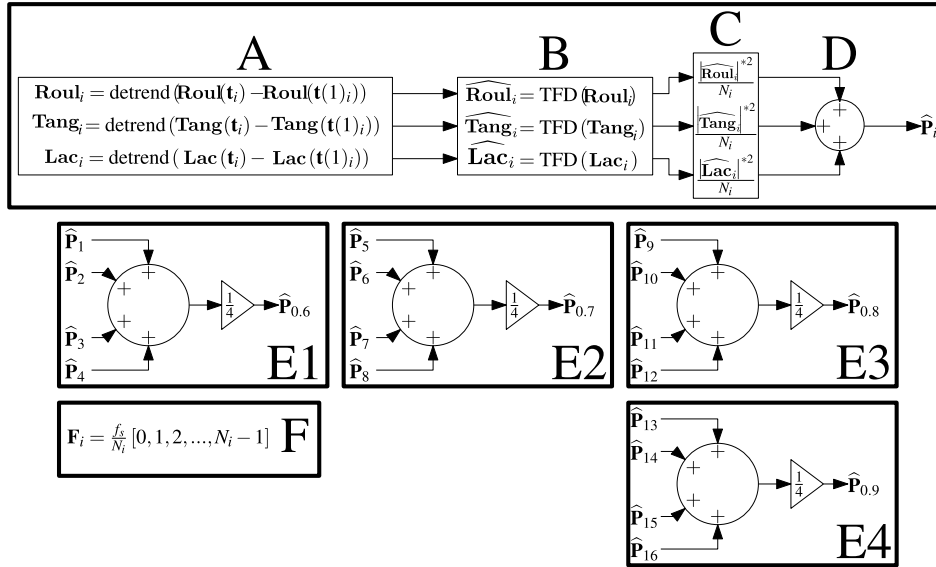


FIGURE 4.10 – Étape du traitement des données provenant de la centrale inertielle pendant les tests quasi statiques.

effectuée. Pendant l'exécution de la trajectoire $\mathbf{q}_\eta(t)$, l'effecteur demeure statique aux quatre coins du quadrilatère η pendant des périodes T_{pi} . Par conséquent, même si les angles d'Euler ne sont pas les mêmes à chaque sommet du quadrilatère, les signaux de ces angles devraient être des signaux à valeur relativement constante pendant l'ensemble des périodes T_{pi} . Si ce n'est pas le cas, on peut donc penser que l'effecteur est libre d'osciller et qu'au moins un des câbles n'est plus sous tension. L'analyse du spectre de puissance du signal devrait alors montrer un pic de puissance important à une fréquence autre que la fréquence 0 Hz ce qui signifie un mouvement de l'effecteur pendant les périodes statiques de la trajectoire $\mathbf{q}_\eta(t)$.

L'analyse fréquentielle du signal des angles d'Euler se fait par l'analyse de la densité spectrale de puissance du signal. La densité spectrale de puissance d'un signal est une quantité qui indique la puissance relative de chaque fréquence qui compose le signal. La figure 4.10 présente les étapes permettant le traitement des données provenant de la centrale inertielle pour analyser la puissance spectrale. À l'étape A, des données d'angles d'Euler Roulis, Tangage et Lacet sont récoltées sur une plage de temps \mathbf{t}_i . Les valeurs récoltées pendant cet intervalle sont différenciées par rapport à la première donnée récoltée de l'intervalle. Les valeurs différenciées sont ensuite passées dans la fonction *detrend()* de Matlab qui permet d'enlever la valeur moyenne du signal. Cette étape est importante, car elle permet de ne pas avoir une puissance fréquentielle très élevée à 0 Hz. La différenciation permet de seulement analyser la variation des angles d'Euler pendant les périodes statiques de la trajectoire $\mathbf{q}(t)$ plutôt que d'analyser la valeur absolue des angles. Les intervalles de récolte de donnée ont une durée $\text{length}(\mathbf{t}_i) < T_{pi}$.

À l'étape B, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de chaque valeur dans les vecteurs \mathbf{Roul}_i , \mathbf{Tang}_i et \mathbf{Lac}_i est effectuée. La puissance de chaque élément dans les vecteurs est ensuite calculée en prenant la norme de la transformée de Fourier de la donnée et en élevant au carré cette quantité.

Les quantités obtenues sont ensuite divisées par le nombre de données dans le vecteur de donnée. Cette normalisation permet de garder une équivalence entre la puissance des signaux temporels et la puissance des signaux sous leur forme fréquentielle d'après le théorème de Parseval appliqué à la TFD ([29]). Dans la figure 4.10, l'indication $|\mathbf{v}|^{*2}$ signifie que l'on prend la valeur absolue de chaque élément de \mathbf{v} et qu'on élève chaque élément au carré.

À l'étape D, les vecteurs des puissances de chaque angle d'Euler sur la plage de temps \mathbf{t}_i sont tous additionnés et le vecteur résultant est appelé \mathbf{P}_i .

Aux étapes E_1 à E_4 , la moyenne des puissances récoltées aux 4 sommets des quadrilatères η est calculée. Ainsi, l'étape E_1 calcule la puissance moyenne pendant les périodes statiques de la trajectoire $\mathbf{q}_{0.6}$. L'étape E_2 calcule la puissance moyenne pendant les périodes statiques de la trajectoire $\mathbf{q}_{0.7}$, et ainsi de suite.

L'étape F permet de calculer le vecteur des fréquences associées aux vecteurs des puissances. Dans cette étape, f_s est la fréquence d'acquisition des données, N_i est le nombre de points de la plage \mathbf{t}_i , et \mathbf{F} est le vecteur des fréquences. Comme mentionné précédemment, la fréquence d'acquisition est de 100 Hz.

4.1.7 Méthodologie des expériences dynamiques de trajectoire elliptique

L'objectif de ces expériences est de valider s'il est possible d'effectuer des trajectoires elliptiques dynamiques sortant de l'ETST du robot avec différents arrangements du centre de masse de l'effecteur du robot. Pour ce faire, trois différentes expériences sont effectuées. Dans la première expérience, le robot entreprend une trajectoire elliptique d'une orientation et d'une forme données en ayant son centre de masse centré sur l'effecteur. La trajectoire est effectuée plusieurs fois en augmentant graduellement son amplitude. Dans la seconde expérience, les mêmes trajectoires sont entreprises, mais cette fois-ci, une faible masse est fixée à la périphérie de l'effecteur du robot afin de changer la position de son centre de masse. Dans la troisième expérience, les mêmes trajectoires sont répétées, mais une masse importante est ajoutée en périphérie de l'effecteur de sorte que le centre de masse est décentré significativement.

Dans les trois expériences, le même téléphone intelligent muni d'une centrale inertielle permettant de récupérer les angles d'Euler d'orientation de l'effecteur à une fréquence de 100 Hz est attaché à l'effecteur du robot. Une analyse de la densité de puissance spectrale est effectuée pour chaque expérience et pour chaque trajectoire d'amplitude différente. L'objectif de l'analyse de densité de puissance spectrale est de déterminer si le spectre de puissance est différent lorsque l'on décentre le centre de masse que lorsque le centre de masse est centré par rapport au centre de l'effecteur. La nature harmonique du mouvement de l'effecteur lors de l'exécution de trajectoires elliptiques devrait créer des pics à des fréquences qui sont des multiples de la fréquence d'oscillation de la trajectoire elliptique.

4.2 Résultat des expériences quasi statiques

Les résultats des expériences quasi statiques sont séparés en deux sous-sections, une pour chaque expérience. Pour ces deux expériences, les paramètres généraux du robot sont donnés dans le tableau 4.2.

R [m]	r [m]	α [m]
0.7033	0.2	$\pi/6$

Tableau 4.2 – Paramètres généraux du robot pour les expériences quasi statiques.

4.2.1 Centre de masse centré sur l'effecteur

Pour cette expérience, la disposition de l'effecteur est donnée à la figure 4.11. Les valeurs de h_{CI} et h_E donnent respectivement les différences entre les points d'attache des câbles (au sommet des oeillets) et le centre de la centrale inertielle et le centre de l'effecteur. Ces valeurs sont présentées au tableau 4.3 ainsi que les valeurs de masse de l'effecteur m_E et de la centrale inertielle m_{CI} . Le tableau 4.3 présente également le vecteur \mathbf{c} de la position du centre de masse relativement au point d'attache des câbles aux oeillets, en tenant compte des différentes masses présentes sur l'effecteur et de leurs centres de masse respectifs.

h_{CI} [m]	h_E [m]	m_E [kg]	m_{CI} [kg]	\mathbf{c} [m]
0.035	0.04	0.532	0.174	$[0, 0, 0.039]^T$

Tableau 4.3 – Dimensions et masses des composantes pour la première expérience quasi statique.

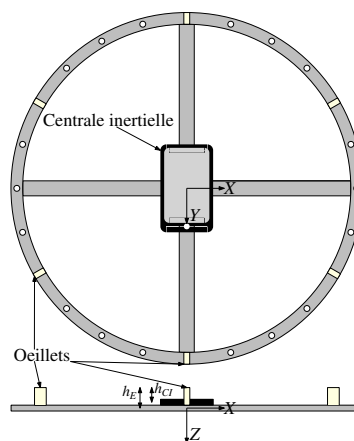


FIGURE 4.11 – Disposition de l'effecteur pour la première expérience quasi statique.

La trajectoire effectuée lors de la première expérience est présentée aux figures 4.12 et 4.13. Dans la figure 4.12, la trajectoire est présentée dans l'espace tridimensionnel et des bulles numérotées permettent d'identifier certains moments de la trajectoire qui sont identifiés dans la figure 4.13. La figure

4.13 présente l'évolution des composantes de position de l'effecteur dans le temps. Les lignes en traits discontinus indiquent les périodes de temps où l'effecteur est statique pendant la trajectoire. Les bulles numérotées associées à ces moments sont indiquées dans le haut de la figure. Les bulles ① à ④ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.6$. Les bulles ⑤ à ⑧ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.7$. Les bulles ⑨ à ⑫ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.8$. Les bulles ⑬ à ⑯ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.9$.

La figure 4.14 présente les données récoltées par la centrale inertielle pendant l'exécution de la trajectoire. Dans cette figure, les intervalles de temps où l'effecteur est immobile pendant l'exécution de la trajectoire sont indiqués par les mêmes bulles numérotées que dans les figures précédentes. Les valeurs de temps dans l'abscisse de la figure 4.14 ne sont pas les mêmes que celles dans la figure 4.13 puisque le début de la prise de mesure par la centrale inertielle n'était pas synchronisé avec l'exécution de la trajectoire. Cependant, les intervalles de temps représentés par les bulles numérotées et les lignes en traits discontinus sont synchronisés par analyse des paliers des signaux dans les figures 4.14 et 4.13.

L'analyse de la puissance fréquentielle des signaux provenant de la centrale inertielle est présentée à la figure 4.15. Dans cette figure, la puissance moyenne récoltée sur les plages de temps ① à ④ est représentée par le graphique $\hat{\mathbf{P}}_{0.6}$, la puissance moyenne récoltée sur les plages de temps ⑤ à ⑧ est représentée par le graphique $\hat{\mathbf{P}}_{0.7}$ et ainsi de suite. On remarque rapidement que seule la série de données $\hat{\mathbf{P}}_{0.9}$ possède des valeurs importantes de puissance. Cela concorde bien avec le fait que pendant l'expérience, lorsque l'effecteur était dans la trajectoire $\eta = 0.9$, on pouvait voir l'effecteur osciller lorsqu'il était censé être dans une période de repos statique.

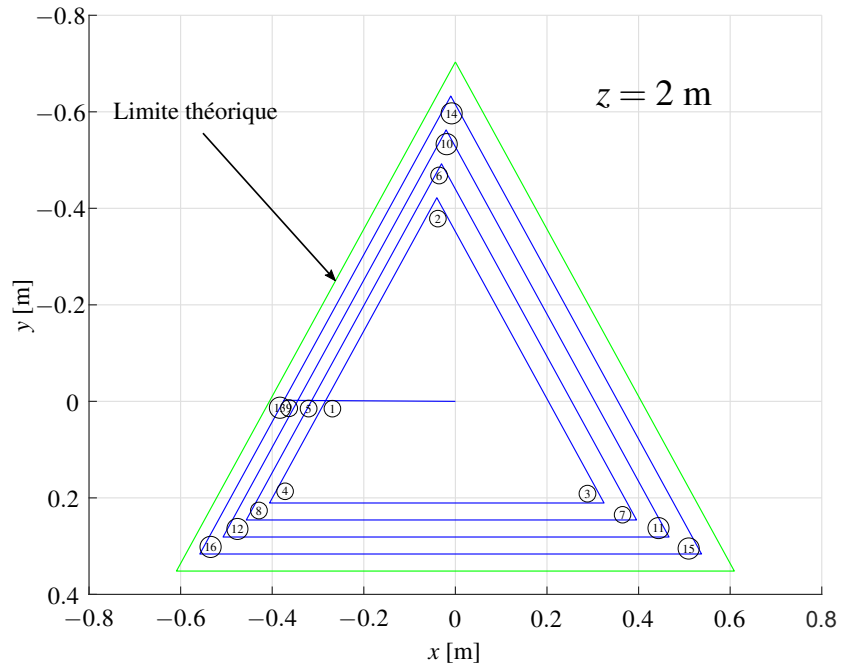


FIGURE 4.12 – Trajectoire de la première expérience quasi-statique. La trajectoire est en bleu tandis que les limites théoriques de l’ETST sont données par les lignes vertes

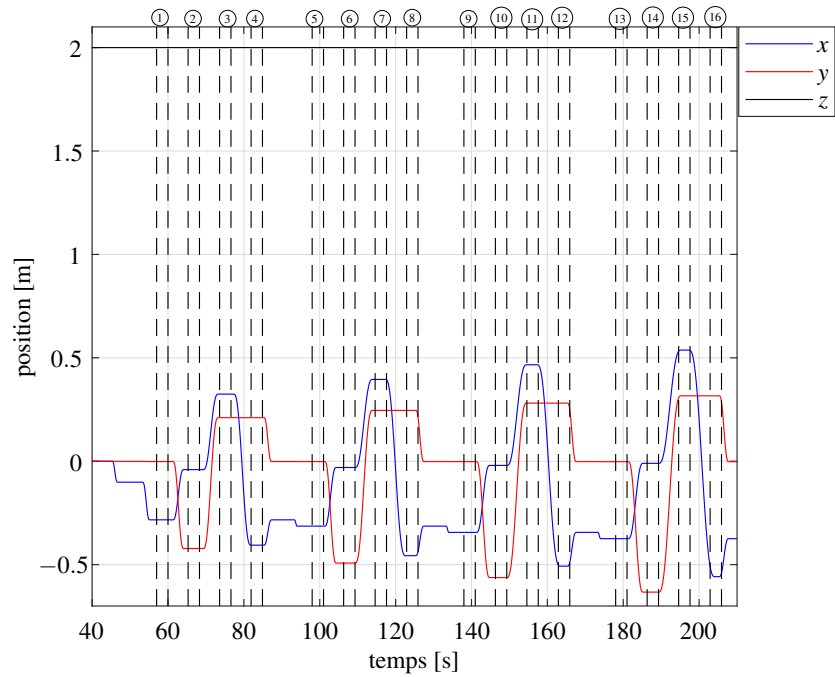


FIGURE 4.13 – Évolution de la position de l’effecteur dans le temps lors de l’expérience quasi-statique avec le centre de masse centré sur l’effecteur.

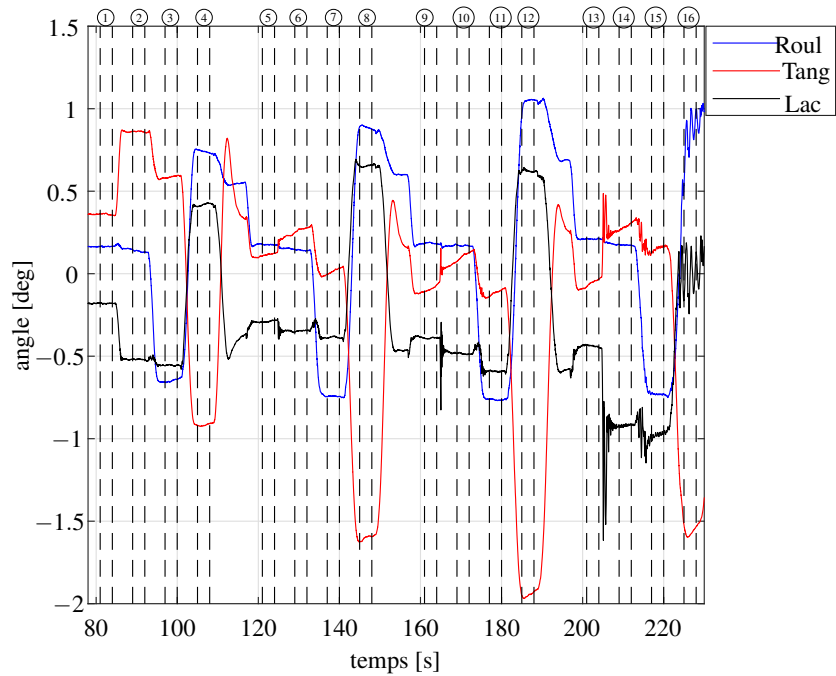


FIGURE 4.14 – Données provenant de la centrale inertielle lors de l’exécution de la trajectoire de la première expérience quasi-statique.

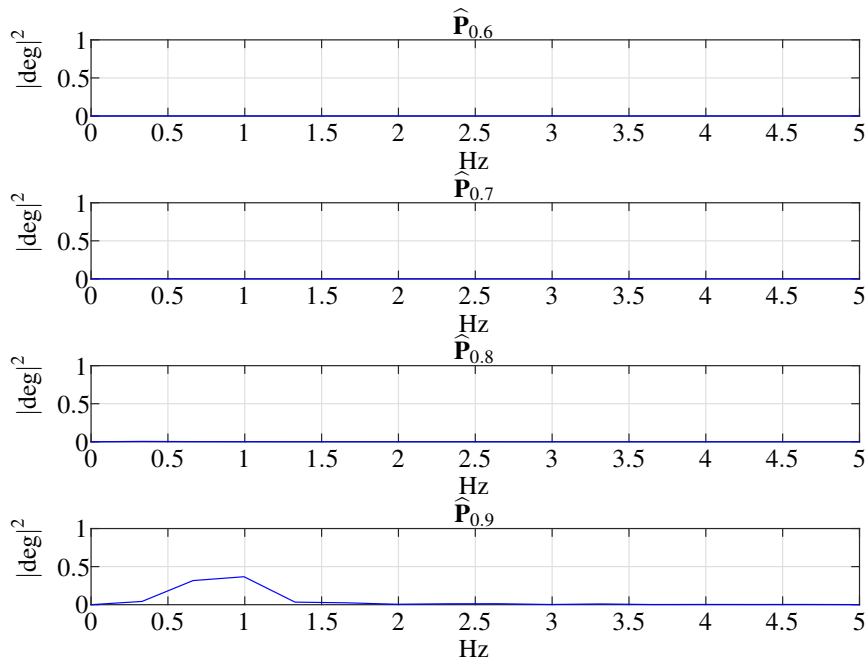


FIGURE 4.15 – Puissance fréquentielle $\hat{P}_{0.6}$ à $\hat{P}_{0.9}$ des premières expériences quasi-statiques.

4.2.2 Centre de masse non centré sur l’effecteur

Pour cette expérience, la disposition de l’effecteur est donnée à la figure 4.11. Dans cette figure, la masse M ajoutée sur la circonférence de l’effecteur permet de déplacer significativement le centre de

masse. La hauteur h_M donne la différence de hauteur entre le centre de masse de la masse M et le sommet des œillets. Les valeurs M , h_M ainsi que le vecteur \mathbf{c} de la position relative du centre de masse pour cette expérience sont donnés dans le tableau 4.4.

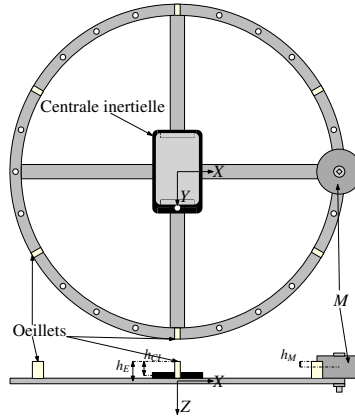


FIGURE 4.16 – Disposition de l’effecteur pour l’expérience avec le centre de masse non centré sur l’effecteur

h_{CI} [m]	h_E [m]	h_M [m]	m_E [kg]	m_{CI} [kg]	M [kg]	\mathbf{c} [m]
0.035	0.040	0.015	0.532	0.174	0.386	$[0.071, 0, 0.030]^T$

Tableau 4.4 – Dimensions et masses des composantes pour la seconde expérience quasi statique.

La trajectoire effectuée lors de la première expérience est présentée aux figures 4.17 et 4.18. Dans la figure 4.17, la trajectoire est présentée dans l’espace tridimensionnel et des bulles numérotées permettent d’identifier certains moments de la trajectoire qui sont identifiés dans la figure 4.18. Les bulles numérotées associées à ces moments sont indiquées dans le haut de la figure. Les bulles ① à ④ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.6$. Les bulles ⑤ à ⑧ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.7$. Les bulles ⑨ à ⑫ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.8$. Les bulles ⑬ à ⑯ font partie de la trajectoire lorsque $\eta = 0.9$.

La figure 4.19 présente les données récoltées par la centrale inertielle pendant l’exécution de la trajectoire. Dans cette figure, les intervalles de temps où l’effecteur est immobile pendant l’exécution de la trajectoire sont indiqués par les mêmes bulles numérotées que dans les figures précédentes. Entre l’intervalle ① et l’intervalle ②, on peut noter une variation importante de l’orientation de l’effecteur. Cette variation a été causée par un accrochage de l’effecteur pendant l’essai. Cependant, puisque cette variation survient entre deux intervalles de prise de mesure, elle n’a aucun effet sur les données.

L’analyse de la puissance fréquentielle des signaux provenant de la centrale inertielle est présentée à la figure 4.20. Dans cette figure, la puissance moyenne récoltée sur les plages de temps ① à ④ est représentée par le graphique $\hat{\mathbf{P}}_{0.6}$, la puissance moyenne récoltée sur les plages de temps ⑤ à ⑨ est représentée par le graphique $\hat{\mathbf{P}}_{0.7}$ et ainsi de suite. On remarque rapidement que, comme pour la

première expérience quasi statique, seule la série de données $\hat{\mathbf{P}}_{0.9}$ possède des valeurs importantes de puissance. Cela concorde bien avec le fait que pendant l'expérience, lorsque l'effecteur était dans la trajectoire $\eta = 0.9$, on pouvait voir l'effecteur osciller lorsqu'il était censé être dans une période de repos statique.

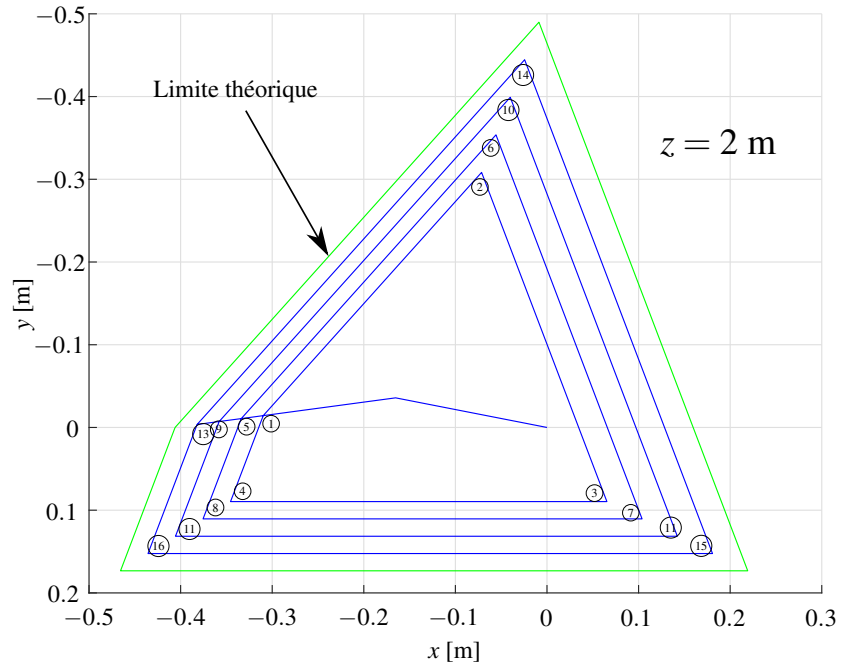


FIGURE 4.17 – Trajectoire de la seconde expérience quasi-statique. La trajectoire est en bleu tandis que les limites théoriques de l'ETST sont données par les lignes vertes.

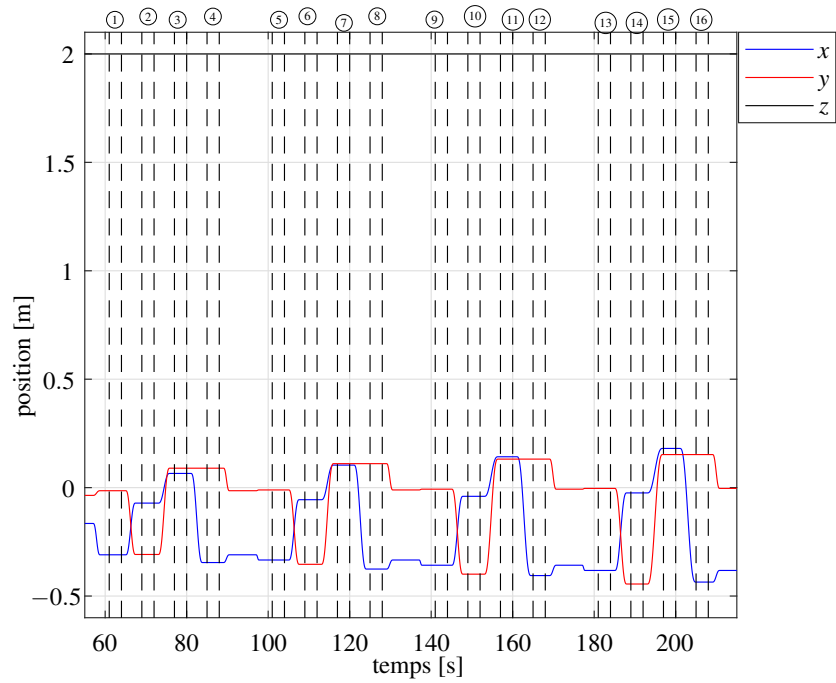


FIGURE 4.18 – Évolution de la position de l’effecteur dans le temps lors de la deuxième expérience quasi-statique.

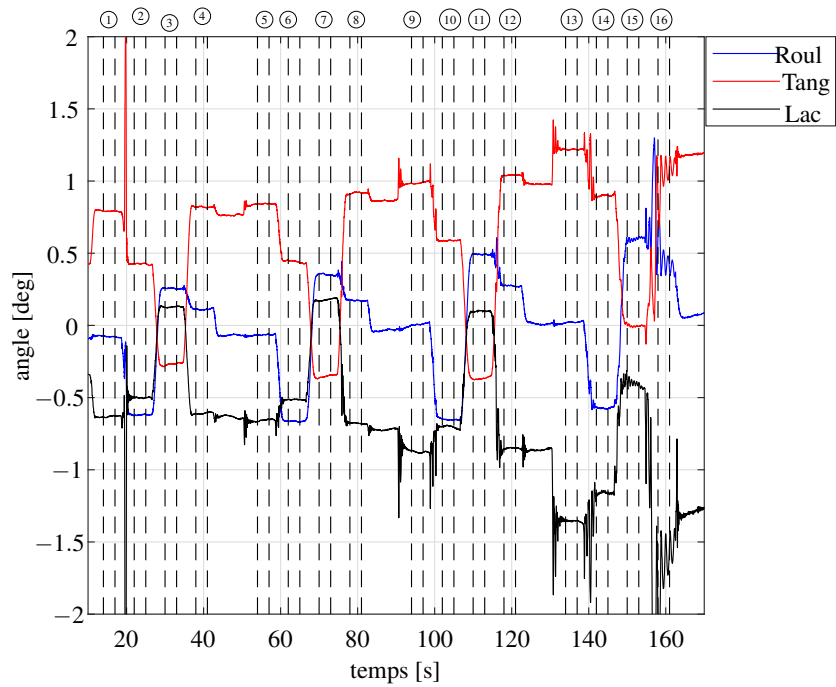


FIGURE 4.19 – Données provenant de la centrale inertielle lors de l’exécution de la trajectoire de la deuxième expérience quasi-statique.

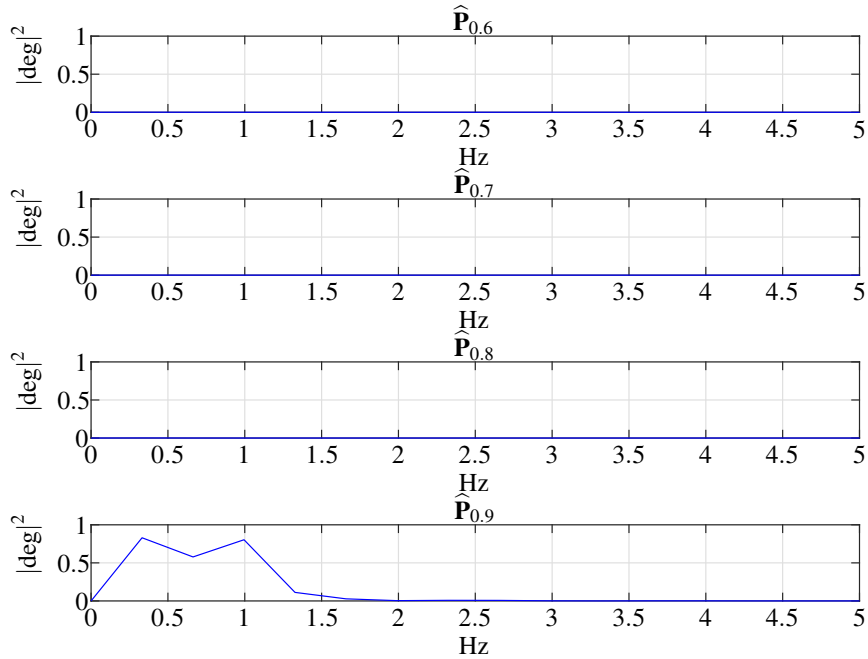


FIGURE 4.20 – Puissance fréquentielle $\hat{\mathbf{P}}_{0,6}$ à $\hat{\mathbf{P}}_{0,9}$ de la seconde expérience quasi-statique.

4.3 Discussion sur les expériences quasi statiques

4.3.1 Première expérience quasi statique

L'analyse des puissances fréquentielles dans la figure 4.15 montre qu'il y a un écart significatif entre les trois premières courbes de puissances, $\hat{\mathbf{P}}_{0,6}$ à $\hat{\mathbf{P}}_{0,8}$ et la courbe de puissance $\hat{\mathbf{P}}_{0,9}$, puisque cette dernière courbe de puissance est la seule où des pics de puissance significatifs sont perceptibles. Puisque ces courbes de puissances sont obtenues par l'analyse de période de temps où l'effecteur est théoriquement en état de repos, les valeurs de puissances importantes entre 0.5 et 1.3 Hz dans la courbe $\hat{\mathbf{P}}_{0,9}$ signifient que l'effecteur n'était pas, pendant l'exécution de la trajectoire $\eta = 0.9$, au repos pendant ces périodes. De plus, les fréquences des sommets significatifs de la courbe $\hat{\mathbf{P}}_{0,9}$ sont à proximité de la fréquence naturelle d'un pendule suspendu à un câble de 2 m de haut soit $f = \sqrt{g/\ell}/(2\pi) \approx 0.35\text{Hz}$, où $\ell = 2\text{m}$ est la longueur du pendule. Cela pourrait être une indication que pendant les périodes théoriques de repos de la trajectoire $\eta = 0.9$, le robot était libre d'osciller et n'était pas pleinement contraint de sorte qu'au moins un des câbles n'était plus sous tension à ce moment. Bien que les sommets de puissance dans la courbe $\hat{\mathbf{P}}_{0,9}$ ne soient pas exactement à la fréquence naturelle du pendule, on pourrait facilement justifier l'écart par le fait que le robot possède 6 câbles plutôt qu'un seul de sorte que le modèle du pendule n'est pas parfaitement représentatif de la situation du robot.

Le fait que les limites expérimentales de l'ETST n'ont pas pu dépasser 90% des limites théoriques de l'ETST pour cette expérience peut être expliqué par diverses raisons. D'abord, comme il est possible de le voir dans le graphique 4.14, bien que le robot soit censé avoir une orientation théoriquement

constante, la centrale inertielle a pu mesurer des variations de plus ou moins 2 deg lors des déplacements de l'effecteur dans l'ETST. Il ne s'agit pas de variations très importantes, mais ces variations indiquent clairement que le robot n'est soit pas assemblé à la perfection ou encore que l'enroulement et le déroulement des câbles sur les poulies n'est pas parfait. Un mauvais assemblage de l'effecteur peut simplement être causé par un jeu se créant lors de l'exécution des nœuds liant les câbles à l'effecteur ou encore si l'effecteur n'est pas parfaitement au niveau lorsque les nœuds sont exécutés. Le glissement des nœuds lors de l'exécution de l'expérience pourrait également causer une variation dans l'orientation de l'effecteur. Si l'enroulement des câbles autour des poulies fait en sorte qu'une partie du câble s'enroule par dessus une autre partie du câble, cet événement causerait une erreur dans le modèle de contrôle des moteurs puisque le rayon r_p ne serait plus de la même valeur (le nouveau rayon serait de r_p plus le diamètre du câble).

Une autre source significative d'erreur dans les expérimentations est le fait que la position réelle de l'effecteur n'est pas mesurée. En effet, le contrôleur PID utilise seulement la différence entre la position réelle des moteurs et la position désirée pour contrôler les moteurs. Cela dit, comme mentionné au paragraphe précédent, l'assemblage du robot et l'enroulement des câbles représentent des sources d'erreur potentielles qui ne sont pas perçues par le système de contrôle. Par conséquent, le système de contrôle utilisé lors de l'expérience ne peut pas contrôler pleinement la position de l'effecteur.

Cela dit, malgré les multiples sources potentielles d'erreur, la première expérience quasi statique a permis d'aller beaucoup plus proche des limites théoriques de l'ETST que dans l'expérience en [38], où il a seulement été possible d'atteindre 64% des limites théoriques de l'ETST. Une limite approximative de 90% est une proportion importante des limites théoriques de l'ETST qui pourrait être grandement améliorée en changeant certaines procédures d'assemblage du robot et en changeant les poulies sur lesquelles s'enroulent les câbles pour des poulies plus longues et munies de rainures qui guident l'enroulement des câbles.

4.3.2 Deuxième expérience quasi statique

La deuxième expérience quasi statique présente des résultats très semblables à la première expérience. En effet, les courbes $\hat{\mathbf{P}}_{0,6}$ à $\hat{\mathbf{P}}_{0,8}$ dans la figure 4.20 ne présentent pas de pics de puissance significatifs tandis que la courbe $\hat{\mathbf{P}}_{0,9}$ présente des pics dans les mêmes fréquences que dans la première expérience. Puisque la deuxième expérience a utilisé les méthodes du chapitre 3 pour déterminer les limites théoriques de l'ETST et que des résultats similaires à ceux de la première expérience où les limites de l'ETST étaient connus analytiquement ont été obtenues, cette expérience valide d'une certaine façon les méthodes développées au chapitre 3 pour déterminer les limites théoriques de l'ETST lorsque le centre de masse n'est pas coïncident avec le centre de l'effecteur. Le fait que les limites expérimentales de l'ETST dans cette expérience sont également inférieures à 90 % des limites théoriques peut être expliqué par les mêmes causes que celles qui sont présentées dans la sous-section précédente portant sur la première expérience quasi statique.

4.4 Résultats des expériences dynamiques

Les paramètres généraux du robot pour les expériences dynamiques sont les mêmes que ceux pour les expériences quasi statiques donnés dans le tableau 4.2. La figure 4.21 présente les trajectoires dynamiques elliptiques effectuées lors des trois expériences.

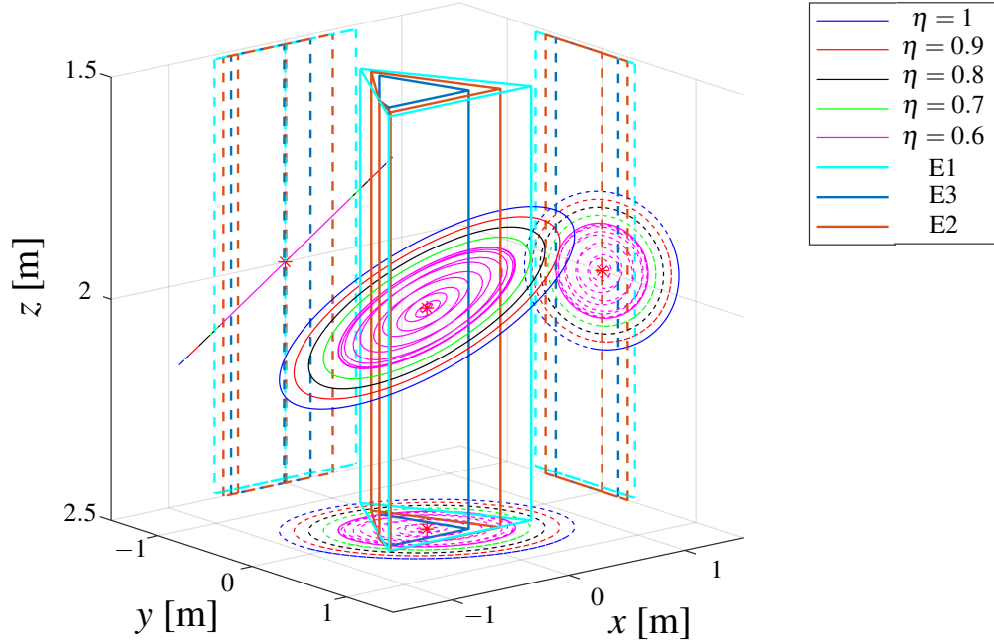


FIGURE 4.21 – Trajectoire effectuée lors des expériences de trajectoires elliptiques dynamiques.

Au centre de la figure se trouvent 5 ellipses concentriques de différentes couleurs. La taille relative de chaque ellipse est donnée par sa valeur η indiquée dans la légende de la figure. L'équation paramétrique de chaque ellipse est donnée par l'équation suivante

$$\mathbf{p}_\eta = \mathbf{p}_c + \eta \mathbf{p}_e, \quad \eta = 0.5, 0.6, \dots, 1, \quad (4.10)$$

où

$$\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega_n t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega_n t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega_n t + \phi_z) \end{bmatrix}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{mg}{mx_c + \tau_z}}, \quad (4.11)$$

et $\mathbf{p}_c = [x_c, y_c, z_c]$. Les valeurs numériques des constantes présentées dans les équations 4.10 et 4.11 sont présentées dans le tableau 4.5. L'avant-dernière valeur du tableau indique qu'aucun torseur externe n'est appliqué au centre de masse pendant les trois expériences. Une trajectoire de transition en magenta est également présentée dans la figure 4.21. Seule cette trajectoire de transition a été présentée afin que la figure ne soit pas trop chargée. Cependant, toutes les trajectoires elliptiques sont

r_x [m]	r_y [m]	r_z [m]	ϕ_x [rad]	ϕ_y [rad]	ϕ_z [rad]	\mathbf{p}_c [m]	\mathbf{t} [N,Nm]	T [sec]
0.9256	0.8197	0.1841	1.9794	0.6561	-1.1622	$[0, 0, 2]^T$	$\mathbf{0}_{6 \times 1}$	20

Tableau 4.5 – Valeurs des paramètres des ellipses des expériences dynamiques.

composées de trajectoires de transition. La période de toutes les trajectoires de transition est indiquée à la dernière colonne du tableau 4.5. L'étoile rouge au centre de la figure représente le centre des ellipses et ses coordonnées sont données par le vecteur \mathbf{p}_c dans le tableau 4.5. Les prismes E1, E2 et E3 sont les ETST du robot pour chaque expérience dynamique respective. Ces prismes ainsi que l'étoile rouge permettent de montrer que le centre des ellipses est à l'intérieur de l'ETST pour les trois expériences. Les ellipses ainsi que les prismes des ETST sont projetés sur trois plans afin de donner un meilleur aperçu des formes géométriques en trois dimensions. Les projections permettent également de montrer que toutes les ellipses sortent des ETST.

4.4.1 Première expérience dynamique : Centre de masse centré sur l'effecteur

Pour cette première expérience, aucune masse supplémentaire n'est ajoutée sur l'effecteur à l'exception de la masse de la centrale inertielle qui est placée directement au-dessus du centre de masse de l'effecteur. Ainsi, la disposition de l'effecteur pour cette expérience est la même que celle présentée à la figure 4.11 et les paramètres de masse et de position des centres de masse sont les mêmes que ceux présentés au tableau 4.3.

La tension théorique dans les câbles du robot pendant l'exécution des trajectoires elliptiques de cette première expérience est présentée à la figure 4.22. Chacun des graphiques représente la tension dans les câbles pendant l'exécution d'une trajectoire η respective. Les tensions associées à chaque paire de câbles sont identifiées par une couleur distincte et la tension respective d'un des câbles d'une paire de câbles est identifiée par un motif de ligne différent. La période totale de la trajectoire est de $T_{\text{total}} = 40 + 3\pi$ sec soit environ 49.25 secs. Cette période totale est équivalente à deux périodes de transition de 20 secs ainsi que trois tours de trajectoire elliptique à pleine amplitude à la fréquence $\omega = \omega_n$.

On remarque dans la figure 4.22 que la tension théorique dans les câbles est strictement positive et qu'elle se situe entre 1 et 2 N pour toutes les trajectoires. De plus, l'amplitude maximale de la tension dans les câbles est clairement proportionnelle à l'amplitude de la trajectoire η ce qui est normal en raison des accélérations plus importantes. Le fait que la tension soit positive pendant l'ensemble des trajectoires signifie, d'une part, que la période de transition est suffisamment longue et que les conditions nécessaires en (3.90) sont toutes respectées. La figure 4.23 présente géométriquement le respect des conditions nécessaires. Dans cette figure, les courbes r_{y1} à r_{y6} représentent géométriquement chacune des conditions en (3.90). Les étoiles représentent les trajectoires elliptiques de la première expérience dynamique. Toutes ces trajectoires sont effectuées à la fréquence $\omega = \omega_n$.

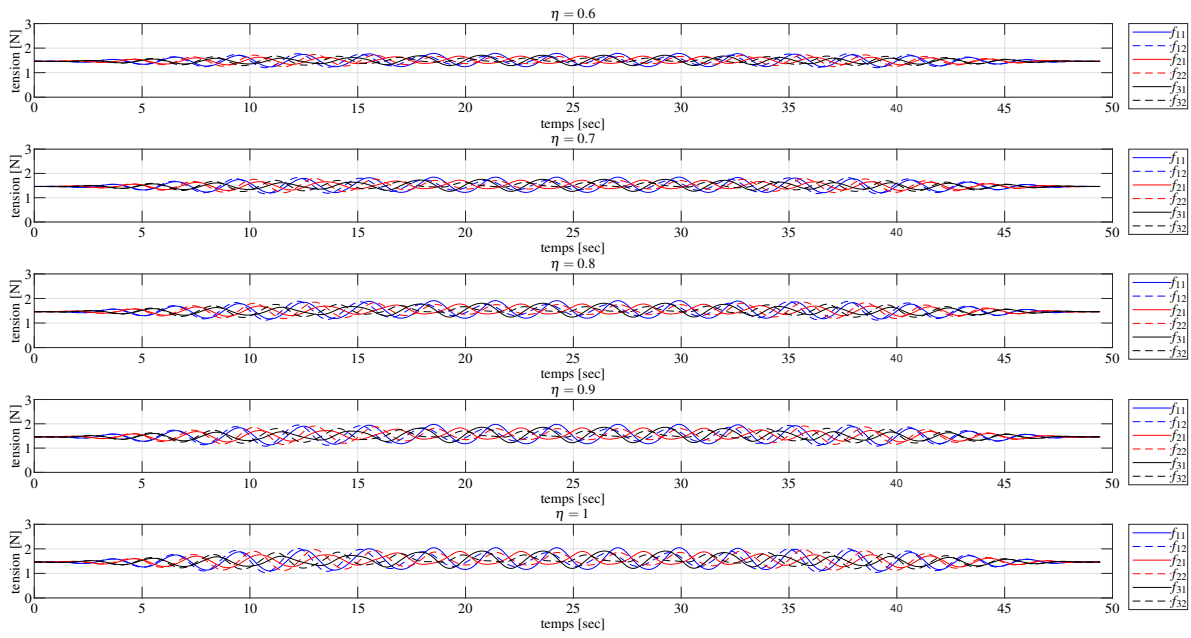


FIGURE 4.22 – Tension théorique dans les câbles pour la première expérience dynamique.

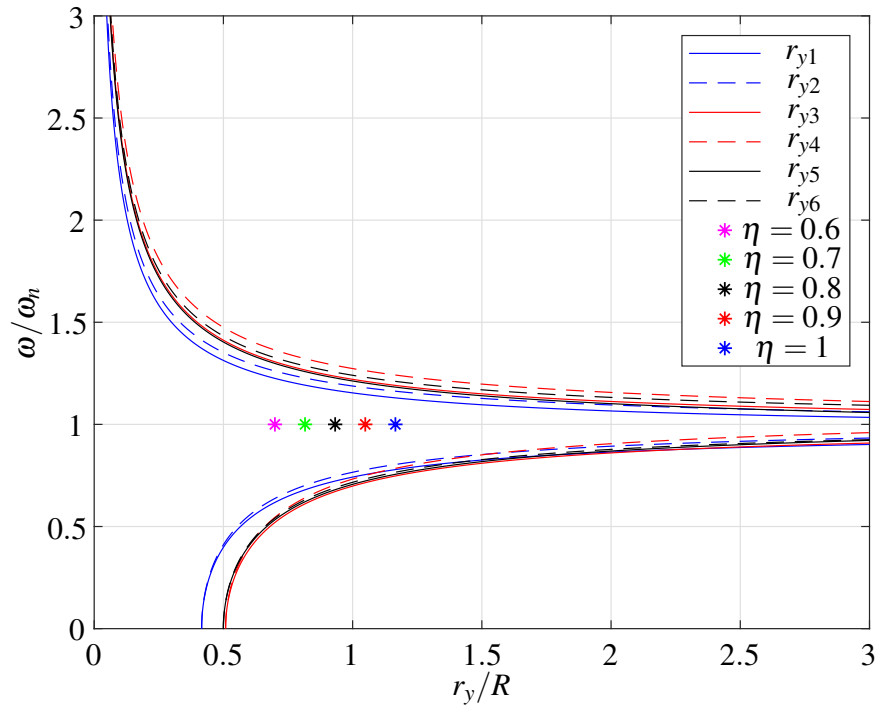


FIGURE 4.23 – Conditions de tension pour la première expérience dynamique.

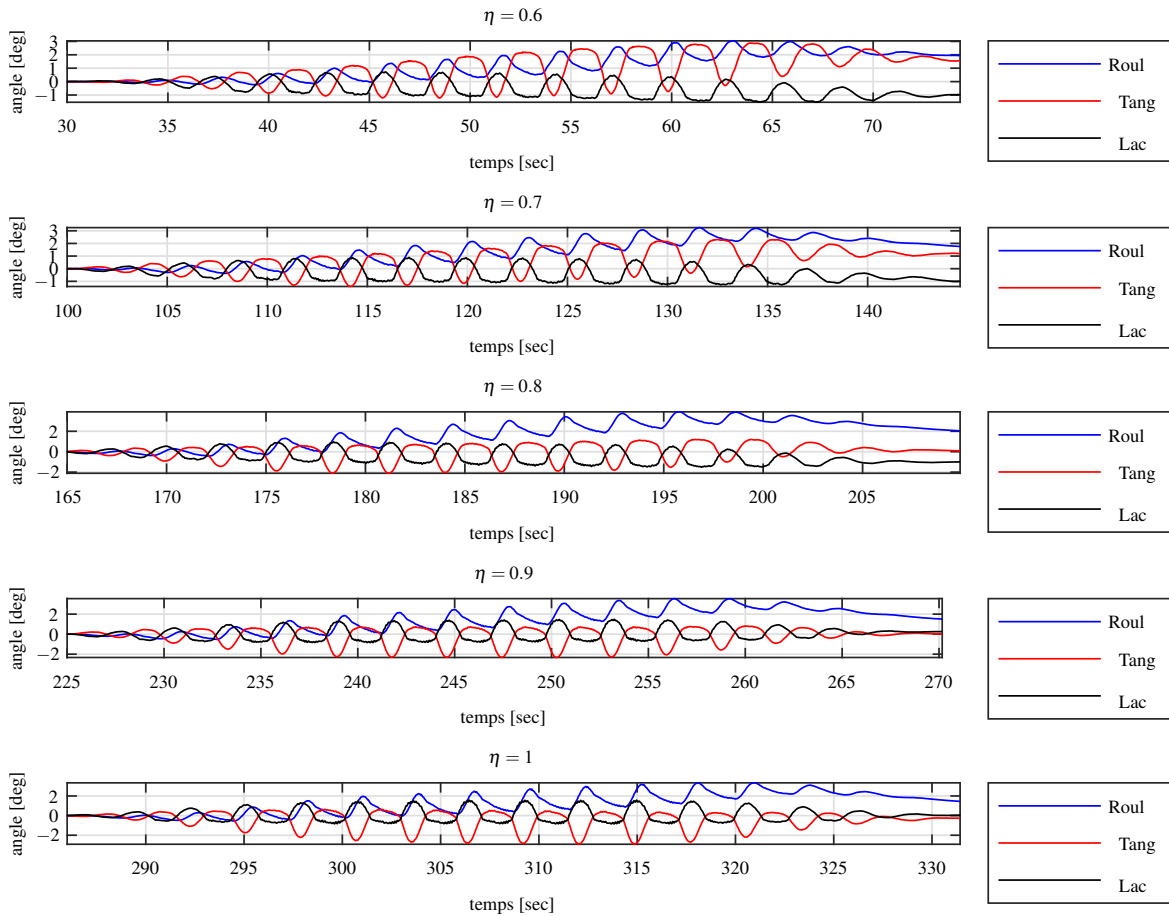


FIGURE 4.24 – Variation de l’orientation de l’effecteur pendant la première expérience dynamique.

La variation de l’orientation de l’effecteur pendant la trajectoire dynamique est présentée à la figure 4.24. Les valeurs des abscisses donnent la valeur du temps lors de l’exécution des trajectoires et les ordonnées donnent les valeurs d’angle en degrés retournés par la centrale inertielle. On remarque une variation de plus ou moins 2 degrés pour toutes les trajectoires. Les périodes de mesure dans les graphiques de la figure 4.24 n’ont pas toutes exactement la même valeur. Cependant, elles englobent toutes la vaste majorité de la période totale des trajectoires et spécialement les périodes de grandes fluctuations de l’orientation de l’effecteur qui sont synchronisées avec le mouvement de l’effecteur pendant les trajectoires.

Les étapes de traitement des données présentées dans la figure 4.24 sont sensiblement les mêmes que celles présentées à la figure 4.10 à l’exception du fait que la période de récupération des données est la période totale T_{total} de la trajectoire elliptique plutôt que les périodes de repos des trajectoires quasi statiques. La figure 4.25 présente la puissance relative des données traitées en fonction des fréquences. La puissance relative signifie que la valeur est normalisée par rapport à la somme de la puissance spectrale totale de 0 à 50 Hz, soit le spectre significatif d’analyse (selon le théorème de Nyquist). Pour mieux illustrer l’ensemble des pics composants les données traitées, les ordonnées sont représentées à

l'aide d'une échelle logarithmique. La puissance relative du signal est donnée par la courbe bleue. Les lignes rouges indiquent les fréquences associées aux multiples de la fréquence principale d'exécution de la trajectoire elliptique obtenue à l'aide de l'équation

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\sqrt{g/x_c}}{2\pi} \approx 0.352\text{Hz}. \quad (4.12)$$

Les multiples de la fréquence principale sont appelés les harmoniques et sont causés par la nature oscillatoire du mouvement de l'effecteur. Le premier pic de puissance dans les graphiques est associé à la fréquence de la trajectoire en entier, c'est-à-dire $1/T_{\text{total}} \approx 0.020\text{Hz}$.

En examinant les graphiques de la figure 4.25, on remarque d'abord que l'ensemble des pics significatifs de puissance relative sont tous situés sur une fréquence harmonique. Ensuite, on remarque une décroissance exponentielle de la puissance relative plus la fréquence augmente.

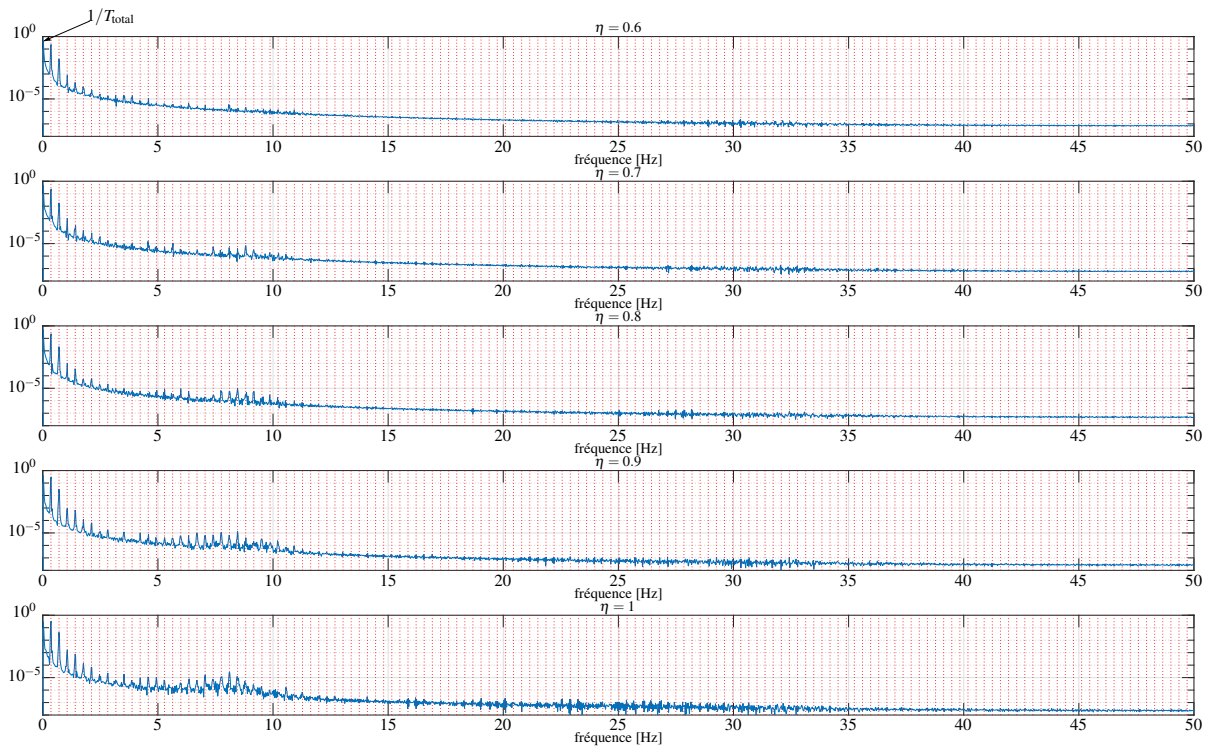


FIGURE 4.25 – Puissance du signal à différentes fréquences pendant la première expérience.

4.4.2 Deuxième expérience dynamique : Centre de masse décentré légèrement

Dans cette expérience, le centre de masse est déplacé légèrement à l'aide d'une faible masse supplémentaire placée sur la circonférence de l'effecteur. La disposition de l'effecteur, de la centrale inertielle et de la masse supplémentaire sont les mêmes que dans la figure 4.16. Cependant, la masse de la masse M n'est pas la même que celle du tableau 4.4 et est plutôt donnée dans le tableau 4.6.

Les tensions théoriques dans les câbles du robot sont présentées à la figure 4.26. Les tensions pour toutes les trajectoires dans cette figure sont différentes des tensions dans la figure 4.22 puisque dans

h_{CI} [m]	h_E [m]	h_M [m]	m_E [kg]	m_{CI} [kg]	M [kg]	\mathbf{c} [m]
0.035	0.040	0.015	0.532	0.174	0.147	$[0.0348, 0, 0.0346]^T$

Tableau 4.6 – Dimensions et masses des composantes pour la seconde expérience dynamique.

la figure 4.26, la tension dans certains des câbles du robot est plus proche de 0 à certains moments de la trajectoire que dans la figure 4.22. Cependant, toutes les tensions sont supérieures à 0 pour tous les câbles et pour toutes les trajectoires.

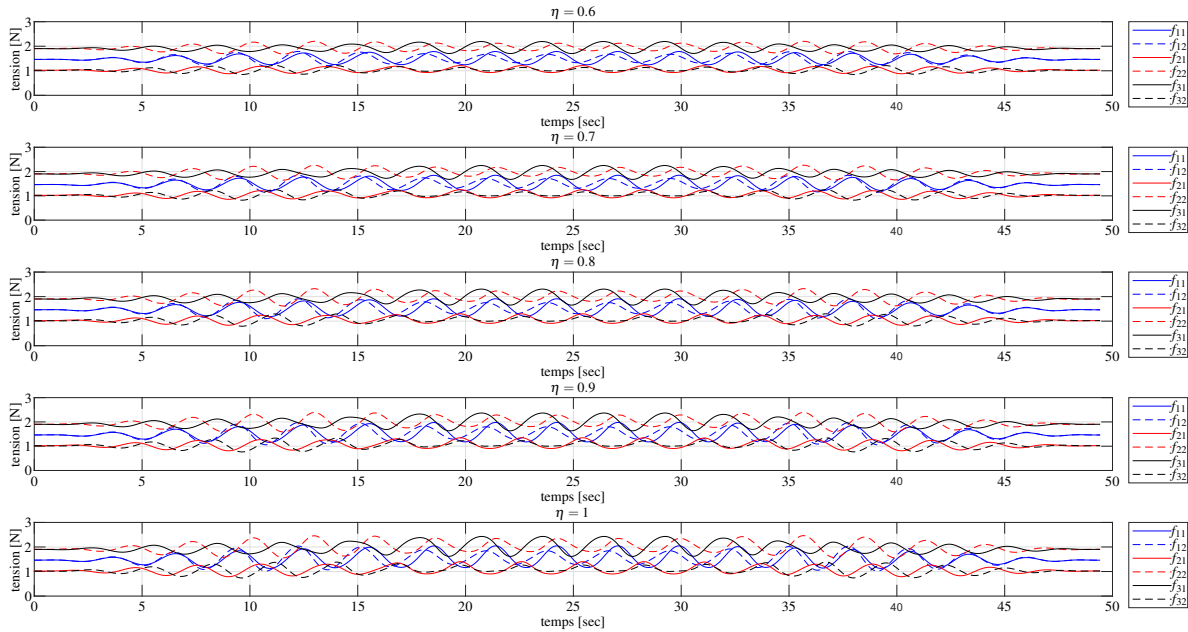


FIGURE 4.26 – Tension théorique dans les câbles pour la deuxième expérience dynamique.

Le fait que toutes les tensions sont supérieures à 0 pendant les parties à pleine amplitude des trajectoires elliptiques peut également être montré à l'aide de la figure 4.27 qui montre le respect de toutes les conditions nécessaires. Cependant par comparaison à la figure 4.23, on remarque que les étoiles sont plus proches des courbes limites des conditions. Cela est causé par le léger déplacement du centre de masse.

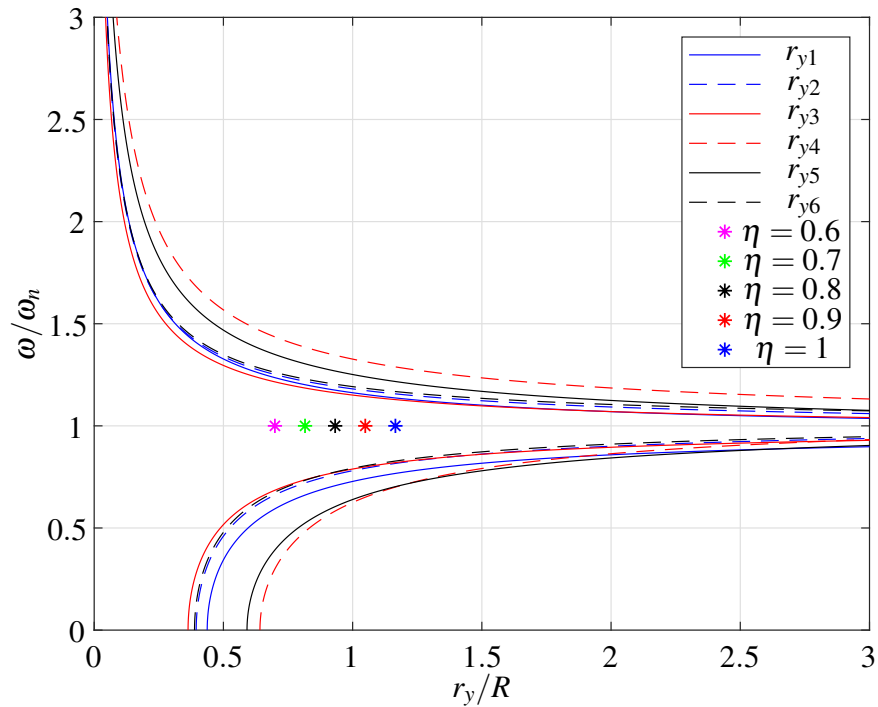


FIGURE 4.27 – Conditions de tension pour la deuxième expérience dynamique.

La variation de l'orientation de l'effecteur pendant les trajectoires dynamiques de la deuxième expérience est présentée à la figure 4.28. La variation de l'orientation de l'effecteur dans cette figure pour l'ensemble des trajectoires est semblable à celle de la première expérience. Cependant, on peut remarquer une légère variation de l'angle Lacet à chaque cycle du signal (par exemple à la seconde 685 du deuxième graphique).

La figure 4.29 présente la puissance spectrale relative des données récoltées lors des trajectoires de la deuxième expérience dynamique. Comme pour la première expérience, les pics de puissances se retrouvent tous sur des fréquences harmoniques qui sont des multiples de la fréquence principale d'exécution de la trajectoire principale. Cependant, on peut remarquer que les pics associés à des fréquences harmoniques plus élevées ont une puissance supérieure relativement à la puissance des pics harmoniques de la première expérience. Tout comme dans la première expérience, on remarque également une augmentation de la puissance relative des pics harmoniques à fréquence élevée proportionnelle à la valeur de η .

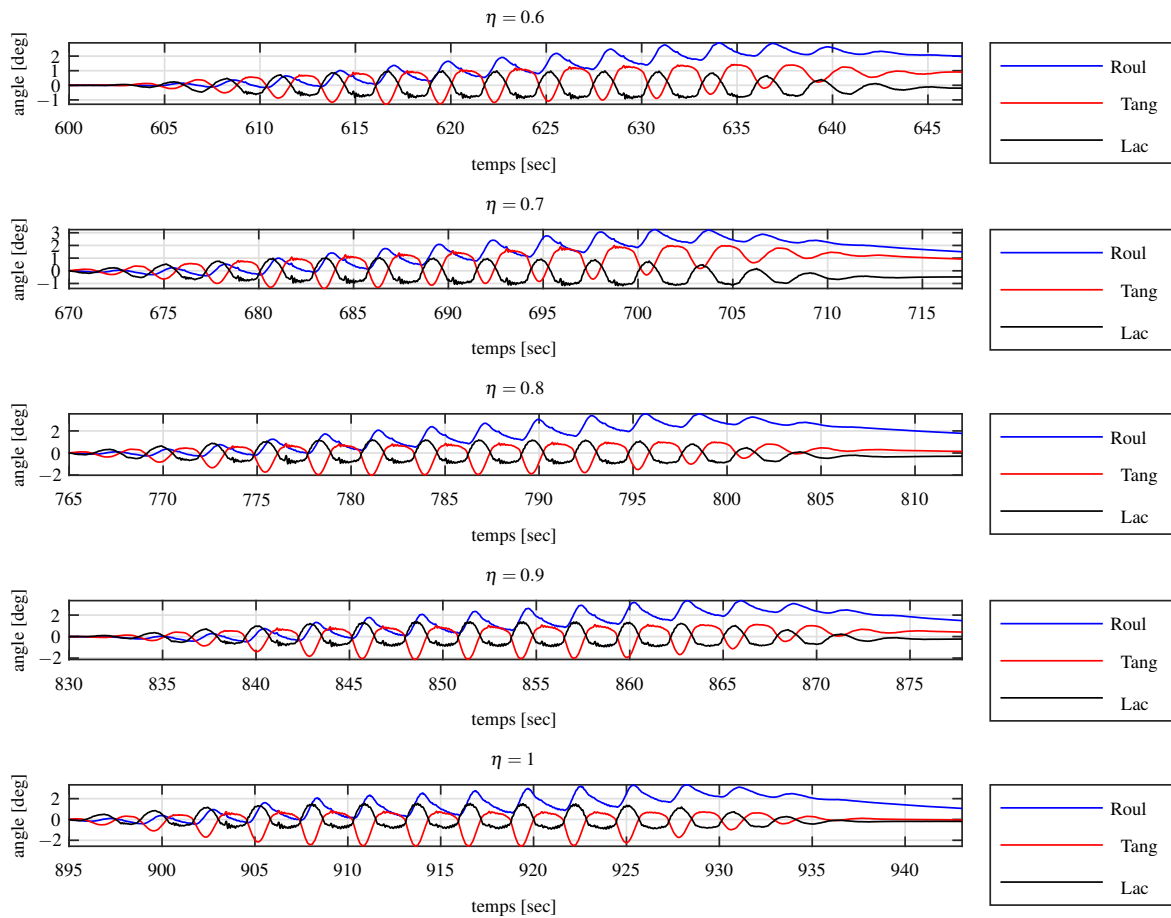


FIGURE 4.28 – Variation de l'orientation de l'effecteur pendant la deuxième expérience dynamique.

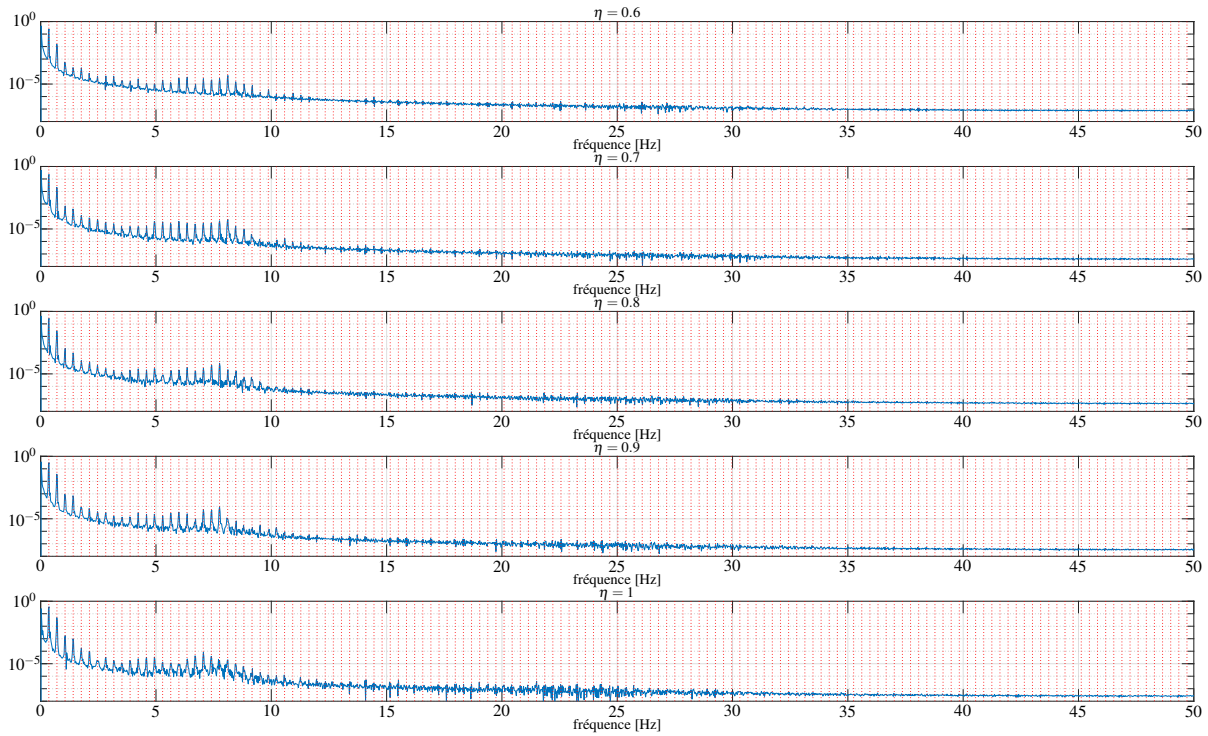


FIGURE 4.29 – Puissance du signal à différentes fréquences pendant la deuxième expérience.

4.4.3 Troisième expérience dynamique : Centre de masse décentré significativement

Pour cette expérience, une masse plus importante que dans la deuxième expérience est placée sur la circonférence de l'effecteur (à la même position que pour la deuxième expérience). La disposition de l'effecteur pour cette expérience est la même que celle présentée à la figure 4.16. Les valeurs de la disposition de l'effecteur sont les mêmes que celles présentées au tableau 4.4.

La figure 4.30 présente l'évolution de la tension dans les câbles du robot pendant l'exécution des trajectoires de la troisième expérience dynamique. Bien que toutes les tensions soient supérieures à 0 pour toutes les trajectoires, la tension dans certains des câbles est très près de 0. Cette proximité relative à la tension nulle peut également être perçue dans la figure 4.31 où les étoiles sont particulièrement près de certaines limites.

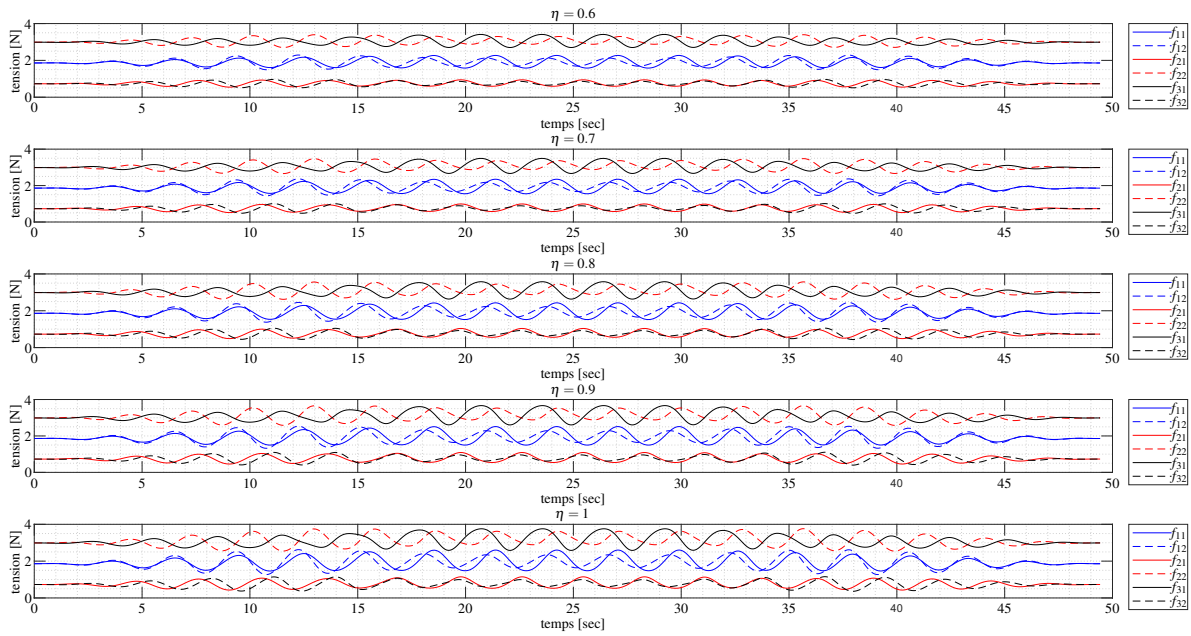


FIGURE 4.30 – Tension théorique dans les câbles pour la troisième expérience dynamique.

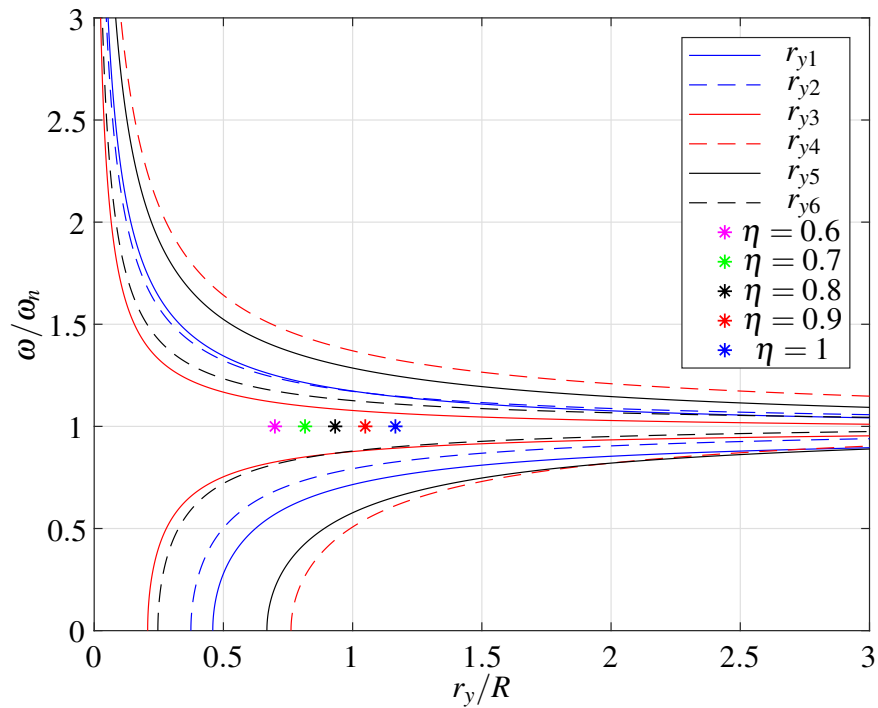


FIGURE 4.31 – Conditions de tension pour la troisième expérience dynamique.

Le déplacement significatif du centre de masse de l'effecteur est particulièrement remarquable dans la figure 4.32 présentant l'évolution de l'orientation de l'effecteur sur deux trajectoires. Le déplacement

du centre de masse ne change pas l'amplitude maximale de la variation de l'orientation de l'effecteur, mais plutôt la forme harmonique du signal qui devient significativement distordu (moins lisse) que les signaux provenant des autres expériences. Seules deux trajectoires ont été effectuées pour cette expérience en raison de la vibration importante de l'effecteur lors de l'exécution des deux trajectoires. Pour ne pas endommager le robot, il a été décidé de ne pas effectuer de trajectoires avec une amplitude plus importante que $\eta = 0.7$.

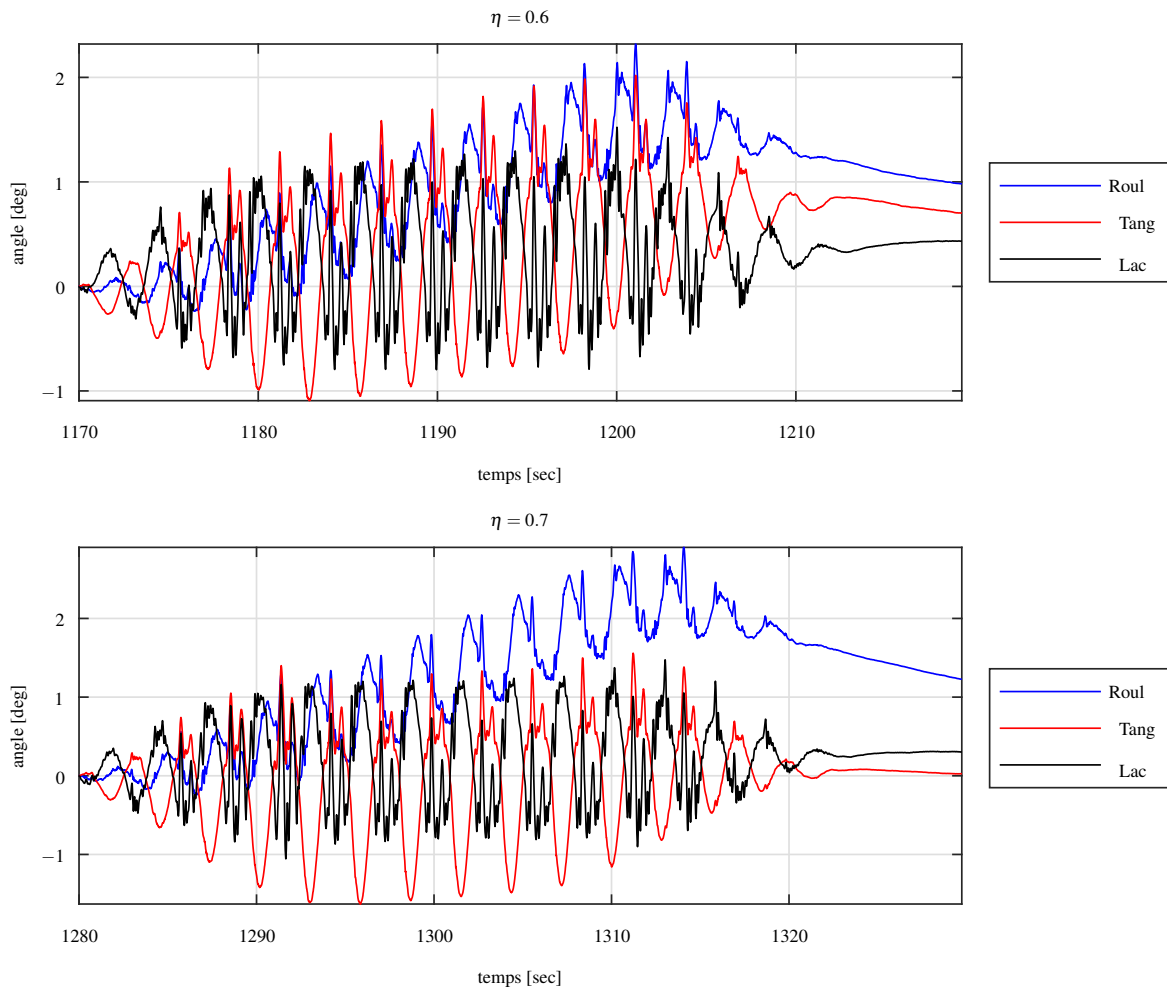


FIGURE 4.32 – Variation de l'orientation de l'effecteur pendant la troisième expérience dynamique.

La figure 4.33 présente l'analyse de la puissance fréquentielle des signaux traités. En comparaison aux autres expériences, on remarque que les pics situés sur des fréquences harmoniques ont des puissances relativement élevées. En effet, les dix premiers pics situés sur des fréquences harmoniques ont des puissances relatives supérieures à 0.001 ce qui est seulement le cas pour au plus 4 pics dans la deuxième expérience (pour la trajectoire $\eta = 1$) et au plus 3 pics pour la première expérience. On peut également remarquer que les pics se situant entre 10 et 20 Hz ont une puissance relative qui est environ 10 fois plus élevée que dans les autres expériences. Il est également important de remarquer

que le signal de puissance dans cette bande de fréquence est bruité de sorte que des pics ne sont pas seulement présents sur les fréquences harmoniques.

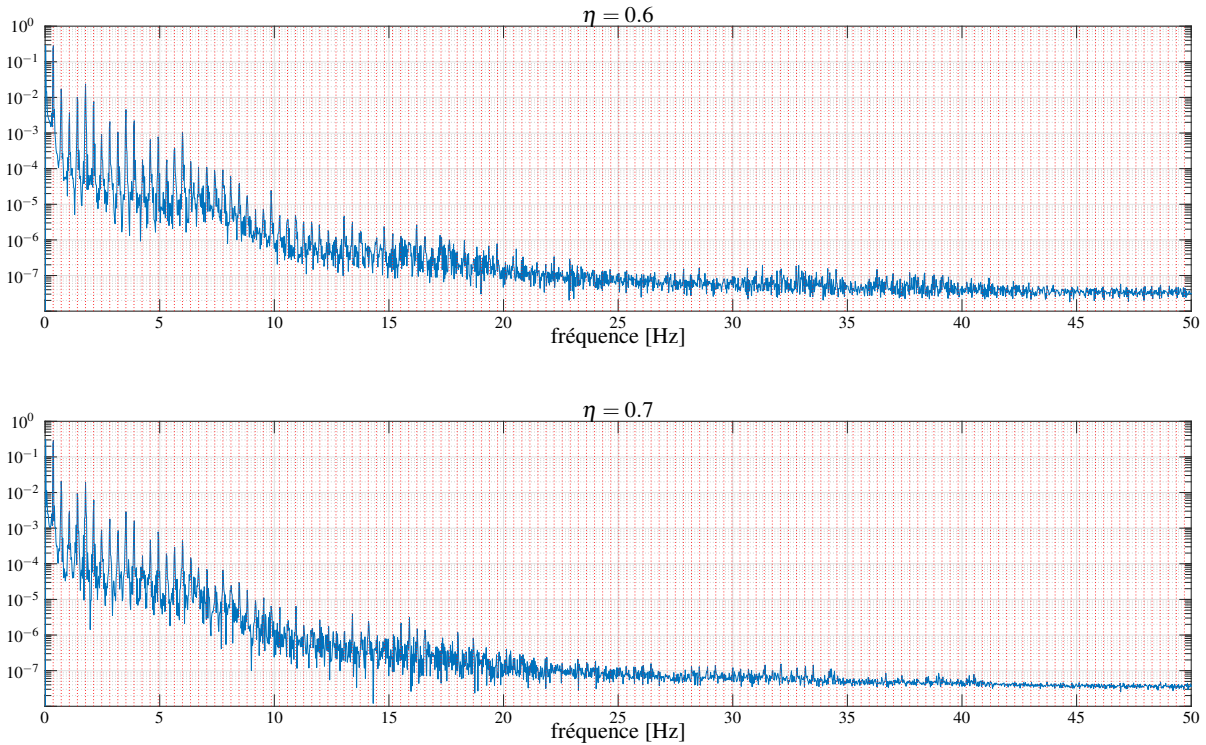


FIGURE 4.33 – Puissance du signal à différentes fréquences pendant la troisième expérience.

4.5 Discussion sur les expériences dynamiques

4.5.1 Première expérience dynamique

D’abord, la première expérience permet de montrer que l’architecture du robot lui permet de garder une orientation quasi constante pendant l’exécution de trajectoires hautement dynamiques qui sortent de l’ETST du robot. En effet, les angles d’Euler donnant l’orientation du robot varient à plus ou moins 2 degrés pendant l’exécution des trajectoires ce qui est une faible variation de l’orientation considérant l’amplitude et la vitesse d’exécution des trajectoires elliptiques. Ensuite, la première expérience permet de montrer que la variation de l’orientation de l’effecteur est causée par la variation de la position de l’effecteur puisque la fréquence principale de l’analyse de la puissance fréquentielle relative à la figure 4.25 est la même fréquence que la fréquence d’exécution de la trajectoire elliptique. L’analyse de la puissance fréquentielle relative permet également de montrer une évolution du spectre de puissance en fonction de la valeur de η . En effet, on peut remarquer que les pics de puissances se situant sur des fréquences harmoniques ont une puissance de plus en plus élevée lorsque η augmente. Cependant, dans le cas de la première expérience, la variation est très faible et la puissance relative des pics situés sur des fréquences harmoniques élevées demeure très faible. Cependant, il semble y avoir une corrélation inverse entre la tension dans les câbles et la puissance relative des pics situés sur

des fréquences harmoniques élevées.

4.5.2 Deuxième expérience dynamique

Cette expérience a permis de montrer qu'il est possible de déplacer le centre de masse faiblement sans perdre le contrôle sur le robot. En effet, l'évolution de l'orientation de l'effecteur lors des trajectoires dynamiques de cette expérience à la figure 4.28 est très semblable à celle des trajectoires elliptiques de la première expérience et reste relativement lisse ce qui suggère une tension qui est presque toujours présente dans les câbles. Cependant, les graphiques de la figure 4.28 montrent une très faible variation de l'orientation de l'effecteur à certains moments de la trajectoire soit à environ tous les 2.5 sec. Par analyse des graphiques de la figure 4.26, on remarque que les moments de la trajectoire où la tension dans les câbles est la plus faible advient également à tous les 2.5 sec. Il serait donc logique que la faible variation de l'orientation de l'effecteur qui advient à tous les 2.5 sec soit corrélée avec une tension presque nulle dans l'un des câbles. Bien que les tensions dans l'ensemble des câbles sont théoriquement toujours supérieures à 0 d'après les graphiques 4.26 et 4.27, il est possible que pour les mêmes sources d'erreurs que celles mentionnées dans la discussion sur les expériences quasi statiques, la tension dans un ou certains câbles ait momentanément été nulle. Pour cette raison, pour assurer un bon contrôle du robot, il serait plutôt pratique d'assurer non pas que les tensions soient non nulles, mais plutôt que les tensions soient supérieures à une tension minimale. Une façon très simple pour augmenter la tension dans les câbles serait de simplement ajouter de la masse sur l'effecteur.

4.5.3 Troisième expérience dynamique

À première analyse, la troisième expérience porterait à croire qu'il n'est pas possible d'effectuer des trajectoires elliptiques avec un centre de masse de l'effecteur significativement décentré puisque, comme le montre la variation de l'orientation de l'effecteur dans la figure 4.30, la variation de l'orientation est non lisse, ce qui suggère une perte de tension dans les câbles du robot pendant l'exécution de la trajectoire. On pourrait en venir à la même conclusion visuellement lors de l'exécution des trajectoires de la troisième expérience où on voyait clairement que l'effecteur subissait des vibrations importantes, et où les câbles semblaient se tendre et se détendre à plusieurs reprises pendant l'exécution de la trajectoire. De plus, l'analyse du spectre de la puissance fréquentielle indique une puissance relative beaucoup plus importante pour les pics situés sur des fréquences harmoniques élevées ce qui suggère des vibrations importantes et donc des pertes de tension momentanées dans les câbles. Or, selon la modélisation théorique des tensions dans les câbles à la figure 4.30, les tensions dans les câbles sont théoriquement censées être toujours positives pendant toutes les trajectoires de la troisième expérience. Il existe donc une différence entre les tensions théorique et réelle de sorte qu'il soit nécessaire de s'assurer que la tension est supérieure à un certain seuil plus grand que zéro.

Une solution facile permettant d'augmenter la tension dans les câbles est d'ajouter de la masse sur l'effecteur puisque la tension est directement proportionnelle à la masse totale de l'effecteur. Il est alors toujours possible d'avoir un centre de masse significativement décentré, mais d'avoir une tension

minimale beaucoup plus importante. L'assurance du contrôle du robot n'est alors pas indiquée par le respect de toutes les conditions de la figure 4.31, mais plutôt la tension minimale dans les graphiques de la figure 4.30 étant supérieure à une tension minimale choisie arbitrairement. Les conditions de la figure 4.31 sont tout de même très utiles, car elles permettent de valider rapidement si l'arrangement géométrique de l'effecteur (la position de son centre de masse) lui permet d'avoir une tension positive dans les câbles.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les résultats de deux types d'expériences effectuées sur le RPSEC translationnel à 3DDL présenté au chapitre 3.

Le premier type d'expérience portait sur le déplacement quasi statique de l'effecteur du robot à l'intérieur de son ETST. Les expériences ont permis de montrer que l'orientation de l'effecteur demeure constante jusqu'à ce que l'effecteur atteigne 90 % des limites théoriques de l'ETST. Après ce point, l'effecteur du robot commençait à osciller ce qui suggérait que la tension dans au moins l'un des câbles était devenue nulle. Cette expérience a été reprise à deux reprises, soit avec un centre de masse de l'effecteur centré sur l'effecteur et avec un centre de masse décentré. Dans les deux cas, il a été possible d'atteindre environ une même proportion des limites théoriques de l'ETST soit environ 90%.

Le second groupe d'expériences portait sur le déplacement de l'effecteur à l'extérieur de l'ETST sous la forme de trajectoires elliptiques. Ces expériences ont permis de montrer qu'en effectuant les trajectoires à la bonne fréquence, il était possible d'exécuter des trajectoires à très grande amplitude et spécialement lorsque le centre de masse de l'effecteur était centré sur l'effecteur. Dans les deux dernières expériences, le centre de masse a été arbitrairement déplacé afin de déterminer l'influence de ce déplacement sur la capacité du robot à entreprendre des trajectoires elliptiques à l'extérieur de l'ETST. Dans les deux expériences, l'orientation de l'effecteur a varié très peu (comme dans la première expérience) ce qui pouvait suggérer que les câbles du robot étaient toujours sous tension. Cependant, par analyse de la variation de l'orientation de l'effecteur dans le temps, il a été remarqué que la variation n'était pas décrite par des courbes lisses comme dans la première expérience et donc qu'il y avait potentiellement de brèves périodes de perte de tension dans les câbles ce qui était contraire aux modèles théoriques de la tension dans les câbles où les tensions étaient toujours positives pendant les trajectoires. Pour expliquer cette différence, il a été suggéré que certaines erreurs dans l'assemblage et le contrôle du robot causaient des différences entre les tensions théorique et réelle du robot. Ainsi, pour tenir compte de cette différence, il a été suggéré de ne pas seulement s'assurer que la tension dans les câbles est supérieure à 0, mais bien que la tension soit supérieure à une tension minimale arbitraire.

Conclusion

Ce mémoire a présenté l'étude des capacités de deux architectures de robot parallèles suspendus et entraînés par câbles, utilisant des arrangements des câbles en parallélogramme.

Le premier chapitre de ce mémoire a présenté une brève revue de littérature concernant les sujets à l'étude dans ce mémoire. On y a parlé notamment des robot parallèles entraînés par câble, de leur espace de travail statique, de leur capacité à réaliser des trajectoires dynamiques et de l'utilisation d'arrangements de câbles en parallélogramme pour contraindre l'orientation de l'effecteur.

Dans le second chapitre, un robot plan à 2 degrés de liberté en translation avec trois câbles dont deux des câbles sont arrangés en parallélogramme a été étudié. L'arrangement des câbles en parallélogramme assure une orientation constante de l'effecteur tant et aussi longtemps que les câbles du robot sont sous tension. La modélisation cinématique de ce robot a d'abord été effectuée afin de montrer que l'arrangement de câbles en parallélogramme permet de garder une orientation constante de l'effecteur et afin de déterminer les lieux de singularité du robot.

Ensuite, une modélisation dynamique du robot a été présentée qui a permis de déterminer des conditions algébriques qui, lorsqu'elles sont respectées, assurent que les câbles du robot sont en tension et donc qu'il est possible de contrôler le robot. De ces conditions algébriques, les limites de l'espace de travail statique du robot ont été déterminées. Il a ensuite été montré que la grandeur de l'espace de travail statique était fonction de la position relative du centre de masse du robot, de la position relative du troisième câble du robot (celui qui ne fait pas partie d'un arrangement en parallélogramme) et du torseur d'action appliqué au centre de masse du robot et qu'il était possible d'optimiser la largeur de l'espace de travail du robot.

La capacité du robot à bouger dans l'espace a également été étudiée. Pour ce faire, deux types de trajectoires ont été étudiées, soit des trajectoires à l'intérieur de l'espace de travail statique et des trajectoires dynamiques elliptiques à l'extérieur de l'espace de travail statique. Pour ces deux types de trajectoires, les conditions algébriques assurant une tension dans les câbles ont été utilisées pour déterminer des conditions propres aux trajectoires qui assurent que les câbles soient toujours sous tension pendant les trajectoires. Spécialement pour les trajectoires dynamiques elliptiques, des conditions spéciales ont été obtenues qui permettent au robot de réaliser des trajectoires ayant une amplitude arbitrairement grande tant et aussi longtemps que la trajectoire est effectuée à une certaine fréquence

spéciale. Il a également été montré que des trajectoires elliptiques pouvaient être effectuées si le centre de masse de l'effecteur était décentré.

Le troisième chapitre de ce mémoire a présenté un deuxième robot parallèle suspendu entraîné par câbles et utilisant des arrangements de câbles en parallélogramme. Ce robot est un robot spatial à trois degrés de liberté en translation avec 3 paires de câbles arrangés en parallélogrammes. Ces arrangements de câbles contraignent l'orientation de l'effecteur. Les mêmes sujets d'étude qu'au deuxième chapitre ont été étudiés pour ce robot dans le chapitre 3. Ainsi, une modélisation de la cinématique a permis de déterminer les lieux de singularités du robot en fonction de l'arrangement des paires des câbles. Une étude sur les possibles interférences entre les câbles du robot a également été présentée. Cette étude a montré qu'il n'existait que deux arrangements très spécifiques de l'effecteur qui donnent lieu à un croisement des câbles du robot.

Ensuite, une modélisation dynamique du robot a permis de déterminer, comme au chapitre 2, des conditions algébriques qui assurent que les câbles sont sous tension. Ces conditions ont ensuite été utilisées pour déterminer les limites de l'espace de travail statique du robot sous différentes conditions, soit en ayant un centre de masse décentré par rapport au centre de l'effecteur du robot et en ayant un torseur d'action appliqué au centre de masse du robot. Sous ces différentes conditions, une optimisation de l'arrangement de l'effecteur a été effectuée qui a permis de montrer que la configuration optimale du robot était dépendante de différentes conditions. Une planification de trajectoires elliptiques a également été présentée pour ce robot. Comme pour le chapitre 2, une fréquence spéciale d'oscillation a été mise en évidence qui permet de choisir arbitrairement l'amplitude des trajectoires elliptiques entreprises lorsque certaines conditions sont respectées.

Le dernier chapitre de ce mémoire a présenté les résultats de deux types d'expériences effectuées sur le robot du chapitre 3. Le premier type d'expériences étudié dans ce chapitre portait sur le déplacement quasi statique de l'effecteur du robot à l'intérieur de son ETST. Les expériences ont permis de montrer que l'orientation de l'effecteur demeure constante jusqu'à ce que l'effecteur atteigne 90 % des limites théoriques de l'ETST sous différentes conditions.

Le second groupe d'expériences portait sur le déplacement de l'effecteur à l'extérieur de l'ETST sous la forme de trajectoires elliptiques. Ces expériences ont permis de montrer qu'en effectuant les trajectoires à la bonne fréquence, il était possible d'exécuter des trajectoires à très grande amplitude et spécialement lorsque le centre de masse de l'effecteur était centré sur l'effecteur. Il a également été possible d'effectuer des trajectoires elliptiques à l'extérieur de l'ETST lorsque le centre de masse était décentré, mais les expériences ont montré que certains des câbles du robot n'étaient alors plus sous tension pendant certaines période de la trajectoire. Diverses raisons possibles ont été données pour cette perte de tension et il a été conclu qu'il fallait assurer une tension minimale arbitraire dans les câbles plutôt qu'une tension simplement supérieure à 0 afin d'assurer le bon fonctionnement du robot.

4.7 Travaux futurs

D'abord, comme mentionné dans la discussion du chapitre 4 sur les trajectoires dynamiques du robot du chapitre 3, il serait très pertinent de refaire des expérimentations de trajectoires elliptiques avec une masse totale d'effecteur plus importante. Cela permettrait d'avoir une tension minimale théorique plus importante et donc de permettre au robot d'entreprendre des trajectoires elliptiques tout en ayant un centre de masse significativement décentré. Pour ce faire cependant, il serait nécessaire de reconcevoir les oeillets de sortie des câbles au niveau de la base du robot. En effet, comme on peut le voir dans les cercles verts à la figure 4.3, les câbles qui sortent des oeillets sont presque toujours perpendiculaires au trou des oeillets. Cela cause beaucoup de friction entre les oeillets et les câbles et spécialement lorsque la tension dans les câbles est importante. Pour augmenter la tension dans les câbles, il serait nécessaire de repenser à la conception des oeillets. Une bonne piste de solution serait d'utiliser des poulies de sorte que les points de sortie des câbles seraient tangents à la poulie et la poulie serait libre de tourner sur elle-même ce qui distribuerait la tension sur une plus grande partie du câble.

Également, il serait très pertinent de tester expérimentalement l'optimisation de l'ETST du robot du chapitre 3 en fonction de la configuration de l'effecteur. Pour ce faire, il faudrait changer la position relative de chaque moteur afin de changer la valeur de l'angle α .

De plus, il serait intéressant d'ajouter une paire de câbles parallèles supplémentaire au robot et déterminer s'il est ainsi possible d'avoir un espace de travail rectangulaire plutôt que triangulaire. Un espace à base rectangulaire serait beaucoup plus pratique pour de nombreuses applications.

Enfin, il serait très intéressant de tester d'autres trajectoires dynamiques que des trajectoires elliptiques tout en ayant le centre de masse de l'effecteur décentré. Cela pourrait montrer clairement l'avantage du robot présenté au chapitre 3 sur les robots à masse ponctuelle. L'article [30] présente déjà une validation expérimentale de trajectoires de type point à point. Il serait intéressant d'effectuer une même validation expérimentale avec le centre de masse décentré.

Annexe A

Passage de la forme générale à la forme simplifiée d'une trajectoire elliptique en 2D

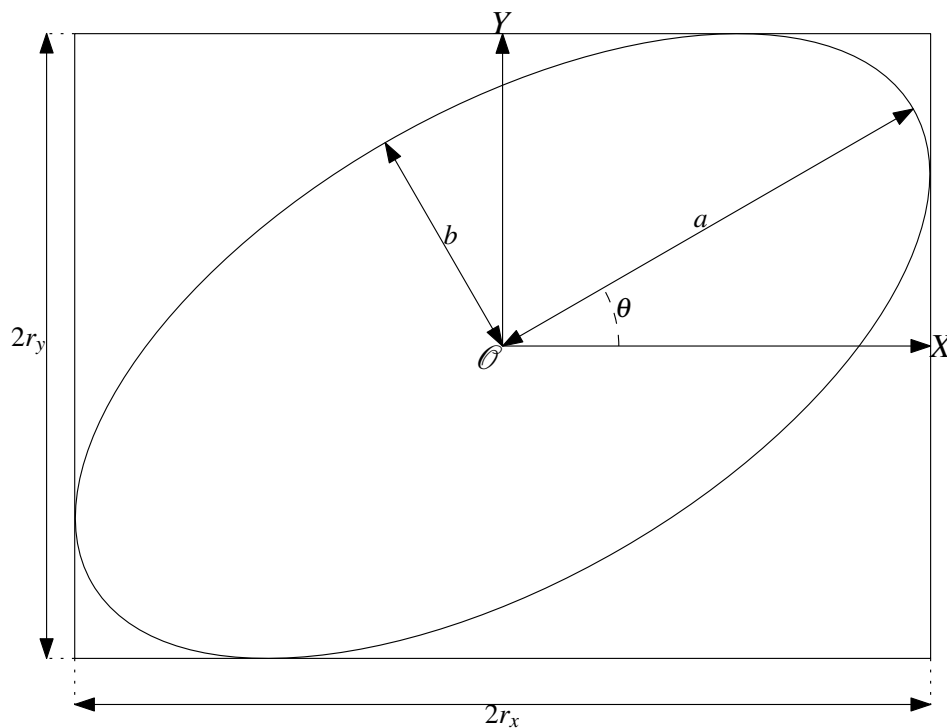


FIGURE A.1 – Trajectoire elliptique générale \mathbf{p}_e dans un plan XY , centrée à l'origine, orientée d'un angle θ et ayant respectivement des longueurs de grand et petit rayons a et b .

Une ellipse centrée à l'origine dans un plan XY , ayant une longueur de grand rayon de a et une longueur de petit rayon de b et orientée avec un angle de θ par rapport à l'abscisse X est présentée à

la figure A.1 et son équation paramétrique temporelle s'écrit

$$\mathbf{p}_e(t) = \begin{bmatrix} a \cos \theta \cos(\omega t + \phi) - b \sin \theta \sin(\omega t + \phi) \\ a \sin \theta \cos(\omega t + \phi) + b \cos \theta \sin(\omega t + \phi) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

où t est le temps en seconde et ω est ici appelée la fréquence d'oscillation angulaire et décrit combien de fois par seconde (s) un tour complet (oscillation) autour de l'ellipse est effectué par un point suivant la trajectoire $\mathbf{p}_e(t)$ en rad/s. Conséquemment, la période de cette trajectoire est de $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s. La valeur ϕ est en rad et permet d'établir la position initiale de la trajectoire sur l'ellipse.

La formulation de $\mathbf{p}_e(t)$ en (A.1) est très longue et peut être simplifiée sous la forme

$$\mathbf{p}_e(t) = \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

où $2r_x$ et $2r_y$ sont respectivement la largeur et la hauteur de la boîte qui circonscrit la trajectoire elliptique et dont les côtés de la boîte sont parallèles aux axes X et Y comme présenté à la figure A.1. Les termes ϕ_x et ϕ_y sont fonctions de la position initiale de la trajectoire, des dimensions de l'ellipse ainsi que de son orientation.

La première étape afin de passer de la forme en (A.1) à la forme paramétrique en (A.2) est de développer les fonctions trigonométriques ayant des sommes de termes comme argument et d'égaliser les deux formes ce qui résulte en

$$\begin{bmatrix} c_\tau (ac_\theta c_\phi - bs_\theta s_\phi) - s_\tau (ac_\theta s_\phi - bs_\theta c_\phi) \\ c_\tau (as_\theta c_\phi - bc_\theta s_\phi) + s_\tau (bc_\theta s_\phi - as_\theta c_\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\tau (r_x s_{\phi_x}) + s_\tau (r_x c_{\phi_x}) \\ c_\tau (r_y s_{\phi_y}) + s_\tau (r_y c_{\phi_y}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

où $c_* = \cos(*)$, $s_* = \sin(*)$ et $\tau = \omega t$. Les termes multiplicateurs des c_τ et des s_τ de chaque côté de l'équation sont ensuite comparés pour former deux groupes de deux équations, un groupe étant fonction de ϕ_x et l'autre étant fonction de ϕ_y afin de pouvoir isoler ces valeurs. Le développement mathématique prend la forme

$$\left. \begin{array}{l} ac_\theta c_\phi - bs_\theta s_\phi = r_x s_{\phi_x} \\ -ac_\theta s_\phi - bs_\theta c_\phi = r_x c_{\phi_x} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_x = \tan^{-1} \left(\frac{bs_\theta s_\phi - ac_\theta c_\phi}{ac_\theta s_\phi + bs_\theta c_\phi} \right), \quad (\text{A.4})$$

$$\left. \begin{array}{l} as_\theta c_\phi - bc_\theta s_\phi = r_y s_{\phi_y} \\ bc_\theta s_\phi - as_\theta c_\phi = r_y c_{\phi_y} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_y = \tan^{-1} \left(\frac{as_\theta c_\phi - bc_\theta s_\phi}{bc_\theta s_\phi - as_\theta c_\phi} \right). \quad (\text{A.5})$$

Maintenant que ϕ_x et ϕ_y ont été déterminés, il reste à déterminer les valeurs de r_x et r_y . Comme mentionné précédemment, l'objectif est que $2r_x$ et $2r_y$ soient respectivement la largeur et la hauteur de la boîte qui circonscrit la trajectoire elliptique dans un boîte dont les côtés sont parallèles soit à l'axe X ou l'axe Y . Cela veut dire que les valeurs maximales en X et en Y de la forme générale de la trajectoire elliptique en (A.1) doivent être respectivement égale à r_x et r_y . La valeur maximale de la composante en X de l'équation (A.1) est obtenue en déterminant les extrêmes de la fonction

trigonométrique composée. Pour ce faire il suffit de dériver par rapport au temps et de mettre égale à 0. Le résultat est alors

$$s_\tau (bs_\theta s_\phi - ac_\theta c_\phi) - c_\tau (ac_\theta s_\phi - bs_\theta c_\phi) = 0. \quad (\text{A.6})$$

À l'aide de l'identité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, les valeurs suivantes pour s_τ et c_τ sont obtenues

$$s_\tau = \pm \frac{ac_\theta s_\phi - bs_\theta c_\phi}{A}, \quad (\text{A.7})$$

$$c_\tau = \pm \frac{bs_\theta s_\phi - ac_\theta c_\phi}{A}, \quad (\text{A.8})$$

où

$$A = \sqrt{a^2 c_\theta^2 + b^2 s_\theta^2}. \quad (\text{A.9})$$

Or, puisque l'expression en (A.6) doit toujours être respectée afin que r_x soit la valeur maximale selon l'axe X de \mathbf{p}_e , on trouve en substituant les termes en (A.7) et (A.8) dans l'équation (A.6) que les deux termes doivent avoir le même signe. En remplaçant les valeurs pour s_τ et c_τ dans la forme développée de la première ligne de (A.1) et en mettant cette ligne égale à r_x , la valeur suivante pour r_x est obtenue

$$r_x = \pm A = \pm \sqrt{a^2 c_\theta^2 + b^2 s_\theta^2}. \quad (\text{A.10})$$

En appliquant le même développement mathématique pour r_y , l'expression suivante est obtenue

$$r_y = \pm B = \pm \sqrt{b^2 c_\theta^2 + a^2 s_\theta^2}. \quad (\text{A.11})$$

Les 2 combinaisons possibles de r_x et r_y sont analogues au 2 sens possibles de la trajectoire (sens horaire ou anti-horaire).

Si l'ellipse n'est pas centrée à l'origine, la trajectoire de l'ellipse exprimée dans le référentiel inertiel s'exprimera alors $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_e(t)$, où \mathbf{p}_c est un vecteur constant qui pointe au centre de l'ellipse.

Annexe B

Passage de la forme générale à la forme simplifiée d'une trajectoire elliptique en 3D

Un point P suit une trajectoire elliptique centrée à l'origine d'un référentiel \mathcal{O}' ayant un grand rayon a et un petit rayon b représentée en rouge dans la figure B.1 suivante. La position de ce point exprimée

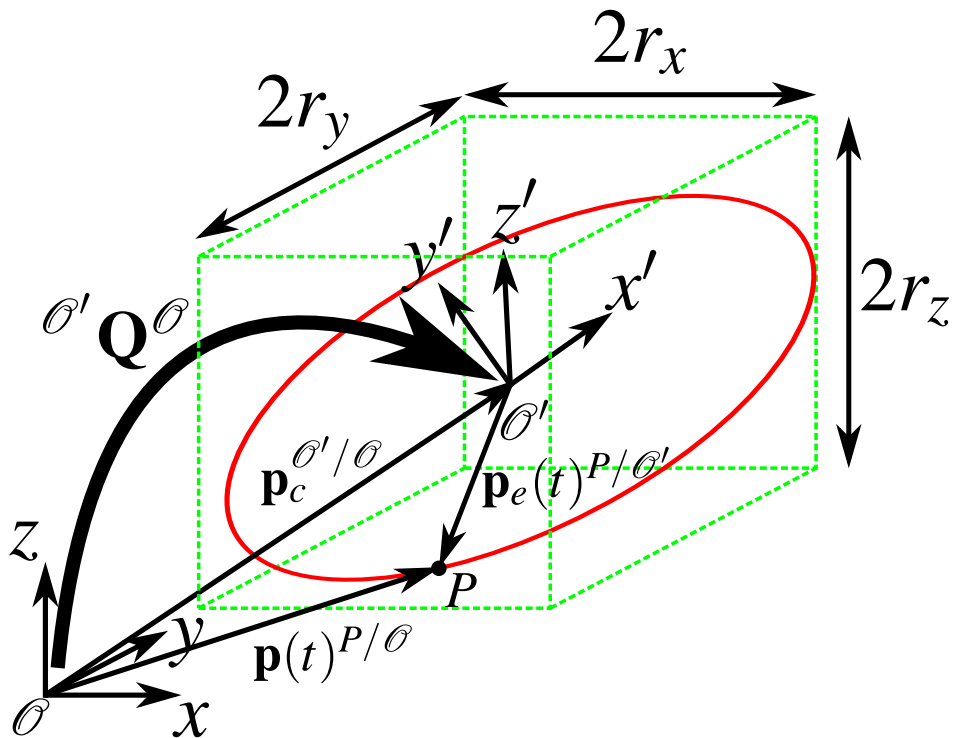


FIGURE B.1 – Trajectoire elliptique générale en 3D d'un point P .

dans le référentiel \mathcal{O}' peut être exprimée paramétriquement sous la forme

$$\mathbf{p}_e(t)^{P/\mathcal{O}'} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi) \\ b \sin(\omega t + \phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

où t est le temps en seconde, ω est ici appelée la fréquence d'oscillation angulaire et décrit combien de fois par seconde (s) un tour complet (oscillation) autour de l'ellipse est effectué par le point P suivant la trajectoire $\mathbf{p}_e(t)$ en rad/s et ϕ est un paramètre qui définit la position initiale de P et ses unités sont en rad.

La position du référentiel \mathcal{O}' par rapport au référentiel inertiel \mathcal{O} est donné par le vecteur constant

$$\mathbf{p}_c^{\mathcal{O}'/\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

La matrice de rotation ${}^{\mathcal{O}'}\mathbf{Q}^{\mathcal{O}}$ permettant d'exprimer l'orientation du référentiel \mathcal{O}' dans le référentiel \mathcal{O} s'écrit de façon générale comme

$${}^{\mathcal{O}'}\mathbf{Q}^{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

À l'aide de $\mathbf{p}_c^{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}$, $\mathbf{p}_e(t)^{P/\mathcal{O}'}$, et ${}^{\mathcal{O}'}\mathbf{Q}^{\mathcal{O}}$, il est possible d'exprimer la position du point P suivant la trajectoire elliptique par rapport au référentiel \mathcal{O} comme

$$\mathbf{p}(t)^{P/\mathcal{O}} = \mathbf{p}_c^{\mathcal{O}'/\mathcal{O}} + {}^{\mathcal{O}'}\mathbf{Q}^{\mathcal{O}} \mathbf{p}_e(t)^{P/\mathcal{O}'}. \quad (\text{B.4})$$

En développant cette expression au long, on trouve que $\mathbf{p}(t)^{P/\mathcal{O}}$ s'exprime

$$\mathbf{p}(t)^{P/\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} x_c + c_\tau (q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi) + s_\tau (q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi) \\ y_c + c_\tau (q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi) + s_\tau (q_{22}bc_\phi - q_{21}as_\phi) \\ z_c + c_\tau (q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi) + s_\tau (q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

où $c_* = \cos(*)$, $s_* = \sin(*)$ et $\tau = \omega t$. L'expression en (B.5) peut être simplifiée sous la forme

$$\mathbf{p}(t)^{P/\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} x_c + r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ y_c + r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ z_c + r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

où $2r_x, 2r_y$ et $2r_z$ sont respectivement les dimensions de la boîte qui circonscrit la trajectoire elliptique comme celle représenté à la figure B.1 par des lignes vertes discontinues chaque côté de la boîte est parallèle à l'un des trois axes principaux du référentiel inertiel. Les termes ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z sont des termes qui sont fonction de l'orientation de la trajectoire elliptique relativement au référentiel inertiel ainsi que de la position initiale de la trajectoire.

Logiquement, pour que les deux formes puissent être équivalentes, il faut que l'équation suivante puisse tenir

$$\begin{bmatrix} c_\tau (q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi) + s_\tau (q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi) \\ c_\tau (q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi) + s_\tau (q_{22}bc_\phi - q_{21}as_\phi) \\ c_\tau (q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi) + s_\tau (q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \sin(\omega t + \phi_x) \\ r_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ r_z \sin(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

En développant le côté droit de cette dernière équation, on peut la réécrire comme

$$\begin{bmatrix} c_\tau (q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi) + s_\tau (q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi) \\ c_\tau (q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi) + s_\tau (q_{22}bc_\phi - q_{21}as_\phi) \\ c_\tau (q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi) + s_\tau (q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\tau r_x s_{\phi_x} + s_\tau r_x c_{\phi_x} \\ c_\tau r_y s_{\phi_y} + s_\tau r_y c_{\phi_y} \\ c_\tau r_z s_{\phi_z} + s_\tau r_z c_{\phi_z} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Pour chaque ligne de l'équation précédente, il est possible de trouver une valeur pour les termes ϕ_x , ϕ_y et ϕ_z qui satisfait l'équation. Pour déterminer ces valeurs, on met égale les termes qui multiplient les termes c_τ et s_τ de chaque côté de l'égalité et on en déduit les valeurs de ϕ_x , ϕ_y et ϕ_z de la façon suivante

$$\left. \begin{array}{l} q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi = r_x s_{\phi_x} \\ q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi = r_x c_{\phi_x} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_x = \text{atan2}(q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi, q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi), \quad (\text{B.9})$$

$$\left. \begin{array}{l} q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi = r_y s_{\phi_y} \\ q_{22}bc_\phi - q_{21}as_\phi = r_y c_{\phi_y} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_y = \text{atan2}(q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi, q_{22}bc_\phi - q_{21}as_\phi), \quad (\text{B.10})$$

$$\left. \begin{array}{l} q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi = r_z s_{\phi_z} \\ q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi = r_z c_{\phi_z} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_z = \text{atan2}(q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi, q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi). \quad (\text{B.11})$$

Pour déterminer la valeur des termes r_x , r_y et r_z , il faut utiliser la notion que ces termes donnent les dimensions de la boîte qui circonscrit exactement l'ellipse, c'est à dire, que la boîte verte dans la figure B.1 est la plus petite boîte permettant de contenir pleinement l'ellipse et dont les côtés sont parallèles aux axes principaux du repère inertiel. Si le centre de cette boîte est coïncident avec le centre de l'ellipse, on peut alors trouver les valeurs de r_x , r_y et r_z à l'aide des conditions suivantes,

$$\max(c_\tau (q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi) + s_\tau (q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi)) = r_x, \quad (\text{B.12})$$

$$\min(c_\tau (q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi) + s_\tau (q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi)) = -r_x, \quad (\text{B.13})$$

$$\max(c_\tau (q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi) + s_\tau (q_{22}bc_\phi - q_{31}as_\phi)) = r_y, \quad (\text{B.14})$$

$$\min(c_\tau (q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi) + s_\tau (q_{22}bc_\phi - q_{31}as_\phi)) = -r_y, \quad (\text{B.15})$$

$$\max(c_\tau (q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi) + s_\tau (q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi)) = r_z, \quad (\text{B.16})$$

$$\min(c_\tau (q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi) + s_\tau (q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi)) = -r_z. \quad (\text{B.17})$$

Or, puisque les termes du côté gauche des égalités précédentes sont fonction du temps et qu'ils sont composés de termes trigonométriques, il est possible de déterminer les valeurs extrêmes (max et min)

de ces termes. Pour ce faire, on dérive les expressions par rapport au temps et on met égale à 0. Pour trouver la valeur maximale et minimale de r_x , par exemple, cette étape donne

$$\frac{d}{dt} (c_\tau \Delta_{1x} + s_\tau \Delta_{2x}) = -s_\tau \Delta_{1x} + c_\tau \Delta_{2x} = 0, \quad (\text{B.18})$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_{1x} &= (q_{11}ac_\phi + q_{12}bs_\phi) \\ \Delta_{2x} &= (q_{12}bc_\phi - q_{11}as_\phi). \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à l'identité $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, on trouve que les extrémums adviennent lorsque

$$c_\tau = \frac{\Delta_{1x}}{\pm \Theta_x}, \quad s_\tau = \frac{\Delta_{2x}}{\pm \Theta_x}, \quad \Theta_x = \sqrt{\Delta_{1x}^2 + \Delta_{2x}^2}. \quad (\text{B.19})$$

Or, en injectant ces expressions dans l'équation (B.18), on trouve que les racines des termes en (B.19) doivent être de même signe pour que cette équation soit respectée.

En utilisant les valeurs de c_τ et s_τ trouvés en (B.19) dans les équations en (B.12) et (B.13), on trouve

$$\left. \begin{aligned} \max(\pm \Theta_x) &= r_x \\ \min(\pm \Theta_x) &= -r_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_x = \Theta_x. \quad (\text{B.20})$$

De même, pour r_y et r_z , on trouvera que

$$r_y = \Theta_y = \sqrt{\Delta_{1y}^2 + \Delta_{2y}^2}, \quad \Delta_{1y} = (q_{21}ac_\phi + q_{22}bs_\phi), \quad \Delta_{2y} = (q_{22}bc_\phi - q_{21}as_\phi), \quad (\text{B.21})$$

$$r_z = \Theta_z = \sqrt{\Delta_{1z}^2 + \Delta_{2z}^2}, \quad \Delta_{1z} = (q_{31}ac_\phi + q_{32}bs_\phi), \quad \Delta_{2z} = (q_{32}bc_\phi - q_{31}as_\phi). \quad (\text{B.22})$$

Annexe C

Coefficients de conditions de tension

$$\begin{aligned}a_{y1} &= h_c, a_{y2} = -h_c, \\a_{y3} &= h_c, a_{y4} = -h_c, \\a_{y5} &= h_c, a_{y6} = -h_c \\a_{z1} &= 2r \sin^2 \alpha - 2r - r_c \sin \phi_c, a_{z2} = 2r \sin^2 \alpha - 2r + r_c \sin \phi_c, \\a_{z3} &= r \cos^2 \alpha - r_c \sin \phi_c + \frac{\sqrt{3}r \sin(2\alpha)}{2}, a_{z4} = r \cos^2 \alpha + r_c \sin \phi_c + \frac{\sqrt{3}r \sin(2\alpha)}{2}, \\a_{z5} &= r \cos^2 \alpha - r_c \sin \phi_c - \frac{\sqrt{3}r \sin(2\alpha)}{2}, a_{z6} = r \cos^2 \alpha + r_c \sin \phi_c - \frac{\sqrt{3}r \sin(2\alpha)}{2}, \\a_{k1} &= 0, a_{k2} = 0, \\a_{k3} &= \sqrt{3}Rh_c \cos \alpha, a_{k4} = -\sqrt{3}Rh_c \cos \alpha, \\a_{k5} &= -\sqrt{3}Rh_c \cos \alpha, a_{k6} = \sqrt{3}Rh_c \cos \alpha, \\b_{x1} &= -h_c, b_{x2} = h_c, \\b_{x3} &= -h_c, b_{x4} = h_c, \\b_{x5} &= -h_c, b_{x6} = h_c, \\b_{z1} &= r_c \cos \phi_c - r \sin(2\alpha), b_{z2} = -r \sin(2\alpha) - r_c \cos \phi_c, \\b_{z3} &= -\sqrt{3}r \cos^2 \alpha + \frac{r \sin(2\alpha)}{2} + r_c \cos \phi_c, b_{z4} = -\sqrt{3}r \cos^2 \alpha + \frac{r \sin(2\alpha)}{2} - r_c \cos \phi_c, \\b_{z5} &= \sqrt{3}r \cos^2 \alpha + \frac{r \sin(2\alpha)}{2} + r_c \cos \phi_c, b_{z6} = \sqrt{3}r \cos^2 \alpha + \frac{r \sin(2\alpha)}{2} - r_c \cos \phi_c, \\b_{k1} &= -2Rh_c \cos \alpha, b_{k2} = 2Rh_c \cos \alpha, \\b_{k3} &= Rh_c \cos \alpha, b_{k4} = -Rh_c \cos \alpha, \\b_{k5} &= Rh_c \cos \alpha, b_{k6} = -Rh_c \cos \alpha, \\c_{x1} &= 2r \cos^2 \alpha + r_c \sin \phi_c, c_{x2} = 2r \cos^2 \alpha - r_c \sin \phi_c, \\c_{x3} &= -r \cos^2 \alpha + r_c \sin \phi_c - \frac{\sqrt{3}r \sin(2\alpha)}{2}, c_{x4} = -r \cos^2 \alpha - r_c \sin \phi_c - \frac{\sqrt{3}r \sin(2\alpha)}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{x5} &= -r\cos^2\alpha + r_c \sin\phi_c + \frac{\sqrt{3}r\sin(2\alpha)}{2}, c_{x6} = -r\cos^2\alpha - r_c \sin\phi_c + \frac{\sqrt{3}r\sin(2\alpha)}{2}, \\
c_{y1} &= r\sin(2\alpha) - r_c \cos\phi_c, c_{y2} = r\sin(2\alpha) + r_c \cos\phi_c, \\
c_{y3} &= \sqrt{3}r\cos^2\alpha - \frac{r\sin(2\alpha)}{2} - r_c \cos\phi_c, c_{y4} = \sqrt{3}r\cos^2\alpha - \frac{r\sin(2\alpha)}{2} + r_c \cos\phi_c, \\
c_{y5} &= -\sqrt{3}r\cos^2\alpha - \frac{r\sin(2\alpha)}{2} - r_c \cos\phi_c, c_{y6} = -\sqrt{3}r\cos^2\alpha - \frac{r\sin(2\alpha)}{2} + r_c \cos\phi_c, \\
c_{k1} &= Rr\cos\alpha + 2Rr_c \cos\alpha \sin\phi_c, \\
c_{k2} &= Rr\cos\alpha - 2Rr_c \cos\alpha \sin\phi_c, \\
c_{k3} &= Rr\cos\alpha - Rr_c \cos\alpha \sin\phi_c - \sqrt{3}Rr_c \cos\alpha \cos\phi_c, \\
c_{k4} &= Rr\cos\alpha + Rr_c \cos\alpha \sin\phi_c + \sqrt{3}Rr_c \cos\alpha \cos\phi_c, \\
c_{k5} &= Rr\cos\alpha - Rr_c \cos\alpha \sin\phi_c + \sqrt{3}Rr_c \cos\alpha \cos\phi_c, \\
c_{k6} &= Rr\cos\alpha + Rr_c \cos\alpha \sin\phi_c - \sqrt{3}Rr_c \cos\alpha \cos\phi_c, \\
d_{x1} &= 1, d_{x2} = -1, \\
d_{x3} &= 1, d_{x4} = -1, \\
d_{x5} &= 1, d_{x6} = -1, \\
d_{k1} &= 2R\cos\alpha, d_{k2} = -2R\cos\alpha, \\
d_{k3} &= -R\cos\alpha, d_{k4} = R\cos\alpha, \\
d_{k5} &= -R\cos\alpha, d_{k6} = R\cos\alpha, \\
e_{y1} &= 1, e_{y2} = -1, \\
e_{y3} &= 1, e_{y4} = -1, \\
e_{y5} &= 1, e_{y6} = -1, \\
e_{k1} &= 0, e_{k2} = 0, \\
e_{k3} &= \sqrt{3}R\cos\alpha, e_{k4} = -\sqrt{3}R\cos\alpha, \\
e_{k5} &= -\sqrt{3}R\cos\alpha, e_{k6} = \sqrt{3}R\cos\alpha, \\
h_{z1} &= 1, h_{z2} = -1, \\
h_{z3} &= 1, h_{z4} = -1, \\
h_{z5} &= 1, h_{z6} = -1, \\
h_{k1} &= 0, h_{k2} = 0, \\
h_{k3} &= 0, h_{k4} = 0, \\
h_{k5} &= 0, h_{k6} = 0
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] James ALBUS, Roger BOSTELMAN et Nicholas DAGALAKIS : The NIST robocrane. *Journal of Robotic Systems*, 10(5):709–724, juillet 1993.
- [2] Eric BARNETT et Clément GOSSELIN : Large-scale 3d printing with a cable-suspended robot. *Additive Manufacturing*, 7:27–44, jul 2015.
- [3] Guillaume BARRETTE : *Analyse des mécanismes parallèles actionnés par câbles*. Mémoire de Maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2000.
- [4] Saeed BEHZADIPOUR et Amir KHAJEPOUR : A New Cable-Based Parallel Robot with Three Degrees of Freedom. *Multibody System Dynamics*, 13(4):371–383, mai 2005.
- [5] P. BOSSCHER et I. EBERT-UPHOFF : Wrench-based analysis of cable-driven robots. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, volume 5, pages 4950–4955 Vol.5, avril 2004.
- [6] Paul BOSSCHER, Robert L. WILLIAMS et Melissa TUMMINO : A Concept for Rapidly-Deployable Cable Robot Search and Rescue Systems. *In Volume 7 : 29th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B*, volume 2005, pages 589–598, Long Beach, California, USA, 2005. ASME.
- [7] Samuel BOUCHARD : GÉOMÉTRIE DES ROBOTS PARALLÈLES ENTRAÎNÉS PAR DES CÂBLES. page 248, 2008.
- [8] Reymond CLAVEL : *Conception d'un robot parallele rapide à 4 degrés de liberté*. Thèse, École Polytechnique de Lausanne, Lausanne, 1991.
- [9] Lawrence L. CONE : Skycam-an aerial robotic camera system. *Byte*, 10(10):122, 1985.
- [10] P. DION-GAUVIN et C. GOSSELIN : Dynamic Point-to-Point Trajectory Planning of a Three-DOF Cable-Suspended Mechanism Using the Hypocycloid Curve. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(4):1964–1972, août 2018.
- [11] Pascal DION-GAUVIN et Clément GOSSELIN : Trajectory planning for the static to dynamic transition of point-mass cable-suspended parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 113:158–178, juillet 2017.

- [12] Abbas FATTAH et Sunil K. AGRAWAL : Workspace and Design Analysis of Cable-Suspended Planar Parallel Robots. pages 1095–1103, janvier 2002.
- [13] C. GOSSELIN et S. FOUCAULT : Dynamic Point-to-Point Trajectory Planning of a Two-DOF Cable-Suspended Parallel Robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3):728–736, juin 2014.
- [14] C. GOSSELIN, Ping REN et S. FOUCAULT : Dynamic trajectory planning of a two-DOF cable-suspended parallel robot. *In 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1476–1481, mai 2012.
- [15] Clément GOSSELIN : Global Planning of Dynamically Feasible Trajectories for Three-DOF Spatial Cable-Suspended Parallel Robots. *In Tobias BRUCKMANN et Andreas POTT, éditeurs : Cable-Driven Parallel Robots, Mechanisms and Machine Science*, pages 3–22. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [16] Clément GOSSELIN : Cable-driven parallel mechanisms : state of the art and perspectives. *Mechanical Engineering Reviews*, 1(1):DSM0004–DSM0004, 2014.
- [17] Clément GOSSELIN : *Éléments de Robotique*. 2017.
- [18] Clément GOSSELIN et Simon FOUCAULT : Experimental Determination of the Accuracy of a Three-Dof Cable-Suspended Parallel Robot Performing Dynamic Trajectories. *In Andreas POTT et Tobias BRUCKMANN, éditeurs : Cable-Driven Parallel Robots, Mechanisms and Machine Science*, pages 101–112. Springer International Publishing, 2015.
- [19] Jean-Baptiste IZARD, Alexandre DUBOR, Pierre-Elie HERVÉ, Edouard CABAY, David CULLA, Mariola RODRIGUEZ et Mikel BARRADO : Large-scale 3d printing with cable-driven parallel robots. *Construction Robotics*, 1(1):69–76, décembre 2017.
- [20] Reza N. JAZAR : *Theory of Applied Robotics : Kinematics, Dynamics, and Control*. Springer US, 2007.
- [21] X. JIANG, E. BARNETT et C. GOSSELIN : Periodic Trajectory Planning Beyond the Static Workspace for 6-DOF Cable-Suspended Parallel Robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 34(4): 1128–1140, août 2018.
- [22] X. JIANG et C. GOSSELIN : Dynamic Point-to-Point Trajectory Planning of a Three-DOF Cable-Suspended Parallel Robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 32(6):1550–1557, décembre 2016.
- [23] Xiaoling JIANG et Clément GOSSELIN : Dynamically Feasible Trajectories for Three-DOF Planar Cable-Suspended Parallel Robots. page V05AT08A085, août 2014.
- [24] Xiaoling JIANG et Clément GOSSELIN : Dynamic Transition Trajectory Planning of Three-DOF Cable-Suspended Parallel Robots. *In Clément GOSSELIN, Philippe CARDOU, Tobias BRUCKMANN et Andreas POTT, éditeurs : Cable-Driven Parallel Robots, Mechanisms and Machine Science*, pages 231–242. Springer International Publishing, 2018.

- [25] Xin-Jun LIU et Jinsong WANG : Some New Parallel Mechanisms Containing the Planar Four-Bar Parallelogram. *The International Journal of Robotics Research*, 22(9):717–732, septembre 2003.
- [26] K. MAEDA, S. TADOKORO, T. TAKAMORI, M. HILLER et R. VERHOEVEN : On design of a redundant wire-driven parallel robot WARP manipulator. *In Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C)*, volume 2, pages 895–900 vol.2, mai 1999.
- [27] J. MERLET et D. DANAY : A portable, modular parallel wire crane for rescue operations. *In 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2834–2839, mai 2010.
- [28] J. P. MERLET : *Parallel Robots*. Springer Science & Business Media, juillet 2006. Google-Books-ID : wVf6VFX1UWMC.
- [29] Sanjit Kumar MITRA et James F KAISER : *Handbook for digital signal processing*. J. Wiley & Sons, New York, c1993. Bibliogr.
- [30] Giovanni MOTTOLA, Clément GOSSELIN et Marco CARRICATO : Dynamically feasible motions of a class of purely-translational cable-suspended parallel robots. *Mechanism and Machine Theory*, 132:193–206, 2019.
- [31] Giovanni MOTTOLA, Clément GOSSELIN et Marco CARRICATO : Dynamically-Feasible Elliptical Trajectories for Fully Constrained 3-DOF Cable-Suspended Parallel Robots. *In Clément GOSSELIN, Philippe CARDOU, Tobias BRUCKMANN et Andreas POTT, éditeurs : Cable-Driven Parallel Robots, Mechanisms and Machine Science*, pages 219–230. Springer International Publishing, 2018.
- [32] Giovanni MOTTOLA, Clément GOSSELIN et Marco CARRICATO : Dynamically Feasible Periodic Trajectories for Generic Spatial Three-Degree-of-Freedom Cable-Suspended Parallel Robots. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 10(3):031004, juin 2018.
- [33] Andreas POTT : *Cable-driven parallel robots : theory and application*. Numéro 120 de Springer tracts in advanced robotics. Springer, Cham, 2018. OCLC : 1039163070.
- [34] Jason PUSEY, Abbas FATTAH, Sunil AGRAWAL et Elena MESSINA : Design and workspace analysis of a 6–6 cable-suspended parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, 39(7):761–778, juillet 2004.
- [35] Andrew T. RIECHEL : *Force-Feasible Workspace Analysis and Motor Mount Disturbance Compensation for Point-Mass Cable Robots*. Thesis, Georgia Institute of Technology, avril 2004.
- [36] Ana Lucia Cruz RUIZ, Stéphane CARO, Philippe CARDOU et François GUAY : ARACHNIS : Analysis of Robots Actuated by Cables with Handy and Neat Interface Software. *In Andreas*

POTT et Tobias BRUCKMANN, éditeurs : *Cable-Driven Parallel Robots*, Mechanisms and Machine Science, pages 293–305. Springer International Publishing, 2015.

- [37] Lewei TANG, Xiaoqiang TANG, Xiaoling JIANG et Clément GOSSELIN : Dynamic trajectory planning study of planar two-dof redundantly actuated cable-suspended parallel robots. *Mechatronics*, 30:187–197, septembre 2015.
- [38] Dinh-Son VU, Eric BARNETT et Clement GOSSELIN : Experimental validation of a three-dof cable-suspended parallel robot for spatial translation with constant orientation. 2018.
- [39] Dinh-Son VU, Eric BARNETT, Anne-Marie ZACCARIN et Clément GOSSELIN : On the Design of a Three-DOF Cable-Suspended Parallel Robot Based on a Parallelogram Arrangement of the Cables. In Clément GOSSELIN, Philippe CARDOU, Tobias BRUCKMANN et Andreas POTT, éditeurs : *Cable-Driven Parallel Robots*, Mechanisms and Machine Science, pages 319–330. Springer International Publishing, 2018.
- [40] N. ZHANG, W. SHANG et S. CONG : Geometry-Based Trajectory Planning of a 3-3 Cable-Suspended Parallel Robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 33(2):484–491, avril 2017.
- [41] Nan ZHANG et Weiwei SHANG : Dynamic trajectory planning of a 3-DOF under-constrained cable-driven parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, 98:21–35, avril 2016.
- [42] B. ZI, B. Y. DUAN, J. L. DU et H. BAO : Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot. *Mechatronics*, 18(1):1–12, février 2008.