

KARINE DOYON

**ANALYSE VECTORIELLE DES LIEUX DE SINGULARITÉ  
DE LA PLATE-FORME DE GOUGH-STEWART**

Mémoire présenté  
à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2012



# Résumé

De nos jours, la plate-forme de Gough-Stewart est utilisée couramment en industrie. L'inconvénient avec ce type de manipulateur, comme c'est le cas pour tous les manipulateurs parallèles, est que l'analyse de ses lieux de singularité est fastidieuse et n'est pas intuitive. Une expression scalaire décrivant ces lieux a déjà été développée, mais elle comporte 20 coefficients complexes, d'où l'intérêt de la récrire en conservant les termes sous forme vectorielle.

Après quelques manipulations effectuées sur la matrice jacobienne, on obtient une expression plus compacte qui peut ensuite être utilisée dans des analyses par intervalles. Ces analyses permettent d'étudier les lieux de singularité pour un espace fini et confirment l'intérêt d'une expression vectorielle. De plus, les facteurs qui influencent la précision des résultats sont énoncés.

Dans ce mémoire, l'architecture dite générale et celle de type MSSM sont étudiées afin de démontrer à quel point l'expression des lieux de singularité peut être simplifiée.



# Avant-propos

Mes premiers remerciements vont naturellement à mes codirecteurs, Clément Gosselin et Philippe Cardou, qui m'ont confié ce sujet de recherche et qui ont su me communiquer leur passion envers ce fascinant monde qu'est la robotique. Je tiens également à souligner leur grande patience et leur soutien tout au long de ma maîtrise. Je remercie aussi les membres du laboratoire de robotique qui ont toujours répondu à mes questions et qui m'ont bien accueillie lorsque je me joignais à eux.

Il va de soi que je souligne le support d'Alexandre, mon conjoint, qui m'a soutenue lorsque j'ai décidé de poursuivre mes études à la maîtrise et qui m'a appuyée dans les bons comme dans les moins bons moments. Merci d'avoir toujours été là pour moi!

Je tiens également à remercier mon frère Nicolas et mon amie Valérie qui égayent ma vie.

Finalement, un énorme merci à mes parents qui m'ont toujours encouragée dans ce que j'entreprenais et qui m'ont fourni les outils nécessaires pour mettre à terme mes projets.

*Carry on as if nothing really matters*

**Freddie Mercury**



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Plate-forme de Gough-Stewart</b>	<b>3</b>
1.1 Utilisations . . . . .	4
1.2 Configurations . . . . .	5
1.2.1 Base plane . . . . .	5
1.2.2 SSM . . . . .	6
1.2.3 TSSM . . . . .	6
1.2.4 MSSM . . . . .	7
<b>2 Analyse cinématique et singularités</b>	<b>9</b>
2.1 Problème géométrique inverse (PGI) . . . . .	9
2.2 Problème géométrique direct (PGD) . . . . .	11
2.3 Matrices jacobiennes . . . . .	12
2.4 Singularités . . . . .	12
2.4.1 Singularité de type <i>I</i> . . . . .	13
2.4.2 Singularité de type <i>II</i> . . . . .	13

2.4.3	Singularité de type <i>III</i> . . . . .	14
2.5	Zones libres de singularité . . . . .	15
2.6	Objectif du projet de recherche . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Développement de l'expression vectorielle du déterminant de la matrice jacobienne <b>J</b></b>	<b>17</b>
3.1	Réarrangement de la matrice jacobienne <b>J</b> . . . . .	18
3.2	Repère de référence . . . . .	19
3.3	Opérations élémentaires sur les colonnes . . . . .	19
3.4	Calcul du déterminant . . . . .	20
3.4.1	Notation alternative . . . . .	26
3.4.2	Cas particulier : MSSM . . . . .	27
3.5	Conclusion . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Détermination de zones libres de singularité en utilisant l'analyse par intervalles</b>	<b>29</b>
4.1	Opérations de base et fonctions sur des intervalles . . . . .	30
4.2	Méthode d'analyse par intervalles . . . . .	31
4.2.1	Initialisation . . . . .	32
4.2.2	Évaluation . . . . .	32
4.2.3	Bisection . . . . .	34
4.3	Résultats d'analyse . . . . .	34
4.3.1	Plate-forme de Gough-Stewart générale . . . . .	34
4.3.1.1	Comparaison des intervalles . . . . .	41
4.3.2	MSSM . . . . .	44
4.3.2.1	Comparaison des intervalles . . . . .	50
4.4	Méthode alternative . . . . .	50
4.5	Conclusion . . . . .	53
	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>
	<b>A Coefficients de l'équation (2.9)</b>	<b>61</b>
	<b>B Vecteurs et matrices constants de l'équation (3.38)</b>	<b>65</b>
	<b>C Vecteurs et matrices constants de l'équation (3.45)</b>	<b>69</b>



# Liste des tableaux

3.1	Comparaison des nombres de termes de la plate-forme de Gough-Stewart générale et de celle du MSSM. . . . .	28
4.1	Points d'attache sur la base et sur la plate-forme (Plate-forme de Gough-Stewart). . . . .	35
4.2	Volumes libres de singularité relatifs (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 1). . . . .	39
4.3	Volumes libres de singularité relatifs (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2). . . . .	39
4.4	Points d'attache sur la base et sur la plate-forme (MSSM). . . . .	45
4.5	Volumes libres de singularité relatifs (MSSM, exemple 1). . . . .	47
4.6	Volumes libres de singularité relatifs (MSSM, exemple 2). . . . .	47
A.1	Coefficients de l'équation (2.9). . . . .	63
B.1	Coefficients de l'équation (3.38). . . . .	65
C.1	Coefficients de l'équation (3.45). . . . .	69



# Liste des figures

1.1	Modélisation géométrique de la plate-forme de Gough-Stewart [17]. . .	4
1.2	Simulateur de vol (CAE Électronique [3]). . . . .	5
1.3	Modélisation SSM (vue du dessus) [17]. . . . .	6
1.4	Modélisation TSSM (vue du dessus) [17]. . . . .	7
1.5	Modélisation MSSM (vue du dessus) [17]. . . . .	8
2.1	Plate-forme de Gough-Stewart - Convention vectorielle. . . . .	10
4.1	Algorithme de l'analyse par intervalles du déterminant de la plate-forme de Gough-Stewart. . . . .	33
4.2	Plate-forme de Gough-Stewart analysée. . . . .	35
4.3	Résultat d'analyse par intervalles - Plate-forme de Gough-Stewart avec 10 000 boîtes. . . . .	36
4.4	Résultat d'analyse par intervalles Plate-forme de Gough-Stewart avec 20 000 boîtes. . . . .	37
4.5	Expression simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 1). . . .	38
4.6	Expression plus simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 1). . .	38
4.7	Expression non-simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 1). . .	38
4.8	Expression «simplify» (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 1). . .	38
4.9	Expression simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2). . . .	40
4.10	Expression plus simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2). . .	40
4.11	Expression non-simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2). . .	40
4.12	Expression «simplify» (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2). . .	40
4.13	Comparaison intervalles plate-forme de Gough-Stewart (exemple 1). . .	42

4.14	Comparaison intervalles plate-forme de Gough-Stewart (exemple 2). . .	43
4.15	Plate-forme de type MSSM analysée. . . . .	44
4.16	Résultat d'analyse par intervalles - MSSM avec 10 000 boîtes. . . . .	46
4.17	Résultat d'analyse par intervalles - MSSM avec 20 000 boîtes. . . . .	46
4.18	Expression simplifiée (MSSM, exemple 1). . . . .	48
4.19	Expression non-simplifiée (MSSM, exemple 1). . . . .	48
4.20	Expression «simplify» (MSSM, exemple 1). . . . .	48
4.21	Expression simplifiée (MSSM, exemple 2). . . . .	49
4.22	Expression non-simplifiée (MSSM, exemple 2). . . . .	49
4.23	Expression «simplify» (MSSM, exemple 2). . . . .	49
4.24	Comparaison intervalles MSSM (exemple 1). . . . .	51
4.25	Comparaison intervalles MSSM (exemple 2). . . . .	52

# Introduction

Depuis maintenant des années, les manipulateurs parallèles ont fait leurs preuves en industrie. En effet, ils présentent plusieurs avantages, notamment le fait qu'ils puissent produire de grandes vitesses et accélérations en plus de supporter de lourdes charges. Une utilisation répandue qui exploite ces caractéristiques est le simulateur de vol. La première version de ce type de manipulateur a été développée il y a de ça plus de 60 ans dans le but de tester des pneus par le britannique Gough [10]. Ce n'est que 20 années plus tard qu'un autre britannique, Stewart, proposa une architecture semblable comme simulateur de vol [24]. Le manipulateur de Gough et l'application de Stewart ont mené à la plate-forme de Gough-Stewart connue aujourd'hui.

L'inconvénient de la plate-forme de Gough-Stewart, comme pour tout manipulateur parallèle, est la présence de configurations dites singulières qui provoquent une perte locale de contrôle de la plate-forme. Plusieurs études ont été faites à ce jour afin de mieux caractériser ces lieux de singularité, mais les résultats obtenus consistent en des équations complexes. C'est dans cette optique qu'une nouvelle approche vectorielle est envisagée.

## Structure du mémoire

Ce mémoire se divise en trois sections. La première, qui inclut les deux premiers chapitres, consiste en une mise en situation. Le Chapitre 1 présente la plate-forme de Gough-Stewart ainsi que quelques-unes de ses architectures particulières. Le deuxième chapitre, quant à lui, explique la cinématique de ce manipulateur ainsi que la notion de configuration singulière. On y présente également une étude faite sur les lieux de singularité de la plate-forme de Gough-Stewart qui mène à la définition de l'objectif du projet de recherche. La seconde section, qui contient le Chapitre 3, expose les développements mathématiques effectués afin d'obtenir une expression vectorielle des lieux de singularité. Deux notations vectorielles sont présentées pour une plate-forme de Gough-Stewart quelconque et une autre est donnée pour une architecture particulière. Finalement, la dernière section montre une application de l'expression vectorielle, soit l'analyse par intervalles. En plus de détailler cette méthode d'analyse peu répandue, des exemples numériques effectués sur les deux types d'architecture analysés au chapitre précédent sont illustrés.

# Chapitre 1

## Plate-forme de Gough-Stewart

La plate-forme de Gough-Stewart est un manipulateur parallèle, ce qui signifie que l'effecteur est rattaché à la base par plus d'une branche. La figure 1.1 illustre une modélisation géométrique générale de la plate-forme de Gough-Stewart. La base fixe est reliée à une plate-forme mobile par six actionneurs prismatiques. La base et la plate-forme n'ont pas de géométrie imposée et donc les points d'attache peuvent être disposés de manière quelconque. Pour que le mécanisme ait six degrés de liberté, des cardans sont requis entre les points d'attache de la base et la base des vérins. Dans le même ordre d'idée, des liaisons sphériques (rotules) relient l'extrémité distale des vérins aux points d'attache de la plate-forme. Des longueurs données des actionneurs prismatiques imposent ainsi une pose à la plate-forme mobile.

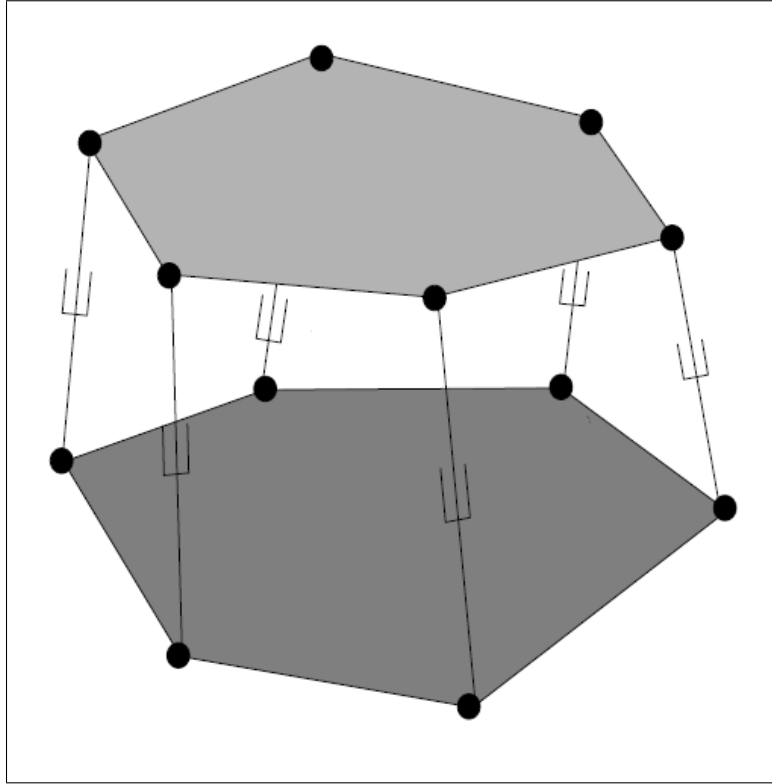


FIG. 1.1 – Modélisation géométrique de la plate-forme de Gough-Stewart [17].

## 1.1 Utilisations

Ce type de manipulateur est souvent utilisé de nos jours en industrie. Par exemple, on l'emploie en technologie des machines-outils [12], avec des télescopes [26], en chirurgie orthopédique (Taylor Spatial Frame [23]), comme système d'amarrage spatial (Low Impact Docking System [19]) et plusieurs autres applications.

Son utilisation la plus répandue reste cependant comme simulateur de vol. En effet, en variant les longueurs de vérins, il est possible de déplacer et d'orienter la cabine du simulateur afin de recréer les accélérations auxquelles les pilotes sont soumis lors de manœuvres aériennes. De plus, le poids très imposant de la cabine, qui peut atteindre les 15 000 kilogrammes, est réparti sur chacun des vérins du mécanisme, ce qui permet d'utiliser de plus petits vérins que si le manipulateur était sériel. La figure 1.2 présente le montage d'un tel simulateur de vol.





FIG. 1.2 – Simulateur de vol (CAE Électronique [3]).

## 1.2 Configurations

Par définition, la plate-forme de Gough-Stewart n'a pas de configuration imposée puisque la base et la plate-forme peuvent être de forme quelconque. Cependant, plusieurs architectures se sont développées au fil du temps pour diverses applications.

### 1.2.1 Base plane

Comme son nom le suggère, cette configuration impose que tous les points d'attache de la base du manipulateur soient situés dans un même plan. Cette disposition est très répandue, puisqu'elle conduit à une construction plus simple et intuitive.

### 1.2.2 SSM

SSM est l'acronyme anglais « Simplified Symmetric Manipulator », qui peut être traduit par « manipulateur symétrique simplifié ». Cette configuration, illustrée à la figure 1.3, requiert que la base et la plate-forme soient planes en plus d'avoir toutes deux une forme symétrique par rapport à un axe.

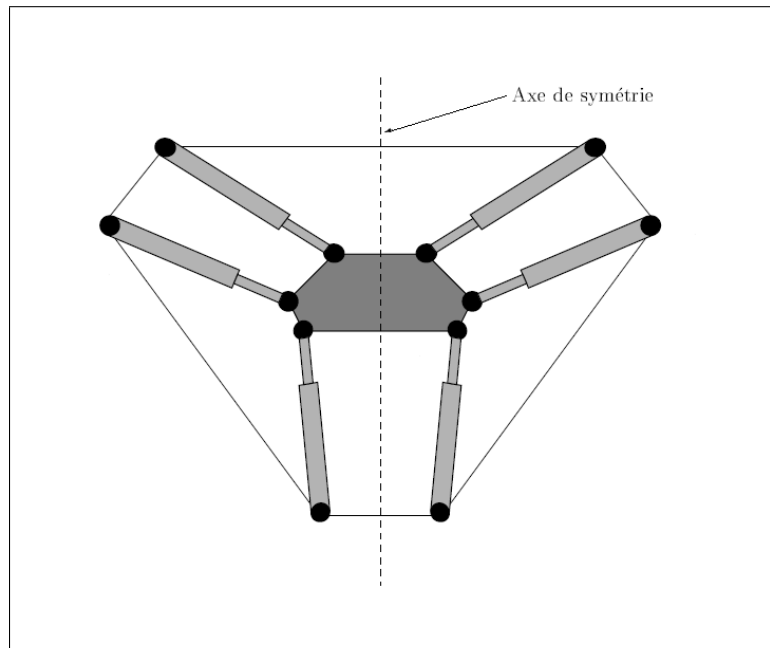


FIG. 1.3 – Modélisation SSM (vue du dessus) [17].

### 1.2.3 TSSM

Le TSSM (Triangular Simplified Symmetric Manipulator) correspond à un SSM auquel on impose que la plate-forme soit triangulaire en plus d'être symétrique. Pour satisfaire cette dernière caractéristique, la plate-forme doit avoir la forme d'un triangle isocèle ou équilatéral.

À la figure 1.4, qui donne un exemple d'une configuration TSSM, on remarque qu'il n'y a que trois points d'attache des actionneurs sur la plate-forme, ce qui les oblige à se regrouper deux par deux.

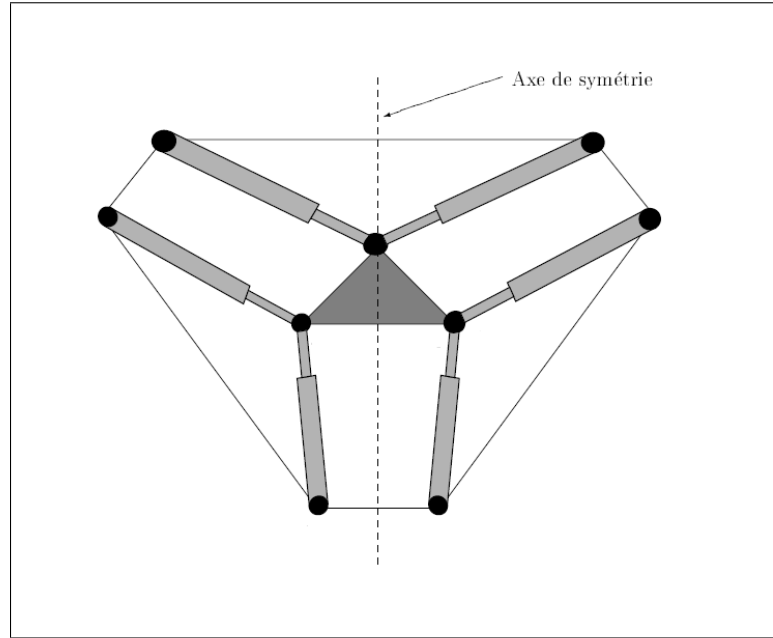


FIG. 1.4 – Modélisation TSSM (vue du dessus) [17].

#### 1.2.4 MSSM

L'architecture du MSSM (Minimal Simplified Symmetric Manipulator) est la suite logique du SSM et du TSSM, c'est-à-dire que la base doit maintenant avoir aussi la forme d'un triangle isocèle (ou équilatéral). On doit donc lier les actionneurs deux à deux sur la base, tel que l'illustre la figure 1.5. De plus, afin d'éviter que des pattes ne soient superposées, deux actionneurs partageant un point d'attache commun sur la base s'attachent en des points distincts sur la plate-forme.

Cette configuration simplifie grandement l'analyse des lieux de singularité, tel que démontré ultérieurement dans ce mémoire. De plus, elle est d'un grand intérêt pratique puisque plusieurs plates-formes de Gough-Stewart existantes ont une géométrie proche de celle du MSSM.

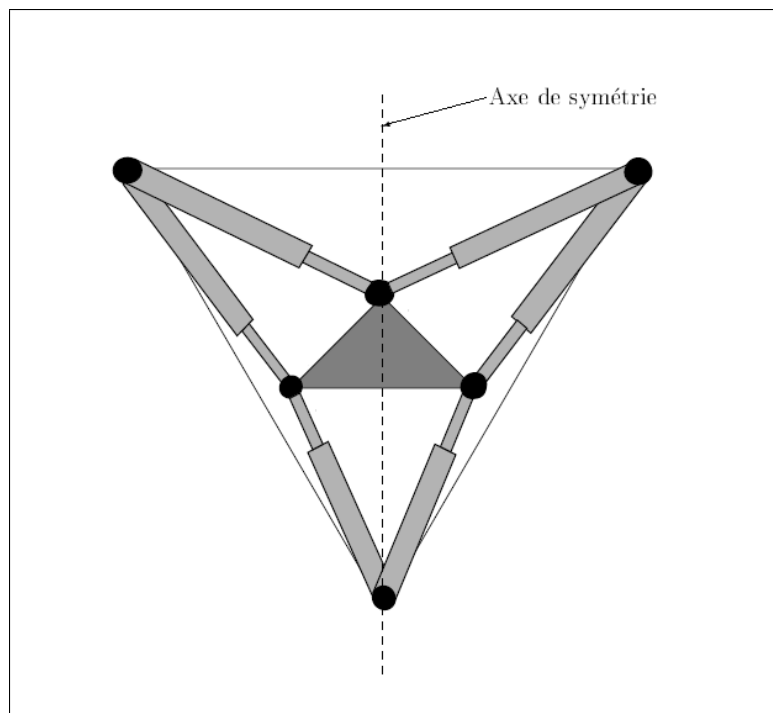


FIG. 1.5 – Modélisation MSSM (vue du dessus) [17].

# Chapitre 2

## Analyse cinématique et singularités

L'étude des mouvements d'un manipulateur est toujours cruciale afin de l'utiliser de manière optimale. En effet, on doit éviter de retrouver le mécanisme dans une configuration dite singulière qui cause une perte locale de contrôle, étant donné que la réaction à cette perte de contrôle est imprévisible et peut donc s'avérer désastreuse.

### 2.1 Problème géométrique inverse (PGI)

Un des problèmes fondamentaux de l'étude du mouvement des manipulateurs est le problème géométrique inverse, qui consiste à exprimer les variables articulaires en fonction des variables cartésiennes du robot. Dans le cas de la plate-forme de Gough-Stewart, on veut donc trouver les longueurs des actionneurs prismatiques à partir de

la position d'un point de la plate-forme et de son orientation. Pour ce faire, l'approche vectorielle illustrée sur la figure 2.1 est utilisée.

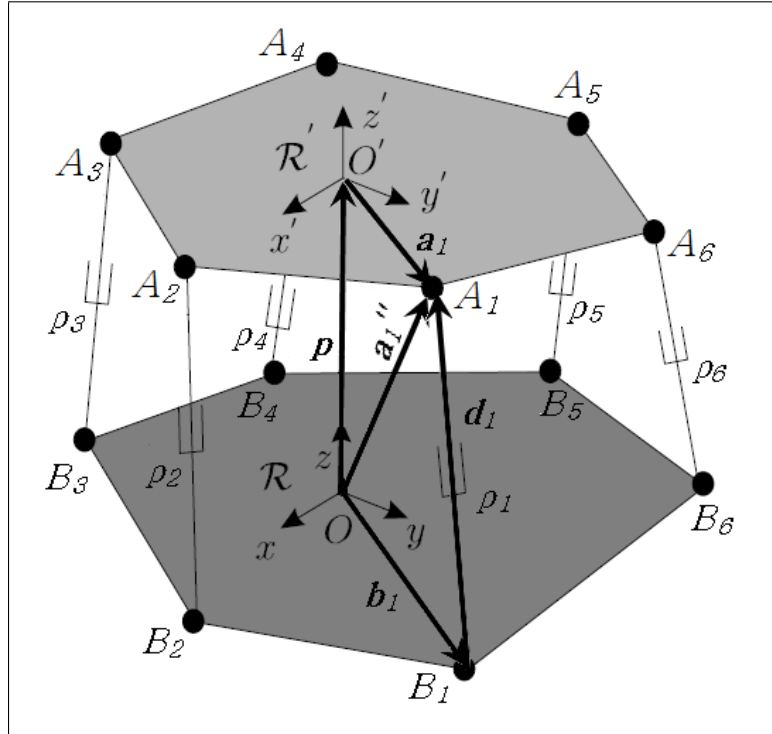


FIG. 2.1 – Plate-forme de Gough-Stewart - Convention vectorielle.

Premièrement, des repères  $\mathcal{R}$  ( $Oxyz$ ) et  $\mathcal{R}'$  ( $O'x'y'z'$ ) sont définis respectivement sur la base et la plate-forme. L'origine  $O'$  représente la position de l'effecteur. Les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  sont ensuite créés en reliant l'origine  $O$  du repère  $\mathcal{R}$  à chaque point d'attache des articulations prismatiques sur la base  $B_i$ . Le même principe est appliqué sur la plate-forme pour donner les vecteurs  $\mathbf{a}'_i$ , qui sont exprimés dans le repère  $\mathcal{R}'$ . Les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{a}'_i$  sont constants puisque les géométries de la base et de la plate-forme sont fixes. On définit par la suite le vecteur  $\mathbf{p}$  qui relie l'origine  $O$  du repère  $\mathcal{R}$  à  $O'$  ainsi que la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  qui exprime l'orientation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Ces deux derniers sont requis et donc connus pour la résolution du PGI.

Le vecteur reliant l'origine  $O$  au point d'attache  $A_i$  exprimé dans le repère  $\mathcal{R}$  est noté  $\mathbf{a}''_i$  et est défini comme suit :

$$\mathbf{a}''_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{a}'_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.1)$$

À des fins de simplification, le vecteur  $\mathbf{Q}\mathbf{a}'_i$  est simplement noté  $\mathbf{a}_i$ .

Afin de trouver la longueur de l'actionneur prismatique, on doit connaître le vecteur  $\mathbf{d}_i$  le long de ce dernier, lequel s'exprime par

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{a}''_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.2)$$

Finalement, en évaluant la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{d}_i$ , on peut trouver la longueur  $\rho_i$  de l'actionneur prismatique,

$$\rho_i^2 = \|\mathbf{d}_i\|^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.3)$$

La racine carrée de cette expression donne ainsi la solution au problème géométrique inverse d'une plate-forme de Gough-Stewart où en général seule la racine positive est considérée.

## 2.2 Problème géométrique direct (PGD)

Pour la plate-forme de Gough-Stewart comme pour tous les manipulateurs parallèles, le problème géométrique direct est beaucoup plus ardu à résoudre que le problème géométrique inverse. Dans le cas présent, les données sont les longueurs des actionneurs prismatiques et les inconnues sont la position d'un point de la plate-forme et son orientation. Afin de résoudre ce problème, il faut utiliser des méthodes qui mènent, dans le cas général, à un polynôme de degré 40 aux coefficients extrêmement complexes [5] [13] [21]. On peut donc trouver plusieurs poses de la plate-forme (position et orientation) pour une même combinaison des longueurs des vérins. Ce problème n'est pas traité dans ce mémoire.

## 2.3 Matrices jacobiennes

Afin de relier les vitesses articulaires et les vitesses cartésiennes de la plate-forme, on définit les matrices jacobiennes  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$ , tel qu'exprimé par le système d'équations

$$\mathbf{J}\mathbf{t} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur des vitesses cartésiennes généralisées de la plate-forme et  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  est le vecteur contenant les vitesses articulaires. Dans le cas de la plate-forme de Gough-Stewart, ces vecteurs sont définis comme suit :

$$\mathbf{t} = \left[ \dot{\mathbf{p}}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T \right]^T, \quad (2.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \left[ \dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3 \quad \dot{\rho}_4 \quad \dot{\rho}_5 \quad \dot{\rho}_6 \right]^T, \quad (2.6)$$

où  $\dot{\mathbf{p}}$  représente le vecteur vitesse du point  $O'$  exprimé dans le repère  $\mathcal{R}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur de vitesse angulaire de la plate-forme. Les scalaires  $\dot{\rho}_i$  sont les vitesses articulaires de chacun des actionneurs prismatiques, c'est-à-dire la vitesse à laquelle chaque vérin varie en longueur.

Les matrices jacobiennes de la plate-forme de Gough-Stewart obtenues après quelques opérations [17] sont définies par

$$\mathbf{J} = \left[ \mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_6 \right]^T, \quad \mathbf{K} = \text{diag}[\boldsymbol{\rho}], \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{c}_i$  est le vecteur de dimension six suivant :

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_i'' - \mathbf{b}_i) \\ \mathbf{a}_i \times (\mathbf{a}_i'' - \mathbf{b}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{a}_i \times \mathbf{d}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.8)$$

Ces matrices jacobiennes sont importantes afin d'analyser la cinématique du manipulateur et surtout pour connaître ses lieux de singularité.

## 2.4 Singularités

Tel que discuté précédemment, les lieux de singularité, configurations singulières ou simplement singularités sont des endroits où le contrôle du manipulateur n'est plus



assuré. Il est donc normal et crucial de bien connaître ces emplacements, afin de les éviter. C'est pourquoi plusieurs recherches ont été faites (voir par exemple [2], [9], [22]) dans le but de les caractériser.

Il existe trois types de singularités pour les manipulateurs parallèles [8], puisque leur cinématique est définie par deux matrices jacobiennes. En effet, le premier type se produit lorsque la matrice  $\mathbf{K}$  est singulière, le deuxième, lorsque la matrice  $\mathbf{J}$  est singulière et finalement le troisième, lorsque les deux matrices peuvent être singulières [8]. Bien que ce classement des singularités ne soit pas tout à fait complet [28], il est suffisant pour l'analyse entreprise dans ce mémoire.

### 2.4.1 Singularité de type *I*

Par définition, pour que la matrice  $\mathbf{K}$  soit singulière, son déterminant doit être nul. Mathématiquement, l'équation (2.4) montre que dans ce cas, des vitesses articulaires  $\rho_i$  non nulles peuvent produire des vitesses cartésiennes et angulaires nulles à la plateforme, puisque le noyau de  $\mathbf{K}$  n'est pas vide. De plus, le principe de dualité cinématique-statique [27] montre que dans cette configuration singulière, l'effecteur peut résister à certaines forces ou moments sans qu'aucune force ni aucun couple ne soit appliqué aux articulations.

Dans le cas de la plate-forme de Gough-Stewart, le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est donné par le produit des longueurs  $\rho_i$ . Ainsi, pour que le déterminant soit égal à zéro, il faut qu'au moins une longueur  $\rho_i$  soit nulle. En pratique, on peut remplacer la longueur nulle par la longueur limite minimale ou maximale de l'actionneur. Donc les singularités de type *I* ne se produisent qu'aux limites de l'espace de travail. Puisque ces limites sont connues lors du design du manipulateur, il est relativement facile d'éviter de rencontrer ce type de singularité.

### 2.4.2 Singularité de type *II*

Tel que mentionné précédemment, ce type de singularité se produit lorsque la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est singulière et donc lorsque son déterminant est égal à zéro. Puisque

le noyau de  $\mathbf{J}$  n'est pas vide, on peut démontrer avec l'équation (2.4) qu'un vecteur  $\mathbf{t}$  de vitesses cartésiennes et angulaires de la plate-forme non nul peut engendrer des vitesses articulaires nulles. Autrement dit, l'effecteur peut subir des mouvements infinitésimaux lorsque les articulations actionnées sont immobiles. Le principe de dualité cinématique-statique permet en plus d'affirmer que dans ces poses singulières, le manipulateur ne pourrait pas résister à des torseurs appliqués à l'effecteur avec des efforts finis aux actionneurs. C'est pourquoi ce type de singularité est associé à la perte locale de rigidité du manipulateur.

Pour la plate-forme de Gough-Stewart, les configurations singulières de type *II* ne peuvent pas être déterminées par simple intuition, comme c'est le cas pour les singularités de type *I*. En effet, en évaluant le déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$ , on obtient un polynôme complexe de degré 3 en fonction de la position de l'effecteur,  $\mathbf{p}$  [18]. En plus d'être difficiles à situer, les configurations singulières de type *II* se produisent à l'intérieur de l'espace de travail. Ceci explique pourquoi ces singularités doivent toujours être bien analysées lors de la conception d'un manipulateur parallèle. Il y a d'ailleurs de nombreuses recherches faites à ce sujet (voir par exemple [4] et [15]), qui est toujours d'actualité dans le domaine des manipulateurs parallèles.

### 2.4.3 Singularité de type *III*

Ce type de singularité diffère légèrement des deux types précédents, puisqu'il nécessite des relations particulières entre les paramètres architecturaux. Autrement dit, seules certaines géométries spécifiques entraînent deux matrices jacobiennes simultanément singulières, ce qui fait dégénérer l'équation (2.4). Lorsqu'une singularité de type *III* est rencontrée, l'effecteur peut réaliser des mouvements finis lorsque les articulations actionnées sont barrées. Des mouvements finis aux actionneurs peuvent aussi ne causer aucun déplacement à l'effecteur. Il est donc évident que dans ces cas précis, le manipulateur n'est plus fonctionnel.

Avec la plate-forme de Gough-Stewart, on peut rencontrer ce type de singularité lorsque la base et la plate-forme sont de dimensions identiques et que les actionneurs prismatiques ont la même longueur, par exemple. Dans ce cas, la plate-forme peut se déplacer même lorsque tous les actionneurs sont fixes. Les singularités de type *III* peuvent

être évitées en portant attention à la géométrie lors de la conception du mécanisme.

## 2.5 Zones libres de singularité

Tel que mentionné précédemment, les singularités de type *II* sont les plus difficiles à identifier pour un manipulateur parallèle. De plus, puisqu'elles se retrouvent à l'intérieur de l'espace de travail, il est d'autant plus important de pouvoir identifier des zones libres de singularité. En effet, il faut que la trajectoire que suit l'effecteur soit aussi éloignée que possible des singularités afin d'éviter des pertes locales de rigidité qui pourraient causer le dysfonctionnement du manipulateur.

Le meilleur moyen de connaître les zones libres de singularité est de savoir où se situent ces singularités. C'est dans cette optique que Mayer St-Onge et Gosselin [18] ont développé l'expression scalaire du déterminant de  $\mathbf{p}$  de la plate-forme de Gough-Stewart générale qui apparaît ci-dessous :

$$\begin{aligned} F_1x^3 + F_2x^2y + F_3x^2z + F_4x^2 + F_5xy^2 + F_6xyz + F_7xy + F_8xz^2 \\ + F_9xz + F_{10}x + F_{11}y^3 + F_{12}y^2z + F_{13}y^2 + F_{14}yz^2 + F_{15}yz \\ + F_{16}y + F_{17}z^3 + F_{18}z^2 + F_{19}z + F_{20} = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où chaque coefficient  $F_i$  est le déterminant d'une matrice qui ne dépend que de l'orientation et des paramètres architecturaux du manipulateur. La liste de ces coefficients est donnée à l'Annexe A.

Cette équation permet par la suite de tracer les lieux de singularité dans l'espace cartésien en posant une orientation constante. Son équivalent a aussi été développé dans [16] afin de les tracer dans l'espace des orientations en posant une position fixe d'un point de l'effecteur.

## 2.6 Objectif du projet de recherche

L'équation (2.9), avec ses 20 coefficients complexes, reste fastidieuse à évaluer. De plus, en raison de sa forme scalaire, il n'est pas évident de constater l'influence de la

géométrie du manipulateur sur les lieux de singularité.

C'est donc l'objectif du présent projet de recherche que de trouver une expression du déterminant de la matrice jacobienne du manipulateur, mais cette fois-ci, en conservant la notation vectorielle des constantes et des variables. L'influence de chaque paramètre sur la valeur du déterminant devrait être ainsi plus facile à observer que lorsque les composantes des vecteurs sont séparées. Il va aussi de soi que l'expression du déterminant doit être simplifiée autant que possible.

# Chapitre 3

## Développement de l'expression vectorielle du déterminant de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$

L'analyse vectorielle des lieux de singularité de type *II* (désormais simplement appelés lieux de singularité) est maintenant traitée. Il faut d'abord évaluer le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ , tout en conservant la forme vectorielle des paramètres. En fait, cette étape constitue la partie la plus importante du travail quant au nombre de manipulations. Une fois l'expression du déterminant connue, elle peut être utilisée afin d'analyser les configurations singulières de la plate-forme de Gough-Stewart.

Avant d'évaluer le déterminant, quelques opérations matricielles sont appliquées à la matrice  $\mathbf{J}$  dans le but de simplifier l'expression obtenue. Une bonne connaissance de l'algèbre linéaire est nécessaire à cette étape du projet.

### 3.1 Réarrangement de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$

Premièrement, afin de simplifier les développements mathématiques, une orientation constante de la plate-forme est imposée. Il sera possible par la suite de substituer la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  dans les expressions obtenues. Ensuite, dans le but d'alléger la notation et de bien distinguer les paramètres constants de ceux qui sont variables, les deux définitions suivantes sont utilisées :

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.2)$$

Pour une orientation donnée de la plate-forme, les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{f}_i$  sont donc constants, puisqu'ils sont indépendants du vecteur  $\mathbf{p}$ .

La matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  transposée peut désormais s'écrire :

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p} + \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{p} + \mathbf{e}_6 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{p} - \mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

où les matrices  $\mathbf{A}_i$  représentent les matrices de produit vectoriel définies comme suit :

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial(\mathbf{a}_i \times \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{a}_i, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ . En d'autres termes, on remplace le produit vectoriel  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{p}$  par une matrice  $\mathbf{A}_i$  qui multiplie le vecteur  $\mathbf{p}$ .

Ainsi, avec la notation utilisée dans l'équation (3.3), le vecteur variable  $\mathbf{p}$  est mis en évidence et les vecteurs constants  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  qui ne dépendent que de la géométrie sont regroupés dans les matrices  $\mathbf{A}_i$ , ainsi que dans les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{f}_i$ .

Il est à noter également que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est maintenant utilisée sous sa forme transposée, ce qui n'affecte pas la valeur de son déterminant qui est invariant sous cette opération, i.e.,

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}^T). \quad (3.5)$$

## 3.2 Repère de référence

Les repères sont toujours importants à considérer lors des analyses vectorielles. En effet, les vecteurs doivent tous être exprimés dans un même système de coordonnées, dont l'origine peut être située n'importe où. C'est dans cet ordre d'idée et afin de simplifier la notation de la matrice jacobienne que le repère fixe est posé au point d'attache sur la base d'un des actionneurs prismatiques. Le choix de celui-ci est arbitraire, mais à des fins de démonstration, on pose que l'origine du système de référence se trouve au point d'attache sur la base du premier actionneur. De plus, on pose que l'origine du repère attaché à la plate-forme se trouve au point d'attache du même actionneur prismatique sur la plate-forme. Le vecteur  $\mathbf{a}_1$  qui relie le point  $O'$  au premier point d'attache sur la plate-forme et le vecteur  $\mathbf{b}_1$  qui relie le point  $O$  au premier point d'attache sur la base deviennent donc nuls. Ceci implique que les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{f}_1$  et la matrice  $\mathbf{A}_1$  sont également nuls. La matrice jacobienne transposée devient maintenant :

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{p} + \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{p} + \mathbf{e}_6 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_2\mathbf{p} - \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{0}_3$  désigne un vecteur nul à trois composantes.

Ce changement permet de simplifier grandement l'expression du déterminant, puisqu'un vecteur nul apparaît maintenant dans la matrice.

## 3.3 Opérations élémentaires sur les colonnes

Il est bien connu en algèbre linéaire que des opérations élémentaires peuvent être effectuées avec les lignes et les colonnes d'une matrice sans en changer les propriétés fondamentales. Ces trois opérations sont :

- Multiplication d'une rangée ou d'une colonne par un scalaire ;
- Échange entre rangées ou entre colonnes ;
- Addition d'un multiple d'une rangée ou d'une colonne à une autre rangée ou une autre colonne.

Lorsque ces opérations sont effectuées, le déterminant de la matrice est alors multiplié par un scalaire ou reste inchangé [25]. Puisqu'on n'est intéressé ici que par le cas où le déterminant est nul, ces opérations n'influencent pas l'emplacement des lieux de singularité.

La dernière opération énoncée est utilisée ici afin de diminuer le nombre d'apparitions du vecteur  $\mathbf{p}$  dans la matrice  $\mathbf{J}^T$ . On soustrait donc la première colonne des cinq autres colonnes de  $\mathbf{J}^T$  exprimée à l'équation (3.6) pour obtenir

$$\mathbf{J}'^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_6 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_2\mathbf{p} - \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

On remarque que le vecteur  $\mathbf{p}$  n'apparaît maintenant qu'une seule fois dans la partie supérieure de la matrice.

### 3.4 Calcul du déterminant

Maintenant que la matrice est exprimée de manière simplifiée, on effectue le calcul du déterminant. Pour ce faire, le complément de Schur [20] est utilisé.

Premièrement, le complément de Schur ne peut être appliqué qu'à des matrices divisée en quatre blocs, dont ceux qui sont diagonaux sont carrés. Par définition, une matrice divisée en blocs est une matrice pouvant être séparée en matrices rectangulaires plus petites. Cependant, la séparation doit se faire selon des droites verticales et horizontales pour séparer les colonnes et les rangées. La matrice  $\mathbf{J}'^T$  correspond à ces critères puisque ses dimensions sont six par six et qu'elle peut facilement être divisée en « sous-matrices ». Dans le cas présent, elle est séparée en quatre matrices de trois rangées par trois colonnes chacune, tel que montré ci-dessous.

$$\mathbf{J}'^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

où

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_2\mathbf{p} - \mathbf{f}_2 & \mathbf{A}_3\mathbf{p} - \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4\mathbf{p} - \mathbf{f}_4 & \mathbf{A}_5\mathbf{p} - \mathbf{f}_5 & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$



Il est ensuite possible d'évaluer le complément de Schur comme

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{21}\mathbf{J}_{11}^{-1}\mathbf{J}_{12}. \quad (3.12)$$

Finalement, le complément de Schur  $\mathbf{S}$  est utilisé dans le calcul du déterminant tel que montré par l'expression suivante :

$$\det(\mathbf{J}^T) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{21}\mathbf{J}_{11}^{-1}\mathbf{J}_{12}). \quad (3.13)$$

Par définition, on peut remplacer l'inverse d'une matrice par

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})}\text{adj}(\mathbf{M}), \quad (3.14)$$

où  $\text{adj}(\mathbf{M})$  est la matrice adjointe de la matrice  $\mathbf{M}$  [25]. En combinant cette dernière expression avec la propriété des déterminants

$$\det(\alpha\mathbf{M}) = \alpha^n \det(\mathbf{M}), \quad (3.15)$$

où  $\alpha$  est un scalaire et où  $\mathbf{M}$  est de dimension  $n \times n$ , on peut réarranger l'équation (3.13) ainsi :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}^T) &= \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{21}\frac{1}{\det(\mathbf{J}_{11})}\text{adj}(\mathbf{J}_{11})\mathbf{J}_{12}), \\ &= \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}\det(\mathbf{J}_{11}) - \mathbf{J}_{21}\text{adj}(\mathbf{J}_{11})\mathbf{J}_{12})\det(\mathbf{J}_{11})^{-3}, \\ &= \det(\mathbf{J}_{11})^{-2}\det(\det(\mathbf{J}_{11})\mathbf{J}_{22} - \mathbf{J}_{21}\text{adj}(\mathbf{J}_{11})\mathbf{J}_{12}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour des matrices formées de trois vecteurs colonne, comme dans le cas des quatre sous-matrices  $\mathbf{J}_{ij}$  définies ci-haut, les propriétés suivantes s'appliquent :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\det(\mathbf{M}) = \mathbf{v}_1^T(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3), \quad (3.18)$$

$$\text{adj}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) & (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \end{bmatrix}^T, \quad (3.19)$$

où  $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3, \in \mathbb{R}^3$ .

Afin de limiter le nombre d'opérations impliquant le vecteur  $\mathbf{p}$  dans le complément de Schur, la sous-matrice  $\mathbf{J}_{11}$  est échangée avec  $\mathbf{J}_{12}$  et donc le même principe est appliqué avec  $\mathbf{J}_{21}$  et  $\mathbf{J}_{22}$ . Ces substitutions ne reviennent en fait qu'à un échange de colonnes

qui inverse le signe de la valeur du déterminant. Cependant, puisqu'ici nous ne sommes intéressés que par une valeur nulle du déterminant, ce changement de signe n'influence pas l'expression des lieux de singularité. On obtient ainsi la matrice :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}''^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{11} \\ \mathbf{J}_{22} & \mathbf{J}_{21} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{p} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{A}_4\mathbf{p} - \mathbf{f}_4 & \mathbf{A}_5\mathbf{p} - \mathbf{f}_5 & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_2\mathbf{p} - \mathbf{f}_2 & \mathbf{A}_3\mathbf{p} - \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Le déterminant de cette matrice s'évalue comme suit :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}''^T) &= \det(\mathbf{J}_{12})^{-2} \det(\det(\mathbf{J}_{12})\mathbf{J}_{21} - \mathbf{J}_{22}\text{adj}(\mathbf{J}_{12})\mathbf{J}_{11}), \\ &= \det(\mathbf{J}_{12})^{-2} \det(\mathbf{M}_J), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où le déterminant et la matrice adjointe de  $\mathbf{J}_{12}$  sont respectivement :

$$\det(\mathbf{J}_{12}) = \mathbf{e}_4^T(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6) = e_{456}, \quad (3.22)$$

$$\text{adj}(\mathbf{J}_{12}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6) & (\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_4) & (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) \end{bmatrix}^T = \mathbf{E}_{456}. \quad (3.23)$$

Ces deux dernières expressions ne sont fonction que des paramètres architecturaux du manipulateur et sont donc indépendantes de la position de l'effecteur. Le scalaire  $e_{456}$  et la matrice  $\mathbf{E}_{456}$  sont donc introduits pour alléger la notation.

La matrice  $\mathbf{M}_J$  obtenue dans l'expression (3.21) est composée de trois vecteurs colonne, c'est-à-dire,

$$\mathbf{M}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{J1} & \mathbf{m}_{J2} & \mathbf{m}_{J3} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{J1} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4\mathbf{p} - \mathbf{f}_4 & \mathbf{A}_5\mathbf{p} - \mathbf{f}_5 & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6)^T \\ (\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_4)^T \\ (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5)^T \end{bmatrix} \mathbf{p}, \\ &= -\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{J2} &= (\mathbf{e}_4^T(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6)) [\mathbf{A}_2\mathbf{p} - \mathbf{f}_2] \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4\mathbf{p} - \mathbf{f}_4 & \mathbf{A}_5\mathbf{p} - \mathbf{f}_5 & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6)^T \\ (\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_4)^T \\ (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5)^T \end{bmatrix} \mathbf{e}_2, \\ &= e_{456}\mathbf{w}_2 - \mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{J3} &= (\mathbf{e}_4^T(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6)) [\mathbf{A}_3\mathbf{p} - \mathbf{f}_3] \\
&\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4\mathbf{p} - \mathbf{f}_4 & \mathbf{A}_5\mathbf{p} - \mathbf{f}_5 & \mathbf{A}_6\mathbf{p} - \mathbf{f}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6)^T \\ (\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_4)^T \\ (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5)^T \end{bmatrix} \mathbf{e}_3, \\
&= e_{456}\mathbf{w}_3 - \mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_3,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

où les vecteurs  $\mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont utilisés afin d'alléger les équations lors des prochains développements, tel que

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{p} - \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \tag{3.28}$$

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}_J$  est évalué en effectuant le produit triple de ses vecteurs colonne. Ce calcul demande d'évaluer en premier lieu le produit vectoriel de deux de ces vecteurs, qui sont ici la deuxième et la troisième colonne. Cette opération résulte en le vecteur suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{J2} \times \mathbf{m}_{J3} &= e_{456}^2(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) + e_{456}(\mathbf{w}_3 \times (\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_2) \\
&\quad - \mathbf{w}_2 \times (\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_3)) + (\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_2) \times (\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Cette expression est ensuite simplifiée en appliquant les propriétés suivantes :

$$(\mathbf{M}\mathbf{v}_1) \times (\mathbf{M}\mathbf{v}_2) = \text{adj}(\mathbf{M})^T(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2), \tag{3.30}$$

$$\text{adj}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) = \text{adj}(\mathbf{M}_2)\text{adj}(\mathbf{M}_1), \tag{3.31}$$

$$\text{adj}(\mathbf{M})^T = \text{adj}(\mathbf{M}^T), \tag{3.32}$$

ce qui mène à l'équation

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{J2} \times \mathbf{m}_{J3} &= e_{456}^2(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) + e_{456}(\mathbf{w}_3 \times (\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_2) \\
&\quad - \mathbf{w}_2 \times (\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{e}_3)) + \text{adj}(\mathbf{J}_{22})^T \text{adj}(\mathbf{E}_{456}^T)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dans le dernier terme de l'équation ci-dessus, on utilise l'adjointe transposée de la matrice  $\mathbf{J}_{22}$  et l'adjointe de la matrice  $\mathbf{E}_{456}$  transposée afin de pouvoir utiliser la propriété (3.19), qui requiert une matrice avec des vecteurs colonne.

Finalement, l'expression (3.33) est multipliée par le vecteur  $\mathbf{m}_{J1}$  transposé, ce qui complète le produit triple et donc le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}_J$  :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{M}_J) &= \mathbf{m}_{J1}^T(\mathbf{m}_{J2} \times \mathbf{m}_{J3}), \\
&= -e_{456}^2(\mathbf{J}_{22}\mathbf{E}_{456}\mathbf{p})^T(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) \\
&\quad -e_{456}(\mathbf{w}_3^T(\text{adj}(\mathbf{J}_{22})^T \text{adj}(\mathbf{E}_{456}^T)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{p})) \\
&\quad -\mathbf{w}_2^T(\text{adj}(\mathbf{J}_{22})^T \text{adj}(\mathbf{E}_{456}^T)(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}))) \\
&\quad -\mathbf{p}^T \mathbf{E}_{456}^T \mathbf{J}_{22}^T \text{adj}(\mathbf{J}_{22})^T \text{adj}(\mathbf{E}_{456}^T)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

On utilise les deux propriétés matricielles

$$\mathbf{M}\text{adj}(\mathbf{M}) = \text{adj}(\mathbf{M})\mathbf{M} = \det(\mathbf{M})\mathbf{I}_n, \tag{3.35}$$

$$\det(\text{adj}(\mathbf{M})) = \det(\mathbf{M})^{n-1}, \tag{3.36}$$

où  $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité de dimensions  $n \times n$  et où  $n$  est la valeur des deux dimensions de la matrice carrée  $\mathbf{M}$ .

Une expression simplifiée pour le déterminant de  $\mathbf{M}_J$  est ainsi obtenue :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{M}_J) &= -e_{456}^2(\mathbf{J}_{22}\text{adj}(\mathbf{J}_{12})\mathbf{p})^T(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) \\
&\quad -e_{456}(\mathbf{w}_3^T(\text{adj}(\mathbf{J}_{22})^T \text{adj}(\text{adj}(\mathbf{J}_{12})^T)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{p})) \\
&\quad -\mathbf{w}_2^T(\text{adj}(\mathbf{J}_{22})^T \text{adj}(\text{adj}(\mathbf{J}_{12})^T)(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}))) \\
&\quad -\det(\mathbf{J}_{22})\det(\mathbf{J}_{12})^2\mathbf{p}^T(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3). \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Il est à noter que la matrice adjointe de  $\mathbf{J}_{12}$  a été substituée à la matrice  $\mathbf{E}_{456}$  pour utiliser les propriétés (3.35) et (3.36).

L'équation (3.37) représente le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}_J$ , mais le déterminant d'intérêt ici est celui de la matrice  $\mathbf{J}''^T$ . Il faut donc multiplier (3.37) par le facteur constant  $e_{456}^{-2}$ . Cependant, le facteur  $e_{456}^2$  peut être factorisé lors du développement de l'équation (3.37), ce qui annule le facteur  $e_{456}^{-2}$ . On obtient donc une expression pour le déterminant de la matrice  $\mathbf{J}''^T$  à condition que le scalaire  $e_{456}$  ne soit pas nul. Si ce n'était pas le cas, le déterminant dégénérerait.

Mathématiquement, un produit triple nul entre les vecteurs  $\mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{e}_5$  et  $\mathbf{e}_6$  signifie qu'ils sont coplanaires. Physiquement, cela peut signifier que les points d'attache 4, 5 et 6 sur la base et la plate-forme se situent tous dans un même plan et donc que ces trois

actionneurs prismatiques sont coplanaires. À moins que tous les six actionneurs soient alignés, ceci n'est qu'un problème de notation. En effet, il peut être réglé en décalant les numéros de pattes afin que la quatrième, la cinquième et la sixième ne soient pas coplanaires. Pour la poursuite de la démonstration, il est donc tenu pour acquis que le scalaire  $e_{456}$  n'est pas nul.

En développant l'équation (3.37) et en regroupant les termes selon le degré du vecteur  $\mathbf{p}$ , on obtient l'équation simplifiée suivante :

$$\det(\mathbf{J}''^T) = \mathbf{p}^T(\mathbf{v}_0 + (\mathbf{M}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{p}^T\mathbf{M}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{p}^T\mathbf{M}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{p}^T\mathbf{M}_3 + \mathbf{v}_4\mathbf{p}^T\mathbf{M}_4 + \mathbf{v}_5\mathbf{p}^T\mathbf{M}_5)\mathbf{p}), \quad (3.38)$$

où  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  et  $\mathbf{v}_5$  représentent des vecteurs de dimension 3 et  $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$  et  $\mathbf{M}_5$  sont des matrices carrées également de dimension trois. Les expressions complètes de ces vecteurs et matrices sont données à l'Annexe B.

On remarque qu'il n'y a pas de terme constant indépendant du vecteur  $\mathbf{p}$  dans l'équation (3.38), ce qui permet de factoriser complètement un degré de  $\mathbf{p}$ . Ceci s'explique par le fait que le repère de référence soit placé à la base d'un des actionneurs. L'absence de terme constant permet d'affirmer que le déterminant de  $\mathbf{J}''^T$  est nul si au moins une des conditions suivantes est respectée :

- Le vecteur  $\mathbf{p}$  est nul ;
- Le vecteur  $(\mathbf{v}_0 + (\mathbf{M}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{p}^T\mathbf{M}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{p}^T\mathbf{M}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{p}^T\mathbf{M}_3 + \mathbf{v}_4\mathbf{p}^T\mathbf{M}_4 + \mathbf{v}_5\mathbf{p}^T\mathbf{M}_5)\mathbf{p})$  est nul ;
- Le vecteur  $\mathbf{p}$  est orthogonal au vecteur  $(\mathbf{v}_0 + (\mathbf{M}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{p}^T\mathbf{M}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{p}^T\mathbf{M}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{p}^T\mathbf{M}_3 + \mathbf{v}_4\mathbf{p}^T\mathbf{M}_4 + \mathbf{v}_5\mathbf{p}^T\mathbf{M}_5)\mathbf{p})$ .

Un vecteur  $\mathbf{p}$  nul correspond mathématiquement au point d'attache  $B_1$  sur la plateforme qui coïncide avec le point  $A_1$  sur la base. En réalité, si le vérin est à sa longueur minimale ou maximale, on pose le vecteur  $\mathbf{p}$  comme étant zéro, ce qui équivaut à une position située sur la limite de l'espace de travail du manipulateur. Ce cas représente donc une situation d'un moindre intérêt, ce qui laisse les deux dernières conditions à examiner plus en profondeur dans l'analyse des lieux de singularité.

En dérivant l'équation (3.38) par rapport au vecteur  $\mathbf{p}$ , on obtient l'expression du vecteur normal à la surface des lieux de singularité

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_0^T)\mathbf{p} + \sum_{i=1}^5 (\mathbf{v}_i \mathbf{p}^T \mathbf{M}_i \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}_i (\mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i^T) \mathbf{p}). \quad (3.39)$$

Ce vecteur indique la direction qui permet de s'éloigner le plus possible de la surface des lieux de singularité.

### 3.4.1 Notation alternative

L'expression (3.38) démontre bien la forme générale du déterminant de  $\mathbf{J}''^T$ , mais on remarque que le vecteur  $\mathbf{p}$  apparaît cinq fois dans l'addition des termes de degré 3 ( $\mathbf{v}_i \mathbf{p}^T \mathbf{M}_i$ ). Afin de ne faire apparaître qu'une seule fois le vecteur  $\mathbf{p}$ , la notation suivante peut également être utilisée :

$$\det(\mathbf{J}''^T) = \mathbf{p}^T (\mathbf{v}_0 + (\mathbf{M}_0 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{m}_1^T + \mathbf{v}_2 \mathbf{m}_2^T + \mathbf{v}_3 \mathbf{m}_3^T + \mathbf{v}_4 \mathbf{m}_4^T + \mathbf{v}_5 \mathbf{m}_5^T) \mathbf{P}) \mathbf{p}), \quad (3.40)$$

avec

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{p} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{i1} \\ \mathbf{m}_{i2} \\ \mathbf{m}_{i3} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3.42)$$

où

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{i1} & \mathbf{m}_{i2} & \mathbf{m}_{i3} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3.43)$$

et  $\mathbf{0}_3$  désigne un vecteur nul à trois composantes.

Cette notation est intéressante puisqu'elle permet de ségréguer les paramètres qui décrivent la géométrie du manipulateur, et donc constants, de ceux qui varient selon la position de l'effecteur.

### 3.4.2 Cas particulier : MSSM

Tel que mentionné précédemment, le MSSM est une architecture particulière et très simplifiée de la plate-forme de Gough-Stewart. Cette configuration est utilisée ici pour démontrer les simplifications possibles de l'expression du déterminant de la matrice  $\mathbf{J}''^T$ .

Étant donné que la plate-forme et la base sont triangulaires, les points d'attache sont appariés par paires. Puisque les triangles de la base et de la plate-forme doivent être inversés, les indices des points d'attache ne seront pas rassemblés de la même manière. Les équations ci-dessous expriment ces regroupements :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_2, & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}_4, & \mathbf{a}_4 &= \mathbf{a}_5, \\ \mathbf{b}_5 &= \mathbf{b}_6, & \mathbf{a}_6 &= \mathbf{a}_1. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Puisque les repères de référence sont placés aux premiers points d'attache,  $\mathbf{b}_2$  et  $\mathbf{a}_6$  deviennent aussi automatiquement nuls, tout comme les vecteurs  $\mathbf{f}_2$  et  $\mathbf{f}_6$ , qui ne sont en fait que les produits vectoriels de  $\mathbf{a}_i$  avec  $\mathbf{b}_i$ . De plus, il est maintenant possible d'exprimer le déterminant de  $\mathbf{J}''^T$  en fonction des vecteurs associés à deux actionneurs, le troisième et le cinquième.

Tous ces regroupements simplifient donc grandement l'expression du déterminant de  $\mathbf{J}''^T$ , qui devient

$$\det(\mathbf{J}''^T) = \mathbf{p}^T (\mathbf{v}'_0 + (\mathbf{M}'_0 + \mathbf{v}'_1 \mathbf{p}^T \mathbf{M}'_1) \mathbf{p}), \tag{3.45}$$

où les expressions complètes de  $\mathbf{v}'_0$ ,  $\mathbf{M}'_0$ ,  $\mathbf{v}'_1$  et  $\mathbf{M}'_1$  sont données à l'Annexe C. La simplification utilisée à l'équation (3.40) n'a plus besoin d'être utilisée puisque le vecteur  $\mathbf{p}$  est déjà factorisé dans le terme de troisième degré.

En comparant l'équation (3.38) et l'équation (3.45), il est difficile de pleinement apprécier la simplification due à l'architecture du MSSM. En effet, la configuration du MSSM compte non seulement quatre termes de degré 3 de moins, mais les vecteurs et les matrices constants du MSSM,  $\mathbf{v}'_i$  et  $\mathbf{M}'_i$ , sont formés d'un nombre de termes beaucoup plus petit que ceux de l'expression générale,  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{M}_i$ .

Le tableau 3.1 donne une idée de la différence d'ordre de grandeur entre les nombres

de termes impliqués dans l'équation du déterminant de  $\mathbf{J}''^T$  de l'architecture générale et de celle du MSSM.

TAB. 3.1 – Comparaison des nombres de termes de la plate-forme de Gough-Stewart générale et de celle du MSSM.

Degré du vecteur $\mathbf{p}$	Nombre de termes	
	Gough-Stewart général	MSSM
1	10	1
2	50	4
3	30	3
<b>TOTAL</b>	<b>90</b>	<b>8</b>

L'expression du vecteur normal à la surface des lieux de singularité d'une architecture de type MSSM est obtenue en dérivant l'équation (3.45) par rapport au vecteur  $\mathbf{p}$ .

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}'_0 + (\mathbf{M}'_0 + \mathbf{M}'_0{}^T)\mathbf{p} + (\mathbf{v}'_1\mathbf{p}^T\mathbf{M}'_1\mathbf{p} + \mathbf{p}^T\mathbf{v}'_1(\mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_1{}^T)\mathbf{p}). \quad (3.46)$$

En comparant cette dernière avec l'équation (3.39), on constate que l'expression associée au MSSM est encore une fois grandement simplifiée.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, il est démontré clairement qu'avec quelques opérations d'algèbre linéaire, l'expression du déterminant de la matrice  $\mathbf{J}''^T$  peut être écrite sous forme vectorielle, et ce de manière concise. L'expression du vecteur normal à la surface des lieux de singularité donnée peut être utilisée directement afin de s'éloigner de cette surface. Il a finalement été démontré que l'architecture de type MSSM, une configuration particulière de la plate-forme de Gough-Stewart, simplifie grandement l'expression du déterminant, qui passe ici de 90 à 8 termes. Une application de l'expression vectorielle sera démontrée dans le prochain chapitre.



# Chapitre 4

## Détermination de zones libres de singularité en utilisant l'analyse par intervalles

Tel qu'expliqué au chapitre précédent, il est possible de situer tous les lieux de singularité dans l'espace de travail du manipulateur avec une expression comme l'équation (3.40). Cependant, il arrive qu'une telle information ne soit pas complètement nécessaire. En effet, si seulement une certaine zone de l'espace est utilisée, il n'est pas utile de connaître les singularités en dehors de cette zone. C'est dans cette optique qu'est employée l'analyse par intervalles.

Le principe de base de l'analyse par intervalles est de diviser un espace en plusieurs boîtes et de vérifier la condition d'intérêt à l'intérieur de chacune d'elles. Les limites des boîtes sont définies par des intervalles.

## 4.1 Opérations de base et fonctions sur des intervalles

Afin de bien comprendre la technique d'analyse par intervalles, il faut premièrement connaître la manière d'effectuer des opérations de base sur des intervalles. En effet, cette méthode diffère quelque peu des opérations avec des scalaires. Les quatre expressions suivantes démontrent comment effectuer les opérations de base sur des intervalles [6].

$$[a; b] + [c; d] = [a + c; b + d], \quad (4.1)$$

$$[a; b] - [c; d] = [a - d; b - c], \quad (4.2)$$

$$[a; b] \times [c; d] = [\min(ac, ad, bc, bd); \max(ac, ad, bc, bd)], \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} [a; b] \div [c; d] &= \left[ \min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right); \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right) \right], \\ &= \text{indéfini si } c \leq 0 \leq d. \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $a$  et  $c$  sont des scalaires qui représentent la limite inférieure de l'intervalle tandis que  $b$  et  $d$  sont ceux qui représentent la limite supérieure. En d'autres termes, il faut toujours s'assurer que l'intervalle résultant contienne les valeurs minimale et maximale de n'importe quelle combinaison d'éléments des intervalles de départ.

Le même principe est utilisé lorsque des fonctions sont appliquées aux intervalles. Si la fonction est monotone, c'est-à-dire qu'elle croît ou décroît constamment, on applique simplement la fonction aux scalaires des bornes de l'intervalle. Dans le cas d'une fonction monotone décroissante il faut inverser les bornes. Les exemples suivants illustrent ces deux types de fonctions monotones :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 4, \\ F[a; b] &= [3a + 4; 3b + 4], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -e^x, \\ G[a; b] &= [-e^b; -e^a], \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $f(x)$  est une fonction monotone croissante et  $g(x)$  une fonction monotone décroissante.

Les fonctions non-monotones, comme  $\sin x$  ou  $x^2$  par exemple, sont un peu plus complexes à appliquer aux intervalles. En effet, il ne suffit plus seulement d'effectuer les opérations aux bornes de l'intervalle, il faut également vérifier si les valeurs minimale

et maximale se trouvent à l'intérieur de l'intervalle. En d'autres termes, il faut analyser la fonction pour savoir si elle comporte des extrema locaux pour ensuite vérifier si ces extrema se trouvent dans l'intervalle évalué. Pour faciliter cette tâche, des logiciels de calcul comme Maple et MATLAB, avec une bibliothèque de fonctions appropriée<sup>1</sup>, peuvent solutionner des analyses par intervalles pour une variété de fonctions.

Lorsqu'une fonction est composée de plusieurs sous-fonctions, l'extension naturelle est utilisée. Cette méthode consiste à évaluer chaque sous-fonction pour ensuite ramener le tout à la fonction globale. L'extension naturelle résultera cependant souvent en un intervalle plus grand que nécessaire. Ceci s'explique par le fait que cette méthode considère chaque variable comme étant indépendante. Donc même si un intervalle apparaît à plusieurs reprises dans la fonction, il est vu comme étant différent à chaque fois. L'exemple de la fonction  $h(x) = \frac{x}{x} = 1$  démontre bien ce fait. On pose pour cette démonstration que les scalaires  $a$  et  $b$  sont positifs et différents de zéro avec  $a < b$ .

$$H[a; b] = \left[ \frac{a}{b}; \frac{b}{a} \right] \quad (4.7)$$

Puisque  $a$  est plus petit que  $b$ , on sait que le ratio  $\frac{a}{b}$  est plus petit que 1 et donc que  $\frac{b}{a}$  est plus grand que 1. Bien qu'il contienne bel et bien la valeur 1, l'intervalle résultant couvre une étendue plus large.

L'extension naturelle ajoute un facteur important à considérer lors des analyses par intervalles. En effet, la forme des expressions joue maintenant un rôle dans la précision de l'intervalle résultant puisqu'à chaque fois qu'une même variable apparaît dans une fonction, elle est considérée comme indépendante. Il faut donc simplifier l'expression à analyser afin que les variables soient présentes le moins de fois possible. Malgré la simplification, il arrive qu'une variable apparaisse plus d'une fois dans une fonction, il ne faut donc pas oublier que l'intervalle final peut être surestimé.

## 4.2 Méthode d'analyse par intervalles

Tel que mentionné précédemment, l'analyse par intervalles consiste à séparer l'espace en boîtes sur lesquelles sera évaluée une certaine condition. Dans le cas présent, on

---

<sup>1</sup>La bibliothèque *intpakX* [1] est disponible pour le logiciel Maple et *intlab* [14] est son équivalent pour le logiciel MATLAB.

vérifie si la valeur du déterminant est différente de zéro. Les boîtes sont formées avec l'intervalle du vecteur position  $\mathbf{p}$ , qui est défini par un intervalle en  $x$ , un en  $y$  et un en  $z$ . En insérant l'intervalle de  $\mathbf{p}$  dans l'expression (3.40) on obtient une plage de valeurs pour le déterminant. Si la borne supérieure est plus petite que zéro ou que la borne inférieure est plus grande que zéro, on peut conclure que le déterminant n'est pas nul pour cet intervalle, ce qui signifie que cet espace est libre de singularité et que ce résultat est garanti. Par contre, si zéro est compris dans l'intervalle, il faut diviser la boîte en deux afin de préciser l'analyse. Le diagramme de la figure 4.1 illustre bien l'algorithme de l'analyse par intervalles appliqué au cas présent.

### 4.2.1 Initialisation

À cette étape, on attribue premièrement un espace mémoire pour les boîtes. Pour ce faire, on crée une matrice dans laquelle seront notées les bornes des boîtes ainsi qu'un vecteur où seront entrés les résultats de l'évaluation de la condition. Pour notre analyse, la matrice comporte trois colonnes, une pour chaque intervalle de  $\mathbf{p}$  ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ). Ensuite, on assigne un nombre maximal de boîtes ( $N_{max}$ ) qui limite la mémoire qu'utilise l'algorithme et qui influence aussi la précision de l'analyse. Finalement on crée une variable appelée « *compteur* » qui permet de pointer sur la boîte analysée ainsi qu'une nommée «  $N$  » qui indique le nombre de boîtes créées.

### 4.2.2 Évaluation

Avant l'étape de l'évaluation, on calcule l'intervalle du déterminant associé à la boîte analysée en utilisant l'équation

$$F(X) = [det_i; det_s], \quad (4.8)$$

où  $F(X)$  est la fonction définie par l'équation (3.40) appliquée à des intervalles,  $X$  comprend les bornes de  $\mathbf{p}$  en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  et  $det_i$  et  $det_s$  représentent respectivement les valeurs inférieure et supérieure du déterminant de  $\mathbf{J}''^T$ .

Maintenant que l'intervalle résultant est connu, on vérifie si la valeur de zéro est comprise dans celui-ci. Si ce n'est pas le cas, on peut passer directement à l'étape de

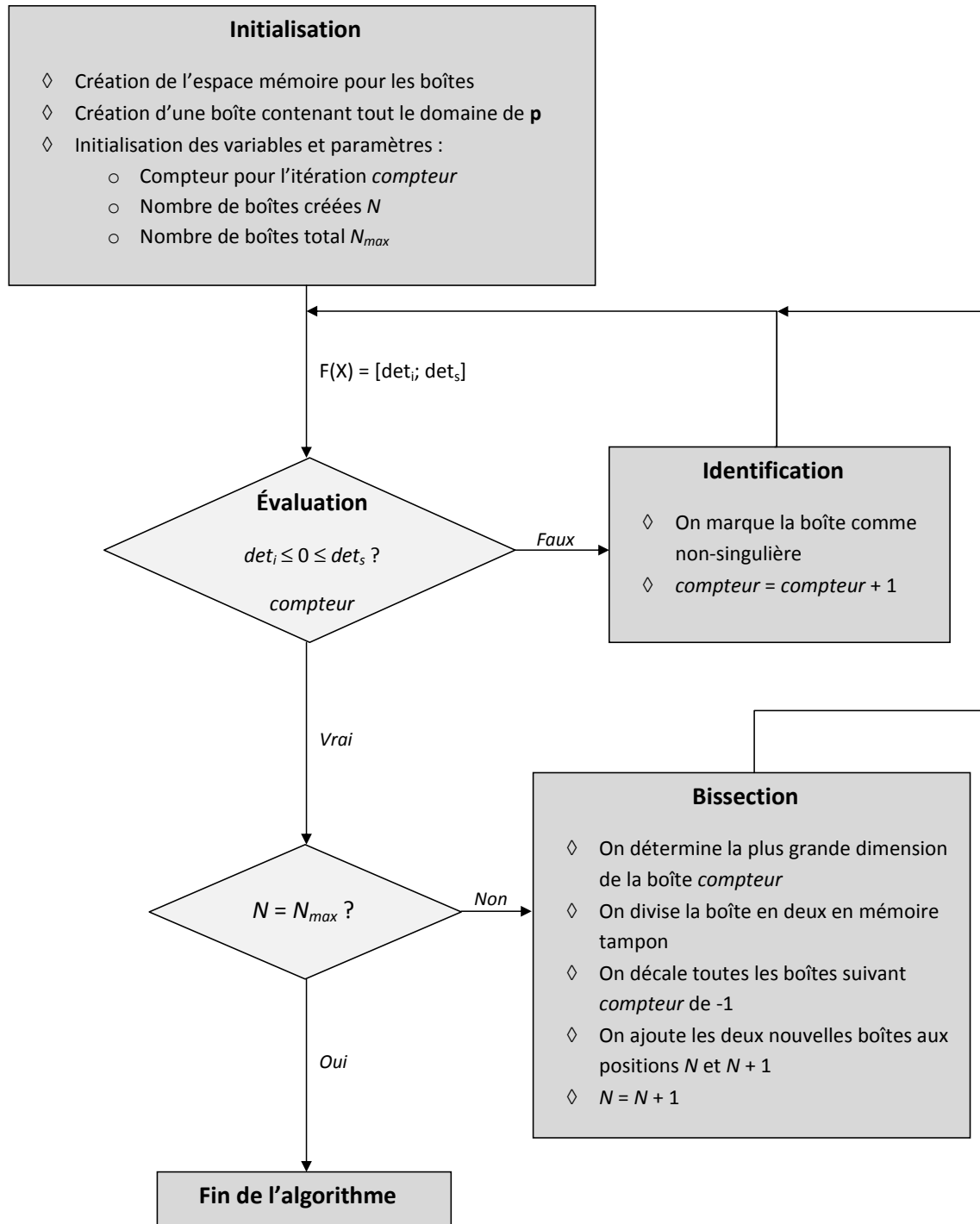


FIG. 4.1 – Algorithme de l'analyse par intervalles du déterminant de la plate-forme de Gough-Stewart.

l'identification où la boîte sera marquée comme non-singulière. Sinon, on doit procéder à la bisection à condition que le nombre de boîtes ( $N$ ) soit inférieur au nombre maximal ( $N_{max}$ ) fixé à l'étape de l'initialisation.

### 4.2.3 Bisection

Cette étape permet d'améliorer la précision de l'analyse en divisant une boîte en deux boîtes de même taille selon son côté le plus long ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ). Il est important dans notre cas que les unités des intervalles soient les mêmes afin que la bisection se fasse sur le bon côté. Les deux plus petites boîtes nouvellement créées sont décalées à la fin de la liste, afin que les plus grandes boîtes soient analysées en premier.

## 4.3 Résultats d'analyse

### 4.3.1 Plate-forme de Gough-Stewart générale

Afin de démontrer la méthode de l'analyse par intervalles appliquée à une plate-forme de Gough-Stewart générale, le manipulateur illustré à la figure 4.2 est utilisé. On constate que la base et la plate-forme sont bel et bien de géométrie quelconque et que ni l'une ni l'autre n'est plane. Les deux points d'attache marqués d'un carré représentent chacun l'origine d'un des repères.

Les coordonnées des points d'attache sur la base et sur la plate-forme sont données dans le tableau 4.1. Les positions des points  $B_i$  sont données par rapport au repère de la base,  $\mathcal{R}$ , et celles des points  $A_i$  par rapport à celui de la plate-forme,  $\mathcal{R}'$ . Puisqu'ici l'orientation est posée constante, les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont directement obtenus avec ces coordonnées.

On remarque que les points  $A_1$  et  $B_1$  sont posés à l'origine de chacun des repères de référence tel que requis pour l'utilisation de l'équation (3.40).

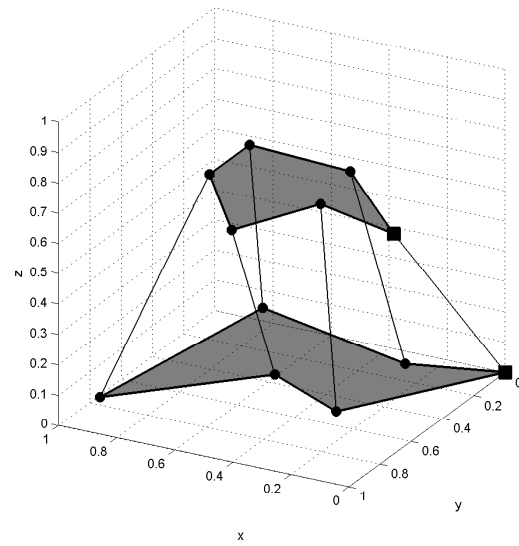


FIG. 4.2 – Plate-forme de Gough-Stewart analysée.

TAB. 4.1 – Points d'attache sur la base et sur la plate-forme (Plate-forme de Gough-Stewart).

Point d'attache	Coordonnées (m)		
	$x$	$y$	$z$
$A_1$	0,00	0,00	0,00
$A_2$	0,09	0,11	0,23
$A_3$	0,41	0,16	0,27
$A_4$	0,50	0,25	0,19
$A_5$	0,38	0,33	0,06
$A_6$	0,16	0,17	0,13
$B_1$	0,00	0,00	0,00
$B_2$	0,21	0,25	0,08
$B_3$	0,76	0,14	0,11
$B_4$	0,96	0,81	0,03
$B_5$	0,53	0,49	0,07
$B_6$	0,20	0,71	0,10

La figure 4.3 montre le résultat d'une analyse par intervalles des lieux de singularité du manipulateur illustré à la figure 4.2 en utilisant l'équation (3.40). Le nombre de boîtes maximales ( $N_{max}$ ) a été fixé à 10 000 et l'espace étudié est un cube dont les limites sont définies par l'intervalle  $[-1; 2]$  en  $x$ , en  $y$  et en  $z$ . Les courbes grises représentent les lieux de singularité, les boîtes vertes sont des espaces libres de singularité et celles qui sont rouges sont celles dans lesquelles l'intervalle du déterminant comprend la valeur zéro.

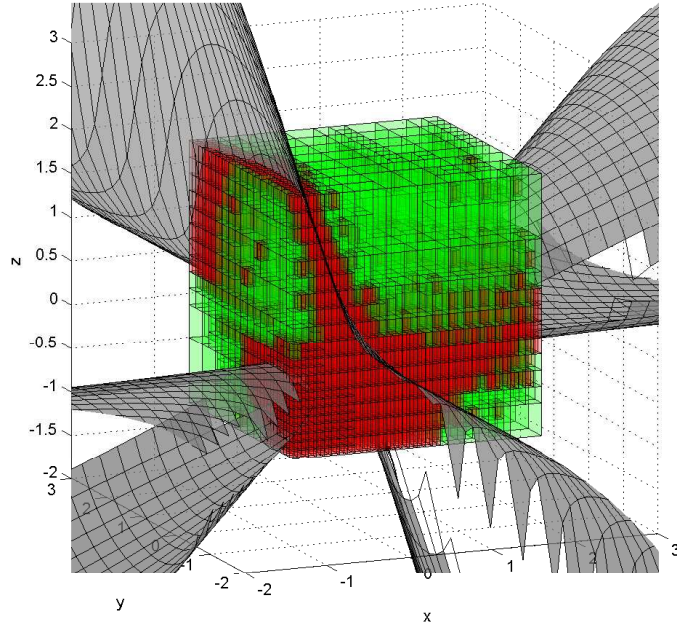


FIG. 4.3 – Résultat d'analyse par intervalles - Plate-forme de Gough-Stewart avec 10 000 boîtes.

La précision de l'analyse peut être améliorée en augmentant le nombre de boîtes maximal tel que démontré par la figure 4.4. En effet, cette image est le résultat d'une analyse par intervalles effectuée avec les mêmes paramètres que celle illustrée par la figure 4.3 excepté pour le nombre maximal de boîtes  $N_{max}$  qui est de 20 000.

On constate que l'espace occupé par des boîtes vertes est plus grand pour la seconde analyse. En effet, le volume libre de singularité relatif est passé de 49,4% à 55,7%. Cependant, le temps de calcul dans Maple a triplé pour le double de boîtes.



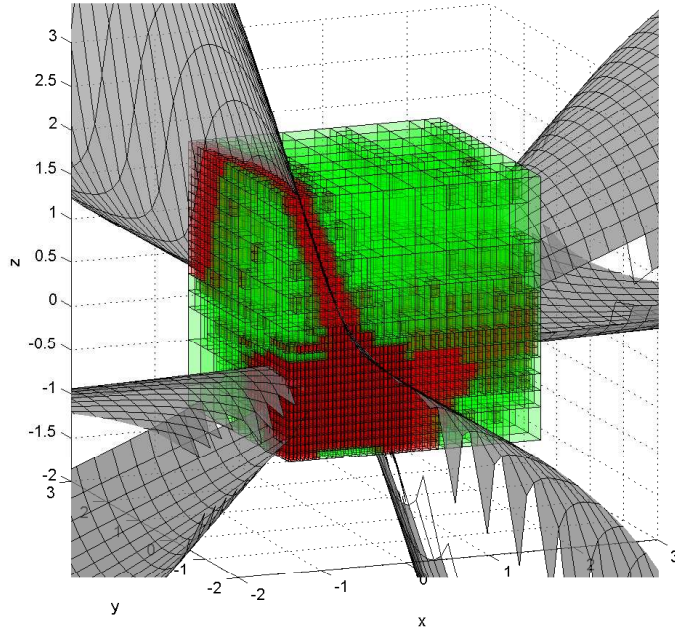


FIG. 4.4 – Résultat d’analyse par intervalles Plate-forme de Gough-Stewart avec 20 000 boîtes.

Tel que mentionné à la section 4.1, la forme de l’expression utilisée dans l’analyse par intervalles influence les résultats. Afin de démontrer cette affirmation, les figures 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 sont produites. Ces images résultent d’analyses aux paramètres identiques, excepté pour la forme de l’expression du déterminant. Le nombre maximal de boîtes  $N_{max}$  est fixé à 10 000 et la section analysée est limitée par les bornes  $[-0,5 ; 0,5]$  en  $x$ ,  $[-0,5 ; 0,5]$  en  $y$  et  $[0 ; 1]$  en  $z$ . L’expression simplifiée est celle décrite à l’équation (3.38), l’expression plus simplifiée est donnée par l’équation (3.40), l’expression non-simplifiée est définie comme suit :

$$\det(\mathbf{J}^{TT}) = \mathbf{p}^T \mathbf{v}_0 + \mathbf{p}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}_1 \mathbf{p}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}_2 \mathbf{p}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}_3 \mathbf{p}^T \mathbf{M}_3 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}_4 \mathbf{p}^T \mathbf{M}_4 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}_5 \mathbf{p}^T \mathbf{M}_5 \mathbf{p} \quad (4.9)$$

et l’expression «simplify» est obtenue en utilisant la fonction «simplify» dans Maple afin de regrouper les scalaires résultants de l’équation (3.40). Cette dernière donne une expression similaire à celle de l’équation (2.9).

On remarque que les différentes formes d’expressions utilisées donnent des résultats différents, excepté pour l’expression simplifiée et l’expression plus simplifiée qui

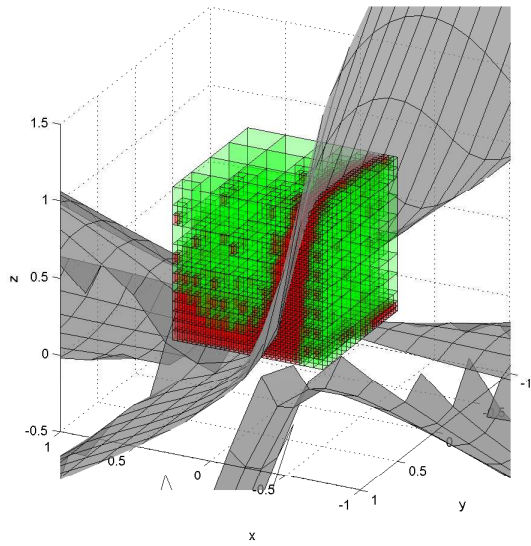


FIG. 4.5 – Expression simplifiée (Plateforme de Gough-Stewart, exemple 1).

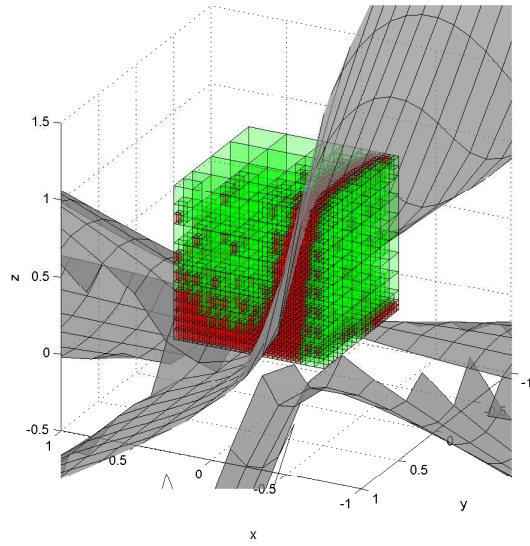


FIG. 4.6 – Expression plus simplifiée (Plateforme de Gough-Stewart, exemple 1).

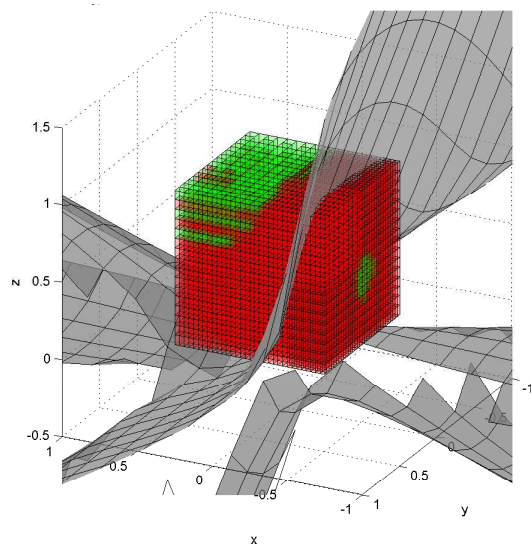


FIG. 4.7 – Expression non-simplifiée (Plateforme de Gough-Stewart, exemple 1).

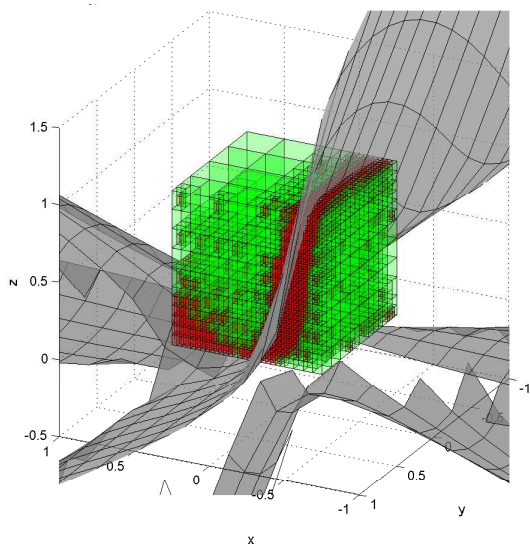


FIG. 4.8 – Expression «simplify» (Plateforme de Gough-Stewart, exemple 1).

conduisent à des résultats identiques. Les volumes libres de singularité relatifs sont donnés dans le tableau 4.2. En ce qui concerne les temps de calcul, l'expression simplifiée, plus simplifiée et «simplify» sont similaires alors que l'expression non-simplifiée demande presque trois fois plus de temps.

TAB. 4.2 – Volumes libres de singularité relatifs (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 1).

Expression			
Simplifiée	Plus simplifiée	Non-simplifiée	«Simplify»
65,9%	65,9%	15,0%	67,5%

On peut donc affirmer que la forme de l'expression du déterminant utilisée influence bel et bien les résultats de l'analyse par intervalle. Avec l'exemple proposé, on pourrait aussi conclure que l'expression «simplify» donne un meilleur résultat que les autres, mais ceci n'est pas forcément vrai en général. En effet, il y a d'autres facteurs qui influencent les résultats de l'analyse par intervalles et l'exemple suivant le démontre bien.

On analyse le même manipulateur, mais cette fois la section d'intérêt est le cube formé de l'intervalle  $[-1 ; -0,5]$  en  $x$ , en  $y$  et en  $z$ . En limitant encore le nombre de boîtes maximal à 10 000, on obtient les résultats illustrés aux figures 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12. Les volumes libres de singularité relatifs ainsi trouvés sont donnés dans le tableau 4.3.

TAB. 4.3 – Volumes libres de singularité relatifs (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2).

Expression			
Simplifiée	Plus simplifiée	Non-simplifiée	«Simplify»
53,3%	53,3%	1,35%	43,2%

On constate donc que cette fois-ci, l'expression «simplify» ne donne pas le meilleur résultat. De plus, on pourrait être tenté de conclure que l'expression non-simplifiée donne toujours le moins bon résultat, mais cette affirmation s'avère fautive tel que démontré à la section 4.3.2 avec un exemple de manipulateur de type MSSM. La seule conclusion que l'on peut tirer de ces analyses est que l'expression simplifiée (3.38) et

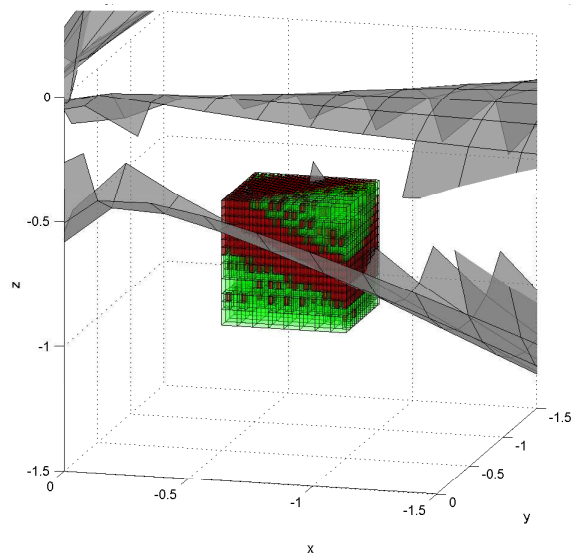


FIG. 4.9 – Expression simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2).

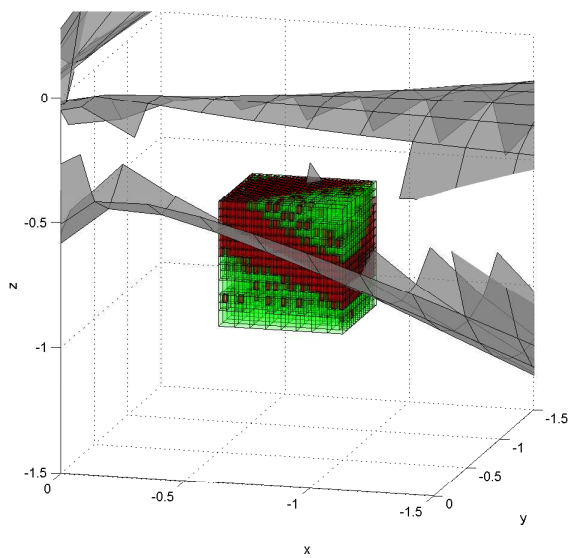


FIG. 4.10 – Expression plus simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2).

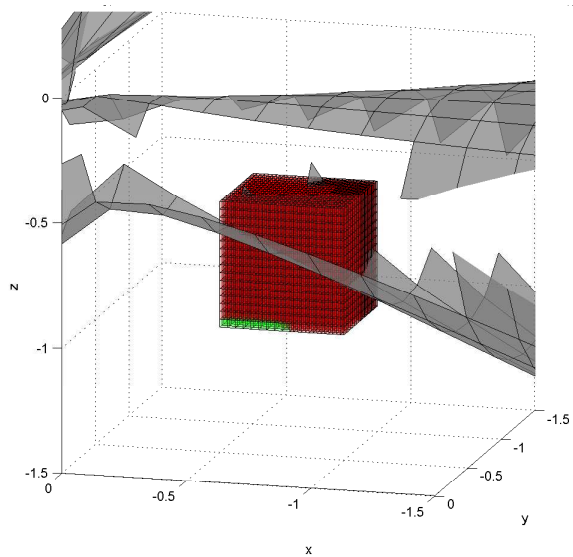


FIG. 4.11 – Expression non-simplifiée (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2).

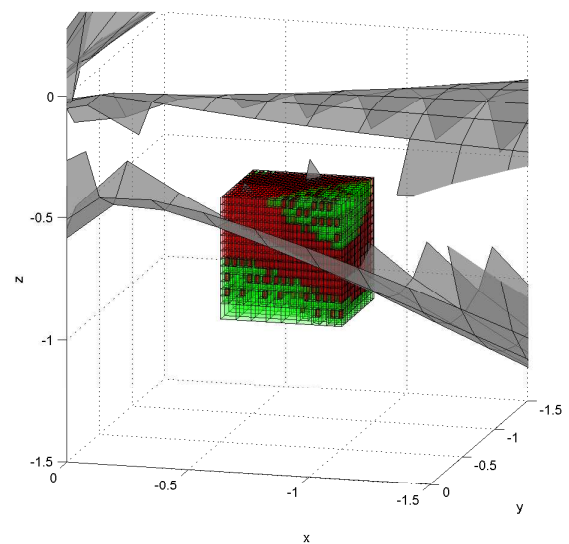


FIG. 4.12 – Expression «simplify» (Plate-forme de Gough-Stewart, exemple 2).

l'expression plus simplifiée (3.40) donnent des résultats identiques. En d'autres termes, le fait de factoriser le vecteur  $\mathbf{p}$  à l'aide de la matrice  $\mathbf{P}$  n'influence pas la précision pour une analyse par intervalles.

#### 4.3.1.1 Comparaison des intervalles

Une autre manière de qualifier la précision d'une analyse par intervalles est d'évaluer la largeur de l'intervalle résultant pour un intervalle donné du domaine de la fonction. C'est dans cet ordre d'idées que sont comparées les largeurs des intervalles résultants de chaque expression à la figure 4.13. Par définition, la largeur de l'intervalle est la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure.

Ces graphiques sont obtenus en effectuant une analyse par intervalles sur une boîte dont les dimensions varient selon la variable  $k$ . Dans le cas présent, le cube initial est défini par l'intervalle  $[0; 1]$  en  $x$ , en  $y$  et en  $z$ . La borne inférieure initiale reste fixe et la borne supérieure varie avec  $k$  selon l'équation suivante :

$$b' = a + kb, \quad (4.10)$$

où  $b'$  est la nouvelle borne supérieure,  $a$  est la borne inférieure initiale et  $b$  est la borne supérieure initiale.

Afin de bien analyser l'effet des dimensions de la boîte sur la largeur de l'intervalle résultant, on effectue cette opération dans tous les octants. Pour ce faire, on soustrait  $kb$  à  $a$  et on inverse les bornes pour les sections négatives respectives des octants. Dans le titre des graphiques, on voit entre parenthèses trois signes positifs (+) ou négatifs (-) qui indiquent respectivement le signe de l'axe des abscisses, de l'axe des ordonnées et l'axe des  $z$  pour indiquer dans quel octant l'analyse a été faite.

On évalue ensuite la plage de valeurs du déterminant pour ce nouvel intervalle avec les quatre équations présentées précédemment pour finalement mesurer la largeur de chaque intervalle résultant.

On remarque sur les graphiques présentés à la figure 4.13 que l'écart entre les courbes augmente avec la valeur de  $k$ . Ces graphiques montrent également que l'expression «simplify» donne la meilleure précision tandis que l'expression non-simplifiée donne la pire. Cependant, l'exemple suivant contredit cette affirmation.

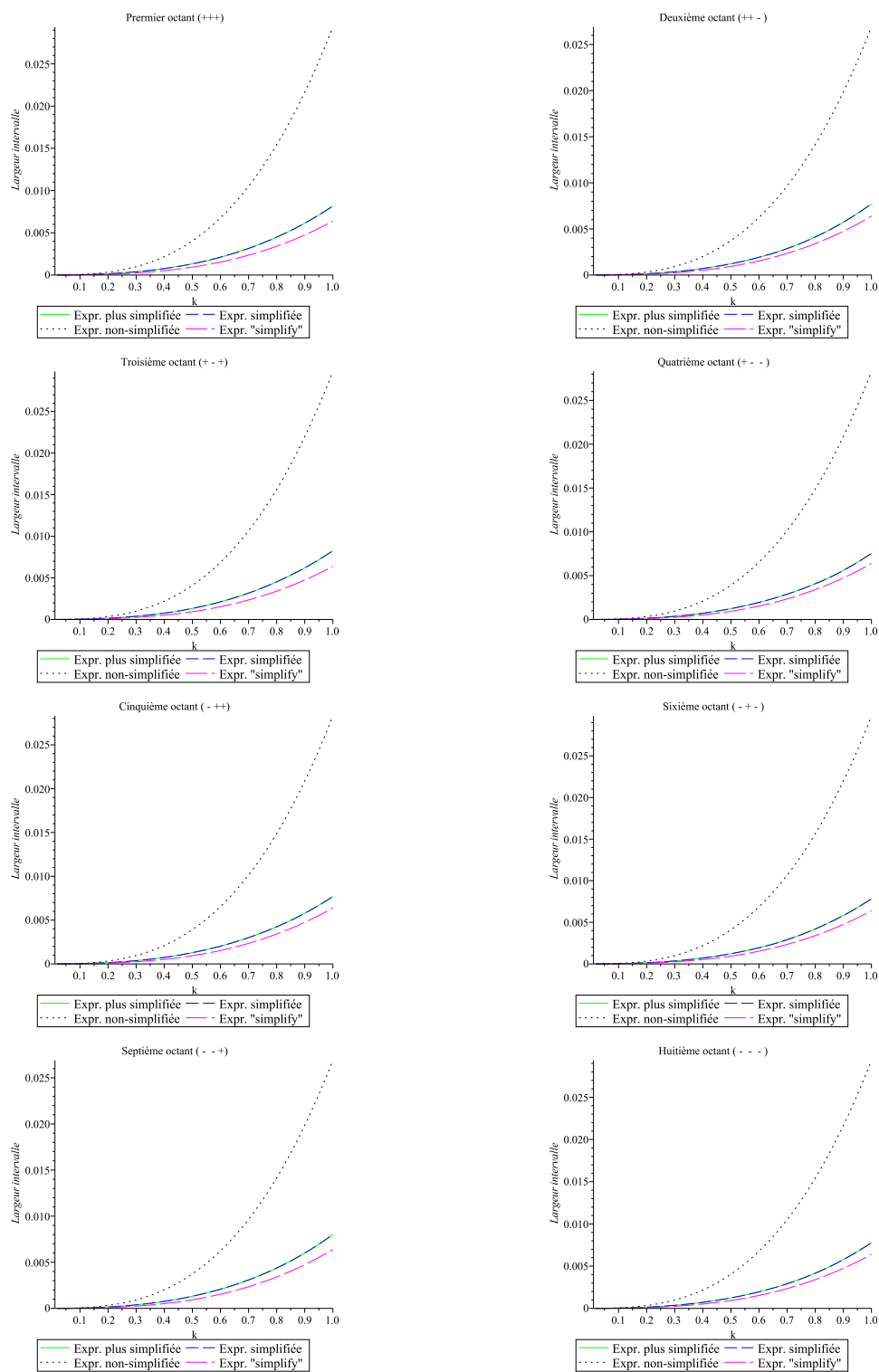


FIG. 4.13 – Comparaison intervalles plate-forme de Gough-Stewart (exemple 1).

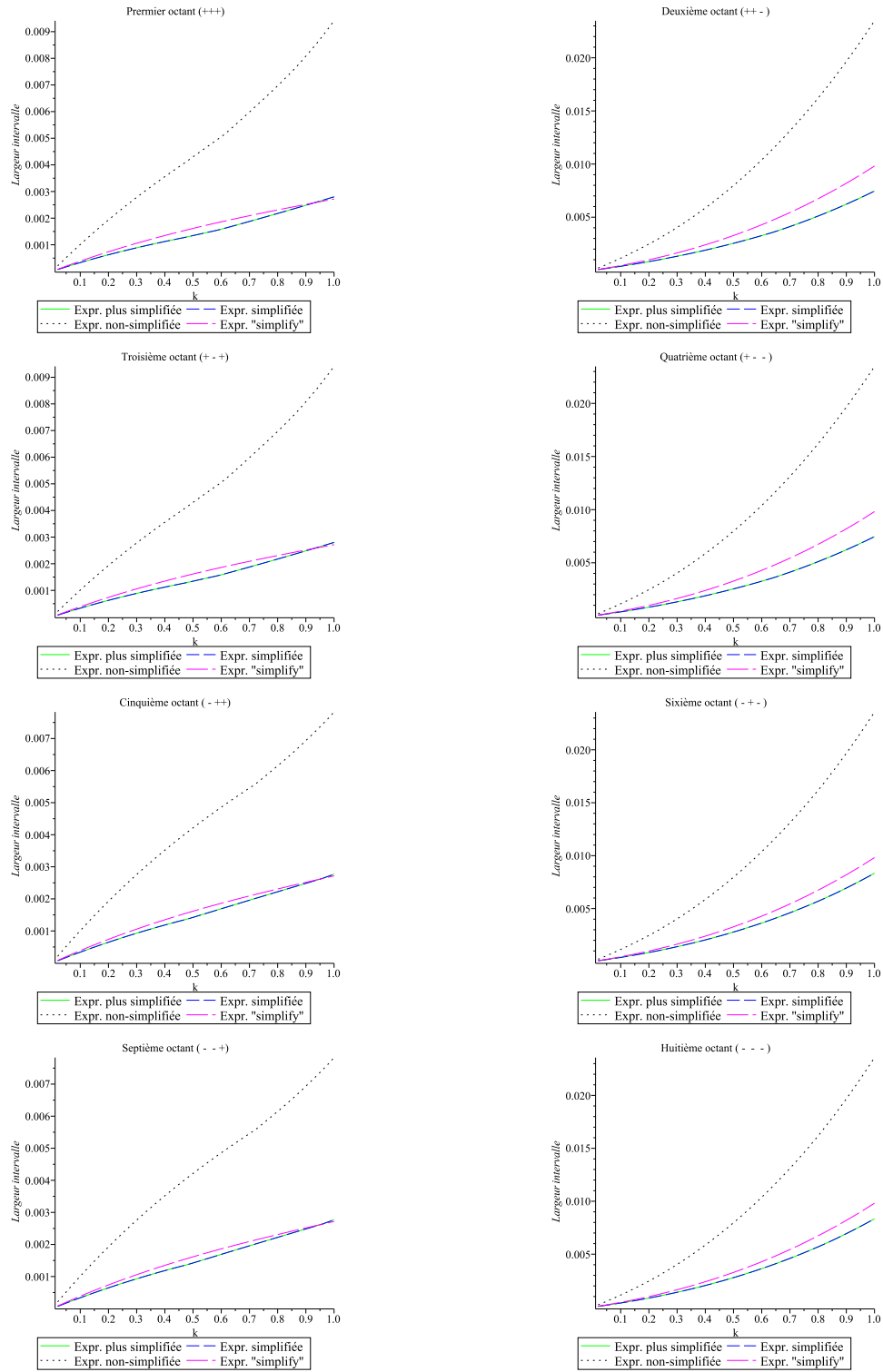


FIG. 4.14 – Comparaison intervalles plate-forme de Gough-Stewart (exemple 2).

La figure 4.14 illustre les mêmes graphiques que la figure 4.13, mais la boîte initiale est maintenant définie par les intervalles  $[0; 0,5]$  en  $x$ ,  $[-0,5; 0]$  en  $y$  et  $[-1; 1]$  en  $z$ . On constate désormais que les expressions simplifiée et plus simplifiée peuvent aussi donner une meilleure précision que l'expression «simplify». Les graphiques des premier, troisième, cinquième et septième octants montrent également que selon l'intervalle analysé, ce n'est pas toujours la même expression qui reste la plus précise puisque les courbes des expressions simplifiée, plus simplifiée et «simplify» se croisent. On remarque encore que les courbes s'éloignent lorsque la valeur de  $k$  augmente.

### 4.3.2 MSSM

Les analyses faites avec la plate-forme de Gough-Stewart présentée à la figure 4.2 sont maintenant effectuées pour un manipulateur de type MSSM. La configuration étudiée est illustrée à la figure 4.15 et ses coordonnées sont données au tableau 4.4.

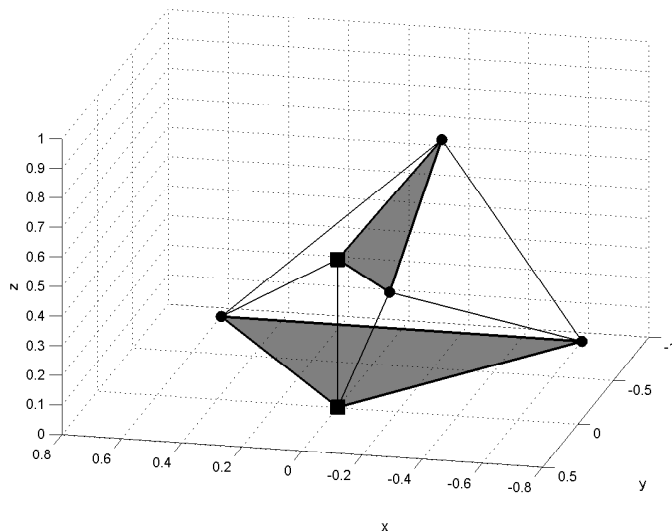


FIG. 4.15 – Plate-forme de type MSSM analysée.

Comme dans le cas de la plate-forme de Gough-Stewart analysée à la section 4.3.1, les coordonnées des points  $A_i$  et  $B_i$  sont directement utilisées dans les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$ . On remarque que pour une architecture de type MSSM, les points d'attache



TAB. 4.4 – Points d’attache sur la base et sur la plate-forme (MSSM).

Point d’attache	Coordonnées (m)		
	x	y	z
$A_1$	0,00	0,00	0,00
$A_2$	0,00	0,00	0,00
$A_3$	-0,24	-0,45	0,29
$A_4$	-0,24	-0,45	0,29
$A_5$	-0,21	0,16	-0,05
$A_6$	-0,21	0,16	-0,05
$B_1$	0,00	0,00	0,00
$B_2$	0,60	-0,90	0,00
$B_3$	0,60	-0,90	0,00
$B_4$	-0,60	-0,90	0,00
$B_5$	-0,60	-0,90	0,00
$B_6$	0,00	0,00	0,00

sont regroupés deux par deux sur la base et sur la plate-forme. De plus, dans le but d’utiliser l’équation (3.45), les points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_6$  sont posés à l’origine de leur repère respectif.

On effectue maintenant une analyse par intervalles sur ce manipulateur en appliquant l’équation (3.45) aux intervalles. La figure 4.16 est le résultat d’une analyse de 10 000 boîtes effectuée sur l’espace délimité par les intervalles  $[-1; 1]$  en  $x$ ,  $[-2; 1]$  en  $y$  et  $[-1; 2]$  en  $z$ .

On compare ensuite ce résultat avec celui qui est obtenu en doublant le nombre de boîtes  $N_{max}$ , illustré à la figure 4.17. On constate que le volume occupé par les boîtes vertes est plus grand pour cette deuxième analyse. En effet, le volume libre de singularité relatif est de 56,1% pour l’analyse à 10 000 boîtes et de 61,6% avec 20 000 boîtes. Tout comme dans le cas du manipulateur d’architecture quelconque présenté précédemment, le temps de calcul dans Maple est environ trois fois plus grand pour l’analyse à 20 000 boîtes que pour celle à 10 000 boîtes.

Les figures 4.18, 4.19 et 4.20 montrent l’effet de la forme de l’expression utilisée pour le déterminant sur une analyse par intervalles. La section analysée est le cube délimité

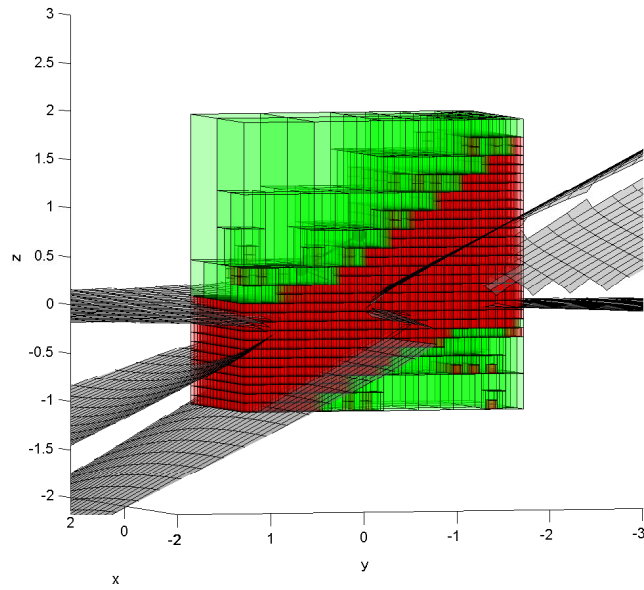


FIG. 4.16 – Résultat d'analyse par intervalles - MSSM avec 10 000 boîtes.

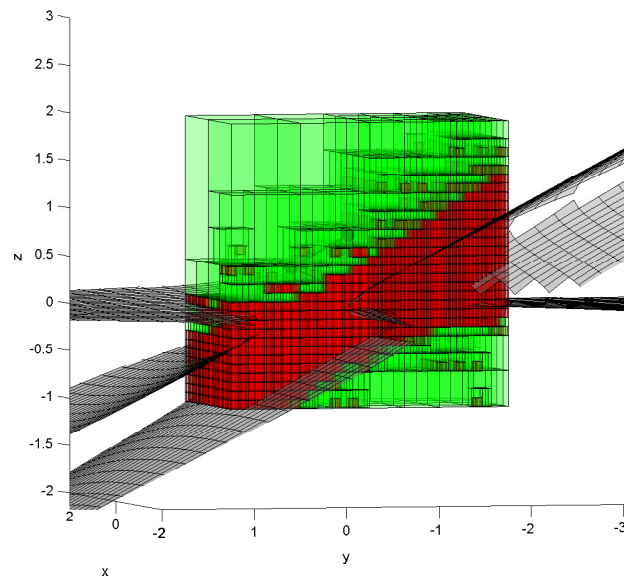


FIG. 4.17 – Résultat d'analyse par intervalles - MSSM avec 20 000 boîtes.

par  $[-0,5; 0,5]$  en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  et le nombre maximal de boîtes est de 10 000.

Tel qu'expliqué à la section 3.4.2, une expression comme l'équation (3.40) n'est pas nécessaire pour un manipulateur de type MSSM, c'est pourquoi l'expression plus simplifiée n'est pas comparée ici. L'expression non-simplifiée, quant à elle, s'exprime dans ce cas sous la forme :

$$\det(\mathbf{J}''^T) = \mathbf{p}^T \mathbf{v}'_0 + \mathbf{p}^T \mathbf{M}'_0 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{v}'_1 \mathbf{p} \mathbf{M}'_1 \mathbf{p}. \quad (4.11)$$

Graphiquement on pourrait croire que l'expression «simplify» a un plus grand volume libre de singularité que l'expression non-simplifiée, mais ce n'est pas le cas, tel que le démontre le tableau 4.5. Par contre, le nombre de boîtes libres de singularité est plus grand dans le cas de l'expression «simplify» que celle non-simplifiée. Somme toute, ces deux notations donnent une précision assez similaire pour cette analyse, mais c'est l'expression simplifiée qui est la plus précise. Contrairement au cas de la plate-forme analysée à la section 4.3.1, le temps de calcul est similaire pour les trois notations.

TAB. 4.5 – Volumes libres de singularité relatifs (MSSM, exemple 1).

Expression		
Simplifiée	Non-simplifiée	«Simplify»
51,5%	36,7%	35,1%

L'exemple illustré aux figures 4.21, 4.22 et 4.23 est le résultat d'une analyse par intervalles de 10 000 boîtes faite sur la section délimitée par  $[0; 0,5]$  en  $x$ ,  $[-1,25; -0,75]$  en  $y$  et  $[0; 0,5]$  en  $z$ . Les volumes libres de singularité relatifs obtenus sont donnés dans le tableau 4.6.

TAB. 4.6 – Volumes libres de singularité relatifs (MSSM, exemple 2).

Expression		
Simplifiée	Non-simplifiée	«Simplify»
3,3%	6,36%	1,37%

On constate que contrairement à tous les cas précédents, l'expression non-simplifiée donne la meilleure précision. Ce fait va à l'encontre de la théorie des analyses par

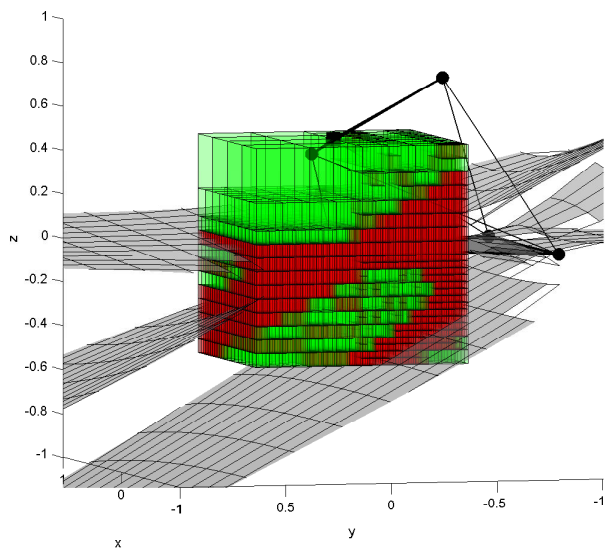


FIG. 4.18 – Expression simplifiée (MSSM, exemple 1).

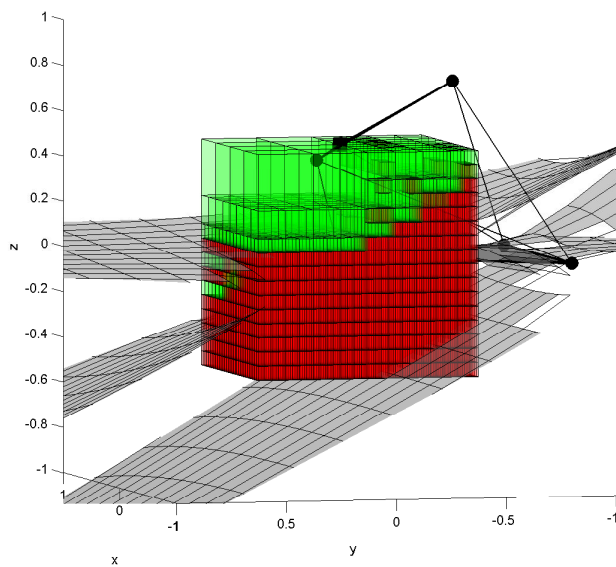


FIG. 4.19 – Expression non-simplifiée (MSSM, exemple 1).

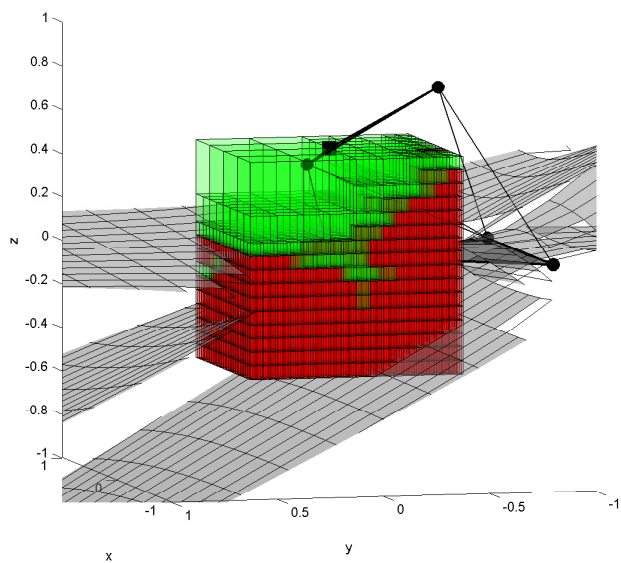


FIG. 4.20 – Expression «simplify» (MSSM, exemple 1).

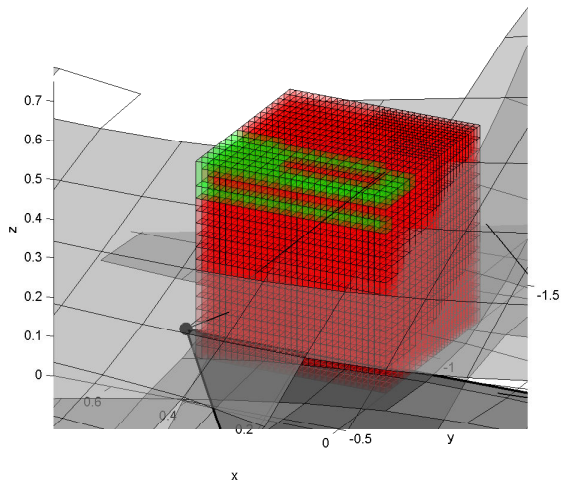


FIG. 4.21 – Expression simplifiée (MSSM, exemple 2).

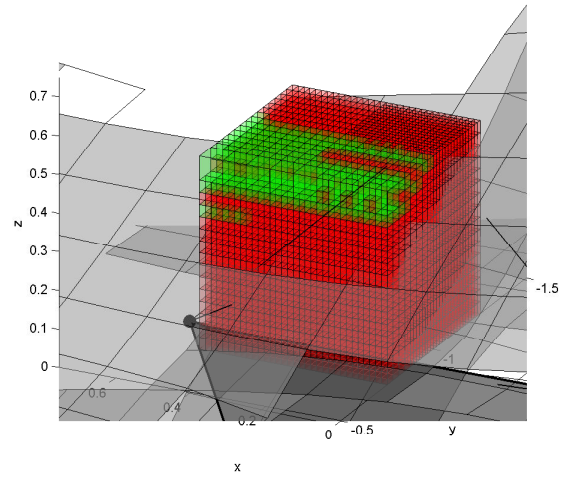


FIG. 4.22 – Expression non-simplifiée (MSSM, exemple 2).

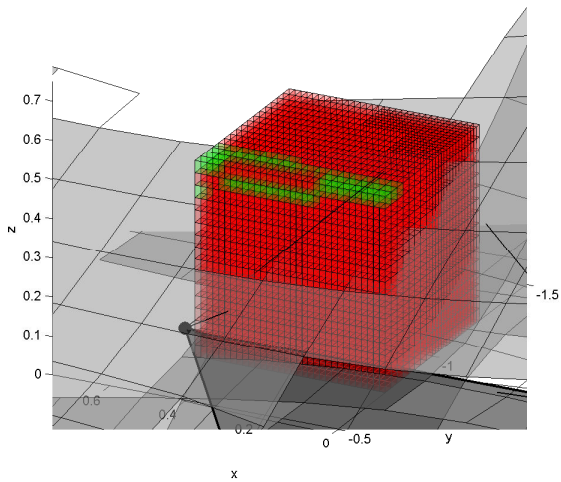


FIG. 4.23 – Expression «simplify» (MSSM, exemple 2).

intervalles qui stipule qu'une expression doit être factorisée le plus possible pour donner de meilleurs résultats. Tout comme dans le cas de l'analyse précédente, les temps de calculs sont similaires peu importe l'expression utilisée.

#### 4.3.2.1 Comparaison des intervalles

On effectue sur le modèle de MSSM les mêmes analyses que celles décrites à la section 4.3.1.1. La figure 4.24 montre les résultats d'une analyse dont la boîte initiale est le cube délimité par l'intervalle  $[0; 1]$  dans les trois directions.

On remarque sur ces graphiques que l'expression «simplify» donne les intervalles les moins larges dans la moitié des octants alors que l'expression simplifiée les donne dans l'autre moitié. Cette observation confirme qu'il n'y a pas seulement la forme de l'expression qui influence la précision des résultats d'une analyse par intervalles.

On refait maintenant la même analyse en changeant la boîte initiale pour celle délimitée par  $[0; 0,5]$  en  $x$ ,  $[-1; 0,25]$  en  $y$  et  $[0; 0,5]$  en  $z$ . Les graphiques ainsi obtenus sont illustrés à la figure 4.25. On constate que pour les octants impairs, c'est l'expression non-simplifiée qui donne les intervalles les moins larges, ce qui concorde avec l'analyse illustrée aux figures 4.21, 4.22 et 4.23. Par contre, dans les autres octants, l'expression non-simplifiée donne la moins bonne précision. On remarque aussi sur les huit graphiques que l'écart entre les courbes augmente avec  $k$ .

## 4.4 Méthode alternative

Une méthode alternative est proposée par Hansen et Walster [11] pour évaluer le résultat d'une analyse par intervalles. Cette technique, basée sur l'expansion en séries de Taylor de la fonction étudiée, se résume par la relation suivante :

$$F(X) \subset f(x) + (X - x)F'(X'), \quad (4.12)$$

où  $F(X)$  est l'expression des lieux de singularité (simplifiée, plus simplifiée, non-simplifiée ou «simplify») appliquée aux intervalles,  $x$  est compris dans l'intervalle  $X$  et  $F'(X')$  est la dérivée de la fonction  $F(X)$ . Les intervalles  $X$  et  $X'$  sont identiques mais indépendants, c'est pourquoi ils sont notés différemment.

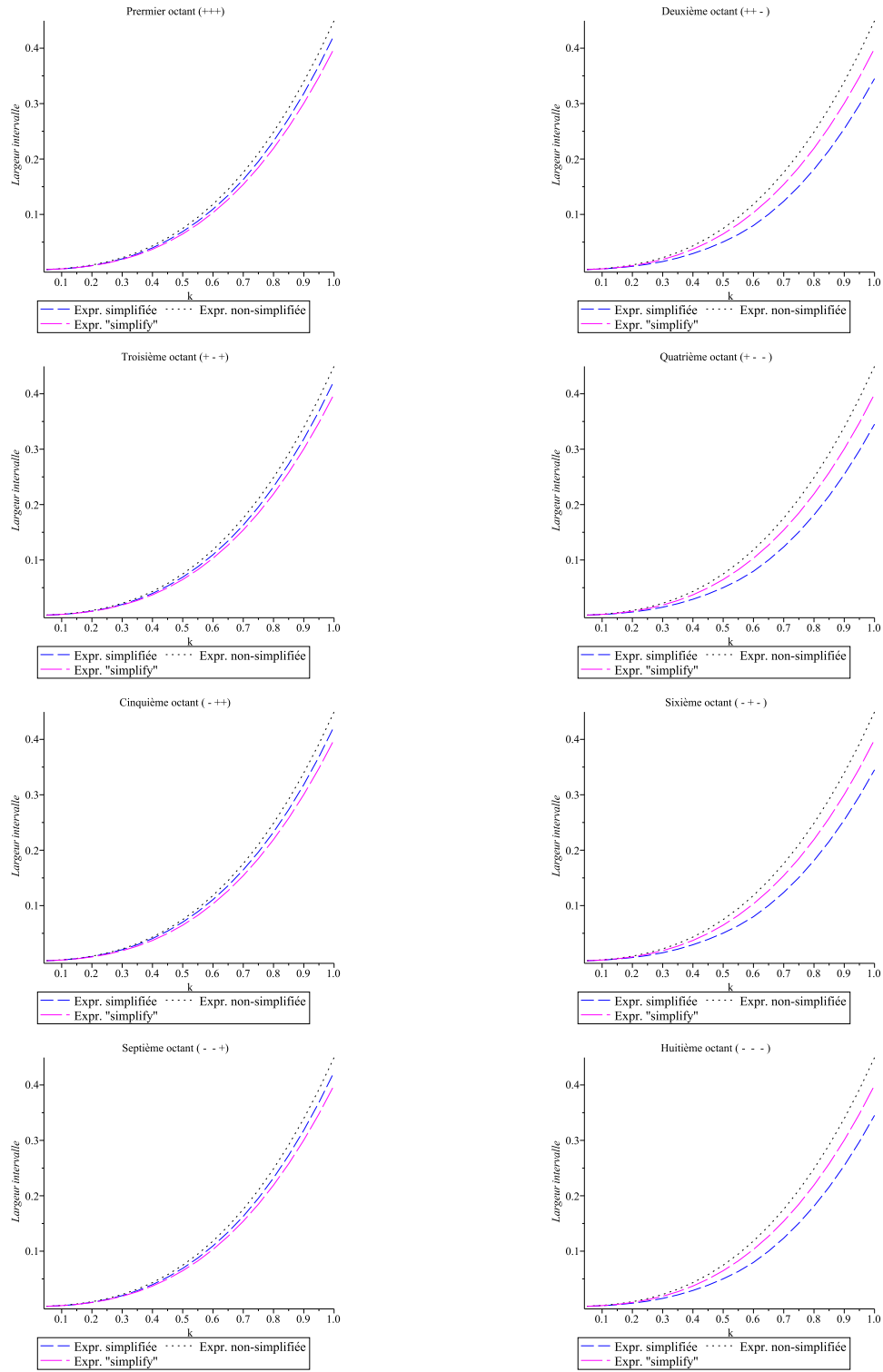


FIG. 4.24 – Comparaison intervalles MSSM (exemple 1).

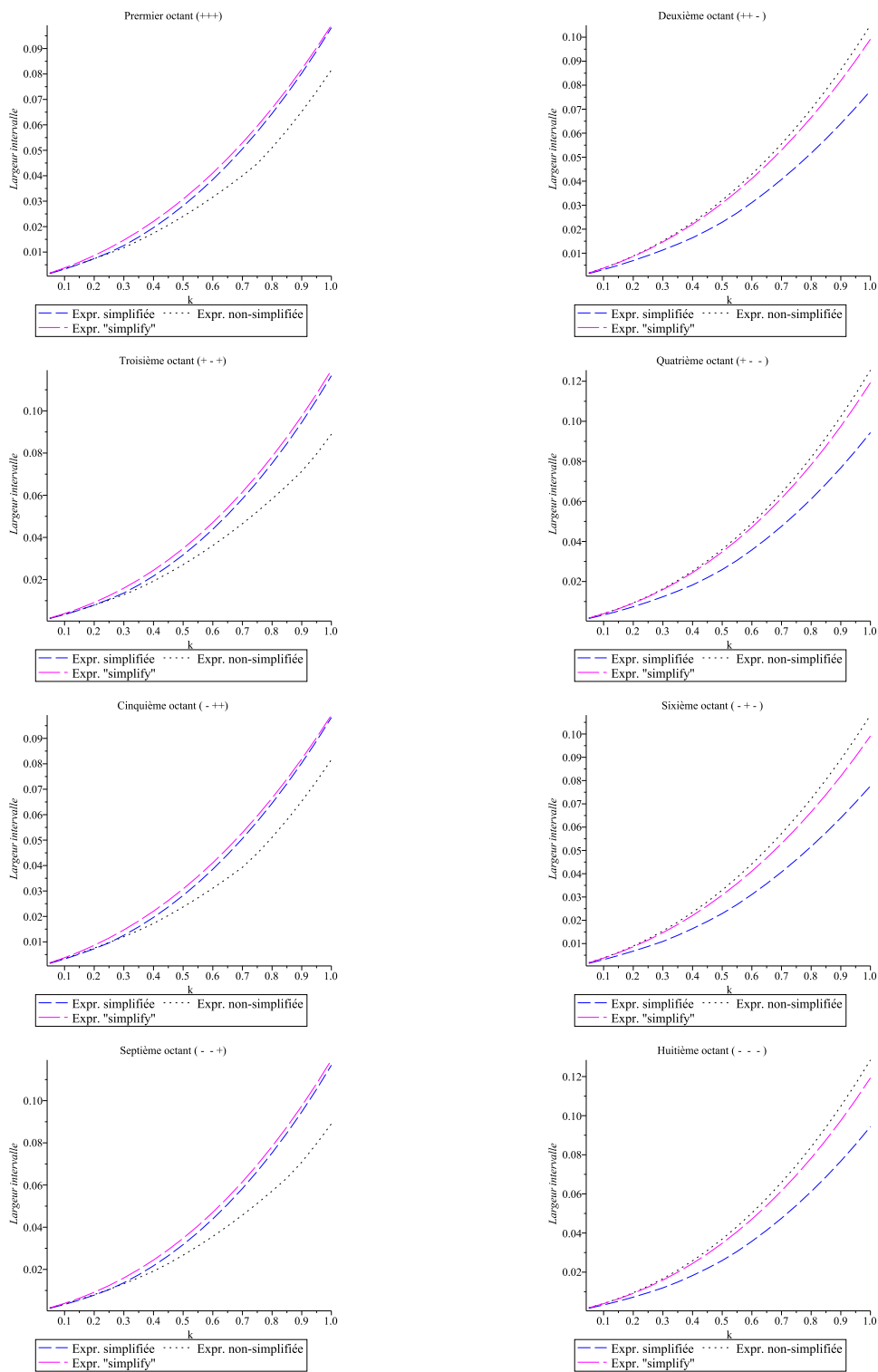


FIG. 4.25 – Comparaison intervalles MSSM (exemple 2).



L'intervalle résultant de la partie droite de l'équation (4.12) peut être moins large que celui obtenu avec des expressions présentées aux sections précédentes, mais ce n'est pas certain. En effet, il a été démontré précédemment que la forme de l'expression affecte la précision des résultats et donc l'expression de  $F'(X)$  l'influence également. C'est pourquoi, afin d'obtenir l'intervalle le plus précis possible, on prend l'intersection des intervalles obtenus de ces deux méthodes, i.e.

$$F(X) \cap f(x) + (X - x)F'(X'). \quad (4.13)$$

Cette méthode assure d'avoir l'intervalle résultant le plus précis possible, mais l'expression utilisée pour  $F(X)$  influence encore les résultats.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté la méthodologie des analyses par intervalles, en commençant par l'explication des opérations mathématiques appliquées aux intervalles. Cette méthode a ensuite été utilisée avec les expressions des lieux de singularité développées au chapitre précédent. Avec ces exemples numériques, on peut affirmer que la forme de l'expression des lieux de singularité influence bel et bien la précision des résultats de l'analyse par intervalles. Cependant, il n'est pas possible d'en identifier une qui serait la meilleure dans tous les cas. En effet, la forme la plus précise varie avec le type de manipulateur et la section analysés. Malgré cela, il est possible d'affirmer que l'expression de l'équation 3.40 donne les mêmes résultats d'analyse par intervalles que celle de l'équation 3.38. Les graphiques des figures 4.13, 4.14, 4.24 et 4.25 démontrent également que l'écart entre les largeurs des intervalles résultants des différentes expressions augmente avec la grandeur de la boîte analysée. Ce fait confirme qu'il est important de bien choisir l'expression à utiliser lors d'une analyse par intervalles. Finalement, une méthode d'analyse alternative a été brièvement expliquée.



# Conclusion

Tel que mentionné au Chapitre 2, l'objectif principal du projet de recherche consistait à exprimer mathématiquement les lieux de singularité pour une plate-forme de Gough-Stewart, mais de manière vectorielle. Pour ce faire, plusieurs changements ont été apportés à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  du manipulateur. En effet, l'expression des composantes de la matrice a d'abord été simplifiée afin de séparer les termes constants de ceux qui varient avec la position d'un point de l'effecteur donnée par le vecteur  $\mathbf{p}$ . La matrice a également été transposée dans le but d'exprimer ses colonnes en vecteurs. Par la suite, les repères respectifs ont été déplacés à un point d'attache de la base et de la plate-forme. Cette modification a permis de simplifier les vecteurs de la colonne associée à ces points d'attache. En effet, un de ces vecteurs est devenu nul suite à cette manipulation. Ensuite, cette colonne modifiée a été soustraite des autres dans le but d'éliminer la répétition du vecteur  $\mathbf{p}$ . Le déterminant de cette matrice ainsi obtenue est finalement évalué à l'aide du complément de Schur. Après quelques réarrangements et plusieurs simplifications, une expression vectorielle des lieux de singularité est enfin obtenue. Une définition du vecteur normal à la surface des lieux de singularité a également été dérivée à partir de cette expression et il a été démontré qu'une architecture de type MSSM peut réduire de manière significative l'ampleur de l'expression des lieux de singularité.

Dans le but de prouver l'intérêt d'une notation vectorielle de l'expression des lieux de singularité, des analyses par intervalles ont ensuite été menées. Puisque cette méthode n'est pas encore très répandue, elle a d'abord été expliquée. Par la suite, des exemples numériques sur deux plates-formes aux architectures différentes ont été illustrés. Ces démonstrations ont permis d'affirmer que la forme d'une expression analysée avec des intervalles influence la précision des résultats. Cependant, il a été clairement démontré qu'aucune conclusion ne peut être tirée en ce qui concerne l'expression qui donnerait la meilleure précision. En effet, en plus de la forme de l'expression, des facteurs comme la section et la configuration du manipulateur étudiés influencent la précision des résultats. Finalement, une méthode d'analyse alternative qui permet d'affiner les bornes des intervalles résultants a été brièvement expliquée.

Des travaux futurs qui complèteraient cette recherche pourraient étudier plus en profondeur l'impact de chacun des facteurs qui influencent la précision des résultats des analyses par intervalles. Ainsi, il serait peut-être possible d'associer certaines conditions avec une forme qui donnerait les résultats les plus précis à tout coup. L'aspect du vecteur normal à la surface des lieux de singularité donné à la fin du troisième chapitre pourrait également être étudié. Pour conclure, considérant que tous les développements de l'expression vectorielle ont été faits manuellement, il pourrait être utile d'avoir un logiciel de calculs qui permettrait de conserver une notation vectorielle sans développer les matrices et les vecteurs en scalaires.

# Bibliographie

- [1] Bergische Universität Wuppertal. *intpakX*, [En ligne]. <http://www2.math.uni-wuppertal.de/xsc/software/intpakX/> (Page consultée le 23 mars 2011)
- [2] Bonev, I.A., Zlatanov, D. et Gosselin, C.M. 2003. «Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory», *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 25, no 3, p. 573-581.
- [3] CAE. *Produits de simulation aéronautiques*, [En ligne]. <http://www.cae.com/fr/sim.products/home.asp> (Page consultée le 17 octobre 2011)
- [4] Cao, Y., Zhou, H., Ji, W., Liu, M. et Liu, X. 2010. «Orientation-Singularity and Orientation Capability Analysis of Stewart Platform Based on Unit Quaternion Representation». *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, p. 452-457.
- [5] Dietmaier, P. 1998. «The Stewart-Gough Platform of General Geometry Can Have 40 Real Postures». In *Advances in Robot Kinematics : Analysis and Control*, sous la dir. de Jordan Lenarcic et Manfred L. Husty, p. 7-16. Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.
- [6] Gosselin, C.M. 2009. «Chapitre 8 : Introduction à l'analyse par intervalles» In *Mécanique des manipulateurs (GMC-7015)*. Notes de cours, Québec : Département de génie mécanique, Université Laval, p. 177-191.

- [7] Gosselin, C.M. 2010. «Éléments de robotique (GMC-3351)». Notes de cours, Québec : Département de génie mécanique, Université Laval, 204 p.
- [8] Gosselin, C.M. et Angeles, J. 1990. «Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, no 3, p. 281-290.
- [9] Gosselin, C.M. et Wang, J. 1997. «Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Actuators». *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 21, no 4, p. 377-398.
- [10] Gough, V.E. 1956-57. «Contribution to Discussion of Papers on Research in Automobile Stability, Control and Tyre Performance» *Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng*, p. 392-394.
- [11] Hansen, E. et Walster, G.W. 2004. «Taylor Series and Slope Expansions». In *Global Optimization Using Interval Analysis*. Second Edition, Revised and Expanded. New-York : Marcel Dekker, Inc., p. 123-157.
- [12] Harib, K. et Srinivasan, K. 2003. «Kinematic and Dynamic Analysis of Stewart Platform-Based Machine Tool Structures». *Robotica*, vol. 21, p. 541-554.
- [13] Husty, M.L. 1996. «An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms». *Mechanism and Machine Theory*, vol. 31, no 4, p. 365-379.
- [14] Institute for Reliable Computing. *INTLAB - INTerval LABoratory*, [En ligne]. <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/> (Page consultée le 23 mars 2011)
- [15] Jiang, Q. et Gosselin, C.M. 2009. «Determination of the Maximal Singularity-Free Orientation Workspace for the Gough–Stewart Platform». *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, no 6, p. 1281-1293.
- [16] Li, H., Gosselin, C.M., Richard, M.J. et Mayer St-Onge, B. 2006. «Analytic Form of the Six-Dimensional Singularity Locus of the General Gough-Stewart Platform» *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 128, p. 279-287.
- [17] Mayer St-Onge, B. 1997. «Étude et représentation des lieux de singularité de la plate-forme de Gough-Stewart». Mémoire de maîtrise, Québec : Université Laval, 134 p.
- [18] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M. 2000. «Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform». *The International Journal of Robotics Research*, vol. 19, no 3, p. 271-288.

- [19] NASA. *NASA Docking System (NDS)*, [En ligne]. <http://dockingstandard.nasa.gov/> (Page consultée le 17 octobre 2011)
- [20] Petersen, K.B. et Pedersen, M.S. 2008. *The Matrix Cookbook*. Version Novembre 2008. Danemark : Technical University of Denmark, 71 p.
- [21] Raghavan, M. 1993. «The Stewart Platform of General Geometry Has 40 Configurations». *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 115, no 2, p. 277-282.
- [22] Sefrioui, J. et Gosselin, C.M. 1992. «Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators». *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 10, no 4, p. 209-224.
- [23] Smith & Nephew. *The Taylor Spatial Frame*, [En ligne]. <https://www.spatialframe.com/> (Page consultée le 17 octobre 2011)
- [24] Stewart, D. 1965. «A Platform with Six Degrees of Freedom» *Proc. Institution of Mechanical Engineers*, vol. 180, no 15, p. 371-378.
- [25] Strang, G. 2006. *Linear Algebra and its Applications*. Fourth Edition. Belmont : Brooks/Cole, 488 p.
- [26] Symétrie. «Positionnement très haute précision» In Symétrie. *Symétrie : Métrologie et positionnement*, [En ligne]. [http://www.symetrie.fr/fr/hexapode/application\\_positionnement/positionnement-tres-haute-precision/](http://www.symetrie.fr/fr/hexapode/application_positionnement/positionnement-tres-haute-precision/) (Page consultée le 17 octobre 2011)
- [27] Waldron, K.J. et Hunt, K.H. 1988. «Series-Parallel Dualities in Actively Coordinated Mechanisms». *Robotics Research 4*, p. 175-181.
- [28] Zlatanov, D., Fenton, R.G. et Benhabib, B. 1994. «Singularity Analysis of Mechanisms and Robots via a Motion-Space Model of the Instantaneous Kinematics». *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, p. 980-985.





# Annexe A

## Coefficients de l'équation (2.9)

Les coefficients de l'équation (2.9) sont donnés au tableau A.1. Ceux-ci sont tirés de [18].

Les vecteurs  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{u}$  requis dans ces coefficients sont définis par les équations

$$\mathbf{g} = [G_1, G_2, \dots, G_6]^T \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{h} = [H_1, H_2, \dots, H_6]^T \quad (\text{A.2})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_6]^T \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{u} = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T, \quad (\text{A.5})$$

où

$$G_i = -S_i - b_{i1}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.6})$$

$$H_i = M_i - b_{i2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.7})$$

$$K_i = -L_i - b_{i3}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.8})$$

$$L_i = -a_{i3}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.9})$$

$$M_i = a_{i2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.10})$$

$$N_i = -b_{i2}L_i - b_{i3}M_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.11})$$

$$Q_i = b_{i1}L_i - b_{i3}P_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.12})$$

$$R_i = b_{i1}M_i + b_{i2}P_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.13})$$

$$S_i = -a_{i1}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (\text{A.14})$$

avec

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ b_{i3} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (\text{A.15})$$





# Annexe B

## Vecteurs et matrices constants de l'équation (3.38)

TAB. B.1 – Coefficients de l'équation (3.38).

Degré	Vecteur/Matrice	Combinaison
1	$-\mathbf{v}_0$	$(\mathbf{f}_4^T(\mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_2))(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6) - (\mathbf{f}_5^T(\mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_2))(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_4)$ $-(\mathbf{f}_6^T(\mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_2))(\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5) - (\mathbf{f}_2^T(\mathbf{f}_5 \times \mathbf{f}_6))(\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_3)$ $-(\mathbf{f}_2^T(\mathbf{f}_6 \times \mathbf{f}_4))(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_3) - (\mathbf{f}_2^T(\mathbf{f}_4 \times \mathbf{f}_5))(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_3)$ $+(\mathbf{f}_3^T(\mathbf{f}_5 \times \mathbf{f}_6))(\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_2) + (\mathbf{f}_3^T(\mathbf{f}_6 \times \mathbf{f}_4))(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_2)$ $+(\mathbf{f}_3^T(\mathbf{f}_4 \times \mathbf{f}_5))(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_2) + (\mathbf{f}_4^T(\mathbf{f}_5 \times \mathbf{f}_6))(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2)$



Degré	Vecteur/Matrice	Combinaison
	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{f}_4$
	$\mathbf{M}_3$	$(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_6)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T + (\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_6 \times \mathbf{a}_2)^T$ $+(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_5)^T + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_5)(\mathbf{a}_6 \times \mathbf{a}_3)^T$ $+(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_2)(\mathbf{a}_5 \times \mathbf{a}_3)^T + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_5 \times \mathbf{a}_6)^T$
	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{f}_5$
	$\mathbf{M}_4$	$(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_4)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T + (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_6)^T$ $+(\mathbf{e}_6 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_4 \times \mathbf{a}_2)^T + (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_2)(\mathbf{a}_6 \times \mathbf{a}_3)^T$ $+(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_6)(\mathbf{a}_4 \times \mathbf{a}_3)^T + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_6 \times \mathbf{a}_4)^T$
	$\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{f}_6$
	$\mathbf{M}_5$	$(\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_5)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T + (\mathbf{e}_4 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_5 \times \mathbf{a}_2)^T$ $+(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_4)^T + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4)(\mathbf{a}_5 \times \mathbf{a}_3)^T$ $+(\mathbf{e}_5 \times \mathbf{e}_2)(\mathbf{a}_4 \times \mathbf{a}_3)^T + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)(\mathbf{a}_4 \times \mathbf{a}_5)^T$





# Annexe C

## Vecteurs et matrices constants de l'équation (3.45)

TAB. C.1 – Coefficients de l'équation (3.45).

Degré	Vecteur/Matrice	Combinaison
1	$\mathbf{v}'_0$	$(\mathbf{b}_5^T \mathbf{f}_3)(\mathbf{a}_3^T \mathbf{f}_5)(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{a}_5)$
2	$\mathbf{M}'_0$	$(\mathbf{a}_3^T \mathbf{f}_5)(\mathbf{a}_5 \times \mathbf{b}_3)(\mathbf{a}_3 \times (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_5))^T$ $+ (\mathbf{a}_5^T \mathbf{f}_3)(\mathbf{b}_5 \times \mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_5 \times (\mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_3))^T$ $+ (\mathbf{a}_5^T (\mathbf{a}_3 \times (\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_5))) \mathbf{f}_5 \mathbf{f}_3^T$ $+ (\mathbf{a}_5^T (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_5)) \mathbf{f}_3 (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_5)^T$
3	$\mathbf{v}'_1$	$\mathbf{f}_3 - (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_5) + \mathbf{f}_5$
	$\mathbf{M}'_1$	$(\mathbf{b}_5 \times \mathbf{b}_3)(\mathbf{a}_5 \times \mathbf{a}_3)^T$