

MARC LEBLOND

**ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE MANIPULATEURS PARALLÈLES  
SPATIAUX À SIX DEGRÉS DE LIBERTÉ ET PLANS À TROIS  
DEGRÉS DE LIBERTÉ À ACTIONNEURS PRISMATIQUES**

Mémoire  
présenté  
à la Faculté des études supérieures  
de l'Université Laval  
pour l'obtention  
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC, CANADA

JUIN 1999

# RÉSUMÉ

Lors du mouvement d'un manipulateur, les efforts que doivent fournir ses actionneurs sont dans bien des cas dus principalement au poids du manipulateur, quand les accélérations ne sont pas trop grandes. On dit d'un mécanisme qu'il est statiquement équilibré lorsque le poids de ses membrures ne génère aucune force (ou aucun couple) aux actionneurs, sous conditions statiques, quelle que soit sa configuration. Ce mémoire porte sur l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles spatiaux à six (6) degrés de liberté et plans à trois (3) degrés de liberté. La particularité de cet équilibrage est qu'il est réalisé sur des mécanismes existants dont on veut diminuer la dépense énergétique. Ainsi, pour équilibrer statiquement les manipulateurs spatiaux et plans, on propose divers types de mécanismes dits *équilibrants* desquels découlent des conditions d'équilibrage. Ensuite, une interprétation géométrique de ces conditions est réalisée afin de montrer l'effet de la symétrie dans l'architecture de certains mécanismes équilibrés. Finalement, des exemples de manipulateurs équilibrés statiquement sont présentés et une attention particulière est portée à l'application de mécanisme spatial à six degrés de liberté à actionneurs prismatiques que constitue le simulateur de vol.

---

Marc Leblond

---

Clément Gosselin

## AVANT-PROPOS

Après un peu plus de trois années passées à la maîtrise, me voici rendu au fil d'arrivée, en ce printemps de 1999. Enfin, je peux maintenant dire que la boucle a été bouclée, bien que non sans difficulté. Au cours de cette période, j'aurai décidément passé par toute la gamme des émotions, allant de la motivation au découragement total. Cependant, malgré les embûches rencontrées en cours de route, notamment durant la dernière année où j'ai dû partager mon temps entre un emploi à temps plein et la rédaction de mon mémoire, je retiens de cette expérience un bilan positif. En plus d'approfondir un sujet technique et de participer à une importante conférence technique à Atlanta en septembre 1998, cela m'aura certes permis de mieux me connaître d'abord et avant tout.

Je tiens à remercier mon directeur de recherche Clément Gosselin qui, par sa grande disponibilité, sa rigueur scientifique et son aide plus qu'appréciée, a grandement contribué à la réalisation de ce mémoire. Je remercie également les membres du Laboratoire de robotique pour leur aide indispensable en ce qui a trait à l'usage des ressources informatiques du laboratoire, en particulier le logiciel ayant servi à la rédaction de ce mémoire. J'ai bien apprécié l'esprit d'entraide qui a régné tout au long de mon passage ici.

Je souhaite par ailleurs exprimer ma reconnaissance au Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche du Québec (FCAR) pour le soutien financier qu'il m'a apporté en m'octroyant une bourse d'études supérieures.

Enfin, je ne pourrais conclure cet avant-propos sans avoir une pensée spéciale pour ma famille et mes amis qui m'ont sans cesse encouragé et supporté moralement, voire même enduré durant ces trois années.

# TABLE DES MATIÈRES

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iv
Liste des Tableaux	vii
Liste des Figures	viii
Introduction	1
<b>1 Principes de l'équilibrage statique</b>	<b>5</b>
1.1 Équilibrage statique . . . . .	5
1.1.1 Principes généraux . . . . .	5
1.1.2 Exemple . . . . .	11
1.2 Équilibrage dynamique . . . . .	14
<b>2 Dérivation des conditions d'équilibrage statique de manipulateurs parallèles spatiaux à six degrés de liberté à actionneurs prismatiques</b>	<b>15</b>
2.1 Plate-forme de Gough-Stewart . . . . .	17
2.1.1 Sévérité des conditions d'équilibrage statique . . . . .	23
2.2 Plate-forme de Gough-Stewart et pattes supplémentaires . . . . .	25
2.2.1 Patte spéciale à six (6) d.d.l. à un parallélogramme (type <i>I</i> ) . . .	28
2.2.2 Patte spéciale à six (6) d.d.l. à deux parallélogrammes . . . . .	36
2.2.3 Autres architectures de pattes d'équilibrage à six (6) d.d.l. . . . .	42

<b>3</b>	<b>Dérivation des conditions d'équilibrage statique de manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté à actionneurs prismatiques</b>	<b>45</b>
3.1	Méthodologie . . . . .	46
3.2	Manipulateur parallèle plan à trois (3) d.d.l. à actionneurs prismatiques	48
3.3	Manipulateur plan à trois (3) d.d.l. à actionneurs prismatiques et pattes supplémentaires . . . . .	50
3.3.1	Patte spéciale à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme (type <i>I</i> ) . .	51
3.3.2	Patte spéciale à deux parallélogrammes . . . . .	53
3.3.3	Autre architecture de patte d'équilibrage à trois (3) d.d.l. . . . .	56
<b>4</b>	<b>Interprétation géométrique des conditions d'équilibrage statique pour les manipulateurs parallèles spatiaux</b>	<b>58</b>
4.1	Paramètres de design . . . . .	59
4.2	Articulations prismatiques . . . . .	59
4.3	Architectures particulières . . . . .	62
4.3.1	Plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage à un parallélogramme (type <i>I</i> ) . . . . .	63
4.3.1.1	Équilibrage à l'aide de $n$ pattes identiques . . . . .	63
4.3.1.2	Équilibrage à l'aide de pattes de géométries diverses . . . . .	69
4.3.2	Plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage à deux parallélogrammes . . . . .	73
4.3.2.1	Équilibrage à l'aide de $n$ pattes identiques . . . . .	73
4.3.3	Exemples de manipulateurs spatiaux statiquement équilibrés . . .	81
4.3.3.1	Exemple 1 . . . . .	81
4.3.3.2	Exemple 2 . . . . .	83
4.3.3.3	Exemple 3 . . . . .	85
4.3.4	Note sur les caractéristiques des ressorts utilisés . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Interprétation géométrique des conditions d'équilibrage statique pour les manipulateurs parallèles plans</b>	<b>89</b>
5.1	Paramètres de design . . . . .	89
5.2	Articulations prismatiques . . . . .	90
5.3	Architectures particulières . . . . .	91
5.3.1	Exemples de manipulateurs plans statiquement équilibrés . . . . .	91
5.3.1.1	Exemple 1 . . . . .	91

5.3.1.2	Exemple 2 . . . . .	93
5.3.1.3	Exemple 3 . . . . .	95
<b>Conclusion</b>		<b>97</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>100</b>
<b>A Équilibrage statique de la plate-forme de Gough-Stewart: détails sur l'analyse menant à l'utilisation des mécanismes à parallélogrammes</b>		
A.1	Plate-forme de Gough-Stewart et ressorts . . . . .	104
A.1.1	Ressorts dans l'axe de translation des actionneurs prismatiques . .	104
A.1.2	Ressorts attachés aux membrures proximales et distales des actionneurs prismatiques et à des points fixes dans l'espace . . . . .	108
A.1.3	Ressorts attachés aux membrures proximales et distales des actionneurs prismatiques et à la plate-forme mobile . . . . .	111
A.1.4	Ressorts attachés entre la base et la plate-forme mobile du manipulateur . . . . .	113
A.2	Plate-forme de Gough-Stewart et pattes supplémentaires . . . . .	115
A.2.1	Patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique . . . . .	116
A.2.2	Patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés aux membrures proximale et distale de la patte et à des points fixes dans l'espace . . . . .	121
A.2.3	Patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés entre la membrure proximale de la patte et un point fixe dans l'espace, et entre la membrure distale de la patte et la plate-forme mobile . . . . .	126
A.2.4	Principe du parallélogramme . . . . .	128
<b>B Autres architectures de pattes d'équilibrage utilisées pour l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles spatiaux à six (6) degrés de liberté</b>		
B.1	Patte spéciale à six (6) d.d.l. à un parallélogramme (type <i>II</i> ) . . . . .	131
B.2	Patte spéciale à six (6) d.d.l. à un parallélogramme (type <i>III</i> ) . . . . .	137
<b>C Autre architecture de patte d'équilibrage utilisée pour l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles plans à trois (3) degrés de liberté</b>		
C.1	Patte spéciale à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme (type <i>III</i> ) . . . . .	145

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Dimension des lieux des manipulateurs parallèles spatiaux à six (6) d.d.l. équilibrés. . . . .	60
4.2	Raideurs de ressorts en fonction du nombre de pattes d'équilibrage. . .	82
5.1	Dimension des lieux des manipulateurs parallèles plans à trois (3) d.d.l. équilibrés. . . . .	90
5.2	Raideurs de ressorts en fonction du nombre de pattes d'équilibrage. . .	93



# LISTE DES FIGURES

0.1	Simulateur de vol: mécanisme parallèle spatial à 6 ddl à actionneurs prismatiques. . . . .	2
1.1	Mécanisme parallèle plan à 3 ddl à actionneurs rotoïdes. . . . .	8
1.2	Mécanisme plan à 1 d.d.l. avec ressort. . . . .	11
2.1	Manipulateur parallèle spatial à 6 d.d.l. à actionneurs prismatiques: la plate-forme de Gough-Stewart. . . . .	17
2.2	Modèle de patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique. . . . .	25
2.3	Architecture de la jème patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>I</i> . . . . .	28
2.4	Patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme, de type <i>I</i> : position des ressorts. . . . .	33
2.5	Architecture de la jème patte à six (6) d.d.l. à deux parallélogrammes. . . . .	37
2.6	Patte à six (6) d.d.l. à deux parallélogrammes: position des ressorts. . . . .	39
2.7	Autre architecture de la jème patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>II</i> . . . . .	43
2.8	Autre architecture de la jème patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>III</i> . . . . .	44

3.1	Manipulateur parallèle plan à 3 d.d.l. à actionneurs prismatiques. . . .	48
3.2	Architecture de la $j$ ème patte à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>I</i> . . . . .	51
3.3	Architecture de la $j$ ème patte à trois (3) d.d.l. à deux parallélogrammes.	54
3.4	Autre architecture de la $j$ ème patte d'équilibrage à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>III</i> . . . . .	57
4.1	Architecture de la $i$ ème patte actionnée. . . . .	61
4.2	Équilibrage de la plate-forme de Gough-Stewart avec des pattes de type <i>I</i> disposées symétriquement autour du centre de masse de la plate-forme.	66
4.3	Simulateur de vol équilibré avec 4 pattes de type <i>I</i> identiques. Ici, $\alpha_u = 0$ et $\alpha_l = 0$ . . . . .	67
4.4	Simulateur de vol équilibré avec 4 pattes de type <i>I</i> , dont 3 sont iden- tiques. Ici, $\alpha_u = 0$ , $\alpha_u^* = \pi$ , $\alpha_l = 0$ et $\alpha_l^* = \pi$ . . . . .	69
4.5	Simulateur de vol équilibré avec 1 patte à 2 parallélogrammes. Ici, $\alpha_u =$ $0$ , $\alpha_l = 0$ et $\alpha_e = 0$ ; $d = 2h$ . . . . .	76
4.6	Simulateur de vol équilibré avec 1 patte à 2 parallélogrammes. Ici, $\alpha_u =$ $0$ , $\alpha_l = 0$ et $\alpha_e = \pi$ ; $d = -h$ . . . . .	77
4.7	Raideur et énergie potentielle dans un ressort. . . . .	78
4.8	Manipulateur parallèle spatial à 6 ddl à actionneurs prismatiques sta- tiquement équilibré par deux mécanismes à un parallélogramme de type <i>I</i> (exemple 1). . . . .	81
4.9	Simulateur de vol équilibré statiquement par 4 pattes à un parallélogramme de type <i>I</i> , dont 3 sont identiques (exemple 2). . . . .	83
4.10	Simulateur de vol équilibré statiquement par une patte à deux paral- lélogrammes (exemple 3). . . . .	85
5.1	Manipulateur parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques statique- ment équilibré par un mécanisme à deux parallélogrammes (exemple 1).	92

5.2	Mécanisme parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques équilibré statiquement par 2 pattes à un parallélogramme de type <i>I</i> (exemple 2).	94
5.3	Mécanisme parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques équilibré statiquement par une patte à un parallélogramme de type <i>I</i> et une autre à deux parallélogrammes (exemple 3).	95
A.1	Plate-forme de Gough-Stewart: ressort attaché dans l'axe de translation du <i>i</i> ème actionneur prismatique.	105
A.2	Plate-forme de Gough-Stewart: ressorts attachés aux membrures proximale et distale du <i>i</i> ème actionneur prismatique et à des points fixes dans l'espace.	108
A.3	Plate-forme de Gough-Stewart: ressorts attachés aux membrures proximale et distale du <i>i</i> ème actionneur prismatique et à la plate-forme mobile.	112
A.4	Plate-forme de Gough-Stewart: <i>i</i> ème ressort attaché entre la base et la plate-forme mobile du manipulateur.	114
A.5	Architecture de la <i>j</i> ème patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique.	116
A.6	Architecture de la <i>j</i> ème patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés aux membrures proximale et distale de la patte et à des points fixes dans l'espace.	122
A.7	Architecture de la <i>j</i> ème patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés entre la membrure proximale de la patte et un point fixe dans l'espace, et entre la membrure distale de la patte et la plate-forme mobile.	126
A.8	Modèle de patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. dont l'architecture possède un parallélogramme.	128
B.1	Autre architecture de la <i>j</i> ème patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>II</i> .	131
B.2	Patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme, de type <i>II</i> : position des ressorts.	134

B.3	Autre architecture de la jème patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>III</i> . . . . .	138
B.4	Patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme, de type <i>III</i> : position des ressorts. . . . .	141
C.1	Autre architecture de la jème patte d'équilibrage à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme: type <i>III</i> . . . . .	146

# INTRODUCTION

## Problématique

Le contenu de ce mémoire porte sur l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles spatiaux à six (6) degrés de liberté et plans à trois (3) degrés de liberté. On dit d'un mécanisme qu'il est statiquement équilibré lorsque le poids de ses membrures ne génère aucune force (ou aucun couple) aux actionneurs, sous conditions statiques, quelle que soit sa configuration. L'analyse des mécanismes faisant l'objet de cette étude est faite en accord avec le principe suivant: l'équilibrage statique doit être réalisé sur des mécanismes existants dont les constituants ont des caractéristiques massiques et géométriques connues. Autrement dit, il faut faire en sorte qu'en *ajoutant* des composantes mécaniques (membrures, contrepoids, ressorts, etc.), on puisse rendre ces mécanismes équilibrés statiquement. À l'opposé, les mécanismes ne doivent pas se voir amputés de quelque composante que ce soit.

Concrètement, cette approche de modélisation peut s'avérer très utile dans le domaine des simulateurs de vol. Il est bien connu que ces mécanismes à architecture parallèle requièrent de puissants actionneurs (généralement des vérins hydrauliques) pour supporter et déplacer l'énorme masse de leur module de simulation. Or, puisqu'il est question ici de mécanismes existants, l'objectif de diminution de la consommation énergétique des actionneurs pour supporter le module commande que l'équilibrage statique ne se fasse qu'en *ajoutant* des composantes mécaniques. L'approche utilisée

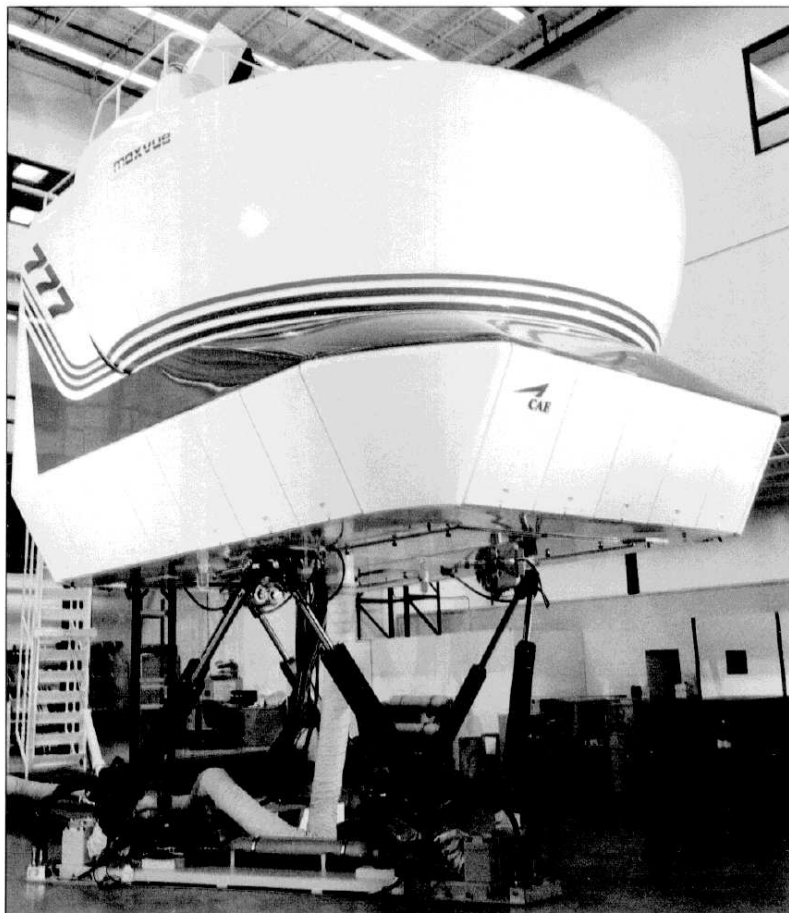


Figure 0.1: Simulateur de vol: mécanisme parallèle spatial à 6 ddl à actionneurs prismatiques.

ici sera donc de modéliser des dispositifs non-actionnés dits *équilibrants* qui, lorsque branchés à des mécanismes existants et en opération — comme par exemple, les simulateurs de vol (figure 0.1) —, rendront ces derniers statiquement équilibrés. Ainsi, pour un mécanisme très lourd comme le simulateur de vol, équilibrer statiquement celui-ci permettrait de diminuer la consommation énergétique de ses actionneurs et par le fait même de réduire la grosseur de ces derniers.

Les travaux de recherches faisant l'objet de ce mémoire s'inscrivent dans un vaste ensemble d'études réalisées sur l'équilibrage statique depuis quelques années au Laboratoire de robotique de l'Université Laval et ailleurs. La particularité de ce document est qu'il traite exclusivement de manipulateurs parallèles à actionneurs *prismatiques* et en ce sens, son contenu se veut une suite logique aux travaux antérieurs réalisés au

laboratoire sur l'équilibrage statique de manipulateurs à actionneurs rotoïdes spatiaux à trois (Wang et Gosselin 1999a), quatre (Wang et Gosselin 1999b), cinq (Wang 1997) et six degrés de liberté (Gosselin et Wang 1998; Ebert-Uphoff et al. 1998), sphériques à trois degrés de liberté (Gosselin 1999) et plans à un, deux et trois degrés de liberté (Jean 1996). Auparavant, l'équilibrage statique avait déjà fait l'objet de plusieurs publications, notamment en ce qui concerne le mécanisme parallèle plan à un degré de liberté, mieux connu sous la désignation de mécanisme à quatre barres. Citons entre autres les articles scientifiques publiés par (Berkof et Lowen 1969), (Bagci 1982), (Lowen et al. 1983) et (Ye et Smith 1994), pour ne nommer que ceux-là. Quant aux mécanismes sériels, ceux-ci ont également fait l'objet de travaux sur l'équilibrage statique (Nathan 1985; Herve 1986; Ulrich et Kumar 1991).

En outre, la problématique de départ de cette recherche est totalement différente de celle qui prévalait dans les publications énoncées ci-haut. En effet, l'objectif ici est d'équilibrer statiquement des mécanismes existants, au lieu de simplement équilibrer des mécanismes choisis arbitrairement.

## Structure du mémoire

Ce mémoire se divise en trois parties. Dans la première partie, qui est essentiellement le chapitre 1, les principes généraux de l'équilibrage statique sont expliqués. De plus, afin d'en illustrer le fonctionnement, un exemple simple est donné. C'est dans la deuxième partie que se situe le cœur de cette étude sur l'équilibrage statique. Tout d'abord, au chapitre 2, on propose diverses architectures de mécanismes dits *équilibrants*, lesquels sont requis pour équilibrer statiquement des manipulateurs parallèles spatiaux à actionneurs prismatiques à six (6) degrés de liberté. De plus, les conditions d'équilibrage découlant de l'emploi de ces artifices d'équilibrage sont déterminées en utilisant la procédure expliquée au chapitre 1. Le chapitre 3 se veut quant à lui l'équivalent du chapitre 2, mais pour des manipulateurs parallèles plans à actionneurs prismatiques à trois (3) degrés de liberté. Enfin, la troisième partie traite de l'interprétation géométrique des conditions d'équilibrage pour les mécanismes spatiaux, au chapitre 4, et pour les mécanismes plans, au chapitre 5. Dans chacun de ces deux chapitres, des exemples de mécanismes statiquement équilibrés sont donnés et une

attention particulière est portée au cas du simulateur de vol. En outre, on retrouve à l'annexe A, à titre complémentaire, les détails du cheminement ayant mené aux modèles de pattes d'équilibrage présentés aux chapitres 2 et 3. Finalement, les annexes B et C présentent le détail des développements menant aux conditions d'équilibrage pour certains mécanismes spatiaux et plans des chapitres 2 et 3, respectivement.

## Nomenclature

Dans ce document, les vecteurs sont représentés par des lettres minuscules en caractères **gras**, tandis que les matrices le sont par des lettres majuscules en caractères **gras**. Les quantités scalaires sont quant à elles représentées par des lettres minuscules ou majuscules, en caractères normaux.



# CHAPITRE 1

## PRINCIPES DE L'ÉQUILIBRAGE STATIQUE

Il existe en mécanique deux façons d'équilibrer des systèmes: statiquement et dynamiquement. Or, le contenu de ce document porte essentiellement sur l'équilibrage statique. Dans ce chapitre, le principe général d'équilibrage statique, ainsi que les caractéristiques en découlant, sont expliqués et illustrés à l'aide d'un exemple simple. Finalement, à titre comparatif, l'équilibrage dynamique est brièvement expliqué.

### 1.1 Équilibrage statique

#### 1.1.1 Principes généraux

On dit d'un mécanisme qu'il est statiquement équilibré lorsque le poids de ses membres ne génère aucune force (ou aucun couple) aux actionneurs, sous conditions statiques, quelle que soit la configuration du mécanisme. En d'autres mots, l'équilibrage

statique consiste à annuler l'effet de la gravité sur les efforts que doivent fournir les actionneurs pour faire bouger le mécanisme. Une fois cette condition remplie, on s'assure que l'énergie fournie par les actionneurs ne sert qu'aux mouvements (inertie) du mécanisme, et non pas à contrebalancer le poids des membrures le composant. Cela constitue un avantage certain puisqu'il en résulte une diminution substantielle de la dépense énergétique, notamment pour les manipulateurs dont la masse est élevée.

Mathématiquement parlant, cette caractéristique d'équilibrage statique se traduit par une valeur constante de l'énergie potentielle totale du mécanisme et ce, indépendamment de la valeur des variables articulaires représentant son mouvement. Physiquement, l'équilibrage statique est rendu possible grâce à l'utilisation d'éléments tels que des contrepoids, des ressorts et parfois des cames et des poulies. On peut alors subdiviser l'énergie potentielle en deux catégories: *gravitationnelle* et *élastique*, notées respectivement  $V_g$  et  $V_e$ . L'énergie potentielle totale s'exprime alors comme étant

$$V = V_g + V_e = \text{cte} \quad (1.1)$$

où

$$V_g = Mgc_z \quad V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j k_i (s_i - s_i^0)^2$$

avec

- $V$  = Énergie potentielle totale
- $V_g$  = Énergie potentielle gravitationnelle
- $V_e$  = Énergie potentielle élastique
- $M$  = Masse du manipulateur (excluant la base)
- $g$  = Constante gravitationnelle
- $c_z$  = Coordonnée verticale (dans la direction du champ gravitationnel)  
du centre de masse du manipulateur
- $k_i$  = Raideur du ressort  $i$
- $s_i$  = Longueur du ressort  $i$
- $s_i^0$  = Longueur libre du ressort  $i$
- $j$  = Nombre de ressorts dans le manipulateur

Dans le cas d'un mécanisme (ou manipulateur) sans ressorts, il n'y a que l'énergie

potentielle gravitationnelle  $V_g$  qui intervient. Puisque celle-ci doit être constante, cela revient à dire que le travail  $W$  effectué par les actionneurs contre la gravité, lors du mouvement du mécanisme, doit être nul.

$$W = Mg\Delta c_z = 0 \quad (1.2)$$

où

$$\begin{aligned} M &= \text{Masse du manipulateur (excluant la base)} \\ g &= \text{Constante gravitationnelle} \\ \Delta c_z &= \text{Déplacement vertical du centre de masse} \\ &\quad (\text{positif vers le haut}) \end{aligned}$$

En observant l'équation du travail, on se rend compte que pour que celui-ci soit nul, il faut que  $\Delta c_z$  soit également nul, d'où

$$c_z = \text{cte} \quad (1.3)$$

et

$$V_g = Mgc_z = \text{cte} \quad (1.4)$$

On voit ainsi que pour équilibrer statiquement un mécanisme sans ressorts, la seule condition requise est de garder constante la coordonnée  $c_z$  donnant la hauteur du centre de masse du mécanisme dans la direction du vecteur gravité  $\mathbf{g}$ . Le mécanisme peut bouger dans n'importe quelle direction perpendiculaire à la gravité, sans affecter l'équilibre puisqu'il n'y a à cet effet aucune restriction. De plus, il a été démontré que l'équilibrage statique d'un tel mécanisme est réalisable quelle que soit l'orientation de sa base par rapport à la direction du vecteur gravité. En d'autres termes, un mécanisme équilibré statiquement et dont la base fixe est placée sur un plan perpendiculaire à la direction du vecteur gravité pourrait voir sa base placée dans une pente et il conserverait néanmoins son équilibre. De plus, ce même mécanisme pourrait conserver son équilibre statique dans n'importe quel type de champ gravitationnel. Ainsi, la structure demeurerait en équilibre aussi bien au sol qu'au sommet de l'Everest ou même sur la Lune! Ces deux caractéristiques ne sont toutefois pas applicables à un mécanisme muni de ressorts car l'équilibrage statique d'un tel mécanisme n'est possible que pour une grandeur et une direction donnée du vecteur gravité par rapport à sa base.

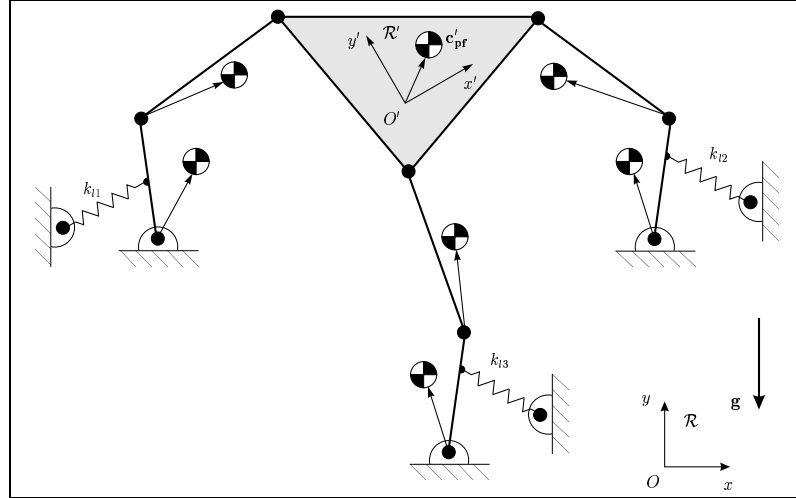


Figure 1.1: Mécanisme parallèle plan à 3 ddl à actionneurs rotoïdes.

D'un point de vue pratique, la façon d'équilibrer un mécanisme sans ressorts réside dans le choix de l'architecture et des caractéristiques des membrures formant la structure. Des paramètres tels que la masse, les dimensions et la position du centre de masse de chaque membrure composant un mécanisme sont d'une importance critique dans l'objectif d'équilibrage statique. De plus, la position du centre de masse d'une membrure donnée peut exiger l'ajout de contrepoids au mécanisme.

Dans le cas d'un mécanisme (ou manipulateur) muni d'un ou plusieurs ressorts, la restriction sur  $c_z$  ne s'applique plus. En fait, ce qui doit être constant, c'est l'énergie potentielle *totale*, comme il a été mentionné antérieurement. L'ajout d'énergie potentielle élastique permet de répartir les restrictions sur le système, ce qui constitue un avantage certain. Un bon exemple pour s'en convaincre est celui du manipulateur parallèle plan à trois degrés de liberté, muni d'actionneurs rotoïdes (Jean 1996; Jean et Gosselin 1996), illustré à la figure 1.1. En supposant une masse de la plate-forme (organe terminal) relativement élevée, il faudra alors, pour équilibrer statiquement, que les masses et longueurs des membrures soient assez élevées. De plus, les positions des centres de masse seront probablement, par le fait même, éloignées des centres géométriques, ce qui n'est pas avantageux du point de vue du design. Or, le poids des membrures pouvant être en bonne partie contrebalancé par le ou les ressorts reliant la base du mécanisme à une membrure proximale, celles-ci pourront alors voir leurs propriétés géométriques et massiques réduites. Cela est souhaitable puisque l'on vise à réduire l'inertie du mécanisme lorsque celui-ci est en mouvement. De plus, l'utilisation

de ressorts fait en sorte que l'écart entre les centres de masse et les centres géométriques diminue. Cette dernière caractéristique est importante, à tel point qu'elle peut servir de critère d'optimisation dans le design de manipulateurs parallèles.

Afin de déterminer les propriétés intrinsèques d'un mécanisme qui font que celui-ci est en équilibre statique indépendamment de sa configuration, il est primordial de passer à la modélisation mathématique du mécanisme étudié.

Pour un mécanisme quelconque, statiquement équilibré ou non, on exprime d'abord l'énergie potentielle de ce dernier en fonction de la position de ses actionneurs. On peut alors écrire

$$V(\boldsymbol{\theta}) = Mgc_z(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j k_i (s_i(\boldsymbol{\theta}) - s_i^0)^2 \quad (1.5)$$

où

$\boldsymbol{\theta}$  = Vecteur des variables représentant les positions des actionneurs

Puisque pour obtenir l'équilibre statique, on impose la relation

$$V(\boldsymbol{\theta}) = \text{cte} \quad (1.6)$$

on peut dès lors dériver l'équation (1.5) de l'énergie potentielle totale par rapport aux variables, dites *de configuration*, représentant la position des actionneurs, lesquelles sont regroupées dans le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ , et égaler cette dérivée vectorielle à zéro. De plus, on dérive toujours par rapport aux variables indépendantes, c'est-à-dire les variables exprimant la position des *actionneurs*. En général, on cherchera à dériver par rapport à autant de variables qu'il y a de degrés de liberté. Ainsi, on a

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

On obtient  $n$  conditions nécessaires à l'équilibrage statique du manipulateur où  $n$  représente la dimension du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ . Ces  $n$  conditions, qui sont en fait  $n$  équations, regroupent la plupart du temps plusieurs sous-conditions d'équilibrage dont le nombre peut excéder  $n$ .

Une autre manière de comprendre le problème de l'équilibrage statique est de considérer l'équation du modèle dynamique d'un mécanisme donné, c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.8)$$

où

- $\boldsymbol{\tau}$  = Vecteur des couples (ou forces) fournis par les actionneurs
- $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$  = Matrice d'inertie généralisée
- $\boldsymbol{\theta}$  = Vecteur des coordonnées articulaires
- $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$  = Terme dit des forces de Coriolis et centrifuges (termes quadratiques)
- $\mathbf{C}$  = Matrice des coefficients de friction des articulations
- $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$  = Vecteur des forces dues à la gravité

L'objectif d'équilibrage statique se traduit ici par l'annulation de l'effet créé par les forces dues à la gravité sur les couples (ou forces) produits par les actionneurs, c'est-à-dire,

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

Or,

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (1.10)$$

De là, on retrouve la condition énoncée par l'équation (1.7), soit

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

La procédure qui a été décrite plus haut pour équilibrer statiquement un manipulateur est valable pour n'importe quel mécanisme formé de membrures et de ressorts, en particulier les manipulateurs parallèles plans et spatiaux. Pour un mécanisme sans ressorts, la procédure demeure la même, à la différence que l'énergie potentielle élastique devient nulle. Et, considérant le produit  $Mg$  constant (on suppose que la masse des membrures demeure constante pour un mouvement donné du mécanisme), dériver l'énergie potentielle  $V$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  revient à dériver la coordonnée verticale du centre de masse du mécanisme par rapport à ce même vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ . On se retrouve alors avec

$$\frac{\partial c_z}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

où

$$c_z = c_z(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.13)$$

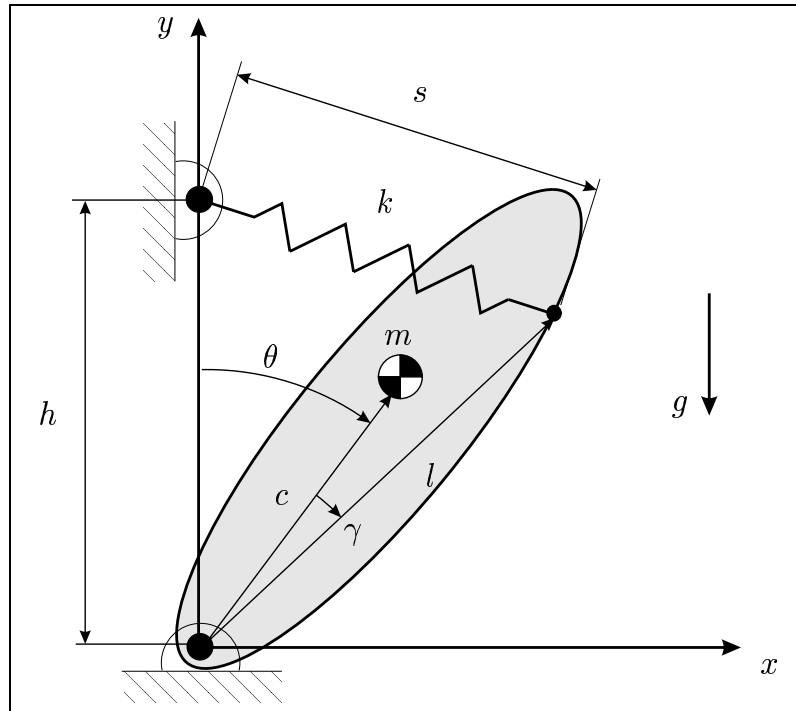


Figure 1.2: Mécanisme plan à 1 d.d.l. avec ressort.

### 1.1.2 Exemple

Afin de démontrer la procédure d'équilibrage statique expliquée à la section précédente, soit le mécanisme simple présenté à la figure 1.2. C'est un mécanisme à ressort, à un degré de liberté. Il s'agit en fait d'une membrure de masse  $m$  pouvant pivoter autour d'un point fixe et à laquelle un ressort a été attaché. L'articulation du pivot est une liaison rotoïde. Le centre de masse de la membrure est situé à une distance  $c$  du pivot et fait un angle  $\theta$  par rapport à la verticale. Le ressort peut, lui aussi, pivoter par rapport à un point fixe. Ce point fixe est situé à une distance  $h$  par rapport au pivot de la membrure, sur l'axe  $y$ . Quant à la position du point d'attache du ressort sur la membrure mobile, celle-ci est donnée par la distance  $l$  et l'angle  $\gamma$ .

La première étape de la procédure d'équilibrage consiste à identifier les variables articulaires d'actionnement, c'est-à-dire, celles qui doivent se trouver dans le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ . Dans le mécanisme présent, il n'y en a qu'une seule: la variable  $\theta$ . Cela s'explique par le fait que le système n'a qu'un seul degré de liberté.

Ensuite, en appliquant l'équation (1.5), on exprime l'énergie potentielle totale en

fonction de  $\theta$ . On obtient alors

$$V = mgc \cos \theta + \frac{1}{2}k(s - s^0)^2 \quad (1.14)$$

où  $k$  est la raideur du ressort, alors que  $s$  et  $s^0$  représentent respectivement sa longueur réelle et sa longueur libre. D'après la loi des cosinus, on peut écrire

$$s^2 = h^2 + l^2 - 2hl \cos(\theta + \gamma) \quad (1.15)$$

De plus, si la longueur libre du ressort est nulle, (contrainte qui est physiquement réalisable en utilisant des poulies et des câbles ou encore des guides) — et on peut voir dans (Streit et Gilmore 1989) que cette restriction est essentielle à l'atteinte de l'objectif d'équilibre statique —, c'est-à-dire

$$s^0 = 0 \quad (1.16)$$

alors, en substituant les équations (1.15) et (1.16) dans l'équation (1.14) et en réarrangeant, on obtient

$$V = (mgc - khl \cos \gamma) \cos \theta - khl \sin \gamma \sin \theta + \frac{1}{2}k(h^2 + l^2) \quad (1.17)$$

Les conditions d'équilibrage sont déterminées en appliquant l'équation (1.7). On obtient alors

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -(mgc - khl \cos \gamma) \sin \theta - khl \sin \gamma \cos \theta = 0 \quad (1.18)$$

Comme l'équilibre statique doit être maintenu indépendamment de la valeur de  $\theta$ , il faut nécessairement, pour que la dérivée soit nulle, que

$$mgc - khl \cos \gamma = 0 \quad (1.19)$$

$$khl \sin \gamma = 0 \quad (1.20)$$

En réarrangeant les équations (1.19) et (1.20), on retrouve les conditions d'équilibrage suivantes:

$$k = \frac{mgc}{hl} \quad (1.21)$$

$$\gamma = 0 \quad (1.22)$$

Finalement, l'énergie potentielle, qui est constante, est donnée par

$$V = \frac{1}{2}k(h^2 + l^2) \quad (1.23)$$



Une autre façon de voir le problème est de considérer le fait que l'énergie potentielle totale doit être constante, peu importe la valeur de  $\theta$ . Une brève observation de l'équation (1.17) permet de constater que cela peut être rendu possible en imposant que les termes multipliant les fonctions  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  égalent zéro.

Dans un cas comme dans l'autre, il est clair que ces conditions ne dépendent pas de  $\theta$ . Il faut cependant préciser que le mécanisme sera en équilibre statique pour toute configuration, c'est-à-dire pour toute valeur de  $\theta$ , en autant que l'orientation de la base du mécanisme par rapport au vecteur accélération gravitationnelle ne change pas et pourvu que le champ gravitationnel garde la valeur pour laquelle le mécanisme a été équilibré statiquement. Cette dernière constatation s'avère des plus importantes. En effet, lorsque des ressorts sont utilisés, l'équilibrage statique n'est obtenu que pour *une seule orientation donnée de la base par rapport à la direction du vecteur gravité* et pour une seule valeur de  $g$ . Par contre, lorsque l'équilibrage statique n'est fait qu'en redistribuant les masses et en utilisant des contrepoids, il n'y a plus de restriction. Le mécanisme peut alors être équilibré statiquement pour *toute orientation de la base du mécanisme par rapport à la direction du vecteur gravité et pour tout champ gravitationnel*.

En complément à la courte analyse de ce système, l'observation attentive de la figure 1.2 permet de constater que le seul moyen d'équilibrer statiquement le système lorsqu'aucun ressort n'est utilisé est que le centre de masse du mécanisme, c'est-à-dire de la membrure dans ce cas-ci, soit situé sur le pivot de la membrure. De cette façon, la force gravitationnelle due à la masse  $m$  passe par le pivot et, par le fait même, ne produit plus de moment de force par rapport à celui-ci. D'un point de vue mathématique, on représente ce cas particulier en posant

$$k = 0 \tag{1.24}$$

Les conditions (1.19) et (1.20) deviennent alors

$$mgc = 0 \tag{1.25}$$

$$0 = 0 \tag{1.26}$$

et l'unique solution non-triviale à ce système est

$$c = 0 \tag{1.27}$$

c'est-à-dire, le centre de masse situé au pivot de la membrure. Ce résultat confirme l'hypothèse intuitive énoncée plus haut.

## 1.2 Équilibrage dynamique

Maintenant que l'équilibrage statique a été défini et illustré, il apparaît pertinent à ce stade-ci de se demander quel est son pendant dynamique.

L'équilibrage dynamique consiste à éliminer toutes les forces et moments de réaction d'un mécanisme sur sa base, et ce, pour toute trajectoire de ce dernier. Ainsi, les forces à équilibrer dans ce cas-ci ne sont plus les forces dites gravitationnelles mais plutôt celles de nature *inertielle*, qui sont induites par les mouvements rapides du manipulateur. En termes de principes physiques, cela revient à faire en sorte que le mécanisme maintienne une quantité de mouvement et un moment cinétique constants tout au long de son déplacement.

Un des champs d'application où l'équilibrage dynamique qui est envisagé est celui des mécanismes de précision, comme ceux utilisés pour la correction active dans les télescopes.

## CHAPITRE 2

### DÉRIVATION DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE MANIPULATEURS PARALLÈLES SPATIAUX À SIX DEGRÉS DE LIBERTÉ À ACTIONNEURS PRISMATIQUES

Le présent chapitre se concentre sur l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles spatiaux à six (6) degrés de liberté à actionneurs prismatiques. Dans un premier temps, on y définit un mécanisme bien connu, soit la plate-forme de Gough-Stewart (Hunt 1983; Fichter 1986). Puis, de l'ajout de composantes mécaniques, telles que des barres et des ressorts, découlent quatre variantes de ladite plate-forme. Il est important de rappeler que la contrainte principale s'appliquant spécifiquement à cette étude d'équilibrage statique est que l'on tente d'équilibrer des mécanismes déjà *existants* et que leur structure de base ne peut être changée. Tout ce qu'il est permis de faire, c'est d'*ajouter* des composantes. Par ailleurs, le choix des quatre mécanismes à six degrés de liberté dérivés de la plate-forme de Gough-Stewart résulte d'un processus d'analyse

d'essais et erreurs (pour plus de détails concernant cette analyse, voir l'annexe A) et a été fait en fonction de critères reliés à des applications spécifiques comme les simulateurs de vol, par exemple. Ce choix a été fait en tentant constamment de garder l'architecture des mécanismes la plus simple possible. Il est clair que ces mécanismes ne constituent qu'une fraction de l'ensemble de ce qui aurait pu être étudié. Toutefois, il faut rappeler que le but de cette étude est de vérifier si les principes de l'équilibrage statique s'appliquent aux manipulateurs parallèles à actionneurs prismatiques, comme c'est le cas pour les manipulateurs parallèles à actionneurs rotoïdes, et ce n'est qu'à partir des résultats obtenus qu'un design plus détaillé de manipulateurs particuliers devrait être envisagé. Il est par ailleurs important de mentionner que la modélisation des équations d'énergie potentielle des mécanismes étudiés dans ce mémoire est faite uniquement en se servant de ressorts de tension, dont la masse est considérée négligeable, et ne tient pas compte du frottement. De plus, les membrures et la plate-forme de ces mécanismes sont modélisées comme des masses ponctuelles concentrées en leur centre de masse. Bref, dans ce chapitre et dans le suivant, pour chacun des manipulateurs étudiés, les conditions permettant de les équilibrer statiquement sont déterminées, quand cela est possible.

En outre, il est à noter qu'une approche vectorielle est utilisée pour déterminer l'énergie potentielle totale ainsi que les conditions d'équilibrage statique des différents mécanismes. Cette méthode permet d'obtenir l'expression de l'énergie potentielle totale d'un manipulateur de façon simple et claire. En effet, les vecteurs permettent d'avoir une bonne compréhension, d'un point de vue géométrique (ou visuel), des lois physiques régissant les différents systèmes mécaniques en cause. Un autre avantage de cette approche vectorielle est qu'elle permet de traiter les manipulateurs plans à trois degrés de liberté comme un cas particulier des manipulateurs spatiaux à six degrés de liberté. En effet, les mécanismes plans ne sont ni plus ni moins que des projections des mécanismes spatiaux dans un plan **parallèle au vecteur de l'accélération gravitationnelle**. Conséquemment, toutes les équations développées pour ces derniers manipulateurs pourront s'appliquer au cas plan, à condition de considérer leur mouvement dans un plan fixe dans l'espace. Une façon simple d'appliquer cette contrainte est d'ignorer une des composantes des vecteurs, soit la composante  $x$ , soit la composante  $y$ , mais pas celle de l'axe  $z$ , lequel est parallèle au vecteur de l'accélération gravitationnelle. Ainsi, c'est par suite de ces légères modifications que les mécanismes plans à

trois degrés de liberté sont traités au chapitre suivant.

## 2.1 Plate-forme de Gough-Stewart

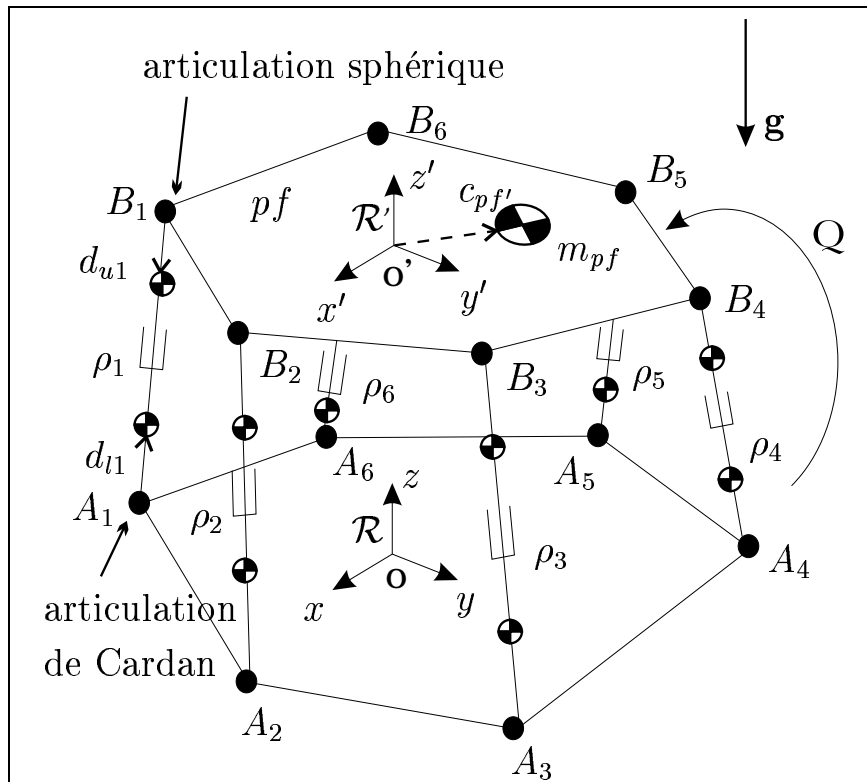


Figure 2.1: Manipulateur parallèle spatial à 6 d.d.l. à actionneurs prismatiques: la plate-forme de Gough-Stewart.

Un mécanisme parallèle spatial à six degrés de liberté muni d'actionneurs prismatiques est représenté à la figure 2.1. Ce mécanisme est connu sous le nom de plate-forme de Gough-Stewart (Stewart 1965) et a, à ce jour, fait l'objet de plusieurs recherches (Merlet 1997). Il est constitué de six (6) chaînes cinématiques (ou pattes) reliant la base du manipulateur à la plate-forme qui, elle, constitue l'effecteur du manipulateur. Chacune de ces chaînes possède l'architecture suivante: une articulation de Cardan passive reliée à la base, un premier lien mobile, une articulation prismatique actionnée, un deuxième lien mobile et une articulation sphérique passive liée à la plate-forme. Le repère cartésien inertiel, défini comme étant  $O - x, y, z$ , est attaché à la base du manipulateur et son axe  $z$  pointe vers le haut, dans la direction du vecteur gravité. De

façon similaire, le repère mobile  $O' - x', y', z'$  est lié à la plate-forme, de telle sorte que son mouvement est solidaire de cette dernière.

Les coordonnées cartésiennes de la plate-forme sont données par le vecteur  $\mathbf{p}$  reliant l'origine  $O$  du repère fixe  $\mathcal{R}$  de la base au point  $O'$  et exprimé dans  $\mathcal{R}$ . L'orientation de la plate-forme, c'est-à-dire l'orientation du repère  $O' - x', y', z'$  par rapport au repère fixe de la base, est représentée par la matrice  $\mathbf{Q}$ . Ainsi,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où les éléments de la matrice peuvent être des fonctions d'invariants linéaires, d'invariants quadratiques, d'angles d'Euler ou de tout autre type de représentation.

De plus, les coordonnées des points  $A_i$  et  $B_i$ , exprimées dans  $\mathcal{R}$ , sont représentées par les vecteurs

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ b_{iz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.2)$$

De la même manière, les coordonnées des points  $B_i$ , exprimées dans le repère mobile  $\mathcal{R}'$  de la plate-forme, sont données par

$$\mathbf{b}'_i = \begin{bmatrix} b'_{ix} \\ b'_{iy} \\ b'_{iz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.3)$$

Finalement, on désigne  $\rho_i$  comme étant la longueur de la  $i$ ème patte (chaîne cinématique) du manipulateur. Ce scalaire est défini en prenant la norme euclidienne du vecteur  $(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)$ . On obtient alors

$$\rho_i = \|\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\| \quad (2.4)$$

Comme il a été mentionné antérieurement, les principes de l'équilibrage statique sont appliqués, dans ce présent document, à des mécanismes déjà existants et auxquels on ne peut qu'ajouter de nouvelles composantes mécaniques. Dans le cas spatial à six degrés de liberté, c'est la plate-forme de Gough-Stewart qui est analysée. L'intérêt de choisir ce type de mécanisme est que son architecture est des plus simples et que l'on en

retrouve de nombreuses applications dans l'industrie, notamment dans les simulateurs de vol.

Ainsi, la première étape dans cette analyse consiste à vérifier si, de façon générale, une plate-forme de Gough-Stewart quelconque peut être statiquement équilibrée. Cela est fait en trouvant  $\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]^T$ , le vecteur position du centre de masse global du mécanisme, ce dernier vecteur dépendant de la position du centre de masse de chacune des composantes mobiles du manipulateur, incluant bien sûr l'effecteur, c'est-à-dire sa plate-forme. La figure 2.1 (voir aussi la figure 4.1) montre l'architecture des pattes reliant la base à l'effecteur du manipulateur. Chaque patte peut en fait être considérée comme un vérin constitué de deux parties: un cylindre (partie inférieure) et un piston (partie supérieure). Le centre de masse global du mécanisme s'exprime alors comme étant

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf}\mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li}\mathbf{c}_{li} + m_{ui}\mathbf{c}_{ui})}{M} \quad (2.5)$$

où  $M$  est la masse totale formée par tous les éléments mobiles composant le mécanisme, c'est-à-dire

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} + m_{ui}) \quad (2.6)$$

et où  $m_{pf}$ ,  $m_{li}$  et  $m_{ui}$  sont les masses respectives de la plate-forme, de la partie inférieure et de la partie supérieure de la  $i$ ème patte, alors que  $\mathbf{c}_{pf}$ ,  $\mathbf{c}_{li}$  et  $\mathbf{c}_{ui}$  sont respectivement les vecteurs position du centre de masse de la plate-forme et des parties inférieure et supérieure de la  $i$ ème patte. Ici, on représentera ces trois vecteurs en plus du vecteur solution  $\mathbf{r}$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Dans le but de simplifier le développement des équations représentant les conditions d'équilibrage, on suppose que pour le  $i$ ème vérin les centres de masse sont situés sur le segment de droite  $A_i B_i$ . Cette hypothèse s'applique aux six vérins. Ainsi,

$$\mathbf{c}_{pf} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{c}'_{pf} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{c}_{li} = \mathbf{a}_i + \alpha_i(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}_{ui} = \mathbf{a}_i + \beta_i(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.9)$$

avec

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b}'_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.10)$$

et où  $\mathbf{c}'_{pf}$  est un vecteur reliant l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  au centre de masse de la plateforme et exprimé dans  $\mathcal{R}'$ , et dont les composantes sont données par

$$\mathbf{c}'_{pf} = \begin{bmatrix} c'_{pfx} \\ c'_{pfy} \\ c'_{pfsz} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Par ailleurs, les paramètres adimensionnels  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont définis par

$$\alpha_i = \frac{d_{li}}{\rho_i}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.12)$$

$$\beta_i = \frac{\rho_i - d_{ui}}{\rho_i}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.13)$$

où  $d_{li}$  est la position du centre de masse de la partie inférieure du vérin  $i$  par rapport au point  $A_i$ ,  $d_{ui}$  la position du centre de masse de sa partie supérieure par rapport au point  $B_i$  et  $\rho_i$  la variable représentant le mouvement de translation de la  $i$ ème patte. On note également que  $\rho_i$  correspond à la longueur totale du  $i$ ème vérin.

En substituant les équations (2.7), (2.8) et (2.9) dans l'équation (2.5), on obtient

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{1}{M} \left[ \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{ix}}{\rho_i} \right) - p_x \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{11} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) - q_{12} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. q_{13} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_x + F_x q_{11} + F_y q_{12} + F_z q_{13} + G_x \right] \\ r_y &= \frac{1}{M} \left[ \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iy}}{\rho_i} \right) - p_y \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{21} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) - q_{22} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. q_{23} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_y + F_x q_{21} + F_y q_{22} + F_z q_{23} + G_y \right] \\ r_z &= \frac{1}{M} \left[ \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) - p_z \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{31} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) - q_{32} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. q_{33} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_z + F_x q_{31} + F_y q_{32} + F_z q_{33} + G_z \right] \end{aligned}$$

et où les coefficients sont définis par

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.15)$$



$$E = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{ui} \mathbf{b}'_i) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 (m_{ui} \mathbf{a}_i) \quad (2.18)$$

$D_i$ ,  $E$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $G_x$ ,  $G_y$  et  $G_z$  étant constants.

Comme il a été mentionné au chapitre 1, on doit, pour équilibrer statiquement ce manipulateur, déterminer son énergie potentielle totale  $V$  et s'assurer que celle-ci demeure constante pour toute configuration donnée du manipulateur. Puisqu'il s'agit d'un équilibrage statique et non pas dynamique, cette propriété de l'énergie potentielle doit être satisfaite lorsque le manipulateur est immobile. Ainsi, l'énergie potentielle totale associée à une configuration donnée du manipulateur doit être identique à celle liée à une autre configuration. Cependant, cette condition d'énergie potentielle totale constante ne s'applique pas nécessairement (et n'a pas à s'appliquer) lors du mouvement de transition d'une configuration vers l'autre.

De plus, toujours à la lumière de la théorie élaborée au chapitre 1, étant donné qu'aucun élément élastique (ressort) n'est utilisé dans ce manipulateur, équilibrer statiquement celui-ci revient à satisfaire la condition suivante: le centre de masse global du mécanisme ne doit pas se déplacer dans la direction du vecteur gravité, soit la direction de l'axe  $z$  du repère de base, pour tout mouvement du mécanisme. En d'autres mots, le manipulateur pourra être équilibré statiquement en autant que la hauteur de son centre de masse global demeure constante lorsque la configuration du mécanisme change. Cette condition correspond à

$$r_z = \text{cte} \quad (2.19)$$

Par ailleurs, il est à noter que l'équation de l'énergie potentielle totale  $V$  du manipulateur, donnée par

$$V = V_g = Mgr_z = \text{cte} \quad (2.20)$$

peut tout aussi bien être utilisée pour trouver les conditions d'équilibrage statique.

Cependant, puisque les équations (2.19) et (2.20) ne diffèrent que par la multiplication d'un terme constant, en l'occurrence  $Mg$ , on préférera utiliser directement l'équation (2.19).

Ainsi donc, seule la composante en  $z$  de l'équation (2.14) est prise en considération et l'objectif d'équilibrage statique sera atteint si, pour toute configuration du manipulateur,

$$r_z = \frac{1}{M} \left[ \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) - p_z \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{31} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) - q_{32} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - q_{33} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + Ep_z + F_x q_{31} + F_y q_{32} + F_z q_{33} + G_z \right] = \text{cte} \quad (2.21)$$

Or, imposer une valeur constante à une fonction revient en fait à évaluer à zéro ses dérivées par rapport aux variables indépendantes présentes, en l'occurrence les variables  $\rho_i$  (où  $i = 1, \dots, 6$ ) dans ce cas-ci, dans l'équation de cette fonction. Ainsi, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_z}{\partial \rho_i} = & \frac{1}{M} \left[ -\frac{D_i a_{iz}}{\rho_i^2} - \frac{\partial p_z}{\partial \rho_i} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) + \frac{p_z D_i}{\rho_i^2} - \frac{\partial q_{31}}{\partial \rho_i} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) + \right. \\ & q_{31} \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i^2} - \frac{\partial q_{32}}{\partial \rho_i} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) + q_{32} \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i^2} - \frac{\partial q_{33}}{\partial \rho_i} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + \\ & \left. q_{33} \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i^2} + E \frac{\partial p_z}{\partial \rho_i} + F_x \frac{\partial q_{31}}{\partial \rho_i} + F_y \frac{\partial q_{32}}{\partial \rho_i} + F_z \frac{\partial q_{33}}{\partial \rho_i} \right] = 0, \\ & i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans l'équation (2.22), tous les termes contiennent au moins une variable de configuration parmi  $\rho_i$ ,  $p_z$ ,  $q_{31}$ ,  $q_{32}$  et  $q_{33}$ , ou une combinaison de celles-ci. Une façon de satisfaire cette équation (et par le fait même l'équation (2.21)) est d'imposer une valeur nulle aux coefficients de chacun des termes. De là, un ensemble de conditions suffisantes satisfaisant cette dernière équation est obtenu et donné par les équations

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.23)$$

$$E = 0 \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

lesquelles sont communément appelées **conditions d'équilibrage statique**. Quant à l'expression de l'énergie potentielle totale du manipulateur, celle-ci se réduit simplement à

$$r_z = G_z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^6 (m_{li} a_{iz}) = \text{cte} \quad (2.26)$$

Cependant, une brève observation de la condition sur  $E$ , donnée par

$$E = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{wi} = 0, \quad (2.27)$$

permet de constater que seule la solution triviale, voulant que presque toutes les masses du système soient nulles (une masse est une quantité strictement positive), est possible, ce qui démontre que la plate-forme de Gough-Stewart prise telle quelle ne peut être équilibrée statiquement.

Cependant, étant donné l'objectif d'équilibrage de cette dernière, l'ajout de nouveaux éléments à sa structure de base doit donc être considéré. Cela fait justement l'objet des prochaines sections de ce chapitre.

### 2.1.1 Sévérité des conditions d'équilibrage statique

Comme il a été mentionné plus haut, les conditions d'équilibrage statique pour un mécanisme donné sont déterminées en imposant une valeur nulle aux coefficients des termes qui dépendent de la configuration du mécanisme dans l'équation de son énergie potentielle totale. Or, la forme des équations représentant ces conditions dépend directement de la façon dont l'énergie potentielle est exprimée, c'est-à-dire du choix des variables décrivant la configuration. Ainsi, divers choix de variables de configuration pour décrire l'énergie potentielle d'un mécanisme mèneront à autant d'ensembles de conditions d'équilibrage statique différents. Par ailleurs, les conditions d'équilibrage obtenues seront d'autant plus faciles à interpréter physiquement que le choix des paramètres décrivant le système étudié sera approprié.

En outre, il est important de mentionner que la procédure décrite ci-haut mènera en général à des conditions d'équilibrage suffisantes, mais en général non nécessaires, bien que celles-ci constituent en pratique des conditions nécessaires pour l'équilibrage de la grande majorité des mécanismes. En d'autres mots, cette procédure établie par Berkof et Lowen (Berkof et Lowen 1969) permet d'obtenir des conditions tout-à-fait valides, mais plus sévères que le minimum requis pour l'équilibrage parfait, si bien qu'il devient dès lors possible de trouver des exemples de mécanismes équilibrés ne vérifiant pas ces conditions d'équilibrage (Gosselin 1997). Cela s'explique par le fait que les variables décrivant la configuration du manipulateur sont considérées comme étant toutes

indépendantes les unes des autres alors qu'en réalité, elles ne le sont généralement pas. Parallèlement à cela, dans certains cas, des expressions non-linéaires de ces variables, comme par exemple  $\sin \theta_{1j}$  et  $\cos \theta_{1j}$  (ces expressions sont rencontrées dans les sections subséquentes), sont également traitées comme étant indépendantes l'une de l'autre, alors qu'en réalité elle ne le sont pas, de toute évidence. Il convient de rappeler que l'objectif visé est de trouver un ensemble de conditions suffisantes menant à des mécanismes statiquement équilibrés généraux débouchant sur des applications pratiques. Pour ce faire, ces conditions ne doivent pas s'avérer trop restrictives. En général, la méthode de Berkof et Lowen sera appropriée pour la détermination des conditions d'équilibrage statique d'un mécanisme donné. La notion de suffisance versus nécessité des conditions d'équilibrage statique découlant de l'emploi de cette méthode est traitée en détails pour les mécanismes plans à quatre (4) barres dans (Gosselin 1997).

Pour revenir au cas de la plate-forme de Gough-Stewart, les variables  $\rho_i$  (où  $i = 1, \dots, 6$ ), ainsi que les coefficients du vecteur  $\mathbf{p}$  et de la matrice  $\mathbf{Q}$  sont toutes des variables de configuration, mais comme le manipulateur ne possède que six (6) degrés de liberté, seulement six (6) de ces variables *indépendantes* sont nécessaires pour en décrire exactement la configuration. Ici, les  $\rho_i$  (où  $i = 1, \dots, 6$ ) sont choisies comme étant les variables indépendantes. Par conséquent, toutes les autres variables présentes dans l'expression de l'énergie potentielle totale du manipulateur en sont dépendantes. Cependant, il est bien souvent très difficile de trouver des fonctions explicites des variables dépendantes en fonction des variables indépendantes du mécanisme, d'où l'emploi de la méthode de Berkof et Lowen ici. Fait intéressant à noter, de façon générale, le fait de tenter de réduire au minimum le nombre de variables dépendantes n'assurera pas pour autant l'obtention de conditions d'équilibrage statique facilement applicables en pratique. En fait, les conditions dans un tel cas peuvent devenir plus restrictives, en ce sens qu'il peut en résulter un ensemble plus restreint de mécanismes équilibrés<sup>1</sup>. Cela est bien démontré dans (Gosselin 1997). À partir de ces résultats, une question se pose:

---

<sup>1</sup>En raison du nombre plus élevé de paramètres que d'équations d'équilibrage statique, un mécanisme pouvant être équilibré statiquement pourra l'être d'une infinité de façons, d'où le concept d'ensemble de mécanismes équilibrés statiquement, communément appelé *lieu des mécanismes statiquement équilibrés*. Cette caractéristique de l'équilibrage statique est montrée plus loin dans ce document.

Comment optimiser les conditions d'équilibrage statique? En d'autres termes, comment faire en sorte que le nombre de ces conditions soit minimal<sup>2</sup>? Cette question a été soulevée dans (Ebert-Uphoff et al. 1998) et bien qu'aucune réponse formelle n'ait été donnée, il a été démontré que l'objectif de solution la plus générale possible d'équilibrage statique, et donc la moins contraignante possible, sera généralement atteint en tentant de minimiser le nombre de termes contenant des variables dépendantes ou des combinaisons de celles-ci — soit avec d'autres variables dépendantes ou avec des variables indépendantes — dans l'expression de l'énergie potentielle totale du mécanisme, plutôt que de chercher à minimiser le nombre de variables dépendantes.

## 2.2 Plate-forme de Gough-Stewart et pattes supplémentaires

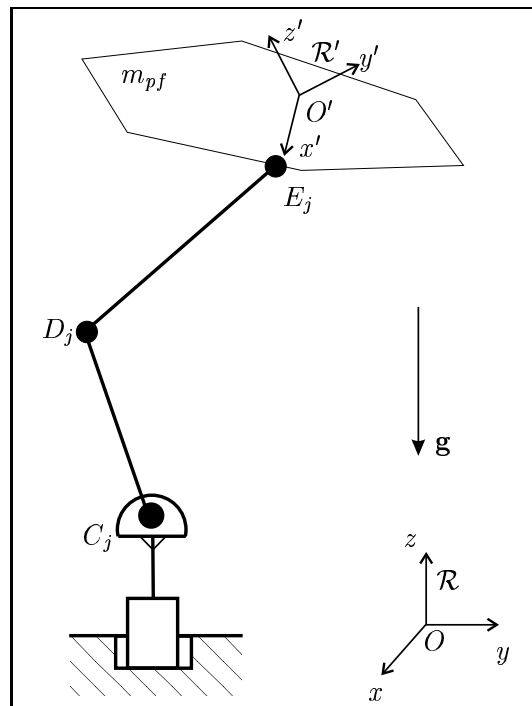


Figure 2.2: Modèle de patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique.

<sup>2</sup>Un nombre plus restreint de conditions, et donc d'équations, laissera davantage de paramètres architecturaux "libres" et mènera la plupart du temps à une solution plus générale, ce qui est justement l'objectif visé.

La preuve ayant maintenant été faite à l'effet que la plate-forme de Gough-Stewart est une structure qu'on ne peut équilibrer statiquement, la suite logique de cette étude consiste à tenter de rendre ce manipulateur équilibré en **ajoutant** divers éléments à sa structure. À ce sujet, une des difficultés majeures que comporte ce travail d'analyse réside dans la façon de disposer et d'agencer ces nouveaux éléments avec le mécanisme existant. En effet, il s'agit non seulement de le rendre équilibré statiquement, mais également d'obtenir des conditions d'équilibrage qui ne soient pas trop contraignantes, que ce soit au niveau de l'architecture modifiée du manipulateur, de ses nouvelles propriétés dynamiques ou de son espace de travail.

Comme cela a été montré au chapitre 1, il est possible d'utiliser divers types d'éléments pour équilibrer statiquement un manipulateur. En fait, on peut regrouper ces éléments en deux catégories: les membrures et masses ponctuelles et les éléments élastiques (ressorts). Étant donné que les ressorts possèdent en général une masse faible, et donc une inertie réduite, l'ajout de ceux-ci à une structure mécanique n'affectera presque pas ses propriétés dynamiques. En revanche, l'ajout de masses ponctuelles ou de membrures amènera nécessairement une augmentation de l'inertie globale du mécanisme, ce qui n'est pas souhaitable, tant du point de vue des propriétés dynamiques du système que du contrôle. C'est pourquoi uniquement l'ajout de ressorts a été considéré en guise de première tentative d'équilibrer statiquement la plate-forme de Gough-Stewart.

À cet effet, plusieurs types d'arrangements de ressorts dans la structure du manipulateur ont été étudiés. Ce que les résultats obtenus ont démontré, c'est que peu importe l'endroit où les ressorts étaient attachés dans la structure du manipulateur — sur la membrure proximale des vérins, sur leur membrure distale ou sur la plate-forme mobile —, ils ne contribuaient pas à rendre le manipulateur statiquement équilibré. En fait, les conditions d'équilibrage ne pouvaient être satisfaites que pour une raideur nulle des ressorts présents, d'où leur inutilité. Les détails de ces résultats sont présentés à la section A.1 de l'annexe A.

Étant donné ce résultat, l'étape suivante a été d'ajouter des membrures à la structure du manipulateur. En fait, comme il est montré à la figure 2.2, ce sont des pattes

composées d'une articulation rotoïde à axe vertical passant par le point  $C_j$ , d'une seconde articulation rotoïde en  $C_j$ , d'une membrure proximale  $C_jD_j$ , d'une autre articulation rotoïde au point  $D_j$ , d'une membrure distale  $D_jE_j$  et finalement d'une articulation sphérique au point  $E_j$ . Ici, une seule patte d'équilibrage est représentée, soit la jème. (pour plus de détails, voir la section A.2.1). L'analyse des conditions d'équilibrage statique a montré que ce manipulateur modifié pouvait être statiquement équilibré. En fait, le constat suivant avait déjà été émis dans (Ye et Smith 1994):

*Il faut au moins une chaîne cinématique ne possédant aucune liaison prismatique entre la base et l'effecteur d'un manipulateur pour que celui-ci puisse être statiquement équilibré.*

Cependant, il se peut que les conditions d'équilibrage soient parfois trop sévères relativement à l'objectif visé. Qu'il s'agisse, par exemple, de masses à ajouter trop élevées ou de conditions voulant que le centre de masse de certaines des membrures ajoutées soit trop éloigné de leur centre géométrique, il pourrait en résulter un équilibrage menant à une détérioration significative des propriétés dynamiques du manipulateur concerné. C'est pourquoi la contribution des ressorts a à nouveau été analysée, mais cette fois en liant ceux-ci aux pattes supplémentaires au lieu des vérins. Ainsi, une analyse faite à l'annexe A a démontré que pour une patte donnée (voir figure 2.2), un ressort attaché entre un point fixe dans l'espace et la membrure proximale  $C_jD_j$  pouvait contribuer à réduire la masse de cette membrure, d'où l'obtention d'un meilleur équilibrage statique.

À l'inverse, il a été montré qu'un ressort reliant la membrure distale  $D_jE_j$  à un autre point fixe dans l'espace ne contribuait aucunement à l'équilibrage car celui-ci génère des termes d'énergie potentielle ne pouvant se combiner aux termes d'énergie potentielle gravitationnelle. Or, dans certaines applications, comme dans les simulateurs de vol par exemple, la masse de l'effecteur de la plate-forme de Gough-Stewart est très élevée. Pour équilibrer cette masse importante avec la patte de la figure 2.2, les conditions d'équilibrage (voir en particulier l'équation (A.89)) ont révélé que la masse de la membrure distale de la patte devait être très grande, ce qui, pour les raisons invoquées plus haut, n'est pas souhaitable. Afin de faire en sorte que cette masse soit diminuée, il a fallu trouver un moyen de tirer profit de la présence de ressorts supplémentaires, le plus près possible de la plate-forme mobile. Or, c'est justement ce que permettent de faire les parallélogrammes (Streit et Shin 1990) dans l'architecture des pattes d'équilibrage.





gravité et passant par le point  $F_j$  —, une membrure distale  $D_jE_j$  et une articulation sphérique au point  $E_j$ . Ce mécanisme est inspiré des mécanismes d'équilibrage plans présentés dans (Streit et Shin 1990). De plus, de par la nature même du parallélogramme, les barres  $G_jH_j$  et  $C_jD_j$  sont identiques et demeurent parallèles en tout temps, peu importe la configuration de la patte. Cette caractéristique s'applique également aux barres  $C_jG_j$  et  $D_jH_j$  entre elles. Or, c'est précisément cette dernière propriété du parallélogramme qui est exploitée ici pour l'atteinte de l'équilibrage statique. Dans le présent mécanisme à parallélogramme, dit d'équilibrage, on tire profit du fait que les barres  $C_jG_j$  et  $D_jH_j$  demeurent en tout temps à l'horizontale, c'est-à-dire parallèles au sol, lorsque le manipulateur est en mouvement. En fixant des membrures (triangles gris) rigidement à ces barres horizontales, on s'assure également qu'il n'y ait pas de mouvement relatif entre les pivots et les points d'attache des ressorts. Cette condition est essentielle pour que les termes d'énergie potentielle générés par les ressorts puissent se combiner avec les termes d'énergie potentielle gravitationnelle. (pour plus de détails, voir la section A.2.4) Pour le ressort de raideur  $k_{lj}$ , situé sur la partie inférieure de la patte, le pivot est le point  $G_j$  et les points d'attache sont le point  $P_{aj}$ , lequel se trouve sur le segment  $G_jH_j$ , et le point  $P_{bj}$ . De la même manière, pour le ressort de raideur  $k_{uj}$ , situé sur la partie supérieure de la patte, le pivot est le point  $D_j$  et les points d'attache sont le point  $P_{cj}$ , lequel est situé sur le segment  $D_jE_j$ , et le point  $P_{dj}$ . D'autre part, il est important de mentionner que chaque nouvelle patte à six degrés de liberté ajoutée à la plate-forme de Gough-Stewart est un mécanisme passif, c'est-à-dire non-actionné.

Aussi, étant donné que de nouvelles composantes sont ajoutées au manipulateur parallèle spatial à six degrés de liberté, de nouveaux repères, vecteurs et matrices doivent être définis. Ainsi, un repère désigné  $O_{1j}-x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  est lié au parallélogramme au point  $F_j$ , dont les coordonnées dans le repère de base sont  $(f_{jx}, f_{jy}, f_{jz})$ , où  $j = 1, \dots, n$  et  $n$  est le nombre ajouté de pattes d'équilibrage. Aussi, l'axe  $y_{1j}$  pointe dans la direction du segment  $F_jC_j$ , alors que l'axe  $z_{1j}$  pointe verticalement vers le haut, dans la direction du vecteur gravité, mais en sens inverse.

Par ailleurs, on définit la variable articulaire  $\gamma_j$  comme étant l'angle entre la direction positive de l'axe  $x$  du repère de base  $\mathcal{R}$  et celle de l'axe  $x_{1j}$ , ce dernier étant contenu dans le plan  $xy$  du repère de base. On peut alors exprimer la matrice de rotation

donnant l'orientation du repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  par rapport au repère de base comme étant

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j & 0 \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

De façon analogue, un second repère, noté  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$ , est attaché au parallélogramme, mais cette fois au point  $C_j$ , dont les coordonnées exprimées dans le repère de base  $\mathcal{R}$  sont  $(c_{jx}, c_{jy}, c_{jz})$ . Quant à l'axe  $z_{2j}$ , il pointe du point  $C_j$  au point  $D_j$ , alors que l'axe  $x_{2j}$  coïncide avec l'axe de rotation de l'articulation rotoïde du point  $C_j$  et pointe vers l'extérieur de la feuille lorsque le mécanisme est dans la configuration montrée à la figure 2.3.

En outre, on définit un autre angle, soit  $\theta_j$ , comme étant la variable articulaire de liaison rotoïde au point  $C_j$ . On peut dès lors écrire la matrice de rotation donnant l'orientation du repère mobile  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$  par rapport au repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$ . Ainsi,

$$\mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

Avec les différents paramètres décrits plus haut, les centres de masse de chacune des cinq (5) barres de la  $j$ ème patte spéciale peuvent maintenant être définis. Ainsi, les vecteurs  $\mathbf{c}_{p0j}$ ,  $\mathbf{c}_{p1j}$ ,  $\mathbf{c}_{p2j}$ ,  $\mathbf{c}_{p3j}$  et  $\mathbf{c}_{p4j}$  sont respectivement les vecteurs position du centre de masse des membrures  $G_j C_j$  (incluant le triangle),  $C_j D_j$ ,  $D_j E_j$ ,  $G_j H_j$  et  $H_j D_j$  (incluant le triangle) par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}$  et sont exprimés dans ce même repère. Ils sont donnés par

$$\mathbf{c}_{p0j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} (\mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{r}_{p0j}), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

$$\mathbf{c}_{p1j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{r}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

$$\mathbf{c}_{p2j} = \mathbf{d}_j + \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

$$\mathbf{c}_{p3j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} (\mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{l}_{D_j H_j}) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{r}_{p3j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$\mathbf{c}_{p4j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} (\mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{r}_{p4j}) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{l}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{l}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{e}'_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

et

$$\mathbf{l}_{F_j C_j} = [0, l_{F_j C_j}, 0]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

$$\mathbf{l}_{D_j H_j} = [0, -l_{D_j H_j}, 0]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.38)$$

$$\mathbf{l}_{p1j} = [0, 0, l_{p1j}]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{l}_{F_j C_j}$  et  $\mathbf{l}_{D_j H_j}$  sont les vecteurs reliant respectivement les points  $F_j$  à  $C_j$  et  $D_j$  à  $H_j$ , et  $\mathbf{r}_{p0j}$  et  $\mathbf{r}_{p4j}$  les vecteurs donnant la position des centres de masse des membrures  $G_j C_j$  et  $H_j D_j$ . Ces vecteurs sont exprimés dans leurs repères locaux respectifs situés dans l'ordre aux points  $F_j$ ,  $D_j$ ,  $C_j$  et  $D_j$  et ayant la même orientation que le repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$ ;  $\mathbf{l}_{p1j}$ ,  $\mathbf{r}_{p1j}$  et  $\mathbf{r}_{p3j}$  sont les vecteurs représentant respectivement la longueur de la membrure  $C_j D_j$  et la position des centres de masse des membrures  $C_j D_j$  et  $G_j H_j$ . Ces vecteurs sont exprimés dans leurs repères locaux respectifs situés aux points  $C_j$  et  $G_j$  et ayant la même orientation que le repère mobile  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$ ;  $\mathbf{d}_j$ ,  $\mathbf{e}_j$  et  $\mathbf{f}_j$  sont les vecteurs donnant respectivement la position des points  $D_j$ ,  $E_j$  et  $F_j$  par rapport à l'origine du repère fixe  $\mathcal{R}$ , ces derniers étant aussi exprimés dans  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{e}'_j$  est un vecteur reliant l'origine du repère  $\mathcal{R}'$ , attaché à la plate-forme mobile, au point  $E_j$ . Ce vecteur est exprimé dans  $\mathcal{R}'$ .

Comme dans le cas des actionneurs prismatiques, on suppose, afin de simplifier l'analyse, que le centre de masse de la membrure  $D_j E_j$  est situé sur l'axe longitudinal (fibre neutre) de la membrure. Ainsi, les scalaires  $r_{p2j}$  et  $l_{p2j}$  représentent respectivement la position du centre de masse de la barre  $D_j E_j$  par rapport au point  $D_j$ , et la longueur de la membrure  $D_j E_j$ . L'équation (2.5) devient alors

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf} \mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} \mathbf{c}_{li} + m_{ui} \mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^4 (m_{pkj} \mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (2.40)$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^4 m_{pkj} \quad (2.41)$$

où  $m_{pkj}$  est la masse de la  $k$ ème membrure de la  $j$ ème patte ajoutée.

Finalement, l'énergie potentielle gravitationnelle  $V_g$  est donnée par

$$V_g = M g r_z \quad (2.42)$$

où  $r_z$  est la composante du vecteur  $\mathbf{r}$  dans la direction du champ gravitationnel et  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

Cependant, étant donné la présence de ressorts dans le mécanisme global, leur contribution doit alors être également considérée dans le processus d'équilibrage statique. Ce faisant, l'énergie potentielle totale s'exprime alors comme étant

$$V = V_g + V_e \quad (2.43)$$

où  $V_e$ , l'énergie potentielle élastique, s'écrit, pour ce mécanisme

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_{l_j} e_{l_j}^2 + k_{u_j} e_{u_j}^2) \quad (2.44)$$

où  $k_{l_j}$  est la raideur du ressort inférieur de la  $j$ ème patte et  $e_{l_j}$  sa longueur, tandis que  $k_{u_j}$  est la raideur du ressort supérieur de la  $j$ ème patte et  $e_{u_j}$  sa longueur.

Il est important de mentionner que l'on considère la longueur non-déformée (longueur libre) des ressorts nulle, et ce, dans le but d'obtenir un équilibrage parfait (Streit et Shin 1990). Un des critères importants de la méthode employée pour trouver les conditions d'équilibrage pour un système donné est le fait que les termes dits *élastiques* doivent pouvoir se combiner avec les termes dits *gravitationnels*. En quelque sorte, les uns doivent contrebalancer les autres dans les différentes conditions d'équilibrage. À l'inverse, une longueur libre non-nulle pour un ressort donné mène inévitablement à des termes élastiques qui ne peuvent se combiner à des termes gravitationnels, ce qui conduit à des solutions triviales (par exemple: raideurs de ressort nulles, masses nulles). D'un point de vue pratique, cette condition essentielle est facilement réalisable. Cela est d'ailleurs clairement démontré dans la référence citée ci-haut.

Quant aux longueurs des ressorts, celles-ci peuvent être exprimées à l'aide de la loi des cosinus (voir la figure 2.4), ce qui donne

$$e_{l_j} = \sqrt{h_{l_j}^2 + l_{l_j}^2 - 2h_{l_j}l_{l_j} \cos(\theta_j + \alpha_{l_j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

$$e_{u_j} = \sqrt{h_{u_j}^2 + l_{u_j}^2 - 2h_{u_j}l_{u_j} \cos(\beta_j + \alpha_{u_j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

où  $h_{l_j}$  et  $l_{l_j}$  sont les distances reliant l'articulation rotoïde, située au point  $G_j$ , aux points d'attache  $P_{a_j}$  et  $P_{b_j}$  du ressort inférieur (figure 2.3), alors que  $h_{u_j}$  et  $l_{u_j}$  sont les distances entre l'articulation rotoïde, située au point  $D_j$ , et les points d'attache  $P_{c_j}$

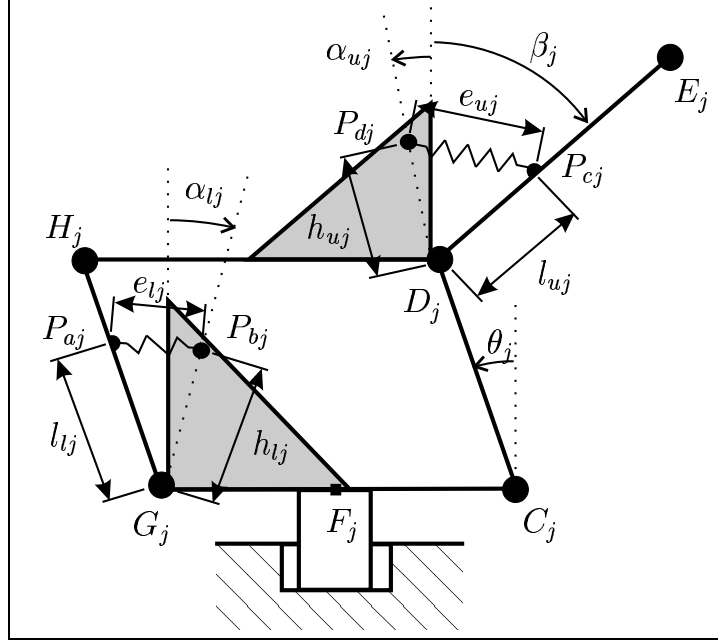


Figure 2.4: Patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme, de type *I*: position des ressorts.

et  $P_{dj}$  du ressort supérieur. Les angles  $\alpha_{lj}$  et  $\alpha_{uj}$  sont, quant à eux, des paramètres constants permettant de définir précisément la position des points  $P_{bj}$  et  $P_{dj}$ .

En utilisant une des identités trigonométriques fondamentales, on peut réécrire les équations (2.45) et (2.46) comme suit:

$$e_{lj} = \sqrt{h_{lj}^2 + l_{lj}^2 - 2h_{lj}l_{lj}(\cos \theta_j \cos \alpha_{lj} - \sin \theta_j \sin \alpha_{lj})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

$$e_{uj} = \sqrt{h_{uj}^2 + l_{uj}^2 - 2h_{uj}l_{uj}(\cos \beta_j \cos \alpha_{uj} - \sin \beta_j \sin \alpha_{uj})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

Finalement, les termes  $\cos \beta_j$  et  $\sin \beta_j$  peuvent être exprimés comme des fonctions de l'angle  $\theta_j$  ainsi que de la position et de l'orientation de la plate-forme. Ainsi,

$$\cos \beta_j = \frac{e_{jz} - d_{jz}}{l_{p2j}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

$$\sin \beta_j = \frac{e_{jxy} - d_{jxy}}{l_{p2j}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.50)$$

où la différence  $e_{jxy} - d_{jxy}$  est donnée par

$$e_{jxy} - d_{jxy} = \sqrt{(e_{jx} - d_{jx})^2 + (e_{jy} - d_{jy})^2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.51)$$

En substituant les équations (2.42), (2.44), (2.47) et (2.48) dans l'équation (2.43),

on obtient

$$\begin{aligned}
V = & p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{31} \left[ N_x - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) \right] + \\
& q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\
& g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega \quad (2.52)
\end{aligned}$$

avec les coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.53)$$

$$L = \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j} g r_{p2j} - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} = & \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 [m_{ui} \mathbf{b}'_i] \right) g + \\
& \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j} g r_{p2j} - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$P_j = (m_{p1j} r_{p1jy} + m_{p3j} r_{p3jy}) g + k_{lj} h_{lj} l_{lj} \sin \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}
R_j = & \left( [m_{p2j} + m_{p4j}] g - \frac{m_{p2j} g r_{p2j} - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j} + \\
& (m_{p1j} r_{p1jz} + m_{p3j} r_{p3jz}) g - k_{lj} h_{lj} l_{lj} \cos \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z = & g \sum_{i=1}^6 (m_{li} a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n (m_{p0j} r_{p0jz} + m_{p4j} r_{p4jz}) + \\
& g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p0j} + m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} + m_{p4j} \right] f_{jz} \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj} h_{uj} l_{uj} f_{jz} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{lj} [h_{lj}^2 + l_{lj}^2] + k_{uj} [h_{uj}^2 + l_{uj}^2] \right) \quad (2.58)
\end{aligned}$$

$D_i, L, \mathbf{N}, P_j, R_j$  et  $S_z$  étant constants.

Le coefficient  $\Omega$  est, quant à lui, donné par

$$\begin{aligned}
\Omega = & \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj} h_{uj} l_{uj} \sin \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \times \right. \\
& \left[ (p_x - f_{jx} + q_{11} e'_{jx} + q_{12} e'_{jy} + q_{13} e'_{jz} + l_{FjCj} \sin \gamma_j - l_{p1j} \sin \gamma_j \sin \theta_j)^2 + \right. \\
& \left. \left. (p_y - f_{jy} + q_{21} e'_{jx} + q_{22} e'_{jy} + q_{23} e'_{jz} - l_{FjCj} \cos \gamma_j + l_{p1j} \cos \gamma_j \sin \theta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Comme il a été défini précédemment, un mécanisme n'est statiquement équilibré que lorsque son énergie potentielle totale, laquelle est donnée par l'équation (2.52), est constante. Encore une fois ici, la méthode employée dans (Berkof et Lowen 1969) est utilisée pour déterminer les conditions d'équilibrage. Pour ce faire, on peut dériver l'équation de l'énergie potentielle totale  $V$  par rapport aux variables indépendantes décrivant la configuration, c'est-à-dire les  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), égaler l'équation résultante à zéro et par la suite trouver ces conditions en égalant à zéro les coefficients de tous les termes énergétiques contenant des variables de configuration du manipulateur. Cela est justement montré à la section 2.1. Cependant, il est possible de trouver les équations des conditions d'équilibrage de façon plus directe. En fait, on peut prendre directement l'équation de  $V$ , soit l'équation (2.52), et égaler à zéro les coefficients des termes qui dépendent des variables de configuration du manipulateur. Cela a pour effet de réduire l'expression de  $V$  à un terme uniquement constitué de paramètres constants et, par le fait même, d'obtenir le **même** ensemble de conditions suffisantes satisfaisant le critère d'énergie constante que celui trouvé avec la dérivée de  $V$ . La raison pour laquelle on retombe sur un ensemble identique de conditions d'équilibrage est que la dérivation ne fait qu'ajouter des termes multiplicateurs aux équations d'équilibrage et l'homogénéité de celles-ci rend ces termes inutiles. En effet, ceux-ci sont absorbés par la multiplication par zéro.

Par ailleurs, comme il a été mentionné à l'annexe A, pour obtenir un équilibrage statique basé sur des conditions plus faciles à satisfaire en pratique, on cherchera à utiliser des ressorts, comme c'est le cas ici, de telle sorte que les termes énergétiques qu'ils engendrent puissent se combiner aux termes d'énergie potentielle gravitationnelle. Or, on remarque dans l'équation (2.52) la présence du terme  $\Omega$ , qui dépend des variables de configuration du manipulateur mais qui ne peut se combiner aux autres termes, ce qui, en soit, est problématique dans l'optique de l'équilibrage. Toutefois, il est possible de contourner ce problème en faisant tout simplement disparaître  $\Omega$  de l'expression de  $V$ . Ainsi, en imposant la condition suivante sur le paramètre fixe  $\alpha_{uj}$ , c'est-à-dire

$$\alpha_{uj} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.60)$$

l'équation (2.59) se réduit alors à

$$\Omega = 0 \quad (2.61)$$

Physiquement, la condition (2.60) signifie que le point d'attache  $P_{dj}$  du ressort supérieur et le pivot  $D_j$  de la  $j$ ème patte d'équilibrage doivent être reliés par un segment de droite vertical, parallèle au vecteur gravité. Lorsque cette condition sera respectée, on obtiendra alors un ensemble de conditions suffisantes satisfaisant le critère d'énergie constante. Cet ensemble est donné par les équations

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.62)$$

$$L = 0 \quad (2.63)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.65)$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

menant ainsi à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (2.67)$$

En comparant ce mécanisme avec la plate-forme de Gough-Stewart prise seule, on peut voir que l'ensemble de conditions décrit ci-haut est similaire à celui obtenu à la section 2.1. Cependant, dans le cas présent, la présence des ressorts permet de rendre la plate-forme statiquement équilibrée. Cela apparaît évident en observant l'évolution de l'équation (2.24), qui avait conduit auparavant à une solution triviale. Cette dernière équation est maintenant remplacée par l'équation (2.54), laquelle permet l'équilibrage. Ainsi, on voit le rôle primordial que jouent les ressorts. De la même manière, toutes les autres équations de contraintes peuvent être satisfaites. Néanmoins, une analyse de ces équations montre que les conditions d'équilibrage peuvent parfois s'avérer trop sévères relativement à l'objectif visé et il en sera notamment question au chapitre 4. En effet, dans certains cas, les contraintes de design feront en sorte qu'il sera peu avantageux, voire inutile d'appliquer telles quelles les conditions d'équilibrage. En conséquence, l'analyse de différents modèles de pattes d'équilibrage s'avère ici des plus appropriées. À la section suivante, une version légèrement modifiée de la patte spéciale à un parallélogramme est présentée.

## 2.2.2 Patte spéciale à six (6) d.d.l. à deux parallélogrammes

Pour l'équilibrage statique de la plate-forme de Gough-Stewart, une patte composée de deux parallélogrammes — l'un au-dessus de l'autre — est maintenant utilisée. La



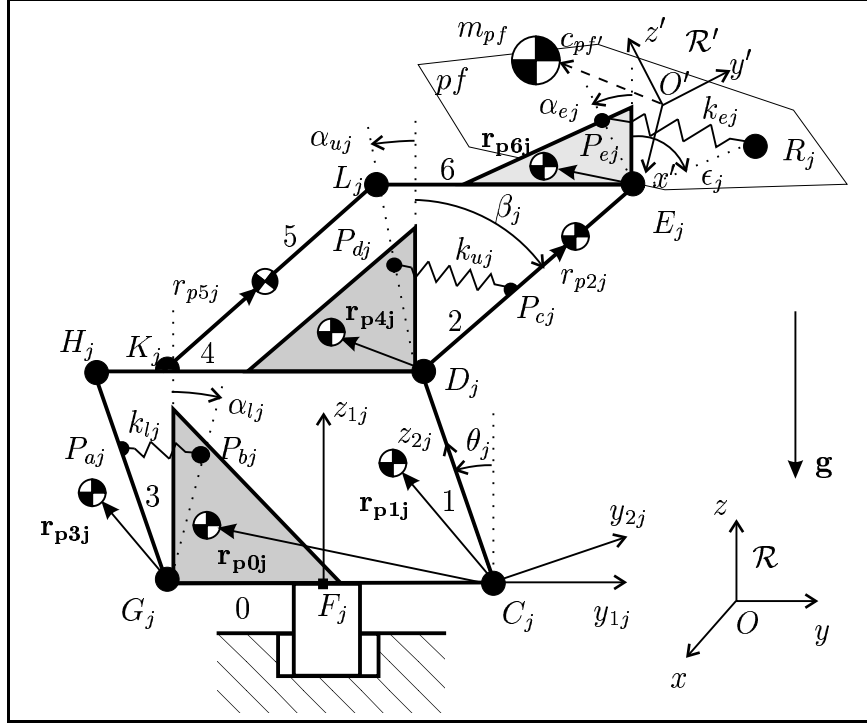


Figure 2.5: Architecture de la  $j$ ème patte à six (6) d.d.l. à deux parallélogrammes.

raison de cet ajout d'un parallélogramme supplémentaire à la patte est que l'on cherche à profiter de la contribution d'un ressort de plus, ce dernier liant le parallélogramme supérieur à la plate-forme (l'effecteur) du manipulateur (figure 2.5). L'étape suivante consiste à déterminer si les conditions d'équilibrage définies à la section précédente deviennent moins restrictives. En d'autres termes, on cherche à savoir si le fait d'ajouter un ressort apporte davantage de marge de manœuvre quant à la manière d'équilibrer statiquement le mécanisme étudié ici.

Comme ce nouveau mécanisme équilibrant est une version légèrement modifiée du précédent, toutes les quantités définies à la section 2.2.1 restent valides, avec la seule différence que de nouveaux éléments sont maintenant ajoutés. En gardant les mêmes repères de référence, on peut définir le centre de masse de chacune des deux membrures additionnelles de la patte spéciale. Les vecteurs  $\mathbf{c}_{p5j}$  et  $\mathbf{c}_{p6j}$ , exprimés dans le repère  $\mathcal{R}$ , relient l'origine de  $\mathcal{R}$  respectivement au centre de masse des membrures  $K_jL_j$  et

$L_j E_j$ <sup>3</sup>. Ainsi, on a

$$\mathbf{c}_{p5j} = \mathbf{d}_j + \frac{r_{p5j}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{l}_{E_j L_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.68)$$

$$\mathbf{c}_{p6j} = \mathbf{p} + \mathbf{Q} \mathbf{e}'_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{r}_{p6j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.69)$$

avec

$$\mathbf{l}_{E_j L_j} = [0, -l_{E_j L_j}, 0]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.70)$$

où  $\mathbf{l}_{E_j L_j}$  et  $\mathbf{r}_{p6j}$  sont respectivement le vecteur reliant les points  $E_j$  et  $L_j$  et celui reliant le point  $E_j$  au centre de masse de la membrure  $L_j E_j$ . Ces vecteurs sont exprimés dans leur repère local situé au point  $E_j$  et ayant la même orientation que le repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$ .

Comme dans le cas de la patte spéciale à un seul parallélogramme, on peut imposer, dans le but de simplifier le modèle, que le centre de masse de la membrure  $K_j L_j$  soit situé sur l'axe principal (la fibre neutre) de cette dernière. Ainsi, la position du centre de masse de  $K_j L_j$ , par rapport au point  $K_j$ , est donnée par la quantité scalaire  $r_{p5j}$ .

Bref, les changements mentionnés ci-haut ayant été effectués, on détermine maintenant la nouvelle énergie potentielle gravitationnelle  $V_g$ , laquelle est toujours exprimée par

$$V_g = M g r_z \quad (2.71)$$

mais où l'équation (2.40) de la section 2.2.1 pour  $r_z$  est remplacée par

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf} \mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} \mathbf{c}_{li} + m_{ui} \mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^6 (m_{pkj} \mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (2.72)$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^6 m_{pkj} \quad (2.73)$$

où  $m_{pkj}$  est la masse de la  $k$ ème membrure de la  $j$ ème patte ajoutée.

Par ailleurs, puisque la  $j$ ème patte d'équilibrage compte maintenant un troisième ressort dans sa structure, l'expression de l'énergie potentielle élastique pour le manipulateur est alors donnée par

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_{lj} e_{lj}^2 + k_{uj} e_{uj}^2 + k_{ej} e_{ej}^2) \quad (2.74)$$

---

<sup>3</sup>Le troisième triangle gris visible à la figure 2.5 est rigidement lié à la membrure  $L_j E_j$  et sert de support pour attacher le troisième ressort.

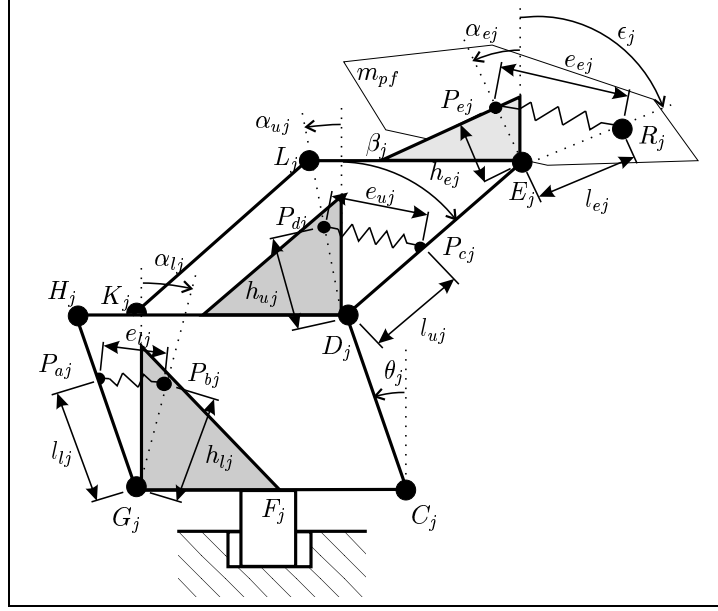


Figure 2.6: Patte à six (6) d.d.l. à deux parallélogrammes: position des ressorts.

où  $k_{ej}$  est la raideur du ressort reliant la plate-forme mobile au parallélogramme supérieur de la  $j$ ème patte et  $e_{ej}$  sa longueur. En appliquant la loi des cosinus (voir la figure 2.6), la longueur de ce troisième ressort peut s'écrire

$$e_{ej} = \sqrt{h_{ej}^2 + l_{ej}^2 - 2h_{ej}l_{ej} \cos(\epsilon_j + \alpha_{ej})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.75)$$

où  $h_{ej}$  et  $l_{ej}$  sont les distances entre l'articulation rotoïde située au point  $E_j$  et les points d'attache du troisième ressort (figure 2.5). Pour ce qui est de l'angle  $\alpha_{ej}$ , il s'agit d'un paramètre constant permettant de définir précisément la position du point  $P_{ej}$ .

L'équation (2.75) peut également s'écrire sous la forme suivante:

$$e_{ej} = \sqrt{h_{ej}^2 + l_{ej}^2 - 2h_{ej}l_{ej} (\cos \epsilon_j \cos \alpha_{ej} - \sin \epsilon_j \sin \alpha_{ej})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.76)$$

où les expressions  $\cos \epsilon_j$  et  $\sin \epsilon_j$  sont définies comme des fonctions de la position et de l'orientation de la plate-forme, c'est-à-dire,

$$\cos \epsilon_j = \frac{r_{jz} - e_{jz}}{l_{ej}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.77)$$

$$\sin \epsilon_j = \frac{r_{jxy} - e_{jxy}}{l_{ej}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.78)$$

où  $r_{jz}$  est la composante en  $z$  du vecteur  $\mathbf{r}_j$ , donnant la position du point  $R_j$  — l'endroit sur la plate-forme du manipulateur où le ressort est attaché — par rapport à l'origine du repère fixe  $\mathcal{R}$  et exprimé dans  $\mathcal{R}$ .

Quant à la différence  $r_{jxy} - e_{jxy}$ , elle est donnée par

$$r_{jxy} - e_{jxy} = \sqrt{(r_{jx} - e_{jx})^2 + (r_{jy} - e_{jy})^2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.79)$$

Par ailleurs, puisque  $l_{ej}$  représente en fait la distance entre les points  $E_j$  et  $R_j$ , on a aussi la relation

$$l_{ej} = \|\mathbf{r}'_j - \mathbf{e}'_j\| = \sqrt{(r'_{jx} - e'_{jx})^2 + (r'_{jy} - e'_{jy})^2 + (r'_{jz} - e'_{jz})^2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.80)$$

où les vecteurs sont définis par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  de la plate-forme et exprimés dans ce dernier<sup>4</sup>.

Pour ce qui est des longueurs  $e_{lj}$  et  $e_{uj}$  pour les deux autres ressorts, elles sont encore une fois définies par les équations (2.47) et (2.48) de la section précédente.

Finalement, en substituant les équations (2.47), (2.48) et (2.76) dans l'équation (2.74) et en additionnant cette dernière à l'équation (2.71), on trouve l'expression de l'énergie potentielle totale pour ce manipulateur muni de pattes d'équilibrage à deux parallélogrammes. Ainsi,

$$\begin{aligned} V = & p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{31} \left[ N_x - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega + \Gamma \end{aligned} \quad (2.81)$$

avec comme coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} L = & \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} \right) g + \\ & \sum_{j=1}^n \left( \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p5j} r_{p5j}] g - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} + m_{p6j} g \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 [m_{ui} \mathbf{b}'_i] \right) g +$$

---

<sup>4</sup>De toute évidence, le choix du repère importe peu dans le calcul d'une distance. La distance  $l_{ej}$  aurait tout aussi bien pu être calculée en utilisant des vecteurs définis par rapport à l'origine de  $\mathcal{R}$ .

$$\sum_{j=1}^n \left( \left[ \frac{(m_{p2j}r_{p2j} + m_{p5j}r_{p5j})g - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} + k_{ej}h_{ej} \cos \alpha_{ej} + m_{p6j}g \right] \mathbf{e}'_j - k_{ej}h_{ej} \cos \alpha_{ej} \mathbf{r}'_j \right) \quad (2.84)$$

$$P_j = (m_{p1j}r_{p1jy} + m_{p3j}r_{p3jy})g + k_{lj}h_{lj}l_{lj} \sin \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.85)$$

$$R_j = \left( [m_{p2j} + m_{p4j} + m_{p5j}]g - \frac{(m_{p2j}r_{p2j} + m_{p5j}r_{p5j})g - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j} + (m_{p1j}r_{p1jz} + m_{p3j}r_{p3jz})g - k_{lj}h_{lj}l_{lj} \cos \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.86)$$

$$S_z = g \sum_{i=1}^6 (m_{li}a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n (m_{p0j}r_{p0jz} + m_{p4j}r_{p4jz} + m_{p6j}r_{p6jz}) + g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p0j} + m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} + m_{p4j} + m_{p5j} \left( 1 - \frac{r_{p5j}}{l_{p2j}} \right) \right] f_{jz} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj}h_{uj}l_{uj}f_{jz} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_{lj} [h_{lj}^2 + l_{lj}^2] + k_{uj} [h_{uj}^2 + l_{uj}^2] + k_{ej} [h_{ej}^2 + (r'_{jx} - e'_{jx})^2 + (r'_{jy} - e'_{jy})^2 + (r'_{jz} - e'_{jz})^2]) \quad (2.87)$$

$D_i, L, \mathbf{N}, P_j, R_j$  et  $S_z$  étant constants.

Les coefficients  $\Omega$  et  $\Gamma$  sont, quant à eux, donnés par

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj}h_{uj}l_{uj} \sin \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \times \left[ (p_x - f_{jx} + q_{11}e'_{jx} + q_{12}e'_{jy} + q_{13}e'_{jz} + l_{FjCj} \sin \gamma_j - l_{p1j} \sin \gamma_j \sin \theta_j)^2 + (p_y - f_{jy} + q_{21}e'_{jx} + q_{22}e'_{jy} + q_{23}e'_{jz} - l_{FjCj} \cos \gamma_j + l_{p1j} \cos \gamma_j \sin \theta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.88)$$

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n (k_{ej}h_{ej} \sin \alpha_{ej} \times \left[ (q_{11} [r'_{jx} - e'_{jx}] + q_{12} [r'_{jy} - e'_{jy}] + q_{13} [r'_{jz} - e'_{jz}])^2 + (q_{21} [r'_{jx} - e'_{jx}] + q_{22} [r'_{jy} - e'_{jy}] + q_{23} [r'_{jz} - e'_{jz}])^2 \right]^{\frac{1}{2}}) \quad (2.89)$$

Tout comme dans le cas de l'équilibrage à l'aide de pattes à un seul parallélogramme, des termes d'énergie potentielle élastique — désignés  $\Omega$  et  $\Gamma$  — ne pouvant se combiner aux termes dits gravitationnels sont présents dans l'expression de  $V$ . Pour obtenir un équilibrage statique pour toute configuration du manipulateur, il faudra nécessairement que

$$\alpha_{uj} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.90)$$

$$\alpha_{ej} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.91)$$

ce qui permettra aux équations (2.88) et (2.89) de se réduire à

$$\Omega = 0 \quad (2.92)$$

$$\Gamma = 0 \quad (2.93)$$

Lorsque ces deux conditions seront satisfaites, on obtiendra alors l'ensemble de conditions d'équilibrage suffisantes à nouveau donné par les équations

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.94)$$

$$L = 0 \quad (2.95)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.97)$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.98)$$

menant ainsi à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (2.99)$$

Bref, les conditions d'équilibrage données ci-haut montrent qu'il est possible d'équilibrer statiquement la plate-forme de Gough-Stewart en ajoutant une ou plusieurs pattes à deux parallélogrammes. On verra au chapitre 4 que le choix de cette architecture de patte d'équilibrage sera, pour certaines applications, plus approprié en raison de la latitude supplémentaire qu'offre la présence d'un troisième ressort dans la manière de rendre un manipulateur équilibré.

### 2.2.3 Autres architectures de pattes d'équilibrage à six (6) d.d.l.

En plus des architectures de pattes d'équilibrage statique proposées précédemment (figures 2.3 et 2.5), il existe d'autres types d'architecture, montrés aux figures 2.7 et 2.8, permettant également d'équilibrer statiquement les manipulateurs parallèles spatiaux à six degrés de liberté à actionneurs prismatiques.

La patte montrée à la figure 2.7 est très similaire à celle de la figure 2.3. Les principales différences se situent dans la façon dont les articulations sont disposées. Contrairement à la patte de la figure 2.3, la nouvelle patte présentée ici ne peut tourner autour

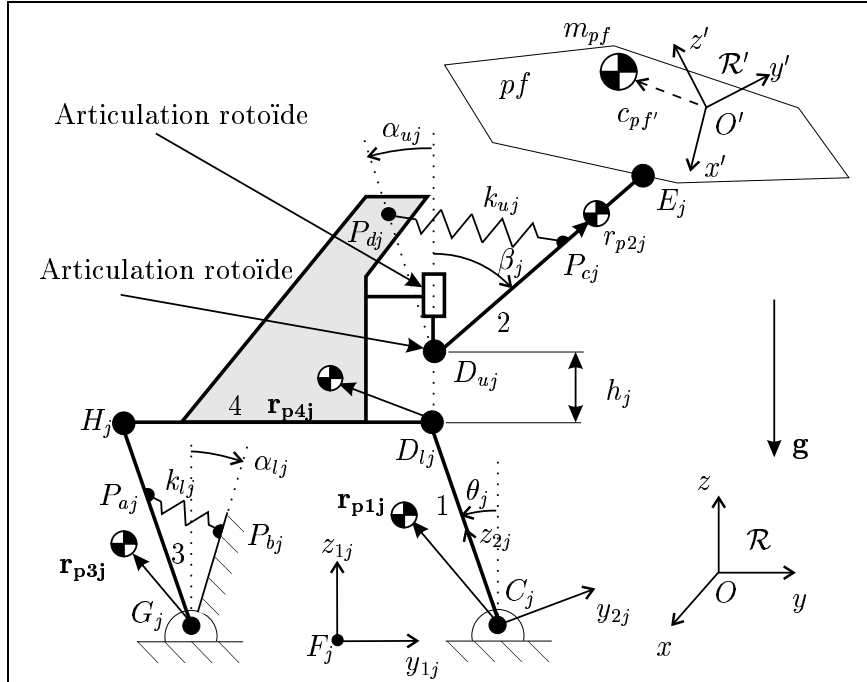


Figure 2.7: Autre architecture de la  $j$ ème patte d'équilibre à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type *II*.

d'un axe  $z$  passant par le point  $F_j$  et orienté dans la direction de la gravité. Afin de compenser la perte de ce degré de liberté, l'articulation rotoïde du point  $D_j$  est remplacée par une articulation de Cardan (à deux degrés de liberté). Il est également intéressant de noter que les deux architectures de pattes d'équilibre mènent au même ensemble de conditions d'équilibre statique. Le développement des équations d'équilibre pour ce type d'architecture de patte est présenté en annexe, à la section B.1.

Quant à l'architecture présentée à la figure 2.8, elle exploite elle aussi le principe du parallélogramme (Streit et Shin 1990), mais quelque peu différemment. Les membrures 1 ( $D_j I_j$ ) et 3 ( $F_j H_j$ ) n'étant pas rigidement liées l'une à l'autre, celles-ci peuvent alors bouger de manière totalement indépendante. L'avantage principal que procure cette architecture est que les ressorts sont maintenant situés plus près de la base. De plus, on remarque que ceux-ci sont attachés à une membrure ne bougeant pas verticalement (dans la direction de la gravité). Ce type de patte a fait l'objet d'études détaillées dans (Ebert-Uphoff et al. 1998). À titre de comparaison avec les autres mécanismes équilibrants présentés dans ce mémoire, un ensemble de conditions d'équilibre statique pour ce type d'architecture est donné en annexe, à la section B.2.

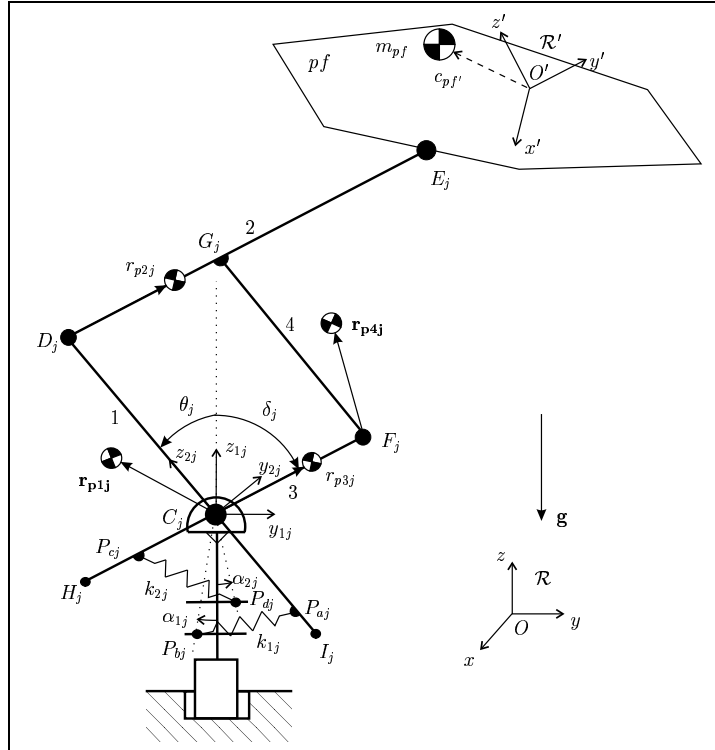


Figure 2.8: Autre architecture de la  $j$ ème patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type *III*.

Bref, ces deux variantes de la patte d'équilibrage à un parallélogramme de la section 2.2.1 ne sont présentées ici qu'à titre d'information complémentaire (voir l'annexe B). En conséquence, aucune analyse ou interprétation géométrique des conditions d'équilibrage obtenues n'est faite dans les chapitres subséquents et aucun exemple faisant intervenir ces structures n'est donné non plus.



## CHAPITRE 3

### DÉRIVATION DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE MANIPULATEURS PARALLÈLES PLANS À TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ À ACTIONNEURS PRISMATIQUES

Le présent chapitre porte sur l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles plans à trois (3) degrés de liberté à actionneurs prismatiques. Les mécanismes présentés ici ne sont ni plus ni moins que des projections dans le plan des mécanismes spatiaux du chapitre 2. Le grand avantage de ce concept de projection est qu'il permet d'utiliser directement les équations vectorielles développées pour les mécanismes spatiaux, moyennant quelques modifications mineures. Ceci dit, puisqu'il existe une étroite similitude entre les mécanismes spatiaux et plans, le développement menant aux conditions d'équilibrage statique pour les mécanismes de ce chapitre n'est pas répété inutilement ici.

En bref, la structure de ce chapitre est identique à celle du chapitre 2. Le mécanisme

de base, c'est-à-dire le mécanisme parallèle plan à trois (3) degrés de liberté, à actionneurs prismatiques, est d'abord défini. Par la suite, trois types de pattes d'équilibrage planes, destinées à rendre ce dernier mécanisme statiquement équilibré, sont présentés.

### 3.1 Méthodologie

L'équilibrage statique des mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté se fait de façon identique à l'équilibrage des mécanismes spatiaux à six degrés de liberté, en utilisant les équations développées au chapitre 2 et à l'annexe B. En fait, l'analyse des mécanismes plans peut être traitée comme un cas particulier de l'analyse des mécanismes spatiaux. Bien sûr, étant donné la diminution du nombre de degrés de liberté de six à trois et du même coup, passant d'un espace à trois dimensions vers un espace à deux dimensions, l'architecture des mécanismes doit conséquemment être légèrement modifiée. Mais une fois ces modifications faites, on verra que traiter le cas plan revient ni plus ni moins à projeter les mécanismes spatiaux dans un plan parallèle au vecteur gravité, de manière à en faire des mécanismes plans. Ainsi, en projetant dans le plan<sup>1</sup>  $yz$  du repère fixe  $\mathcal{R}$ , on pourra prendre les équations du chapitre 2 et "ignorer" la composante en  $x$  des vecteurs, le mouvement n'étant désormais possible que dans deux directions,  $y$  et  $z$ .

Une première modification consiste à réduire à trois le nombre de degrés de liberté de toutes les pattes présentes dans les mécanismes. Ainsi, pour les pattes munies d'articulations prismatiques, chacune d'elles présente maintenant l'architecture suivante (voir figure 3.1): une articulation rotoïde passive reliée à la base, un premier lien mobile, une articulation prismatique actionnée, un deuxième lien mobile et une articulation rotoïde passive liée à la plate-forme (Gosselin et Angeles 1988). De plus, le nombre de pattes (ou chaînes cinématiques) doit être réduit de six à trois. De ce fait, les équations ne deviennent valides que pour  $i = 1, \dots, 3$ .

De façon similaire, les pattes spéciales — composées de membrures disposées en parallélogramme(s) — qui sont ajoutées au manipulateur de base doivent elles aussi

---

<sup>1</sup>En fait, on pourrait faire la projection dans n'importe quel plan contenant le vecteur  $\mathbf{g}$ , mais on choisit le plan  $yz$  de  $\mathcal{R}$  uniquement pour une question de simplicité, c'est-à-dire, pour que les vecteurs aient tous leur composante  $x$  nulle.

voir leur nombre de degrés de liberté réduit à trois. Ainsi, pour une patte donnée, l'articulation de Cardan reliant la patte à la base du manipulateur doit être remplacée par une articulation rotoïde. La même chose s'applique à l'articulation sphérique reliant la patte à la plate-forme.

Par ailleurs, malgré le fait que les mécanismes sont maintenant définis dans le plan, c'est-à-dire dans un espace bidimensionnel, on peut néanmoins conserver les vecteurs tridimensionnels tels que définis pour les mécanismes spatiaux. Il suffit en fait d'égaliser à zéro une des composantes parmi  $x$  et  $y$  pour chacun de ces vecteurs. Ainsi, en choisissant d'éliminer la composante  $x$  — de façon arbitraire —, on fait en sorte que tous les mécanismes en cause soient définis dans le plan  $yz$  du repère fixe  $\mathcal{R}$  attaché à la base de chacun de ces mécanismes. La composante  $x$  est toujours présente, mais égale à zéro.

De plus, puisqu'on impose que les axes  $x$  de tous les repères soient colinéaires, confondus et qu'ils pointent dans le même sens, et ce, peu importe la configuration des mécanismes, cela implique que

$$\gamma_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$\gamma_j$  étant la variable exprimant l'angle entre la direction positive de l'axe  $x$  du repère  $\mathcal{R}$  et celle de l'axe  $x_{1j}$  du repère  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  de la  $j$ ème patte ajoutée et  $n$  étant le nombre de ces pattes.

Quant à la matrice de rotation  $\mathbf{Q}_{1j}$  donnant l'orientation du repère  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  — qui, soit dit en passant, devient fixe pour le cas plan — par rapport au repère  $\mathcal{R}$ , celle-ci devient simplement la matrice identité, c'est-à-dire,

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Ainsi, en appliquant les légères modifications énoncées ci-haut, les conditions d'équilibre statique trouvées au chapitre 2 peuvent alors facilement s'appliquer au cas des mécanismes plans à trois degrés de liberté. Cela constitue un avantage certain puisqu'il est possible d'appliquer ces quelques équations générales et compactes à plusieurs mécanismes d'architectures diverses sans pour autant avoir à en redéfinir complètement

les variables et paramètres. C'est là le but vers lequel doit tendre une telle analyse: tenter de représenter plusieurs modèles physiques différents par un nombre restreint d'équations mathématiques générales.

### 3.2 Manipulateur parallèle plan à trois (3) d.d.l. à actionneurs prismatiques

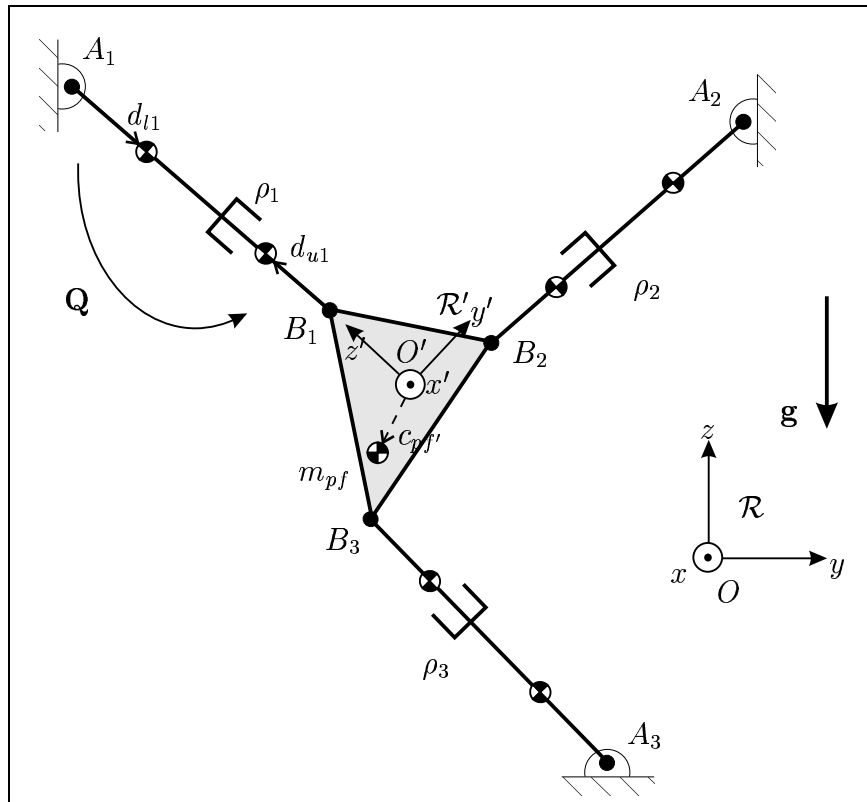


Figure 3.1: Manipulateur parallèle plan à 3 d.d.l. à actionneurs prismatiques.

Un mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté muni d'actionneurs prismatiques est schématiquement représenté à la figure 3.1. Ce mécanisme peut être considérée comme l'équivalent dans le plan de la plate-forme de Gough-Stewart et, pour les raisons invoquées à la section précédente, son mouvement se fait dans un plan  $yz$  contenu dans  $\mathcal{R}$  et passant par l'origine de ce repère, c'est-à-dire un plan coupant l'axe  $x$  à  $x = 0$ .

En appliquant les modifications proposées à la section 3.1, les équations donnant la

position et l'orientation du repère mobile  $\mathcal{R}'$  de l'effecteur par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}$  se réduisent à

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

et l'équation (2.14) du chapitre 2 devient

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} r_x &= 0 \\ r_y &= \frac{1}{M} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i a_{iy}}{\rho_i} \right) - p_y \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{22} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. q_{23} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_y + F_y q_{22} + F_z q_{23} + G_y \right] \\ r_z &= \frac{1}{M} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) - p_z \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{32} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. q_{33} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_z + F_y q_{32} + F_z q_{33} + G_z \right] \end{aligned}$$

et où les coefficients sont définis par

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.5)$$

$$E = m_{pf} + \sum_{i=1}^3 m_{ui} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{ui} \mathbf{b}'_i) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 (m_{li} \mathbf{a}_i) \quad (3.8)$$

Comme il a été dit au début du présent chapitre, en termes d'équilibrage statique, ce mécanisme n'est en fait qu'un cas particulier de la plate-forme de Gough-Stewart, ce qui signifie qu'il est tout autant impossible de l'équilibrer statiquement. Cette constatation

est facilement démontrable. En effet, en imposant que la hauteur  $r_z$  du centre de masse global du mécanisme demeure constante pour toute configuration de ce dernier, on obtient l'ensemble de conditions d'équilibrage suivant:

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.9)$$

$$E = 0 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

et un coup d'œil à l'équation (3.10), qui s'écrit aussi

$$E = m_{pf} + \sum_{i=1}^3 m_{wi} = 0, \quad (3.12)$$

permet de constater que seule la solution triviale, voulant que les masses dans cette équation soient toutes nulles, est possible. Cela démontre donc hors de tout doute qu'il est impossible d'équilibrer statiquement le mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté à actionneurs prismatiques lorsque pris tel quel.

### 3.3 Manipulateur plan à trois (3) d.d.l. à actionneurs prismatiques et pattes supplémentaires

Cette section se veut l'équivalent de la section A.2, mais pour les mécanismes plans. Ainsi, on donne ci-après les conditions d'équilibrage statique pour le mécanisme plan de la figure 3.1, auquel ont été ajoutées des pattes d'équilibrage.

En outre, il est à noter que seulement trois (3) types de pattes d'équilibrage sont présentés pour l'équilibrage statique dans le plan car la projection dans le plan des pattes spatiales de type *I* et *II* (voir figures 2.3 et 2.7) mène à un seul type de patte d'équilibrage dans le plan<sup>2</sup>. Afin de conserver la désignation établie au chapitre 2 et d'avoir une correspondance entre les pattes à six (6) d.d.l. et celles à trois (3) d.d.l., l'appellation type *II* pour le cas plan est abandonnée, bien qu'une patte de type *III* soit définie (voir en annexe C).

---

<sup>2</sup>Cela est vrai dans le cas où la distance  $h_j$ , montrée à la figure B.1, est nulle.

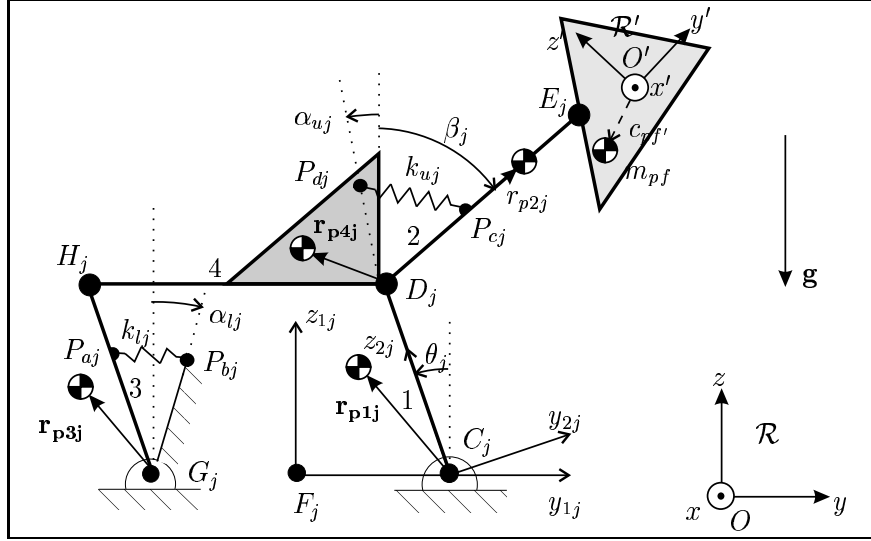


Figure 3.2: Architecture de la  $j$ ème patte à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme: type  $I$ .

### 3.3.1 Patte spéciale à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme (type $I$ )

La figure 3.2 montre la projection — dans le plan  $yz$  de  $\mathcal{R}$  — de la patte d'équilibrage dont il est question à la section 2.2.1 (voir figure 2.3). Étant maintenant réduite à un mécanisme à trois (3) degrés de liberté, chaque patte ajoutée au mécanisme de base est constituée d'un mécanisme à quatre barres (parallélogramme)  $C_j D_j H_j G_j$ , une membrure distale  $D_j E_j$  et une articulation rotoïde au point  $E_j$ .

En ce qui a trait aux ressorts présents dans la structure de la patte, ils sont placés de la même manière que pour le cas spatial. La seule différence est que le point d'attache  $P_{bj}$  du ressort inférieur est maintenant fixe.

Par ailleurs, comme il est expliqué à la section 3.1, le fait que le mouvement ne soit possible que dans un plan  $yz$  force l'angle  $\gamma_j$  à être nul pour toute configuration du manipulateur, ce qui rend la matrice  $\mathbf{Q}_{1j}$  unitaire. Ainsi donc,

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Quant à la matrice  $\mathbf{Q}_{2j}$ , elle demeure la même qu'au chapitre 2, c'est-à-dire

$$\mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

En éliminant le vecteur  $\mathbf{c}_{p0j}$  — vu que la patte ne possède pas de membrure mobile entre les points  $C_j$  et  $G_j$  —, on trouve l'expression du centre de masse global  $\mathbf{r}$  du manipulateur, lequel s'écrit

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf}\mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{li}\mathbf{c}_{li} + m_{ui}\mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 (m_{pkj}\mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (3.15)$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 m_{pkj} \quad (3.16)$$

Finalement, on obtient l'énergie potentielle totale pour le manipulateur. Celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} V = & p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + \\ & q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec les coefficients

$$D_i = m_{ui}d_{ui} - m_{li}d_{li}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.18)$$

$$L = \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^3 m_{ui} \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j}gr_{p2j} - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = & \begin{bmatrix} 0 \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf}\mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^3 [m_{ui}\mathbf{b}'_i] \right) g + \\ & \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j}gr_{p2j} - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$P_j = (m_{p1j}r_{p1jy} + m_{p3j}r_{p3jy}) g + k_{lj}h_{lj}l_{lj} \sin \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

$$R_j = \left( [m_{p2j} + m_{p4j}] g - \frac{m_{p2j}gr_{p2j} - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j} +$$



$$\begin{aligned}
& (m_{p1j}r_{p1jz} + m_{p3j}r_{p3jz})g - k_{lj}h_{lj}l_{lj} \cos \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.22) \\
S_z = & g \sum_{i=1}^3 (m_{li}a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n (m_{p4j}r_{p4jz}) + \\
& g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} + m_{p4j} \right] f_{jz} \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj}h_{uj}l_{uj}f_{jz} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{lj} [h_{lj}^2 + l_{lj}^2] + k_{uj} [h_{uj}^2 + l_{uj}^2] \right) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Le coefficient  $\Omega$  est, quant à lui, donné par

$$\begin{aligned}
\Omega = & \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj}h_{uj}l_{uj} \sin \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \times \right. \\
& \left. [p_y - f_{jy} + q_{22}e'_{jy} + q_{23}e'_{jz} - l_{Fj}C_j + l_{p1j} \sin \theta_j] \right) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Le manipulateur sera statiquement équilibré quand l'ensemble de conditions donné par

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.25)$$

$$L = 0 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.28)$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

sera satisfait, menant ainsi à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (3.30)$$

Cependant, cet équilibre statique ne sera atteint, pour toute configuration du manipulateur, que si

$$\alpha_{uj} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

et nécessairement

$$\Omega = 0 \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Patte spéciale à deux parallélogrammes

De façon analogue aux développements faits pour les mécanismes spatiaux, on considère maintenant une patte d'équilibrage comprenant deux parallélogrammes dans sa structure, ce qui permet alors l'ajout d'un troisième ressort. Comme le montre la figure

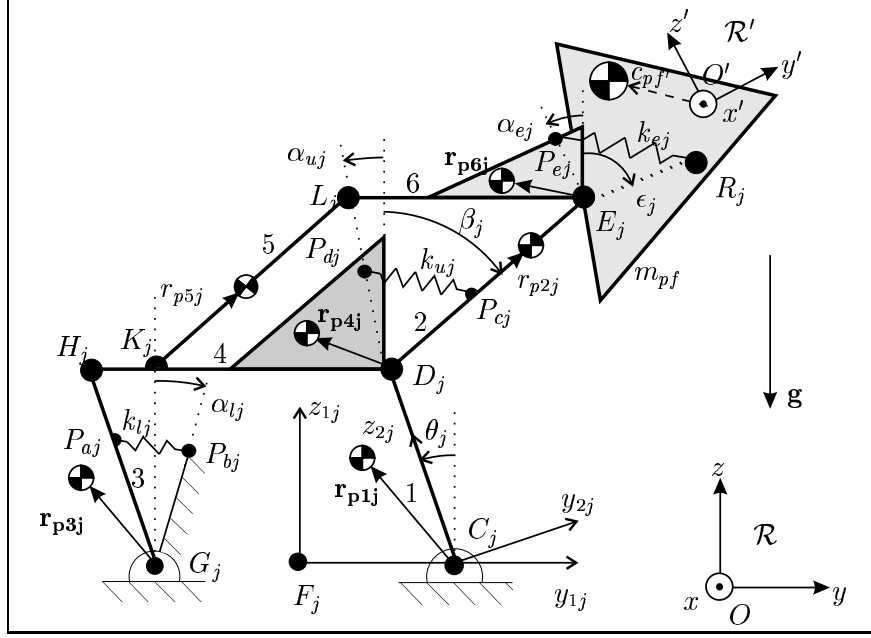


Figure 3.3: Architecture de la  $j$ ème patte à trois (3) d.d.l. à deux parallélogrammes.

3.3, le second parallélogramme,  $D_j E_j L_j K_j$ , est complété par l'addition de deux nouvelles membrures,  $K_j L_j$  et  $L_j E_j$ . Cette patte se veut la projection dans le plan de celle qui fait l'objet de la section 2.2.2.

Encore une fois, tous les vecteurs définis à la section 2.2.2 restent valides sauf  $\mathbf{c}_{p0j}$ , qui doit tout simplement être éliminé. De plus, les matrices  $\mathbf{Q}_{1j}$  et  $\mathbf{Q}_{2j}$  utilisées ici sont celles de la section précédente (voir les équations (3.13) et (3.14)).

L'expression du centre de masse global  $\mathbf{r}$  du manipulateur est alors donnée par

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf} \mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{li} \mathbf{c}_{li} + m_{ui} \mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^6 (m_{pkj} \mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (3.33)$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^6 m_{pkj} \quad (3.34)$$

Quant à l'énergie potentielle totale pour le manipulateur, elle s'exprime de la façon suivante:

$$V = p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] +$$

$$g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega + \Gamma \quad (3.35)$$

avec comme coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.36)$$

$$L = \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^3 m_{ui} \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p5j} r_{p5j}] g - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} + m_{p6j} g \right) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^3 [m_{ui} \mathbf{b}'_i] \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \left[ \frac{(m_{p2j} r_{p2j} + m_{p5j} r_{p5j}) g - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} + k_{ej} h_{ej} \cos \alpha_{ej} + m_{p6j} g \right] \mathbf{e}'_j - k_{ej} h_{ej} \cos \alpha_{ej} \mathbf{r}'_j \right) \quad (3.38)$$

$$P_j = (m_{p1j} r_{p1jy} + m_{p3j} r_{p3jy}) g + k_{lj} h_{lj} l_{lj} \sin \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.39)$$

$$R_j = \left( [m_{p2j} + m_{p4j} + m_{p5j}] g - \frac{(m_{p2j} r_{p2j} + m_{p5j} r_{p5j}) g - k_{uj} h_{uj} l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j} + (m_{p1j} r_{p1jz} + m_{p3j} r_{p3jz}) g - k_{lj} h_{lj} l_{lj} \cos \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.40)$$

$$S_z = g \sum_{i=1}^3 (m_{li} a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n (m_{p4j} r_{p4jz} + m_{p6j} r_{p6jz}) + g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} + m_{p4j} + m_{p5j} \left( 1 - \frac{r_{p5j}}{l_{p2j}} \right) \right] f_{jz} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj} h_{uj} l_{uj} f_{jz} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{lj} [h_{lj}^2 + l_{lj}^2] + k_{uj} [h_{uj}^2 + l_{uj}^2] + k_{ej} [h_{ej}^2 + (r'_{jy} - e'_{jy})^2 + (r'_{jz} - e'_{jz})^2] \right) \quad (3.41)$$

Pour ce qui est des coefficients  $\Omega$  et  $\Gamma$ , ils sont définis par les expressions

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj} h_{uj} l_{uj} \sin \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \times [p_y - f_{jy} + q_{22} e'_{jy} + q_{23} e'_{jz} - l_{Fj} C_j + l_{p1j} \sin \theta_j] \right) \quad (3.42)$$

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n \left( k_{ej} h_{ej} \sin \alpha_{ej} \times [q_{22} (r'_{jy} - e'_{jy}) + q_{23} (r'_{jz} - e'_{jz})] \right) \quad (3.43)$$

Pour que le manipulateur soit statiquement équilibré, il faudra satisfaire l'ensemble de

conditions donné par

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3.44)$$

$$L = 0 \quad (3.45)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.48)$$

et lorsque cela sera vrai, l'énergie potentielle totale du système sera réduite à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (3.49)$$

Cependant, cet équilibre statique ne sera atteint, pour toute configuration du manipulateur, que si

$$\Omega = 0 \quad (3.50)$$

$$\Gamma = 0 \quad (3.51)$$

et ces deux dernières conditions seront toujours satisfaites lorsque

$$\alpha_{uj} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.52)$$

$$\alpha_{ej} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.53)$$

### 3.3.3 Autre architecture de patte d'équilibrage à trois (3) d.d.l.

La patte d'équilibrage à trois degrés de liberté montrée à la figure 3.4 est la version plane de la patte de type *III* à six degrés de liberté de la section 2.2.3. Comme il est expliqué dans cette dernière section, cette architecture de patte exploite elle aussi le principe du parallélogramme (Streit et Shin 1990), mais quelque peu différemment. Cela lui confère certains avantages, notamment le fait que les ressorts soient situés plus près de la base.

Les conditions d'équilibrage statique pour ce type d'architecture sont données en annexe, à la section C.1, à titre d'information complémentaire.

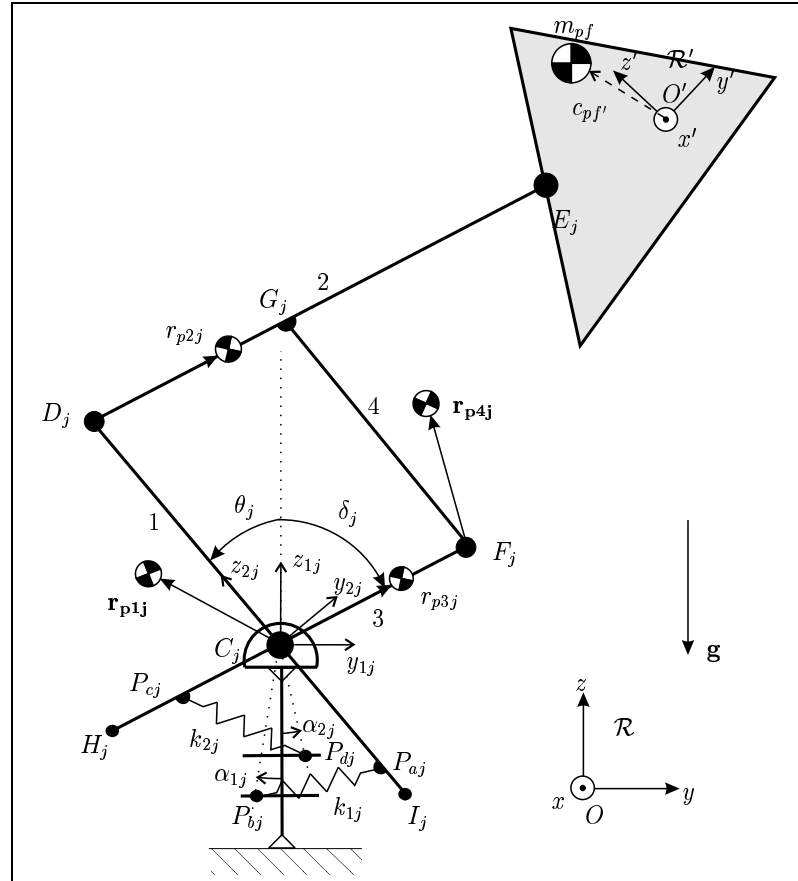


Figure 3.4: Autre architecture de la  $j$ ème patte d'équilibrage à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme: type *III*.

## CHAPITRE 4

### INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE STATIQUE POUR LES MANIPULATEURS PARALLÈLES SPATIAUX

Dans ce chapitre, les conditions d'équilibrage trouvées antérieurement (chapitre 2) sont analysées. On y présente tout d'abord un tableau donnant la dimension du lieu des manipulateurs spatiaux équilibrés pour les différents types de mécanismes faisant l'objet de ce mémoire. Ensuite, l'effet de la symétrie dans l'architecture de ces manipulateurs équilibrés statiquement est étudié en détails pour l'équilibrage à l'aide de pattes à un (type *I*) et deux parallélogrammes. Finalement, quelques exemples numériques sont donnés afin d'illustrer les résultats obtenus de l'analyse de symétrie. Le choix des différents paramètres de départ pour ces exemples n'est basé sur aucun processus d'optimisation et est donc purement arbitraire.

## 4.1 Paramètres de design

En ce qui a trait aux divers mécanismes parallèles décrits précédemment, l'espace à  $p$  dimensions défini par les paramètres de design (les variables  $m_{li}$ ,  $m_{ui}$ ,  $d_{li}$  et  $d_{ui}$  pour  $i = 1, \dots, m$ ; les variables  $m_{pkj}$ ,  $r_{pkj}$ ,  $l_{pkj}$ ,  $k_{lj}$ ,  $k_{uj}$ ,  $k_{ej}$ ,  $h_{lj}$ ,  $h_{uj}$ ,  $h_{ej}$ ,  $l_{lj}$  et  $l_{uj}$ , et les vecteurs  $\mathbf{e}'_j$  et  $\mathbf{r}'_j$  pour  $j = 1, \dots, n$  et  $k = 1, \dots, 6$ ) peut être vu comme étant l'espace de design dans lequel chaque point représente un mécanisme différent. Dans cet espace multi-dimensionnel, les conditions d'équilibrage définissent un sous-espace dans lequel est contenu un ensemble: le lieu des mécanismes équilibrés. Vu le nombre relativement élevé de paramètres et le peu de contraintes issues des conditions d'équilibrage, le lieu des mécanismes équilibrés constitue également un espace multi-dimensionnel. En d'autres termes, une infinité de solutions peut être obtenue. Cependant, il est important de garder à l'esprit que l'équilibrage statique est accompli ici uniquement par l'ajout de nouvelles composantes à la plate-forme de Gough-Stewart et que rien ne peut être enlevé de la structure originale de cette dernière. Ainsi, les paramètres se rapportant au mécanisme de base — c'est-à-dire la plate-forme de Gough-Stewart — doivent être considérés *fixes*. Le tableau 4.1 montre la dimension du lieu des manipulateurs statiquement équilibrés pour chacun des cinq (5) manipulateurs spatiaux étudiés.

## 4.2 Articulations prismatiques

En se référant aux mécanismes présentés au chapitre 2 et aux annexes A et B, on observe que pour tous les mécanismes étudiés ici, la même condition s'applique pour chacun des actionneurs prismatiques, c'est-à-dire,

$$m_{li}d_{li} = m_{ui}d_{ui}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.1)$$

De l'équation (4.1), on constate deux faits importants. En premier lieu, puisqu'il n'apparaît dans celle-ci aucun paramètre lié à l'organe terminal du manipulateur — la plate-forme — et/ou les pattes d'équilibrage ajoutées, il en résulte que chaque patte à actionneur prismatique — communément appelée vérin — doit être elle-même statiquement équilibrée, et ce, sans égard aux autres éléments composant le système. C'est-à-dire qu'on considère chacune des pattes comme un mécanisme indépendant à équilibrer statiquement. Le second constat est, quant à lui, un peu moins évident.

	1	2	3	4	5
Nombre d'équations d'équilibrage	$2n + 10$	$2n + 10$	$2n + 10$	$2n + 10$	$2n + 10$
Nombre de paramètres fixes	46	46	46	46	46
Nombre de paramètres libres	$22n$	$31n$	$22n$	$24n$	$19n$
Dimension du lieu des manipulateurs équilibrés	$\infty^{20n-10}$	$\infty^{29n-10}$	$\infty^{20n-10}$	$\infty^{22n-10}$	$\infty^{17n-10}$
<b>Légende:</b>					
1: patte(s) à 6 d.d.l. à 1 parallélogramme de type <i>I</i> (section 2.2.1)					
2: patte(s) à 6 d.d.l. à 2 parallélogrammes (section 2.2.2)					
3: patte(s) à 6 d.d.l. à 1 parallélogramme de type <i>II</i> (section B.1)					
4: patte(s) à 6 d.d.l. à 1 parallélogramme de type <i>III</i> (section B.2)					
5: patte(s) à 6 d.d.l. sans parallélogramme (section A.2.2)					
<i>n</i> : nombre de pattes d'équilibrage					

Tableau 4.1: Dimension des lieux des manipulateurs parallèles spatiaux à six (6) d.d.l. équilibrés.



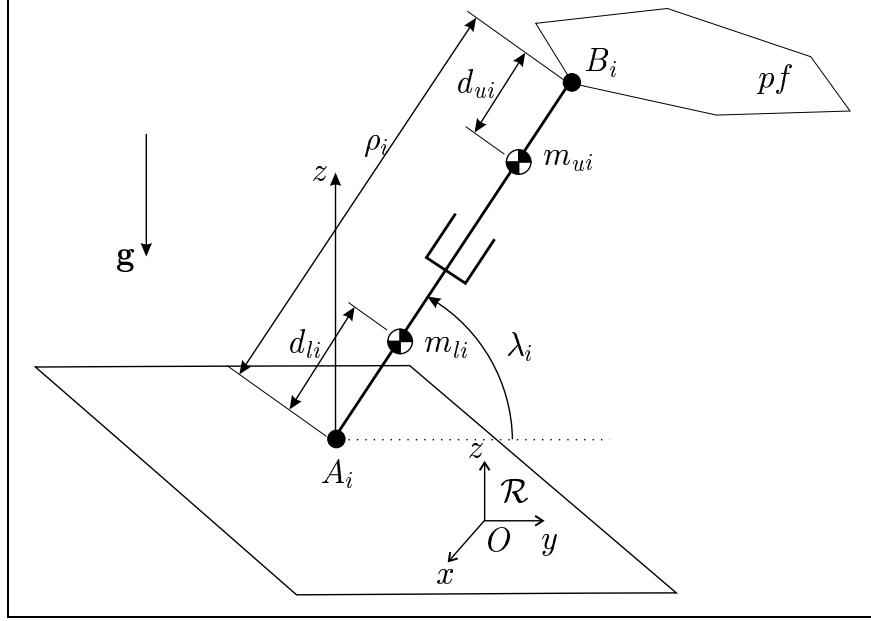


Figure 4.1: Architecture de la  $i$ ème patte actionnée.

Comme il est montré à la figure 4.1 pour la  $i$ ème chaîne cinématique à actionneur prismatique, on peut exprimer  $z_i$  — la coordonnée verticale (direction du vecteur gravité) de son centre de masse global — sous forme d'une fonction de  $\rho_i$  — sa longueur totale — et  $\lambda_i$  — l'angle que fait la patte avec le plan  $xy$  du repère fixe de la base. Cette équation s'écrit

$$z_i = \frac{m_{li}z_{li} + m_{ui}z_{ui}}{m_{li} + m_{ui}}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.2)$$

où

$$\begin{aligned} z_{li} &= d_{li} \sin \lambda_i, \quad i = 1, \dots, 6 \\ z_{ui} &= (\rho_i - d_{ui}) \sin \lambda_i, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

En substituant l'équation (4.1) dans l'équation (4.2), on obtient alors

$$z_i = \frac{m_{ui}}{m_{li} + m_{ui}} \rho_i \sin \lambda_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.3)$$

Par ailleurs, étant donné que  $\rho_i \sin \lambda_i$  est en fait la composante en  $z$ ,  $b_{iz}$ , du point  $B_i$ , l'équation (4.3) s'écrit alors

$$z_i = \frac{m_{ui}}{m_{li} + m_{ui}} (p_z + [\mathbf{Q}\mathbf{b}'_i]_z), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.4)$$

avec  $z_i$  exprimé dans le repère fixe  $\mathcal{R}$ . Ainsi, de l'équation (4.4), il devient clair que le centre de masse global de la  $i$ ème patte dite prismatique dépend uniquement de la

hauteur de la plate-forme au point  $B_i$ , et ce, indépendamment de l'orientation de cette patte. En d'autres termes, pour un mouvement quelconque de la plate-forme pour lequel le point  $B_i$  demeure à une hauteur constante, la hauteur du centre de masse de la chaîne cinématique à actionneur prismatique lui étant associée restera elle aussi constante.

Il est cependant important de mentionner que cette condition sur les actionneurs prismatiques perd de l'importance si la masse  $m_{pf}$  de la plate-forme est très grande comparé à celle des pattes. L'exemple classique de ce type de manipulateur est le simulateur de vol de type conventionnel, dont la structure n'est autre que la plate-forme de Gough-Stewart. Pour un tel mécanisme, l'objectif premier sera de rendre sa plate-forme (effecteur) statiquement équilibrée, sans égard aux pattes qui, la plupart du temps, ne respecteront pas la condition (4.1). On parlera alors d'*équilibrage statique partiel*, par opposition à l'*équilibrage statique parfait*. C'est-à-dire que les forces aux actionneurs ne seront pas nulles, quoique très faibles, voire négligeables. Cela est démontrable en calculant ces forces à l'aide de la méthode des diagrammes de corps libres de Newton, pour différentes configurations du manipulateur.

Bref, il arrivera souvent en pratique qu'en raison de leur architecture, certains mécanismes ne pourront qu'être partiellement équilibrés, ce qui peut paraître décevant, de prime abord. Toutefois, il apparaît primordial de ne pas perdre de vue l'objectif réel à atteindre. Ainsi, malgré la limitation que pose la méthode d'équilibrage proposée, les ajouts faits à ces mécanismes contribueront bien souvent à grandement améliorer leurs propriétés dynamiques<sup>1</sup> et aussi à faire diminuer considérablement l'apport énergétique des actionneurs. Donc, en ce sens, même partiel, l'équilibrage statique s'avèrera dans certains cas très avantageux.

### 4.3 Architectures particulières

Un autre point d'intérêt se situe dans l'effet de la symétrie architecturale sur les mécanismes étudiés. Afin d'aider à interpréter la signification physique des équations des conditions d'équilibrage obtenues dans les chapitres antérieurs, des conditions de

---

<sup>1</sup>Une façon d'améliorer les propriétés dynamiques consiste à minimiser le terme gravitationnel  $\theta$  dans l'équation (1.8).

symétrie peuvent être imposées aux mécanismes parallèles traités ici. Cela simplifie grandement les équations et rend du même coup l'interprétation physique plus évidente, et ce, sans avoir recours à aucun calcul numérique.

### 4.3.1 Plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage à un parallélogramme (type I)

Dans cette section, l'effet de la symétrie est observé, d'une part pour l'équilibrage à l'aide de pattes d'équilibrage toutes identiques et d'autre part en utilisant deux types de pattes. De plus, dans un cas comme dans l'autre, une attention particulière est portée au cas du simulateur de vol.

#### 4.3.1.1 Équilibrage à l'aide de $n$ pattes identiques

Considérons la plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage à un parallélogramme (voir figure 2.3). À titre de simplification, on suppose en premier lieu que les  $n$  pattes spéciales pouvant être ajoutées sont toutes identiques. La même chose s'applique aux  $m$  pattes à actionneurs prismatiques (ici,  $m = 6$ )<sup>2</sup>. Par la suite, en substituant l'équation (2.54) dans les équations (2.55) et (2.57), en égalant ces dernières à zéro et en les réarrangeant, l'ensemble des conditions d'équilibrage se réduit à

$$m_u d_u = m_l d_l \quad (4.5)$$

$$k_u h_u l_u \cos \alpha_u = \left( \frac{m_{pf} + m m_u}{n} l_{p2} + m_{p2} r_{p2} \right) g \quad (4.6)$$

$$m_{pf} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j - \mathbf{c}'_{pf} \right) = m_u \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{b}'_i - \frac{m}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j \right) \quad (4.7)$$

$$k_l h_l l_l \sin \alpha_l = - (m_{p1} r_{p1y} + m_{p3} r_{p3y}) g \quad (4.8)$$

$$k_l h_l l_l \cos \alpha_l = \left[ \left( \frac{m_{pf} + m m_u}{n} + m_{p2} + m_{p4} \right) l_{p1} + m_{p1} r_{p1z} + m_{p3} r_{p3z} \right] g \quad (4.9)$$

À partir des équations (4.6) et (4.9), on peut déterminer les produits  $k_u h_u l_u$  et  $k_l h_l l_l$  et donc, les raideurs  $k_u$  et  $k_l$ , à condition de fixer les distances d'attache  $h_u$ ,  $l_u$ ,  $h_l$

---

<sup>2</sup>Il est à noter que le fait d'avoir imposé un modèle unique de patte prismatique et un autre pour les mécanismes équilibrants ajoutés implique qu'en réalité, l'équation (4.5) est répétée  $m$  fois, tandis que les équations (4.8) et (4.9) le sont  $n$  fois.

et  $l_i$  des ressorts, ainsi que les autres paramètres liés aux pattes d'équilibrage. Quant aux variables restantes, elles sont connues au départ, étant donné que le principe de l'équilibrage statique n'est appliqué ici qu'à des mécanismes déjà existants.

Ceci dit, le reste de l'analyse de cette section se concentre sur l'interprétation géométrique de l'équation (4.7) lorsque des conditions de symétrie sont imposées. Malgré le fait qu'il existe plusieurs manières par lesquelles la symétrie peut simplifier les équations, seulement une de ces options est considérée ici. En supposant que les  $m$  pattes à actionneurs prismatiques soient disposées de façon symétrique par rapport à un point quelconque  $P_1$  de la plate-forme — ce qui, mathématiquement parlant, revient à poser la condition

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{b}'_i - \mathbf{p}'_1) = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

où  $\mathbf{p}'_1$  est exprimé dans  $\mathcal{R}'$  — l'équation (4.7) se réduit à

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j = n \frac{m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + mm_u \mathbf{p}'_1}{m_{pf} + mm_u} \quad (4.11)$$

Par ailleurs, si les pattes supplémentaires sont ajoutées de façon symétrique par rapport à un autre point arbitraire de la plate-forme, en l'occurrence  $P_2$ , cela revient à imposer la condition suivante:

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j - \mathbf{p}'_2) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{p}'_2$  est exprimé dans  $\mathcal{R}'$  et l'équation (4.11) s'écrit alors

$$\mathbf{p}'_2 = \frac{m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + mm_u \mathbf{p}'_1}{m_{pf} + mm_u} \quad (4.13)$$

Cette dernière équation permet d'établir le lien entre la position des points  $P_1$  et  $P_2$  et celle du centre de masse de la plate-forme du manipulateur.

Dans le cas où  $P_1$  et  $P_2$  sont confondus, l'équation (4.13) est réduite à

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.14)$$

ce qui signifie que ce point doit *obligatoirement* être le centre de masse de l'effecteur du manipulateur. En fait, cela revient à dire qu'en imposant qu'un des deux points — parmi  $P_1$  et  $P_2$  — coïncide avec le centre de masse de la plate-forme, on force

automatiquement l'autre point à se trouver lui aussi au centre de masse. Ainsi donc, quand cette condition sera rencontrée, on obtiendra la condition géométrique suivante sur la manière de disposer les chaînes cinématiques supplémentaires dans la structure du manipulateur existant:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j = n \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.15)$$

Lorsque  $n = 1$ , l'équation (4.15) se résume alors à

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.16)$$

et ainsi, il apparaît clair que la patte à un parallélogramme ajoutée devra être attachée directement au centre de masse de la plate-forme. Cependant, pour un mécanisme donné, il arrive souvent que ce point ne soit pas accessible et que, par conséquent, il ne soit pas possible d'y attacher de nouvelles composantes, et cela, en raison de l'architecture même du manipulateur. Par exemple, dans le cas d'un simulateur de vol conventionnel, qui n'est ni plus ni moins qu'une plate-forme de Gough-Stewart, il peut s'avérer que le centre de masse global se situe à quelque part à l'intérieur du module mobile — l'organe terminal — du manipulateur. On comprend alors qu'il serait impossible d'aller y attacher un mécanisme équilibrant. Une façon de contourner cet obstacle consiste à avoir recours à plus d'une patte d'équilibrage. Ainsi, lorsque  $n = 2$ , l'équation (4.15) devient

$$\frac{\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2}{2} = \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.17)$$

Cette dernière équation montre que le centre de masse de la plate-forme devra être situé exactement au point milieu du segment de droite formé par les points  $E_1$  et  $E_2$ . Quand  $n = 3$ , l'équation (4.15) s'écrit

$$\frac{\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3}{3} = \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.18)$$

Par analogie au cas précédent, il faudra, dans ce cas-ci, que le centre de masse de la plate-forme se trouve au centroïde du triangle formé par les points  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .

Finalement, pour  $n > 3$ , l'équation (4.15) stipule que les pattes devront être ajoutées de telle sorte que le centre de masse soit situé au centroïde du polyèdre formé par les sommets des vecteurs  $\mathbf{e}'_j$ . Toutefois, dans le cas particulier où ces sommets seraient tous contenus dans un plan unique, le centre de masse se trouverait non plus au centroïde d'un polyèdre, mais plutôt à celui d'un polygone.

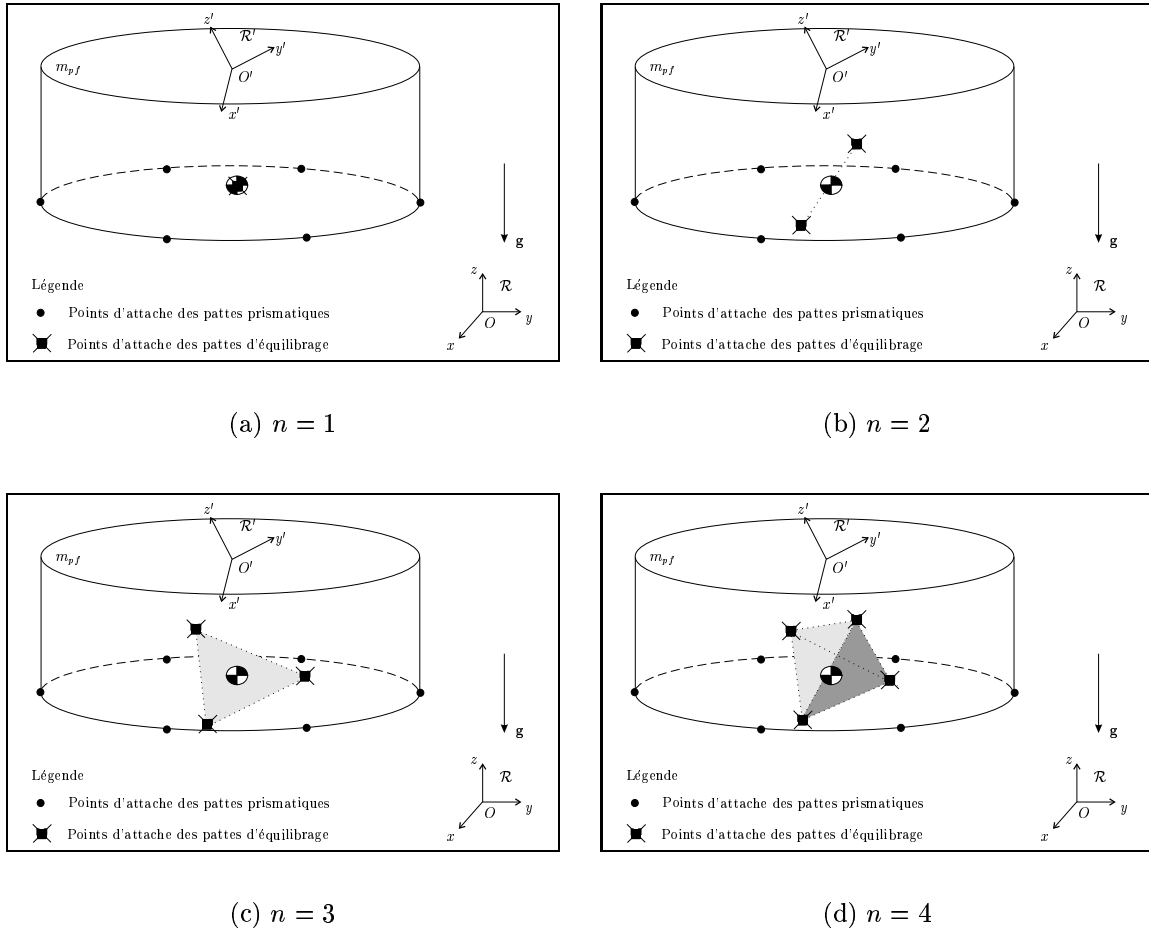


Figure 4.2: Équilibrage de la plate-forme de Gough-Stewart avec des pattes de type  $I$  disposées symétriquement autour du centre de masse de la plate-forme.

### Cas particulier: le simulateur de vol

Comme il a été dit en introduction de ce mémoire, le simulateur de vol de type conventionnel (mécanisme spatial actionné par six (6) vérins hydrauliques) constitue une application revêtant un intérêt particulier en ce qui a trait à l'équilibrage statique (voir figure 0.1). Et dans cette optique, l'étude plus approfondie de ce type de mécanisme s'impose comme une suite logique à l'analyse déjà faite jusqu'à maintenant.

Typiquement, un simulateur peut être modélisé de la manière suivante: il s'agit en fait d'une plate-forme de Gough-Stewart sur laquelle repose un volumineux et lourd caisson. Comme le montrent les figures 4.2 et 4.3, les points d'attache  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ )

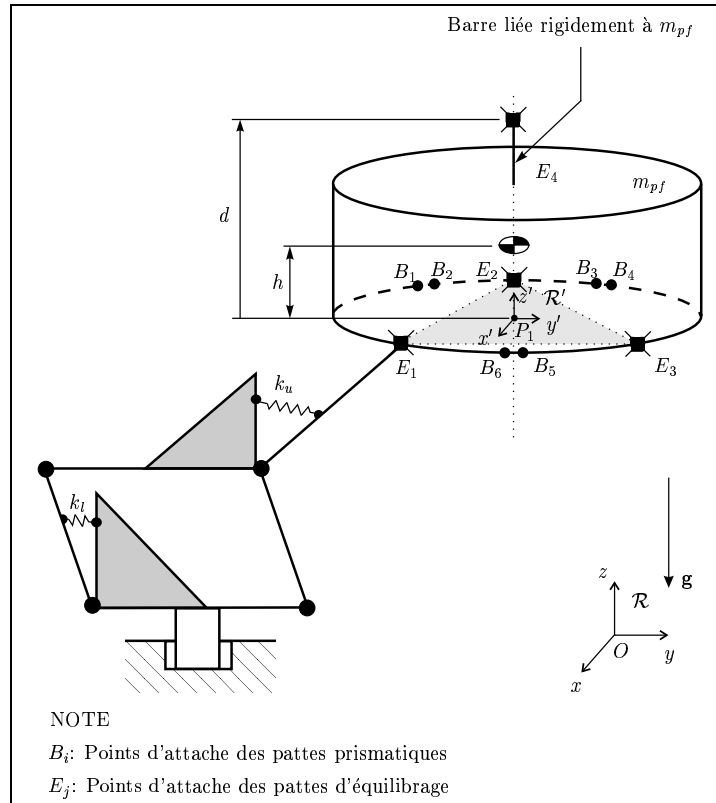


Figure 4.3: Simulateur de vol équilibré avec 4 pattes de type  $I$  identiques. Ici,  $\alpha_u = 0$  et  $\alpha_l = 0$ .

des pattes prismatiques sont tous contenus dans un même plan et forment un arrangement symétrique. Quant au centre de masse de la plate-forme (ou du caisson), il est situé à quelque part dans le volume du caisson, au-dessus du plan où sont fixés les actionneurs. Afin de simplifier le problème, on supposera qu'il se trouve directement au-dessus du centre géométrique du polygone — dont le centroïde est au point  $P_1$  — formé par les points  $B_i$ .

Supposons maintenant qu'on cherche à équilibrer le simulateur en lui ajoutant quatre (4) pattes identiques de type  $I$ , dont trois (3) d'entre elles ont leur point d'attache  $E_j$  situé dans le plan contenant les points  $B_i$ . En supposant par ailleurs que  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  forment un triangle équilatéral dont le centroïde est lui aussi situé en  $P_1$ , le problème consiste alors à déterminer où la quatrième patte devra être disposée sur le manipulateur afin d'obtenir l'équilibre statique. Selon l'analyse faite plus haut, le point d'attache  $E_4$  devrait en principe se trouver à quelque part directement *au-dessus* du centre de masse de la plate-forme. C'est précisément ce qui sera démontré ici. En outre,

pour cette démonstration, l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  est située au point  $P_1$ . Ainsi donc, selon les hypothèses énoncées ci-haut, on se retrouve avec les conditions géométriques suivantes:

$$\sum_{i=1}^6 (\mathbf{b}'_i - \mathbf{p}'_1) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{b}'_i = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

et

$$\sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_j - \mathbf{p}'_1) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}'_j = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

De plus, les vecteurs  $\mathbf{e}'_4$  et  $\mathbf{c}'_{pf}$  sont définis comme suit:

$$\mathbf{e}'_4 = [0, 0, d]^T \quad (4.21)$$

$$\mathbf{c}'_{pf} = [0, 0, h]^T \quad (4.22)$$

où  $d$  est la composante en  $z$  du vecteur reliant le point d'attache  $E_4$  à  $P_1$  et  $h$  la distance verticale séparant le centre de masse de la plate-forme de  $P_1$ .

En substituant les équations (4.19) à (4.22) dans l'équation (4.7) et en réarrangeant, on trouve finalement une relation entre  $d$  et  $h$ , soit

$$d = \frac{4m_{pf}h}{m_{pf} + 6m_u} \quad (4.23)$$

Vu que  $m_{pf}$ ,  $m_u$  et  $h$  sont toutes des quantités strictement positives, il en résulte que  $d$  doit aussi être une quantité strictement positive. De plus, puisqu'il s'agit ici d'un simulateur de vol, il s'avère justifié de considérer la masse des pattes très faible, voire négligeable, comparé à celle de la plate-forme, ce qui veut dire que  $d$  sera toujours *supérieur ou égal* à  $h$ . Cela prouve donc qu'il était raisonnable de s'attendre à ce que le point  $E_4$  soit situé au-dessus du centre de masse de l'effecteur du manipulateur.

Cependant, en pratique, il est difficile d'imaginer qu'on puisse brancher un mécanisme équilibrant sur le dessus du caisson du simulateur. Pour diverses raisons — par exemple, l'encombrement mécanique, la simplicité du design et la sécurité — on tentera plutôt de placer les nouvelles structures entre le sol et le dessous du caisson, c'est-à-dire là où sont attachés les actionneurs. Or, l'équation (4.23) démontre clairement qu'on ne peut pas attacher *toutes* les pattes supplémentaires sous le centre de masse de la plate-forme, du moins, en utilisant des pattes identiques. Toutefois, une façon de contourner ce problème est de réaliser l'équilibrage statique en employant plus d'un modèle de patte d'équilibrage. C'est justement ce dont traite la prochaine section.



### 4.3.1.2 Équilibrage à l'aide de pattes de géométries diverses

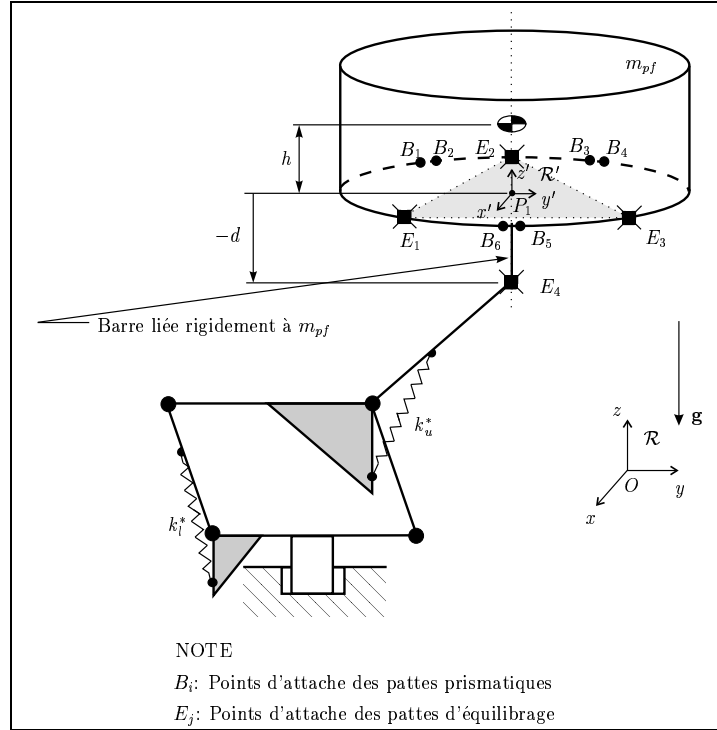


Figure 4.4: Simulateur de vol équilibré avec 4 pattes de type  $I$ , dont 3 sont identiques. Ici,  $\alpha_u = 0$ ,  $\alpha_u^* = \pi$ ,  $\alpha_l = 0$  et  $\alpha_l^* = \pi$ .

Dans cette section, deux (2) architectures différentes — quoique très semblables — de pattes d'équilibrage sont employées pour accomplir l'équilibrage statique sur le simulateur de vol dont il est question à la section précédente.

Afin de simplifier le problème et de pouvoir bien comprendre l'effet des changements architecturaux apportés, on suppose que le simulateur modélisé ici est identique en tous points à celui de la section précédente, sauf en ce qui a trait à la quatrième patte d'équilibrage, dont l'architecture diffère de celle des trois autres, tout en possédant plusieurs similitudes. Cette quatrième patte est montrée à la figure 4.4. Cela étant dit, étant donné que certaines des hypothèses faites à la section 4.3.1.1 ne s'appliquent plus, on ne peut donc pas utiliser les équations (4.6) à (4.9) dans le cas présent. Il faut alors reprendre les équations (2.54) à (2.57) et les adapter aux nouvelles hypothèses. Ce nouveau système d'équations s'écrit

$$m_u d_u - m_l d_l = 0 \quad (4.24)$$

$$\left( m_{pf} + 6m_u + \frac{4m_{p2}r_{p2}}{l_{p2}} \right) g - \frac{3k_u h_u l_u \cos \alpha_u}{l_{p2}} - \frac{k_u^* h_u^* l_u^* \cos \alpha_u^*}{l_{p2}} = 0 \quad (4.25)$$

$$\left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + m_u \sum_{i=1}^6 \mathbf{b}'_i + \frac{m_{p2}r_{p2}}{l_{p2}} \sum_{j=1}^4 \mathbf{e}'_j \right) g - \frac{k_u h_u l_u \cos \alpha_u}{l_{p2}} \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}'_j - \frac{k_u^* h_u^* l_u^* \cos \alpha_u^*}{l_{p2}} \mathbf{e}'_4 = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

$$(m_{p1}r_{p1y} + m_{p3}r_{p3y}) g + k_l h_l l_l \sin \alpha_l = 0 \quad (4.27)$$

$$(m_{p1}r_{p1y} + m_{p3}r_{p3y}) g + k_l^* h_l^* l_l^* \sin \alpha_l^* = 0 \quad (4.28)$$

$$\left( [m_{p2} + m_{p4}] g - \frac{m_{p2}gr_{p2} - k_u h_u l_u \cos \alpha_u}{l_{p2}} \right) l_{p1} + (m_{p1}r_{p1z} + m_{p3}r_{p3z}) g - k_l h_l l_l \cos \alpha_l = 0 \quad (4.29)$$

$$\left( [m_{p2} + m_{p4}] g - \frac{m_{p2}gr_{p2} - k_u^* h_u^* l_u^* \cos \alpha_u^*}{l_{p2}} \right) l_{p1} + (m_{p1}r_{p1z} + m_{p3}r_{p3z}) g - k_l^* h_l^* l_l^* \cos \alpha_l^* = 0 \quad (4.30)$$

où les variables possédant un astérisque se rapportent à la quatrième patte d'équilibre.

Un coup d'œil aux équations (4.27) et (4.28) permet de constater que celles-ci sont très similaires. En les comparant, il découle de ce système d'équations la condition suivante:

$$k_l^* h_l^* l_l^* \sin \alpha_l^* = k_l h_l l_l \sin \alpha_l \quad (4.31)$$

En appliquant le même raisonnement pour les équations (4.29) et (4.30), on trouve la condition

$$k_l^* h_l^* l_l^* \cos \alpha_l^* - \frac{k_u^* h_u^* l_u^* l_{p1} \cos \alpha_u^*}{l_{p2}} = k_l h_l l_l \cos \alpha_l - \frac{k_u h_u l_u l_{p1} \cos \alpha_u}{l_{p2}} \quad (4.32)$$

Dans le but d'avoir le plus de similarité possible avec le mécanisme de la section 4.3.1.1, on simplifie à nouveau les équations en posant les conditions suivantes sur la raideur et la position des points d'attache des ressorts:

$$k_l^* h_l^* l_l^* = k_l h_l l_l \quad (4.33)$$

$$k_u^* h_u^* l_u^* = k_u h_u l_u \quad (4.34)$$

On retombe alors sur le système d'équations suivant:

$$m_u d_u - m_l d_l = 0 \quad (4.35)$$

$$k_u h_u l_u (3 \cos \alpha_u - \cos \alpha_u^*) = ([m_{pf} + 6m_u] l_{p2} + 4m_{p2}r_{p2}) g \quad (4.36)$$

$$\left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + m_u \sum_{i=1}^6 \mathbf{b}'_i + \frac{m_{p2} r_{p2}}{l_{p2}} \sum_{j=1}^4 \mathbf{e}'_j \right) g = \frac{k_u h_u l_u}{l_{p2}} \left( \cos \alpha_u \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}'_j + \cos \alpha_u^* \mathbf{e}'_4 \right) \quad (4.37)$$

$$\sin \alpha_i^* = \sin \alpha_l \quad (4.38)$$

$$k_l h_l l_l (\cos \alpha_l - \cos \alpha_i^*) = \frac{k_u h_u l_u l_{p1}}{l_{p2}} (\cos \alpha_u - \cos \alpha_u^*) \quad (4.39)$$

Par ailleurs, on garde ici les mêmes conditions de symétrie qu'à la section précédente, c'est-à-dire celles données par les équations (4.19) et (4.20). Quant aux vecteurs  $\mathbf{e}'_4$  et  $\mathbf{c}'_{pf}$ , ils sont encore donnés par les équations (4.21) et (4.22). Il en résulte que l'équation vectorielle (4.37) peut alors être traitée comme une équation scalaire puisque seule sa composante en  $z$  est non-nulle. Ainsi, on trouve une relation entre  $d$  et  $h$ , soit

$$\left( \frac{m_{p2} g r_{p2} - k_u h_u l_u \cos \alpha_u^*}{l_{p2}} \right) d = -m_{pf} g h \quad (4.40)$$

Maintenant, afin de déterminer complètement l'architecture des différentes pattes d'équilibrage, on doit imposer une valeur pour les angles  $\alpha_l$ ,  $\alpha_l^*$ ,  $\alpha_u$  et  $\alpha_u^*$ . Or, il a été démontré à la section 2.3 que pour obtenir l'équilibre statique,  $\alpha_u$  et  $\alpha_u^*$  doivent nécessairement avoir une valeur de *zéro* ou  $\pi$ . En conséquence, deux combinaisons sont analysées ci-après, c'est-à-dire d'une part, le cas pour lequel  $\alpha_u = 0$  et  $\alpha_u^* = \pi$  et d'autre part, la situation inverse, c'est-à-dire, le cas où  $\alpha_u = \pi$  et  $\alpha_u^* = 0$ . Par ailleurs, dans le but de simplifier le traitement des équations, on impose, en alternance, les mêmes valeurs à  $\alpha_l$  et  $\alpha_l^*$ .

**a)  $\alpha_u = 0$ ,  $\alpha_u^* = \pi$ ,  $\alpha_l = 0$  et  $\alpha_l^* = \pi$**

L'équation (4.36), permettant de déterminer la raideur du ressort supérieur d'une patte donnée, est réduite à

$$k_u h_u l_u = \frac{([m_{pf} + 6m_u] l_{p2} + 4m_{p2} r_{p2}) g}{2} \quad (4.41)$$

Étant donné que le  $k_u$ ,  $h_u$  et  $l_u$  sont toutes des quantités non-négatives<sup>3</sup>, cette condition sera vraie en autant que

$$r_{p2} \geq -\frac{(m_{pf} + 6m_u) l_{p2}}{4m_{p2}} \quad (4.42)$$

---

<sup>3</sup>Le paramètre  $l_{p2}$  est une longueur, donc une quantité positive. En revanche, il n'y a pas de restriction de signe sur  $r_{p2}$

Cette restriction n'est guère problématique puisqu'en pratique, on aura intérêt à minimiser la distance entre la position du centre de masse et celle du centre géométrique des membrures ajoutées. Or, dans un tel cas, vu que  $m_{pf} \gg m_{p2}$  pour le simulateur de vol, on peut considérer que la condition (4.42) sera toujours satisfaite.

Une fois la raideur  $k_u$  connue, on peut alors facilement trouver  $k_l$ . Ainsi, en substituant l'équation (4.41) dans l'équation (4.39), on obtient

$$k_l h_l l_l = \frac{1}{2} \left( m_{pf} + 6m_u + \frac{4m_{p2}r_{p2}}{l_{p2}} \right) g l_{p1} \quad (4.43)$$

Finalement, pour trouver où la quatrième patte d'équilibrage doit être attachée sur la plate-forme du manipulateur pour le rendre statiquement équilibré, il suffit de remplacer l'équation (4.41) dans l'équation (4.40). Ainsi,

$$d = -\frac{2m_{pf}l_{p2}h}{(m_{pf} + 6m_u)l_{p2} + 6m_{p2}r_{p2}} \quad (4.44)$$

Ce résultat indique que le paramètre  $d$  sera en tout temps *inférieur ou égal*<sup>4</sup> à zéro. En effet, respectant la restriction sur  $r_{p2}$  et sachant qu'aucun des autres paramètres de l'équation ne peut accepter de valeur négative, il devient évident que  $d$  ne pourra jamais être supérieur à zéro. Ce résultat revêt une importance considérable puisqu'il indique qu'il est maintenant possible d'attacher toutes les pattes d'équilibrage *sous* le centre de masse de la plate-forme du manipulateur et donc, sous le caisson du simulateur de vol. Lors d'un mouvement vertical vers le haut de la plate-forme les trois pattes ayant comme caractéristiques  $\alpha_u = 0$  et  $\alpha_l = 0$ , en se dépliant, verront leur ressorts se rétracter. Pendant ce temps, les ressorts de la patte possédant les paramètres  $\alpha_u^* = \pi$  et  $\alpha_l^* = \pi$  s'étireront. En fait, on observerait le même effet d'étirement si on remplaçait cette quatrième patte par une patte identique aux trois autres et qu'au lieu on allait l'attacher *au-dessus* du centre de masse de la plate-forme.

Vu que la masse de la plate-forme (caisson) est beaucoup plus élevée que celle des membrures du manipulateur, ces dernières sont négligeables devant  $m_{pf}$  et on obtient alors l'approximation suivante pour  $d$ :

$$d \approx -2h \quad (4.45)$$

**b)  $\alpha_u = \pi$ ,  $\alpha_u^* = 0$ ,  $\alpha_l = \pi$  et  $\alpha_l^* = 0$**

<sup>4</sup>Le paramètre  $d$  sera nul lorsque la hauteur du centre de masse  $h$  de la plate-forme le sera aussi.

Dans ce cas, en imposant la valeur des paramètres donnés ci-haut dans l'équation (4.36), celle-ci s'écrit alors

$$k_u h_u l_u = - \frac{([m_{pf} + 6m_u] l_{p2} + 4m_{p2} r_{p2}) g}{2} \quad (4.46)$$

Cette fois, la condition essentielle pour que l'équilibre statique puisse être atteint — c'est-à-dire, pour que le membre de droite de l'équation (4.46) soit non-négatif — est la suivante:

$$r_{p2} \leq - \frac{(m_{pf} + 6m_u) l_{p2}}{4m_{p2}} \quad (4.47)$$

Cette restriction sur  $r_{p2}$  est, contrairement au cas précédent (traité en a)), très sévère. Étant donné que la valeur absolue du quotient exprimé dans l'équation (4.47) sera toujours très grande pour un simulateur de vol, il en résulte que pour satisfaire la condition d'équilibrage de l'équation (4.46), le centre de masse de la membrure de masse  $m_{p2}$  devra être positionné extrêmement loin de son centre géométrique. Or, cette condition est très difficile, voire impossible à satisfaire en pratique, compte tenu des dimensions des simulateurs de vol existants. En effet, il est assez difficile d'imaginer un manipulateur dont une des membrures ajoutées pour l'équilibrage — en l'occurrence, la membrure de masse  $m_{p2}$  — aurait son centre de masse situé très loin *en-dessous* de la base de ce manipulateur (voir la figure 2.3).

## 4.3.2 Plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage à deux parallélogrammes

### 4.3.2.1 Équilibrage à l'aide de $n$ pattes identiques

Considérons maintenant la plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage à deux parallélogrammes (voir la figure 2.5). En y allant des mêmes hypothèses et en appliquant les mêmes substitutions que celles faites dans le cas des pattes à un parallélogramme — c'est-à-dire,  $m$  ( $m = 6$ ) pattes prismatiques identiques et  $n$  pattes d'équilibrage identiques —, des conditions d'équilibrage similaires à celles des équations (4.5) à (4.9) sont obtenues. Ainsi,

$$m_u d_u = m_l d_l \quad (4.48)$$

$$k_u h_u l_u \cos \alpha_u = \left( \left[ \frac{m_{pf} + m m_u}{n} + m_{p6} \right] l_{p2} + m_{p2} r_{p2} + m_{p5} r_{p5} \right) g \quad (4.49)$$

$$k_e h_e \cos \alpha_e \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j - \mathbf{r}'_j) = \left[ m_{pf} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j - \mathbf{c}'_{pf} \right) - m_u \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{b}'_i - \frac{m}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j \right) \right] g \quad (4.50)$$

$$k_l h_l l_l \sin \alpha_l = -(m_{p1} r_{p1y} + m_{p3} r_{p3y}) g \quad (4.51)$$

$$k_l h_l l_l \cos \alpha_l = \left( \frac{m_{pf} + m m_u}{n} + m_{p2} + m_{p4} + m_{p5} + m_{p6} \right) l_{p1} g + (m_{p1} r_{p1z} + m_{p3} r_{p3z}) g \quad (4.52)$$

En comparant ces équations avec les équations (4.5) à (4.9), on voit que la différence la plus marquée se trouve dans la troisième équation (équation (4.50)) de ce système. En effet, c'est uniquement dans cette dernière qu'est reflétée la présence d'un troisième ressort — de raideur  $k_e$  — dans l'architecture de la patte d'équilibrage à deux parallélogrammes. En conséquence, pour l'interprétation géométrique qui sera faite ici, on ne considèrera que cette équation.

Tout comme dans le cas du mécanisme à un parallélogramme traité à la section 4.3.1, une certaine symétrie est imposée. Encore une fois, on suppose que les  $m$  pattes à actionneurs prismatiques sont placées de façon symétrique par rapport à un point quelconque  $P_1$  de la plate-forme, c'est-à-dire,

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{b}'_i - \mathbf{p}'_1) = \mathbf{0} \quad (4.53)$$

L'équation (4.50) peut donc être réécrite comme suit:

$$k_e h_e \cos \alpha_e \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j - \mathbf{r}'_j) = \left[ \frac{m_{pf} + m m_u}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j - m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} - m m_u \mathbf{p}'_1 \right] g \quad (4.54)$$

En ce qui regarde les  $n$  pattes d'équilibrage attachées au mécanisme de base existant, on s'intéressera ici à ce qui se passera d'une part, lorsque les points d'attache de ces pattes formeront un arrangement symétrique autour du point arbitraire  $P_2$  de la plate-forme, et d'autre part quand ce seront les points d'attache des ressorts de raideur  $k_e$  qui formeront un arrangement symétrique autour de ce même point.

#### a) Symétrie par rapport à $P_2$ des points d'attache des $n$ pattes d'équilibrage

En appliquant à l'équation (4.54) la condition

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j - \mathbf{p}'_2) = \mathbf{0} \quad (4.55)$$

on obtient

$$k_e h_e \cos \alpha_e \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j = [n k_e h_e \cos \alpha_e - (m_{pf} + m m_u) g] \mathbf{p}'_2 + (m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + m m_u \mathbf{p}'_1) g \quad (4.56)$$

À titre de comparaison avec ce qui a été fait à la section 4.3.1.1 avec les pattes à un parallélogramme, regardons maintenant ce qui se passe lorsque  $P_1$  et  $P_2$  sont confondus. L'équation (4.56) est alors réduite à

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j = \frac{(n k_e h_e \cos \alpha_e - m_{pf} g) \mathbf{p}'_1 + m_{pf} g \mathbf{c}'_{pf}}{k_e h_e \cos \alpha_e} \quad (4.57)$$

Fait intéressant avec cette patte d'équilibrage à deux parallélogrammes, on remarque que le troisième ressort — celui de raideur  $k_e$  — lève la restriction s'appliquant au cas des pattes à un seul parallélogramme, laquelle stipule que  $P_1$  et  $P_2$  doivent être situés au centre de masse de la plate-forme lorsqu'ils sont confondus. En revanche, il suffit d'éliminer ce troisième ressort de la structure des pattes pour retrouver la condition établie à l'équation (4.14).

Regardons maintenant ce qu'il advient de l'équation (4.57) lorsqu'on impose une autre condition de symétrie, cette fois sur la position des points d'attache des ressorts de raideur  $k_e$ .

**i) Symétrie par rapport à  $P_1$  des points d'attache des  $n$  ressorts de raideur  $k_e$**

Lorsque

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{r}'_j - \mathbf{p}'_1) = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

alors l'équation (4.57) est réduite à cette expression simple:

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.59)$$

Ce résultat indique que  $P_1$  doit, dans ce cas, se trouver au centre de masse de la plate-forme, cela étant vrai également pour  $P_2$ , il va sans dire. De plus, comme on peut le voir, la variable  $k_e$  n'apparaît pas dans cette dernière équation. Cela signifie que les ressorts reliant les pattes d'équilibrage à la plate-forme (l'effecteur) s'avèrent dans ce cas-ci inutiles. En fait, de par l'arrangement symétrique des  $n$  chaînes cinématiques ajoutées, le mécanisme se retrouve déjà statiquement équilibré. D'ailleurs, cela a déjà

été démontré à l'équation (4.14) pour le cas du mécanisme muni de pattes à un seul parallélogramme. Ceci dit, peut-on obtenir un arrangement symétrique des points d'attache  $R_j$  de ces ressorts par rapport à un autre point, de sorte que ceux-ci produisent un effet? C'est justement ce dont il est question en ii).

ii) **Symétrie par rapport à un autre point arbitraire sur la plate-forme, soit  $P_3$ , des points d'attache des  $n$  ressorts de raideur  $k_e$**

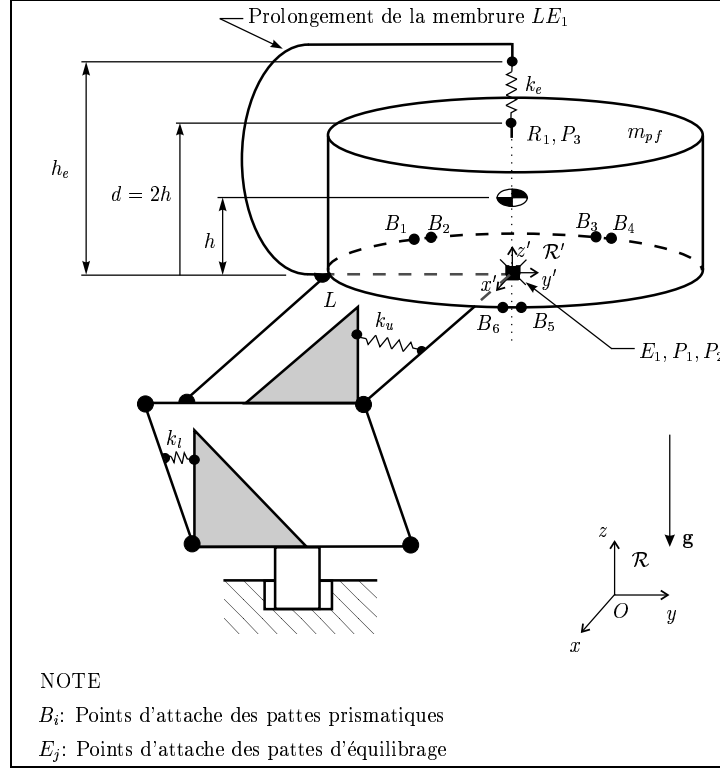


Figure 4.5: Simulateur de vol équilibré avec 1 patte à 2 parallélogrammes. Ici,  $\alpha_u = 0$ ,  $\alpha_l = 0$  et  $\alpha_e = 0$ ;  $d = 2h$ .

En imposant la condition

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{r}'_j - \mathbf{p}'_3) = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

à l'équation (4.57), on se retrouve avec

$$\mathbf{p}'_3 = \frac{(nk_e h_e \cos \alpha_e - m_{pf} g) \mathbf{p}'_1 + m_{pf} g \mathbf{c}'_{pf}}{nk_e h_e \cos \alpha_e} \quad (4.61)$$

À titre de comparaison, reprenons le modèle de simulateur de vol étudié à la section 4.3.1.1. On suppose encore ici que le repère de la plate-forme a son origine située en  $P_1$



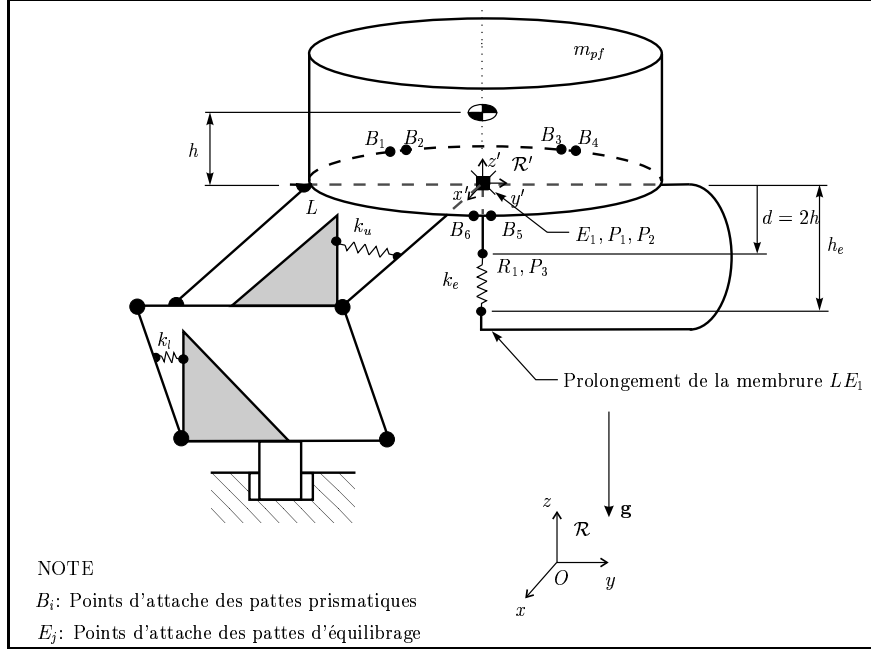


Figure 4.6: Simulateur de vol équilibré avec 1 patte à 2 parallélogrammes. Ici,  $\alpha_u = 0$ ,  $\alpha_l = 0$  et  $\alpha_e = \pi$ ;  $d = -h$ .

(et  $P_2$ ). Donc,

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{0} \quad (4.62)$$

De plus, on pose

$$\mathbf{p}'_3 = [0, 0, d]^T \quad (4.63)$$

$$\mathbf{c}'_{pf} = [0, 0, h]^T \quad (4.64)$$

où  $d$  est la composante en  $z$  du vecteur reliant  $P_3$  à  $P_1$  et  $h$  la distance verticale séparant le centre de masse de la plate-forme de  $P_1$ . On se retrouve alors avec l'expression

$$d = \frac{m_{pf}gh}{nk_e h_e \cos \alpha_e} \quad (4.65)$$

Étant donné que  $n$ ,  $k_e$ ,  $h_e$ ,  $m_{pf}$ ,  $g$  et  $h$  sont des quantités définies positives, seul l'angle  $\alpha_e$  — égal à 0 ou  $\pi$  — déterminera le signe de  $d$ .

Par ailleurs, l'équation (4.65) nous donne également des renseignements sur l'évolution de la raideur  $k_e$  en fonction de  $d$ . Regardons le cas où une seule patte d'équilibrage ( $n = 1$ ) est employée. De l'équation (4.55), le point d'attache  $E_1$  de la patte doit être confondu avec  $P_1$  et  $P_2$ . Quant à  $R_1$ , le point d'attache du ressort, il pourra se trouver n'importe où sur la droite verticale passant par  $P_1$ .

Ainsi, dans le cas où  $R_1$  est *au-dessus* du centre de masse de la plate-forme (voir figure 4.5), par exemple quand  $d = 2h$  et  $\alpha_e = 0$ , alors

$$k_e = \frac{m_{pf}g}{2h_e} \quad (4.66)$$

Lorsque  $R_1$  est confondu avec  $E_1$  — et forcément  $P_1$  —, on retombe sur la restriction dont il est question en a)-i), à savoir

$$d = h = 0 \quad (4.67)$$

laquelle prouve que le ressort de raideur  $k_e$  n'est dans ce cas d'aucune utilité.

Finalement, quand  $R_1$  est *en-dessous* du centre de masse de la plate-forme (voir figure 4.6), par exemple quand  $d = -h$  et  $\alpha_e = \pi$ , alors

$$k_e = \frac{m_{pf}g}{h_e} \quad (4.68)$$

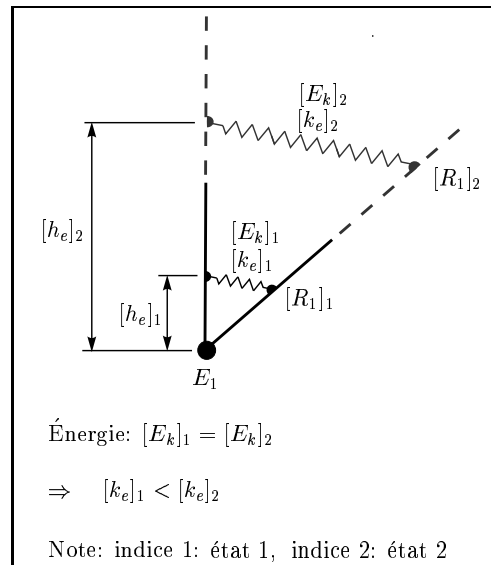


Figure 4.7: Raideur et énergie potentielle dans un ressort.

En comparant les équations (4.66) et (4.68), on constate que plus  $R_1$  est éloigné du centre de masse de la plate-forme, moins la raideur  $k_e$  doit être élevée. De plus, pour les cas présentés aux figures 4.5 et 4.6, on observe que pour une valeur élevée de  $d$ , on aura aussi une grande distance  $h_e$ , ce qui contribuera à faire diminuer la grandeur de  $k_e$  encore plus. Physiquement parlant, ce résultat s'explique par le fait que

pour emmagasiner ou dissiper une quantité d'énergie donnée, un ressort dont les points d'attache sont éloignés du point d'attache  $E_1$  de la patte aura un débattement plus grand et aura donc besoin d'être moins raide que dans le cas où les points d'attache du ressort seraient plus près de  $E_1$  (voir figure 4.7).

Néanmoins, on constate également de par ces mêmes équations que le ressort utilisé devra avoir une raideur très élevée, compte tenu de l'imposante masse de la plate-forme à équilibrer. Cela peut bien sûr être problématique car les ressorts très raides ont un débattement somme toute assez limité. De plus, il pourrait s'avérer que la raideur calculée soit plus grande que ce qui existe dans l'industrie. Une façon d'atténuer ce problème est d'employer plusieurs pattes d'équilibrage à la fois. Ainsi, comme le montre l'équation (4.65), la valeur de  $k_e$  sera réduite par un facteur  $n$  —  $n$  étant le nombre de pattes ajoutées —, ce qui peut faire toute la différence en ce qui a trait à l'applicabilité des conditions d'équilibrage.

**b) Symétrie par rapport à  $P_2$  des points d'attache des  $n$  ressorts de raideur  $k_e$**

Si, au lieu de la contrainte géométrique donnée par l'équation (4.55), on impose la suivante:

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{r}'_j - \mathbf{p}'_2) = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

alors l'équation (4.54) prend la forme suivante:

$$\left( \frac{m_{pf} + mm_u}{n} g - k_e h_e \cos \alpha_e \right) \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j = (m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + mm_u \mathbf{p}'_1) g - nk_e h_e \cos \alpha_e \mathbf{p}'_2 \quad (4.70)$$

Si  $P_1$  et  $P_2$  sont confondus, alors l'équation (4.70) se simplifie et donne

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j = n \frac{(mm_u g - nk_e h_e \cos \alpha_e) \mathbf{p}'_1 + m_{pf} g \mathbf{c}'_{pf}}{(m_{pf} + mm_u) g - nk_e h_e \cos \alpha_e} \quad (4.71)$$

Comme en a), cette équation montre que la restriction de l'équation (4.14) ne s'applique plus.

Voyons maintenant de quelle façon est affectée l'équation (4.71) quand une autre condition de symétrie est imposée. Cette condition s'applique cette fois sur la position des points d'attache des  $n$  pattes d'équilibrage.

**i) Symétrie par rapport à  $P_1$  des points d'attache des  $n$  pattes d'équilibrage**

Quand

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j - \mathbf{p}'_1) = \mathbf{0} \quad (4.72)$$

alors l'équation (4.71) se résume à

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{c}'_{pf} \quad (4.73)$$

ce qui n'est pas surprenant puisque ce cas est en fait le même que celui dont il est question en a)-i).

**ii) Symétrie par rapport à un autre point arbitraire sur la plate-forme, soit  $P_3$ , des points d'attache des  $n$  pattes d'équilibrage**

Avec la condition de symétrie suivante:

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j - \mathbf{p}'_3) = \mathbf{0} \quad (4.74)$$

l'équation (4.71) s'écrit maintenant

$$\mathbf{p}'_3 = \frac{(mm_u g - nk_e h_e \cos \alpha_e) \mathbf{p}'_1 + m_{pf} g \mathbf{c}'_{pf}}{(m_{pf} + mm_u) g - nk_e h_e \cos \alpha_e} \quad (4.75)$$

Toujours pour l'exemple du simulateur de vol, en posant les mêmes hypothèses qu'en a)-ii), lesquelles sont exprimées par les équations (4.62), (4.63) et (4.64), on obtient

$$d = \frac{m_{pf} g h}{(m_{pf} + mm_u) g - nk_e h_e \cos \alpha_e} \quad (4.76)$$

Dans la mesure où l'on voudra que toutes les pattes d'équilibrage soient attachées sous la plate-forme du simulateur, il faudra que la variable  $d$  soit inférieure à zéro. Or, pour que cela soit vrai, il faudra que

$$nk_e h_e \cos \alpha_e > (m_{pf} + mm_u) g \quad (4.77)$$

et que

$$\cos \alpha_e > 0, \quad \text{c'est-à-dire dans ce cas-ci } \alpha_e = 0 \quad (4.78)$$

En conclusion à cette section, il est à noter que l'analyse géométrique faite ici n'est que partielle et qu'il existe sans doute plusieurs autres avenues possibles quant au choix des paramètres à étudier. L'objectif de cette analyse était simplement de montrer comment les conditions d'équilibrage peuvent être interprétées géométriquement grâce à la formulation vectorielle qui a été adoptée.

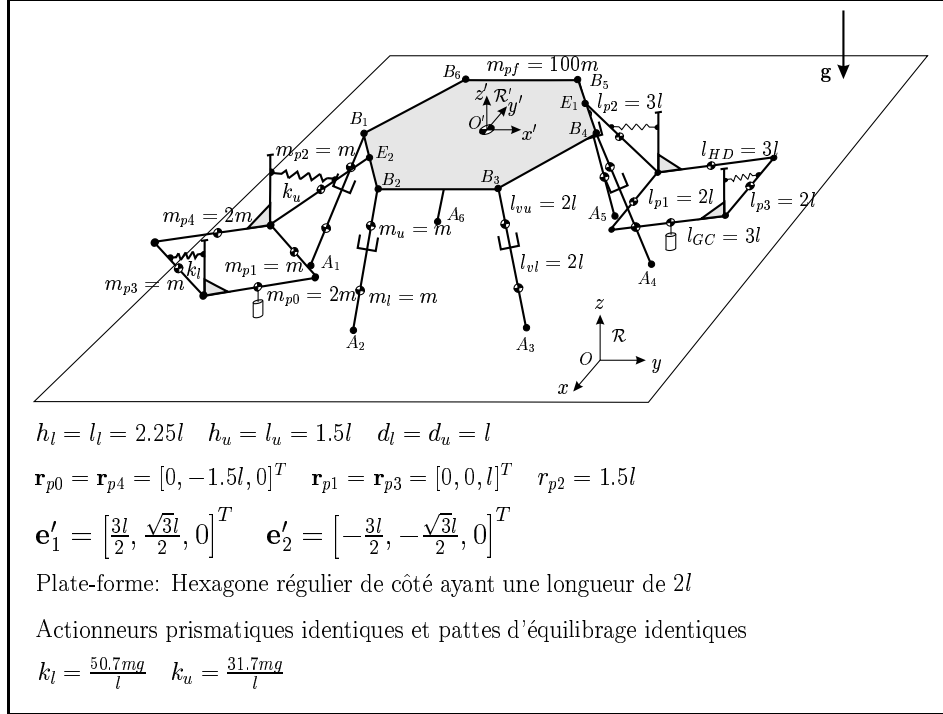


Figure 4.8: Manipulateur parallèle spatial à 6 ddl à actionneurs prismatiques statiquement équilibré par deux mécanismes à un parallélogramme de type *I* (exemple 1).

### 4.3.3 Exemples de manipulateurs spatiaux statiquement équilibrés

#### 4.3.3.1 Exemple 1

Pour équilibrer statiquement le mécanisme présenté ici, on impose une série de paramètres (masses, longueurs, etc.) et on trouve ensuite une famille de mécanismes équilibrés. On aura alors une infinité de solutions. Il est néanmoins important de se rendre compte que cette infinité de solutions est différente de celle qui aurait été obtenue en imposant des paramètres de départ différents. Ici, les paramètres de départ sont choisis arbitrairement. Par contre, ceux-ci pourraient tout aussi bien être sélectionnés de façon à ce qu'ils optimisent certaines propriétés des manipulateurs.

Dans cet exemple, on cherche à équilibrer statiquement la plate-forme de Gough-Stewart à l'aide de deux pattes d'équilibrage *identiques* à un parallélogramme de type *I*. On peut donc utiliser les équations simplifiées (4.5) à (4.9), dans lesquelles sont insérées les valeurs numériques suivantes:

$n$	1	2	3	4	5	6
$k_l$	$\frac{97.8mg}{l}$	$\frac{50.7mg}{l}$	$\frac{35mg}{l}$	$\frac{27.1mg}{l}$	$\frac{22.4mg}{l}$	$\frac{19.3mg}{l}$
$k_u$	$\frac{63.1mg}{l}$	$\frac{31.7mg}{l}$	$\frac{21.2mg}{l}$	$\frac{15.7mg}{l}$	$\frac{12.6mg}{l}$	$\frac{10.8mg}{l}$

Tableau 4.2: Raideurs de ressorts en fonction du nombre de pattes d'équilibrage.

$$\begin{aligned}
m_l = m_u = m_{p1} = m_{p2} = m_{p3} = m, \quad m_{p0} = m_{p4} = 2m, \quad m_{pf} = 100m, \\
d_l = l, \quad l_{vl} = l_{vu} = l_{p1} = l_{p3} = 2l, \quad l_{p2} = l_{GC} = l_{HD} = 3l, \\
l_l = h_l = 1.5l, \quad l_u = h_u = 2.25l, \quad \alpha_l = \alpha_u = 0, \\
r_{p2} = 1.5l, \quad \mathbf{r}_{p0} = \mathbf{r}_{p4} = [0, -1.5l, 0]^T, \quad \mathbf{r}_{p1} = \mathbf{r}_{p3} = [0, 0, l]^T \quad \text{et} \quad \mathbf{c}'_{pf} = [0, 0, 0]^T
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le point  $P_1$ , autour duquel les pattes prismatiques et les pattes d'équilibrage forment un arrangement symétrique, coïncide avec l'origine du repère  $\mathcal{R}'$ , ce qui fait que  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{0}$ .

De l'équation (4.5), on obtient

$$d_u = l \tag{4.79}$$

Quant à l'équation (4.7), elle est réduite à l'expression

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j = \mathbf{0} \tag{4.80}$$

et celle-ci indique qu'il existe une infinité de possibilités quant au choix des points d'attache des pattes ajoutées, en autant que ces points soient placés de façon symétrique par rapport au centre de masse de la plate-forme.

Finalement, les équations (4.6) et (4.9), permettant de déterminer les raideurs  $k_u$  et  $k_l$  respectivement, prennent maintenant la forme suivante:

$$k_u = \frac{3mg}{(2.25)^2 l} \left( \frac{106}{n} + 0.5 \right) \tag{4.81}$$

$$k_l = \frac{2mg}{(1.5)^2 l} \left( \frac{106}{n} + 4 \right) \tag{4.82}$$

où  $n$  est le nombre de pattes d'équilibrage employées.

Le tableau 4.2 montre l'évolution de la grandeur de  $k_l$  et  $k_u$  en fonction du nombre de pattes d'équilibrage. On remarque que plus  $n$  augmente, plus les raideurs diminuent.

Cela est logique puisqu'un nombre plus important de ressorts sera utilisé pour fournir à *peu près* la même énergie potentielle totale<sup>5</sup>. Autre fait intéressant, on observe que la progression descendante des raideurs est très prononcée lorsqu'on passe de  $n = 1$  à  $n = 2$  et de  $n = 2$  à  $n = 3$ . Du point de vue du design, le défi consistera donc à utiliser des ressorts de raideur la plus basse possible tout en voyant à ce que la masse totale ajoutée ne soit pas trop élevée et que l'encombrement mécanique causé par cet ajout ne restreigne l'espace de travail du manipulateur à être équilibré statiquement. La figure 4.8 montre le cas où  $n = 2$ . Cet exemple a été utilisé dans (Leblond et Gosselin 1998).

#### 4.3.3.2 Exemple 2

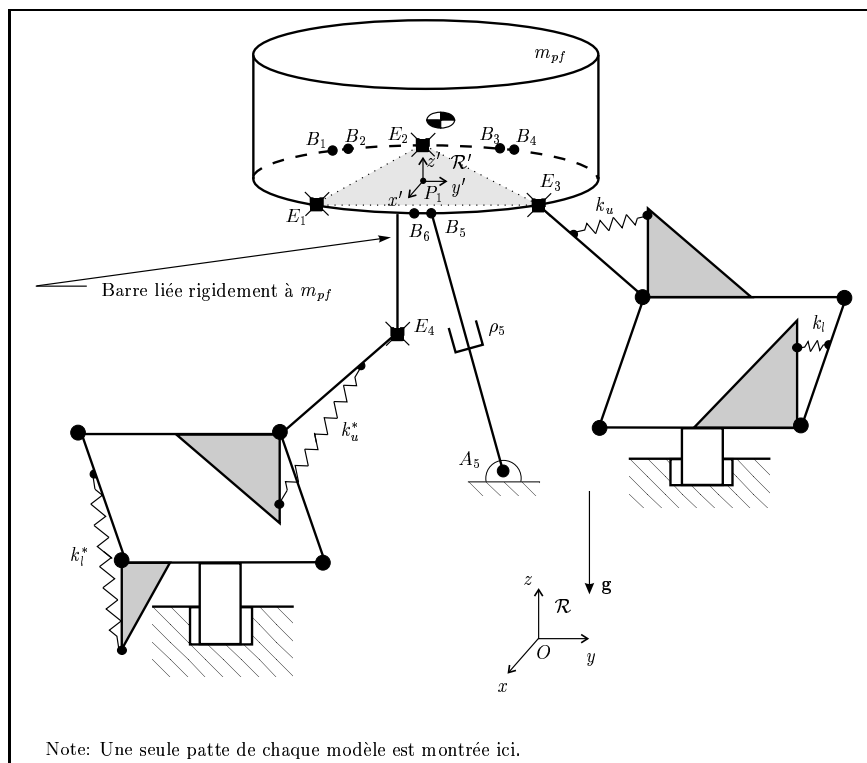


Figure 4.9: Simulateur de vol équilibré statiquement par 4 pattes à un parallélogramme de type  $I$ , dont 3 sont identiques (exemple 2).

Ici, on reprend l'exemple de simulateur de vol donné à la section 4.3.1.2. Celui-ci est équilibré statiquement par quatre pattes à un parallélogramme de type  $I$ , dont

<sup>5</sup>Cela sera vrai en autant que les masses ajoutées soient négligeables devant la masse du manipulateur avant l'équilibrage.

trois sont identiques. Tout comme les pattes prismatiques, ces trois pattes forment un arrangement symétrique autour du point  $P_1$ , lequel est situé à l'origine  $\mathcal{O}'$  du repère  $\mathcal{R}'$ . Quant à la quatrième patte, elle est située sous la plate-forme (voir figure 4.9). Pour déterminer les raideurs des ressorts et la position du point d'attache de cette quatrième patte, on utilise directement les équations (4.35) à (4.39) avec les paramètres suivants:

$$\begin{aligned} m_l &= m_u = m_{p0} = m_{p4} = 50 \text{ kg}, & m_{p1} &= m_{p2} = m_{p3} = 35 \text{ kg}, & m_{pf} &= 15000 \text{ kg}, \\ d_l &= 0.75 \text{ m}, & l_{vl} &= l_{vu} = 1.5 \text{ m}, & l_{p1} &= l_{p2} = l_{p3} = 2 \text{ m}, & l_{GC} &= l_{HD} = 3 \text{ m}, \\ l_l &= l_l^* = h_l = h_l^* = l_u = l_u^* = h_u = h_u^* = 1.5 \text{ m}, \\ \alpha_l &= \alpha_u = 0 \text{ deg}, & \alpha_l^* &= \alpha_u^* = 180 \text{ deg}, \\ r_{p2} &= 1 \text{ m}, & \mathbf{r}_{p0} &= \mathbf{r}_{p4} = [0, -2.5, 0.5]^T \text{ m}, & \mathbf{r}_{p1} &= \mathbf{r}_{p3} = [0, 0, 1]^T \text{ m}, \\ \mathbf{r}_{p4} &= [0, -0.5, 0.5]^T \text{ m}, & \mathbf{c}'_{pf} &= [-0.25, 0, 1]^T \text{ m} & \text{et} & g = 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$d_u = 0.75 \text{ m} \quad (4.83)$$

$$k_l = k_l^* = 67013 \text{ N/m} \quad (4.84)$$

$$k_u = k_u^* = 67013 \text{ N/m} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{e}'_4 = [0.489, 0, -1.956]^T \text{ m} \quad (4.86)$$

On remarque d'une part que le point d'attache  $E_4$  de la quatrième patte d'équilibrage devra être positionné très loin (presque 2 mètres!) sous la plate-forme du manipulateur, ce qui en pratique, n'est pas nécessairement facile à réaliser ni même souhaitable compte tenu de la compacité structurelle des simulateurs de vol. D'autre part, les raideurs obtenues pour les ressorts sont très élevées, voire disproportionnées, ce qui montre qu'en pratique, l'équilibrage statique de lourdes structures comme les simulateurs de vol peut s'avérer hasardeux, voire irréalisable sous cette forme. Le fait est que parce qu'ils possèdent une raideur très élevée, ces ressorts sont peu flexibles et ne peuvent donc s'étirer que très peu, ce qui est problématique en ce qui concerne les manipulateurs à grand débattement. Voyons maintenant ce qui se produit lorsqu'on diminue la masse de la plate-forme.

En réduisant la masse de la plate-forme à une valeur plus basse et surtout, moins disproportionnée par rapport au reste de la structure, soit  $m_{pf} = 1500 \text{ kg}$ , on trouve

$$d_u = 0.75 \text{ m} \quad (4.87)$$



$$k_l = k_l^* = 8153 \text{ N/m} \quad (4.88)$$

$$k_u = k_u^* = 8153 \text{ N/m} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{e}'_4 = [0.409, 0, -1.635]^T \text{ m} \quad (4.90)$$

On voit ici que pour une masse de plate-forme d'échelle comparable à celle du reste du manipulateur, l'équilibrage statique requiert la présence de ressorts dont la raideur est sensiblement plus basse, ce qui d'un point de vue pratique, est beaucoup moins contraignant.

#### 4.3.3.3 Exemple 3

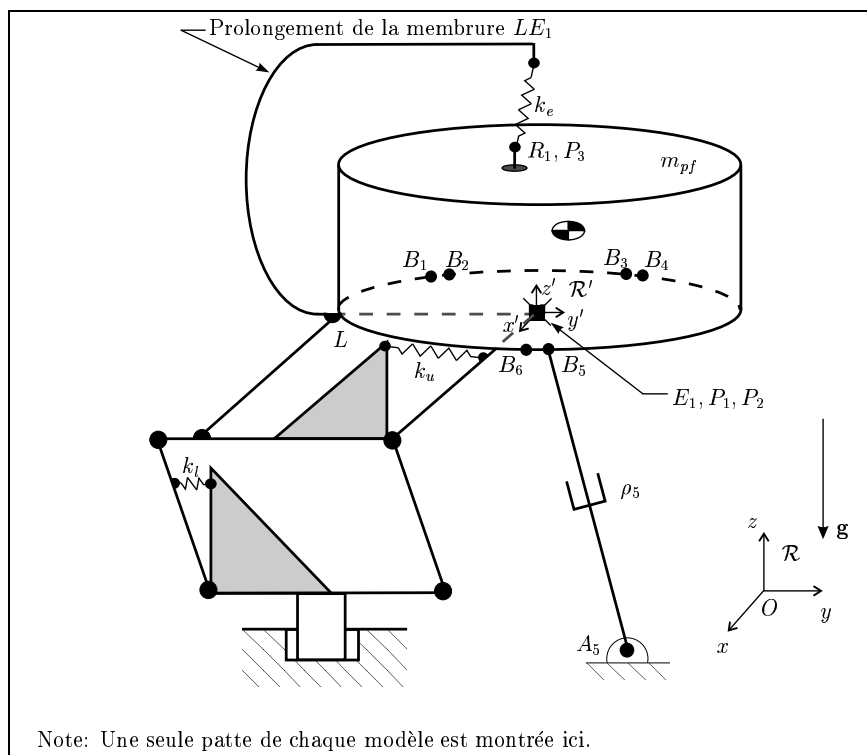


Figure 4.10: Simulateur de vol équilibré statiquement par une patte à deux parallélogrammes (exemple 3).

Dans cet exemple, il est à nouveau question du simulateur de vol. Celui-ci est maintenant équilibré statiquement par une patte à deux parallélogrammes (voir figure 4.10). En plus de la symétrie des pattes prismatiques par rapport à  $P_1$ , on branche la patte d'équilibrage exactement en ce point, de sorte que  $P_1$  et  $E_1$  soient confondus.

De plus,  $P_1$  est placé à l'origine de  $\mathcal{R}'$ . Pour déterminer les raideurs de ressorts et la position du point d'attache du ressort de raideur  $k_e$  du mécanisme équilibrant, on utilise directement les équations (4.48), (4.49), (4.51), (4.52) et (4.57) avec les paramètres suivants:

$$\begin{aligned}
m_l &= m_u = m_{p0} = m_{p4} = 50 \text{ kg}, & m_{p1} &= m_{p2} = m_{p3} = m_{p5} = 35 \text{ kg}, & m_{p6} &= 40 \text{ kg}, \\
m_{pf} &= 15000 \text{ kg}, & d_l &= 0.75 \text{ m}, & l_{vl} &= l_{vu} = 1.5 \text{ m}, & l_{p1} &= l_{p2} = l_{p3} = l_{p5} = 2 \text{ m}, \\
l_{GC} &= l_{HD} = 3 \text{ m}, & l_{LE1} &= 2.5 \text{ m}, & l_l &= h_l = l_u = h_u = 1.5 \text{ m}, & h_e &= 2.5 \text{ m}, \\
\alpha_l &= \alpha_u = \alpha_e = 0 \text{ deg}, & \alpha_l^* &= \alpha_u^* = 180 \text{ deg}, \\
r_{p2} &= r_{p5} = 1 \text{ m}, & \mathbf{r}_{p0} &= \mathbf{r}_{p4} = [0, -2.5, 0.5]^T \text{ m}, & \mathbf{r}_{p1} &= \mathbf{r}_{p3} = [0, 0, 1]^T \text{ m}, \\
\mathbf{r}_{p4} &= [0, -0.5, 0.5]^T \text{ m}, & \mathbf{r}_{p6} &= [0, -2, 1]^T \text{ m}, & \mathbf{c}'_{pf} &= [-0.25, 0, 1]^T \text{ m}, \\
\mathbf{e}'_1 &= [0, 0, 0]^T \text{ m}, & r'_{1z} &= -0.625 \text{ m} & \text{et} & g &= 9.81 \text{ m/s}^2
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$d_u = 0.75 \text{ m} \quad (4.91)$$

$$k_l = 135116 \text{ N/m} \quad (4.92)$$

$$k_u = 134070 \text{ N/m} \quad (4.93)$$

$$k_e = 23544 \text{ N/m} \quad (4.94)$$

$$\mathbf{r}'_1 = [-0.625, 0, 2.5]^T \text{ m} \quad (4.95)$$

Les résultats ci-haut démontrent encore une fois que s'il est en théorie possible d'équilibrer statiquement les simulateurs de vol, il en est tout autrement en pratique. En effet, on imagine mal un simulateur de vol qui posséderait des ressorts tellement raides que le débattement en soit réduit. De plus, à cause de la quantité substantielle d'énergie potentielle gravitationnelle à contrebalancer, il ne serait pas surprenant que la masse de ces ressorts soit assez importante pour en bout de ligne détériorer le modèle dynamique (voir l'équation (1.8)) du simulateur et ses performances en asservissement. Une façon d'obtenir des constantes de rappel plus basses pour les ressorts serait de brancher des pattes d'équilibrage additionnelles sur le simulateur.

En outre, on constate que le fait d'avoir utilisé une patte à deux parallélogrammes plutôt qu'une patte à un seul parallélogramme ne contribue aucunement à réduire la raideur des deux ressorts inférieurs car le terme  $k_e$  n'apparaît pas dans les équations

utilisées pour déterminer  $k_l$  et  $k_u$ . En revanche, l'ajout du deuxième parallélogramme et du troisième ressort rend moins restrictive la condition sur la position du point d'attache  $E_1$  de la patte sur la plate-forme. En effet, sans la présence de ce ressort, le point  $E_1$  devrait se trouver plus près du centre de masse de la plate-forme, lequel n'est pas toujours accessible, en particulier dans le cas des simulateurs de vol, où le centre de masse est localisé à quelque part à l'intérieur du caisson.

Pour une masse réduite de la plate-forme, c'est-à-dire  $m_{pf} = 1000$  kg, on trouve des paramètres moins sévères. Ainsi,

$$d_u = 0.75 \text{ m} \quad (4.96)$$

$$k_l = 13036 \text{ N/m} \quad (4.97)$$

$$k_u = 11990 \text{ N/m} \quad (4.98)$$

$$k_e = 1570 \text{ N/m} \quad (4.99)$$

$$\mathbf{r}'_1 = [-0.625, 0, 2.5]^T \text{ m} \quad (4.100)$$

On remarque à l'équation (4.100) que le fait de modifier la masse de la plate-forme n'a aucun effet sur la position du point  $R_1$ .

#### 4.3.4 Note sur les caractéristiques des ressorts utilisés

Comme on pouvait s'y attendre, les exemples 2 et 3 ont démontré que pour un système de masse élevée, la capacité énergétique des ressorts doit être très grande puisque ceux-ci doivent au total pouvoir emmagasiner au moins la même quantité d'énergie potentielle que celle engendrée par la différence de hauteur du centre de masse global du manipulateur, entre deux configurations de ce dernier. Cela signifie que les ressorts, en plus d'être très raides, doivent être relativement volumineux et donc plus massifs. En fait, à l'équation (4.101), la formule tirée de (Associated Spring 1977) montre que le volume d'un ressort (et forcément sa masse) est proportionnel à l'énergie qu'il peut emmagasiner.

$$\frac{W}{V} = \frac{S^2}{4G} \quad (4.101)$$

où

$W$  = Travail effectué par le ressort

- $V$  = Volume de matériel constituant le ressort  
 $S$  = Limite élastique du matériau utilisé  
 $G$  = Module de Young en cisaillement du matériau utilisé

Par ailleurs, un accroissement massique des éléments mobiles s'accompagne obligatoirement d'une augmentation de l'inertie globale lors du mouvement du manipulateur et il est probable que cela affecte ses propriétés dynamiques et donc la performance de l'asservissement de ses actionneurs (voir l'équation (1.8) pour plus de détails). Dans le cadre des travaux faisant l'objet de ce mémoire, les conditions d'équilibrage ont été obtenues en ne tenant pas compte de la masse des ressorts, alors considérée comme négligeable. Or, pour des mécanismes où les masses à équilibrer statiquement sont énormes — les simulateurs de vol par exemple —, il apparaît pertinent de se questionner sur la validité de cette hypothèse vu la masse relativement élevée des ressorts d'équilibrage<sup>6</sup>. Une façon de s'assurer que les conditions développées demeurent valides est de déporter les ressorts vers la base de ces mécanismes et de les disposer à l'horizontale au moyen d'un système de câbles et de poulies, de sorte que leur mouvement se fasse uniquement dans cette direction (Laliberté et al. 1999). Ainsi, en demeurant à une hauteur constante et en étant orientés dans une direction perpendiculaire au vecteur gravité  $\mathbf{g}$ , les ressorts ne contribuent d'aucune manière au bilan énergétique gravitationnel alors qu'il en est tout autrement du point de vue inertiel.

Un autre problème associé aux ressorts de raideur élevée est le faible débattement qu'ils procurent. En effet, dans un système possédant un grand débattement structurel tels les simulateurs de vol, ces ressorts très raides, et donc peu flexibles, ne pourront carrément pas suivre le mouvement du mécanisme sans se fracturer ou endommager ce dernier.

On voit donc, à la lumière de cette discussion, que le passage de la théorie à la pratique n'est pas simple dans le cas des manipulateurs parallèles dont la plate-forme est très lourde. Par contre, cette conclusion doit être remise dans son contexte, à savoir que l'objectif de cette recherche était avant tout de tenter de rendre équilibrés statiquement des mécanismes parallèles à actionneurs prismatiques, ce qui a été fait.

---

<sup>6</sup>À ce sujet, une analyse de l'équilibrage statique tenant compte de la masse des ressorts a été réalisée pour des manipulateurs parallèles dans (Ebert-Uphoff et Gosselin 1999).

## CHAPITRE 5

### INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE STATIQUE POUR LES MANIPULATEURS PARALLÈLES PLANS

Ce chapitre se veut le pendant dans le plan de l'interprétation géométrique faite au chapitre 4 sur les conditions d'équilibrage des manipulateurs spatiaux. Étant donné la grande similitude entre les conditions obtenues pour les mécanismes spatiaux et plans, l'analyse du chapitre 4 n'est pas répétée inutilement ici. Par contre, des exemples de mécanismes plans équilibrés statiquement sont tout de même présentés et ceux-ci découlent justement de l'interprétation géométrique dont il est question au chapitre précédent.

#### 5.1 Paramètres de design

Comme dans le cas des mécanismes spatiaux du chapitre 4, on peut déterminer pour les mécanismes plans le sous-espace multi-dimensionnel découlant des conditions

	1	2	3	4
Nombre d'équations d'équilibrage	$2n + 6$	$2n + 6$	$2n + 6$	$2n + 6$
Nombre de paramètres fixes	21	21	21	21
Nombre de paramètres libres	$21n$	$29n$	$23n$	$15n$
Dimension du lieu des manipulateurs équilibrés	$\infty^{19n-6}$	$\infty^{27n-6}$	$\infty^{21n-6}$	$\infty^{13n-6}$

**Légende:**

1: patte(s) à 3 d.d.l. à 1 parallélogramme de type *I* (section 3.3.1)

2: patte(s) à 3 d.d.l. à 2 parallélogrammes (section 3.3.2)

3: patte(s) à 3 d.d.l. à 1 parallélogramme de type *III* (section C.1)

4: patte(s) à 3 d.d.l. sans parallélogramme

*n*: nombre de pattes d'équilibrage

Tableau 5.1: Dimension des lieux des manipulateurs parallèles plans à trois (3) d.d.l. équilibrés.

d'équilibrage. Le tableau 5.1 montre la dimension du lieu des manipulateurs statiquement équilibrés pour chacun des cinq (5) manipulateurs plans étudiés.

## 5.2 Articulations prismatiques

L'analyse faite à la section 4.2 demeure valide pour les mécanismes plans. Étant donné que la même condition d'équilibrage prévaut, c'est-à-dire,

$$m_{li}d_{li} = m_{ui}d_{ui} \quad (5.1)$$

mais cette pour fois  $i = 1, \dots, 3$ , on peut par conséquent se référer aux développements faits pour les mécanismes spatiaux.

## 5.3 Architectures particulières

Encore une fois, moyennant quelques ajustements mineurs, il est possible de transposer, des mécanismes spatiaux aux mécanismes plans, les résultats obtenus de l'étude sur la symétrie architecturale réalisée au chapitre précédent. Comme cela est expliqué au chapitre 3, il suffit, pour ce faire, de projeter dans le plan les mécanismes spatiaux et de réduire leur nombre d'actionneurs à trois (3). En ce qui a trait à l'équilibrage statique de ces mécanismes à l'aide de ressorts, vu que la seule chose qui importe est le déplacement de leurs constituants dans un plan parallèle au vecteur gravité, on peut tout simplement ignorer la composante en  $x$  des vecteurs ou encore la fixer à zéro.

Cela étant dit, le reste de ce chapitre est consacré à quelques exemples non-optimisés de manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté statiquement équilibrés, lesquels reflètent des caractéristiques de symétrie.

### 5.3.1 Exemples de manipulateurs plans statiquement équilibrés

#### 5.3.1.1 Exemple 1

Cet exemple présente l'équilibrage statique d'un manipulateur parallèle plan à trois degrés de liberté à actionneurs prismatiques par l'entremise de  $n$  pattes d'équilibrage *identiques* à deux parallélogrammes. Pour déterminer les paramètres rendant ce manipulateur équilibré, on peut directement utiliser les équations simplifiées développées pour les manipulateurs spatiaux, soit les équations (4.48) à (4.52), à condition de considérer nulles la composante en  $x$  des vecteurs et la masse  $m_{p0}$  dans les équations. Ainsi, on impose au système les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{aligned} m_l &= m_u = m_{p1} = m_{p2} = m_{p3} = m_{p5} = m, & m_{p4} &= m_{p6} = 2m, & m_{pf} &= 100m, \\ d_l &= l, & l_{vl} &= l_{vu} = l_{p1} = l_{p3} = l_{LE1} = 2l, & l_{p2} &= l_{p5} = l_{GC} = l_{HD} = 3l, \\ l_l &= h_l = 1.5l, & l_u &= h_u = 2.25l, & h_e &= 1.5l, & \alpha_l &= \alpha_u = 0, \\ r_{p2} &= r_{p5} = 1.5l, & \mathbf{r}_{p1} &= \mathbf{r}_{p3} = [0, 0, l]^T, & \mathbf{r}_{p4} &= \mathbf{r}_{p6} = [0, -1.5l, 0]^T & \text{et} & \mathbf{c}'_{pf} = [0, 0, 0]^T \end{aligned}$$

En outre, le point  $P_1$  est situé à l'origine du repère  $\mathcal{R}'$ , ce qui fait que la symétrie de la position des pattes prismatiques et celle des pattes d'équilibrage est considérée

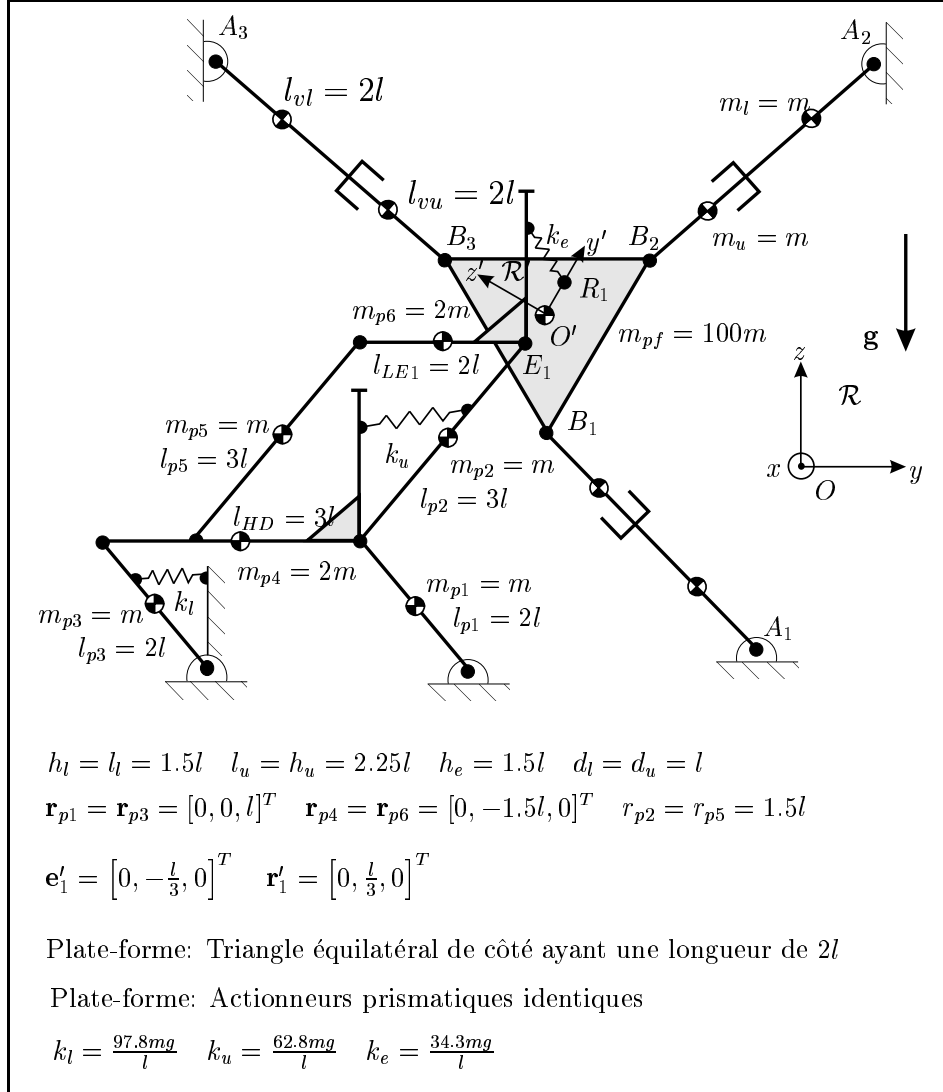


Figure 5.1: Manipulateur parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques statiquement équilibré par un mécanisme à deux parallélogrammes (exemple 1).



$n$	1	2	3
$k_l$	$\frac{97.8mg}{l}$	$\frac{52mg}{l}$	$\frac{36.7mg}{l}$
$k_u$	$\frac{62.8mg}{l}$	$\frac{32.3mg}{l}$	$\frac{22.1mg}{l}$
$k_e$	$\frac{34.3mg}{l}$	$\frac{17.2mg}{l}$	$\frac{11.4mg}{l}$

Tableau 5.2: Raideurs de ressorts en fonction du nombre de pattes d'équilibrage.

par rapport à  $\mathcal{O}'$ . Ainsi,  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{0}$ . De plus, on pose la condition suivante:

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{e}'_j + \mathbf{r}'_j) = \mathbf{0}, \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{e}'_j \neq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \neq \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Dans ce cas, ce ne sont ni les points  $E_j$ , ni les points  $R_j$  qui doivent être placés symétriquement autour de  $\mathcal{O}'$ , mais plutôt les points (imaginaires) résultant de la somme vectorielle des vecteurs  $\mathbf{e}'_j$  et  $\mathbf{r}'_j$ . Pour satisfaire la condition (5.2), il existe une infinité de possibilités quant au choix des points  $E_j$  et  $R_j$ .

À partir de l'équation (4.48), on obtient

$$d_u = l \quad (5.3)$$

D'autre part, les équations (4.49), (4.50) et (4.52), permettant de déterminer les raideurs  $k_u$ ,  $k_e$  et  $k_l$  respectivement, se réduisent à

$$k_u = \frac{3mg}{(2.25)^2 l} \left( \frac{103}{n} + 3 \right) \quad (5.4)$$

$$k_e = \frac{103mg}{3nl} \quad (5.5)$$

$$k_l = \frac{2mg}{(1.5)^2 l} \left( \frac{103}{n} + 7 \right) \quad (5.6)$$

où  $n$  est le nombre de pattes d'équilibrage.

Le tableau 5.2 montre l'évolution de la grandeur de  $k_l$  et  $k_u$  en fonction du nombre de pattes d'équilibrage. La figure 5.1 montre le cas où  $n = 1$ .

### 5.3.1.2 Exemple 2

Cet exemple traite de l'équilibrage statique d'un manipulateur parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques auquel ont été ajoutées deux pattes identiques à un

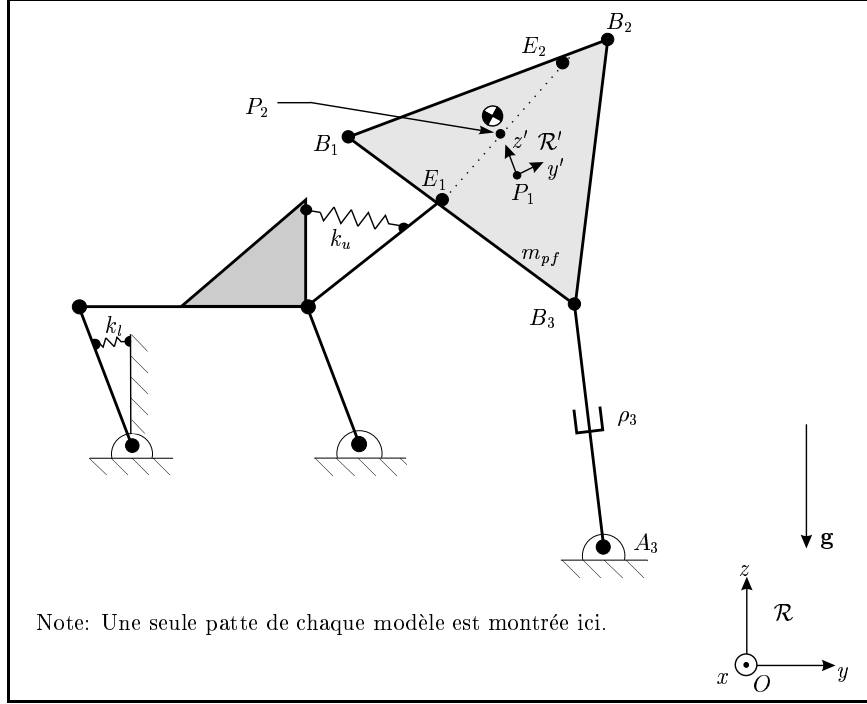


Figure 5.2: Mécanisme parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques équilibré statiquement par 2 pattes à un parallélogramme de type *I* (exemple 2).

parallélogramme de type *I* (voir figure 5.2). Les pattes prismatiques forment un arrangement symétrique autour du point  $P_1$ , lequel est situé à l'origine  $\mathcal{O}'$  du repère  $\mathcal{R}'$  ( $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{0}$ ). Quant aux pattes d'équilibrage, elles sont disposées de part et d'autre du point  $P_2$ . Pour déterminer les raideurs de ressorts et la position du point d'attache de l'autre patte et celle de  $P_2$ , on utilise les équations (4.5), (4.6), (4.8), (4.9) et (4.13) avec les paramètres suivants:

$$\begin{aligned}
 m_l = m_u = 1 \text{ kg}, \quad m_{p1} = m_{p2} = m_{p3} = 0.5 \text{ kg}, \quad m_{p4} = 0.7 \text{ kg}, \quad m_{pf} = 10 \text{ kg}, \\
 d_l = 0.5 \text{ m}, \quad l_{vl} = l_{vu} = 1 \text{ m}, \quad l_{p1} = l_{p2} = l_{p3} = 1.5 \text{ m}, \quad l_{GC} = l_{HD} = 2.5 \text{ m}, \\
 l_l = h_l = l_u = h_u = 1 \text{ m}, \quad \alpha_l = \alpha_u = 0 \text{ deg}, \\
 r_{p2} = 1 \text{ m}, \quad \mathbf{r}_{p1} = \mathbf{r}_{p3} = [0, 0, 1]^T \text{ m}, \quad \mathbf{r}_{p4} = [0, -2.5, 0.5]^T \text{ m}, \quad \mathbf{r}_{p4} = [0, -0.5, 0.5]^T \\
 \text{m}, \quad \mathbf{c}'_{pf} = [0, 0, 0.5]^T \text{ m}, \quad \mathbf{e}'_1 = [0, -0.75, 0]^T \text{ m} \quad \text{et} \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Cela conduit ainsi à l'ensemble-solution donné ci-dessous.

$$d_u = 0.5 \text{ m} \quad (5.7)$$

$$k_l = 123.1 \text{ N/m} \quad (5.8)$$

$$k_u = 100.2 \text{ N/m} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{p}'_2 = [0, 0, 0.385]^T \text{ m} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{e}'_2 = [0, 0, 0.769]^T \text{ m} \quad (5.11)$$

### 5.3.1.3 Exemple 3

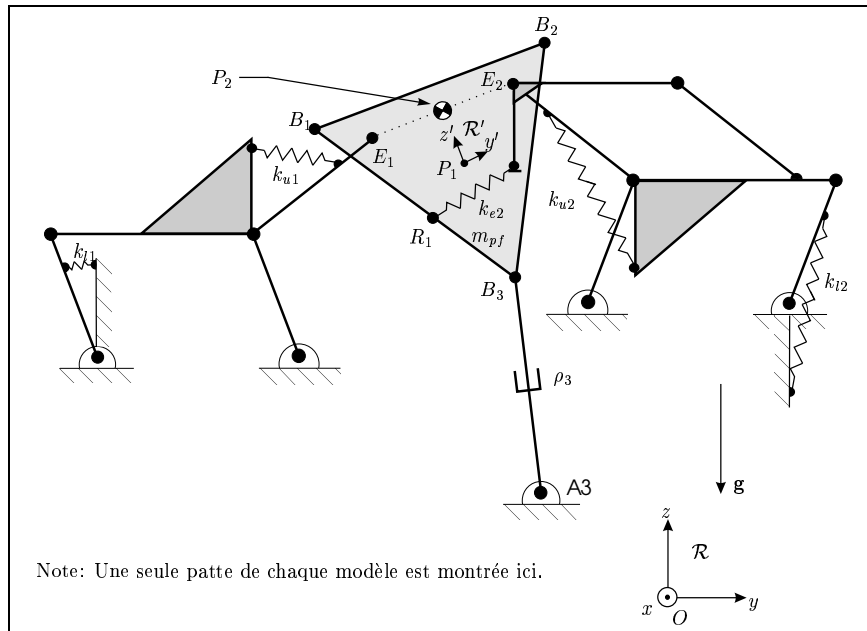


Figure 5.3: Mécanisme parallèle plan à 3 ddl à actionneurs prismatiques équilibré statiquement par une patte à un parallélogramme de type *I* et une autre à deux parallélogrammes (exemple 3).

Cet exemple présente un intérêt particulier. On reprend le manipulateur de l'exemple 2 et on remplace une des deux pattes à un parallélogramme par une autre à deux parallélogrammes (voir figure 5.3). Pour modéliser ce mécanisme, les équations développées pour la patte d'équilibrage à deux parallélogrammes dans le plan (chapitre 3) sont utilisées. Ainsi, les équations (3.44) à (3.48) — lesquelles renvoient aux équations (3.36) à (3.40) — devront être satisfaites pour que le mécanisme atteigne l'équilibrage statique. Cependant, pour tenir compte du fait qu'une des deux pattes ne possède qu'un seul parallélogramme dans sa structure, il faudra considérer nulles les masses  $m_{p51}$  et  $m_{p61}$ , ainsi que la raideur  $k_{e1}$  du troisième ressort pour cette patte. Il est à noter que comme à l'exemple 2, les pattes prismatiques sont disposées symétriquement autour de  $P_1$  et que  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{0}$ . Pour un système possédant les caractéristiques suivantes, soit

$$\begin{aligned}
m_l &= m_u = 1 \text{ kg}, & m_{p11} &= m_{p12} = 0.5 \text{ kg}, & m_{p21} &= m_{p22} = 0.5 \text{ kg}, \\
m_{p31} &= m_{p32} = 0.5 \text{ kg}, & m_{p41} &= m_{p42} = 0.7 \text{ kg}, & m_{p52} &= 0.5 \text{ kg}, \\
m_{p62} &= 0.7 \text{ kg}, & m_{pf} &= 10 \text{ kg}, & d_l &= 0.5 \text{ m}, & l_{vl} &= l_{vu} = 1 \text{ m}, \\
l_{p11} &= l_{p12} = 1.5 \text{ m}, & l_{p21} &= l_{p22} = 1.5 \text{ m}, & l_{p31} &= l_{p32} = 1.5 \text{ m}, \\
l_{G1C1} &= l_{G2C2} = 2.5 \text{ m}, & l_{H1D1} &= l_{H2D2} = 2.5 \text{ m}, & l_{L2E2} &= 2 \text{ m}, \\
l_{l1} &= l_{l2} = 1 \text{ m}, & h_{l1} &= h_{l2} = 1 \text{ m}, & l_{u1} &= l_{u2} = 1 \text{ m}, & h_{u1} &= h_{u2} = 1 \text{ m}, & h_{e2} &= 0.7 \text{ m}, \\
\alpha_{l1} &= 0 \text{ deg}, & \alpha_{l2} &= 180 \text{ deg}, & \alpha_{u1} &= 0 \text{ deg}, & \alpha_{u2} &= 180 \text{ deg}, & \alpha_{e2} &= 180 \text{ deg}, \\
\mathbf{r}_{p11} &= \mathbf{r}_{p12} = [0, 0, 1]^T \text{ m}, & r_{p21} &= r_{p22} = 1 \text{ m}, & \mathbf{r}_{p31} &= \mathbf{r}_{p32} = [0, 0, 1]^T \text{ m}, \\
\mathbf{r}_{p41} &= \mathbf{r}_{p42} = [0, -0.5, 0.5]^T \text{ m}, & r_{p52} &= 1 \text{ m}, & \mathbf{r}_{p62} &= [0, -0.5, 0.5]^T \text{ m}, \\
\mathbf{c}'_{pf} &= [0, 0, 0.5]^T \text{ m}, & \mathbf{e}'_1 &= [0, -0.75, 0.5]^T \text{ m}, & \mathbf{e}'_2 &= [0, 0.75, 0.5]^T \text{ m} & r'_{2z} &= -0.5 \text{ m}, \\
&& \text{et } g &= 9.81 \text{ m/s}^2
\end{aligned}$$

on trouve

$$d_u = 0.5 \text{ m} \quad (5.12)$$

$$k_{l1} = k_{l2} = 213.9 \text{ N/m} \quad (5.13)$$

$$k_{u1} = k_{u2} = 108.2 \text{ N/m} \quad (5.14)$$

$$k_{e2} = 164 \text{ N/m} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{r}'_2 = [0, -0.707, -0.5]^T \text{ m} \quad (5.16)$$

## CONCLUSION

Tout au long de ce mémoire, il a été question de l'équilibrage statique de manipulateurs parallèles à actionneurs prismatiques. Ce principe, qui consiste à faire en sorte que le poids d'un manipulateur ne génère aucun effort à ses actionneurs, sous conditions statiques et pour toute configuration, a été appliqué d'une part, à des mécanismes spatiaux à six (6) degrés de liberté et d'autre part, à des mécanismes plans à trois (3) degrés de liberté. Ainsi, le principe de l'équilibrage statique a d'abord été expliqué et illustré à l'aide d'un exemple simple. Puis, les notions se rapportant à ce principe ont été appliquées aux manipulateurs parallèles à actionneurs prismatiques et un ensemble de conditions d'équilibrage a alors pu être obtenu pour chacun des mécanismes étudiés. La particularité de cette recherche était que ces conditions devaient être trouvées pour des mécanismes existants, ce qui, en quelque sorte, resserrait les critères de sélection des divers paramètres architecturaux. Ainsi, ne pouvant réaliser l'équilibrage statique qu'en ajoutant de nouveaux éléments à ces structures existantes, quatre modèles de pattes non-actionnées dites *d'équilibrage* ont été proposées pour équilibrer les mécanismes spatiaux et trois pour les mécanismes plans. Comme on l'a vu, ces mécanismes à parallélogrammes sont en fait des artifices qui n'ont qu'à être branchés en parallèle avec les actionneurs des manipulateurs pour que ces derniers deviennent équilibrés statiquement. En outre, il est important de rappeler que la modélisation de ces mécanismes équilibrants a été réalisée en tenant compte du fait qu'il faille *avoir au moins une chaîne cinématique ne possédant aucune liaison prismatique entre la base et l'effecteur d'un manipulateur pour que celui-ci puisse être statiquement équilibré.*

Par ailleurs, une des caractéristiques intéressantes concernant les ensembles de conditions d'équilibrage trouvés pour les différents mécanismes est le fait d'obtenir une infinité de solutions. Cela offre entre autres l'avantage de pouvoir choisir en fonction d'objectifs spécifiques les valeurs des paramètres architecturaux pour les divers éléments à ajouter. Ce faisant, une interprétation géométrique des conditions d'équilibrage a pu être réalisée en se basant sur un critère de symétrie dans la structure des manipulateurs, en particulier dans la manière d'agencer les éléments additionnels aux structures existantes. Cette analyse a été faite principalement sur les mécanismes spatiaux puisque leur utilisation dans la vie courante est beaucoup plus répandue que celle des mécanismes plans. Toutefois, moyennant quelques modifications mineures, il est possible de transposer ces résultats aux mécanismes plans. En effet, comme il a été expliqué au chapitre 3, la modélisation mathématique vectorielle de l'énergie potentielle totale des manipulateurs permet de traiter les mécanismes plans comme un cas particulier des mécanismes spatiaux.

Finalement, quelques exemples de manipulateurs parallèles spatiaux et plans ont été donnés afin de montrer ce qu'implique en pratique l'équilibrage statique, aussi bien en termes de raideurs de ressorts, de masses et de longueurs de membrures à ajouter, que de positionnement de centres de masse et de paramètres généraux d'architecture. Ces exemples ne sont toutefois le résultat d'aucune procédure d'optimisation, le but visé ici étant simplement de montrer l'interaction entre les différents paramètres contenus dans les conditions d'équilibrage. Pour les mécanismes spatiaux, une attention particulière a été portée au cas des simulateurs de vol, dont la structure n'est autre qu'une plate-forme de Gough-Stewart. Et les résultats obtenus au chapitre 4 ont montré que l'application des conditions d'équilibrage à ces lourdes structures pouvait s'avérer laborieuse en pratique. De fait, l'obstacle principal et majeur est que pour satisfaire les critères de l'équilibrage, les ressorts doivent être très raides et en même temps très massifs. Or, de tels ressorts ont l'inconvénient de n'avoir qu'un très faible débattement, ce qui est problématique dans le cas de manipulateurs où le débattement est justement important. De plus, il est possible que l'inertie de leur masse importante affecte considérablement le modèle dynamique et l'asservissement des actionneurs des manipulateurs. On voit donc que l'équilibrage statique est en théorie réalisable, mais à un prix parfois élevé. C'est pourquoi il est primordial de ne pas perdre de vue l'objectif visé par l'équilibrage, c'est-à-dire celui de diminuer de la dépense énergétique des actionneurs,

tout en améliorant les propriétés dynamiques des manipulateurs.

Malgré les conditions sévères obtenues dans le cas des simulateurs de vol, il n'en demeure pas moins que l'équilibrage statique peut être facilement applicable et se révéler très efficace pour des manipulateurs dont la masse de la plate-forme est moins grande et surtout, moins disproportionnée par rapport aux autres constituants. Néanmoins, puisque les simulateurs de vol constituent tout de même des mécanismes où le poids occasionne la majeure partie de la dépense énergétique des vérins hydrauliques et que l'équilibrage statique a justement pour effet de la diminuer, une étude plus approfondie sur la manière de mettre en pratique les résultats théoriques obtenus mérite certainement d'être envisagée. À titre de travaux futurs susceptibles de faire suite au contenu de ce mémoire, mentionnons que la recherche de composantes élastiques (pas nécessairement des ressorts conventionnels) pouvant combiner à la fois une raideur élevée, un débattement appréciable et une faible masse présente un certain intérêt. En outre, pour pallier au problème des raideurs élevées des ressorts, il pourrait être intéressant d'utiliser plusieurs ressorts en parallèle dans les pattes d'équilibrage à parallélogrammes. Dans un autre ordre d'idées, pour tous les mécanismes présentés dans ce mémoire, des critères d'optimisation pourraient être employés pour la conception de mécanismes équilibrés statiquement destinés à des tâches particulières. Par exemple, on pourrait tenter de minimiser l'écart entre la position du centre de masse et celle du centre géométrique des membrures ajoutées.

## BIBLIOGRAPHIE

- Associated Spring, 'Fact file for spring design', *Associated Spring, Barnes Group Inc.*, 1977.
- Bagci, C., 'Complete shaking force and shaking moment balancing of link mechanisms using balancing idler loops', *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 104, No. 1, pp. 482-493, 1982.
- Berkof, R. S. et Lowen, G. G., 'A new method for completely force balancing simple linkages', *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 21-26, Février 1969.
- Ebert-Uphoff, I., Gosselin, C. et Laliberté, T., 'Static balancing of a class of spatial parallel platform mechanisms', *Proceedings of the 1998 ASME Mechanisms Conference*, Atlanta, GA, USA, MECH-5964, Septembre 1998.
- Ebert-Uphoff, I. et Gosselin, C., 'Dynamic modeling of a class of spatial statically-balanced parallel platform mechanisms', *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Detroit, MI, USA, 1999.
- Fichter, E.F., 'A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 2, pp. 157-182, 1986.
- Gosselin, C., 'Note sur les conditions d'équilibrage statique de Berkof et Lowen', *Comptes-rendus du 16e Congrès canadien de mécanique appliquée (CANCAM 97)*, Vol. 1, pp. 497-498, Québec, Canada, 1997.



- Gosselin, C., 'On the static balancing of 3-dof spherical parallel mechanisms and manipulators', à paraître dans *the International Journal of Robotics Research*, 1999.
- Gosselin, C. et Angeles, J., 'The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator', *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 110, No. 1, pp. 35–41, 1988.
- Gosselin, C. et Wang, J., 'On the design of gravity-compensated six-degree-of-freedom parallel mechanisms', *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgique, pp. 2287–2294, 1998.
- Hervé, J.M., 'Device for counter-balancing the forces due to gravity in a robot arm', United States Patent 4,620,829, Mai 1986.
- Hunt, K. H., 'Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms', *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 105, No. 4, pp. 705–712, 1983.
- Jean, M., 'Équilibrage statique de manipulateurs parallèles plans', Mémoire de maîtrise, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec, Canada, 1996.
- Jean, M. et Gosselin, C., 'Static balancing of planar parallel manipulators', *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, MN, USA, pp. 3732–3737, 1996.
- Laliberté, T., Gosselin C. M. et Jean, M., 'Static balancing of 3-DOF planar parallel mechanisms', à paraître dans *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 1999.
- Leblond, M. et Gosselin C. M., 'Static balancing of spatial and planar parallel manipulators with prismatic actuators', *Proceedings of the 1998 ASME Mechanisms Conference*, Atlanta, GA, USA, MECH-5963, Septembre 1998.
- Lowen, G.G., Tepper, F.R. et Berkof, R.S., 'Balancing of linkages – an update', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 18, No. 3, pp. 213–220, 1983.
- Merlet, J.-P., 'Les robots parallèles', Éditions Hermès, Paris, France, 1997.
- Nathan, R. H., 'A constant force generation mechanism', *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 107, pp. 508–512,

Décembre 1985.

- Stewart, D., 'A platform with six degrees of freedom', *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 180, No. 5, pp. 371–378, 1965.
- Streit, D. A. et Gilmore, B. J., 'Perfect spring equilibrators for rotatable bodies', *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 111, No. 4, pp. 451–458, 1989.
- Streit, D. A. et Shin, E., 'Equilibrators for planar linkages', *Proceedings of the ASME Mechanisms Conference*, Chicago, IL, USA, Septembre 1990.
- Ulrich, N. et Kumar, V., 'Passive mechanical gravity compensation for robot manipulators', *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, CA, USA, pp. 1536–1541, 1991.
- Wang, J., 'Kinematic analysis, dynamic analysis and static balancing of planar and spatial parallel mechanisms or manipulators with revolute actuators', Thèse de doctorat, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec, Canada, 1997.
- Wang, J. et Gosselin, C., 'Static balancing of spatial three-degree-of-freedom parallel mechanisms', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, No. 3, pp. 437–452, 1999a.
- Wang, J. et Gosselin, C., 'Static balancing of spatial four-degree-of-freedom parallel mechanisms', à paraître dans *Mechanism and Machine Theory*, 1999b.
- Ye, Z. et Smith, M.R., 'Complete balancing of planar linkages by an equivalence method', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 5, pp. 701–712, 1994.

## ANNEXE A

### ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE LA PLATE-FORME DE GOUGH-STEWART: DÉTAILS SUR L'ANALYSE MENANT À L'UTILISATION DES MÉCANISMES À PARALLÉLOGRAMMES

Comme il a été montré aux chapitres 2 et 3, on peut ajouter plusieurs types de mécanismes pour rendre statiquement équilibrés la plate-forme de Gough-Stewart (figure 2.1) ainsi que le mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté à actionneurs prismatiques (figure 3.1). La particularité de ces artifices d'équilibrage est qu'ils ne contiennent aucune liaison prismatique et c'est justement cette caractéristique qui rend possible l'équilibrage statique. En outre, les mécanismes ajoutés possèdent tous une architecture à parallélogramme(s), laquelle permet une utilisation moins restrictive des ressorts. Une explication détaillée de ces particularités est d'ailleurs donnée plus loin dans cette annexe.

## A.1 Plate-forme de Gough-Stewart et ressorts

Comme cela a été montré au chapitre 1, il est possible d'utiliser divers types d'éléments pour équilibrer statiquement un manipulateur. En fait, on peut regrouper ces éléments en deux catégories: les membrures et masses ponctuelles et les éléments élastiques (ressorts). Étant donné que les ressorts possèdent en général une masse faible, et donc une inertie réduite, l'ajout de ceux-ci à une structure mécanique n'en affectera presque pas les propriétés dynamiques. En revanche, l'ajout de masses ponctuelles ou de membrures amènera nécessairement une augmentation de l'inertie globale du mécanisme, ce qui n'est pas souhaitable tant du point de vue des propriétés dynamiques du système que du contrôle. C'est pourquoi la première tentative d'équilibrer statiquement la plate-forme de Gough-Stewart à l'aide d'éléments ajoutés s'est résumée à n'utiliser que des ressorts. C'est justement ce dont il est question dans les prochaines sous-sections et on verra, entre autres, comment la manière de disposer les ressorts sur le mécanisme existant affecte les conditions d'équilibrage statique.<sup>1</sup>

### A.1.1 Ressorts dans l'axe de translation des actionneurs prismatiques

La première façon de disposer les ressorts, et probablement la plus intuitive au premier coup d'œil, consiste à attacher ceux-ci en des points situés dans l'axe de translation des actionneurs prismatiques. Comme il est montré à la figure A.1, le  $i$ ème ressort, de raideur  $k_i$ , est attaché aux points  $A_i$  (point fixe) et  $B_i$  (point mobile dont la position dépend de la configuration du manipulateur), soit aux extrémités de la  $i$ ème patte du manipulateur, de telle sorte qu'il y aura un couplage parfait entre le mouvement de la patte et celui du ressort.

Afin de déterminer si cette version modifiée de la plate-forme de Gough-Stewart peut être statiquement équilibrée, on détermine d'abord son énergie potentielle totale. Puisqu'il y a des ressorts dans le mécanisme, cette énergie potentielle est maintenant

---

<sup>1</sup>Il est à noter qu'il est uniquement question des mécanismes spatiaux dans cette annexe car, comme il a été démontré au chapitre 3, la méthode employée pour déterminer l'énergie potentielle totale des mécanismes permet de traiter les mécanismes plans comme un cas particulier des mécanismes spatiaux.

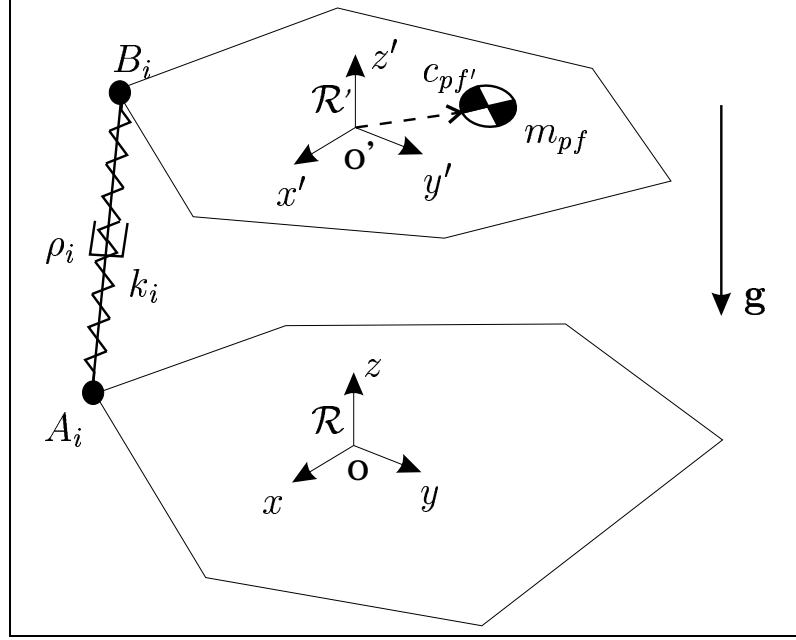


Figure A.1: Plate-forme de Gough-Stewart: ressort attaché dans l'axe de translation du  $i$ ème actionneur prismatique.

présente sous deux formes différentes: *gravitationnelle* et *élastique*, c'est-à-dire,

$$V = V_g + V_e \quad (\text{A.1})$$

L'énergie potentielle gravitationnelle est celle qui a été déterminée à la section 2.1 et qui est donnée par la composante en  $z$  de l'équation (2.14), à une constante  $Mg$  près, à condition bien sûr de négliger le poids des ressorts, ce qui, pour plusieurs applications, s'avèrera une hypothèse valable. Ainsi,

$$V_g = g \left[ \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) - p_z \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{31} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) - q_{32} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - q_{33} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_z + F_x q_{31} + F_y q_{32} + F_z q_{33} + G_z \right] \quad (\text{A.2})$$

avec comme coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.3})$$

$$E = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{ui} \mathbf{b}'_i) \quad (\text{A.5})$$

$$G_z = \sum_{i=1}^6 (m_{li} a_{iz}) \quad (\text{A.6})$$

Quant à l'énergie potentielle élastique du mécanisme, elle est donnée par

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left( k_i [e_i - e_i^0]^2 \right) \quad (\text{A.7})$$

où  $k_i$  est la raideur du ressort lié à la  $i$ ème patte et  $e_i$  sa longueur. Or, puisque le mouvement de ce ressort est proportionnel à celui de la patte sur laquelle il se trouve, on peut alors poser

$$e_i = A_i \rho_i \quad (\text{A.8})$$

où  $A_i$  est une constante de proportionnalité adimensionnelle associée au  $i$ ème ressort et  $\rho_i$  la variable de configuration exprimant la longueur de la  $i$ ème patte du mécanisme.

De plus, afin de simplifier les calculs, on impose une valeur nulle de la longueur libre des ressorts<sup>2</sup>, c'est-à-dire,

$$e_i^0 = 0 \quad (\text{A.9})$$

L'énergie potentielle élastique s'écrit donc

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left( k_i A_i^2 \rho_i^2 \right) \quad (\text{A.10})$$

et l'énergie potentielle totale est donnée par

$$\begin{aligned} V = & g \left[ \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) - p_z \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) - q_{31} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) - q_{32} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) - \right. \\ & \left. q_{33} \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) + E p_z + F_x q_{31} + F_y q_{32} + F_z q_{33} + G_z \right] + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left( k_i A_i^2 \rho_i^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Comme il a été montré au chapitre 1, on peut trouver les conditions d'équilibrage statique, si équilibrage il y a, en dérivant l'expression de l'énergie potentielle totale par rapport aux variables indépendantes de configuration du mécanisme et ensuite égaliser les équations obtenues à zéro. Or, imposer à une fonction que cette dérivée soit nulle

---

<sup>2</sup>Il n'existe aucun ressort possédant une longueur libre nulle, mais en pratique, il est possible par diverses astuces techniques de rendre  $e_i^0$  nul. Cela est expliqué dans (Streit et Gilmore 1989).

revient à rendre cette fonction constante, et ce, indépendamment de la valeur prise par les variables la décrivant. On cherche donc les conditions qui feront que l'expression

$$V = \text{cte} \quad (\text{A.12})$$

sera vraie pour toute configuration du manipulateur. Comme pour les cas traités dans les chapitres antérieurs, la méthode de Berkof et Lowen, qui consiste à évaluer à zéro les coefficients multiplicateurs de chaque terme contenant une ou plusieurs variables de configuration, indépendantes ou non, est l'approche utilisée ici. Ayant déjà été démontré au chapitre 2 que la plate-forme de Gough-Stewart n'est pas un mécanisme qu'il est possible d'équilibrer, l'objectif visé ici est d'essayer de combiner les termes d'énergie potentielle engendrés par les ressorts avec les termes d'énergie potentielle gravitationnelle. Or, une brève observation de l'équation (A.11) permet de constater qu'il n'y a aucune combinaison possible entre ces deux types de termes. En effet, aucun terme gravitationnel ne peut se combiner avec le terme élastique en  $\rho_i^2$ . Ainsi, on retombe sur les conditions dérivées au chapitre 2, lesquelles sont réécrites ci-dessous.

$$D_i = m_{ui}d_{ui} - m_{li}d_{li} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.13})$$

$$E = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m_{pf}\mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{ui}\mathbf{b}'_i) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$G_z = \sum_{i=1}^6 (m_{li}a_{iz}) = \text{cte} \quad (\text{A.16})$$

Comme il a déjà été vu, la condition (A.14) – stipulant qu'une partie de la masse du manipulateur doit être nulle – est celle qui indique que le mécanisme ne peut être équilibré statiquement.

Par ailleurs, à la différence de l'analyse faite à la section 2.1, on compte une condition supplémentaire, soit

$$k_i A_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.17})$$

En admettant que la constante de proportionnalité  $A_i$  ne puisse être nulle, la condition est réduite à

$$k_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.18})$$

ce qui montre que les ressorts deviennent inutiles lorsque ceux-ci sont disposés de la façon montrée à la figure A.1 et que la plate-forme de Gough-Stewart reste non équilibrée statiquement.

À la lumière de ce résultat, la suite de cette analyse consiste à déterminer s'il existe une façon d'agencer des ressorts à la structure de la plate-forme de Gough-Stewart de telle sorte que celle-ci atteigne l'équilibre statique. Mathématiquement parlant, l'objectif visé est de lever la restriction sévère engendrée par l'équation (A.14) en rendant cette dernière moins contraignante. Ainsi, on cherchera à combiner des termes d'énergie potentielle élastique aux termes d'énergie gravitationnelle existants.

### A.1.2 Ressorts attachés aux membrures proximales et distales des actionneurs prismatiques et à des points fixes dans l'espace

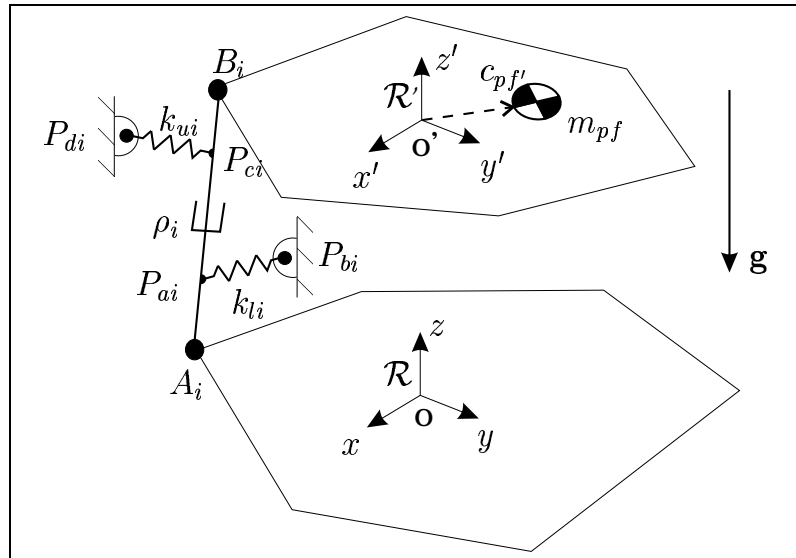


Figure A.2: Plate-forme de Gough-Stewart: ressorts attachés aux membrures proximale et distale du  $i$ ème actionneur prismatique et à des points fixes dans l'espace.

Une deuxième manière d'utiliser les ressorts est illustrée à la figure A.2. Sur chacun des six actionneurs, deux ressorts sont attachés. Ainsi, pour la  $i$ ème patte à actionneur prismatique, un premier ressort, appelé ressort inférieur et de raideur  $k_{li}$ , est attaché à sa membrure proximale au point  $P_{ai}$ , lequel est situé sur l'axe principal de la membrure.



L'autre extrémité de ce ressort est attachée au point fixe  $P_{bi}$ . Quant au second ressort, désigné ressort supérieur et de raideur  $k_{ui}$ , il est attaché à la membrure distale de la patte au point  $P_{ci}$ , situé sur l'axe principal de celle-ci. Comme dans le cas du ressort inférieur, l'autre extrémité du ressort supérieur est attachée à un point fixe, soit le point  $P_{di}$ .

Puisque le poids des ressorts est considéré ici comme négligeable, l'énergie potentielle gravitationnelle de ce mécanisme est identique à celle du mécanisme étudié à la section précédente et est encore donnée par l'équation (A.2).

En ce qui concerne l'énergie potentielle élastique, elle est donnée par

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (k_{li} e_{li}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (k_{ui} e_{ui}^2) \quad (\text{A.19})$$

où  $e_{li}$  est la longueur du  $i$ ème ressort inférieur et  $e_{ui}$  la longueur du  $i$ ème ressort supérieur, toutes deux associées à la  $i$ ème patte prismatique. Or, étant donné que ces longueurs dépendent de la configuration du manipulateur, il faut maintenant exprimer  $e_{li}$  et  $e_{ui}$  en fonction des variables décrivant cette configuration.

Soit les vecteurs  $\mathbf{d}_{ai}$ ,  $\mathbf{d}_{bi}$ ,  $\mathbf{d}_{ci}$  et  $\mathbf{d}_{di}$  reliant l'origine du repère fixe  $\mathcal{R}$  de la base du manipulateur aux points d'attache des ressorts. De par la géométrie du mécanisme, on aura

$$\mathbf{d}_{ai} = \mathbf{a}_i + \mu_i (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{d}_{ci} = \mathbf{a}_i + \sigma_i (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.21})$$

où  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  sont les vecteurs donnant la position des points  $A_i$  et  $B_i$  dans le repère  $\mathcal{R}$  (voir l'équation (2.2)) et où  $\mu_i$  et  $\sigma_i$  sont des paramètres adimensionnels définis comme suit:

$$\mu_i = \frac{l_{ai}}{\rho_i}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_i = \frac{\rho_i - l_{vui} + l_{ci}}{\rho_i}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.23})$$

où  $l_{ai}$  est la distance entre les points  $A_i$  et  $P_{ai}$ ,  $l_{ci}$  la distance entre les points  $B_i$  et  $P_{ci}$  et  $l_{vui}$  la longueur de la membrure supérieure du  $i$ ème actionneur prismatique.

**Rappel:** Comme le montre l'équation (2.10), le vecteur  $\mathbf{b}_i$  dépend de la configuration du manipulateur, c'est-à-dire de  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{Q}$ , qui donnent respectivement la position et

l'orientation de l'effecteur (plate-forme mobile du mécanisme) par rapport à la base du mécanisme.

Quant aux vecteurs  $\mathbf{d}_{bi}$  et  $\mathbf{d}_{di}$ , ils représentent des points quelconques dans l'espace et sont définis par

$$\mathbf{d}_{bi} = \begin{bmatrix} d_{bix} \\ d_{biy} \\ d_{biz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{di} = \begin{bmatrix} d_{dix} \\ d_{diy} \\ d_{diz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.24})$$

Une fois les quatre points d'attache des ressorts définis, on trouve facilement les quantités scalaires  $e_{li}$  et  $e_{ui}$  à l'aide des relations suivantes:

$$e_{li}^2 = \|\mathbf{d}_{ai} - \mathbf{d}_{bi}\|^2 = (d_{aix} - d_{bix})^2 + (d_{aiy} - d_{biy})^2 + (d_{aiz} - d_{biz})^2 \quad (\text{A.25})$$

$$e_{ui}^2 = \|\mathbf{d}_{ci} - \mathbf{d}_{di}\|^2 = (d_{cix} - d_{dix})^2 + (d_{ciy} - d_{diy})^2 + (d_{ciz} - d_{diz})^2 \quad (\text{A.26})$$

En substituant l'équation (A.20) dans l'équation (A.25), on obtient les trois composantes du vecteur  $\mathbf{d}_{ai} - \mathbf{d}_{bi}$ , c'est-à-dire,

$$d_{aix} - d_{bix} = a_{ix} + \frac{l_{ai}}{\rho_i} [p_x + q_{11}b'_{ix} + q_{12}b'_{iy} + q_{13}b'_{iz}] - d_{bix} \quad (\text{A.27})$$

$$d_{aiy} - d_{biy} = a_{iy} + \frac{l_{ai}}{\rho_i} [p_y + q_{21}b'_{ix} + q_{22}b'_{iy} + q_{23}b'_{iz}] - d_{biy} \quad (\text{A.28})$$

$$d_{aiz} - d_{biz} = a_{iz} + \frac{l_{ai}}{\rho_i} [p_z + q_{31}b'_{ix} + q_{32}b'_{iy} + q_{33}b'_{iz}] - d_{biz} \quad (\text{A.29})$$

De façon analogue, on obtient les composantes de  $\mathbf{d}_{ci} - \mathbf{d}_{di}$  en insérant l'équation (A.21) dans l'équation (A.26). Ainsi,

$$d_{cix} - d_{dix} = a_{ix} + \left( \frac{\rho_i - l_{vui} + l_{ci}}{\rho_i} \right) [p_x + q_{11}b'_{ix} + q_{12}b'_{iy} + q_{13}b'_{iz}] - d_{dix} \quad (\text{A.30})$$

$$d_{ciy} - d_{diy} = a_{iy} + \left( \frac{\rho_i - l_{vui} + l_{ci}}{\rho_i} \right) [p_y + q_{21}b'_{ix} + q_{22}b'_{iy} + q_{23}b'_{iz}] - d_{diy} \quad (\text{A.31})$$

$$d_{ciz} - d_{diz} = a_{iz} + \left( \frac{\rho_i - l_{vui} + l_{ci}}{\rho_i} \right) [p_z + q_{31}b'_{ix} + q_{32}b'_{iy} + q_{33}b'_{iz}] - d_{diz} \quad (\text{A.32})$$

**Rappel:** Les vecteurs possédant l'indice prime sont définis par rapport à l'origine du repère mobile  $\mathcal{R}'$  de la plate-forme et exprimés dans ce repère.

En substituant les équations (A.27), (A.28) et (A.29) dans l'équation (A.25) et les équations (A.30), (A.31) et (A.32) dans l'équation (A.26), on trouve par la suite

l'expression de l'énergie potentielle élastique  $V_e$ , donnée par l'équation (A.19). En regardant attentivement l'expression générée, on voit que certains termes quadratiques (c'est-à-dire des termes contenant des variables de configuration élevées au carré) ne pourront se combiner avec les termes d'énergie potentielle gravitationnelle. Par exemple, les termes élastiques en  $\frac{1}{\rho_i^2}$  ne peuvent se combiner à aucun terme gravitationnel puisqu'on ne compte pas de termes contenant ce facteur du côté gravitationnel. Afin de garder l'énergie potentielle totale du manipulateur constante pour toute configuration de celui-ci, on doit, selon la méthode de Berkof et Lowen, évaluer à zéro tous les coefficients multiplicateurs de variables de configuration présents dans l'équation, y compris les termes ne pouvant se combiner. Ce faisant, la seule solution qui respecte cette condition est

$$k_{li} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.33})$$

$$k_{ui} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.34})$$

Cette solution est dite triviale car elle stipule que de la façon dont ils sont disposés sur le manipulateur, les ressorts sont totalement inutiles, comme c'était le cas avec le mécanisme de la section précédente. La plate-forme de Gough-Stewart n'est donc toujours pas statiquement équilibrée.

### A.1.3 Ressorts attachés aux membrures proximales et distales des actionneurs prismatiques et à la plate-forme mobile

La figure A.3 présente une version légèrement différente du mécanisme étudié à la section A.1.2. Encore une fois, on compte deux ressorts attachés à chaque patte de la plate-forme de Gough-Stewart (aux points  $P_{ai}$  et  $P_{ci}$ ), mais avec la différence que les points  $P_{bi}$  et  $P_{di}$  ne sont maintenant plus des points fixes dans l'espace. Ils sont plutôt tous deux attachés à la plate-forme mobile. Ainsi, bien que la position de  $P_{bi}$  et celle de  $P_{di}$  soient fixes par rapport au repère  $\mathcal{R}'$  lié à la plate-forme, elles dépendent néanmoins de la position et de l'orientation de cette même plate-forme.

Cette variation dans la disposition des ressorts sur la structure de la plate-forme de Gough-Stewart ne change en rien la procédure établie à la section précédente pour calculer l'énergie potentielle élastique. Ainsi, les équations (A.27), (A.28) et (A.29)

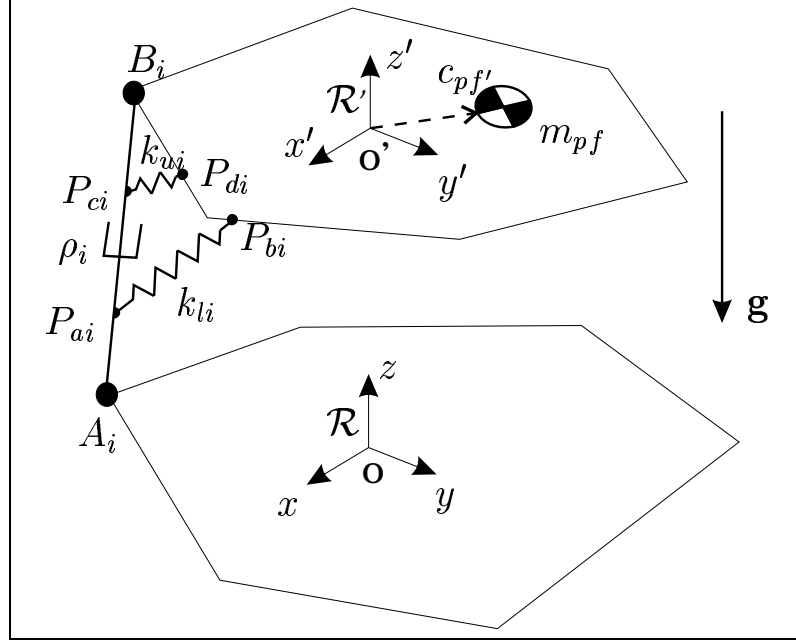


Figure A.3: Plate-forme de Gough-Stewart: ressorts attachés aux membrures proximale et distale du  $i$ ème actionneur prismatique et à la plate-forme mobile.

sont maintenant remplacées par

$$d_{aix} - d_{bix} = (a_{ix} - p_x) \left[ 1 - \frac{l_{ai}}{\rho_i} \right] - q_{11} \left[ d'_{bix} - \frac{l_{ai} b'_{ix}}{\rho_i} \right] - q_{12} \left[ d'_{biy} - \frac{l_{ai} b'_{iy}}{\rho_i} \right] - q_{13} \left[ d'_{biz} - \frac{l_{ai} b'_{iz}}{\rho_i} \right] \quad (\text{A.35})$$

$$d_{aiy} - d_{biy} = (a_{iy} - p_y) \left[ 1 - \frac{l_{ai}}{\rho_i} \right] - q_{21} \left[ d'_{bix} - \frac{l_{ai} b'_{ix}}{\rho_i} \right] - q_{22} \left[ d'_{biy} - \frac{l_{ai} b'_{iy}}{\rho_i} \right] - q_{23} \left[ d'_{biz} - \frac{l_{ai} b'_{iz}}{\rho_i} \right] \quad (\text{A.36})$$

$$d_{aiz} - d_{biz} = (a_{iz} - p_z) \left[ 1 - \frac{l_{ai}}{\rho_i} \right] - q_{31} \left[ d'_{bix} - \frac{l_{ai} b'_{ix}}{\rho_i} \right] - q_{32} \left[ d'_{biy} - \frac{l_{ai} b'_{iy}}{\rho_i} \right] - q_{33} \left[ d'_{biz} - \frac{l_{ai} b'_{iz}}{\rho_i} \right] \quad (\text{A.37})$$

où  $\mathbf{d}'_{bi}$  est un vecteur reliant l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  au point  $P_{bi}$  et exprimé dans  $\mathcal{R}'$ .

De façon analogue, les équations (A.30), (A.31) et (A.32) sont remplacées par

$$d_{cix} - d_{dix} = (a_{ix} - p_x) \left[ \frac{l_{vui} - l_{ci}}{\rho_i} \right] - q_{11} \left[ d'_{dix} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{ix}}{\rho_i} \right] - q_{12} \left[ d'_{diy} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{iy}}{\rho_i} \right] - q_{13} \left[ d'_{diz} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{iz}}{\rho_i} \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned}
d_{c iy} - d_{d iy} &= (a_{iy} - p_y) \left[ \frac{l_{vui} - l_{ci}}{\rho_i} \right] - q_{21} \left[ d'_{dix} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{ix}}{\rho_i} \right] - \\
& q_{22} \left[ d'_{diy} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{iy}}{\rho_i} \right] - q_{23} \left[ d'_{diz} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{iz}}{\rho_i} \right] \quad (\text{A.39})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{c iz} - d_{d iz} &= (a_{iz} - p_z) \left[ \frac{l_{vui} - l_{ci}}{\rho_i} \right] - q_{31} \left[ d'_{dix} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{ix}}{\rho_i} \right] - \\
& q_{32} \left[ d'_{diy} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{iy}}{\rho_i} \right] - q_{33} \left[ d'_{diz} + \frac{(l_{vui} - l_{ci}) b'_{iz}}{\rho_i} \right] \quad (\text{A.40})
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{d}'_{di}$  est un vecteur reliant l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  au point  $P_{di}$  et exprimé dans  $\mathcal{R}'$ .

Après substitution des équations (A.35), (A.36) et (A.37) dans l'équation (A.25) et des équations (A.38), (A.39) et (A.40) dans l'équation (A.26), l'expression obtenue de l'énergie potentielle élastique  $V_e$  révèle encore une fois des termes quadratiques ne pouvant se combiner avec les termes dus à la gravité. Comme dans le cas précédent, la seule solution possible pour respecter les conditions d'équilibrage obtenues est la solution triviale, c'est-à-dire,

$$k_{li} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.41})$$

$$k_{ui} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.42})$$

On voit donc que les ressorts présents dans ce mécanisme sont encore une fois inutiles puisqu'ils ne permettent pas de le rendre statiquement équilibré pour toute configuration.

#### A.1.4 Ressorts attachés entre la base et la plate-forme mobile du manipulateur

Un autre agencement de ressorts est présenté à la figure A.4. Dans ce cas-ci, les ressorts relient directement la plate-forme du manipulateur à divers points fixes dans l'espace. Ainsi, le  $i$ ème de  $m$  ressorts, de raideur  $k_i$ , est attaché entre le point fixe quelconque  $P_{ai}$  (dans l'exemple traité ici, ce point est localisé sur la base du manipulateur) et le point  $P_{bi}$ , situé sur la plate-forme mobile.

Comme pour les cas présentés aux sections précédentes, l'énergie potentielle gravitationnelle est donnée par l'équation (A.2). L'énergie potentielle due aux ressorts, elle,

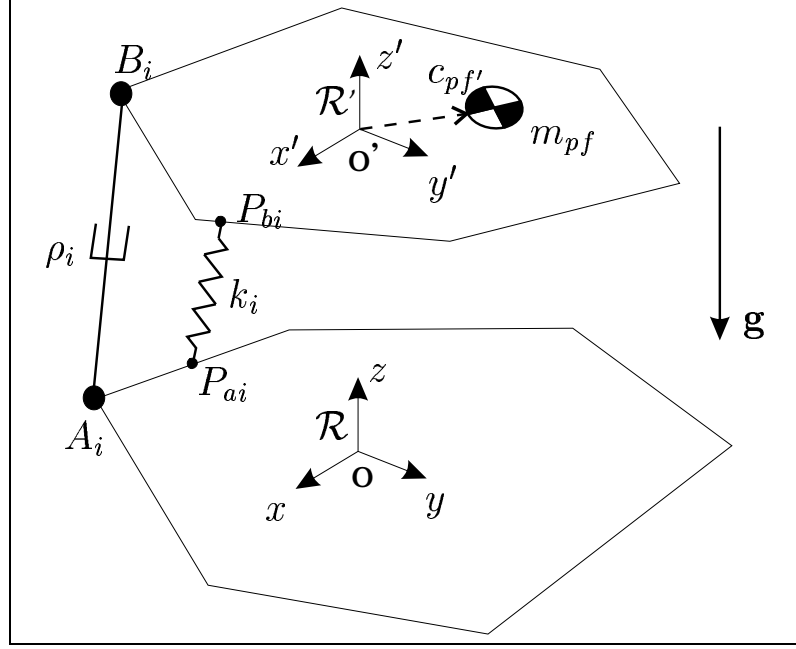


Figure A.4: Plate-forme de Gough-Stewart:  $i$ ème ressort attaché entre la base et la plate-forme mobile du manipulateur.

est définie par

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (k_i e_i^2) \quad (\text{A.43})$$

où  $e_i$  est la longueur du  $i$ ème ressort.

Pour exprimer cette énergie en fonction des variables de configuration du manipulateur, on utilise la procédure employée aux sections antérieures de ce chapitre. En premier lieu, on détermine la position des points d'attache des ressorts par les vecteurs  $\mathbf{d}_{ai}$  et  $\mathbf{d}_{bi}$ , lesquels sont définis par rapport à l'origine du repère fixe  $\mathcal{R}$  et exprimés dans ce repère. On a donc

$$\mathbf{d}_{ai} = [d_{aix}, d_{aiy}, d_{aiz}]^T, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{A.44})$$

et

$$\mathbf{d}_{bi} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}'_{bi}, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{A.45})$$

où  $\mathbf{d}'_{bi}$  est un vecteur reliant l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  au point  $P_{bi}$  et exprimé dans  $\mathcal{R}'$ . On détermine ensuite la longueur  $e_i$  du  $i$ ème ressort par l'expression

$$e_i^2 = \|\mathbf{d}_{ai} - \mathbf{d}_{bi}\|^2 = (d_{aix} - d_{bix})^2 + (d_{aiy} - d_{biy})^2 + (d_{aiz} - d_{biz})^2 \quad (\text{A.46})$$

avec

$$d_{aix} - d_{bix} = a_{ix} - p_x - q_{11}d'_{bix} - q_{12}d'_{biy} - q_{13}d'_{biz} \quad (\text{A.47})$$

$$d_{aiy} - d_{biy} = a_{iy} - p_y - q_{21}d'_{bix} - q_{22}d'_{biy} - q_{23}d'_{biz} \quad (\text{A.48})$$

$$d_{aiz} - d_{biz} = a_{iz} - p_z - q_{31}d'_{bix} - q_{32}d'_{biy} - q_{33}d'_{biz} \quad (\text{A.49})$$

Finalement, il ne reste qu'à substituer les équations (A.47), (A.48) et (A.49) dans l'équation (A.46) et déterminer l'énergie potentielle élastique à l'aide de l'équation (A.43).

Encore une fois, vu que certains termes élastiques quadratiques ne peuvent se combiner aux termes de gravité, on conclut que la plate-forme de Gough-Stewart demeurera statiquement inéquilibrée. Les ressorts n'ont donc aucune utilités ici. En effet, seule la solution triviale donnée par

$$k_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{A.50})$$

satisfait les conditions requises pour l'équilibrage.

En bref, à la lumière des développements faits dans le cadre de cette étude, il semble ne pas s'avérer possible de rendre statiquement équilibré le mécanisme spatial à six degrés de liberté à actionneurs prismatiques. C'est pourquoi l'ajout d'autres types d'éléments doit maintenant être considéré. À la section suivante, on tentera d'équilibrer statiquement la plate-forme de Gough-Stewart en ajoutant cette fois des membrures supplémentaires. Le concept de base est d'ajouter une ou plusieurs autres chaînes cinématiques, munies de ressorts ou non et passives, c'est-à-dire non-actionnées, entre la base et l'effecteur (plate-forme) du manipulateur.

## A.2 Plate-forme de Gough-Stewart et pattes supplémentaires

Dans cette section, on présente encore le mécanisme spatial à six degrés de liberté à actionneurs prismatiques, mais cette fois, de nouvelles chaînes cinématiques non actionnées sont ajoutées.

### A.2.1 Patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique

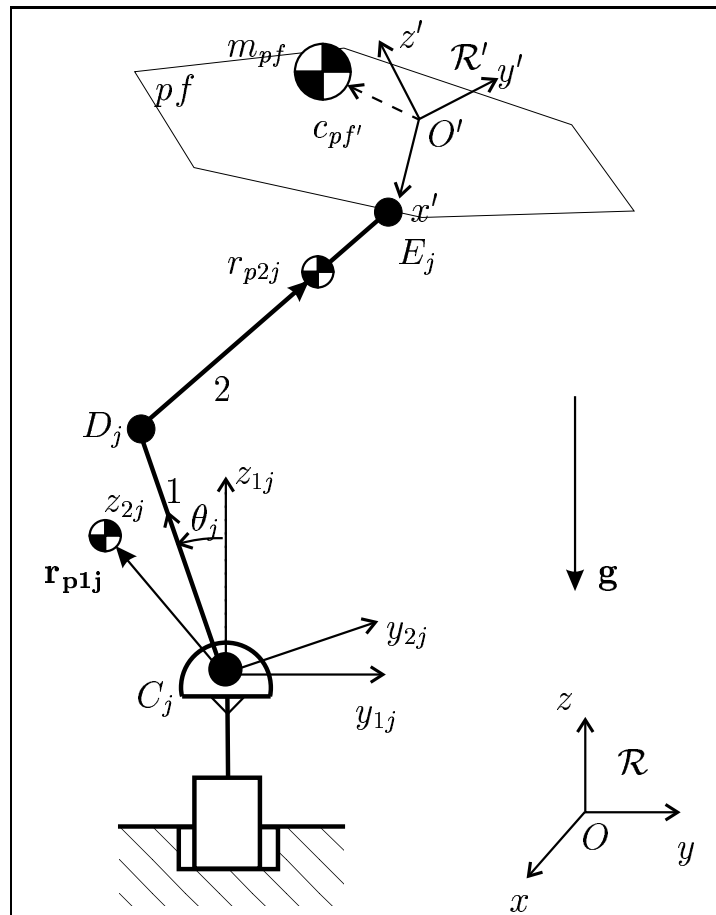


Figure A.5: Architecture de la  $j$ ème patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique.

La figure A.5 présente la plate-forme de Gough-Stewart à laquelle a été attachée une nouvelle patte non actionnée ayant la particularité de ne pas contenir d'articulation prismatique. Par ailleurs, afin de rendre la figure plus claire, les six actionneurs prismatiques de la plate-forme ne sont pas montrés. De plus, puisque la figure montre l'architecture de la  $j$ ème patte, cela laisse alors supposer que plus d'une patte peut être ajoutée à la structure de base du mécanisme. Ainsi donc, la  $j$ ème patte à six (6) degrés de liberté est composée d'une articulation rotoïde au point  $C_j$ , d'une autre au point  $D_j$  et également d'une articulation sphérique au point  $E_j$ . Finalement, la patte est montée sur une articulation rotoïde ayant son axe de rotation (l'axe  $z_{1j}$ ) parallèle au vecteur gravité et passant par le point  $C_j$ .

Puisque le manipulateur possède maintenant de nouvelles composantes, des repères,



des vecteurs et des matrices supplémentaires doivent être définis. Ainsi, un repère désigné  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  est lié au pivot du point  $C_j$ , dont les coordonnées dans le repère de base sont  $(c_{jx}, c_{jy}, c_{jz})$ , où  $j = 1, \dots, n$  et  $n$  est le nombre de pattes ajoutées. L'axe  $z_{1j}$  de ce repère pointe verticalement vers le haut, dans la direction du vecteur gravité, mais en sens inverse, tandis que l'axe  $y_{1j}$  pointe dans une direction perpendiculaire au vecteur gravité. Il est important de mentionner que ce repère ne peut que pivoter autour de son axe  $z_{1j}$  et n'est donc pas lié à la membrure  $C_j D_j$ .

Par ailleurs, on définit la variable articulaire  $\gamma_j$  comme étant l'angle entre la direction positive de l'axe  $x$  du repère de base et celle de l'axe  $x_{1j}$ , ce dernier étant contenu dans le plan  $xy$  du repère  $\mathcal{R}$ . On peut alors exprimer la matrice de rotation donnant l'orientation du repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Ainsi,

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j & 0 \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.51})$$

Dans un même ordre d'idées, un second repère, noté  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$ , est attaché au point  $C_j$  sur la patte, mais cette fois sur la membrure  $C_j D_j$ . L'axe  $z_{2j}$  pointe de  $C_j$  vers  $D_j$ , alors que l'axe  $x_{2j}$  coïncide avec l'axe de rotation de l'articulation rotoïde du point  $C_j$  et pointe vers l'extérieur de la feuille lorsque le mécanisme est dans la configuration montrée à la figure A.5.

Finalement, on définit un autre angle, soit  $\theta_j$ , comme étant la variable articulaire décrivant le mouvement de la liaison rotoïde au point  $C_j$ . On peut dès lors écrire la matrice de rotation donnant l'orientation du repère mobile  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$  par rapport au repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$ . Ainsi,

$$\mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.52})$$

En se servant des divers paramètres décrits plus haut, on peut maintenant exprimer la position du centre de masse de chacune des deux (2) barres constituant la  $j$ ème patte spéciale. Ainsi, les vecteurs  $\mathbf{c}_{p1j}$  et  $\mathbf{c}_{p2j}$  sont respectivement les vecteurs reliant l'origine du repère fixe  $\mathcal{R}$  au centre de masse des membrures  $C_j D_j$  et  $D_j E_j$  et sont exprimés

dans ce même repère. Ainsi,

$$\mathbf{c}_{p1j} = \mathbf{c}_j + \mathbf{Q}_{1j}\mathbf{Q}_{2j}\mathbf{r}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.53})$$

$$\mathbf{c}_{p2j} = \mathbf{d}_j + \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}}(\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.54})$$

avec

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{c}_j + \mathbf{Q}_{1j}\mathbf{Q}_{2j}\mathbf{l}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.55})$$

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{e}'_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.56})$$

et

$$\mathbf{l}_{p1j} = [0, 0, l_{p1j}]^T \quad (\text{A.57})$$

où  $\mathbf{l}_{p1j}$  est un vecteur représentant la longueur de la membrure  $C_jD_j$  et  $\mathbf{r}_{p1j}$  un vecteur reliant le point  $C_j$  au centre de masse de la membrure  $C_jD_j$ . Ces vecteurs sont exprimés dans leur repère local situé au point  $C_j$ , c'est-à-dire le repère mobile  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$ ;  $\mathbf{d}_j$  et  $\mathbf{e}_j$  sont les vecteurs reliant l'origine du repère de base  $\mathcal{R}$  respectivement aux points  $D_j$  et  $E_j$  et sont exprimés dans  $\mathcal{R}$ , et finalement,  $\mathbf{e}'_j$  est un vecteur défini de l'origine du repère mobile  $\mathcal{R}'$  — attaché à la plate-forme mobile (l'effecteur du manipulateur) — au point  $E_j$ , lui aussi sur la plate-forme et il est exprimé dans  $\mathcal{R}'$ .

Comme dans le cas des actionneurs prismatiques, on suppose, afin de simplifier l'analyse, que le centre de masse de la membrure  $D_jE_j$  est situé sur l'axe longitudinal (fibre neutre) de la membrure. Ainsi, les scalaires  $r_{p2j}$  et  $l_{p2j}$  représentent respectivement la position du centre de masse de la barre  $D_jE_j$  par rapport au point  $D_j$ , et la longueur de la membrure  $D_jE_j$ .

L'équation du centre de masse global du manipulateur s'écrit donc

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf}\mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li}\mathbf{c}_{li} + m_{ui}\mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 (m_{pkj}\mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (\text{A.58})$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 m_{pkj} \quad (\text{A.59})$$

où  $m_{pkj}$  est la masse de la  $k$ ème membrure de la  $j$ ème patte ajoutée.

Finalement, on trouve l'énergie potentielle totale  $V$  en utilisant l'expression

$$V = V_g = Mgr_z \quad (\text{A.60})$$

où  $r_z$  est la composante du vecteur  $\mathbf{r}$  dans la direction du champ gravitationnel et  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

En développant l'équation (A.58) et en substituant sa composante en  $z$  dans l'équation (A.60), on obtient

$$\begin{aligned}
V = & \left( p_z \left[ L - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{31} \left[ N_x - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) \right] + \right. \\
& q_{32} \left[ N_y - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\
& \left. \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z \right) g \quad (\text{A.61})
\end{aligned}$$

avec les coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.62})$$

$$L = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j} r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) \quad (\text{A.63})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{ui} \mathbf{b}'_i) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j} r_{p2j}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) \quad (\text{A.64})$$

$$P_j = m_{p1j} r_{p1jy}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.65})$$

$$R_j = m_{p1j} r_{p1jz} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.66})$$

$$S_z = \sum_{i=1}^6 (m_{li} a_{iz}) + \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) \right] c_{jz} \right) \quad (\text{A.67})$$

Comme il a été défini précédemment, un mécanisme n'est statiquement équilibré que lorsque son énergie potentielle totale est constante pour toute configuration de celui-ci, au repos. Pour le mécanisme étudié ici, il existe un ensemble de conditions suffisantes<sup>3</sup> satisfaisant ce dernier critère et il est donné par les équations

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.68})$$

$$L = 0 \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{A.70})$$

---

<sup>3</sup>Cet ensemble de conditions d'équilibrage statique n'est pas unique car les conditions ne sont pas absolument nécessaires. Cette particularité est expliquée à la section 2.1.1.

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.71})$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.72})$$

menant ainsi à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (\text{A.73})$$

En comparant ce mécanisme avec la plate-forme de Gough-Stewart prise seule, on peut voir que l'ensemble de conditions décrit ci-haut est similaire à celui obtenu pour la plate-forme étudiée à la section 2.1. Cependant, la présence de membrures supplémentaires permet maintenant de rendre la plate-forme statiquement équilibrée. Cela apparaît évident lorsqu'on compare les équations (2.24) et (A.69). La présence des paramètres  $r_{p2j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) dans l'équation (A.69) a pour effet de lever la contrainte voulant que les masses soient nulles, ce qui rend du même coup possible l'équilibrage statique du système. De plus, une brève observation des autres équations de contraintes permet de constater que celles-ci peuvent également être satisfaites. En fait, il était déjà possible de satisfaire ces conditions avant même d'ajouter les nouveaux éléments au mécanisme spatial existant.

Par ailleurs, l'obtention des conditions d'équilibrage statique pour ce manipulateur vérifie le principe ayant déjà été énoncé dans (Ye et Smith 1994). Dans cet article, les auteurs émettent le constat suivant: *Il faut au moins une chaîne cinématique ne possédant aucune liaison prismatique entre la base et l'effecteur d'un manipulateur pour que celui-ci puisse être statiquement équilibré.* Malgré la connaissance à priori de ce fait, il a été jugé pertinent, dans le cadre de ce travail, de démontrer au chapitre 2 que la plate-forme de Gough-Stewart ne pouvait être statiquement équilibrée sans apporter de modifications à sa structure. Cela aura entre autres permis de situer le contenu de ce mémoire par rapport aux travaux ayant déjà été accomplis par d'autres sur ce sujet. De plus, comme la plate-forme de Gough-Stewart constitue le mécanisme de base présent tout au long de ce document, il apparaissait primordial de bien le définir et de s'y attarder quelque peu, histoire de comprendre pourquoi il n'est pas intrinsèquement apte à être équilibré statiquement et aussi afin d'en comparer les caractéristiques avec celles de mécanismes munis d'artifices d'équilibrage. Finalement, l'analyse du mécanisme de base à six (6) degrés de liberté aura permis d'établir la base de la nomenclature employée tout au long de ce mémoire. Par ailleurs, il est important de souligner que le constat établi par Ye et Smith ne spécifie pas ce qu'il advient du cas d'un mécanisme

à actionneurs prismatiques muni de ressorts, d'où l'étude des différents cas présentés à la section A.1.

Ceci étant dit, une analyse des équations (A.68) à (A.72) montre néanmoins que les conditions d'équilibrage pourront parfois s'avérer trop sévères relativement à l'objectif visé. En effet, dans certains cas, les contraintes de design feront en sorte qu'il sera peu avantageux, voire inutile d'appliquer telles quelles les conditions d'équilibrage. Par exemple, l'équation (A.69) (voir aussi l'équation (A.63)) montre que pour un manipulateur muni d'une seule patte d'équilibrage et ayant une plate-forme mobile de très grande masse  $m_{pf}$  par rapport à la masse du reste des composantes, il faudra que le centre de masse de la membrure supérieure de la patte supplémentaire — dont la position est donnée par  $r_{p21}$  — soit situé très loin de son centre géométrique, sous le point  $C_j$ , ou que cette masse  $m_{p21}$  soit très importante. Comme conséquence, cela peut signifier une dégradation notable des propriétés dynamiques du manipulateur. Comme on peut le constater, il y a un coût à l'équilibrage statique et par conséquent, on ne cherchera pas en pratique à obtenir l'équilibrage statique à tout prix. Bref, en raison des inconvénients amenés par l'ajout de membrures supplémentaires aux structures existantes, la possibilité d'attacher des ressorts à ces nouveaux éléments mérite d'être considérée. En effet, la faible masse des ressorts comparativement à celle des membrures, conjuguée à l'efficacité de ces mêmes ressorts à accumuler de l'énergie potentielle en font une alternative des plus intéressantes. Et c'est précisément ce sur quoi porte le contenu des deux prochaines sections.

### **A.2.2 Patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés aux membrures proximale et distale de la patte et à des points fixes dans l'espace**

À la figure A.6, on reprend la plate-forme de Gough-Stewart munie de pattes d'équilibrage, mais cette fois en lui ajoutant des ressorts. À la différence de ce qui a été présenté à la section A.1, les ressorts sont maintenant attachés aux pattes supplémentaires. Ainsi, comme l'illustre la figure, la  $j$ ème patte d'équilibrage a maintenant deux ressorts liés à sa structure. Le ressort inférieur, de raideur  $k_{lj}$ , est attaché à la membrure inférieure (proximale) de la patte au point  $P_{aj}$ , lequel se situe sur l'axe principal de la

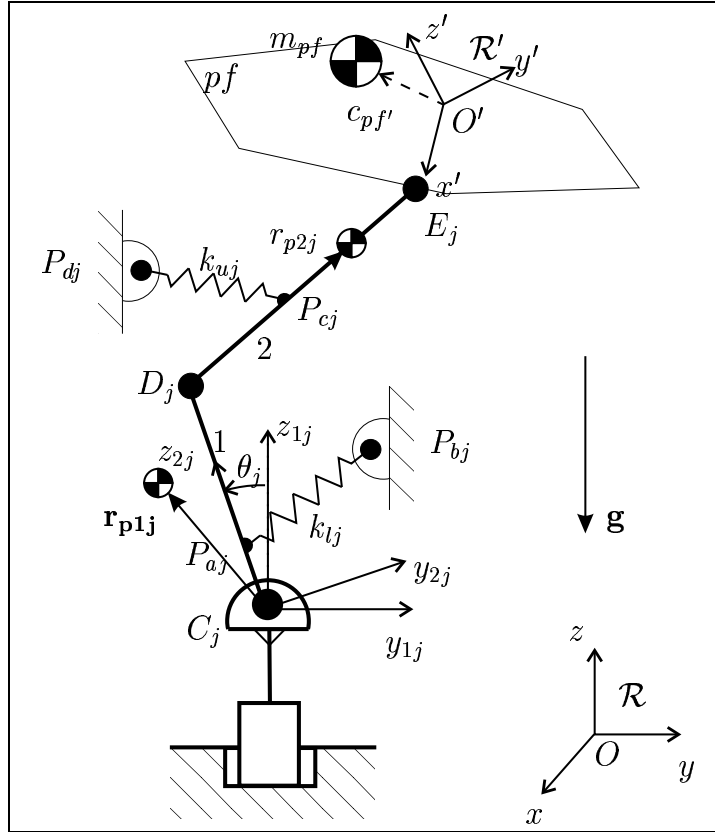


Figure A.6: Architecture de la  $j$ ème patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés aux membrures proximale et distale de la patte et à des points fixes dans l'espace.

membrure. L'autre extrémité de ce ressort est attachée au point fixe  $P_{bj}$ . Quant au second ressort, désigné ressort supérieur et de raideur  $k_{uj}$ , il est attaché à la membrure supérieure (distale) de la patte au point  $P_{cj}$ , situé sur l'axe principal de celle-ci. Comme dans le cas du ressort inférieur, l'autre extrémité du ressort supérieur est attachée à un point fixe, soit  $P_{dj}$ .

Encore ici, le poids des ressorts est considéré comme négligeable. Ainsi donc, l'énergie potentielle gravitationnelle de ce mécanisme est identique à celle du mécanisme étudié à la section A.2.1 et est donnée par l'équation (A.61).

L'énergie potentielle élastique est quant à elle donnée par

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{lj} [e_{lj} - e_{lj}^0]^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( k_{uj} [e_{uj} - e_{uj}^0]^2 \right) \quad (\text{A.74})$$

où  $e_{lj}$  est la longueur du  $j$ ème ressort inférieur et  $e_{uj}$  la longueur du  $j$ ème ressort

supérieur, toutes deux associées à la jème patte d'équilibrage. Or, étant donné que ces longueurs dépendent de la configuration du manipulateur, il faut maintenant exprimer  $e_{lj}$  et  $e_{uj}$  en fonction des variables décrivant cette configuration. De plus, afin de ne pas se retrouver inutilement avec des termes d'énergie potentielle élastique qui ne pourront se combiner avec les termes d'énergie potentielle gravitationnelle, on pose

$$e_{lj}^0 = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.75})$$

$$e_{uj}^0 = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.76})$$

Soit maintenant les vecteurs  $\mathbf{d}_{aj}$ ,  $\mathbf{d}_{bj}$ ,  $\mathbf{d}_{cj}$  et  $\mathbf{d}_{dj}$  reliant l'origine du repère fixe  $\mathcal{R}$  de la base du manipulateur aux quatre points d'attache des ressorts. De par la géométrie du mécanisme, on aura

$$\mathbf{d}_{aj} = \mathbf{c}_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{l}_{aj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.77})$$

$$\mathbf{d}_{cj} = \mathbf{d}_j + \frac{l_{cj}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.78})$$

où  $\mathbf{l}_{aj}$  est le vecteur allant du point  $C_j$  au point  $P_{aj}$ , exprimé dans le repère  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$  et ayant pour coordonnées  $(0, 0, l_{aj})$ , et où  $l_{cj}$  est la distance entre les points  $D_j$  et  $P_{cj}$ . Les vecteurs  $\mathbf{d}_{bj}$  et  $\mathbf{d}_{dj}$  sont pour leur part simplement définis par

$$\mathbf{d}_{bj} = \begin{bmatrix} d_{bjx} \\ d_{bjy} \\ d_{bjz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{dj} = \begin{bmatrix} d_{djx} \\ d_{d jy} \\ d_{djz} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.79})$$

Maintenant que les quatre points d'attache des ressorts sont définis dans  $\mathcal{R}$ , on trouve facilement les quantités scalaires  $e_{lj}$  et  $e_{uj}$  à l'aide des relations suivantes:

$$e_{lj}^2 = \|\mathbf{d}_{aj} - \mathbf{d}_{bj}\|^2 = (d_{ajx} - d_{bjx})^2 + (d_{ajy} - d_{bjy})^2 + (d_{ajz} - d_{bjz})^2 \quad (\text{A.80})$$

$$e_{uj}^2 = \|\mathbf{d}_{cj} - \mathbf{d}_{dj}\|^2 = (d_{cjx} - d_{djx})^2 + (d_{cjy} - d_{d jy})^2 + (d_{cjz} - d_{djz})^2 \quad (\text{A.81})$$

En remplaçant l'équation (A.77) dans l'équation (A.80), on obtient

$$\begin{aligned} e_{lj}^2 &= (c_{jx} - d_{bjx})^2 + (c_{jy} - d_{bjy})^2 + (c_{jz} - d_{bjz})^2 + l_{aj}^2 + \\ &\quad 2l_{aj} [(c_{jx} - d_{bjx}) \sin \gamma_j - (c_{jy} - d_{bjy}) \cos \gamma_j] \sin \theta_j + \\ &\quad 2l_{aj} (c_{jz} - d_{bjz}) \cos \theta_j \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

et on trouve l'énergie potentielle élastique due aux ressorts inférieurs en substituant l'équation (A.82) dans l'équation (A.74). Étant donné que l'expression résultante ne

contient que des termes linéaires en  $\cos \theta_j$  et en  $\sin \theta_j$ , ainsi que des termes constants, ces termes transcendants pourront dès lors se combiner avec les termes d'énergie gravitationnelle. Ce résultat constitue un progrès notable dans la perspective de l'équilibrage statique car on sait maintenant qu'il est possible de profiter de l'apport de ressorts pour atteindre cet objectif plus efficacement.

En ce qui concerne l'expression de  $e_{uj}^2$ , elle est un peu plus compliquée et pour cette raison seules les composantes de  $\mathbf{d}_{bi} - \mathbf{d}_{ci}$  sont données. On les trouve en substituant l'équation (A.78) dans l'équation (A.81). Ainsi,

$$d_{c_jx} - d_{d_jx} = \left(1 - \frac{l_{cj}}{l_{p2j}}\right) [c_{jx} + l_{p1j} \sin \gamma_j \sin \theta_j] + \frac{l_{cj}}{l_{p2j}} [p_x + q_{11}e'_{jx} + q_{12}e'_{jy} + q_{13}e'_{jz}] - d_{d_jx} \quad (\text{A.83})$$

$$d_{c_jy} - d_{d_jy} = \left(1 - \frac{l_{cj}}{l_{p2j}}\right) [c_{jy} - l_{p1j} \cos \gamma_j \sin \theta_j] + \frac{l_{cj}}{l_{p2j}} [p_y + q_{21}e'_{jx} + q_{22}e'_{jy} + q_{23}e'_{jz}] - d_{d_jy} \quad (\text{A.84})$$

$$d_{c_jz} - d_{d_jz} = \left(1 - \frac{l_{cj}}{l_{p2j}}\right) [c_{jz} + l_{p1j} \cos \theta_j] + \frac{l_{cj}}{l_{p2j}} [p_z + q_{31}e'_{jx} + q_{32}e'_{jy} + q_{33}e'_{jz}] - d_{d_jz} \quad (\text{A.85})$$

**Rappel:** Les vecteurs possédant l'indice prime sont définis par rapport à l'origine du repère mobile  $\mathcal{R}'$  de la plate-forme et exprimés dans ce repère.

L'énergie potentielle due aux ressorts supérieurs est ensuite obtenue en substituant les équations (A.83), (A.84) et (A.85) dans l'équation (A.81), et en remplaçant cette dernière dans l'expression de l'énergie potentielle élastique développée à l'équation (A.74). En analysant la forme finale de l'équation (A.74), on constate que contrairement aux ressorts inférieurs, les ressorts supérieurs amènent des termes quadratiques qui ne pourront se combiner avec les termes dus aux forces de gravité. En conséquence, la seule manière de satisfaire les conditions issues du processus de l'équilibrage statique est d'imposer la condition

$$k_{uj} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.86})$$

et cela démontre du même coup que les ressorts attachés aux membrures distales des pattes supplémentaires ne sont d'aucune utilité ici.



Finalement, l'expression de l'énergie potentielle totale du manipulateur s'écrit

$$\begin{aligned}
V = & p_z g \left[ L - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{31} g \left[ N_x - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) \right] + \\
& q_{32} g \left[ N_y - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} g \left[ N_z - \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\
& g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z \quad (\text{A.87})
\end{aligned}$$

et l'équilibrage statique sera atteint à condition que

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.88})$$

$$L = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j} r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) = 0 \quad (\text{A.89})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{ui} \mathbf{b}'_i) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j} r_{p2j}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) = 0 \quad (\text{A.90})$$

$$\begin{aligned}
P_j = & m_{p1j} g r_{p1jy} + \\
& k_{aj} l_{aj} [(c_{jx} - d_{bjx}) \sin \gamma_j - (c_{jy} - d_{bjy}) \cos \gamma_j] = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.91})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_j = & m_{p1j} g r_{p1jz} + m_{p2j} g \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j} + \\
& k_{aj} l_{aj} (c_{jz} - d_{bjz}) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.92})
\end{aligned}$$

ce qui, le cas échéant, rendra l'énergie potentielle totale constante, c'est-à-dire,

$$V = S_z = \text{cte} \quad (\text{A.93})$$

avec

$$\begin{aligned}
S_z = & g \sum_{i=1}^6 (m_{li} a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) \right] c_{jz} \right) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{lj} [(c_{jx} - d_{bjx})^2 + (c_{jy} - d_{bjy})^2 + (c_{jz} - d_{bjz})^2 + l_{aj}^2] \right) \quad (\text{A.94})
\end{aligned}$$

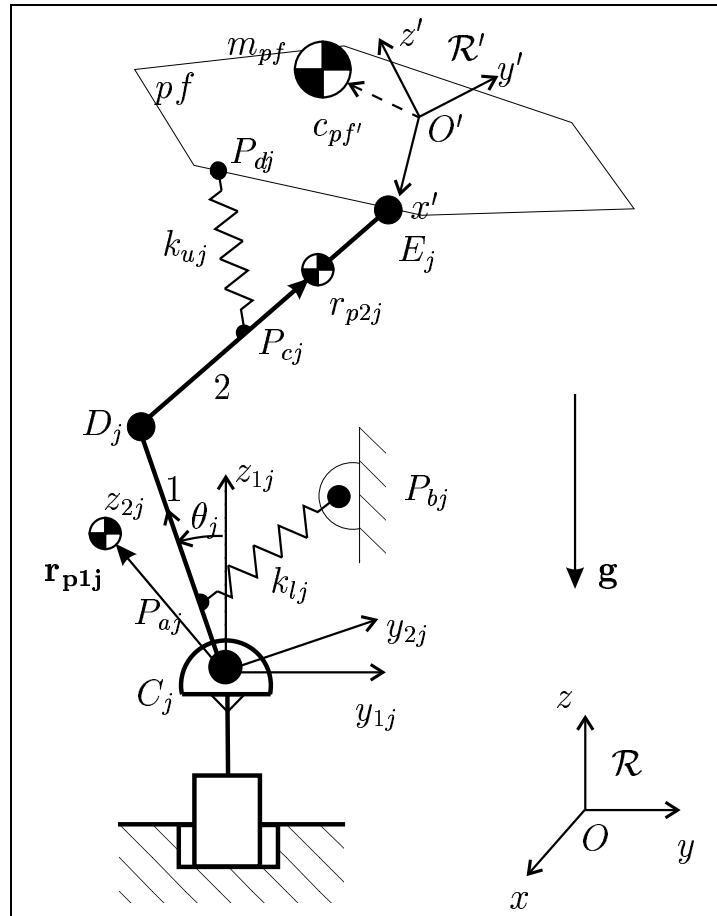


Figure A.7: Architecture de la  $j$ ème patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés entre la membrure proximale de la patte et un point fixe dans l'espace, et entre la membrure distale de la patte et la plate-forme mobile.

### A.2.3 Patte à six (6) d.d.l. sans articulation prismatique avec ressorts attachés entre la membrure proximale de la patte et un point fixe dans l'espace, et entre la membrure distale de la patte et la plate-forme mobile

À la figure A.7, on présente une version légèrement différente du manipulateur de la section A.2.2. La seule différence est que pour une patte d'équilibrage donnée, le point attache  $P_{dj}$  du ressort supérieur de raideur  $k_{uj}$  n'est plus un point fixe quelconque dans l'espace. Il est maintenant situé sur la plate-forme mobile du manipulateur. La raison de ce changement est que l'on voudrait tirer profit de la présence d'un second ressort dans la structure de la patte, de façon à obtenir un meilleur équilibre que

celui obtenu pour le mécanisme de la section précédente.

Ainsi, puisque le point  $P_{dj}$  n'est plus le même, on doit donc définir un nouveau vecteur  $\mathbf{d}_{dj}$ . Il s'écrit maintenant

$$\mathbf{d}_{dj} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{d}'_{dj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.95})$$

où  $\mathbf{d}'_{dj}$  est le vecteur donnant la position du point  $P_{dj}$  par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}'$  et est exprimé dans ce même repère.

Ceci étant fait, la valeur de  $e_{uj}^2$  à l'équation (A.81) est automatiquement changée et les équations (A.83) à (A.85) sont maintenant remplacées par

$$\begin{aligned} d_{c_jx} - d_{d_jx} &= \left(1 - \frac{l_{c_j}}{l_{p2j}}\right) [c_{jx} - p_x + l_{p1j} \sin \gamma_j \sin \theta_j] + \\ &\left[ q_{11} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jx} - d_{d_jx}\right) + q_{12} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jy} - d_{d_jy}\right) + \right. \\ &\left. q_{13} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jz} - d_{d_jz}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

$$\begin{aligned} d_{c_jy} - d_{d_jy} &= \left(1 - \frac{l_{c_j}}{l_{p2j}}\right) [c_{jy} - p_y - l_{p1j} \cos \gamma_j \sin \theta_j] + \\ &\left[ q_{21} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jx} - d_{d_jx}\right) + q_{22} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jy} - d_{d_jy}\right) + \right. \\ &\left. q_{23} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jz} - d_{d_jz}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

$$\begin{aligned} d_{c_jz} - d_{d_jz} &= \left(1 - \frac{l_{c_j}}{l_{p2j}}\right) [c_{jz} - p_z + l_{p1j} \cos \theta_j] + \\ &\left[ q_{31} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jx} - d_{d_jx}\right) + q_{32} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jy} - d_{d_jy}\right) + \right. \\ &\left. q_{33} \left(\frac{l_{c_j}}{l_{p2j}} e'_{jz} - d_{d_jz}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

Encore une fois, on voit bien qu'une fois ces équations mises au carré, additionnées ensemble et insérées dans l'équation (A.74) de l'énergie potentielle élastique  $V_e$ , on se retrouvera avec des termes quadratiques impossibles à combiner avec les termes d'énergie potentielle gravitationnelle. On conclut donc que les ressorts supérieurs demeurent inutiles dans ce cas-ci car pour garder homogène le système d'équations donnant les conditions d'équilibrage, il faut nécessairement que

$$k_{uj} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.99})$$

À la lumière de ces résultats et de ceux de la section A.2.2, on pourrait être porté à croire qu'il n'existe aucun moyen de tirer profit de ressorts attachés aux membrures supérieures des pattes d'équilibrage. Or, il existe une manière de contourner ce problème. Il s'agit d'utiliser des pattes d'équilibrage dont la structure est faite de parallélogrammes. Cela fait justement l'objet de la prochaine section.

#### A.2.4 Principe du parallélogramme

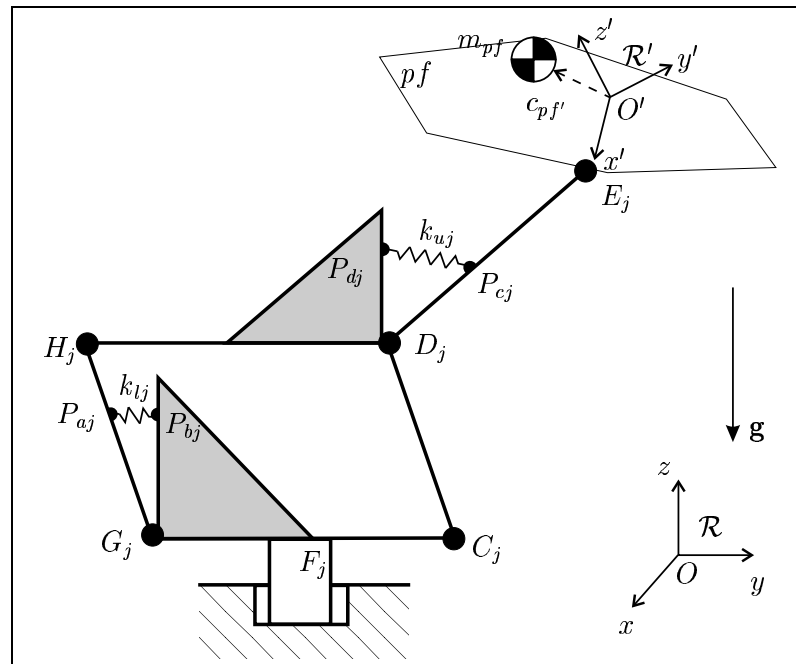


Figure A.8: Modèle de patte d'équilibrage à six (6) d.d.l. dont l'architecture possède un parallélogramme.

Pour l'équilibrage statique de structures existantes comme la plate-forme de Gough-Stewart, la présence de parallélogrammes (Streit et Shin 1990) dans l'architecture des mécanismes ou pattes d'équilibrage permet l'utilisation de ressorts de façon beaucoup moins restrictive.

La figure A.8 montre un exemple de patte d'équilibrage à six (6) degrés de liberté possédant une telle architecture. Il s'agit en fait de la patte présentée à la section A.2.1, à laquelle ont été ajoutées trois membrures pour former un parallélogramme. Les triangles gris sont rigidement liés aux barres horizontales  $C_j G_j$  et  $D_j H_j$  de la patte et servent de support pour les ressorts. Également, on note que l'articulation

rotoïde dont l'axe de rotation est parallèle au vecteur  $\mathbf{g}$  est maintenant au centre du parallélogramme. Ce mécanisme d'équilibrage est étudié en détail au chapitre 2.

La particularité des parallélogrammes est que pour un manipulateur parallèle donné, ils permettent d'attacher des ressorts plus près de la plate-forme mobile, ce qui conduira la plupart du temps à un équilibrage statique assujéti à des contraintes moins strictes et donc, plus facilement réalisable en pratique. Ainsi, le parallélogramme de la figure A.8 permet maintenant d'aller attacher un ressort sur la membrure distale  $D_j E_j$  de la patte d'équilibrage, tout en garantissant que les termes d'énergie potentielle élastique générés se combineront avec les termes gravitationnels. En outre, ce qui rend le parallélogramme intéressant, c'est qu'il n'ajoute aucune variable de configuration dans le système et donc, aucun degré de liberté supplémentaire. Dans les deux exemples de mécanismes équilibrants montrés aux figures A.6 et A.7, l'incompatibilité entre certains termes d'énergie élastique (les termes quadratiques) et les termes d'énergie gravitationnelle s'explique du fait que la distance entre les points  $D_j$  et  $P_{dj}$  varie selon la configuration du manipulateur. À l'inverse, dans le cas du parallélogramme, les membrures  $C_j G_j$  et  $D_j H_j$  se maintiendront à l'horizontale pour toute position du parallélogramme. Ce faisait, en positionnant le point  $P_{dj}$  sur le triangle rigidement lié à la barre  $D_j H_j$ , on fait en sorte que ce point demeurera à une distance constante du pivot  $D_j$  lors des mouvements du manipulateur. Par conséquent, peu importe la configuration du manipulateur, l'arrangement triangulaire formé par les points  $D_j$ ,  $P_{cj}$  et  $P_{dj}$  sera toujours préservé et contenu dans un plan parallèle à l'accélération gravitationnelle  $\mathbf{g}$ . Grâce à cette caractéristique, on peut déterminer la longueur  $e_{uj}$  du ressort par la loi des cosinus, laquelle s'écrit

$$e_{uj}^2 = \overline{D_j P_{cj}}^2 + \overline{D_j P_{dj}}^2 - 2\overline{D_j P_{cj}} \overline{D_j P_{dj}} \cos(\angle P_{cj} D_j P_{dj}) \quad (\text{A.100})$$

où  $\overline{D_j P_{cj}}$  est la distance (constante) entre les points  $D_j$  et  $P_{cj}$ ,  $\overline{D_j P_{dj}}$  la distance (constante) entre  $D_j$  et  $P_{dj}$  et  $\angle P_{cj} D_j P_{dj}$  l'angle opposé au côté  $e_{uj}$ . Cet angle variant selon la configuration de la patte sera en général dépendant d'autres variables de configuration.

Finalement, on remarque sur la figure que le principe du parallélogramme est également appliqué au ressort inférieur de raideur  $k_{lj}$ . L'équilibrage statique de mécanismes spatiaux et plans par l'entremise de pattes d'équilibrage à parallélogrammes est traité en détails aux chapitres 2 et 3.

## **ANNEXE B**

### **AUTRES ARCHITECTURES DE PATTES D'ÉQUILIBRAGE UTILISÉES POUR L'ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE MANIPULATEURS PARALLÈLES SPATIAUX À SIX (6) DEGRÉS DE LIBERTÉ**

Le contenu de cette annexe se veut, comme le spécifie le titre, un complément au contenu du chapitre 2. On y présente le développement des conditions d'équilibrage pour deux autres types d'architectures de mécanismes équilibrants à être utilisés pour rendre la plate-forme de Gough-Stewart (figure 2.1) statiquement équilibrée. Ces deux nouvelles architectures de pattes sont des variantes du mécanisme de la section 2.2.1 car elles possèdent, elles aussi, un parallélogramme dans leur structure.

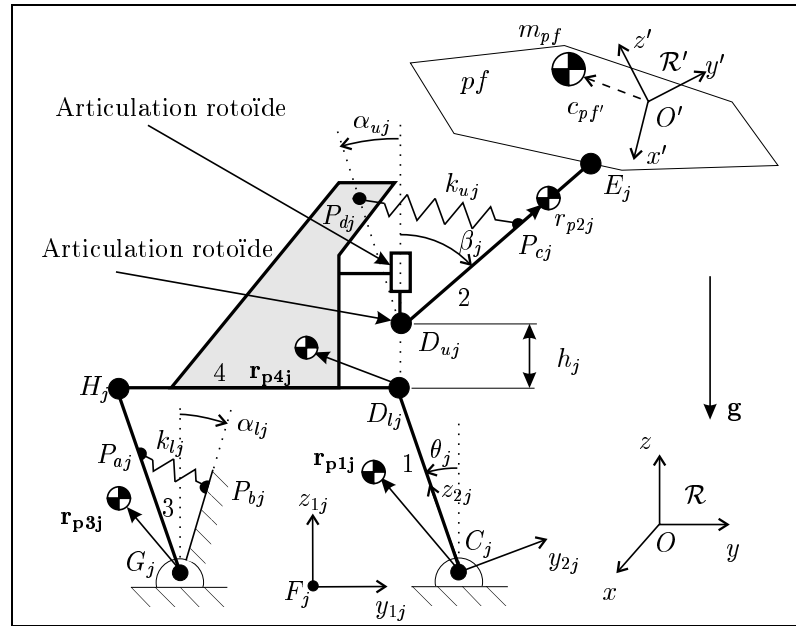


Figure B.1: Autre architecture de la  $j$ ème patte d'équilibre à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type *II*.

## B.1 Patte spéciale à six (6) d.d.l. à un parallélogramme (type *II*)

L'architecture de la patte d'équilibre montrée à la figure B.1 est très similaire à celle de la patte étudiée à la section 2.2.1 (voir figure 2.3). Elle possède le même nombre de degrés de liberté, soit six (6), mais ceux-ci sont répartis à travers un arrangement d'articulations quelque peu différent. Ainsi, chacune de ces pattes passives ajoutées est en fait un mécanisme spatial composé d'un mécanisme à quatre barres (parallélogramme)  $C_j D_l_j H_j G_j$  pouvant se déplacer dans un plan parallèle au vecteur gravité, une articulation de Cardan montée sur un polygone rigidement lié au segment  $D_l_j H_j$ , une membrure distale  $D_u_j E_j$  et une articulation sphérique au point  $E_j$ . De plus, comme le montre la figure, la différence de hauteur entre les points  $D_l_j$  et  $D_u_j$  est représentée par le paramètre  $h_j$ .

Par ailleurs, chaque patte possède deux ressorts. Le premier, de raideur  $k_l_j$ , est situé sur la partie inférieure de la patte. Ses points d'attache sont  $P_{aj}$ , lequel se trouve sur le segment  $G_j H_j$ , et  $P_{bj}$ , un point fixe dans l'espace. Ainsi, la longueur de ce ressort variera selon le mouvement de la membrure  $G_j H_j$  autour d'un pivot situé au point

$G_j$ . Quant au second ressort, de raideur  $k_{uj}$ , il se trouve sur la partie supérieure de la patte. Ses points d'attache sont  $P_{ej}$ , lequel est situé sur le segment  $D_{uj}E_j$ , et le point  $P_{dj}$ , situé sur le polygone. En outre, on considère que la longueur de ce ressort variera exclusivement selon le mouvement de la membrure  $D_{uj}E_j$  autour d'un pivot  $D_{uj}$ . Le déplacement de  $D_{uj}E_j$  autour de l'axe vertical passant par  $D_{uj}$  et parallèle au vecteur  $\mathbf{g}$  n'a, pour sa part, pas d'effet sur l'allongement du ressort.

Comme pour la patte de la section 2.2.1, le repère  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  est situé au point fixe  $F_j$ . L'axe  $y_{1j}$  pointe dans une direction parallèle au sol, alors que l'axe  $z_{1j}$  pointe verticalement vers le haut, dans la direction du vecteur gravité, mais en sens inverse.

Quant à la matrice de rotation  $\mathbf{Q}_{1j}$ , donnant l'orientation du repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}$ , elle s'écrit encore

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j & 0 \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

Toutefois, dans ce cas-ci, l'angle  $\gamma_j$  — défini entre la direction positive de l'axe  $x$  du repère  $\mathcal{R}$  et celle de l'axe  $x_{1j}$ , et contenu dans le plan  $xy$  de  $\mathcal{R}$  — sera en tout temps constant pour une patte donnée puisque la base celle-ci est rigidement liée au sol.

D'autre part, le repère  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$  est positionné — au point  $C_j$  — et orienté de la même manière que celui de la patte de type  $I$  de la section 2.2.1. En conséquence, on trouve aussi la même matrice  $\mathbf{Q}_{2j}$ , laquelle indique l'orientation du repère  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$  par rapport au repère  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  par l'entremise de l'angle  $\theta_j$ . Afin de rendre le développement des conditions d'équilibrage plus clair, cette matrice est réécrite ci-bas.

$$\mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.2})$$

Quant aux vecteurs reliant l'origine de  $\mathcal{R}$  au centre de masse de chacune des membrures constituant la  $j$ ème patte d'équilibrage, ils sont presque identiques à ceux qui sont définis à la section 2.2.1, à quelques différences près. Premièrement, il n'y a plus de membrure  $G_jC_j$ , ce qui rend non pertinente la présence du vecteur  $\mathbf{c}_{p0j}$ . De plus,



comme le point  $D_j$  est maintenant remplacé par deux points,  $D_{lj}$  et  $D_{uj}$ , — séparés en hauteur d'une distance  $h_j$  — le vecteur  $\mathbf{l}_{D_j H_j}$  est maintenant remplacé par  $\mathbf{l}_{D_{lj} H_j}$ . De là, les vecteurs  $\mathbf{c}_{p1j}$ ,  $\mathbf{c}_{p2j}$ ,  $\mathbf{c}_{p3j}$  et  $\mathbf{c}_{p4j}$  — donnant respectivement la position du centre de masse des membrures  $C_j D_{lj}$ ,  $D_{uj} E_j$ ,  $G_j H_j$  et  $H_j D_{lj}$  (incluant le polygone) par rapport à l'origine de  $\mathcal{R}$  et exprimés dans ce même repère — sont donnés par

$$\mathbf{c}_{p1j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{r}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{c}_{p2j} = \mathbf{d}_{uj} + \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_{uj}), \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{c}_{p3j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} (\mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{l}_{D_{lj} H_j}) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{r}_{p3j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{c}_{p4j} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} (\mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{r}_{p4j}) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{l}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\mathbf{d}_{uj} = \mathbf{f}_j + \mathbf{Q}_{1j} (\mathbf{l}_{F_j C_j} + \mathbf{h}_j) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{l}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{p} + \mathbf{Q} \mathbf{e}'_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.8})$$

et

$$\mathbf{l}_{F_j C_j} = [0, l_{F_j C_j}, 0]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{l}_{D_{lj} H_j} = [0, -l_{D_{lj} H_j}, 0]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{l}_{p1j} = [0, 0, l_{p1j}]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{h}_j = [0, 0, h_j]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.12})$$

où  $\mathbf{h}_j$  est exprimé dans un repère ayant l'orientation du repère  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$ . On écrit ensuite la position du centre de masse global du manipulateur comme suit:

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf} \mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} \mathbf{c}_{li} + m_{ui} \mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 (m_{pkj} \mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (\text{B.13})$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 m_{pkj} \quad (\text{B.14})$$

où  $m_{pkj}$  est la masse de la  $k$ ème membrure de la  $j$ ème patte ajoutée.

L'équation (B.13) permet finalement de trouver l'énergie potentielle gravitationnelle, c'est-à-dire

$$V_g = M g r_z \quad (\text{B.15})$$

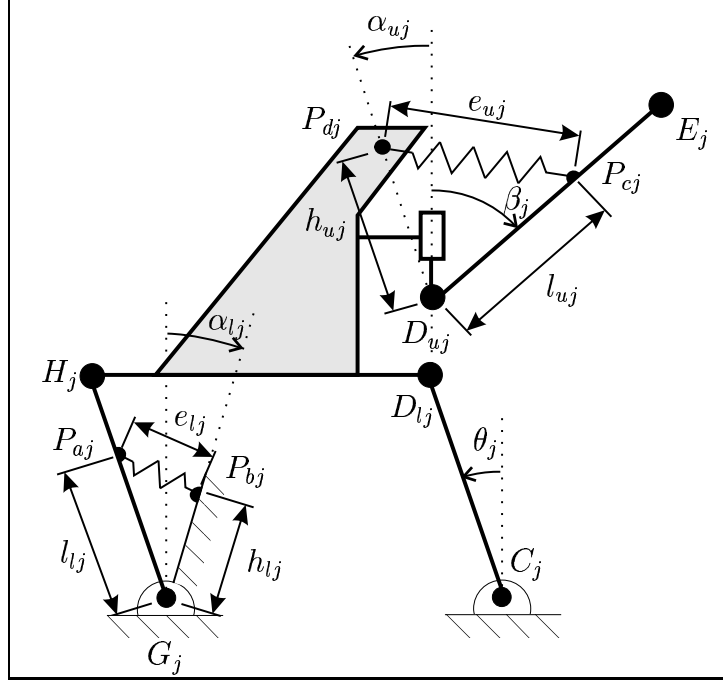


Figure B.2: Patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme, de type *II*: position des ressorts.

D'autre part, puisque cette jème patte possède deux ressorts dans sa structure, l'énergie potentielle élastique pour  $n$  pattes attachées à la plate-forme s'écrit, comme à la section 2.2.1,

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_{l_j} e_{l_j}^2 + k_{u_j} e_{u_j}^2) \quad (\text{B.16})$$

où les longueurs de ressorts sont trouvées à l'aide de la loi des cosinus (voir la figure B.2), c'est-à-dire

$$e_{l_j} = \sqrt{h_{l_j}^2 + l_{l_j}^2 - 2h_{l_j}l_{l_j} \cos(\theta_j + \alpha_{l_j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.17})$$

$$e_{u_j} = \sqrt{h_{u_j}^2 + l_{u_j}^2 - 2h_{u_j}l_{u_j} \cos(\beta_j + \alpha_{u_j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.18})$$

$h_{l_j}$  et  $l_{l_j}$  étant les distances reliant l'articulation rotoïde, située au point  $G_j$ , respectivement aux points d'attache  $P_{aj}$  et  $P_{bj}$  du ressort inférieur, alors que  $h_{u_j}$  et  $l_{u_j}$  sont les distances entre l'articulation de Cardan, située au point  $D_{uj}$ , et les points d'attache  $P_{cj}$  et  $P_{dj}$  du ressort supérieur. Les angles  $\alpha_{l_j}$  et  $\alpha_{u_j}$  sont, quant à eux, des paramètres constants permettant de définir précisément la position des points  $P_{bj}$  et  $P_{dj}$ .

En utilisant une des identités trigonométriques fondamentales, on peut réécrire les

équations (B.17) et (B.18) de la façon suivante:

$$e_{lj} = \sqrt{h_{lj}^2 + l_{lj}^2 - 2h_{lj}l_{lj}(\cos \theta_j \cos \alpha_{lj} - \sin \theta_j \sin \alpha_{lj})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.19})$$

$$e_{uj} = \sqrt{h_{uj}^2 + l_{uj}^2 - 2h_{uj}l_{uj}(\cos \beta_j \cos \alpha_{uj} - \sin \beta_j \sin \alpha_{uj})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\cos \beta_j = \frac{e_{jz} - d_{jz}}{l_{p2j}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.21})$$

$$\sin \beta_j = \frac{e_{jxy} - d_{jxy}}{l_{p2j}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.22})$$

où la différence  $e_{jxy} - d_{jxy}$  est donnée par

$$e_{jxy} - d_{jxy} = \sqrt{(e_{jx} - d_{jx})^2 + (e_{jy} - d_{jy})^2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.23})$$

Par substitution des équations (B.19) et (B.20) dans l'équation (B.16), et en additionnant cette dernière à l'équation (B.15), on obtient l'énergie potentielle totale, soit

$$\begin{aligned} V = & p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{31} \left[ N_x - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

avec les coefficients

$$D_i = m_{ui}d_{ui} - m_{li}d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.25})$$

$$L = \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j}gr_{p2j} - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = & \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 [m_{ui} \mathbf{b}'_i] \right) g + \\ & \sum_{j=1}^n \left( \frac{m_{p2j}gr_{p2j} - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$P_j = (m_{p1j}r_{p1jy} + m_{p3j}r_{p3jy}) g + k_{lj}h_{lj}l_{lj} \sin \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.28})$$

$$R_j = \left( [m_{p2j} + m_{p4j}] g - \frac{m_{p2j}gr_{p2j} - k_{uj}h_{uj}l_{uj} \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) l_{p1j} +$$

$$(m_{p1j}r_{p1jz} + m_{p3j}r_{p3jz})g - k_{lj}h_{lj}l_{lj} \cos \alpha_{lj}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} S_z = & g \sum_{i=1}^6 (m_{li}a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n (m_{p4j}r_{p4jz}) + \\ & g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} + m_{p4j} \right] f_{jz} \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj}h_{uj}l_{uj} (f_{jz} + h_j) \cos \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{lj} [h_{lj}^2 + l_{lj}^2] + k_{uj} [h_{uj}^2 + l_{uj}^2] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$D_i, L, \mathbf{N}, P_j, R_j$  et  $S_z$  étant constants.

Finalement, le coefficient  $\Omega$  est donné par

$$\begin{aligned} \Omega = & \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{uj}h_{uj}l_{uj} \sin \alpha_{uj}}{l_{p2j}} \times \right. \\ & \left[ (p_x - f_{jx} + q_{11}e'_{jx} + q_{12}e'_{jy} + q_{13}e'_{jz} + l_{FjCj} \sin \gamma_j - l_{p1j} \sin \gamma_j \sin \theta_j)^2 + \right. \\ & \left. \left. (p_y - f_{jy} + q_{21}e'_{jx} + q_{22}e'_{jy} + q_{23}e'_{jz} - l_{FjCj} \cos \gamma_j + l_{p1j} \cos \gamma_j \sin \theta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Cependant, pour la raison invoquée à la section 2.2.1, on doit, afin d'obtenir un équilibrage statique pour toute configuration, imposer la condition suivante:

$$\alpha_{uj} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.32})$$

Conséquemment, l'équation (B.31) est réduite à

$$\Omega = 0 \quad (\text{B.33})$$

Par ailleurs, on remarque que les coefficients  $D_i, L, \mathbf{N}, P_j$  et  $R_j$  sont exactement ceux qui ont été obtenus pour la patte d'équilibrage de type  $I$ , à la section 2.2.1 (voir les équations (2.53) à (2.57)). Cela implique nécessairement que les conditions d'équilibrage seront tout autant identiques. Celles-ci sont trouvées en posant

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.34})$$

$$L = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{B.36})$$

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.37})$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.38})$$

En fait, la seule différence que l'on note entre cette patte de type *II* et la patte de type *I* se situe au niveau du terme constant d'énergie potentielle  $S_z$ . Le paramètre constant de hauteur  $h_j$  a pour effet d'ajouter un terme supplémentaire dans l'expression de  $S_z$ , ce qui ne change en rien les conditions d'équilibrage puisque que ce terme ne dépend pas de la configuration du manipulateur. Bref, en satisfaisant les conditions présentées ci-haut, l'expression de l'énergie potentielle totale se réduira à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (\text{B.39})$$

En outre, il est à noter qu'il suffit d'imposer une valeur nulle à  $h_j$  pour retomber sur le cas de la patte de type *I*. Ce faisant, on conclut donc qu'en termes d'équilibrage statique, les pattes de type *I* et *II* sont équivalentes.

## B.2 Patte spéciale à six (6) d.d.l. à un parallélogramme (type *III*)

À la figure B.3, une autre architecture de patte d'équilibrage basée sur le principe du parallélogramme (Streit et Shin 1990) est présentée. Ce type de patte a notamment fait l'objet d'études détaillées dans (Ebert-Uphoff et al. 1998).

Comme c'est le cas pour les pattes de type *I* (section 2.2.1) et de type *II* (section B.1), cette patte non-actionnée — désignée de type *III* — ne comporte elle aussi qu'un seul parallélogramme dans sa structure. Par contre, sa topologie et son fonctionnement sont quelque peu différents. Tout d'abord, les membrures  $D_jI_j$  et  $F_jH_j$  n'étant pas rigidement liées l'une à l'autre au point  $C_j$ , celles-ci peuvent bouger de manière totalement indépendante. De plus, un ressort est attaché à chacune de ces barres. Finalement, on remarque que les deux ressorts ont leur autre extrémité liée à une membrure ne bougeant pas verticalement (dans la direction de la gravité). L'avantage principal que procure ce type d'architecture est que les ressorts sont maintenant situés plus près de la base. On observe aussi que le parallélogramme n'a plus pour fonction de maintenir certaines barres à l'horizontale.

Ainsi, comme l'illustre la figure, chaque patte ajoutée est un mécanisme plan monté sur une articulation rotoïde à axe vertical, c'est-à-dire parallèle au vecteur gravité et

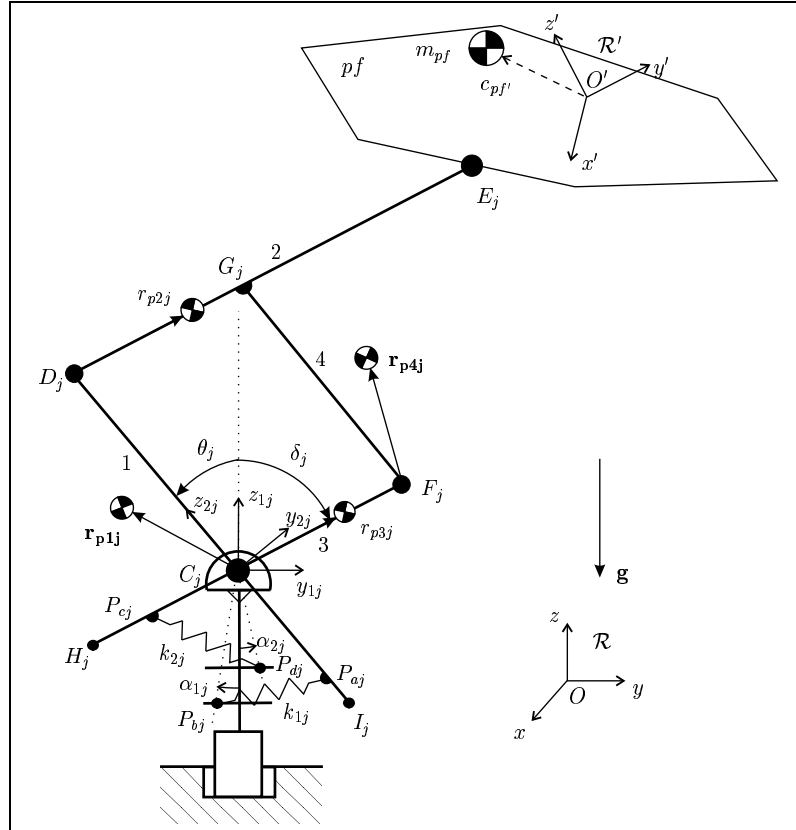


Figure B.3: Autre architecture de la  $j$ ème patte d’équilibrage à six (6) d.d.l. à un parallélogramme: type III.

passant par le point  $C_j$ . De plus, deux des membrures du parallélogramme — les barres  $H_j F_j$  et  $I_j D_j$  — sont montées sur une articulation rotoïde au point  $C_j$ . Puis, au moyen d’une articulation rotoïde placée au point  $D_j$ , la barre  $I_j D_j$  est reliée à la membrure distale  $D_j E_j$  qui, elle, est attachée à l’effecteur (plate-forme mobile) du mécanisme de Gough-Stewart par une liaison sphérique au point  $E_j$ . Finalement, une quatrième barre, soit la membrure  $F_j G_j$ , permet de compléter le parallélogramme. Cette membrure est liée au reste de la structure par des liaisons rotoïdes en  $F_j$  et  $G_j$ .

D’autre part, les deux ressorts présents dans la structure de la patte sont placés de telle sorte que tous les termes d’énergie potentielle qu’ils génèrent puissent se combiner avec les termes d’énergie potentielle gravitationnelle. Ainsi, lors du mouvement de la patte, il n’y aura jamais de mouvement relatif entre les pivots — c’est-à-dire les points autour desquels les barres munies d’un ressort tournent — et les points d’attache des ressorts. (pour plus de détails, voir à la section A.2.4) Pour le ressort de raideur  $k_{1j}$ ,

le pivot est le point  $C_j$  et les points d'attache sont le point  $P_{aj}$ , lequel se trouve sur le segment  $I_jD_j$ , et le point  $P_{bj}$ , fixe dans le plan de la patte. De la même manière, le ressort de raideur  $k_{2j}$  a ses points d'attache en  $P_{cj}$ , situé sur le segment  $H_jD_j$ , et en  $P_{dj}$ , lui aussi fixe dans le plan de la patte. Quant au pivot, c'est le même que pour l'autre ressort, soit  $C_j$ .

Par ailleurs, on note que d'un point de vue cinématique, seule la partie de la patte comprise entre les points  $C_j$  et  $E_j$  est d'intérêt. Les segments de barre  $C_jH_j$  et  $C_jI_j$  ne sont là en fait que pour permettre d'attacher des ressorts à la patte.

Le mouvement de cette patte d'équilibrage est décrit par la variation de trois angles,  $\gamma_j$ ,  $\theta_j$  et  $\delta_j$ . De façon analogue à ce qui est fait à la section B.1, on définit les matrices  $\mathbf{Q}_{1j}$  et  $\mathbf{Q}_{2j}$ . La matrice de rotation  $\mathbf{Q}_{1j}$  donne l'orientation du repère mobile  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  — situé en  $C_j$ , ayant son axe  $y_{1j}$  compris dans le plan de la patte et qui pointe dans une direction parallèle au sol et son axe  $z_{1j}$  qui pointe verticalement vers le haut, dans la direction du vecteur gravité, mais en sens inverse — par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}$ . Cette matrice s'écrit

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j & 0 \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.40})$$

où la variable articulaire  $\gamma_j$  est l'angle entre la direction positive de l'axe  $x$  de  $\mathcal{R}$  et celle de l'axe  $x_{1j}$ , ce dernier étant contenu dans le plan  $xy$  de  $\mathcal{R}$ .

Quant à la matrice  $\mathbf{Q}_{2j}$ , elle indique l'orientation du repère  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$  — situé lui aussi en  $C_j$ , ayant son axe  $z_{2j}$  qui pointe vers  $D_j$  et son axe  $y_{2j}$  compris dans le plan de la patte et perpendiculaire à  $z_{2j}$  — par rapport au repère  $O_{1j} - x_{1j}, y_{1j}, z_{1j}$  par l'entremise de l'angle  $\theta_j$ . Cette matrice est donnée par

$$\mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.41})$$

La prochaine étape dans la démarche pour trouver l'énergie potentielle globale du manipulateur consiste à définir la position du centre de masse de chaque barre ajoutée par rapport à un point de référence. Ainsi,  $\mathbf{c}_{p1j}$ ,  $\mathbf{c}_{p2j}$ ,  $\mathbf{c}_{p3j}$  et  $\mathbf{c}_{p4j}$  sont respectivement

les vecteurs position du centre de masse des membrures  $I_j D_j$ ,  $D_j E_j$ ,  $H_j F_j$  et  $F_j G_j$  par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}$  et sont exprimés dans ce même repère. Ils sont donnés par

$$\mathbf{c}_{p1j} = \mathbf{c}_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{r}_{p1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.42})$$

$$\mathbf{c}_{p2j} = \mathbf{d}_j + \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.43})$$

$$\mathbf{c}_{p3j} = \mathbf{c}_j + \frac{r_{p3j}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.44})$$

$$\mathbf{c}_{p4j} = \mathbf{c}_j + \frac{l_{C_j F_j}}{l_{p2j}} (\mathbf{e}_j - \mathbf{d}_j) + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{r}_{p4j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.45})$$

avec

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{c}_j + \mathbf{Q}_{1j} \mathbf{Q}_{2j} \mathbf{l}_{C_j D_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.46})$$

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{p} + \mathbf{Q} \mathbf{e}'_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.47})$$

et

$$\mathbf{l}_{C_j D_j} = [0, 0, l_{C_j D_j}]^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.48})$$

où  $\mathbf{l}_{C_j D_j}$ ,  $\mathbf{r}_{p1j}$  et  $\mathbf{r}_{p4j}$  sont les vecteurs représentant respectivement la longueur  $C_j D_j$  et la position des centres de masse des membrures  $I_j D_j$  et  $F_j G_j$ . Ces vecteurs sont exprimés dans leurs repères locaux respectifs situés aux points  $C_j$  et  $F_j$  et ayant la même orientation que le repère  $O_{2j} - x_{2j}, y_{2j}, z_{2j}$ ;  $\mathbf{c}_j$ ,  $\mathbf{d}_j$  et  $\mathbf{e}_j$  sont les vecteurs donnant respectivement la position des points  $C_j$ ,  $D_j$  et  $E_j$  par rapport à l'origine de  $\mathcal{R}$ , ceux-ci étant également exprimés dans  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{e}'_j$  est un vecteur reliant l'origine du repère  $\mathcal{R}'$ , attaché à la plate-forme mobile, au point  $E_j$ . Ce vecteur est exprimé dans  $\mathcal{R}'$ .

En outre, afin de simplifier l'analyse, on suppose que le centre de masse de la membrure  $D_j E_j$  est situé sur l'axe longitudinal (fibre neutre) de cette dernière. Ainsi, les scalaires  $r_{p2j}$  et  $l_{p2j}$  représentent respectivement la position du centre de masse de la barre  $D_j E_j$  par rapport au point  $D_j$ , et la longueur de cette même barre. De la même manière, on impose que le centre de masse de la barre  $C_j F_j$  soit, lui aussi, situé sur son axe longitudinal, de telle sorte que le scalaire  $r_{p3j}$  donne la distance entre le point  $C_j$  et le centre de masse de la barre.

Ceci dit, on peut maintenant écrire l'équation du centre de masse global du manipulateur. Ainsi,

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf} \mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} \mathbf{c}_{li} + m_{ui} \mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 (m_{pkj} \mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (\text{B.49})$$



avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^6 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 m_{pkj} \quad (\text{B.50})$$

où  $m_{pkj}$  est la masse de la  $k$ ème membrure de la  $j$ ème patte ajoutée.

L'équation (B.49) permet finalement de trouver l'énergie potentielle gravitationnelle, c'est-à-dire

$$V_g = Mgr_z \quad (\text{B.51})$$

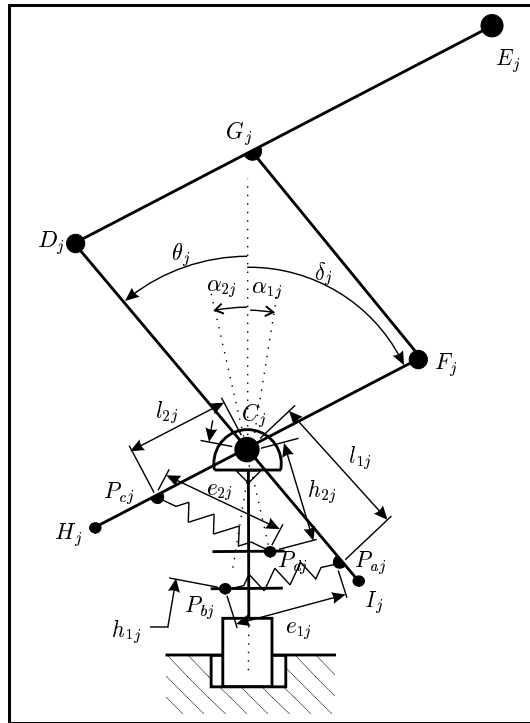


Figure B.4: Patte à six (6) d.d.l. à un parallélogramme, de type *III*: position des ressorts.

Il reste maintenant à trouver l'énergie potentielle élastique de ce système. Cette énergie s'écrit

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_{1j}e_{1j}^2 + k_{2j}e_{2j}^2) \quad (\text{B.52})$$

où  $k_{1j}$  et  $k_{2j}$  sont les raideurs des ressorts de la  $j$ ème patte et  $e_{1j}$  et  $e_{2j}$  leur longueur. Ces longueurs de ressorts sont justement déterminées à l'aide de la loi des cosinus (voir la figure B.4). Ainsi,

$$e_{1j} = \sqrt{h_{1j}^2 + l_{1j}^2 - 2h_{1j}l_{1j} \cos(\theta_j + \alpha_{1j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.53})$$

$$e_{2j} = \sqrt{h_{2j}^2 + l_{2j}^2 - 2h_{2j}l_{2j} \cos(\delta_j + \alpha_{2j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.54})$$

$l_{1j}$  et  $h_{1j}$  étant les distances reliant l'articulation rotoïde, située au point  $C_j$ , respectivement aux points d'attache  $P_{aj}$  et  $P_{bj}$  du ressort 1 (figure B.3), alors que  $l_{2j}$  et  $h_{2j}$  sont les distances entre  $C_j$  et les points d'attache  $P_{cj}$  et  $P_{dj}$  du ressort 2. Les angles  $\alpha_{1j}$  et  $\alpha_{2j}$  sont, eux aussi, des paramètres constants et ils permettent de définir précisément la position des points  $P_{bj}$  et  $P_{dj}$ .

Moyennant l'emploi d'une des identités trigonométriques fondamentales, les équations (B.53) et (B.54) deviennent, après remaniement,

$$e_{1j} = \sqrt{h_{1j}^2 + l_{1j}^2 - 2h_{1j}l_{1j}(\cos \theta_j \cos \alpha_{1j} - \sin \theta_j \sin \alpha_{1j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.55})$$

$$e_{2j} = \sqrt{h_{2j}^2 + l_{2j}^2 - 2h_{2j}l_{2j}(\cos \delta_j \cos \alpha_{2j} - \sin \delta_j \sin \alpha_{2j})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.56})$$

avec

$$\cos \delta_j = \frac{f_{jz} - c_{jz}}{l_{CjFj}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.57})$$

$$\sin \delta_j = \frac{f_{jxy} - c_{jxy}}{l_{CjFj}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.58})$$

où la différence  $f_{jxy} - c_{jxy}$  est donnée par

$$f_{jxy} - c_{jxy} = \sqrt{(f_{jx} - c_{jx})^2 + (f_{jy} - c_{jy})^2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.59})$$

Par substitution des équations (B.55) et (B.56) dans l'équation (B.52), et en additionnant cette dernière à l'équation (B.51), on obtient l'énergie potentielle totale, soit

$$\begin{aligned} V = & p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] + q_{31} \left[ N_x - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{ix}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + \\ & g \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

avec les coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} L = & \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^6 m_{ui} \right) g + \\ & \sum_{j=1}^n \left( \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p3j} r_{p3j} + m_{p4j} l_{CjFj}] g - k_{2j} h_{2j} l_{2j} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^6 [m_{ui} \mathbf{b}'_i] \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p3j} r_{p3j} + m_{p4j} l_{CjFj}] g - k_{2j} h_{2j} l_{2j} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) \quad (\text{B.63})$$

$$P_j = (m_{p1j} r_{p1jy} + m_{p4j} r_{p4jy}) g + k_{1j} h_{1j} l_{1j} \sin \alpha_{1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.64})$$

$$R_j = \left( m_{p2j} g - \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p3j} r_{p3j} + m_{p4j} l_{CjFj}] g - k_{2j} h_{2j} l_{2j} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \right) l_{CjDj} + (m_{p2j} l_{CjDj} + m_{p4j} r_{p4jz}) g - k_{1j} h_{1j} l_{1j} \cos \alpha_{1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.65})$$

$$S_z = g \sum_{i=1}^6 (m_{li} a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} \left( 1 - \frac{r_{p3j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p4j} \left( 1 - \frac{l_{CjDj}}{l_{p2j}} \right) \right] c_{jz} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{2j} h_{2j} l_{2j} c_{jz} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (k_{1j} [h_{1j}^2 + l_{1j}^2] + k_{2j} [h_{2j}^2 + l_{2j}^2]) \quad (\text{B.66})$$

$D_i, L, \mathbf{N}, P_j, R_j$  et  $S_z$  étant constants.

Quant au coefficient  $\Omega$ , celui-ci est donné par

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{2j} h_{2j} l_{2j} \sin \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \times \left[ (p_x - c_{jx} + q_{11} e'_{jx} + q_{12} e'_{jy} + q_{13} e'_{jz} - l_{CjDj} \sin \gamma_j \sin \theta_j)^2 + (p_y - c_{jy} + q_{21} e'_{jx} + q_{22} e'_{jy} + q_{23} e'_{jz} + l_{CjDj} \cos \gamma_j \sin \theta_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.67})$$

Toutefois, pour la raison invoquée à la section 2.2.1, on doit, afin d'obtenir un équilibre statique pour toute configuration, imposer la condition suivante:

$$\alpha_{2j} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.68})$$

Conséquemment, l'équation (B.67) se réduit à

$$\Omega = 0 \quad (\text{B.69})$$

Finalement, le manipulateur atteindra l'équilibre statique pour toute configuration lorsque

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{B.70})$$

$$L = 0 \quad (\text{B.71})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{B.72})$$

$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.73})$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.74})$$

conduisant alors à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (\text{B.75})$$

## ANNEXE C

### AUTRE ARCHITECTURE DE PATTE D'ÉQUILIBRAGE UTILISÉE POUR L'ÉQUILIBRAGE STATIQUE DE MANIPULATEURS PARALLÈLES PLANS À TROIS (3) DEGRÉS DE LIBERTÉ

Le contenu de cette annexe s'avère un complément au chapitre 3. Les conditions d'équilibrage sont données pour un type différent de mécanisme équilibrant à un parallélogramme, à être utilisé pour rendre le mécanisme parallèle plan à trois (3) degrés de liberté à actionneurs prismatiques (figure 3.1) statiquement équilibré.

#### C.1 Patte spéciale à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme (type *III*)

La figure C.1 montre la projection — dans le plan  $yz$  de  $\mathcal{R}$  — de la patte d'équilibrage à six (6) degrés de liberté de la section B.2 (voir figure B.3). Étant maintenant réduite à

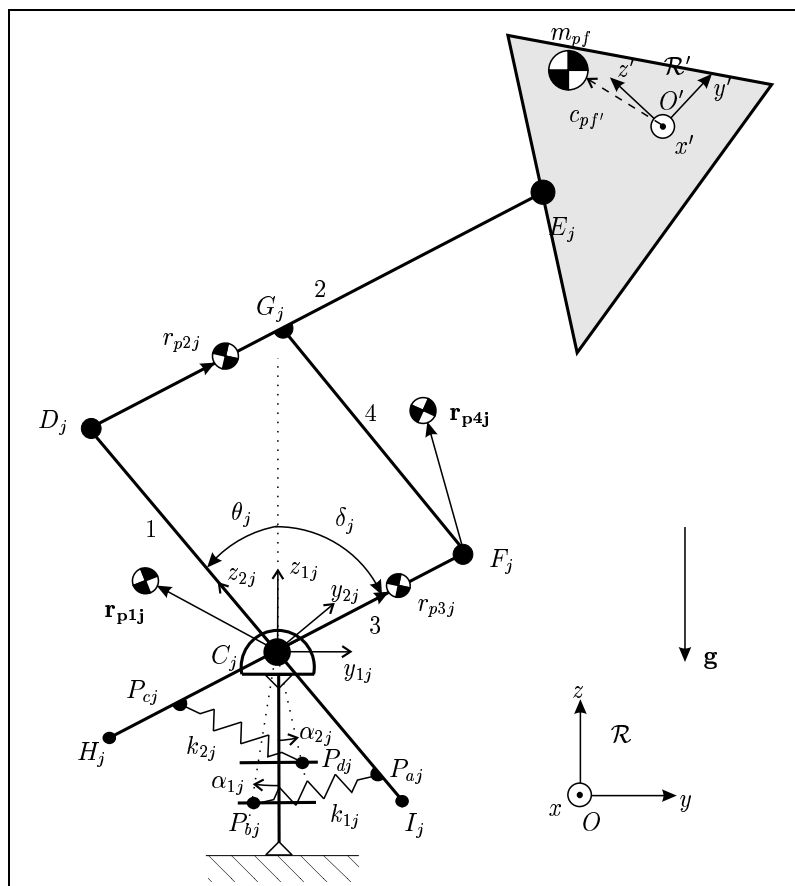


Figure C.1: Autre architecture de la  $j$ ème patte d'équilibrage à trois (3) d.d.l. à un parallélogramme: type *III*.

un mécanisme à trois (3) degrés de liberté, chaque patte ajoutée au mécanisme de base a la topologie suivante: deux membrures — les barres  $H_jF_j$  et  $I_jD_j$  — sont montées sur une articulation rotoïde au point  $C_j$ . Puis, au moyen d'une articulation rotoïde placée au point  $D_j$ , la barre  $I_jD_j$  est reliée à la membrure distale  $D_jE_j$  qui, elle, est attachée à l'effecteur du mécanisme à actionneurs prismatiques par une liaison rotoïde au point  $E_j$ . Finalement, une quatrième barre, soit la membrure  $F_jG_j$ , permet de compléter le parallélogramme. Cette membrure est liée au reste de la structure par des liaisons rotoïdes en  $F_j$  et  $G_j$ . Quant aux ressorts présents dans la structure de la patte, ils sont placés de la même manière que pour le cas spatial.

Par ailleurs, comme il est dit à la section 3.1, le fait que le mouvement ne soit possible que dans un plan  $yz$  force l'angle  $\gamma_j$  à être nul pour toute configuration du manipulateur, ce qui rend la matrice  $\mathbf{Q}_{1j}$  unitaire. Ainsi donc,

$$\mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.1})$$

En ce qui concerne la matrice  $\mathbf{Q}_{2j}$ , elle demeure la même qu'au chapitre 2, c'est-à-dire

$$\mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.2})$$

En se servant des vecteurs définis à la section B.2, on trouve ensuite l'expression du centre de masse global  $\mathbf{r}$  du manipulateur. Ainsi,

$$\mathbf{r} = \frac{m_{pf}\mathbf{c}_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{li}\mathbf{c}_{li} + m_{ui}\mathbf{c}_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 (m_{pkj}\mathbf{c}_{pkj})}{M} \quad (\text{C.3})$$

avec

$$M = m_{pf} + \sum_{i=1}^3 (m_{li} + m_{ui}) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 m_{pkj} \quad (\text{C.4})$$

Finalement, on obtient l'énergie potentielle totale pour le manipulateur. Celle-ci est donnée par

$$V = p_z \left[ L - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i}{\rho_i} \right) \right] +$$

$$q_{32} \left[ N_y - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iy}}{\rho_i} \right) \right] + q_{33} \left[ N_z - g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i b'_{iz}}{\rho_i} \right) \right] + g \sum_{i=1}^3 \left( \frac{D_i a_{iz}}{\rho_i} \right) + \sum_{j=1}^n (P_j \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (R_j \cos \theta_j) + S_z + \Omega \quad (\text{C.5})$$

avec les coefficients

$$D_i = m_{ui} d_{ui} - m_{li} d_{li}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (\text{C.6})$$

$$L = \left( m_{pf} + \sum_{i=1}^3 m_{ui} \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p3j} r_{p3j} + m_{p4j} l_{CjFj}] g - k_{2j} h_{2j} l_{2j} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \left( m_{pf} \mathbf{c}'_{pf} + \sum_{i=1}^3 [m_{ui} \mathbf{b}'_i] \right) g + \sum_{j=1}^n \left( \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p3j} r_{p3j} + m_{p4j} l_{CjFj}] g - k_{2j} h_{2j} l_{2j} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \mathbf{e}'_j \right) \quad (\text{C.8})$$

$$P_j = (m_{p1j} r_{p1jy} + m_{p4j} r_{p4jy}) g + k_{1j} h_{1j} l_{1j} \sin \alpha_{1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.9})$$

$$R_j = \left( m_{p2j} g - \frac{[m_{p2j} r_{p2j} + m_{p3j} r_{p3j} + m_{p4j} l_{CjFj}] g - k_{2j} h_{2j} l_{2j} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \right) l_{CjDj} + (m_{p2j} l_{CjDj} + m_{p4j} r_{p4jz}) g - k_{1j} h_{1j} l_{1j} \cos \alpha_{1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.10})$$

$$S_z = g \sum_{i=1}^3 (m_{li} a_{iz}) + g \sum_{j=1}^n \left( \left[ m_{p1j} + m_{p2j} \left( 1 - \frac{r_{p2j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p3j} \left( 1 - \frac{r_{p3j}}{l_{p2j}} \right) + m_{p4j} \left( 1 - \frac{l_{CjDj}}{l_{p2j}} \right) \right] c_{jz} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{2j} h_{2j} l_{2j} c_{jz} \cos \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( k_{1j} [h_{1j}^2 + l_{1j}^2] + k_{2j} [h_{2j}^2 + l_{2j}^2] \right) \quad (\text{C.11})$$

Quant au coefficient  $\Omega$ , il est donné par

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \left( \frac{k_{2j} h_{2j} l_{2j} \sin \alpha_{2j}}{l_{p2j}} \times [p_y - c_{jy} + q_{22} e'_{jy} + q_{23} e'_{jz} + l_{CjDj} \sin \theta_j] \right) \quad (\text{C.12})$$

Le manipulateur sera statiquement équilibré quand l'ensemble de conditions donné par

$$D_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (\text{C.13})$$

$$L = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (\text{C.15})$$



$$P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.16})$$

$$R_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.17})$$

sera satisfait, menant ainsi à

$$V = S_z = \text{cte} \quad (\text{C.18})$$

Cependant, cet équilibre statique ne sera atteint, pour toute configuration du manipulateur, que si

$$\Omega = 0 \quad (\text{C.19})$$

et cette dernière condition sera toujours satisfaite lorsque

$$\alpha_{2j} = 0 \text{ ou } \pi, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.20})$$