

NATHANIEL ZOSO

**MODÉLISATION, SIMULATION ET COMMANDE D'UN  
ROBOT PARALLÈLE PLAN À CÂBLES SOUS-ACTIONNÉ**

Mémoire présenté

à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2011

# Résumé

Un manipulateur parallèle à câbles possède des caractéristiques intéressantes comme sa vitesse de mouvement, sa légèreté et son faible coût. Ces avantages sont renforcés en utilisant le sous-actionnement, qui permet de diminuer le coût et la complexité du mécanisme. En revanche, sa commande est plus complexe car elle doit tenir compte des propriétés dynamiques du manipulateur. Afin de concevoir un robot spatial sous-actionné et entraîné à l'aide de câbles, il faut d'abord arriver à contrôler une version plane du manipulateur.

Le mécanisme étudié dans ce mémoire est un robot principalement basé sur un mécanisme à quatre barres, dont deux barres (les câbles) sont de longueur variable, et dont toutes les liaisons rotoïdes sont libres. En fait, ce robot peut rejoindre une position et une orientation (trois degrés de liberté) prescrite en contrôlant uniquement la longueur des deux câbles et en exploitant les équations dynamiques.

La première étape est de compléter des analyses géométrique, cinématique et dynamique. Les équations ainsi obtenues sont vérifiées à l'aide d'un simulateur permettant de prédire le comportement du robot. Ensuite, un algorithme de planification de trajectoire est basé sur la nature oscillatoire du mécanisme, en optimisant les trajectoires des câbles pour que la variable libre rejoigne l'objectif à la fin de chaque oscillation.

La stratégie de commande est finalement élaborée et testée sur un robot virtuel, avant d'être utilisée sur un prototype. Les résultats en simulation ainsi qu'expérimentaux sont présentés pour diverses trajectoires, démontrant ainsi les capacités du manipulateur étudié. La commande ainsi développée s'est révélée très précise, rapide et robuste à des erreurs de diverses natures.

# Avant-propos

*“Scientists investigate that which already is;  
Engineers create that which has never been.”*

*- Albert Einstein*

Cette phrase explique parfaitement ce qui m’a attiré dans une carrière en génie, et dans une maîtrise de robotique à l’Université Laval. Mon expérience au laboratoire de robotique m’a ouvert de nouveaux horizons. La chance de travailler sur des projets novateurs, avec des concepts qui ouvrent l’esprit et avec des gens qui transmettent leur passion fut une incroyable opportunité, une croissance personnelle.

En premier, je tiens à remercier Clément Gosselin, pour m’avoir toujours ouvert sa porte, m’avoir conseillé, m’avoir enseigné (tout ce que je sais sur la robotique!) et avoir partagé avec moi sa passion sans limite. Je suis honoré d’avoir pu faire un bout de chemin avec lui.

Merci aussi aux professionnels de recherche, Boris, Simon et Thierry, sans qui je ne me serais pas rendu à ce point. J’aimerais aussi remercier les autres membres du laboratoire qui, eux aussi, m’ont aidé à compléter ce projet.

Finalement, un grand merci aussi aux professeurs Éric Poulin et Marc Richard, pour leurs conseils et suggestions qui ont, sans aucun doute, fait de ce texte un meilleur mémoire.

*“I cannot change the laws of physics!”*

*- Lt. Cmdr. Montgomery Scott*

D’une façon plus personnelle, je veux en premier remercier Stéphanie, ma fiancée et bientôt mon épouse, pour sa patience, sa joie de vivre, pour avoir été ma force durant ces deux années, et pour avoir toujours été ma lumière au fond du tunnel.

Je veux aussi remercier ma famille et mes amis, qui ont tous aidé à façonner mon chemin et qui m’ont aidé à arriver où j’en suis, pour m’avoir motivé et encouragé lorsque j’en avais besoin, et que le tunnel semblait ne jamais finir. Merci à mes parents qui ont fait tant de sacrifices pour moi, qui m’ont toujours poussé à donner le meilleur de moi-même et à me dépasser. Merci à mon oncle, qui m’a fait découvrir les sciences et l’ingénierie et qui a toujours été là pour me conseiller.

Je remercie aussi le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG), le Fond Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) et Clément Gosselin pour leur appui financier.

Et finalement, un grand merci à tous ceux qui m’ont aidé à avoir la vie que j’ai maintenant, si elle était un peu mieux la perfection serait de ce monde.

*To Stephanie, my better half.*

*To those who are*

*To those who were*

*And to those who will be.*

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation de la géométrie, cinématique et dynamique du système</b>	<b>6</b>
1.1 Notations et considérations générales . . . . .	7
1.2 Géométrie . . . . .	7
1.2.1 Degrés de liberté et sous-actionnement . . . . .	9
1.2.2 Problème géométrique inverse (PGI) . . . . .	10
1.2.3 Problème géométrique direct (PGD) . . . . .	11
1.3 Analyse cinématique . . . . .	12
1.3.1 Équations de vitesse . . . . .	12
1.3.2 Lieux de singularité . . . . .	13
1.4 Analyse dynamique . . . . .	17
1.4.1 Équation dynamique . . . . .	17
1.4.2 Espace statiquement atteignable . . . . .	20
1.5 Conclusion . . . . .	23

<b>2</b>	<b>Conception du simulateur</b>	<b>24</b>
2.1	Mécanisme d'intégration et calcul à pas fixe . . . . .	25
2.2	Calcul des angles, vitesses et accélérations angulaires . . . . .	26
2.2.1	Calcul des angles . . . . .	26
2.2.2	Calcul des vitesses angulaires . . . . .	27
2.2.3	Calcul des accélérations angulaires . . . . .	27
2.2.4	Calcul des accélérations et résolution de l'équation dynamique .	29
2.3	Validation des équations . . . . .	29
2.4	Premier exemple de simulation . . . . .	31
2.5	Étude sur la méthode d'intégration . . . . .	34
2.6	Simulateur final . . . . .	38
2.7	Conclusion . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Planification de trajectoires locales</b>	<b>40</b>
3.1	Détermination de la structure . . . . .	41
3.1.1	Utilité de fonctions d'excitation . . . . .	41
3.1.2	Équations paramétriques . . . . .	42
3.2	Détermination de la fréquence . . . . .	43
3.2.1	Détermination de la fréquence naturelle . . . . .	44
3.2.2	Détermination de la position à l'équilibre . . . . .	45
3.2.3	Détermination de la fréquence d'excitation . . . . .	46
3.3	Détermination du déphasage . . . . .	47
3.4	Équations paramétriques finales . . . . .	49
3.5	Conclusion . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Séquence de commande et résultats de simulation</b>	<b>52</b>
4.1	Optimisation des paramètres libres . . . . .	53
4.1.1	Recherche à deux dimensions . . . . .	53
4.1.2	Étude sur l'effet des paramètres libres . . . . .	55
4.1.3	Méthode d'optimisation finale . . . . .	60
4.2	Définition des objectifs locaux . . . . .	62
4.3	Trajectoires simulées et performances . . . . .	66
4.4	Conclusion . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Développement d'un prototype et résultats expérimentaux</b>	<b>73</b>
5.1	Description du prototype . . . . .	74
5.1.1	Montage mécanique . . . . .	74
5.1.2	Commande informatique . . . . .	79

5.2	Trajectoires expérimentales et résultats . . . . .	80
5.2.1	Première trajectoire et observations . . . . .	80
5.2.2	Seconde trajectoire et observations . . . . .	82
5.3	Conclusion . . . . .	85
	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>
	<b>A Résultats supplémentaires en simulation</b>	<b>93</b>
A.1	Première trajectoire . . . . .	94
A.2	Deuxième trajectoire . . . . .	98
A.3	Troisième trajectoire . . . . .	99
	<b>B Résultats expérimentaux supplémentaires</b>	<b>106</b>
B.1	Première trajectoire . . . . .	107
B.2	Deuxième trajectoire . . . . .	112
B.3	Troisième trajectoire . . . . .	117

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres de simulation . . . . .	32
2.2	Erreurs des méthodes d'intégration par rapport à Matlab pour une demi-période d'oscillation . . . . .	35
2.3	Temps de calcul pour les algorithmes d'intégration . . . . .	37
4.1	Objectifs de simulation . . . . .	67
4.2	Paramètres de simulation . . . . .	67
5.1	Paramètres du robot réel . . . . .	78
5.2	Atteinte des objectifs, premier essai . . . . .	81
5.3	Atteinte des objectifs, second essai . . . . .	83
A.1	Objectifs de simulation, trajectoire 1 . . . . .	94
A.2	Atteinte des objectifs, trajectoire 1 . . . . .	96
A.3	Objectifs de simulation, trajectoire 2 . . . . .	99
A.4	Atteinte des objectifs, trajectoire 2 . . . . .	99
A.5	Atteinte des objectifs, trajectoire 3 . . . . .	103
B.1	Atteinte des objectifs, trajectoire 1 . . . . .	107
B.2	Atteinte des objectifs, trajectoire 2 . . . . .	112

# Liste des figures

1	Exemple de mécanisme entraîné à l'aide de câbles (Bosscher et Ebert-Uphoff (2004)). . . . .	2
2	Exemple de trajectoire pour l'Acrobot (Lefrançois (2010)). . . . .	3
1.1	Représentation schématique du mécanisme étudié et notation associée.	9
1.2	Longueur $b$ (en m) pour une orientation $\phi$ de -0,6 radians à laquelle existe une singularité de type II. . . . .	16
1.3	Longueur $b$ (en m) pour une orientation $\phi$ de 0 radians à laquelle existe une singularité. On note $b = 0,75m = a$ , la singularité est de type III. . . . .	16
1.4	Forces agissant sur l'effecteur. . . . .	18
1.5	Orientation atteignable de l'effecteur (en rad) selon la longueur des câbles (en m). . . . .	21
1.6	Orientations constantes de l'effecteur (en rad) selon la longueur des câbles (en m). . . . .	21
1.7	Espace statiquement atteignable. . . . .	22
1.8	Trajectoires possibles pour une orientation de l'effecteur constante. . . . .	22
1.9	Force minimale des câbles (N) dans l'espace statiquement atteignable. . . . .	23
2.1	Résultat de la simulation avec angle de départ de 0,1 radians, vitesse nulle et câbles à longueur constante. . . . .	32
2.2	Valeur de l'angle $\phi$ ainsi que de ses deux premières dérivées lors de la simulation. . . . .	33
2.3	Erreurs détectées par les trois tests validant l'exactitude du modèle et du simulateur même. . . . .	33

2.4	Comparaison de diverses méthodes d'intégration. . . . .	36
2.5	Comparaison de diverses méthodes d'intégration, détail sur l'erreur. . .	36
2.6	Erreurs détectées par les trois tests validant l'exactitude du modèle, intégration ODE45. . . . .	37
2.7	Erreurs détectées par les trois tests validant l'exactitude du modèle, méthode de 1er ordre. . . . .	38
3.1	Illustration d'un pendule simple à longueur variable (Pinsky et Zevin (1999)). . . . .	42
3.2	Valeur de l'orientation de l'effecteur suite à des excitations sinusoïdales de 2 cm à diverses fréquences. . . . .	47
3.3	Valeur de l'orientation de l'effecteur suite à des excitations sinusoïdales de 2 cm à la fréquence naturelle selon divers déphasages. . . . .	48
3.4	Évolution de l'orientation de l'effecteur durant une demi-période avec diverses combinaisons de déphasages. . . . .	49
4.1	Orientation finale de l'effecteur selon diverses combinaisons d'excitations. . . . .	56
4.2	Vitesse angulaire finale de l'effecteur selon diverses combinaisons d'excitations. . . . .	56
4.3	Courbes de niveau de l'orientation finale. . . . .	57
4.4	Courbes de niveau de la vitesse angulaire finale. . . . .	58
4.5	Valeurs finales de l'orientation de l'effecteur et de sa vitesse en fonction d'un seul paramètre libre. . . . .	59
4.6	Valeurs finales de l'orientation de l'effecteur et de sa vitesse (détail). . .	60
4.7	Diagramme 1 : processus de décision d'objectif local, objectif global sur la même sextique tricirculaire. . . . .	63
4.8	Diagramme 2 : processus de décision d'objectif local, objectif global sur une autre sextique tricirculaire. . . . .	64
4.9	Diagramme 3 : schéma du contrôleur global. . . . .	66
4.10	Objectifs à rejoindre dans la trajectoire simulée. . . . .	68
4.11	Résultat de la trajectoire simulée. . . . .	70
4.12	Trajectoire simulée, détail sur les objectifs locaux. . . . .	71
4.13	Évolution de l'erreur lors de la rencontre des objectifs locaux. . . . .	72
5.1	Modèle CAO (Computer Assisted Ordering) de l'effecteur. . . . .	75
5.2	Modèle CAO de l'enrouleur double. . . . .	75
5.3	Modèle CAO de l'enrouleur simple. . . . .	76

5.4	Photo de l'arrangement des enrouleurs simples. . . . .	77
5.5	Modèle CAO du montage avec les câbles droits. . . . .	77
5.6	Modèle CAO du montage avec les câbles croisés. . . . .	78
5.7	Valeurs expérimentales de l'orientation de l'effecteur et des objectifs locaux.	81
5.8	Valeurs expérimentales de la longueur des câbles. . . . .	82
5.9	Valeurs expérimentales de l'orientation de l'effecteur et des objectifs locaux.	83
5.10	Valeurs expérimentales de la longueur des câbles. . . . .	84
A.1	Résultats de la première trajectoire simulée. . . . .	95
A.2	Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 1. . .	96
A.3	Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 1.	97
A.4	Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 1. . . .	97
A.5	Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 1. . . . .	98
A.6	Résultats de la seconde trajectoire simulée. . . . .	100
A.7	Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 2. . .	101
A.8	Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 2.	101
A.9	Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 2. . . .	102
A.10	Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 2. . . . .	102
A.11	Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 3. . .	104
A.12	Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 3.	104
A.13	Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 3. . . .	105
A.14	Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 3. . . . .	105
B.1	Résultats de la première trajectoire simulée. . . . .	108
B.2	Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 1. . .	109
B.3	Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 1.	109
B.4	Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 1. . . .	110
B.5	Nombre de pas de temps nécessaires pour exécuter toute la commande.	110
B.6	Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 1. . . . .	111
B.7	Résultats de la seconde trajectoire simulée. . . . .	113
B.8	Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 2. . .	114
B.9	Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 2.	114
B.10	Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 2. . . .	115

B.11	Nombre de pas de temps nécessaires pour exécuter toute la commande, trajectoire 2. . . . .	115
B.12	Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 2. . . . .	116
B.13	Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 3. . .	117
B.14	Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 3.	118
B.15	Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 3. . . .	118
B.16	Nombre de pas de temps nécessaires pour exécuter toute la commande, trajectoire 3. . . . .	119
B.17	Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 3. . . . .	120

# Liste des symboles

$x$	Coordonnée cartésienne verticale (sens positif vers le bas (gravité))
$y$	Coordonnée cartésienne horizontale (sens positif vers la droite)
$\phi$	Orientation de l'effecteur
$\theta_1$	Angle que fait le premier câble avec la verticale
$\theta_2$	Angle que fait le second câble avec la verticale
$\rho_1$	Longueur du premier câble
$\rho_2$	Longueur du second câble
$A, B, P$	Points d'attache des câbles 1 et 2 respectivement, pointe de l'effecteur
$a, b, d, f$	Paramètres géométriques du systèmes, tels qu'à la figure 1.1
$m, I$	Masse et inertie du systèmes, tels qu'à la figure 1.1
$\mathbf{Q}$	Matrice de rotation d'un angle phi dans le plan du robot
$\mathbf{E}$	Matrice représentant les multiplications vectorielles en deux dimensions
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$	Vecteurs unitaires orthornormés formant le repère de base
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	Vecteurs unitaires donnant la direction des câbles (de bas en haut)

# Introduction

## Mise en situation

L'histoire de la robotique est jalonnée d'avancées technologiques, certaines remontant loin dans le passé. Depuis la Grèce antique où des horloges pneumatiques et hydrauliques apparaissaient, en passant par Al-Jazari au Moyen-Âge et Léonard de Vinci à la Renaissance, jusqu'à l'invention en 1921 du mot robot, les manipulateurs autonomes font leur place dans notre vie. Dès les années 1940 (brevet Pollard et Willard (1942)) et possiblement même dès les années 1930 (brevet Gwinnett (1931)), des mécanismes parallèles commencent à faire leur apparition.

Ces manipulateurs diffèrent radicalement de leurs cousins à l'architecture sérielle, commercialisés dès les années 1960 (brevet Devol (1961)). Alors qu'un manipulateur sériel est formé d'une chaîne cinématique simple, où l'effecteur et la base sont reliés par une seule branche, un manipulateur parallèle est formé d'une chaîne cinématique complexe, où l'effecteur et la base sont reliés par plusieurs branches. Un mécanisme parallèle a l'avantage d'être plus léger, rapide et d'avoir moins d'inertie, comme tous les moteurs peuvent être fixés à la base au lieu d'être répartis sur les membrures en mouvement. Cependant, il a tendance à être plus volumineux et à avoir un espace de travail restreint.

C'est dans ce contexte que les mécanismes parallèles à câbles ont été développés (voir figure 1). Plusieurs publications couvrent ces mécanismes dans la littérature, parmi lesquels Sahin et Notash (2007), Kobayashi et Takahashi (1998), Deschênes et collab. (2007), Meunier (2006), Yamamoto et collab. (2004) et Abdullah et Agrawal (2002). Fonctionnant en principe comme un mécanisme parallèle à membrures rigides, un manipulateur à câbles est par contre beaucoup plus léger et rapide, à cause des faibles masse et inertie des câbles. Il a aussi un espace de travail beaucoup plus grand grâce à l'enroulement des câbles, qui permettent à l'effecteur d'être très loin de sa base, et de réduire cette distance presque à zéro avec de très grandes accélérations. Finalement, les câbles étant si peu onéreux par rapport aux pattes rigides, ces mécanismes ont l'avantage d'être très peu dispendieux, justifiant l'intérêt que la recherche et l'industrie leur apportent. Divers systèmes, tels que le Skycam (Cone (1985)), le ROBOCRANE (Albus et collab. (1993)) et le FALCON (Kawamura et collab. (1995)), sont largement connus aujourd'hui.

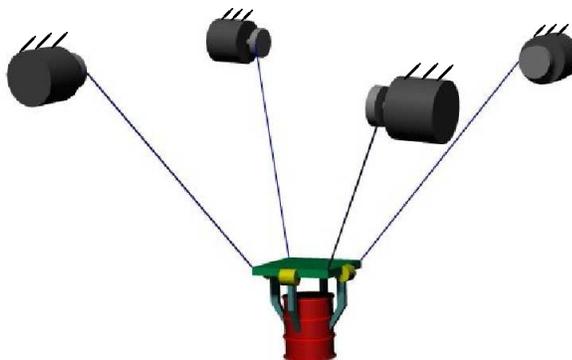


FIGURE 1 – Exemple de mécanisme entraîné à l'aide de câbles (Bosscher et Ebert-Uphoff (2004)).

Cependant, les mécanismes entraînés à l'aide de câbles ont le désavantage d'avoir une capacité plus limitée à transmettre des forces, comme les câbles peuvent opérer en tension, mais pas en compression. De plus, les câbles vont se courber si la tension est insuffisante. Pour régler ce problème, la solution habituelle est d'utiliser des manipulateurs actionnés de façon redondante, soit ayant plus d'actionneurs que de degrés de liberté. Le problème qui s'ensuit est une augmentation des coûts, de la complexité d'utilisation et de calibration (Bosscher et collab. (2005)), ainsi que du matériel nécessaire au manipulateur. Ceci diminue l'intérêt qu'ont ces mécanismes pour l'industrie.

Ce mémoire se place dans une suite d'études sur le principe d'un manipulateur sous-

actionné à câbles. Le sous-actionnement par définition implique un nombre d'actionneurs inférieur au nombre de degrés de liberté. Un des premiers exemples est l'Acrobot (Spong (1995), voir figure 2), un pendule double où la première articulation est libre, mais la seconde est actionnée, un peu comme un enfant sur une balançoire. En bougeant ses jambes, l'enfant est capable de faire bouger la balançoire et donc de rejoindre une hauteur de plus en plus grande. À la figure 2, une séquence de positions est montrée, où le robot part de sa position d'équilibre pour rejoindre un objectif.

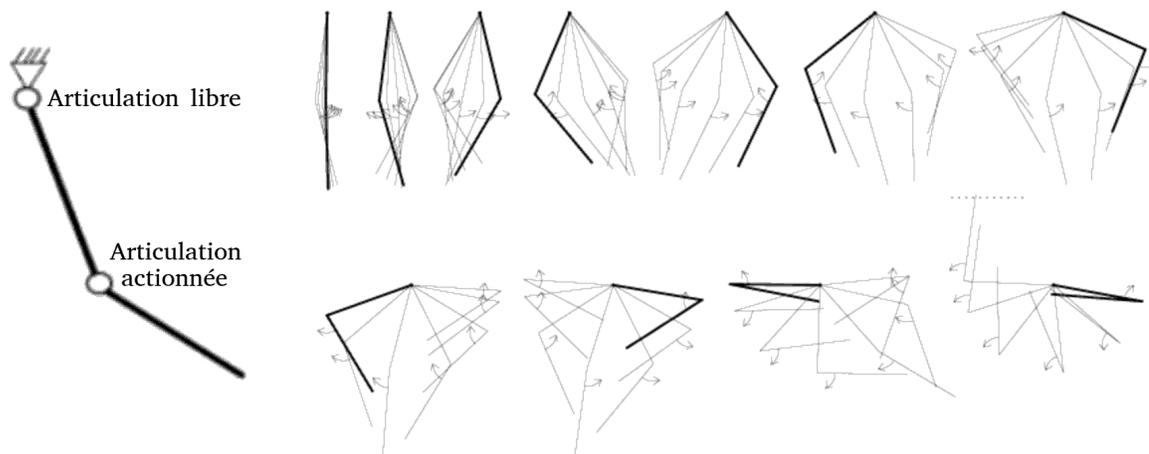


FIGURE 2 – Exemple de trajectoire pour l'Acrobot (Lefrançois (2010)).

Du point de vue industriel, en retirant des actionneurs, les coûts sont diminués, puisqu'un nombre inférieur de moteurs, câbles et attaches mécaniques sont nécessaires. Cependant, cela a pour effet de générer des contraintes supplémentaires. En effet, le mouvement des articulations libres est relié, par les équations dynamiques, à celui des articulations actionnées. Alors qu'auparavant il était possible de suivre un grand nombre de trajectoires cinématiquement possibles, plusieurs deviennent dynamiquement non réalisables.

Bien entendu, le défi supplémentaire causé par l'augmentation de la complexité de la commande est très intéressant pour les chercheurs (Fantoni et Lozano (2001) et Zanotto et collab. (2011), qui ont évalué de façon critique les travaux de Lefrançois (2010)). Il faut au départ une bonne compréhension des phénomènes décrits dans les équations dynamiques, puis une méthode de planification de trajectoires très rigoureuse. Des études précédentes (Lefrançois (2010), Lefrançois et Gosselin (2010) et Gosselin et collab. (2010)) montrent que, dans le cas d'un mécanisme sous-actionné à câbles, cela est faisable par la planification de trajectoires locales, en exploitant leur

nature oscillante. Cette méthode correspond à définir une série d'objectifs à atteindre, appelés objectifs globaux. La commande les décompose en objectifs locaux atteints à chaque demi-période d'oscillation du manipulateur, permettant après un certain temps d'atteindre l'objectif global.

Dans plusieurs cas en robotique, il faut que le robot commence à une configuration donnée et se rende à une nouvelle configuration, sans égard à la trajectoire reliant ces deux points. Ces cas peuvent passer d'applications industrielles (quai de chargement, construction, gestion d'entrepôts) à des applications ludiques et générales (domotique, divertissement), en passant par des applications de sécurité (systèmes de surveillance et caméras) et des applications de coopération humain-robot (le mouvement non contraint d'un manipulateur léger offre peu de risques d'accidents d'écrasement (Haddadin et collab. (2008))). Des exemples plus concrets incluent une évolution du Skycam (Cone (1985)) et du ROBOCRANE (Albus et collab. (1993)). Dans ces exemples, un mécanisme sous-actionné à câbles est très prometteur.

## Motivation et méthodologie

Ce projet de recherche continue les études sur le principe d'un manipulateur sous-actionné à câbles. Une version préalable s'attardait sur une architecture sérielle simple pour valider les concepts de base. Une architecture plane et parallèle est donc l'étape suivante en vue de concevoir un jour une architecture spatiale parallèle. Les étapes ont commencé par l'étude des équations cinématiques et dynamiques afin de mieux comprendre le fonctionnement du manipulateur et pouvoir le prédire grâce à un simulateur. Par la suite des méthodes de commande ont été testées et raffinées en simulation, pour être finalement validées expérimentalement à l'aide d'un prototype.

## Structure du mémoire

Ce mémoire maintient une structure logique et chronologique par rapport au projet de recherche. Le premier chapitre porte sur les équations géométriques, cinématiques et dynamiques du manipulateur étudié, s'arrêtant entre autres sur les notions de degrés

de liberté, de jacobienne, de singularités et d'espace de travail statique.

Le second chapitre indique les étapes ayant mené à la conception d'un simulateur, ou robot virtuel. Le mécanisme de calcul à pas fixe et intégration y est expliqué, suivi de la méthode de calcul des angles, des vitesses et accélérations angulaires. Des méthodes de validation des équations dynamiques sont présentées, et les résultats de premiers tests de simulations confirment l'exactitude du travail accompli.

Le troisième chapitre détermine la structure des équations d'excitation des câbles en identifiant les paramètres pour optimiser la réponse du système par rapport à l'excitation, connaissant la nécessité d'établir des trajectoires locales. Une fois ces paramètres connus à l'aide du robot virtuel, des équations ayant chacun un paramètre libre sont établies.

Le quatrième chapitre se base sur les équations du chapitre précédent pour trouver une méthode de commande adaptée. L'influence des paramètres libres sur le comportement du manipulateur est d'abord étudiée. Par la suite, une structure de choix d'objectifs locaux est arrêtée et testée à l'aide du simulateur utilisé préalablement. Les résultats de ces premières expériences y sont présentés, ainsi qu'à l'annexe A.

Le cinquième et dernier chapitre présente le prototype, tant sa structure mécanique que sa partie informatique. Suite à la présentation d'un premier test, des modifications sont apportées à la commande. Les trajectoires présentées au chapitre précédent ainsi qu'à l'annexe A sont validées sur le prototype. Les résultats expérimentaux y sont présentés et analysés, ainsi qu'à l'annexe B, concluant ainsi ce mémoire.

# Chapitre 1

## Présentation de la géométrie, cinématique et dynamique du système

Tout d'abord, la géométrie du mécanisme sera présentée, ainsi que les choix qui ont mené à sa conception. Puis, une étude cinématique ainsi qu'une étude dynamique seront réalisées, avec une étude des lieux de singularité et de l'espace de travail statique.

## 1.1 Notations et considérations générales

Dans ce mémoire, la notation mathématique suivante est utilisée. Une lettre en caractère standard, tel que  $x$  ou  $X$  fait référence à un scalaire, et une lettre en caractère gras représente un vecteur ( $\mathbf{x}$ ) ou une matrice ( $\mathbf{X}$ ). Le sens positif des rotations est toujours dans le sens trigonométrique.

Les symboles utilisés au long de ce mémoire sont définis dans la liste des symboles. D'autre part, les symboles uniquement utilisés dans un contexte seront définis au moment de leur utilisation.

Finalement, les unités utilisées sont celles du Système International (SI) (Taylor).

En ce qui concerne le mécanisme, il évolue dans un plan, et il est pris pour acquis qu'il est confiné à ce plan de référence. Toute équation ou paramètre faisant référence à un autre plan n'est pas détaillée. De plus, le manipulateur est suspendu par des câbles. Pour simplifier les calculs, les câbles sont considérés comme des corps rigides à masse nulle, tout en tenant compte que ces corps ne peuvent agir qu'en traction, pas en compression. La tension doit avoir une valeur minimale pour que les câbles ne fléchissent pas. Finalement, il est supposé que le mécanisme évolue dans un vide sans friction.

## 1.2 Géométrie

La géométrie du robot à l'étude est présentée à la figure 1.1. Il consiste en une structure comportant deux moteurs, enroulant chacun un câble. Chaque câble repose sur une poulie avant de se rattacher à l'effecteur, qui lui reste suspendu. Ceci revient donc à un mécanisme parallèle plan dont chaque branche est un manipulateur RPR (Rotoïde-Prismatique-Rotoïde) et dont on n'actionne que la seconde articulation. Les deux articulations prismatiques contraignent alors deux degrés de liberté de ce mécanisme plan à 3 degrés de liberté. Ce manipulateur se rapporte ainsi, à chaque instant donné, à un mécanisme à quatre barres dont la position et l'orientation de la barre supérieure est fixe, c'est à dire que ce membre est le membre fixe.

Cette topologie est intéressante à étudier comme elle peut être augmentée pour évoluer dans un espace, au lieu d'un plan. Un robot sériel peut évoluer aisément dans un plan, comme l'a démontré Simon Lefrançois dans son projet de maîtrise (Lefrançois (2010)). Cependant, dans un espace, il faut contraindre plus de deux degrés de liberté, car le sous-actionnement serait alors trop difficile à contrôler. Or, une structure sérielle est plus complexe à augmenter dans ce contexte. Pour un robot parallèle, il suffit d'utiliser un effecteur adapté, et d'utiliser trois, quatre ou cinq câbles pour rattacher l'effecteur à la structure. Il reste ainsi trois, deux ou un degré(s) de libertés. De plus, le comportement de ce mécanisme est similaire dans le plan ou dans l'espace, le premier étant un cas particulier du second.

Il est aussi intéressant de noter que, lors des tests pratiques, un effecteur spatial est utilisé, et quatre câbles relient l'effecteur à la structure. Les câbles sont effectivement utilisés deux par deux, tout simplement pour tenter de contraindre le déplacement du robot à un plan, comme le prototype lui est en trois dimensions. Ce même prototype pourra être ré-utilisé lors de la conception d'une méthode de planification de trajectoire et commande dans l'espace.

Les paramètres définissant la structure sont les suivants :

- $a$  donne la distance entre les points d'attache des deux câbles dans la structure supérieure ;
- $b$  donne la distance entre les points d'attache des deux câbles sur l'effecteur (nommés ci-après  $A$  et  $B$ ) ;
- $d$  donne la distance entre la droite traversant  $A$  et  $B$  et le centre de masse ;
- $f$  donne la distance entre la droite traversant  $A$  et  $B$  et le point de référence de l'effecteur (nommé ci-après  $P$ ) ;
- $m$  donne la masse de l'effecteur ;
- $I$  donne l'inertie de l'effecteur autour de son centre de masse.

Pour définir la configuration du robot, les coordonnées cartésiennes sont définies par  $\mathbf{t} = [x, y, \phi]^T$ , dont les composantes représentent respectivement la position  $(x, y)$  dans le repère de la structure fixe et l'orientation de l'effecteur. Le vecteur des coordonnées articulaires augmenté est  $\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \phi]^T$ , qui représentent la longueur des deux câbles et l'orientation de l'effecteur.

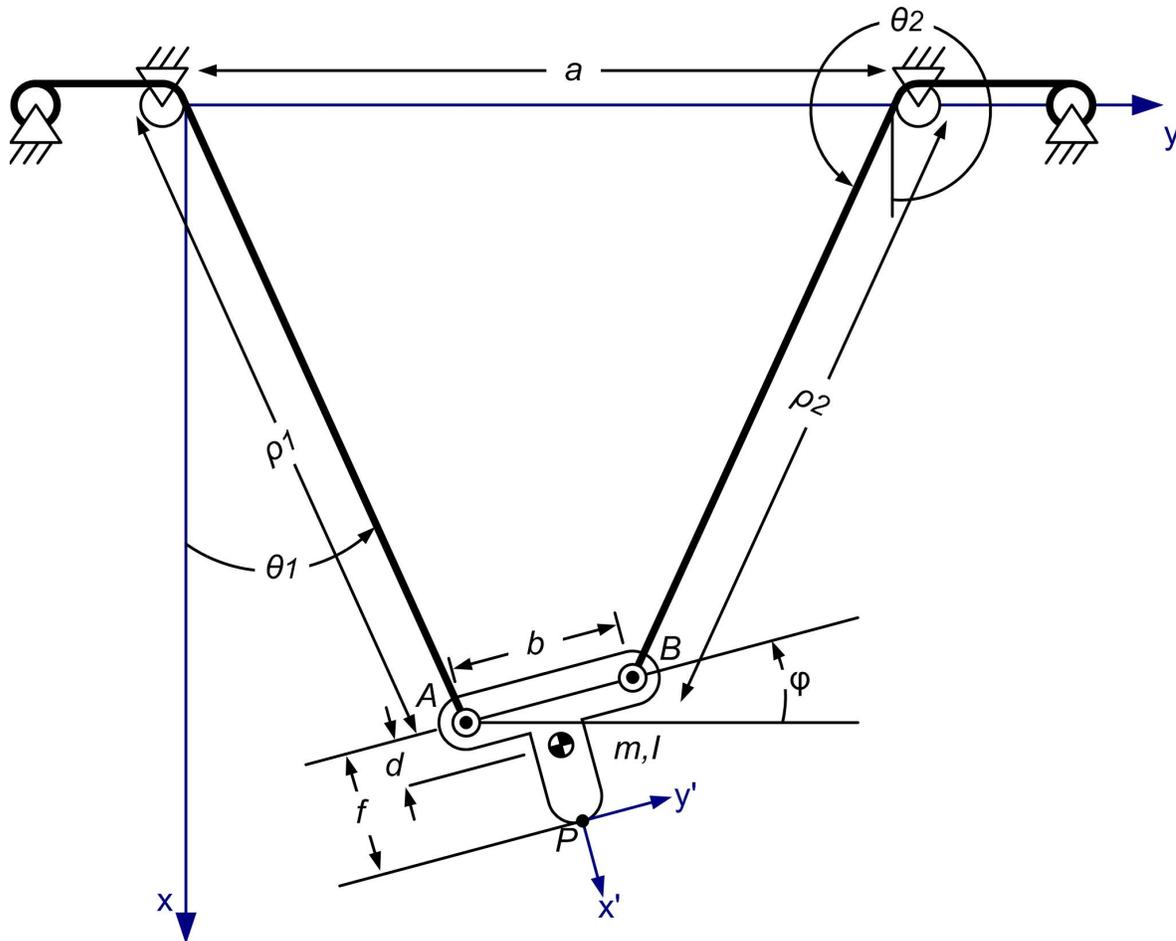


FIGURE 1.1 – Représentation schématique du mécanisme étudié et notation associée.

### 1.2.1 Degrés de liberté et sous-actionnement

La formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach, connue aussi sous le nom de critère de mobilité général, permet de connaître le nombre de degrés de liberté du manipulateur. Ce nombre représente le nombre de paramètres qu'il faut spécifier au mécanisme afin de connaître sa configuration à un instant donné. Le critère de mobilité général s'écrit ainsi :

$$\ell = h(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j k_i. \quad (1.1)$$

Ici,  $\ell$  représente le degré de liberté de la chaîne à l'étude,  $h$  représente la dimension de l'espace dans lequel le manipulateur évolue (3 pour un plan),  $n$  représente le nombre de corps rigides dans la chaîne cinématique,  $j$  représente le nombre d'articulations et

$k_i$  représente le degré de liberté de l'articulation  $i$ .

Comme indiqué au début de la section 1.2, le manipulateur étudié peut être simplifié comme deux manipulateurs RPR reliés à l'effecteur. Il y a six corps, soit le corps fixe, l'effecteur, et deux corps pour chaque câble (reliés entre eux par une articulation prismatique). Il y a six articulations, les deux branches RPR étant composées de trois articulations chacune.

Le mécanisme étudié a donc les paramètres suivants :

$$h = 3, \quad n = 6, \quad j = 6, \quad k_i = 1 \quad \forall i. \quad (1.2)$$

En remplaçant ces paramètres dans le critère de mobilité général, on trouve  $\ell = 3$  degrés de liberté. Cependant, ces trois degrés de liberté ne sont pas tous actionnés. En effet, pour les contraindre, il n'y a que deux actionneurs, soit les deux articulations prismatiques. La différence donne un degré de liberté non-contraint, ce qui explique pourquoi ce robot est sous-actionné. En procédant par un autre chemin, si les longueurs de câbles sont fixées, on fixe les articulations prismatiques. Le manipulateur est donc composé de quatre corps et de quatre articulations. En remplaçant ces nouvelles valeurs, on trouve  $\ell = 1$ , ce qui montre qu'un degré de liberté reste, même après avoir fixé les actionneurs.

### 1.2.2 Problème géométrique inverse (PGI)

Connaissant les coordonnées cartésiennes  $x, y$  du point  $P$  et  $\phi$ , il est très simple de retrouver  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Soit  $\mathbf{p}_A$  le vecteur des coordonnées du point  $A$  ( $a_x$  et  $a_y$  pour les coordonnées respectives  $x$  et  $y$ ),  $\mathbf{p}$  le vecteur des coordonnées de l'effecteur  $P$ , et  $\mathbf{r}_{PA}$  est le vecteur reliant  $A$  à  $P$  dans le repère de l'effecteur, on peut trouver ce qui suit :

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p} + \mathbf{Q} [\mathbf{r}_{PA}]_{R'} = \begin{bmatrix} x - f \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \\ y - f \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où par définition

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Connaissant  $\mathbf{p}_A$ , on peut trouver  $\rho_1$  et  $\theta_1$  :

$$\rho_1 = \sqrt{\left(x - f \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi\right)^2 + \left(y - f \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi\right)^2} \quad (1.5)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(a_x, a_y). \quad (1.6)$$

où  $\theta_i$  est l'angle entre l'axe des  $x$  du repère fixe et la direction du câble  $i$ .

Similairement, avec  $\mathbf{p}_B$  vecteur des coordonnées du point  $B$  ( $b_x$  et  $b_y$  pour les coordonnées respectives  $x$  et  $y$ ),

$$\mathbf{p}_B = \begin{bmatrix} x - f \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \\ y - f \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\rho_2 = \sqrt{\left(x - f \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi\right)^2 + \left(y - f \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi - a\right)^2} \quad (1.8)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(b_x, b_y). \quad (1.9)$$

### 1.2.3 Problème géométrique direct (PGD)

Pour le PGD, il faut partir de la prémisse que des encodeurs mesurent  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .  $\mathbf{p}_A$  et  $\mathbf{p}_B$  sont calculés en premier.

$$\mathbf{p}_A = \begin{bmatrix} \rho_1 \cos \theta_1 \\ \rho_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_B = \begin{bmatrix} \rho_2 \cos \theta_2 \\ a + \rho_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

En définissant les vecteurs de base orthonormés comme suit,

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

on trouve aussi

$$\phi = \text{atan2}\left((\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A)^T \mathbf{e}_y, (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A)^T \mathbf{e}_x\right) \quad (1.12)$$

ce qui donne, en se référant à l'équation 1.3,

$$x = \mathbf{p}_A^T \mathbf{e}_x + f \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \quad (1.13)$$

$$y = \mathbf{p}_A^T \mathbf{e}_y + f \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi. \quad (1.14)$$

Ayant résolu les problèmes géométriques direct et inverse, il est temps de passer à l'analyse cinématique.

## 1.3 Analyse cinématique

L'analyse cinématique donne les équations de vitesse, par lesquelles on peut trouver les matrices jacobiennes. Avec ces matrices, il est possible d'étudier les lieux de singularités.

### 1.3.1 Équations de vitesse

En partant des équations 1.5 et 1.8, on peut les dériver par rapport au temps pour obtenir un système d'équations de la forme

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}. \quad (1.15)$$

soit

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

En prenant les dérivées des équations, on trouve

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( x - f \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \right) \left( \dot{x} + \dot{\phi} f \sin \phi + \dot{\phi} \frac{b}{2} \cos \phi \right) \\ + \left( y - f \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi \right) \left( \dot{y} - \dot{\phi} f \cos \phi + \dot{\phi} \frac{b}{2} \sin \phi \right) \\ \left( x - f \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \right) \left( \dot{x} + \dot{\phi} f \sin \phi - \dot{\phi} \frac{b}{2} \cos \phi \right) \\ + \left( y - f \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi - a \right) \left( \dot{y} - \dot{\phi} f \cos \phi - \dot{\phi} \frac{b}{2} \sin \phi \right) \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Les matrices jacobiennes isolées deviennent donc

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_x \left( f \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi \right) \\ & & + a_y \left( -f \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \right) \\ b_x & b_y - a & b_x \left( f \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi \right) \\ & & + (b_y - a) \left( -f \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

où

$$a_x = \left( x - f \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \right) = \rho_1 \cos \theta_1 \quad (1.20)$$

$$a_y = \left( y - f \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi \right) = \rho_1 \sin \theta_1 \quad (1.21)$$

$$b_x = \left( x - f \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \right) = \rho_2 \cos \theta_2 \quad (1.22)$$

$$b_y = \left( y - f \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi \right) = \rho_2 \sin \theta_2 + a. \quad (1.23)$$

### 1.3.2 Lieux de singularité

En connaissant les matrices jacobiennes reliant les vitesses articulaires du manipulateur aux vitesses cartésiennes de l'effecteur, il est possible de trouver les lieux de singularités du mécanisme. Ces lieux de singularités peuvent se trouver aux limites externes de l'espace de travail ou à l'intersection de deux branches du problème géométrique direct. Il peut s'agir d'endroits où une vitesse cartésienne non-nulle se traduit par une vitesse articulaire nulle, et vice-versa. Ces lieux se traduisent donc par une perte de contrôle et sont donc à éviter, particulièrement s'ils se trouvent à l'intérieur de la zone d'intérêt où l'on veut utiliser le manipulateur.

Pour reconnaître les singularités dans l'équation 1.15, il suffit que le déterminant de  $\mathbf{J}$  ou de  $\mathbf{K}$  soit nul. Ceci arrive, en regardant  $\mathbf{K}$ , pour

$$\det(\mathbf{K}) = \rho_1 \rho_2 = 0 \quad (1.24)$$

soit une longueur nulle d'un des deux câbles. En fait, ceci est une singularité de type I, qui se situe à la limite de l'espace atteignable. Une telle singularité arrive lorsque pour une vitesse cartésienne nulle, il est possible d'avoir une vitesse articulaire non nulle. Ceci peut arriver dans l'espace atteignable (comme montré par l'équation ci-dessus), ou à la limite de l'espace articulaire atteignable. Ainsi, si nous limitons par exemple les longueurs des câbles entre 1 et 3 mètres, la singularité de type I nous intéressant n'est pas  $\rho_1$  ou  $\rho_2$  nuls, mais égal à 1 ou 3 mètres. Cependant, ces limitations étant imposées pour rester dans une zone facilement contrôlable, et non des limitations physiques dues aux enrouleurs, le robot n'entrera pas en singularité dans ou même autour de notre zone d'intérêt (câbles compris entre 1 et 3 mètres).

Deux autres types de singularités peuvent arriver en observant  $\mathbf{J}$ . En effet

$$\det(\mathbf{J}) = (a_x(b_y - a)) - (b_x a_y) = 0 \quad (1.25)$$

$$\left(y - \frac{a}{2}\right) b \sin \phi + (xb + af) \cos \phi - ax - bf = 0. \quad (1.26)$$

Si l'effecteur a la même longueur que la distance entre les points d'attaches ( $b = a$ ), lorsque  $\phi = 0$ , le mécanisme à quatre barres n'est pas un trapèze, mais un parallélogramme. Le problème est visible ainsi :

$$\det(\mathbf{J}) = \left(y - \frac{b}{2}\right) b \sin(0) + (x + f) b \cos(0) - bx - bf = 0 \quad (1.27)$$

$$b(x + f) - b(x + f) = 0 \quad (1.28)$$

Cette singularité est de type III, et peut être évitée en imposant  $b$  différent de  $a$ . Ce type de singularité, tout comme la singularité de type II, se présente lorsqu'une vitesse articulaire nulle peut être liée à une vitesse cartésienne non nulle. En ce qui concerne le type II, cette singularité est plus visible si on remplace les équations 1.20 à 1.23 dans la jacobienne  $\mathbf{J}$  définie à l'équation 1.19 :

$$\det(\mathbf{J}) = \rho_1 \cos \theta_1 \rho_2 \sin \theta_2 - \rho_1 \sin \theta_1 \rho_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (1.29)$$

$$\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \quad (1.30)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0. \quad (1.31)$$

La singularité arrivera donc si les câbles sont parallèles. Ceci se produit aussi dans le cas de la singularité de type III. Cependant, si  $b$  est différent de  $a$ , cette situation se

produit dans un certain nombre de cas. Si  $x = f$  et  $\phi = 0$ , soit si les deux câbles sont horizontaux et les deux points  $\mathbf{p}_A$  et  $\mathbf{p}_B$  sont sur l'axe  $x$ , on a

$$\det(\mathbf{J}) = \left(y - \frac{a}{2}\right) b \sin(0) + (fb + af) \cos(0) - af - bf = 0 \quad (1.32)$$

$$(fb + af) - af - bf = 0 \quad (1.33)$$

On observe donc que si l'angle des câbles est de  $\pm 90^\circ$ , il y a une singularité peu importe la largeur  $b$  de l'effecteur. Cependant, le mécanisme sera limité à des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  plus faibles, de l'ordre de moins de  $\pm 45^\circ$ , il faut étudier les conditions qui rendraient les câbles parallèles. Dans ce sens, si on part de

$$\rho_1 \cos \theta_1 - \frac{b}{2} \sin \phi + f \cos \phi = x \quad (1.34)$$

$$\rho_1 \sin \theta_1 + \frac{b}{2} \cos \phi + f \sin \phi = y \quad (1.35)$$

en revenant au déterminant de  $\mathbf{J}$  on retrouve

$$\det(\mathbf{J}) = \rho_1 (b \sin \phi \sin \theta_1 - a \cos \theta_1 + b \cos \phi \cos \theta_1) = 0 \quad (1.36)$$

$$b \cos(\theta_1 - \phi) = a \cos \theta_1 \quad (1.37)$$

$$b = \frac{a \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 - \phi)}. \quad (1.38)$$

Quand les angles restent petits, on voit que le problème est surtout pour  $b$  proche de  $a$ . Des simulations sont faites pour des longueurs de câbles entre 1 et 3 mètres, un  $\phi$  ainsi qu'un  $\theta_1$  entre -0,6 et 0,6 radians, et pour des longueurs  $a = 0,75m$  et  $b = 0,27m$ . Ces valeurs ont été choisies car très près du mécanisme existant sur lequel l'algorithme sera testé, et à l'intérieur de la zone d'opération où il sera testé. Ces simulations montrent que la longueur minimale  $b$  nécessaire pour que la singularité se produise est de l'ordre de 0,6m, bien plus grande que celle du prototype.

La figure 1.2 montre la longueur  $b$  à laquelle les câbles deviendraient parallèles, et ce pour une orientation  $\phi$  de -0,6 radians. La figure pour une orientation de 0,6 radians est pratiquement symétrique, donc n'a pas été incluse dans ce mémoire. La figure 1.3 illustre la singularité de type III mentionnée plus haut pour une orientation nulle.

Pour conclure cette section, mentionnons qu'en restreignant la longueur des câbles à  $[1; 3]m$ , la longueur de  $b$  à moins de 0,6m et l'orientation  $\phi$  à  $[-0,6; 0,6]$ rad, aucune singularité ne sera rencontrée dans l'espace de travail.

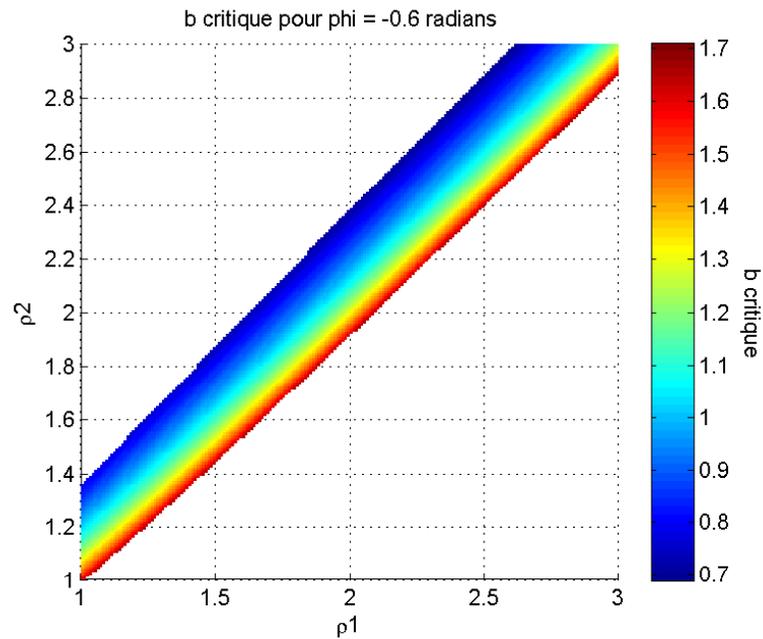


FIGURE 1.2 – Longueur  $b$  (en m) pour une orientation  $\phi$  de  $-0,6$  radians à laquelle existe une singularité de type II.

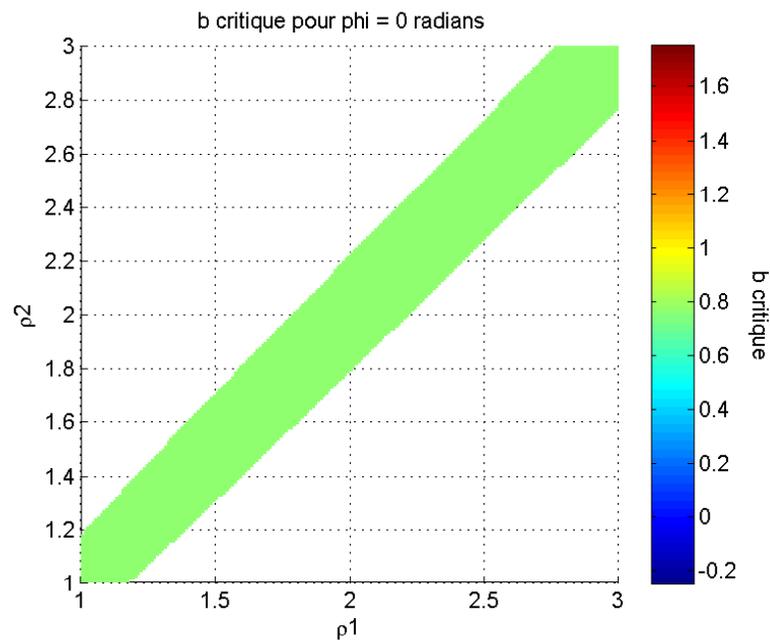


FIGURE 1.3 – Longueur  $b$  (en m) pour une orientation  $\phi$  de 0 radians à laquelle existe une singularité. On note  $b = 0,75m = a$ , la singularité est de type III.

Une fois terminée l'analyse cinématique, il est temps de passer à l'analyse dynamique et l'étude de l'espace de travail statique.

## 1.4 Analyse dynamique

L'analyse dynamique porte sur l'étude des équations régissant les forces présentes dans le système. Cette connaissance nous permet d'obtenir une équation dynamique donnant l'accélération angulaire de l'effecteur (qui est notre variable libre) en fonction des variables connues du système. De plus, une analyse des forces donne une idée de l'espace statiquement atteignable, qui est le point de départ pour définir notre espace de travail.

### 1.4.1 Équation dynamique

L'équation dynamique régissant le comportement du robot est dérivée des équations Newtoniennes. En définissant  $F_1$  et  $F_2$  comme l'amplitude des forces exercées par chaque câble sur l'effecteur, comme illustré à la figure 1.4, on trouve l'équation 1.39.

$$\sum \mathbf{f} = F_1 \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{bmatrix} + F_2 \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Les forces peuvent être isolées ainsi :

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\gamma}, \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \quad (1.40)$$

avec

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

et

$$\boldsymbol{\gamma} = m \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \end{bmatrix} - mg \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_c - mg \\ m\ddot{y}_c \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

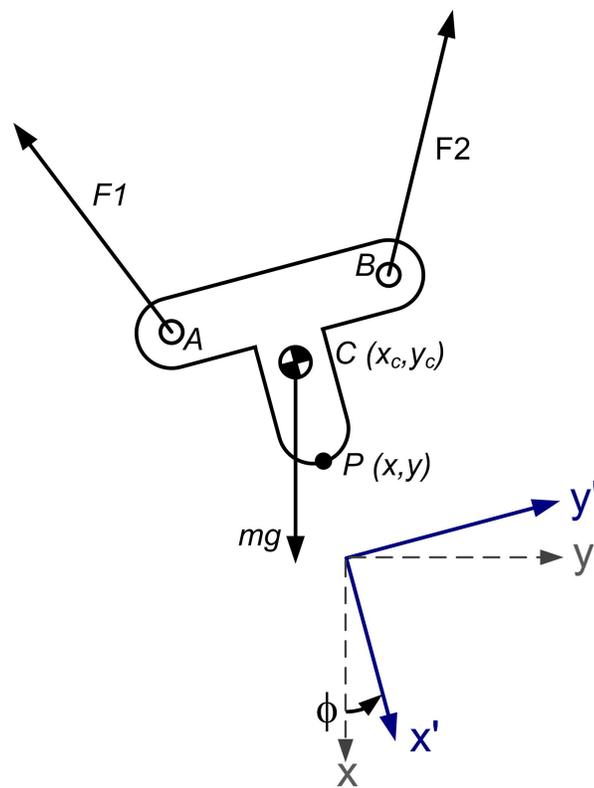


FIGURE 1.4 – Forces agissant sur l'effecteur.

En faisant la somme des moments autour du centre de masse ( $M_c$ ), on a

$$\sum M_c = \mathbf{r}_{CA}^T \mathbf{E} \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_{CB}^T \mathbf{E} \mathbf{F}_2 = I \ddot{\phi} \quad (1.43)$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

et les vecteurs reliant le centre de masse aux attaches des câbles sont

$$\mathbf{r}_{CA} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -d \\ \frac{-b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \\ -d \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{r}_{CB} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -d \\ \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \\ -d \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

En ayant défini les forces isolées à l'équation 1.40 comme

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{bmatrix} = F_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{e}_1 \quad (1.47)$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{bmatrix} = F_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{e}_2 \quad (1.48)$$

on peut les remplacer dans l'équation 1.43 pour obtenir

$$\mathbf{e}_x^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{r}_{CA}^T \mathbf{E} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_y^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{r}_{CB}^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2 - I \ddot{\phi} = 0 \quad (1.49)$$

ce qui peut être finalement ramené à

$$\begin{aligned} & (-\sin \theta_2 (m \ddot{x}_c - mg) + \cos \theta_2 m \ddot{y}_c) \left( -d \sin (\phi - \theta_1) - \frac{b}{2} \cos (\phi - \theta_1) \right) \\ & + (\sin \theta_1 (m \ddot{x}_c - mg) - \cos \theta_1 m \ddot{y}_c) \left( -d \sin (\phi - \theta_2) + \frac{b}{2} \cos (\phi - \theta_2) \right) \\ & - I \ddot{\phi} \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Cette équation différentielle représente une contrainte qui doit être satisfaite en tout temps et sur laquelle on ne peut agir directement. De plus, elle demande la connaissance des angles  $\theta_1, \theta_2$  et  $\phi$ , ainsi que de l'accélération du centre de masse afin de pouvoir calculer  $\ddot{\phi}$ . Le chapitre 2 portera sur la conception du simulateur et s'arrêtera sur les démarches et équations nécessaires à l'obtention de  $\ddot{\phi}$ .

## 1.4.2 Espace statiquement atteignable

L'espace statiquement atteignable est composé de tous les points dans le plan du manipulateur où, pour des vitesses et accélérations nulles (régime statique), les forces présentes sur les câbles sont positives (les câbles sont en traction). Premièrement, en connaissant la longueur de chaque câble, il faut trouver l'angle  $\phi$  au repos (nommé ci-après  $\phi_0$ ). Puis, connaissant les longueurs de câbles et l'angle  $\phi_0$ , on solutionne le PGD pour trouver la position de l'effecteur. Pour chaque point de l'espace (restreint au départ par les longueurs minimales et maximales des câbles, voir la section 1.3.2), on calcule les tensions dans les câbles et rejette tout point où une tension négative apparaît. Les figures 1.5 à 1.8 illustrent en ordre :

- l'angle  $\phi_0$  statiquement atteignable en fonction des longueurs  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ;
- les trajectoires possibles dans l'espace  $\rho_1, \rho_2$  maintenant l'angle  $\phi$  constant ;
- l'espace statiquement atteignable (avec l'angle  $\phi_0$  pour chaque point de l'espace) ;
- les trajectoires possibles dans l'espace  $x, y$  maintenant l'angle  $\phi$  constant.

Ces figures ont été obtenues avec les paramètres suivants :  $a = 0,75, b = 0,27321, d = 0,07044, f = 0,2827, m = 1,25$ . Ces valeurs correspondent au prototype du mécanisme utilisé pour tester les algorithmes développés. On peut y observer divers points. Premièrement, dans l'espace statiquement atteignable, le centre de masse se trouve confiné à l'intérieur de la zone  $0 < y < 0,75$ , soit sous les points d'attache des câbles à la structure supérieure. Puis, les câbles doivent avoir des longueurs très similaires, et leur élongation doit aussi être presque la même pour maintenir une orientation constante. Ceci se traduit par des trajectoires quasi verticales et quasi linéaires dans l'espace de travail statique.

Sur une dernière note, la figure 1.9 illustre la force minimale tout câble confondu à chaque point de l'espace statiquement atteignable. Plus l'on s'approche des limites, plus la force minimale s'approche rapidement de 0 (et en comparant avec la figure 1.7, plus l'angle  $\phi_0$  est loin de 0). Ceci montre que pour de faibles valeurs de  $\phi$ , les forces restent élevées et il est facile de faire osciller l'effecteur. Cependant, pour de valeurs élevées de  $\phi$ , la force minimale étant si faible, une petite oscillation ferait perdre la tension dans un câble. Ceci confirme donc le choix de limiter l'angle de l'effecteur à  $[-0,6; 0,6]$ rad lors de l'étude des lieux de singularités (section 1.3.2)

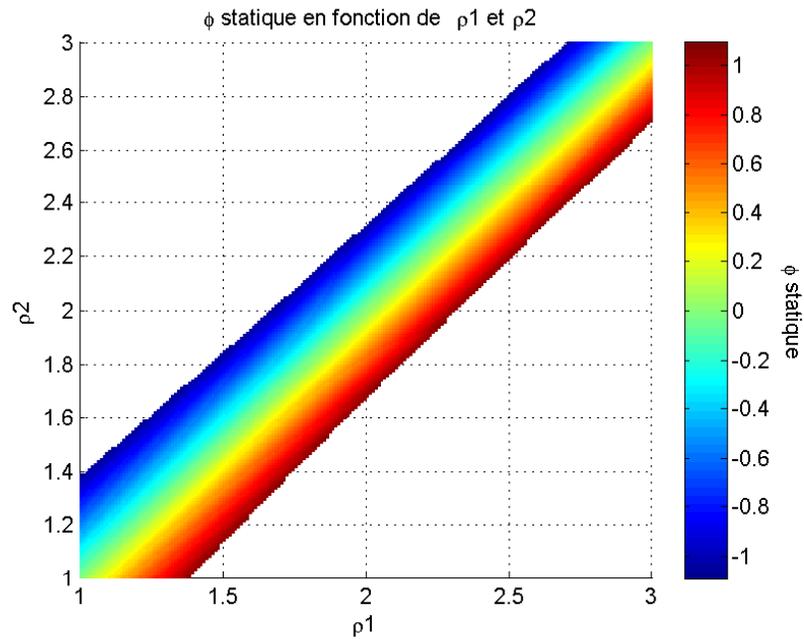


FIGURE 1.5 – Orientation atteignable de l'effecteur (en rad) selon la longueur des câbles (en m).

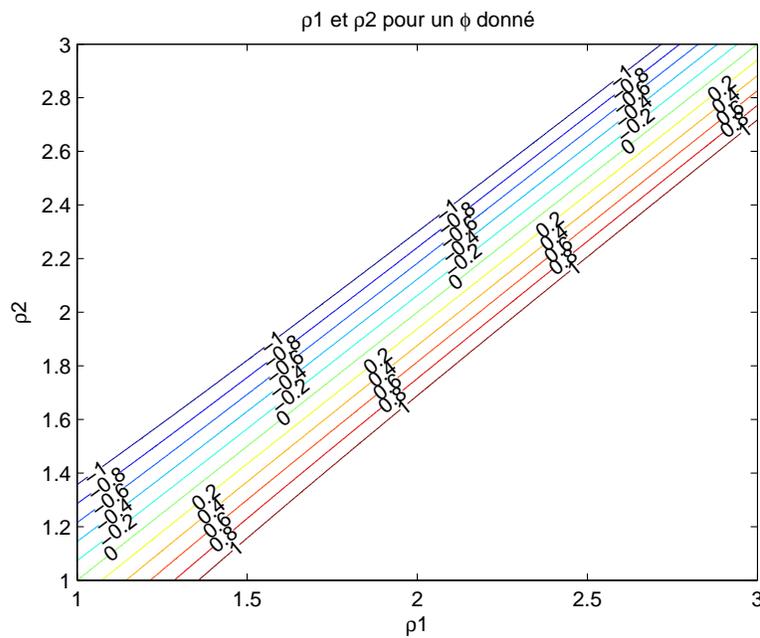


FIGURE 1.6 – Orientations constantes de l'effecteur (en rad) selon la longueur des câbles (en m).

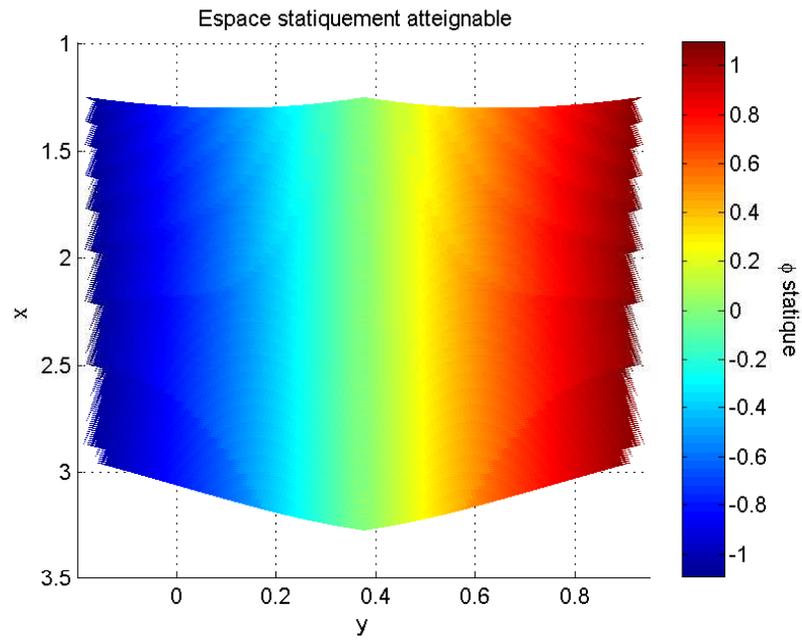


FIGURE 1.7 – Espace statiquement atteignable.

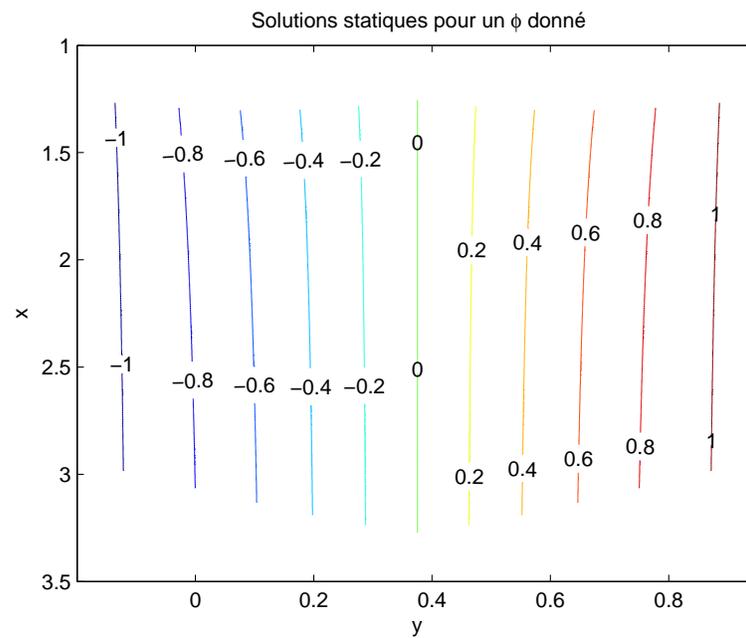


FIGURE 1.8 – Trajectoires possibles pour une orientation de l'effecteur constante.

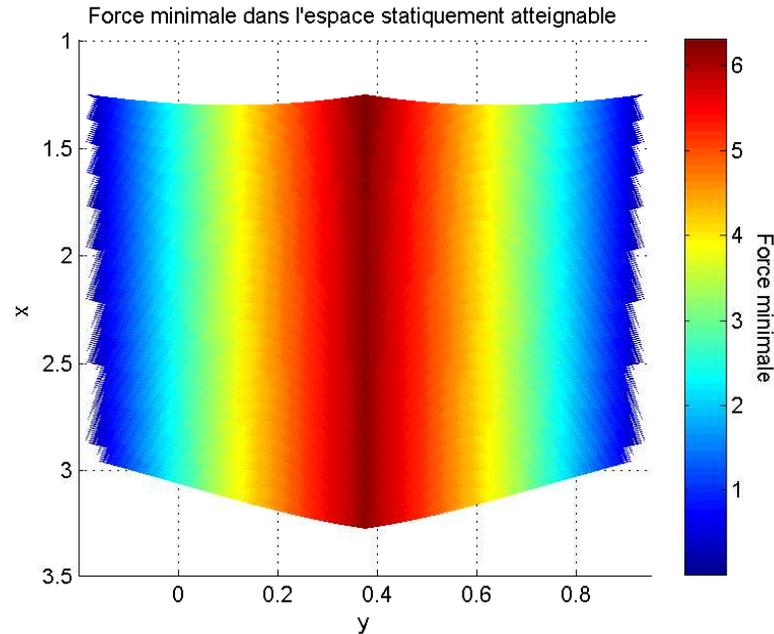


FIGURE 1.9 – Force minimale des câbles (N) dans l'espace statiquement atteignable.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a d'abord expliqué la notation générale utilisée tout au long du mémoire. Par la suite, la géométrie du robot étudié a été expliquée, avec la notion de degrés de liberté et sous-actionnement. Puis, les problèmes géométriques direct et inverse ont été résolus.

Une analyse cinématique a été réalisée, qui a donné les équations de vitesse permettant d'établir la jacobienne du système, et ainsi étudier les lieux de singularité. L'espace de travail a ainsi pu être défini.

Finalement, l'analyse dynamique complétée a pu donner les équations dynamiques qui doivent être satisfaites en tout temps, et a ensuite permis d'avoir une approximation de l'espace statiquement atteignable. Cette notion servira plus tard pour montrer l'efficacité du contrôleur en rejoignant des cibles situées hors de cet espace.

# Chapitre 2

## Conception du simulateur

Dans ce chapitre, un simulateur numérique est conçu. Son but consiste à représenter l'évolution temporelle du robot étudié dans son espace lorsqu'on impose à ses câbles une trajectoire pré-définie. Pour chaque pas de temps, connaissant les paramètres du robot (dimensions, masse, inertie), ainsi que la longueur des câbles, leur vitesse et accélération, le simulateur va obtenir l'accélération angulaire de l'effecteur ( $\ddot{\phi}$ ), puis calculer l'angle  $\phi$  et la vitesse angulaire pour le prochain pas de temps.

La conception de ce simulateur est expliquée à partir des équations théoriques jusqu'à l'application pratique. Des exemples et méthodes de validation sont aussi présentés.

## 2.1 Mécanisme d'intégration et calcul à pas fixe

Dans le cas d'un manipulateur quelconque, pour chaque instant donné il est possible de connaître l'état du robot (position, vitesse et accélération) en connaissant uniquement les coordonnées articulaires, leur vitesse et accélération instantanées. Si ce manipulateur est complètement actionné, il est possible de fixer préalablement une trajectoire dans l'espace des coordonnées articulaires, et en résolvant les problèmes géométrique, cinématique et dynamique directs on trouve la trajectoire dans l'espace cartésien que le manipulateur effectuera. Cependant, dans le cas d'un manipulateur sous-actionné, une (ou plusieurs) variable articulaire est libre, et donc à un instant donné, cette variable articulaire dépend de l'état des autres variables, leur dérivées ainsi que la dynamique du robot. Pour le manipulateur traité ici, cette relation correspond à l'équation différentielle donnée à l'équation 1.50. Ainsi, si on veut déterminer la variable libre (ici  $\phi$ ), il faut intégrer numériquement l'équation 1.50 en utilisant des pas de calcul discrets.

Pour chaque pas de calcul, la variable articulaire manquante (dans notre cas  $\phi$  et ses deux premières dérivées) est calculée et on peut alors établir l'état actuel du robot. On solutionne d'abord l'équation 1.50, qui nous donne pour le temps  $t$  l'accélération angulaire de l'effecteur ( $\ddot{\phi}$ ). Pour résoudre cette équation, il faut connaître les angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\phi$  ainsi que l'accélération du centre de masse  $[\ddot{x}_c, \ddot{y}_c]^T$  évalués au temps  $t$ . Pour connaître cette accélération, comme il sera montré plus tard, il faut aussi la connaissance de  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\phi}$  au temps  $t$ . Ceci indique que, partant d'un état connu ( $\phi, \dot{\phi}$  pour  $t = 0$ ), il est possible de calculer  $\ddot{\phi}$  au temps  $t = 0$ . Pour le pas de temps suivant, il faut effectuer une approximation afin d'obtenir un nouveau  $\phi$  et  $\dot{\phi}$ . Cela est fait en intégrant l'accélération angulaire sur la longueur du pas de temps.

Une première méthode consiste à utiliser l'algorithme à longueur de pas variable de Matlab. Cette méthode est précise mais peut se révéler longue avant de converger. D'autres méthodes à pas fixes peuvent être plus simples et rapides, mais leur précision dépend de la longueur de pas utilisée.

## 2.2 Calcul des angles, vitesses et accélérations angulaires

Cette section illustre les opérations effectuées à l'intérieur d'un pas de calcul. Il est pris pour acquis qu'on connaît l'état du robot, soit le vecteur de coordonnées articulaires ( $\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \phi]^T$ ) ainsi que ses deux premières dérivées à l'exception de  $\ddot{\phi}$ , variable que l'on cherche.

### 2.2.1 Calcul des angles

Ce calcul s'approche d'une combinaison des PGI et PGD. En partant des équations suivantes,

$$a_x^2 + a_y^2 = \rho_1^2 \quad (2.1)$$

$$(a_x - b \sin \phi)^2 + (a_y + b \cos \phi - a)^2 = \rho_2^2 \quad (2.2)$$

on peut les soustraire pour obtenir

$$2a_y(b \cos \phi - a) + (b \cos \phi - a)^2 - 2a_x(b \sin \phi) + (b \sin \phi)^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 \quad (2.3)$$

$$a_y = a_x \alpha + \beta. \quad (2.4)$$

où

$$\alpha = \frac{b \sin \phi}{b \cos \phi - a} \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \rho_2^2 - \rho_1^2 - (b \cos \phi - a)^2 - (b \sin \phi)^2 \right) \quad (2.6)$$

Ici,  $\alpha$  et  $\beta$  sont temporairement utilisés pour faciliter l'écriture des équations. Pour continuer, si  $\sin \phi = 0$ , on connaît immédiatement  $a_y$ , on peut trouver  $a_x$  par l'équation 2.1 et sauter à l'équation 2.9. Dans le cas contraire, on remplace l'équation 2.4 dans 2.1 pour trouver l'équation quadratique 2.7 qu'on résout

$$a_x^2 (1 + \alpha^2) + a_x (2\alpha\beta) + \beta^2 - \rho_1^2 = 0 \quad (2.7)$$

$$a_x = \frac{-(\alpha\beta) + \sqrt{((\alpha\beta)^2 - (1 + \alpha^2)(\beta^2 - \rho_1^2))}}{(1 + \alpha^2)} \quad (2.8)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(a_x, a_y) \quad (2.9)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(a_x - b \sin \phi, a_y + b \cos \phi - a). \quad (2.10)$$

L'autre racine de l'équation quadratique est rejetée, car elle fait référence à la solution où l'effecteur se trouverait au-dessus des points d'attache. Comme cette partie de l'espace est considérée hors de l'espace de travail, on peut choisir de façon sécuritaire la racine utilisée dans l'équation 2.8.

### 2.2.2 Calcul des vitesses angulaires

Connaissant  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , les vitesses angulaires sont obtenues en dérivant les deux composantes de l'équation 1.10, ce qui donne

$$\dot{\mathbf{p}}_A = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \cos \theta_1 - \rho_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\rho}_1 \sin \theta_1 + \rho_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_1 \sin \theta_1 \\ \rho_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{\rho}_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \cos \theta_2 - \rho_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ \dot{\rho}_2 \sin \theta_2 + \rho_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_2 \sin \theta_2 \\ \rho_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{\rho}_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Par la suite, on relie  $\dot{\mathbf{p}}_A$  et  $\dot{\mathbf{p}}_B$  par

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_A + \begin{bmatrix} -b \sin \phi \\ b \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_B = \dot{\mathbf{p}}_A + \begin{bmatrix} -b \cos \phi \\ -b \sin \phi \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_2 \sin \theta_2 \\ \rho_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 - \begin{bmatrix} -\rho_1 \sin \theta_1 \\ \rho_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} -\rho_2 \cos \theta_2 + \dot{\rho}_1 \cos \theta_1 - b \dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\rho}_2 \sin \theta_2 + \dot{\rho}_1 \sin \theta_1 - b \dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \begin{bmatrix} \rho_2 \cos \theta_2 & \rho_2 \sin \theta_2 \\ \rho_1 \cos \theta_1 & \rho_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_2 \cos \theta_2 + \dot{\rho}_1 \cos \theta_1 - b \dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\rho}_2 \sin \theta_2 + \dot{\rho}_1 \sin \theta_1 - b \dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Calcul des accélérations angulaires

Pour calculer l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}_1$ , une méthode très similaire à celle pour calculer  $\dot{\theta}_1$  est utilisée. D'abord, il faut dériver les équations 2.11 et 2.12, puis relier  $\ddot{\mathbf{p}}_A$

et  $\ddot{\mathbf{p}}_B$  en dérivant l'équation 2.14, donnant

$$\ddot{\mathbf{p}}_A = \begin{bmatrix} k_a \\ k_b \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} k_c \\ k_d \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_B = \begin{bmatrix} k_e \\ k_f \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} k_g \\ k_h \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

où

$$k_a = (-\rho_1 \sin \theta_1), \quad k_c = (\ddot{\rho}_1 \cos \theta_1 - 2\dot{\rho}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \rho_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1), \quad (2.19)$$

$$k_b = (\rho_1 \cos \theta_1), \quad k_d = (\dot{\rho}_1 \sin \theta_1 + 2\dot{\rho}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \rho_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1), \quad (2.20)$$

$$k_e = (-\rho_2 \sin \theta_2), \quad k_g = (\ddot{\rho}_2 \cos \theta_2 - 2\dot{\rho}_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \rho_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2), \quad (2.21)$$

$$k_f = (\rho_2 \cos \theta_2), \quad k_h = (\dot{\rho}_2 \sin \theta_2 + 2\dot{\rho}_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \rho_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2), \quad (2.22)$$

puis

$$\ddot{\mathbf{p}}_B = \ddot{\mathbf{p}}_A + \begin{bmatrix} k_i \\ k_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_k \\ k_l \end{bmatrix} \ddot{\phi}. \quad (2.23)$$

où

$$k_i = b\dot{\phi}^2 \sin \phi, \quad k_k = -b \cos \phi, \quad (2.24)$$

$$k_j = -b\dot{\phi}^2 \cos \phi, \quad k_l = -b \sin \phi. \quad (2.25)$$

Ici, pour simplifier la lecture, des variables temporaires  $k_a$  à  $k_l$  sont utilisées. En remplaçant les équations 2.17 et 2.18 dans l'équation 2.23, de façon similaire au calcul des vitesses angulaires, on trouve

$$\begin{bmatrix} k_e \\ k_f \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} k_g \\ k_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a \\ k_b \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} k_c \\ k_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_i \\ k_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_k \\ k_l \end{bmatrix} \ddot{\phi} \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} -k_a & k_e \\ -k_b & k_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_c + k_i - k_g \\ k_d + k_j - k_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_k \\ k_l \end{bmatrix} \ddot{\phi} \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_a & k_e \\ -k_b & k_f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_c + k_i - k_g - k_k \ddot{\phi} \\ k_d + k_j - k_h + k_l \ddot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

On remarque que par le couplage dynamique des angles, on doit exprimer  $\ddot{\theta}_1$  comme  $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_{1base} + \ddot{\theta}_{1\phi} \ddot{\phi}$ . De plus, tous les éléments dépendants de  $\ddot{\theta}_1$  devront être exprimés comme la somme de deux éléments jusqu'à la résolution de l'équation dynamique (équation 1.50)

## 2.2.4 Calcul des accélérations et résolution de l'équation dynamique

Avant de pouvoir résoudre l'équation dynamique, il faut encore connaître l'accélération du centre de masse, soit  $[\ddot{x}_c, \ddot{y}_c]^T$ . Pour ce faire, il suffit de dériver deux fois l'équation reliant la position du point A au centre de masse, de la façon suivante

$$a_x - \frac{b}{2} \sin \phi + d \cos \phi = \dot{x}_c \quad (2.29)$$

$$a_y + \frac{b}{2} \cos \phi + d \sin \phi = \dot{y}_c \quad (2.30)$$

$$\dot{a}_x + \left( -\frac{b}{2} \cos \phi - d \sin \phi \right) \dot{\phi} = \ddot{x}_c \quad (2.31)$$

$$\dot{a}_y + \left( -\frac{b}{2} \sin \phi + d \cos \phi \right) \dot{\phi} = \ddot{y}_c \quad (2.32)$$

$$\ddot{a}_x + \left( -\frac{b}{2} \cos \phi - d \sin \phi \right) \ddot{\phi} + \left( \frac{b}{2} \sin \phi - d \cos \phi \right) \dot{\phi}^2 = \ddot{\ddot{x}}_c \quad (2.33)$$

$$\ddot{a}_y + \left( -\frac{b}{2} \sin \phi + d \cos \phi \right) \ddot{\phi} + \left( -\frac{b}{2} \cos \phi - d \sin \phi \right) \dot{\phi}^2 = \ddot{\ddot{y}}_c. \quad (2.34)$$

En remplaçant la valeur calculée de  $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_{1base} + \ddot{\theta}_{1\phi} \ddot{\phi}$  dans l'équation 2.17, il est possible d'obtenir  $\ddot{\mathbf{p}}_A$  en fonction de  $\ddot{\phi}$ . Cette valeur peut être à son tour utilisée dans les équations 2.33 et 2.34, qui donnent l'accélération du centre de masse en fonction de  $\ddot{\phi}$ . On peut ainsi retourner à l'équation 1.50, où tous les éléments sont présents pour obtenir finalement l'accélération  $\ddot{\phi}$ .

## 2.3 Validation des équations

Un premier test nécessaire afin de valider le bon fonctionnement de tout simulateur est le test de compatibilité, ou de fermeture de boucle. En effet, si en tout moment, connaissant  $\phi$  et les longueurs des câbles, l'équation 2.35 est vraie, alors les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont corrects.

$$(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)^T (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B) = b^2. \quad (2.35)$$

où

$$\mathbf{p}_A = \begin{bmatrix} \rho_1 \cos \theta_1 \\ \rho_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{p}_B = \begin{bmatrix} \rho_2 \cos \theta_2 \\ \rho_2 \sin \theta_2 + a \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Un second test nécessaire pour prouver la validité des équations utilise les vitesses, et est en fait la dérivée de l'équation de fermeture de boucle (2.35). Si en tout moment, connaissant  $\phi$  et les longueur des câbles ainsi que  $\dot{\phi}$  et les vitesses des câbles, l'équation 2.38 est vraie, alors les vitesses angulaires  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  sont correctes.

$$(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)^T (\dot{\mathbf{p}}_A - \dot{\mathbf{p}}_B) = 0. \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{p}_A$  et  $\mathbf{p}_B$  sont définis aux équations 2.36 et 2.37, et où

$$\dot{\mathbf{p}}_A = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \cos \theta_1 - \rho_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\rho}_1 \sin \theta_1 + \rho_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \cos \theta_2 - \rho_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ \dot{\rho}_2 \sin \theta_2 + \rho_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Un dernier test utilise les accélérations, et est en quelque sorte le plus important. Jusqu'à la résolution de l'équation dynamique, l'accélération angulaire  $\ddot{\phi}$  est inconnue, et on ignore avec exactitude l'accélération du centre de masse (comme cette dernière est une fonction de  $\ddot{\phi}$ , tel que montré aux équations 2.33 et 2.34). Cependant, une fois calculée l'accélération angulaire de l'effecteur, ces valeurs sont connues numériquement. S'il est possible de prouver qu'elles sont bonnes, et sachant par les autres tests que les éléments menant à leur calcul sont bons aussi, il est certain que la valeur calculée de  $\ddot{\phi}$  est, elle aussi, correcte.

Pour ce test, il suffit de dériver l'équation 2.38. Cependant, par simplicité de calcul, il est convenable d'utiliser l'accélération du centre de masse au lieu de celle du point B, puisque l'accélération du centre de masse est déjà calculée tout comme celle du point A. L'équation devient alors

$$(\mathbf{p}_A - \mathbf{c})^T (\ddot{\mathbf{p}}_A - \ddot{\mathbf{c}}) + (\dot{\mathbf{p}}_A - \dot{\mathbf{c}})^T (\dot{\mathbf{p}}_A - \dot{\mathbf{c}}) = 0 \quad (2.41)$$

où

$$\mathbf{c} = \mathbf{p}_A + \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} \sin \phi + d \cos \phi \\ \frac{b}{2} \cos \phi + d \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{p}}_A + \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} \cos \phi - d \sin \phi \\ -\frac{b}{2} \sin \phi + d \cos \phi \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (2.43)$$

$$(2.44)$$

avec  $\dot{\mathbf{p}}_A$  défini à l'équation 2.39 et  $\ddot{\mathbf{p}}_A$  défini à l'équation 2.17.

## 2.4 Premier exemple de simulation

Une fois la méthode de chaque pas de calcul établie, il reste le problème de l'intégration : connaissant l'accélération angulaire à  $t = t_0 + k\Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps, il faut trouver la vitesse angulaire ainsi que la valeur de  $\phi$  pour  $t = t_0 + (k + 1)\Delta t$ . Pour ce faire, diverses méthodes sont possibles. Une qui est généralement utilisée est le solveur de Matlab ODE45 (Ordinary Differential Equations). Cette méthode utilise des pas variables, est généralement lente mais assez précise en comparaison avec des simulateurs en robotique tels le logiciel ADAMS<sup>1</sup>. C'est donc ODE45 qui est utilisé dans la première version du simulateur, pour tester l'exactitude des équations.

Le premier test consiste à donner une orientation initiale à l'effecteur (par exemple  $\phi = 0, 1$  radians), puis de démarrer la simulation sans exciter les câbles, et dont les paramètres sont au tableau 2.1. Il est logique de s'attendre à ce que le pendule rejoigne une orientation  $\phi = -0, 1$  radians après une période déterminée, puis refaire le parcours inverse périodiquement. La figure 2.1 illustre le résultat de cette simulation, en ce qui concerne la valeur de l'angle uniquement. La figure 2.2 illustre aussi la vitesse et l'accélération angulaires. On peut remarquer que le résultat est parfaitement périodique, maintenant une amplitude constante de 0,2 radians.

À chaque pas de calcul, les trois tests mentionnés à la section 2.3 valident les résultats. Le membre de droite des équations 2.35, 2.38 et 2.41 devrait être nul en tout temps. La figure 2.3 donne la valeur calculée par chaque test pour la première demi-période. On note que les erreurs sont de l'ordre de grandeur de la précision de Matlab,

---

1. <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/Adams.aspx>

TABLE 2.1 – Paramètres de simulation

Paramètre	Valeur
$a$	0,75 m
$b$	0,3 m
$d$	0,1 m
$m$	1 kg
$I$	0,025 kg · m <sup>2</sup>
$\rho_1$	2 m
$\rho_2$	2 m

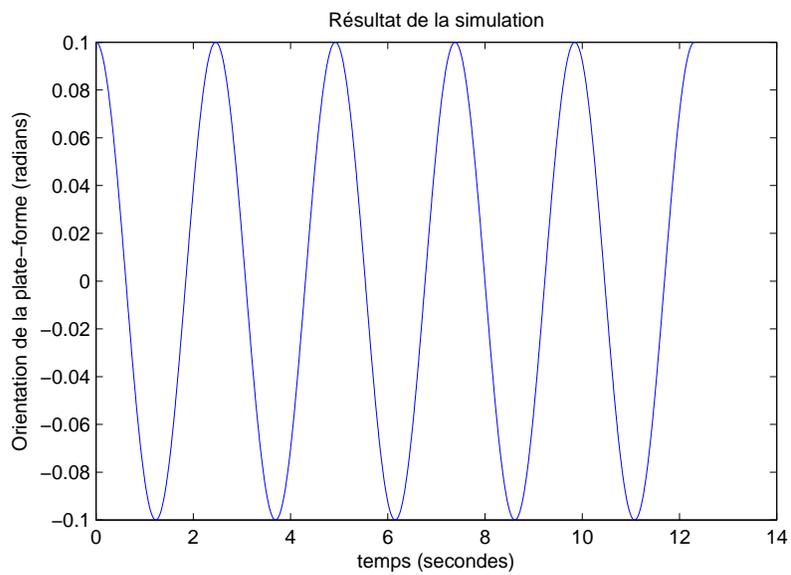


FIGURE 2.1 – Résultat de la simulation avec angle de départ de 0,1 radians, vitesse nulle et câbles à longueur constante.

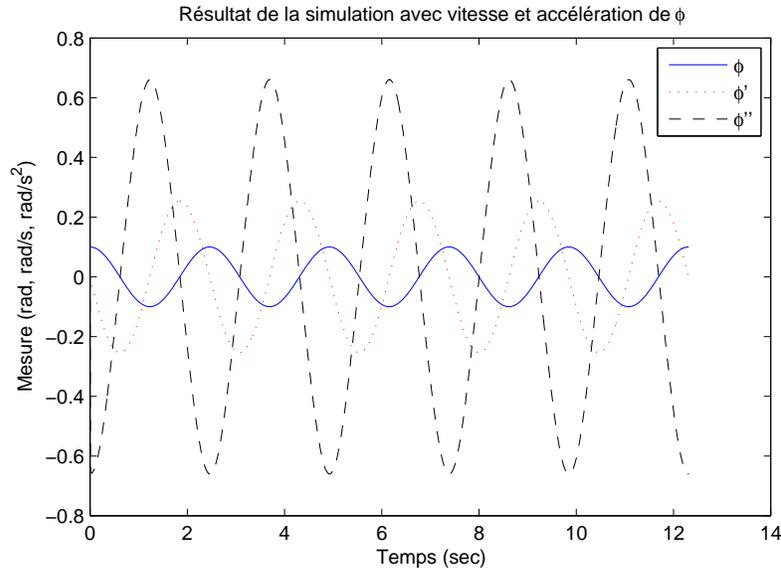


FIGURE 2.2 – Valeur de l'angle  $\phi$  ainsi que de ses deux premières dérivées lors de la simulation.

qui est de  $2,2204e-016$  (valeur obtenue avec la commande eps). Ceci prouve l'exactitude autant des équations représentant le système que de leur mise en application.

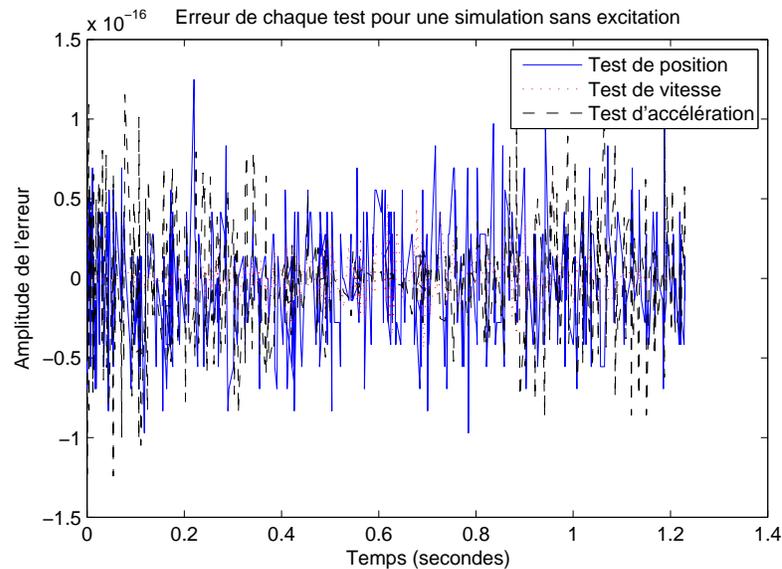


FIGURE 2.3 – Erreurs détectées par les trois tests validant l'exactitude du modèle et du simulateur même.

Avant de passer à un exemple de simulation avec excitation, un problème a rapidement été remarqué. L'algorithme ODE45 est trop lent, comme il lui faut près d'une

seconde pour calculer une seconde de simulation. Pour un contrôleur sur un ordinateur dédié, le temps est certainement inférieur, mais bien trop élevé pour pouvoir, en quelques millisecondes, simuler divers scénarios de contrôle pour choisir celui qui mènera au résultat désiré. D'autres méthodes d'intégration ont été ainsi étudiées.

## 2.5 Étude sur la méthode d'intégration

Sachant que les méthodes offertes par Matlab sont trop lourdes, une approche plus simple a été utilisée. Premièrement, en s'inspirant de Lefrançois (2010), une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) a été utilisée (méthode de Scheid (1989)). L'idée est de briser l'intervalle à étudier en un nombre fini de sous-intervalles, puis pour chaque sous-intervalle de calculer quatre pas de calcul à divers temps, et de combiner les résultats pour obtenir l'intégration sur la période complète. La fréquence naturelle du système est d'abord calculée pour savoir quand attendre le prochain extremum, puis l'intervalle entre deux extremums est séparé en six, donnant 24 calculs par demi-période d'oscillation du pendule.

Bien que plus rapide, cette méthode s'est révélée dans ce cas médiocre. Il a fallu augmenter le nombre de pas de temps (et donc ralentir l'algorithme). La figure 2.4 illustre l'écart entre RK4 avec 24, 123 et 246 pas (il faut toujours multiplier par quatre pour avoir le nombre total de pas de calculs effectués) et la méthode de Matlab ODE45. Le tableau 2.2 donne l'erreur à la fin de la simulation de chaque méthode par rapport à la valeur donnée par Matlab, et le tableau 2.3 montre le temps nécessaire pour que chaque méthode termine la simulation.

Alors que les méthodes Runge Kutta avec plusieurs pas ont une précision suffisante, le gain en vitesse est minime, voire encore plus lent dans le cas de la méthode RK4 à 246 pas de temps. C'est alors qu'il a fallu utiliser une autre méthode. Des tentatives ont montré qu'en considérant l'accélération fixe (bloqueur d'ordre zéro) entre deux pas de temps, la vitesse croissant de façon linéaire et l'angle croissant de façon quadratique, les résultats étaient légèrement meilleurs. Un résultat optimal par contre a été obtenu en utilisant un bloqueur d'ordre 1 pour l'accélération. Cette méthode nécessite la connaissance de l'accélération angulaire du pas précédent et du pas actuel. Elle suppose que l'accélération va évoluer comme une rampe et de façon identique à l'évolution entre le

pas précédent et le pas actuel. La vitesse suit donc une courbe quadratique et l'angle  $\phi$  suit une courbe cubique. Les équations 2.45 à 2.46 illustrent le fonctionnement.

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \dot{\phi}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_k (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \frac{(\ddot{\phi}_k - \ddot{\phi}_{k-1})}{\Delta t} (\Delta t)^3 \quad (2.45)$$

$$\dot{\phi}_{k+1} = \dot{\phi}_k + \ddot{\phi}_k \Delta t + \frac{1}{2} \frac{(\ddot{\phi}_k - \ddot{\phi}_{k-1})}{\Delta t} (\Delta t)^2 \quad (2.46)$$

$$\ddot{\phi}_{k+1attendu} = \ddot{\phi}_k + \frac{(\ddot{\phi}_k - \ddot{\phi}_{k-1})}{\Delta t} \Delta t \quad (2.47)$$

Cette méthode est très rapide, comme pour chaque pas de temps on ne traverse qu'une fois l'algorithme pour calculer  $\ddot{\phi}$ , contrairement à l'algorithme RK4 qui calculait quatre fois  $\ddot{\phi}$  pour chaque pas de temps. Il est possible de raccourcir les pas de temps (24 au total par demi-période) pour améliorer la précision sans pénaliser la vitesse d'exécution. Pour fins de comparaison, les tableaux 2.2 et 2.3 illustrent autant la méthode de premier ordre à 24 pas que la méthode de premier ordre à pas fixes de 5 ms. Il est possible de remarquer qu'en raccourcissant les pas de temps, cet algorithme donne des résultats similaires à ceux donnés par Matlab, ce qui ajoute de la crédibilité à la méthode. Pour plus de clarté, la figure 2.5 montre en détail la fin de la simulation, où on note visuellement l'écart des diverses méthodes. Le premier ordre à 246 pas n'est pas montré pour alléger le graphique.

TABLE 2.2 – Erreurs des méthodes d'intégration par rapport à Matlab pour une demi-période d'oscillation

Méthode	Erreur finale
RK4 à 246 pas	0,0019 rad
RK4 à 123 pas	0,0039 rad
RK4 à 24 pas	0,0191 rad
Méthode 1er ordre à 24 pas	-0,0013 rad
Méthode 1er ordre à 246 pas	0,00004476 rad

Il faut encore tester le simulateur avec le nouvel algorithme d'intégration. Les paramètres de simulation sont les mêmes qu'au tableau 2.1, sauf qu'on excite les câbles avec deux sinusoides d'amplitude 5 cm et déphasées entre elles de 180°. La figure 2.4 a été

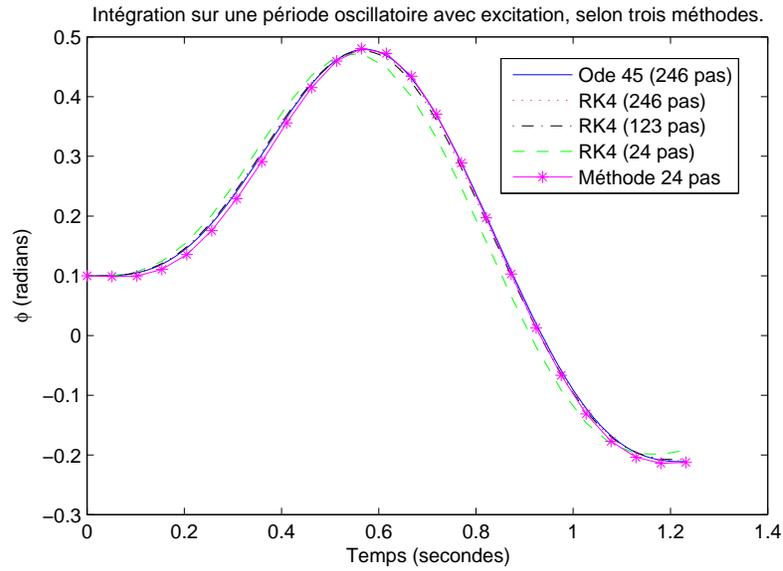


FIGURE 2.4 – Comparaison de diverses méthodes d'intégration.

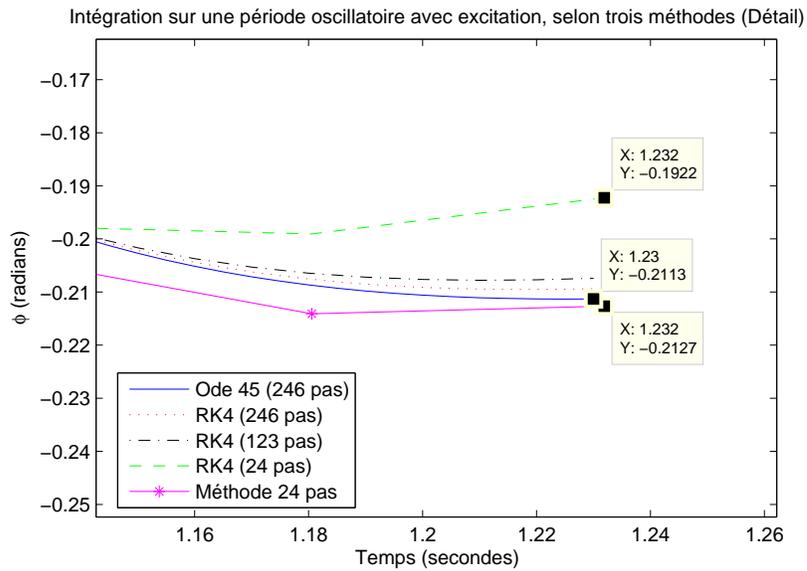


FIGURE 2.5 – Comparaison de diverses méthodes d'intégration, détail sur l'erreur.

TABLE 2.3 – Temps de calcul pour les algorithmes d'intégration

Méthode	Temps de calcul
ODE45	0,720 sec
RK4 à 246 pas	0,989 sec
RK4 à 123 pas	0,516 sec
RK4 à 24 pas	0,095 sec
Méthode 1er ordre à 24 pas	0,033 sec
Méthode 1er ordre à 246 pas	0,155 sec

générée en excitant de cette sorte les câbles. Les figures 2.6 et 2.7 illustrent le résultat des tests de validation de la section 2.3 pour respectivement ODE45 de Matlab et la méthode de 1er ordre à 24 pas de temps. On note la ressemblance de l'ordre de grandeur des erreurs dans chaque figure, toujours assez faible pour valider le simulateur.

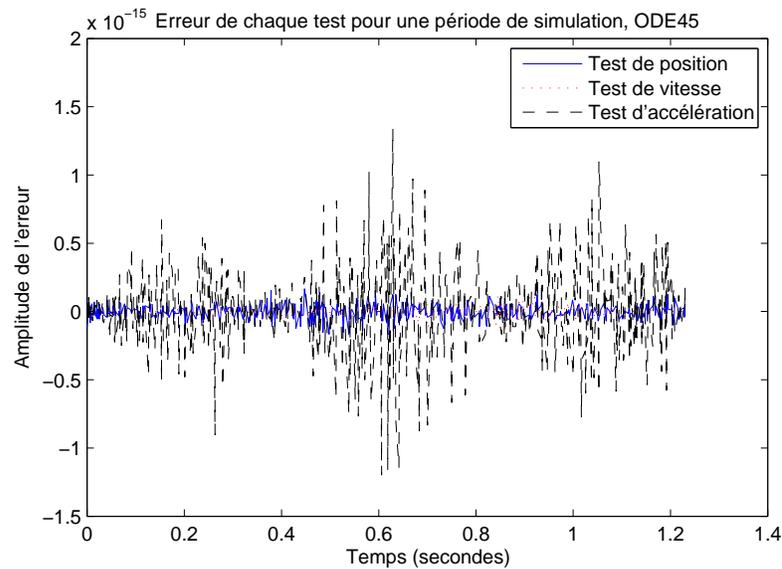


FIGURE 2.6 – Erreurs détectées par les trois tests validant l'exactitude du modèle, intégration ODE45.

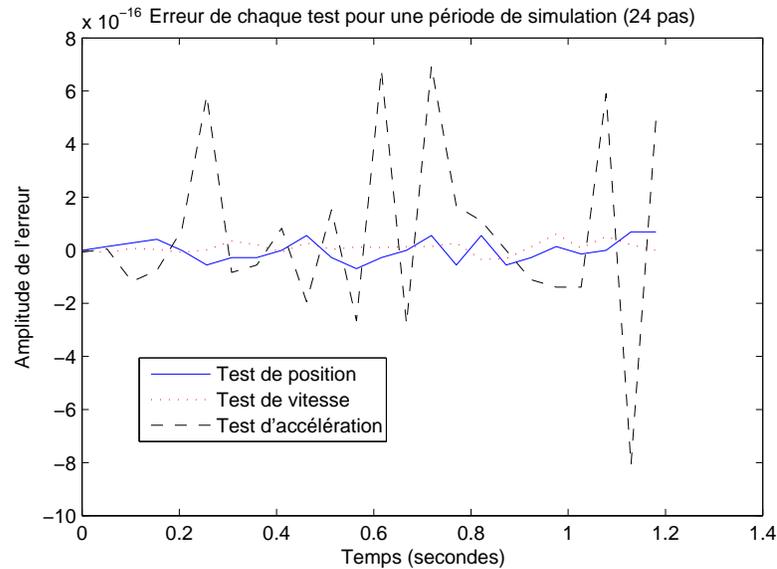


FIGURE 2.7 – Erreurs détectées par les trois tests validant l'exactitude du modèle, méthode de 1er ordre.

## 2.6 Simulateur final

La méthode établie jusqu'à date pour effectuer le calcul à chaque pas de temps ainsi que l'intégration entre chaque pas de temps est correcte, mais lourde. C'est pour accélérer le calcul que le logiciel Maple a été utilisé, afin de simplifier les équations et diminuer le nombre de calculs inutiles ou redondants. Pour ce faire, on résout d'abord les équations de fermeture de boucle, soit

$$\rho_1 \cos \theta_1 - b \sin \phi - \rho_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (2.48)$$

$$\rho_1 \sin \theta_1 + b \cos \phi - \rho_2 \sin \theta_2 - a = 0 \quad (2.49)$$

pour  $\cos \theta_1, \sin \theta_1, \cos \theta_2, \sin \theta_2$  en fonction de  $\sin \phi, \cos \phi$ . Puis, on dérive les équations 2.48 et 2.49 pour en isoler  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  en fonction des angles et de  $\dot{\phi}$ . On répète la dérivation pour isoler  $\ddot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_2$  en fonction des angles et de  $\ddot{\phi}$ .

En donnant les équations 2.17, 2.33 et 2.34 à Maple, il peut y remplacer la représentation symbolique de  $\ddot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_2$ , pour arriver à une longue équation qui établit l'accélération du centre de masse en fonction de  $\theta_1, \theta_2, \phi, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\phi}$  et  $\ddot{\phi}$ . On donne finalement l'équation dynamique 1.50. Le nouveau simulateur Matlab aura donc les étapes suivantes à effectuer :

- Calculer la valeur de  $\cos \theta_1, \sin \theta_1, \cos \theta_2, \sin \theta_2$  en fonction de  $\sin \phi, \cos \phi$  ;
- Calculer la valeur de  $\ddot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_2$  en fonction des valeurs ci-dessus ainsi que  $\dot{\phi}$  ;
- Calculer les parties de l'accélération  $\ddot{x}_c, \ddot{y}_c$  dépendante et indépendante de  $\ddot{\phi}$  (on se souvient que dans l'accélération du centre de masse est une fonction de l'accélération angulaire de l'effecteur, équations 2.33 et 2.34)
- Calculer la valeur de  $\ddot{\phi}$ .

La même simulation utilisée à la section précédente, et dont la durée selon la méthode d'intégration est montrée au tableau 2.3, a été recalculée en utilisant les équations données par Maple. Son temps d'exécution est de 0,006311 secondes, soit un calcul cinq fois plus rapide.

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a porté sur la réalisation d'un simulateur Matlab permettant de prédire le comportement du manipulateur. Il a d'abord fallu utiliser la notion de mécanisme d'intégration et de calculs à pas fixes.

Pour effectuer les calculs, la première idée était de calculer à chaque pas de temps la valeur des angles, puis des vitesses angulaires, des accélérations angulaires et finalement de l'accélération du centre de masse pour pouvoir finalement résoudre l'équation dynamique obtenue précédemment. Chaque pas de calcul a été vérifié à l'aide d'équations de fermeture de boucle et de leur deux premières dérivées. Ceci, lors de la première simulation, a permis de montrer l'exactitude des équations développées au chapitre précédent, et par le fait même de montrer le bon fonctionnement du simulateur.

Suite à la première simulation, il a été reconnu que le temps nécessaire aux algorithmes de Matlab était trop élevé pour pouvoir, dans un temps ultérieur, réaliser le projet avec un système physique. La conception d'une méthode d'intégration simple mais performant ainsi que la résolution d'équations complexes par Maple ont permis de donner des algorithmes de calcul bien plus rapides pour une perte de précision de l'ordre de 0,5%. Le simulateur a pu acquérir sa forme finale, utilisée jusqu'à la réalisation du projet.

# Chapitre 3

## Planification de trajectoires locales

Ne pouvant pas définir de façon analytique l'évolution de la variable non actionnée  $\phi$ , il n'est pas possible d'établir une trajectoire globale au préalable et de fixer des objectifs à chaque pas de temps, comme il est fait pour les manipulateurs ayant au moins le nombre minimal d'actionneurs. C'est alors que la planification de trajectoires locales entre en jeu.

Cette planification consiste à fixer un objectif local, soit l'état final des variables articulaires ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\phi$ ) et de leur vitesses. Connaissant l'état actuel du robot (position, vitesse et accélération), les paramètres d'une trajectoire préétablie sont choisis afin que l'état final prédit par le simulateur corresponde à l'objectif local. Une fois l'objectif local rejoint (même si de façon imprécise), un nouvel objectif local est établi, jusqu'à rejoindre l'objectif global.

## 3.1 Détermination de la structure

La première étape pour étudier les fonctions d'excitation est de connaître leur forme, puis, une fois la forme connue, d'établir la complexité de la fonction.

### 3.1.1 Utilité de fonctions d'excitation

Suite aux travaux de Lefrançois (2010), il a été déterminé que pour avoir les meilleurs résultats, il faut utiliser la nature oscillatoire du manipulateur en déterminant des trajectoires locales sinusoïdales. Des tests avaient été faits avec des trajectoires globales polynomiales, avec de pauvres résultats. Cependant, en séparant le temps d'exécution en intervalles bien définis, il est aisé de prédire l'état du robot à la fin de chaque intervalle (connaissant l'état exact à la fin de l'intervalle précédent) et ainsi de recommencer avec un nouvel intervalle. Ceci assure un certain niveau de rétroaction, car l'erreur accumulée durant l'intervalle est prise en compte à la planification de l'intervalle suivant.

Pour visualiser la durée de chaque intervalle, il est plus simple d'imaginer un pendule simple dans un espace vide et sans friction (figure 3.1). En laissant le pendule partir d'un extremum (début de l'intervalle  $k$ ), le balancier va passer par la position à l'équilibre, soit la verticale, puis se rendre à un extremum opposé au premier (fin de l'intervalle  $k$  et début de  $k+1$ ). En se référant aux axes de la figure 1.1, la masse du pendule effectue une trajectoire en  $y$  de forme  $A \sin(\omega_n t)$  où  $\omega_n$  est la fréquence naturelle du pendule simple, soit pour ce système simple

$$L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

$$L\ddot{\theta} + g\theta \approx 0 \quad (3.2)$$

$$\omega_n \approx \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.3)$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle et  $L$  est la longueur du câble. Toujours dans cet exemple, l'intervalle dure approximativement de  $t = 0$  à  $t = \frac{\pi}{\omega_n}$ . Finalement, pour exciter ce pendule, il faut que le câble soit allongé et raccourci avec une sinusoïde basée sur un multiple de la fréquence naturelle, tel qu'observé dans Lefrançois (2010) parmi d'autres. Burns (1970), Curry (1976), Case et Swanson (1990) ont travaillé sur des manipulateurs similaires mais sériels, Pinsky et Zevin (1999) ont travaillé sur des algorithmes de commande, Arisumi et collab. (2000) et Cunningham et Asada (2009) ont

travaillé sur les trajectoires, et finalement Burns (1970), Piccoli et Kulkarni (2005) ont établi un lien entre la fréquence naturelle et la fréquence de contrôle, alors que Stilling et Szyszkowski (2002) et Szyszkowski et Stilling (2005) ont établi l'importance d'utiliser des trajectoires quasi-sinusoidales. D'autres sources, tel l'article Kulkarni (2003), indiquent plutôt qu'une forme d'onde carrée deux fois plus rapide que la fréquence naturelle serait idéale, si les câbles pouvaient varier de façon instantanée. Cette piste de solution n'a pas été étudiée ultérieurement, mais pourrait être intéressante en choisissant une forme d'onde réalisable en pratique.

Alors que le pendule de Lefrançois (2010) était plus similaire à un enfant sur une balançoire, bougeant ses jambes afin d'amplifier son mouvement, le pendule ici étudié est plus proche du pendule simple, comme il n'est excité que par des câbles. C'est ainsi qu'a priori, une série de sinusoidales excitant  $\rho_1$  et  $\rho_2$  auront un effet important sur le mouvement de l'effecteur.

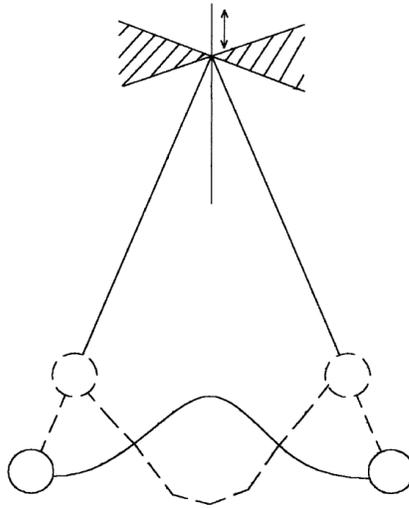


FIGURE 3.1 – Illustration d'un pendule simple à longueur variable (Pinsky et Zevin (1999)).

### 3.1.2 Équations paramétriques

La section 3.3 indiquera la raison d'utiliser un sinus déphasé de  $\pm 90^\circ$  par rapport à  $\phi$ , qui produit une trajectoire quasi-cosinusoidale, puisque l'intervalle est défini d'extremum en extremum (vitesses nulles). Pour l'instant, pour plus de clarté, la fonction

sinus sera utilisée pour exprimer les équations paramétriques appliquées aux câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

Sachant que nous voulons respecter les conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1(0) &= \rho_{1i} & \rho_1(t_f) &= \rho_{1f} & \rho_2(0) &= \rho_{2i} & \rho_2(t_f) &= \rho_{2f} \\ \dot{\rho}_1(0) &= 0 & \dot{\rho}_1(t_f) &= 0 & \dot{\rho}_2(0) &= 0 & \dot{\rho}_2(t_f) &= 0 \\ \ddot{\rho}_1(0) &= 0 & \ddot{\rho}_1(t_f) &= 0 & \ddot{\rho}_2(0) &= 0 & \ddot{\rho}_2(t_f) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

selon la méthode de Tortopidis et Papadopoulos (2007), ce sont les paramètres à fixer. Puisqu'il n'y a qu'une variable libre et que la méthode sera exécutée en temps réel, il suffit d'un paramètre libre à déterminer. Une fonction de type

$$\rho_1(t) = \sum_{j=1}^3 A_j \sin(k_j \omega_n t) + \rho_{1i} + \frac{(\rho_{1f} - \rho_{1i}) \omega_n t}{\pi} \quad (3.5)$$

$$\rho_2(t) = \sum_{j=1}^3 B_j \sin(k_j \omega_n t) + \rho_{2i} + \frac{(\rho_{2f} - \rho_{2i}) \omega_n t}{\pi} \quad (3.6)$$

où  $A_2, A_3, B_2, B_3$  seront des paramètres exprimés respectivement en fonction de  $A_1$  et  $B_1$ ;  $A_1, B_1$  seront les paramètres à optimiser pour qu'à la fin de la période, les valeurs finales de  $\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$  soient celles désirées;  $\omega_n$  est la fréquence naturelle du système estimée durant la demi-oscillation;  $k_2 = k_1 + 1, k_3 = k_1 + 2$  et  $k_1$  est le plus petit multiplicateur qu'on applique à la fréquence naturelle. Ce dernier multiplicateur ainsi que le choix du déphasage sont choisis pour que la fonction paramétrique excite le plus possible le robot.

Sachant que le manipulateur est parallèle, il ne fait pas de sens d'étudier l'effet de chaque câble en détail individuellement. En effet, c'est la combinaison des deux câbles qui a un effet sur le mouvement de l'effecteur. C'est pour cela que toutes les études seront basées sur la prémisse que les deux câbles sont en mouvement, et la relation entre ces câbles est autant étudiée que leur effet sur le mouvement du robot.

## 3.2 Détermination de la fréquence

Une première étape est d'établir la fréquence à utiliser dans les équations 3.5 et 3.6. D'après les travaux de Lefrançois (2010), les fréquences à utiliser sont des multiples de la

fréquence naturelle. Cependant, contrairement au robot étudié dans cette référence, la fréquence naturelle du robot étudié ici n'a pas de formule toute faite dans la littérature (Blevins (1979) parmi les références), il faut donc en tirer une approximation avant de pouvoir trouver la fréquence à utiliser.

### 3.2.1 Détermination de la fréquence naturelle

Pour déterminer la fréquence naturelle, comme aucune référence n'a pu donner d'équation, il a fallu faire notre propre investigation. En repartant des équations développées à la section 2.6, on obtient une équation différentielle de second ordre de la forme suivante :

$$W = F_1\ddot{\phi} + F_2\dot{\phi}^2 + F_3 = 0 \quad (3.7)$$

où  $F_1$  à  $F_3$  sont des fonctions des angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\phi$ , des longueurs, vitesses et accélérations des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

Pour avoir une idée de la fréquence naturelle durant l'oscillation, il a d'abord fallu la linéariser autour du point d'équilibre, soit calculer

$$W_{lin} = \frac{\partial W}{\partial \ddot{\phi}} \Big|_{eq} \ddot{\phi} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\phi}} \Big|_{eq} \dot{\phi} + \frac{\partial W}{\partial \phi} \Big|_{eq} \phi = 0 \quad (3.8)$$

$$W_{lin} = F_1 \Big|_{\phi=\phi_{eq}} \ddot{\phi} + \frac{\partial F_3}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_{eq}} \phi = 0. \quad (3.9)$$

On voit que le terme  $F_2\dot{\phi}$  disparaît, puisqu'on l'évalue au point d'équilibre, où les vitesses sont nulles.

Cette forme est maintenant familière, car elle est la même que pour le pendule simple, équation 3.1. Il suffit alors d'évaluer avec Maple la dérivée partielle de l'équation 3.9, pour avoir finalement l'équation

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{\partial F_3}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_{eq}}}{F_1 \Big|_{\phi=\phi_{eq}}}}. \quad (3.10)$$

Ce calcul de la fréquence naturelle est bien sûr approximatif, mais il donne un ordre de grandeur qui peut être précisé par simulation. Par contre, cette approximation demande la connaissance du point d'équilibre du système, qui doit maintenant être calculé.

### 3.2.2 Détermination de la position à l'équilibre

Le calcul de la position du système à l'équilibre est plus simple que le calcul menant à l'obtention de  $\ddot{\phi}$  ou de  $\omega_n$ , mais il nécessite tout de même un traitement symbolique à l'aide d'un logiciel.

La première étape est d'utiliser les équations des forces en régime statique (vitesses et accélérations nulles), soit

$$F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 - mg = 0 \quad (3.11)$$

$$F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (3.12)$$

$$F_1 \left( \left( d \cos \phi - \frac{b}{2} \sin \phi \right) \sin \theta_1 + \left( -d \sin \phi - \frac{b}{2} \cos \phi \right) \cos \theta_1 \right) + F_2 \left( \left( d \cos \phi + \frac{b}{2} \sin \phi \right) \sin \theta_2 + \left( -d \sin \phi + \frac{b}{2} \cos \phi \right) \cos \theta_2 \right) = 0 \quad (3.13)$$

En isolant  $F_1$  et  $F_2$ , on trouve

$$F_1 = \frac{-mg \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.14)$$

$$F_2 = \frac{mg \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.15)$$

et en retournant aux équations 2.48 et 2.49, on isole  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en fonction de  $\phi$ .

Ensuite, il suffit de remplacer les valeurs de  $F_1, F_2, \theta_1, \theta_2$  dans l'équation 3.13, puis la résoudre pour obtenir la valeur de  $\phi$  à l'équilibre. Cependant, suite au remplacement des variables, l'équation 3.13 est de degré 6 et contient soit des  $\sin \phi$  ou des  $\cos \phi$ . Pour la résoudre, il faut appliquer l'identité

$$\sin \phi = \frac{2 \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}, \quad \cos \phi = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \quad (3.16)$$

puis résoudre une équation maintenant de degré 12. Ce problème peut admettre jusqu'à 12 solutions réelles (Jiang et Kumar (2010)). Parmi les solutions réelles, il suffit

d'évaluer la coordonnée  $x$  du centre de masse. En effet, la solution à l'équilibre stable sera celle ayant l'énergie potentielle la plus basse, donc la coordonnée  $x$  du centre de masse la plus élevée. La connaissance de la valeur de l'angle  $\phi$  lorsque le manipulateur est à l'équilibre servira à diverses reprises, entre autres pour trouver une approximation raisonnable de la fréquence naturelle du robot.

### 3.2.3 Détermination de la fréquence d'excitation

Bien que les travaux de Lefrançois (2010) montrent l'importance d'utiliser des fonctions trigonométriques pour exciter le robot à des multiples de la fréquence naturelle, il faut vérifier cette affirmation dans le cas du manipulateur parallèle, puis trouver, le cas échéant, le plus petit multiple à utiliser.

Pour ce faire, le simulateur développé auparavant a été utilisé. La trajectoire suivante a été imposée à chaque câble :

$$\rho_1(t) = 2 + 0,02 \sin(\omega t) \quad (3.17)$$

$$\rho_2(t) = 2 - 0,02 \sin(\omega t). \quad (3.18)$$

Au temps  $t = 0$ , l'effecteur commençait avec une orientation de  $\phi = -0.15$  rad, donc à une position différente du point d'équilibre. Sans action, l'orientation de l'effecteur devrait varier entre  $-0,15$  et  $0,15$  radians. À la bonne fréquence, l'effecteur recevra de l'énergie et son orientation suivra une forme cosinusoidale d'amplitude croissante. D'autre part, en inversant le signe de l'excitation pour chaque câble, à la même fréquence l'effecteur aura tendance à perdre de l'énergie, et son excitation tendra à s'estomper. C'est le premier cas qu'on observe à la figure 3.2, puisque pour chaque fréquence l'oscillation du système a tendance à s'amplifier. Cependant, on note que pour de hautes fréquences, l'oscillation s'amplifie très peu, et change très peu en fonction de la fréquence. Pour de basses fréquences, les pics sont bien plus proéminents, avec un pic très élevé en valeur absolue près de la valeur prédite de la fréquence naturelle.

Il est donc possible de conclure de cette figure qu'en excitant le système avec sa fréquence naturelle, il sera très facile de lui donner (ou retirer) de l'énergie. C'est donc la fréquence de base à utiliser aux équations 3.5 et 3.6, soit avoir  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$  et  $k_3 = 3$ .

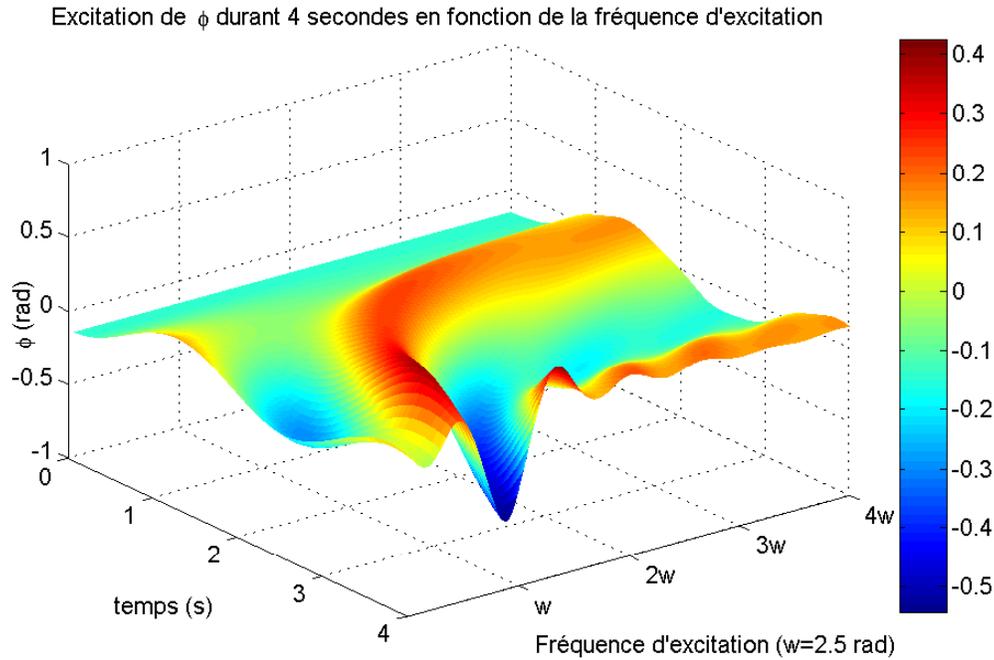


FIGURE 3.2 – Valeur de l’orientation de l’effecteur suite à des excitations sinusoïdales de 2 cm à diverses fréquences.

### 3.3 Détermination du déphasage

Une fois la fréquence exacte à utiliser connue, il faut déterminer le déphasage des fonctions d’excitation qui ont le plus grand effet sur le mouvement du manipulateur. Pour ce faire, une série de simulations ont été faites pour des conditions initiales  $\phi = -0,15$  radians,  $\rho_1 = \rho_2 = 2$  m, toutes vitesses et toutes accélérations supposées nulles. Considérant que sans action, l’effecteur basculerait jusqu’à l’extremum opposé,  $\phi = 0,15$  radians, et donc autour du point d’équilibre, l’angle  $\phi$  suit une trajectoire cosinusoidale. De plus, la combinaison de déphasages qui donnera la plus grande valeur de  $\phi$  sera choisie pour exciter le système, et la combinaison qui donnera la plus petite valeur de  $\phi$  sera choisie pour ralentir le système.

La figure 3.3 illustre le résultat de ces simulations. Chaque simulation est le résultat d’excitations d’amplitude de 2 cm, de fréquence égale à la fréquence naturelle du système, et d’une combinaison particulière de déphasages entre chaque câble et l’effecteur. De plus, chaque simulation a été arrêtée après la première demi-période, et la valeur finale (l’extremum) est indiquée sur le graphique. Il est assez évident que pour des ex-

citations en phase avec le manipulateur, la valeur de  $\phi$  est très proche de 0,15 radians. Ceci s'explique par l'effet des câbles, qui étant synchronisés, n'ont fait que raccourcir ensemble, montant l'effecteur. D'autre part, une bosse et un creux sont clairement visibles. La bosse, ou l'excitation maximale, est localisée autour du point  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . De façon symétrique, le creux, ou le ralentissement maximal, est située autour du point  $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ . Un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  dans le contexte d'une cosinusoïde indique que la meilleure forme à utiliser est une sinusoïde pour chaque câble, et de plus que les deux câbles sont déphasés entre eux de  $180^\circ$ .

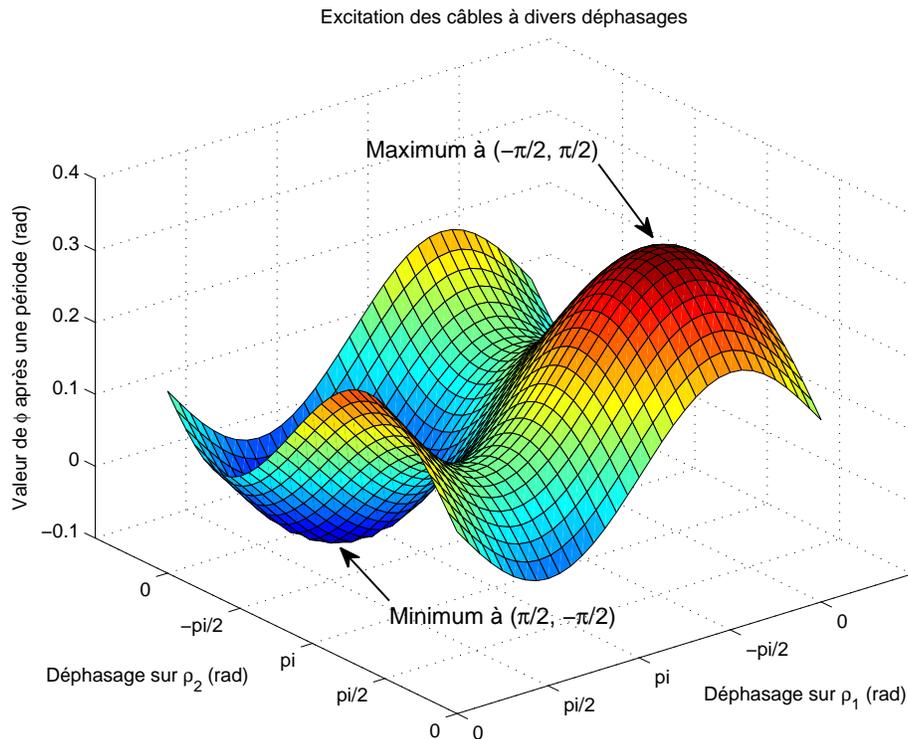


FIGURE 3.3 – Valeur de l'orientation de l'effecteur suite à des excitations sinusoïdales de 2 cm à la fréquence naturelle selon divers déphasages.

La figure 3.4 montre en détail l'évolution temporelle de  $\phi$  dans trois scénarios. Premièrement, si les deux câbles sont en phase avec le manipulateur, l'angle final de  $\phi$  est proche de 0,15 radians. C'est le seul cas où, dans la partie inférieure de la figure, les câbles ne terminent pas la demi-période à la même longueur qu'ils avaient au début. Par la suite, les deux extrêmes sont montrés, un où le système a perdu près de la moitié de l'énergie qu'il avait (en ralentissant), et l'autre extrême où le système a gagné près de la moitié de l'énergie qu'il avait (en accélérant).

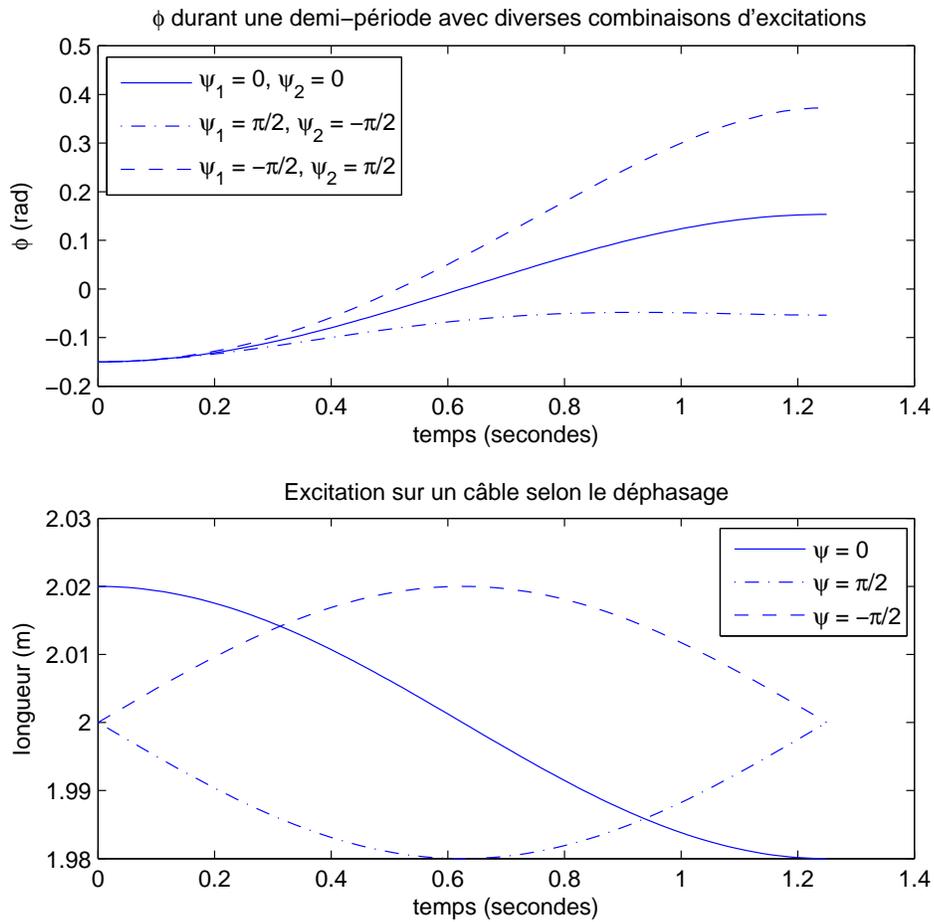


FIGURE 3.4 – Évolution de l'orientation de l'effecteur durant une demi-période avec diverses combinaisons de déphasages.

### 3.4 Équations paramétriques finales

Les éléments obtenus jusqu'ici permettent donc d'établir la forme exacte de la trajectoire à appliquer à chaque câble. Il faut donc avoir, entre chaque extremum,

$$\rho_1(t) = \sum_{j=1}^3 A_j \sin(j\omega_n t) + \rho_{1i} + \frac{(\rho_{1f} - \rho_{1i})\omega_n t}{\pi} \quad (3.19)$$

$$\rho_2(t) = \sum_{j=1}^3 B_j \sin(j\omega_n t) + \rho_{2i} + \frac{(\rho_{2f} - \rho_{2i})\omega_n t}{\pi}. \quad (3.20)$$

En ce qui concerne la vitesse et l'accélération, nous avons respectivement

$$\dot{\rho}_1(t) = \sum_{j=1}^3 j A_j \omega_n \cos(j\omega_n t) + \frac{(\rho_{1f} - \rho_{1i})\omega_n}{\pi} \quad (3.21)$$

$$\dot{\rho}_2(t) = \sum_{j=1}^3 j B_j \omega_n \cos(j\omega_n t) + \frac{(\rho_{2f} - \rho_{2i})\omega_n}{\pi} \quad (3.22)$$

$$\ddot{\rho}_1(t) = -\sum_{j=1}^3 j^2 A_j \omega_n^2 \sin(j\omega_n t) \quad (3.23)$$

$$\ddot{\rho}_2(t) = -\sum_{j=1}^3 j^2 B_j \omega_n^2 \sin(j\omega_n t). \quad (3.24)$$

En évaluant aux temps initial et final les équations 3.19 à 3.24, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \rho_1(0) \\ \dot{\rho}_1(0) \\ \ddot{\rho}_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{1i} \\ A_1\omega_n + 2A_2\omega_n + 3A_3\omega_n + \frac{(\rho_{1f}-\rho_{1i})\omega_n}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \\ \dot{\rho}_1\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \\ \ddot{\rho}_1\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{1f} \\ -A_1\omega_n + 2A_2\omega_n - 3A_3\omega_n + \frac{(\rho_{1f}-\rho_{1i})\omega_n}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_2(0) \\ \dot{\rho}_2(0) \\ \ddot{\rho}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{2i} \\ B_1\omega_n + 2B_2\omega_n + 3B_3\omega_n + \frac{(\rho_{2f}-\rho_{2i})\omega_n}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_2\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \\ \dot{\rho}_2\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \\ \ddot{\rho}_2\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{2f} \\ -B_1\omega_n + 2B_2\omega_n - 3B_3\omega_n + \frac{(\rho_{2f}-\rho_{2i})\omega_n}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

En ce qui concerne les longueurs initiales et finales des câbles, ainsi que les accélérations initiales et finales, elles respectent toutes les conditions désirées. Les accélérations nulles permettent d'autre part d'augmenter la stabilité du système. Il faut maintenant établir les vitesses initiales et finales. D'une façon similaire aux accélérations, imposer des vitesses initiales et finales nulles augmente la stabilité du système et le rend plus facile à contrôler, sans réduire ses performances. C'est la raison pour laquelle tant vitesses qu'accélérations sont imposées comme nulles. D'autre part, en isolant les paramètres  $A_2, A_3, B_2, B_3$ , il est possible de les exprimer en fonction de  $A_1, B_1$ , nous donnant

les deux paramètres libres et dont l'optimisation permettra de contrôler le robot aux prochains chapitres.

Les coefficients ainsi obtenus suite à l'imposition des vitesses nulles sont

$$A_2 = \frac{\rho_{1i} - \rho_{1f}}{2\pi} \quad (3.29)$$

$$A_3 = \frac{-A_1}{3} \quad (3.30)$$

$$B_2 = \frac{\rho_{2i} - \rho_{2f}}{2\pi} \quad (3.31)$$

$$B_3 = \frac{-B_1}{3}. \quad (3.32)$$

L'étape suivante sera expliquée au prochain chapitre, et expliquera le choix des coefficients  $A_1$  et  $B_1$

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre a montré les étapes qui ont mené à la définition de la stratégie de commande. En montrant d'abord l'utilité d'établir des trajectoires locales, les équations paramétriques gérant la longueur des câbles ont pu être définies. Il a d'abord fallu avoir un estimé de la fréquence naturelle en utilisant une linéarisation ainsi qu'en trouvant la valeur de l'angle  $\phi$  à l'équilibre. Des tests ont permis de cibler avec plus de précision la fréquence à utiliser dans les équations paramétriques.

Par la suite une étude sur les déphasages entre le mouvement de l'effecteur et l'excitation des câbles a permis de déterminer exactement la nature sinusoïdale des fonctions paramétriques, permettant ainsi de trouver la forme finale des équations d'excitation des câbles, et d'isoler les paramètres libres nécessaires pour l'algorithme de commande présenté au prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Séquence de commande et résultats de simulation

Les outils nécessaires pour simuler le robot durant et suite à une série d'excitations imposées aux câbles ont été trouvés au chapitre 2, les fonctions d'excitations des câbles avec deux paramètres libres ont été trouvées au chapitre 3, il reste maintenant deux étapes.

Premièrement, connaissant un objectif local que l'on veut atteindre, il faut choisir les paramètres libres  $A_1$  et  $B_1$  de façon à remplir convenablement l'objectif. Par la suite, il faut établir une séquence de définition d'objectifs locaux qui permettra de rejoindre l'objectif global, et ce connaissant à chaque extremum l'état actuel du robot.

Une fois ces étapes remplies, quelques trajectoires typiques seront simulées, et les résultats permettront d'évaluer les performances de l'algorithme de commande.

## 4.1 Optimisation des paramètres libres

La première étape à franchir pour pouvoir contrôler le manipulateur réel est de connaître l'effet qu'ont les paramètres libres  $A_1$  et  $B_1$  des équations 3.19 à 3.24. Dans la séquence de commande finale, une fois un objectif local défini et lorsque le pendule est encore à son extremum, le contrôleur doit simuler différents scénarios. Tout ce qui change entre deux scénarios sont les paramètres libres : une recherche visant à minimiser un critère doit donc être effectuée sur  $A_1$  et  $B_1$  afin de trouver la combinaison qui, appliquée dès que le robot se remet en mouvement, permettra au manipulateur de rejoindre l'objectif local au prochain extremum. Dans un cas réaliste où des perturbations de mesure, de modèle ou de fonctionnement existent, l'état du robot au prochain extremum devrait être proche de l'objectif local. Si tel n'est pas le cas, un nouvel objectif local sera déterminé afin de rejoindre, peut-être avec plus d'étapes que prévu en simulation, l'objectif global.

### 4.1.1 Recherche à deux dimensions

Toujours en s'inspirant des travaux de Lefrançois (2010), la première méthode de recherche est plus générique. Il s'agit d'effectuer une recherche en deux dimensions, notamment les valeurs de  $A_1$  et  $B_1$ , afin de minimiser un critère. Ce critère tient compte de plusieurs aspects. Premièrement, il faut que l'angle  $\phi$  à la fin de la période de commande soit le plus près possible de l'objectif global, et il en est de même pour la valeur de la vitesse angulaire  $\dot{\phi}$ .

D'autre part, il faut respecter certaines contraintes. Celles-ci sont :

$$\begin{aligned}
 F_{1min} = F_{2min} &= 0 \text{ N} & \rho_{1min} = \rho_{2min} &= 1 \text{ m} \\
 F_{1max} = F_{2max} &= 40 \text{ N} & \rho_{1max} = \rho_{2max} &= 3 \text{ m} \\
 & & \dot{\rho}_{1max} = \dot{\rho}_{2max} &= 1,5 \text{ m/s.}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Leur but est d'assurer que les câbles ne fléchissent pas (forces minimales) et ne risquent pas de se casser (forces maximales). De plus, ces contraintes respectent la vitesse maximale des enrouleurs qui seront utilisés dans le prototype, ainsi que la longueur maximale des câbles qui seront installés en réalité. La longueur minimale des câbles est plus une contrainte de fonctionnalité qu'une contrainte physique. En effet, même si les câbles

peuvent rejoindre physiquement une longueur inférieure à un mètre, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deviennent trop grands et le robot devient beaucoup plus difficile à contrôler. En limitant la zone de travail établie au chapitre 1, les performances du robot restent intéressantes.

Connaissant les contraintes, un indice de pénalité peut être appliqué avec la forme

$$P_\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } \max(\psi(t)) \leq \psi_{max} \\ K_{\psi_1} + K_{\psi_2}(\max(\psi(t)) - \psi_{max}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

Cette forme utilise la même nomenclature que Lefrançois (2010), soit  $\psi(t)$  est la variable que l'on associe à une contrainte à respecter ( $\psi_{max}$  ou  $\psi_{min}$ ), ainsi que les constantes  $K_{\psi_1}$  et  $K_{\psi_2}$  qui sont déterminées expérimentalement. Il serait possible d'utiliser uniquement une constante  $K_{\psi_1}$  pour chaque contrainte, mais l'algorithme d'optimisation ne pourrait pas distinguer d'un cas qui est à la limite de respecter une contrainte (par exemple une force de -0,1 N) d'un cas qui est loin de respecter une contrainte (par exemple une force de -10 N). Pour chaque itération de l'algorithme de recherche, ou pour chaque couple  $[A_1, B_1]$  testé, les longueurs des câbles ainsi que les vitesses sont obtenues directement par les équations 3.19 à 3.22. Les forces, cependant, doivent être évaluées à l'aide des équations 1.40 à 1.42.

Connaissant ainsi les indices de pénalité, l'équation à minimiser devient alors

$$\min_{A_1, B_1} \Delta \quad (4.3)$$

où

$$\Delta = (|\phi(t_f)| - |\phi_f|)^2 + K_p \left( \dot{\phi}(t_f) \right)^2 \sum_{j=1}^c P_j(t) \quad (4.4)$$

où  $\phi_f$  est l'objectif que l'on souhaite rejoindre, et  $c$  est le nombre de contraintes, dans ce cas 10. Un paramètre qui peut demander une explication est la présence de la vitesse angulaire  $\dot{\phi}$ . Puisqu'on veut que l'horizon de prédiction s'étende d'un extremum à l'extremum suivant, on a utilisé la fréquence naturelle du système  $\omega_n$ . Cependant, cette valeur est approximative, et il est possible que le prochain extremum arrive un peu plus tôt ou un peu plus tard que prévu. Comme la performance de cette méthode de commande repose sur l'identification correcte d'un extremum, il serait souhaitable d'assurer une vitesse nulle (et donc la présence d'un vrai extremum) à la fin de l'horizon de prédiction. Ceci est fait en jouant un peu avec les couples  $[A_1, B_1]$  et la pondération  $K_p$ , qui permet de mettre plus ou moins l'emphase sur la vitesse finale.

L'algorithme de recherche en deux dimensions peut prendre diverses formes. La méthode générale consiste à choisir un certain nombre de couples  $[A_1, B_1]$  à tester, puis de comparer l'indice de performance  $\Delta$  pour chaque couple. Des nouveaux couples sont choisis à chaque itération, jusqu'à ce que la valeur de  $\Delta$  rejoigne un seuil minimal ou que le nombre maximal d'itérations soit atteint. Cependant, les premières tentatives avec l'algorithme *fminsearch* de Matlab se sont révélées trop lentes, demandant un minimum de 50 itérations avant de converger vers une erreur  $|\phi_f - \phi(t_f)|$  acceptable. En comptant le temps nécessaire pour chaque itération, il faudrait trop de temps pour que l'algorithme puisse être exécuté en temps réel.

### 4.1.2 Étude sur l'effet des paramètres libres

Étant donnée la nature parallèle du robot, un lien entre les deux paramètres  $[A_1, B_1]$  est attendu. En étudiant l'effet des paramètres libres sur le mouvement du manipulateur, il est possible d'obtenir une relation entre ces deux paramètres, réduisant la recherche en deux dimensions à une série de recherches à une dimension, accélérant grandement le processus pour une perte minime de précision. Cependant, puisqu'avec une recherche en deux dimensions il est possible d'optimiser deux paramètres ( $\phi$  et  $\dot{\phi}$  finaux), en faisant une recherche à une seule dimension il n'est possible que d'optimiser un paramètre.

Plusieurs cas ont été testés, pour des valeurs de  $A_1$  et  $B_1$  variant entre -0,35 et 0,35 mètres, pour des longueurs telles que le point d'équilibre est  $\phi_{eq} = \pm \{0; 0, 1; 0, 2; 0, 3\}$  radians, et pour des angles de départ  $\phi = \phi_{eq} \pm \{0; 0, 2; 0, 3; 0, 4\}$  radians. Les figures 4.1 et 4.2 illustrent l'allure générale des résultats de ces tests. Pour être plus précis, c'est le cas où les longueurs initiales des câbles ( $\rho_1 = 2,068\text{m}, \rho_2 = 2\text{m}$ ) donnent un angle  $\phi$  à l'équilibre de 0,2 radians, et l'angle initial  $\phi$  est de 0,4 radians.

Premièrement, on remarque que pour  $A_1 = B_1 = 0$ , l'angle final et la vitesse finale sont très proches de 0. Deux conclusions sont donc tirées. Tout d'abord, l'effecteur commence sa demi-période à un angle  $\phi = 0,4$  radians, soit un angle plus élevé que l'équilibre de 0,2 radians. Cette distance entre la valeur initiale de  $\phi$  et le point d'équilibre portera la notation de  $\Delta\phi$ . Sans excitation, l'angle  $\phi$  aura tendance à osciller librement de  $\Delta\phi$  radians autour de son point d'équilibre, oscillant donc entre 0,4 ra-

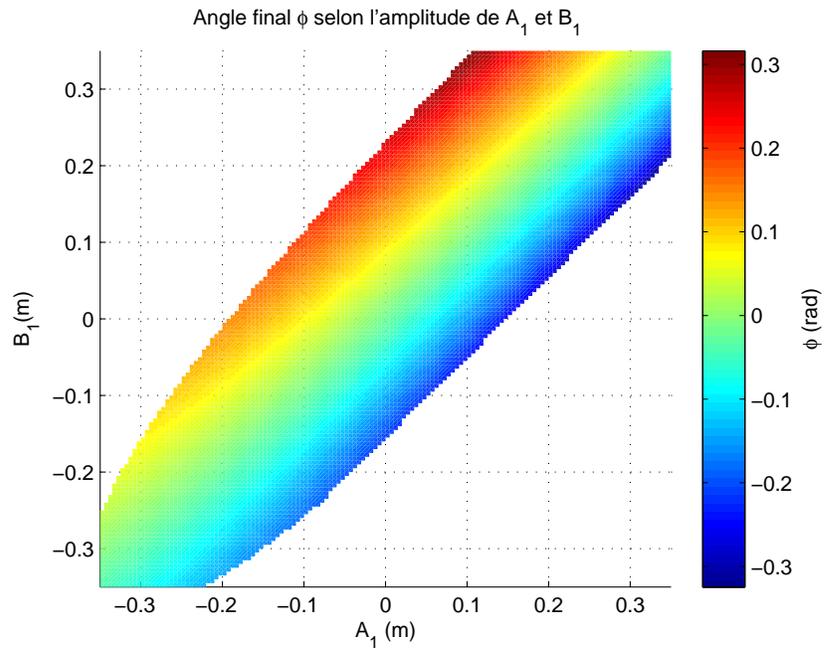


FIGURE 4.1 – Orientation finale de l'effecteur selon diverses combinaisons d'excitations.

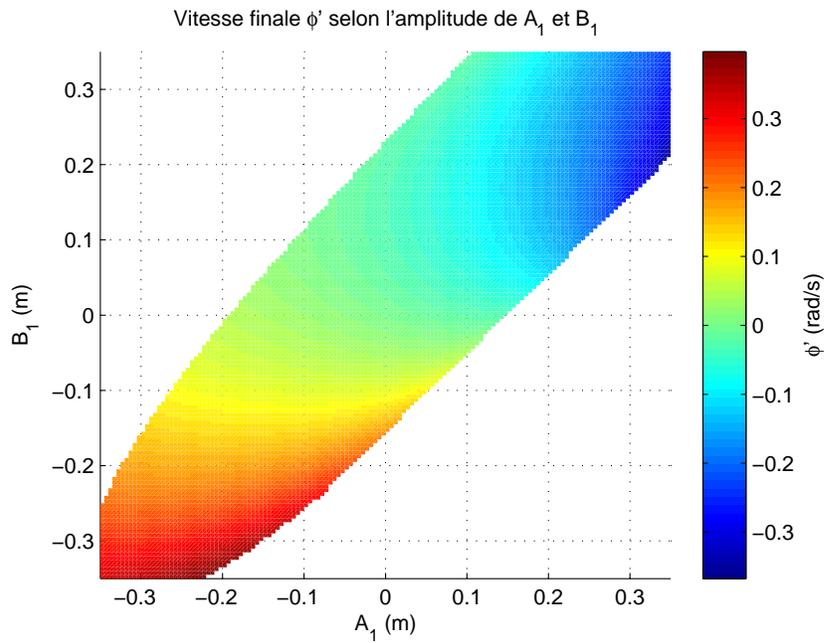


FIGURE 4.2 – Vitesse angulaire finale de l'effecteur selon diverses combinaisons d'excitations.

dians (la position de départ) et 0 radians (la valeur de l'angle obtenue après la première demi-période). Cette observation est donc en accord avec la théorie, corroborant les travaux effectués jusqu'ici. De plus, la vitesse est presque nulle, ce qui veut dire que la demi-période se termine bien avec un extremum. Puisque la durée de cette demi-période a été basée sur la fréquence naturelle, ceci corrobore l'estimé que nous avons, tant et aussi longtemps que les câbles maintiennent la même longueur.

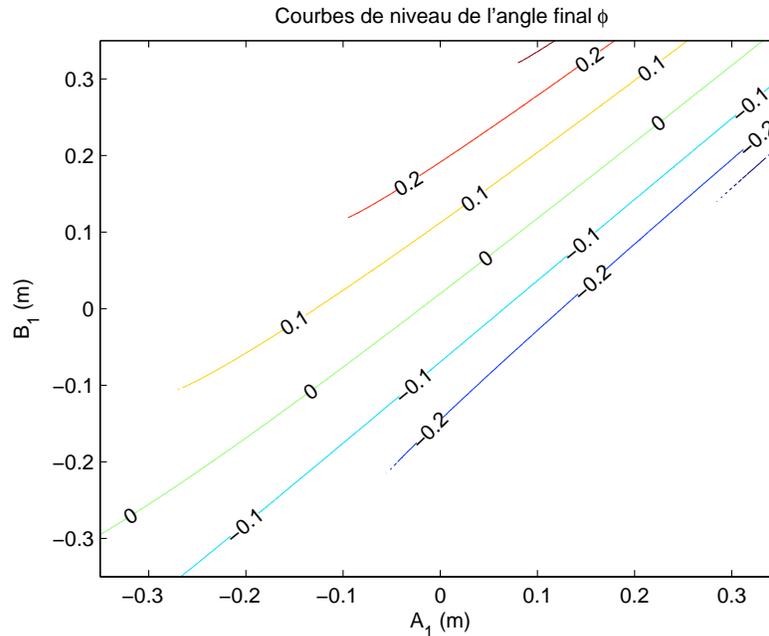


FIGURE 4.3 – Courbes de niveau de l'orientation finale.

Par la suite, les figures 4.3 et 4.4 illustrent bien le lien direct entre  $A_1$  et  $B_1$ . Dans la figure 4.3, les courbes sont toutes pratiquement des droites parallèles entre elles, et parallèles à l'axe  $B_1 = A_1$ . Ceci veut dire que si nous excitons le système avec les câbles en phase et avec la même amplitude, l'angle final ne changera presque pas par rapport au cas où l'on n'excite pas du tout le système. Il faut s'attendre à ce résultat, car si on tire les câbles de façon identique, le seul effet sera de monter et descendre l'effecteur.

D'autre part, si nous voulons établir un lien simple entre  $A_1$  et  $B_1$ , la meilleure solution serait de prendre un choix perpendiculaire à ces droites, donc de choisir  $B_1 = -A_1$ . Ainsi, une petite variation de  $A_1$  aura le plus grand effet possible sur la valeur finale de l'angle  $\phi$ . Il faut cependant faire attention aux forces minimales. Plus on excite fortement le robot, plus les forces deviennent extrêmes. Tous les couples  $[A_1, B_1]$  pour lesquels un point coloré est associé génèrent des forces positives tout au long de la

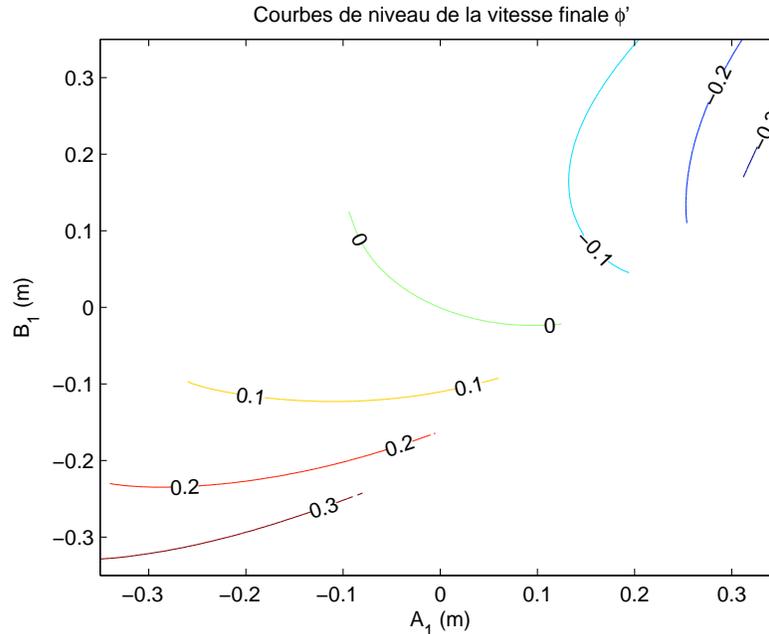


FIGURE 4.4 – Courbes de niveau de la vitesse angulaire finale.

trajectoire. Cependant, les couples dans les zones blanches excitent trop le système et, durant la demi-période, une force négative est détectée sur un des câbles. En choisissant  $B_1 = -A_1$ , on voit que pour des valeurs de  $A_1$  supérieures à 0,1m en valeur absolue, il y a présence de forces négatives. Cette valeur de 10 centimètres est une limite retrouvée dans tous les cas étudiés. Cependant, dans une situation différente (masses, inertie et géométrie différentes), cette relation n'est pas nécessairement vraie. En effet, rien ne démontre la généralité de cette expression.

Le problème est plus visible à la figure 4.4. Étant donné que l'on veut une recherche mono-variable, il ne sera plus possible de trouver un point de l'espace qui a la valeur finale de  $\phi$  voulue à une vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  nulle. D'autre part, on voit que les couples  $[A_1, B_1]$  générant une vitesse angulaire finale nulle sont très proches de la droite  $B_1 = -A_1$  pour  $A_1 < 0$ , mais pour  $A_1 > 0$ , ce n'est pas le cas. Toutefois, la figure 4.5 montre un compromis possible. On se souvient que, pour cette simulation, le robot commençait avec un angle  $\phi = 0,4$  radians, soit

$$\phi(0) = \phi_{eq} + \Delta\phi_i = 0,2 + 0,2 = 0,4 \text{ rad.} \quad (4.5)$$

Après une demi-période, en absence d'excitation la valeur finale de  $\phi$  est de 0 radians, soit

$$\phi(t_f) = \phi_{eq} - \Delta\phi_f = 0,2 - 0,2 = 0 \text{ rad.} \quad (4.6)$$

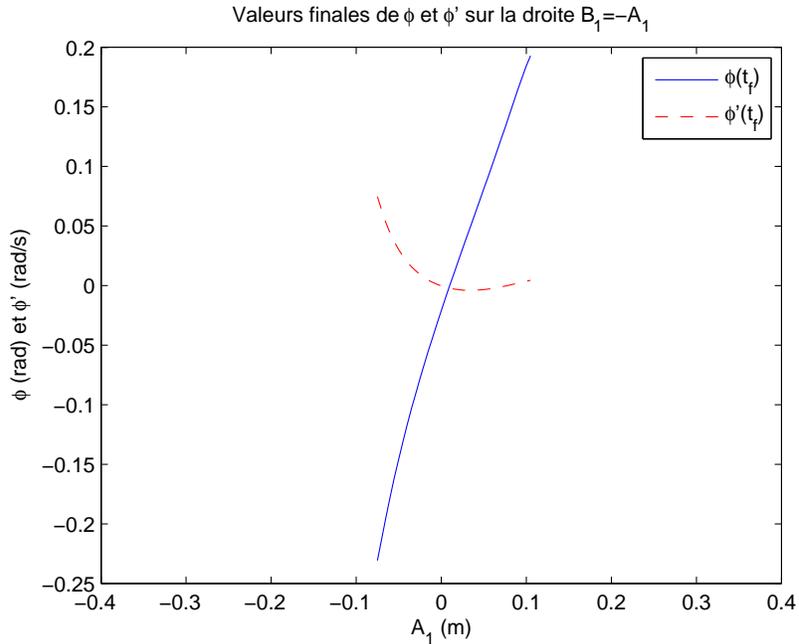


FIGURE 4.5 – Valeurs finales de l’orientation de l’effecteur et de sa vitesse en fonction d’un seul paramètre libre.

Si le système n’est pas excité ( $A_1 = 0$ ), nous avons  $\Delta\phi_i = \Delta\phi_f$ . En excitant le système, cette dernière relation est brisée. Pour contrôler le système, il faut donc modifier le  $\Delta\phi_f$ , de façon à ce que la valeur finale de  $\phi$  rejoigne l’objectif local  $\phi_f$ .

Or, à la figure 4.6, on remarque que si on limite la valeur finale de  $\phi$  à l’intervalle  $[-0, 1; 0, 1]$  rad, donc si on limite l’excitation

$$|\Delta\phi_f - \Delta\phi_i| \leq 0, 1 \text{ rad}, \quad (4.7)$$

la vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  finale est très proche de 0. Ces mêmes conclusions peuvent être observées en partant d’autres cas possibles.

Finalement, il est remarquable de voir que la valeur finale de  $\phi$  varie pratiquement linéairement avec  $A_1$  à la figure 4.6. Cette observation sera très utile dans la méthode d’optimisation finale.

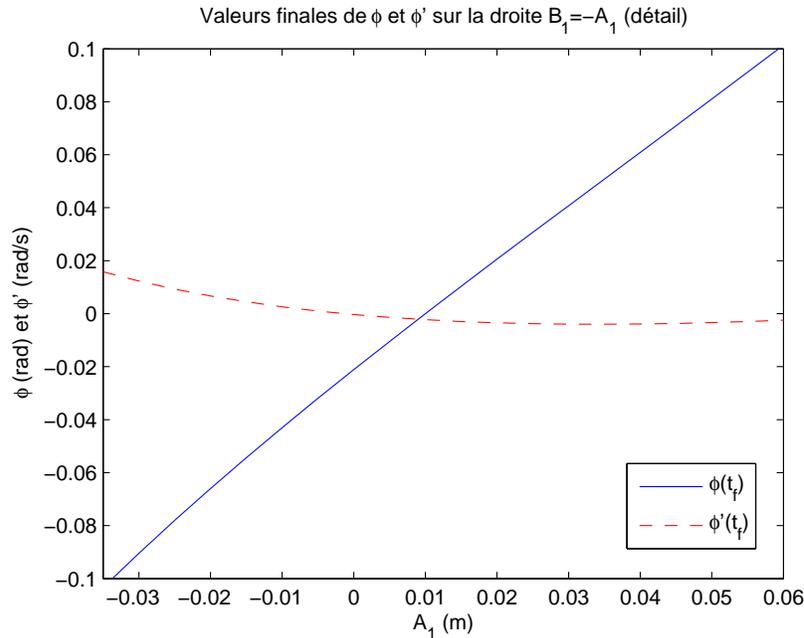


FIGURE 4.6 – Valeurs finales de l’orientation de l’effecteur et de sa vitesse (détail).

### 4.1.3 Méthode d’optimisation finale

La section précédente a permis d’établir un lien possible entre les paramètres libres, soit  $B_1 = -A_1$ . Ce lien permettrait d’effectuer une recherche monovariante pour minimiser le critère à l’équation 4.4. Sa limitation est la perte de contrôle sur la vitesse finale de l’effecteur. Dans le cas étudié à la figure 4.6, il suffit que l’objectif  $\phi_f$  soit proche et rejoignable avec peu d’excitation. Cette solution est fonctionnelle dans tous les cas où l’estimation de la fréquence naturelle est bonne.

De façon expérimentale, il a été observé que cette hypothèse est vérifiée dans plusieurs cas, mais pas toujours. Lorsque la valeur de  $\rho_{1f}$  ou de  $\rho_{2f}$  est différente de  $\rho_{1i}$  ou de  $\rho_{2i}$  (voir les équations 3.19 et 3.20), l’estimation de la fréquence naturelle est mauvaise. Ceci est explicable en deux points.

Tout d’abord, les calculs menant à l’estimé de la fréquence naturelle comptent quelques approximations (voir l’équation 3.9). Entre autres, les longueurs de câbles étaient supposées constantes, et leurs vitesses ainsi qu’accélération nulles. Cette approximation est raisonnable lorsque les longueurs initiales et finales des câbles sont les mêmes, mais erronée dans le cas contraire.

Deuxièmement, il faut faire un bref retour à la base du système. Lorsque les câbles ont une longueur constante, le système devient un mécanisme à quatre barres sous-actionné. Si les câbles étaient rigides, l'effecteur pourrait bouger librement le long d'une trajectoire unique, une sextique tricirculaire, comme étudié par Merlet et collab. (1998). Peu importe où se trouve l'effecteur sur cette courbe, le robot a un comportement bien défini avec un point d'équilibre et une fréquence naturelle bien déterminés. Si les câbles changent de longueur, l'effecteur change aussi de courbe. Arrivé à la longueur finale des câbles, l'effecteur se trouve à parcourir une toute nouvelle sextique tricirculaire, avec une toute nouvelle fréquence naturelle et un nouvel équilibre. Si la différence de longueur de câbles entre la première sextique tricirculaire et la seconde est suffisamment importante, l'estimé de la fréquence naturelle est erroné.

La solution à ce problème a mené directement à la méthode d'optimisation finale. Les étapes sont les suivantes

1. Connaissant l'état actuel du robot, faire une simulation avec  $A_1 = B_1 = 0$  ;
  - (a) Si une force négative est observée, effectuer une recherche sur  $A_1$  ou  $B_1$  pour trouver une solution sans forces négatives. Appliquer cette solution <sup>1</sup>.
  - (b) Si la vitesse finale du robot est supérieure à la tolérance <sup>2</sup>, faire une recherche sur la fréquence naturelle par descente de gradient. Après 6 itérations, ou après que la vitesse finale soit inférieure à la tolérance, fixer la valeur de  $\omega_n$  et continuer ;
2. Faire une simulation avec  $A_1 = 0,02$  m,  $B_1 = -A_1$  ;
  - (a) Si la valeur de  $\phi(t_f) - \phi_f$  est à l'intérieur de la tolérance <sup>3</sup>, appliquer cette solution.
3. Effectuer une recherche avec le gradient sur  $A_1$ , en limitant  $-0,1 \leq A_1 \leq 0,1$  m ;
4. Lorsque 20 itérations toute recherche confondue ont été faites, ou lorsque la valeur de  $\phi(t_f) - \phi_f$  est à l'intérieur de la tolérance, appliquer la solution finale.

Les deux recherches se font par la méthode de la descente du gradient. Cette technique fonctionne bien puisqu'il a été remarqué que, dans le cas de la recherche sur  $\omega_n$ ,

---

1. Il se peut que, si le robot est trop loin de l'espace de travail statique au début de la demi-période, les câbles entrent en compression même si on n'excite pas le manipulateur. Si cela se produit, il faut reconnaître quel câble entre en compression, puis trouver la valeur du paramètre libre associé qui permet d'éliminer les forces négatives. L'autre câble maintient sa longueur tout au long de la demi-période.

2. De façon expérimentale le critère a été placé à 0,05 rad/s.

3. De façon expérimentale le critère a été placé à 0,001 rad.

la vitesse angulaire finale  $\dot{\phi}$  est une fonction quasi-linéaire de  $\omega_n$ , et dans le cas de la recherche sur  $A_1$ , la valeur de  $\phi$  est aussi une fonction presque linéaire de  $A_1$ . En partant d'un point de départ connu, il suffit de varier un peu  $\omega_n$  ou  $A_1$ , puis de voir l'effet sur la variable dépendante.

Les fonctions sont monotones dans la plage de travail, soit  $|A_1| \leq 0,1$  m et  $0,5\omega_{n0} \leq \omega_n \leq 1,5\omega_{n0}$  tel que  $\omega_{n0}$  est la fréquence naturelle estimée au chapitre 3, et la limite de 50% est une limite fixée expérimentalement. Ceci assure qu'en calculant le gradient il est possible d'estimer la position du point recherché (vitesse nulle ou  $\phi$  désiré), puis simuler avec le nouveau paramètre. On converge ainsi vers la bonne valeur de  $\phi$  ou vers une vitesse minimale.

## 4.2 Définition des objectifs locaux

Ayant maintenant les outils pour rejoindre un objectif local après une ou quelques tentatives, il faut savoir comment définir les objectifs locaux pour rejoindre l'objectif global après un nombre limité d'objectifs locaux. Pour ce faire, il faut suivre les arbres de décision présentés aux figures 4.7 et 4.8

Les deux figures sont presque identiques, la distinction entre les deux est faite afin d'améliorer la clarté. En commençant par la figure 4.7, il s'agit du cas où l'objectif global se situe sur la même sextique tricirculaire que l'effecteur dans sa position en début de demi-période. La première question vérifie donc que la longueur des câbles est (approximativement) la même en début de demi-période qu'elle devrait être à l'objectif global. Si tel est le cas, il faut mesurer les distances respectives entre les valeurs de  $\phi(0)$  et  $\phi_g$  (l'objectif global) et la position à l'équilibre  $\phi_{eq}$ .

Si la distance  $\phi(0) - \phi_{eq}$  doit diminuer de plus de 0,1 radians ou augmenter de plus de 0,1 radians, il faut placer un objectif de façon à respecter la condition 4.7 en utilisant les équations présentées à la figure 4.7. Si la distance entre  $\phi$  et l'équilibre doit changer de 0,1 radians ou moins, il faut savoir si l'objectif global est du même côté de l'équilibre que la position initiale du robot.

Comme le robot doit absolument passer par l'équilibre à chaque oscillation, il faut

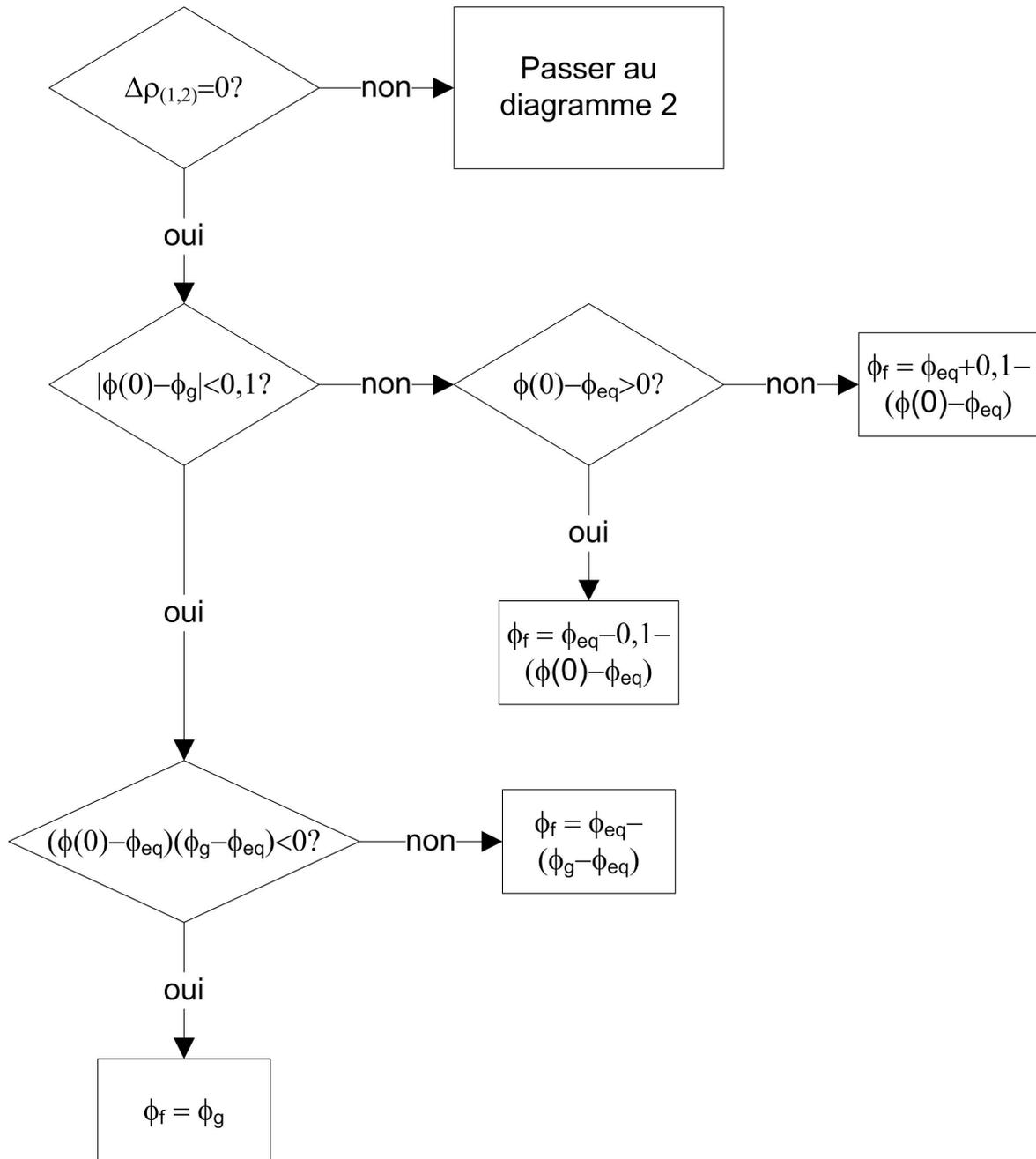


FIGURE 4.7 – Diagramme 1 : processus de décision d’objectif local, objectif global sur la même sextique tricirculaire.

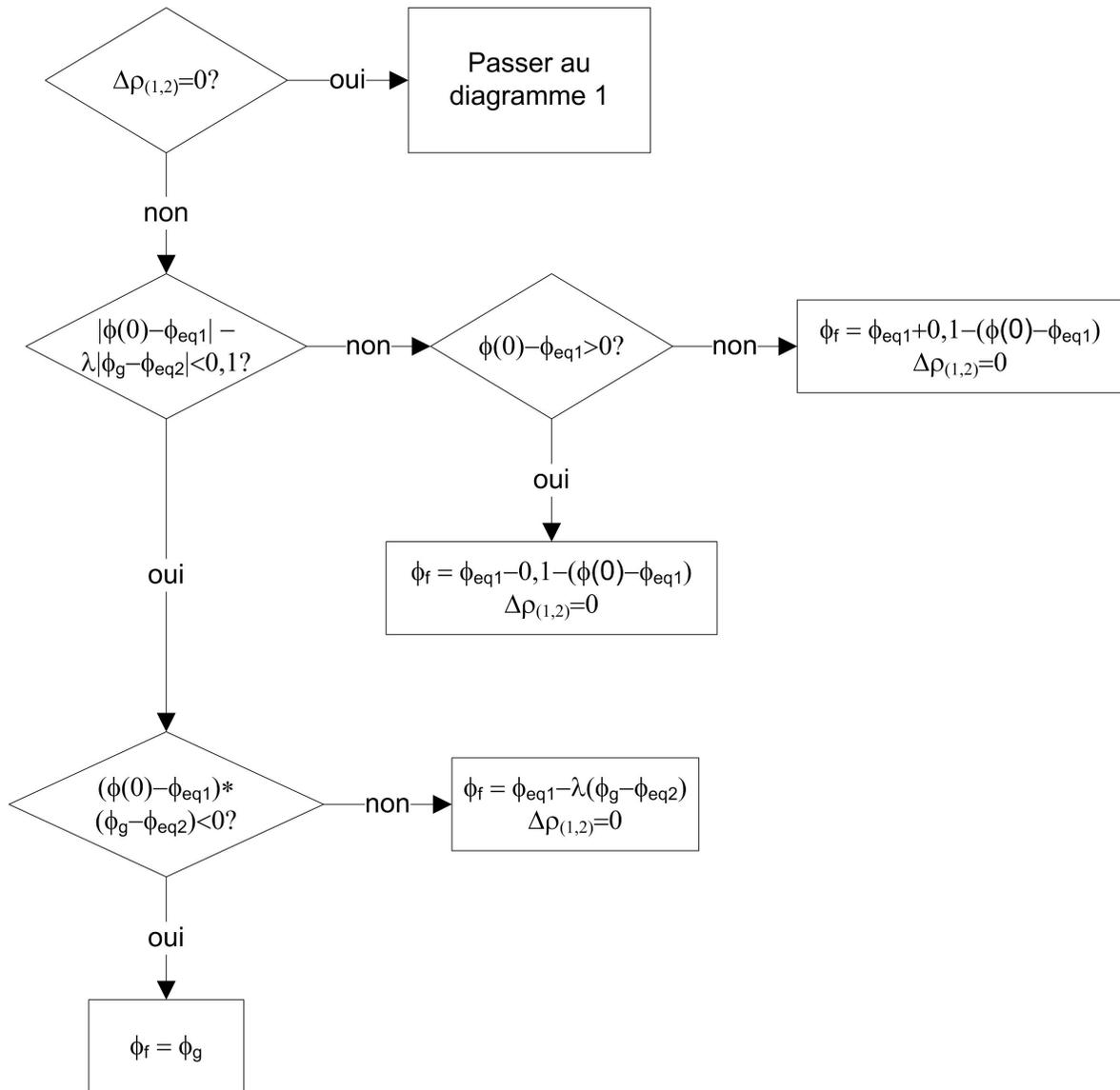


FIGURE 4.8 – Diagramme 2 : processus de décision d'objectif local, objectif global sur une autre sextique tricirculaire.

placer un objectif local symétrique à l'objectif global par rapport à l'équilibre. Finalement, si la position initiale du robot est de l'autre côté de l'équilibre par rapport à l'objectif global, l'objectif global est utilisé pour le calcul du paramètre  $A_1$ .

En ce qui concerne la figure 4.8, le processus de décision est sensiblement le même. Il a été observé de façon expérimentale que lorsque l'effecteur commence sa course à une distance  $\Delta\phi$  de la position à l'équilibre  $\phi_{eq1}$  de la première sextique tricirculaire, une fois arrivé sur la seconde sextique tricirculaire il se situe à une distance proche de  $-\lambda\Delta\phi$  par rapport à la position d'équilibre  $\phi_{eq2}$  située sur la seconde sextique tricirculaire. Le facteur  $\lambda$  n'a pas été sujet d'une étude approfondie puisque les résultats simulés sont satisfaisants en fixant  $\lambda = 0,8$  lorsque les deux câbles se rallongent,  $\lambda = \frac{1}{0,8}$  lorsque les deux câbles se raccourcissent et  $\lambda = 1$  lorsqu'un câble se rallonge et l'autre se raccourcit.

La seule autre différence entre les deux diagrammes est la prise de décision pour les longueurs des câbles. Il a été décidé que le changement de point d'opération, ou sextique tricirculaire, se fait uniquement lorsque le robot est placé à une distance telle qu'en changeant la longueur des câbles et en excitant très peu le système, il arrive directement à l'objectif global. Un petit exemple peut aider à illustrer ceci : supposons que le robot est en mouvement, loin de sa position d'équilibre sur la première sextique tricirculaire, et que l'objectif global est directement au point d'équilibre sur la seconde courbe. Le manipulateur devra d'abord ralentir à l'intérieur d'une petite distance du premier point d'équilibre, de façon à ce qu'à la fin de la prochaine demi-période, en ayant changé la longueur des câbles il arrive directement au second point d'équilibre.

Bien entendu, cette stratégie ne prend pas pour acquis que chaque objectif local sera rejoint d'un coup seul. Pour l'exemple précédent, il se peut que l'effecteur arrive loin de son point d'équilibre. La stratégie prendra ce nouveau point de départ, l'objectif global situé maintenant sur la même sextique tricirculaire, et réappliquera l'arbre de décision présenté à la figure 4.7, assurant ainsi un certain niveau de rétroaction et en évitant l'accumulation des erreurs.

Finalement, la figure 4.9 montre les diverses étapes générales de la commande exécutées à chaque pas de calcul. Le contrôleur regarde d'abord si le robot est à un extremum de sa course, soit si toutes les vitesses sont nulles. Si tel est le cas, et que l'objectif global est atteint, il choisit le prochain objectif global de la liste. En connaissant la position actuelle du robot et l'objectif global courant, il détermine un objectif local  $\phi_f$ , puis peut

déterminer le paramètre  $A_1$ . Il détermine alors les consignes de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et les donne au contrôleur PID, qui donnera les efforts nécessaires aux moteurs pour activer le robot. Finalement, il mesure les angles et longueurs réelles des câbles, calcule la valeur de  $\phi$  et recommence la boucle. Si le robot n'est pas à un extremum, il va simplement calculer la valeur actuelle des consignes de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  avec les équations 3.19 et 3.20.

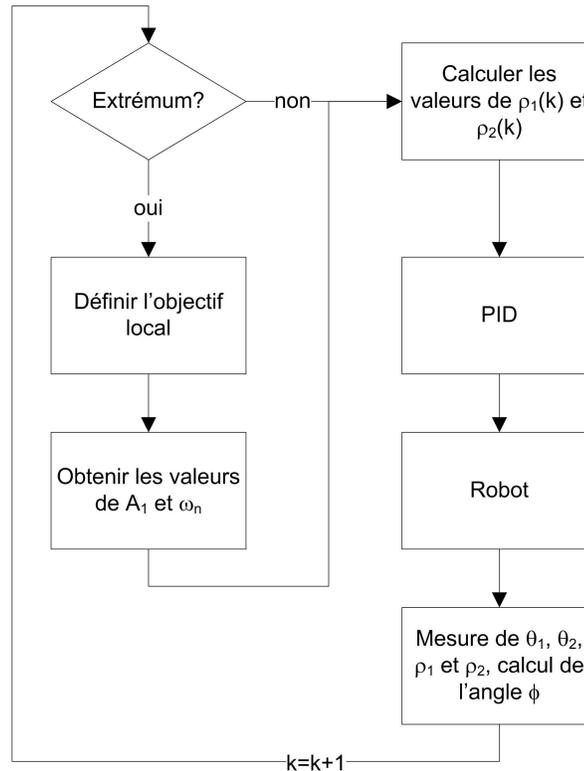


FIGURE 4.9 – Diagramme 3 : schéma du contrôleur global.

### 4.3 Trajectoires simulées et performances

Une fois le contrôleur terminé, une trajectoire typique a été déterminée en choisissant six objectifs. La figure 4.10 montre les objectifs, rendus explicites au tableau 4.1. Les paramètres de simulation sont ceux du robot réel, précisés au tableau 4.2. Ces objectifs ont été choisis pour montrer toutes les capacités du robot. En effet, les objectifs 1 et 2 se trouvent hors de l'espace statiquement atteignable, ce qui est en soi un point d'intérêt. Puis, le passage à l'objectif 3 montre une élongation des câbles. La réalisation des objectifs 3 et 4 montrent encore la capacité de rejoindre un point hors de l'espace statiquement atteignable à l'orientation voulue, puis la capacité de traverser d'un coup

TABLE 4.1 – Objectifs de simulation

Objectif	$\phi$ (rad)	$\rho_1$ (m)	$\rho_2(m)$
1	-0,6	1,8	1,8
2	0,6	1,8	1,8
3	0	2,35	2,45
4	0	2,45	2,35
5	0	2.1	2.1
6	0	1,8	1,8

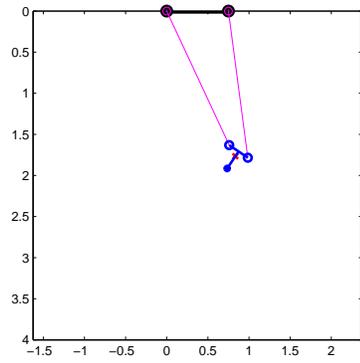
l'espace statique en changeant de sextique tricirculaire. L'objectif 5 montre la stabilisation à un point d'équilibre suite à un raccourcissement des câbles, et le passage de l'objectif 5 à l'objectif 6 montre un raccourcissement des câbles en phase, ce qui résulte en une montée simple du robot. Suite à l'objectif 6, le robot est stable à sa position d'origine. Des trajectoires et résultats supplémentaires sont présentés à l'annexe A

TABLE 4.2 – Paramètres de simulation

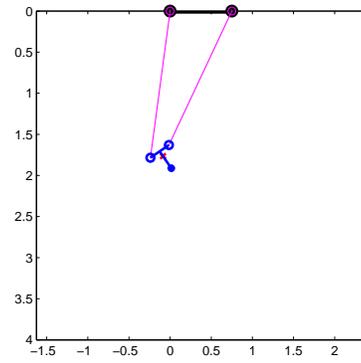
Paramètre	Valeur
$a$	0,75 m
$b$	0,27321 m
$d$	0,07044 m
$m$	1,25 kg
$I$	0,0273 kg · m <sup>2</sup>

Les résultats sont montrés à la figure 4.11, et les objectifs globaux sont indiqués. Il est possible de remarquer que les forces sont toujours positives, et les objectifs locaux sont tous rejoints après un certain temps. Puisque les paramètres  $A_1$  et  $B_1$  ont été limités à  $\pm 0,1$  m comme mentionné ci-haut, les vitesses maximales des câbles sont respectées. De plus, les longueurs maximales et minimales aussi sont respectées ; toutes les conditions ont donc été remplies.

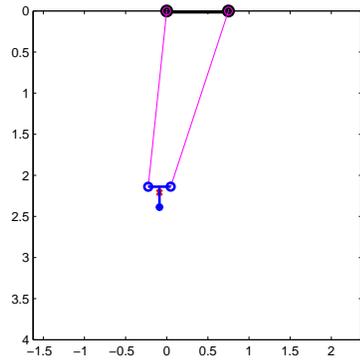
La figure 4.12 illustre précisément les objectifs locaux ainsi que le temps où ils sont attendus. Le troisième avant-dernier objectif n'est pas atteint, mais il avait été rejoint autour de  $t = 20$  s. Comme il est difficile d'établir d'avance avec précision le temps



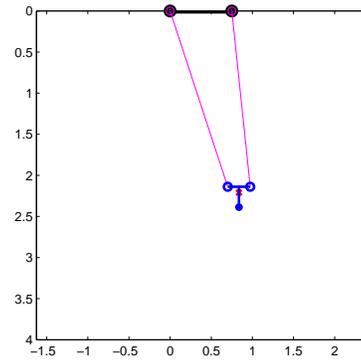
(a) Objectif global 1



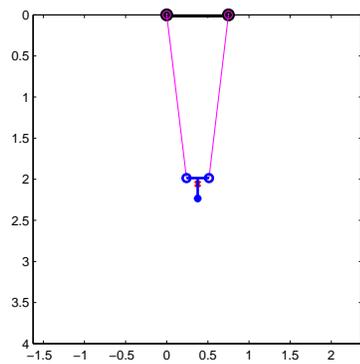
(b) Objectif global 2



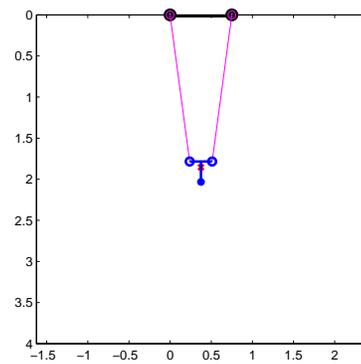
(c) Objectif global 3



(d) Objectif global 4



(e) Objectif global 5



(f) Objectif global 6

FIGURE 4.10 – Objectifs à rejoindre dans la trajectoire simulée.

où un extremum va se produire, il se peut que les câbles bougent encore lorsque  $\phi$  atteint son extremum. Dans ce cas, les câbles vont maintenir leur longueur imposée par la consigne et le système va simplement attendre le prochain extremum, avec bien entendu une erreur très élevée, comme il s'est passé dans ce cas. Un nouvel objectif local sera défini, qui lui a pu être respecté.

Une dernière figure (4.13) montre l'évolution de l'erreur en fonction du temps. Il est important de remarquer qu'elle ne s'amplifie pas avec le temps, ce qui témoigne du caractère rétroactif du contrôleur. De plus, les erreurs sont généralement en dessous de 0,02 radians, soit presque imperceptibles. Finalement, la grande erreur lorsque l'objectif local a été manqué n'a pas d'impact sur le futur, les erreurs suivantes devenant très petites à nouveau.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté les principales étapes menant à la conception du contrôleur. Il a tout d'abord fallu trouver comment optimiser les paramètres libres pour qu'en fin de demi-période, l'angle  $\phi$  du robot corresponde bien à la valeur désirée. Une première tentative a été de faire une recherche en deux dimensions. Cependant, cette idée s'est révélée trop lente. Des tests ont montré une forte corrélation entre les deux paramètres libres, suffisamment pour effectuer une recherche en une dimension.

Le problème s'est présenté dans certaines situations, lorsque la fréquence naturelle est mal estimée. Pour régler ce point, il a été montré qu'il suffit de faire préalablement une recherche en une dimension afin d'optimiser la valeur de  $\omega_n$ , suivie de celle pour optimiser  $A_1$ . Sachant maintenant comment remplir correctement un objectif, la procédure de définition d'objectif local a été montrée, permettant ainsi une première simulation de contrôle.

Finalement, ce chapitre a présenté les résultats de cette première simulation, montrant quelques limites mais aussi son caractère rétroactif. En effet, le robot calcule à chaque pas sa trajectoire en fonction de sa position réelle sans tenir compte de celle prédite au pas précédent, ce qui indique que les erreurs ne s'accumuleront pas (l'erreur de chaque pas est corrigée au pas suivant jusqu'à rejoindre l'objectif local).

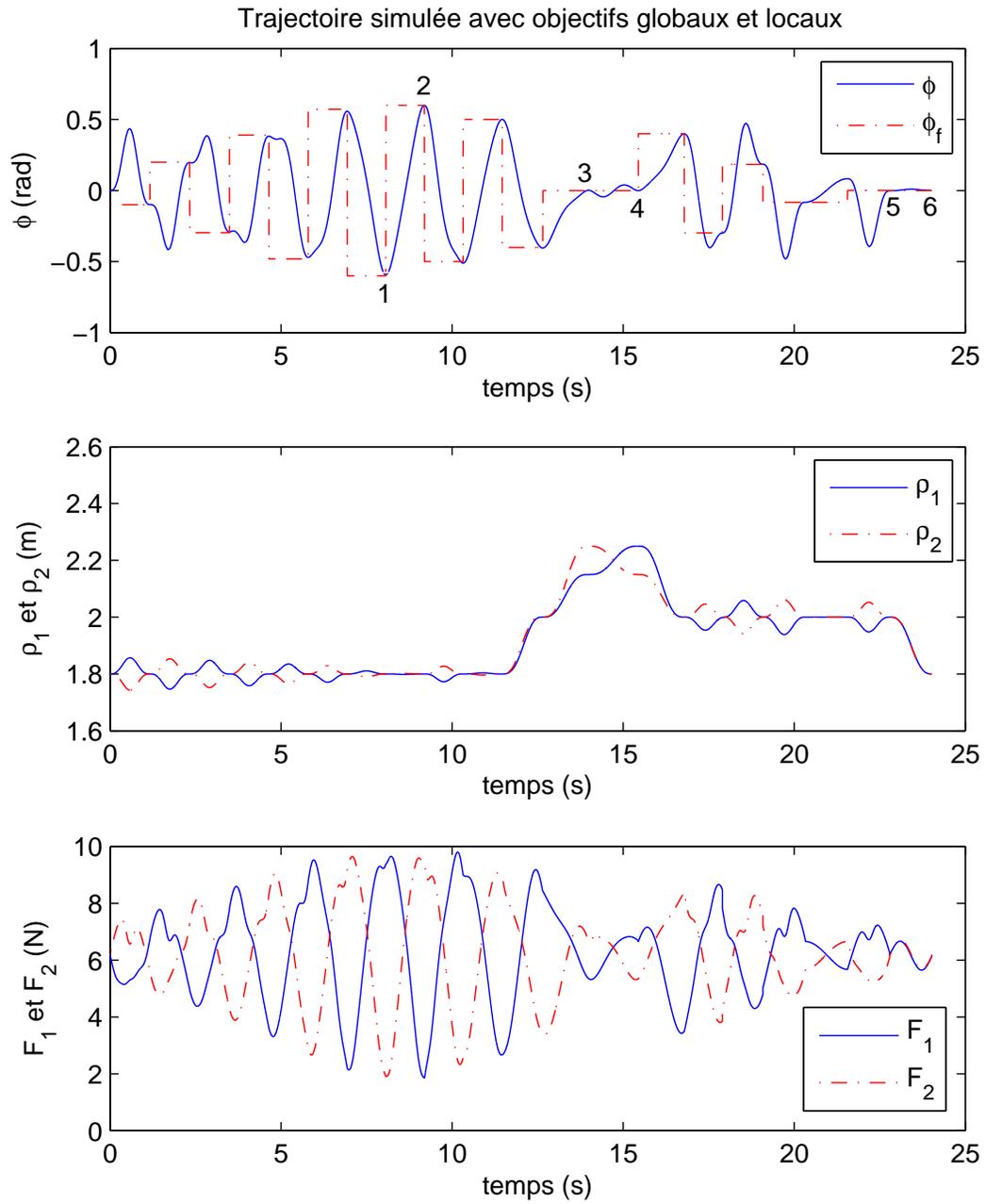


FIGURE 4.11 – Résultat de la trajectoire simulée.

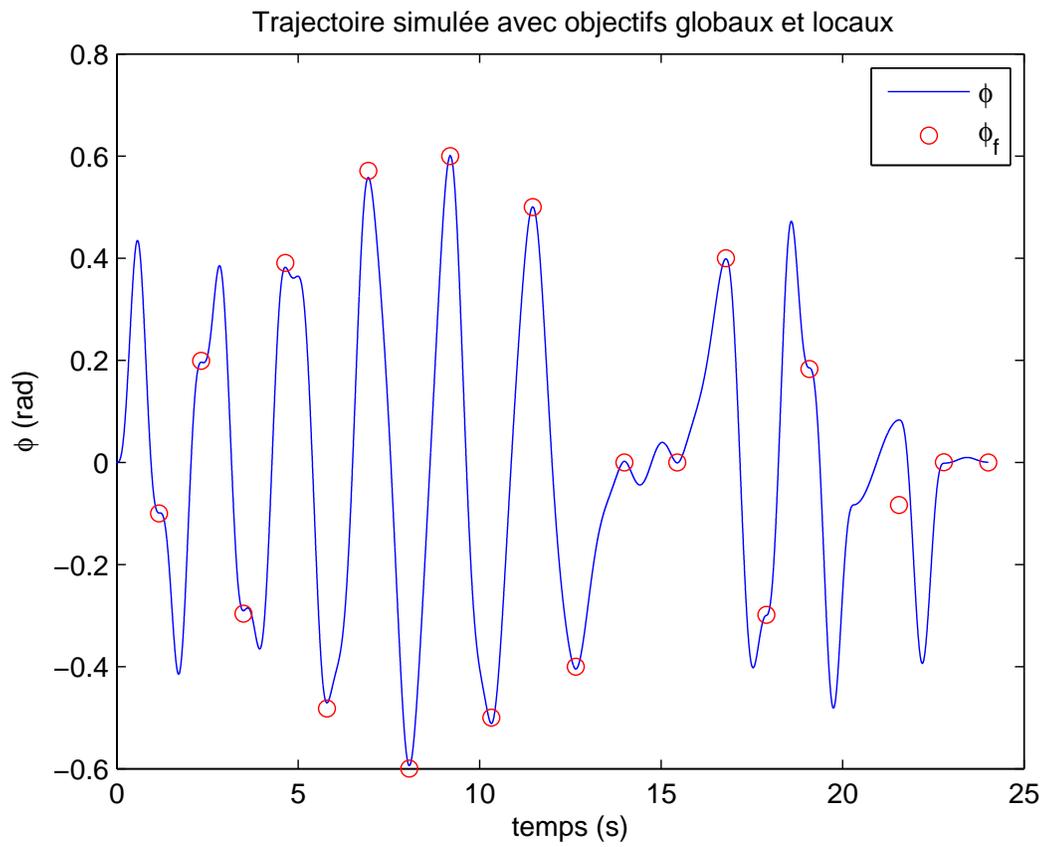


FIGURE 4.12 – Trajectoire simulée, détail sur les objectifs locaux.

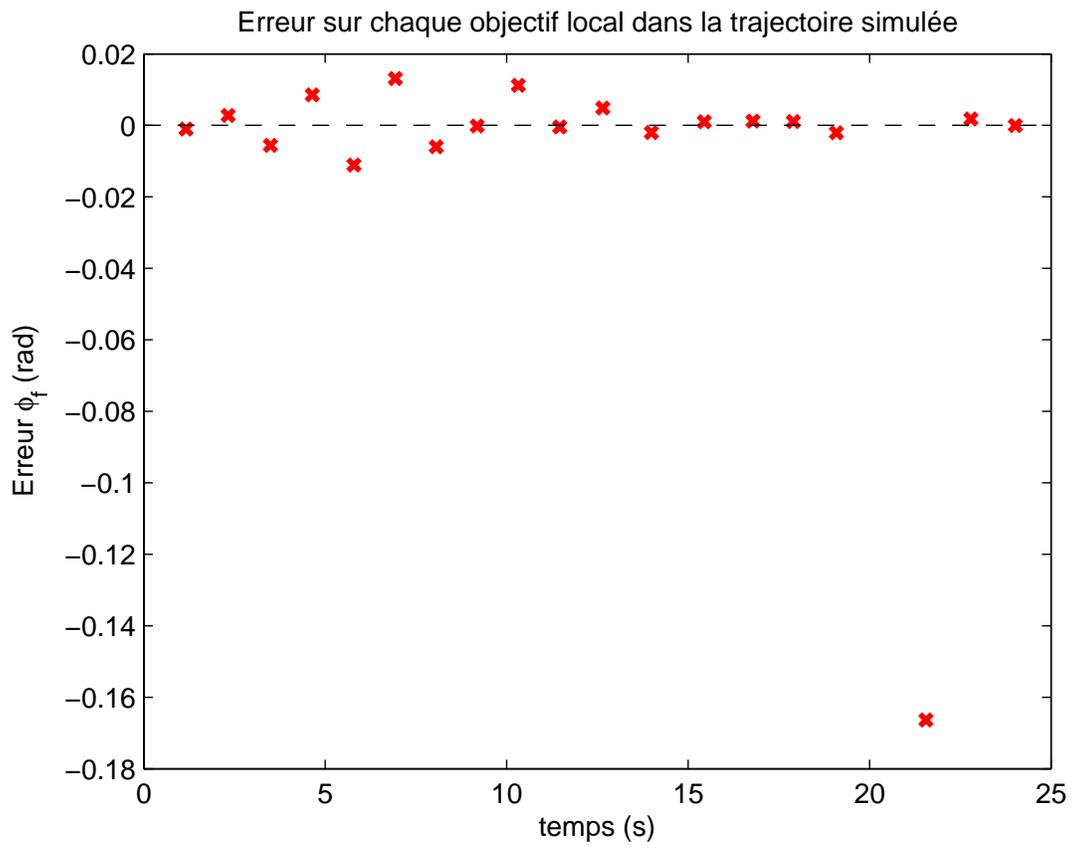


FIGURE 4.13 – Évolution de l'erreur lors de la rencontre des objectifs locaux.

# Chapitre 5

## Développement d'un prototype et résultats expérimentaux

Ce chapitre explique les étapes menant à la réalisation du volet expérimental du projet, soit en utilisant un prototype du manipulateur étudié, et en le contrôlant en suivant la méthode définie aux chapitres précédents. Puis, une fois les problèmes rencontrés lors de l'implantation résolus, les résultats expérimentaux prélevés sur une trajectoire complète seront présentés, commentés, et finalement améliorés à l'aide de quelques observations.

## 5.1 Description du prototype

La description du prototype inclut deux composants principaux. Premièrement, le montage mécanique est le robot en tant que tel. Deuxièmement, la commande informatique est la série de programmes permettant au robot d'interagir avec son environnement.

### 5.1.1 Montage mécanique

Avant de construire le prototype, il a fallu d'abord choisir comment réaliser un robot plan dans un espace réel en trois dimensions. En se référant à la figure 1.1, il serait théoriquement possible de prendre un effecteur plan, composé de deux barres placées en T reliées à la structure avec deux câbles. Cependant, des expériences précédentes ont montré que l'effecteur a tendance à tourner autour de l'axe  $x$ , sortant effectivement de son plan de travail. Afin de contraindre ce mouvement, une solution possible est d'utiliser quatre câbles, parallèles et partageant une consigne deux par deux. L'effecteur doit donc posséder quatre joints universels pour permettre le mouvement de chaque câble. La structure choisie est représentée à la figure 5.1. Sur cette figure, les axes  $z$  et  $x$  correspondent respectivement aux axes  $x$  et  $y$  de la figure 1.1.

Le support physique consiste en une structure métallique de  $4\text{m} \times 2\text{m} \times 2\text{m}$ , soit la même structure utilisée pour le robot sériel plan (Lefrançois (2010)) mais dont la hauteur a été doublée. La hauteur supérieure a été nécessaire puisque les câbles peuvent avoir une élongation entre 1 et 3 mètres. À cette structure métallique deux barres ont été fixées à une hauteur de 3 mètres du sol, parallèles et distantes de 0,75 mètres l'une de l'autre (la distance  $a$ ). Sur chaque barre est fixé un moteur avec un enrouleur double, comme illustré à la figure 5.2. Deux câbles sont attachés à l'enrouleur, passent au travers d'un oeillet et sur une poulie. Cet enrouleur double assure que chaque câble maintient la même longueur (par exemple  $\rho_1$ ). Un encodeur  $y$  est fixé pour connaître le nombre de tours effectués depuis le début, et donc la longueur des deux câbles qui y sont attachés. Les poulies sont reliées à deux encodeurs, qui, en faisant la moyenne des mesures, permettent de connaître l'angle (par exemple  $\theta_1$ ).

Le problème avec ce principe de montage est qu'il n'a pas été conçu pour de grandes

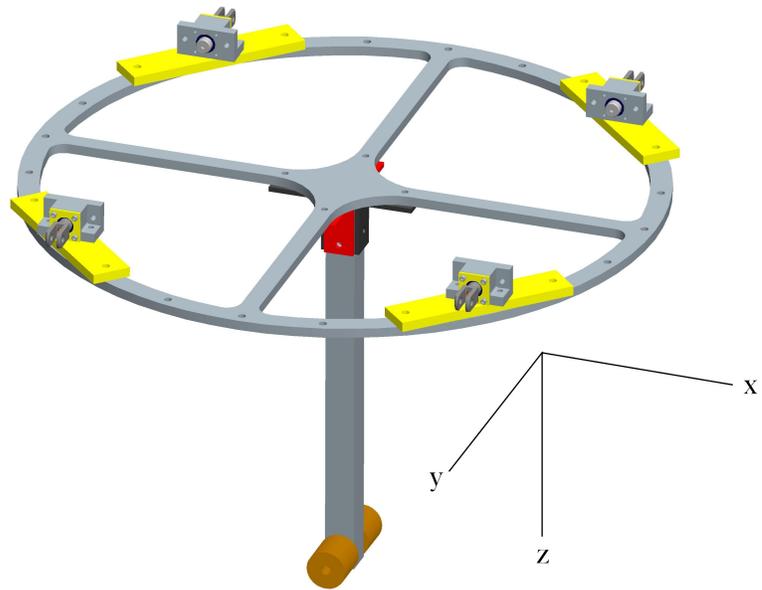


FIGURE 5.1 – Modèle CAO (Computer Assisted Ordering) de l'effecteur.

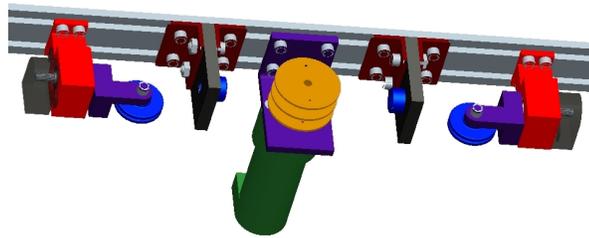


FIGURE 5.2 – Modèle CAO de l'enrouleur double.

longueurs d'enroulement. Après quelques tours, les câbles ont tendance à s'accumuler sur leur enrouleur respectif, et de façon non uniforme. En changeant le rayon effectif de l'enroulement, la consigne de longueur n'arrive plus à être respectée, et il n'est plus possible de contrôler adéquatement le mouvement de l'effecteur.

Deux paires d'enrouleurs simples ont donc été utilisées. Chaque câble est contrôlé par un moteur distinct et passe sur une poulie montée sur une vis. Le pas de cette vis est le même que le pas d'enroulement, permettant donc à chaque câble de s'enrouler de façon uniforme et permettant un meilleur contrôle sur le mouvement de l'effecteur. Chaque paire de moteur reçoit la même consigne, de façon à toujours avoir deux câbles de longueur  $\rho_1$  et deux câbles de longueur  $\rho_2$ . Un enrouleur simple est montré à la figure 5.3 et l'arrangement des paires d'enrouleurs est montré à la figure 5.4<sup>1</sup>

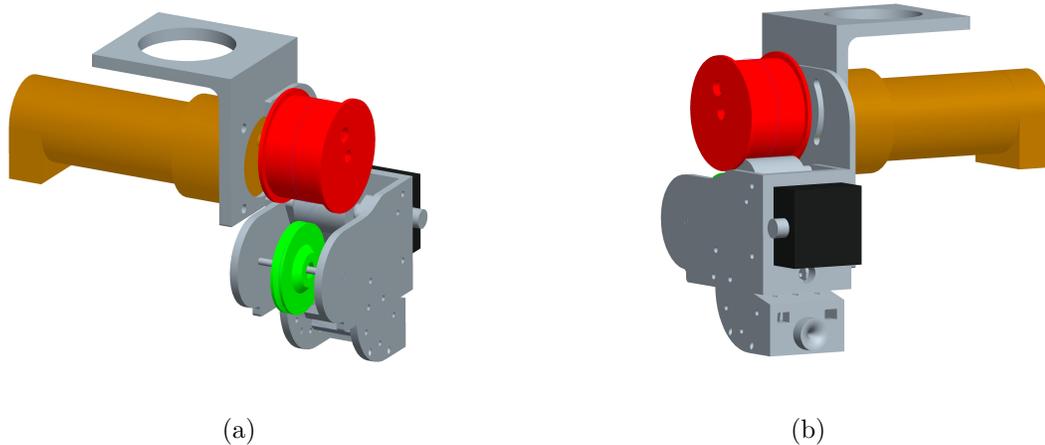


FIGURE 5.3 – Modèle CAO de l'enrouleur simple.

Les premiers tests ont été menés sur la structure dont le schéma est à la figure 5.5. Cependant, puisque les moteurs ne sont pas parfaitement synchronisés, la rotation autour de l'axe  $x$  est excitée mais ne peut pas être contrainte. Le prototype avait donc tendance à tourner autour de lui-même, rendant toute tentative de contrôle virtuellement impossible. Il a alors été suggéré de croiser les paires de câbles, comme montré à la figure 5.6. Ce croisement ne change rien à la structure du contrôleur, puisque la projection du robot dans le plan de travail est toujours la même. Le croisement a par

1. On peut remarquer à cette figure qu'un câble traverse uniquement un oeillet au lieu de deux. Lors du montage il s'était révélé difficile de faire passer le câble par ce second oeillet, et puisqu'il est redondant, il a été choisi de le faire passer directement sur la poulie. Cette différence n'a pas d'impact car lors de l'ajustement final il a été vérifié que l'effecteur soit au niveau, corrigeant toute erreur de longueur.



FIGURE 5.4 – Photo de l'arrangement des enrouleurs simples.

contre eu pour effet d'atténuer grandement cette rotation, qui existe encore mais ne nuit plus autant à la commande.

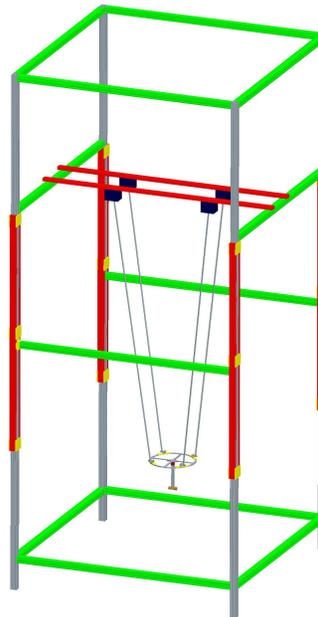


FIGURE 5.5 – Modèle CAO du montage avec les câbles droits.

Les paramètres finaux du robot sont présentés au tableau 5.1

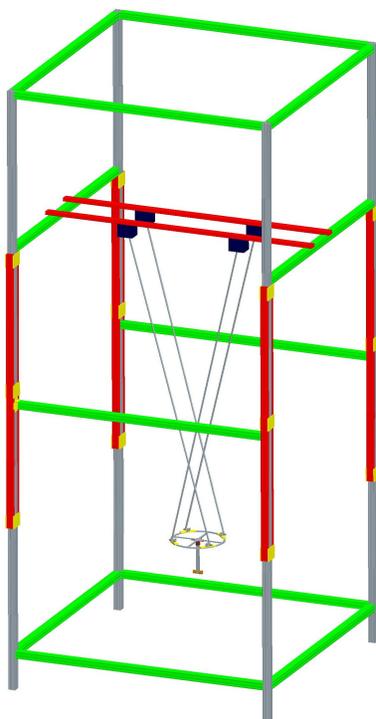


FIGURE 5.6 – Modèle CAO du montage avec les câbles croisés.

TABLE 5.1 – Paramètres du robot réel

Paramètre	Valeur
$a$	0,75 m
$b$	0,273 m
$d$	0,070 m
$m$	1,25 kg
$I$	0,0273 kg · m <sup>2</sup>

### 5.1.2 Commande informatique

Ayant finalement le prototype réel, il a encore fallu implanter la commande dans le système afin de procéder aux tests finaux. Pour ce faire, la structure de la commande présentée au chapitre 4 a été codée dans une interface *simulink* de *Matlab*. La commande a été réalisée avec le logiciel RT-LAB<sup>2</sup> et le système d'exploitation QNX<sup>3</sup>. Ces systèmes permettent une fréquence d'asservissement de 500Hz, fréquence couramment utilisée en robotique et jugée suffisante pour ce système selon les simulations. Pour valider cette fréquence, ce pas de calcul a été utilisé avec succès tout au long des simulations. Ainsi, à chaque 2 ms une commande est envoyée aux moteurs. Si le calcul prend plus de 2 ms, comme c'est parfois le cas en rejoignant un extremum, la commande sera envoyée une fois le calcul complété, après un multiple de 2 ms. Plus la commande est rapide, moins le robot aura eu le temps de s'éloigner de son extremum avant que les moteurs se remettent en mouvement. Divers tests en simulation suggèrent un temps de calcul maximal de 20 ms. Après ce délai, l'écart entre la position réelle du robot et la position de départ utilisée par l'algorithme de commande est trop importante, et l'effecteur n'arrive pas à rejoindre l'objectif local.

La structure finale de la commande était séparée en deux blocs : le bloc maître, compilé par le logiciel RT-LAB et exécuté sur un noeud de calcul, effectue toutes les opérations nécessaires à l'algorithme de commande présenté au chapitre 4, telles que calcul des objectifs locaux, calcul des consignes des câbles et calcul des courants à donner aux moteurs dans la commande PID. Le second bloc présente une interface graphique qui est exécutée sur la station de base, permettant de choisir les objectifs globaux à donner au système ainsi que certaines commandes telles la mise sous tension du système et des moteurs.

Le temps de calcul à chaque extremum (objectif local) est excellent. Un total de 6 pas de temps (12 ms) est amplement suffisant pour effectuer tous les calculs dans les situations les plus complexes. Dans une situation plus simple, où les algorithmes de recherche convergent rapidement, 3 à 4 pas (6 à 8 ms) suffisent pour trouver la trajectoire à imposer aux câbles.

---

2. Le site web de Opal-RT RT-LAB est <http://www.rt-lab.com/>

3. Le site web de QNX Software Systems est <http://www.qnx.com/>

## 5.2 Trajectoires expérimentales et résultats

Il est possible, après la finalisation du prototype physique et de la commande informatique, de tester sur celui-ci des trajectoires comparables à celles testées en simulation. Ceci donnera à la fois une idée de la performance du robot ainsi que de la performance de la simulation.

### 5.2.1 Première trajectoire et observations

La trajectoire expliquée et simulée dans le chapitre 4 a été utilisée pour vérifier le fonctionnement du système. L'angle  $\phi$  ainsi que la consigne  $\phi_f$  sont représentées à la figure 5.7. De plus, la figure 5.8 montre la longueur des câbles à chaque instant de la simulation. Il serait intéressant d'avoir les tensions dans les câbles, cependant il n'est pas possible de les mesurer. Il serait théoriquement possible de les calculer, cependant ce calcul fait appel à la seconde dérivée de l'angle  $\phi$ . En observant le niveau de bruit sur  $\phi$ , il est clair que de dériver deux fois ce signal ne donnerait aucun résultat significatif.

Ces figures montrent bien les réussites et problèmes du contrôleur. Du côté de la commande, à chaque pas une valeur de  $A_1$  est obtenue, et cette valeur permet (en simulation) de rejoindre l'objectif local d'un coup. Chaque fois que l'objectif local n'est pas parfaitement atteint, la commande prend la bonne décision en partant de la valeur actuelle de  $\phi$  et pas de la valeur attendue de  $\phi$ . Finalement, tous les objectifs globaux sont atteints avec une erreur inférieure à 0,040 radians, comme illustré au tableau 5.2. Cette valeur a été donnée comme seuil de tolérance au contrôleur. Une fois que l'angle  $\phi$  se trouve près de son objectif global mais à l'intérieur de ce seuil, l'objectif global est considéré comme atteint.

Notons que la valeur de  $\phi$  est extrêmement bruitée lorsque le système atteint un extremum. Ceci est dû à deux éléments dépendants l'un de l'autre. Premièrement, les instants où les câbles ont les tensions minimales sont les extremums. Lorsque la tension dans le câble est faible, mais pas encore nulle, le câble a tendance à vibrer, phénomène étudié au préalable par Gore (1971). Cette vibration est lue par les capteurs d'angles et donne une mesure bruitée. Deuxièmement, pour calculer l'angle  $\phi$  il faut calculer au préalable les valeurs de  $\sin \phi$  et de  $\cos \phi$ . Par la suite, l'arctangente est utilisée pour

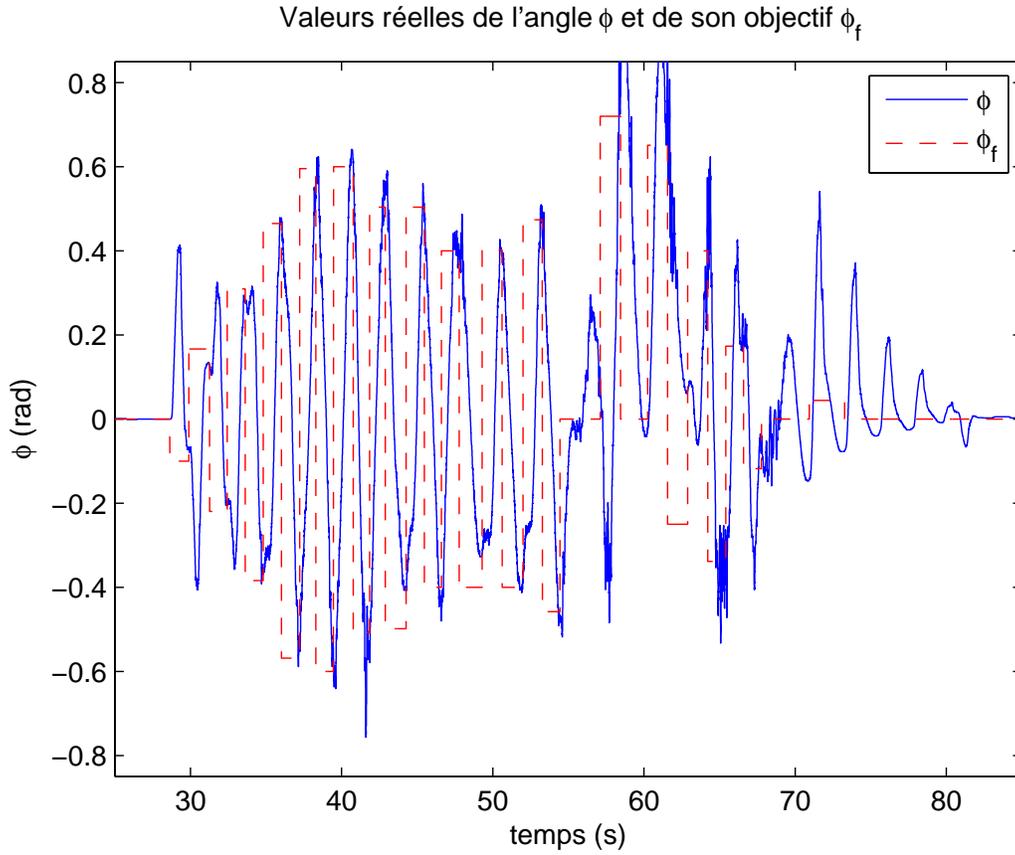


FIGURE 5.7 – Valeurs expérimentales de l'orientation de l'effecteur et des objectifs locaux.

TABLE 5.2 – Atteinte des objectifs, premier essai

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
-0,6	-0,5683	0,0317
0,6	0,6138	0,0138
0	0	0
0	-0,0212	-0,0212
0	-0.0399	-0.0399
0	0	0

trouver l'angle. Or, la valeur de  $\cos \phi$  est dépendante des valeurs de  $\sin \theta_1$  et  $\sin \theta_2$  (équations 2.48 et 2.49). Du bruit sur les angles peut facilement fausser la valeur de  $\cos \phi$ , et donc la valeur de  $\phi$ . Il a cependant été remarqué que la valeur de  $\sin \phi$  est

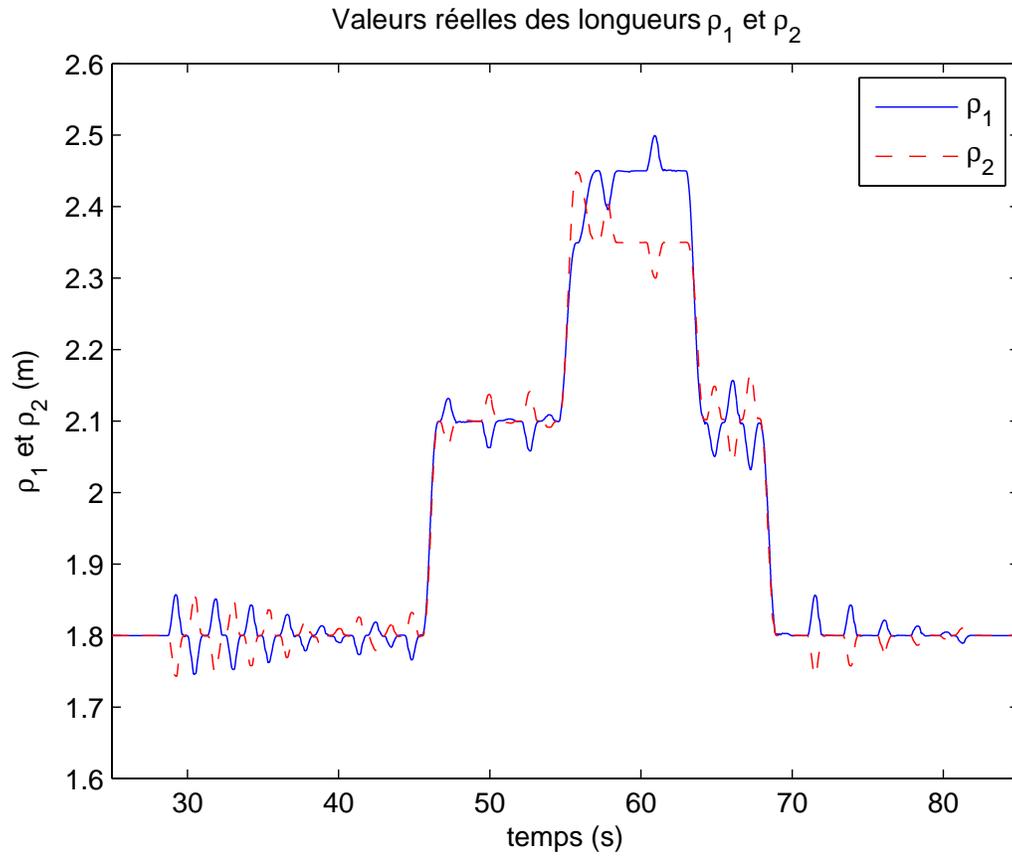


FIGURE 5.8 – Valeurs expérimentales de la longueur des câbles.

bien plus résistante au bruit. L'arcsinus a donc été utilisé pour avoir une meilleure estimation de la valeur de  $\phi$ .

Afin d'augmenter les tensions minimales, il a fallu diminuer l'intensité des excitations. Pour ce faire, au lieu de procéder par pas de 0,1 radians dans la définition des objectifs locaux (voir la limite établie à l'équation 4.7), le pas a été diminué à 0,03. Cette valeur a été choisie expérimentalement comme compromis entre la stabilité (pas petits) et la vitesse (pas grands).

## 5.2.2 Seconde trajectoire et observations

La même trajectoire a été testée, afin d'avoir une base de comparaison valable. Les figures 5.9 et 5.10 montrent les résultats. Les objectifs sont atteints avec une erreur

inférieure à 0,03 radians, nouvelle tolérance du système. Le tableau 5.3 montre l'erreur à chaque objectif global. De plus, la courbe de  $\phi$  est moins bruitée, suggérant que la valeur calculée à chaque instant est plus significative qu'avant la modification.

TABLE 5.3 – Atteinte des objectifs, second essai

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
-0,6	-0,6186	-0,0186
0,6	0,6052	0,0052
0	0,009	0,009
0	-0,008	-0,008
0	0,0001	-0,0001
0	0	0

Valeurs réelles de l'angle  $\phi$  et de son objectif  $\phi_f$

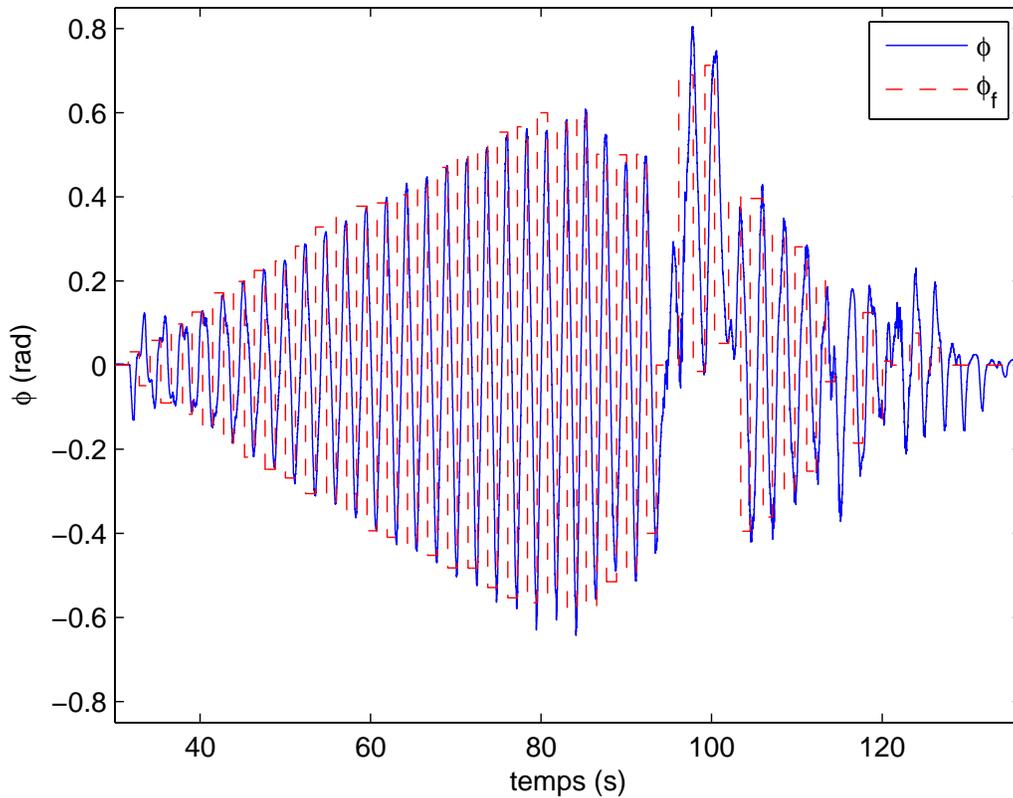


FIGURE 5.9 – Valeurs expérimentales de l'orientation de l'effecteur et des objectifs locaux.

Ces résultats nous permettent donc de conclure que les observations précédentes sont

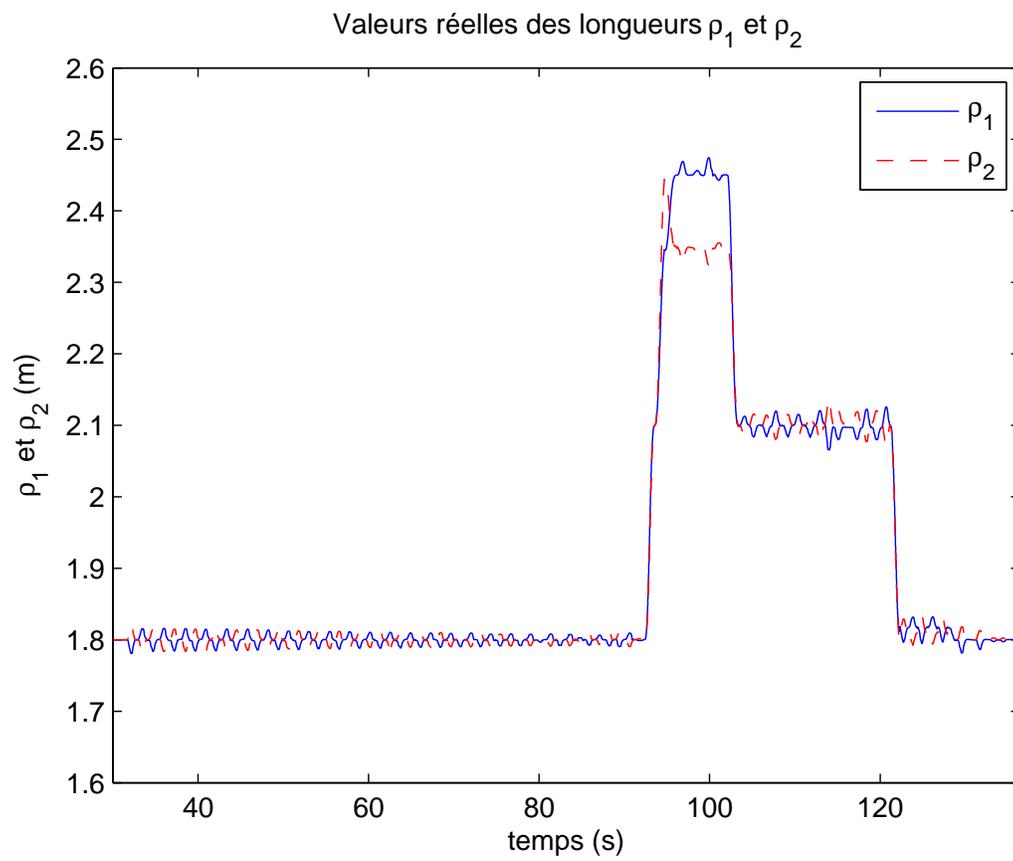


FIGURE 5.10 – Valeurs expérimentales de la longueur des câbles.

valables, et que la commande est devenue plus précise. De plus, chaque objectif local est atteint avec une précision supérieure par rapport à la première méthode. Finalement, les résultats associés aux trajectoires supplémentaires de l'annexe A sont disponibles à l'annexe B.

### **5.3 Conclusion**

Ce chapitre a montré en détail la structure mécanique du prototype, ainsi que les programmes utilisés pour mettre en pratique la commande. Finalement, les données obtenues lors de deux trajectoires ont été analysées. La première itération de commande donnait des résultats acceptables, mais très bruités. Deux correctifs ont été apportés qui ont mené à la seconde itération de commande. Cette fois, les résultats montrent clairement l'accomplissement de la tâche initiale, soit de contrôler un robot plan sous-actionné et de rejoindre des objectifs possiblement à l'extérieur de son espace statiquement atteignable.

# Conclusion

Ce mémoire a contribué aux études sur les mécanismes à câbles sous-actionnés. Les robots faisant partie de ce groupe partagent plusieurs avantages, parmi lesquels la légèreté, la rapidité, le faible coût pour les mettre en opération, la simplicité et le grand espace de travail rejoignable. Le prochain objectif à atteindre dans ce domaine serait de contrôler un tel robot pouvant évoluer dans l'espace, comme les travaux précédents ont tous porté sur des mécanismes plans. Un tel robot aurait fort probablement une structure parallèle, comme le câble d'une structure sérielle aurait tendance à tourner sur lui-même. Une structure parallèle permettrait de rendre le mécanisme suffisamment stable pour développer des algorithmes de commande. Dans ce sens, développer un robot plan parallèle est un pas intermédiaire avant de sortir du plan.

Le premier chapitre a permis d'établir la notation utilisée dans ce mémoire, puis de montrer la structure géométrique du manipulateur étudié. Les problèmes géométriques direct et inverse ont donc pu être résolus. L'étape suivante a été d'établir des analyses cinématique et dynamique. La première permet d'établir la jacobienne du système, d'étudier les lieux de singularité et l'espace de travail. La seconde permet de connaître les équations dynamiques devant être satisfaites en tout temps. Ces équations sont critiques pour la conception d'un simulateur, ainsi que pour connaître l'espace statiquement atteignable.

Connaissant les équations à respecter dans l'étude du manipulateur, un simulateur

Matlab a pu être réalisé dans le second chapitre. Son but est de prédire le comportement du manipulateur en connaissant son état initial ainsi que la trajectoire imposée aux câbles. Ce simulateur calcule à chaque pas de temps, soit à 500 Hz, l'état du robot, puis intègre deux fois l'accélération angulaire  $\ddot{\phi}$  pour connaître, au début du pas de temps suivant, la vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  et l'angle  $\phi$ . Pour ce faire, l'algorithme résout des équations obtenues à l'aide du logiciel Maple. Ces équations calculent, avec un nombre d'opérations minimisé, les angles, les vitesses angulaires ainsi que les accélérations des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , pour finalement obtenir l'accélération angulaire  $\ddot{\phi}$ . Le fait de minimiser le nombre d'opérations effectuées à chaque pas de temps a permis au simulateur d'être exécuté en temps réel.

Le simulateur a été utilisé dans le troisième chapitre, qui a montré les étapes menant à la définition de la stratégie de commande. En se basant sur les résultats de travaux antérieurs, des équations paramétriques sont utilisées pour connaître la longueur des câbles pour chaque horizon de prédiction. Cet horizon correspondant à la moitié d'une période d'oscillation, il a fallu calculer un estimé de la fréquence naturelle ainsi que la valeur de l'angle  $\phi$  à l'équilibre. Il a alors été déterminé que les équations paramétriques se basent sur la fréquence naturelle du manipulateur, ainsi que le double et le triple de cette valeur. De plus, il a été déterminé que les câbles doivent être déphasés de  $180^\circ$  entre eux et de  $90^\circ$  pour optimiser l'excitation du manipulateur par rapport à l'excitation des câbles.

Le quatrième chapitre a montré comment optimiser les paramètres libres des équations développées au chapitre précédent. Suite à la découverte du lien entre les paramètres  $A_1$  et  $B_1$  et l'effet qu'ils ont sur le mécanisme, il a été déterminé qu'une combinaison de recherches sur la fréquence naturelle puis sur  $A_1$  est suffisant pour obtenir des résultats acceptables, du moins en simulation. Une fois établie la séquence de décisions menant au choix des objectifs locaux, le chapitre a pu montrer les résultats de cette simulation. En insistant sur l'atteinte des objectifs locaux fixés ainsi que sur le caractère rétroactif de la commande, il a été possible de conclure du bon fonctionnement des algorithmes de commande.

Le chapitre final a montré en détail les divers éléments composant le robot, soit sa structure mécanique ainsi que les programmes informatiques permettant la réalisation de la commande. Suite à quelques expériences menées sur le premier prototype, des changements ont été apportés aux algorithmes de commande. Les résultats finaux ont

donc pu être évalués et montrent la réalisation de la tâche initiale, puisque les objectifs globaux ont pu être atteints avec des erreurs inférieures à 0,02 radians, soit 1,15 degrés, et ce pour des objectifs situés hors de l'espace statiquement atteignable, donc hors d'atteinte des manipulateurs classiques de ce genre.

Ces travaux ont donc corroboré les recherches antérieures. En établissant les équations régissant le manipulateur, puis en trouvant les trajectoires à imposer à ses actionneurs grâce à des équations ayant un ou plusieurs paramètres libres, en utilisant un simulateur et une stratégie pour identifier la valeur des paramètres libres, il est possible de rejoindre des objectifs locaux menant, ultimement, à la rencontre des objectifs globaux.

## Pistes de travaux futurs

En ce qui concerne la version plane de ce robot, il reste encore des améliorations possibles. Un problème qui est revenu souvent est la difficulté d'avoir en pratique un système confiné au plan. Les solutions trouvées limitent les vibrations qui font sortir le manipulateur du plan, mais aucune solution n'a été trouvée pour éliminer le problème. Ces vibrations s'ajoutent aux diverses imperfections empêchant la simulation d'arriver parfaitement à prédire le mouvement du robot.

De plus, il est assez difficile d'obtenir avec précision la valeur de  $\phi$  ainsi que sa vitesse. De ce fait, les algorithmes n'identifient pas parfaitement l'état actuel du robot ou même l'extremum. L'amélioration de ces mesures permettrait une commande bien plus fine. Un autre point qui permettrait d'affiner la commande est une identification plus précise de la fréquence naturelle. Pour l'instant, cette approximation est limitée lorsque les câbles bougent rapidement (lors d'un changement de sextique tricirculaire par exemple).

En ce qui concerne la version spatiale de ce manipulateur, il sera bien sûr possible de se baser sur les travaux de la version plane. Une géométrie parallèle avec trois ou quatre câbles permettra de se baser sur les mêmes principes que la géométrie à deux câbles. Les étapes préliminaires de ce nouveau projet ont déjà commencé en date de la rédaction de ce mémoire.

# Bibliographie

- Abdullah, B. et S. Agrawal. 2002, «Cable suspended robots : Design, planning and control», *Proceedings – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4275—4280.
- Albus, J., R. Bostelman et N. Dagalakis. 1993, «The NIST robocrane», *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, n° 5, pp. 709–724.
- Arisumi, H., K. Yokoi et K. Komoriya. 2000, «Casting manipulation (braking control for catching motion)», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1961–1968.
- Blevins, R. 1979, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold New York.
- Bosscher, P. et I. Ebert-Uphoff. 2004, «Wrench-based analysis of cable-driven robots», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4950–4955.
- Bosscher, P., R. Williams II et M. Tummino. 2005, «A concept for rapidly deployable cable robot search and rescue systems», *Proceedings of the ASME IDETC/CIE 29th Mechanisms and Robotics Conference*, pp. 1–10.
- Burns, J. 1970, «More on pumping a swing», *American Journal of Physics*, vol. 38, pp. 920–922.

- Case, W. et M. Swanson. 1990, «The pumping of a swing from the seated position», *American Journal of Physics*, vol. 58, pp. 463–467.
- Cone, L. 1985, «Skycam : An aerial robotic camera system», *Byte*, vol. 10, pp. 122–132.
- Cunningham, D. et H. Asada. 2009, «The Winch-Bot : A Cable-Suspended, Under-Actuated Robot Utilizing Parametric Self-Excitation», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1844–1850.
- Curry, S. 1976, «How children swing», *American Journal of Physics*, vol. 44, pp. 924–926.
- Deschênes, J., P. Lambert, S. Perreault, N. Martel-Brisson, N. Zoso, A. Zaccarin, P. Herbert, S. Bouchard et C. Gosselin. 2007, «A cable-driven parallel mechanism for capturing object appearance from multiple viewpoints», *Proceedings - 6th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, pp. 367–374.
- Devol, G. 1961, «Programmed article transfer», 2988237.
- Fantoni, I. et R. Lozano. 2001, *Non-linear control for underactuated mechanical systems*, Springer Verlag.
- Gore, B. 1971, «Starting a swing from rest», *American Journal of Physics*, vol. 39, p. 347.
- Gosselin, C., S. Lefrançois et N. Zoso. 2010, «Underactuated cable-driven robots : machine, control and suspended bodies», *Proceedings of the CIM Symposium on Brain, Body and Machine*, pp. 311–323.
- Gwinnett, J. 1931, «Amusement device», 1789680.
- Haddadin, S., A. Albu-Schaffer, M. Frommberger et G. Hirzinger. 2008, «The role of the robot mass and velocity in physical human-robot interaction-Part II : Constrained blunt impacts», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1339–1345.
- Jiang, Q. et V. Kumar. 2010, «The direct kinematics of objects suspended from cables», *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences*, pp. 193–202.

- Kawamura, S., W. Choe, S. Tanaka et S. Pandian. 1995, «Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drivesystem», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 215–220.
- Kobayashi, T. et Y. Takahashi. 1998, «Vibration control for two dimensional wiredriven positioning robot», *Proceedings - SICE Annual Conference*, pp. 869–874.
- Kulkarni, J. 2003, «Time-optimal control of a swing», *Proceedings of the 42nd IEEE International Conference on Decision and Control*, pp. 1729–1733.
- Lefrançois, S. 2010, *Modélisation, commande et prototypage d'un robot sous-actionné entraîné à l'aide de câbles*, mémoire de maîtrise, Université Laval.
- Lefrançois, S. et C. Gosselin. 2010, «Point-to-point motion control of a pendulum-like 3-dof underactuated cable-driven robot», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 5187–5193.
- Merlet, J.-P., C. Gosselin et N. Mouly. 1998, «Workspaces of planar parallel manipulators», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, n° 1, pp. 7–20.
- Meunier, G. 2006, *Control of an overactuated cable-driven parallel manipulator*, mémoire de maîtrise, McGill University.
- Piccoli, B. et J. Kulkarni. 2005, «Pumping a swing by standing and squatting : do children pump time optimally?», *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 25, n° 4, pp. 48–56.
- Pinsky, M. et A. Zevin. 1999, «Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing», *International Journal of Non Linear Mechanics*, vol. 34, n° 1, pp. 105–110.
- Pollard, V. et L. Willard. 1942, «Position-controlling apparatus», 2286571.
- Sahin, S. et L. Notash. 2007, «Force and stiffness analysis of wire-actuated parallel manipulators», *Proceedings of the 12th IFToMM World Congress (2007)*.
- Scheid, F. 1989, *Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis*, Schaum's Outline Series.
- Spong, M. 1995, «The swing up control problem for the acrobot», *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, n° 1, pp. 49–55.

- Stilling, D. et W. Szyszkowski. 2002, «Controlling angular oscillations through mass reconfiguration : a variable length pendulum case», *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 37, n° 1, pp. 89–99.
- Szyszkowski, W. et D. Stilling. 2005, «On damping properties of a frictionless physical pendulum with a moving mass», *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, n° 5, pp. 669–681.
- Taylor, B. *The international system of units (SI)*, United States Department of Commerce, Technology Administration. National Institute of Standards and Technology.
- Tortopidis, I. et E. Papadopoulos. 2007, «On point-to-point motion planning for underactuated space manipulator systems», *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, n° 2, pp. 122–131.
- Yamamoto, M., N. Yanai et A. Mohri. 2004, «Trajectory control of incompletely restrained parallel-wire-suspended mechanism based on inverse dynamic», *IEEE Transactions on Robotics*, pp. 840–850.
- Zanotto, D., G. Rosati et S. Agrawal. 2011, «Modeling and control of a 3-dof pendulum-like manipulator», *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3964–3969.

# Annexe A

## Résultats supplémentaires en simulation

Cette annexe présente les résultats obtenus en simulant diverses trajectoires tel qu'expliqué au chapitre 4. Les données incluent l'évolution temporelle des variables  $\phi$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , ainsi que l'évolution du paramètre libre  $A_1$ , de la fréquence naturelle et du nombre d'itérations nécessaires pour identifier la valeur correcte de  $A_1$ . Une courte observation des performances du manipulateur lors de l'atteinte des divers objectifs conclura l'étude de chaque trajectoire.

TABLE A.1 – Objectifs de simulation, trajectoire 1

Objectif	$\phi$ (rad)	$\rho_1$ (m)	$\rho_2(m)$
1	-0,3	2	2
2	0	2	2
3	-0,6	2	2
4	0	2	2

## A.1 Première trajectoire

La première trajectoire est la plus simple. Elle consiste à maintenir une longueur de câbles autour de 2 mètres, d'exciter le système jusqu'à  $\phi = -0,3$  rad, de le ralentir jusqu'à  $\phi = 0$  rad, puis de repartir à  $\phi = -0,6$  rad avant de retourner à  $\phi = 0$  rad. Le troisième objectif se trouve à l'extérieur de l'espace statiquement atteignable, et l'effecteur reste toujours sur la même sextique tricirculaire. Cette trajectoire constituait un bon exercice pour observer le comportement de la commande sur le robot virtuel.

Les performances sont très bonnes, la commande permettant au robot virtuel de rejoindre ses objectifs avec de très faibles erreurs. Les objectifs globaux sont présentés au tableau A.1, et les erreurs quand ils sont atteints sont présentées au tableau A.2. La figure A.1 montre les mesures prises lors de la simulation, soit l'angle  $\phi$  et son objectif  $\phi_f$ , la longueur des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et les forces dans les câbles  $F_1$  et  $F_2$ .

La figure A.2 montre la valeur calculée du paramètre libre  $A_1$ , la figure A.3 donne la valeur prédite de la fréquence naturelle, et la figure A.4 indique le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme de recherche identifie les bonnes valeurs de  $A_1$  et  $\omega_n$ . Finalement, la figure A.5 montre en détail l'évolution de  $\phi$  ainsi que l'emplacement des objectifs globaux.

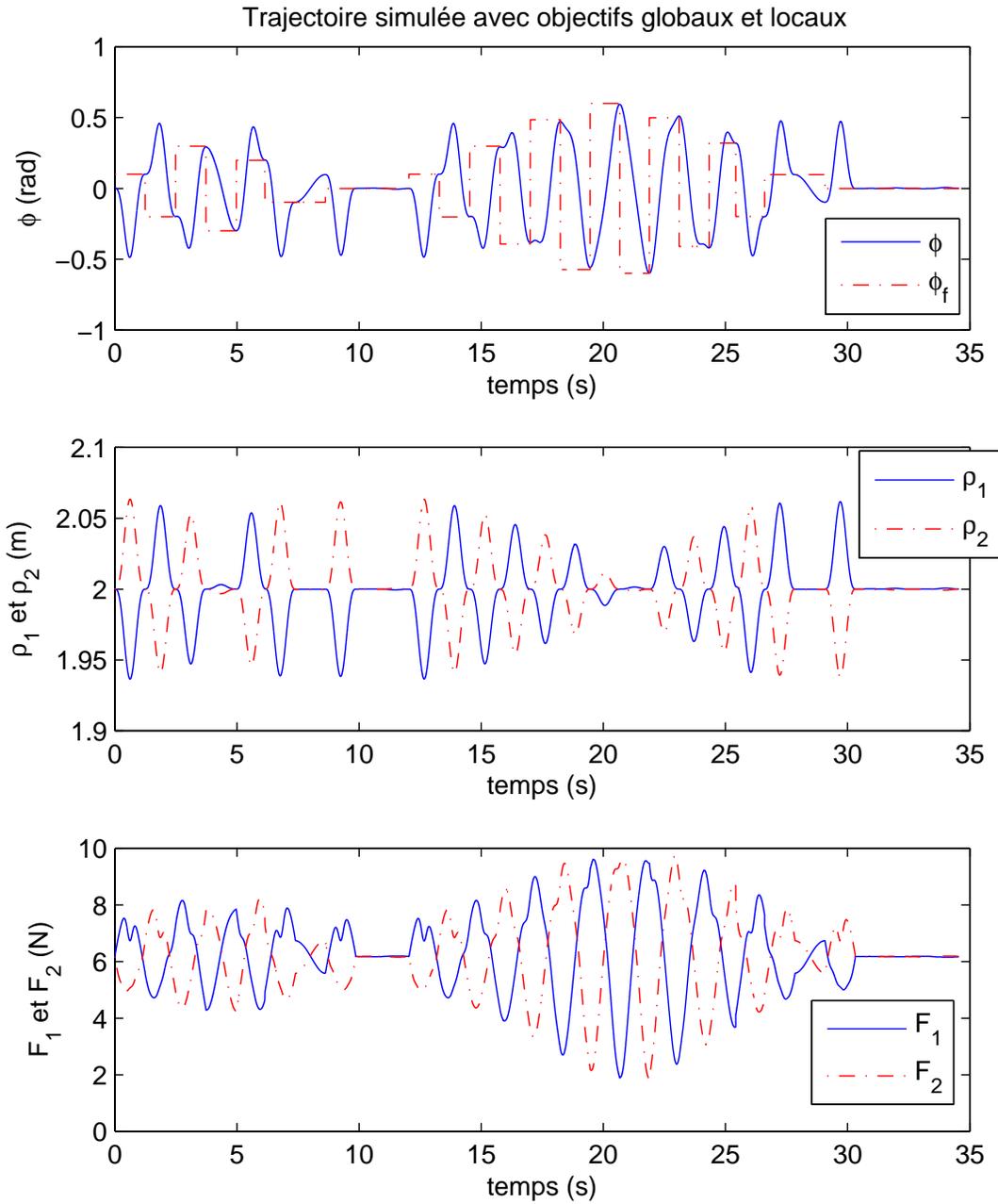


FIGURE A.1 – Résultats de la première trajectoire simulée.

TABLE A.2 – Atteinte des objectifs, trajectoire 1

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
-0,3	-0,299	0,001
0	0	0
-0,6	-0,599	0,001
0	0	0

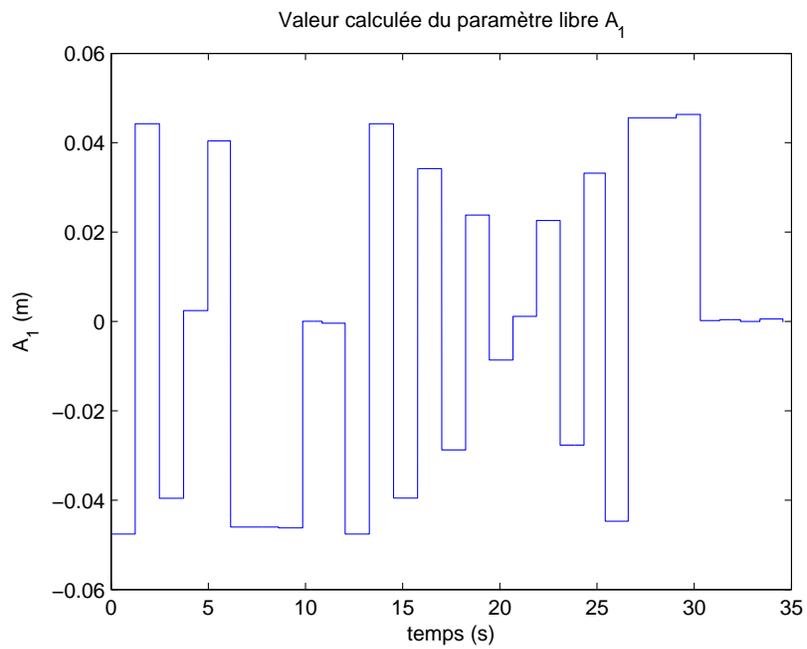


FIGURE A.2 – Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 1.

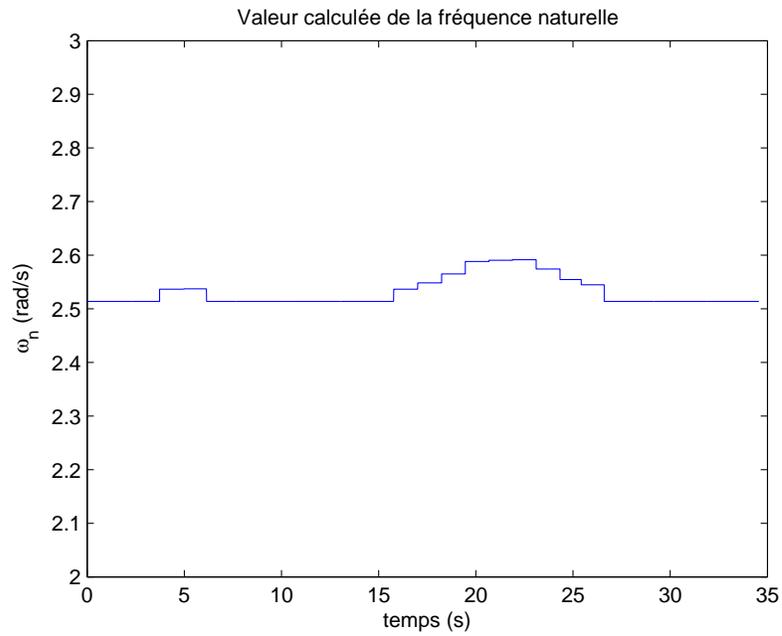


FIGURE A.3 – Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 1.

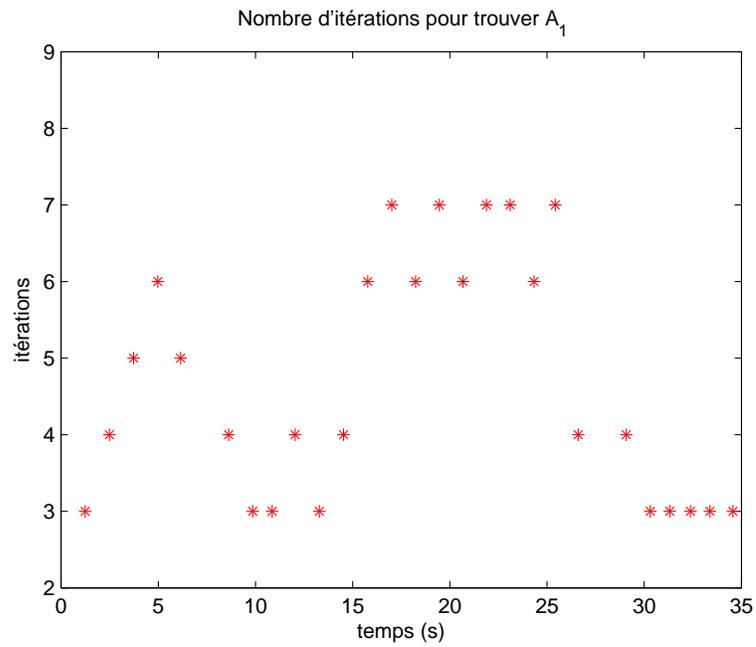


FIGURE A.4 – Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 1.

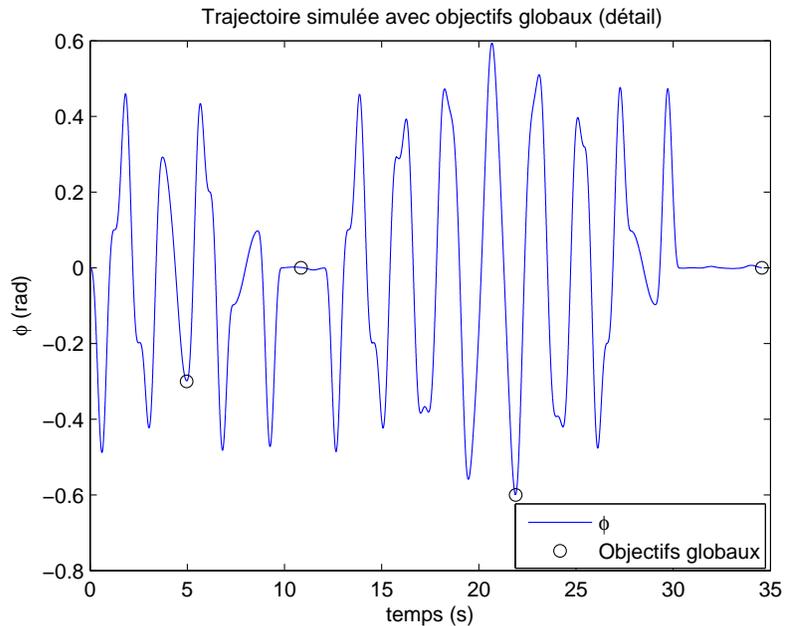


FIGURE A.5 – Détail de l’orientation de l’effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 1.

## A.2 Deuxième trajectoire

La seconde trajectoire est plus complexe. Elle consiste à rejoindre avec le centre de masse les quatre sommets d’un rectangle, et ce avec une orientation nulle à chaque coup. Les quatre sommets, dans le sens horaire, sont aux coordonnées  $C_1 = (2; 0, 17)$ ,  $C_2 = (2; 0, 58)$ ,  $C_3 = (2, 4; 0, 58)$  et  $C_4 = (2, 4; 0, 17)$ . Les objectifs sont donc de partir du point initial pour lequel  $\rho_1 = \rho_2 = 2\text{m}$ , soit  $C_0 = (2, 05; 0, 375)$ , puis de rejoindre dans l’ordre  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_1$  et de revenir à  $C_0$ . Cette trajectoire se trouve entièrement située dans l’espace statiquement atteignable du robot, mais est composée de plusieurs changement de sextiques tricirculaires.

Les performances sont ici aussi très bonnes. Les objectifs sont présentés au tableau A.3, et le tableau A.4 montre les erreurs lorsqu’ils sont atteints. La figure A.6 montre les mesures prises lors de la simulation, soit l’angle  $\phi$  et son objectif  $\phi_f$ , la longueur des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et les forces dans les câbles  $F_1$  et  $F_2$ .

La figure A.7 montre la valeur calculée du paramètre libre  $A_1$ , la figure A.8 donne la valeur prédite de la fréquence naturelle, et la figure A.9 indique le nombre d’itérations

TABLE A.3 – Objectifs de simulation, trajectoire 2

Objectif	$\phi$ (rad)	$\rho_1$ (m)	$\rho_2(m)$
1	0	1,93	1,98
2	0	1,98	1,93
3	0	2,37	2,33
4	0	2,33	2,37
5	0	1,93	1,98
6	0	2	2

nécessaires pour que l'algorithme de recherche identifie les bonnes valeurs de  $A_1$  et  $\omega_n$ . Finalement, la figure A.10 montre en détail l'évolution de  $\phi$  ainsi que l'emplacement des objectifs globaux.

TABLE A.4 – Atteinte des objectifs, trajectoire 2

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
0	0,009	0,009
0	-0,01	-0,01
0	0,005	0,005
0	-0,018	-0,018
0	0,014	0,014
0	0	0

### A.3 Troisième trajectoire

La dernière trajectoire est celle présentée dans le corps du mémoire, section 4.3. Elle est la plus complexe car elle contient des éléments des trajectoires précédentes, soit des accélérations et décélérations de l'effecteur, des changement de sextique tricirculaire ainsi que des objectifs situés hors de l'espace statiquement atteignable du manipulateur. Le tableau 4.1 précise les objectifs à atteindre, et le tableau A.5 donne les erreurs lors de l'atteinte de ces objectifs.

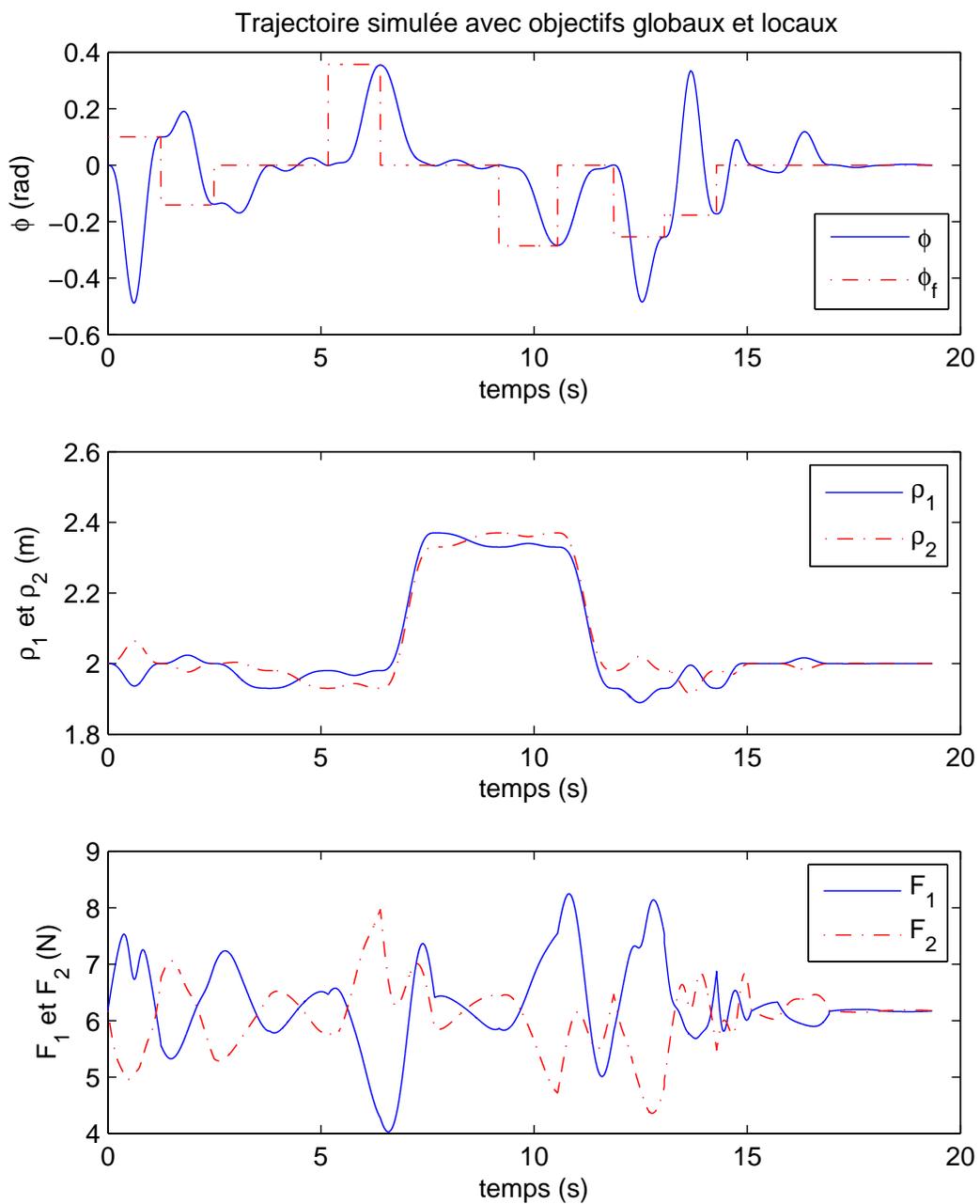


FIGURE A.6 – Résultats de la seconde trajectoire simulée.

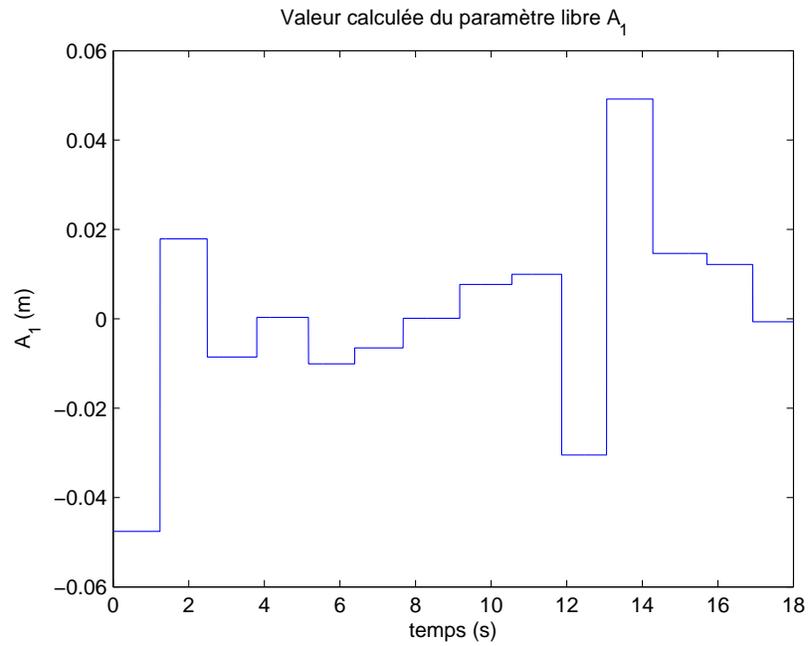


FIGURE A.7 – Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 2.

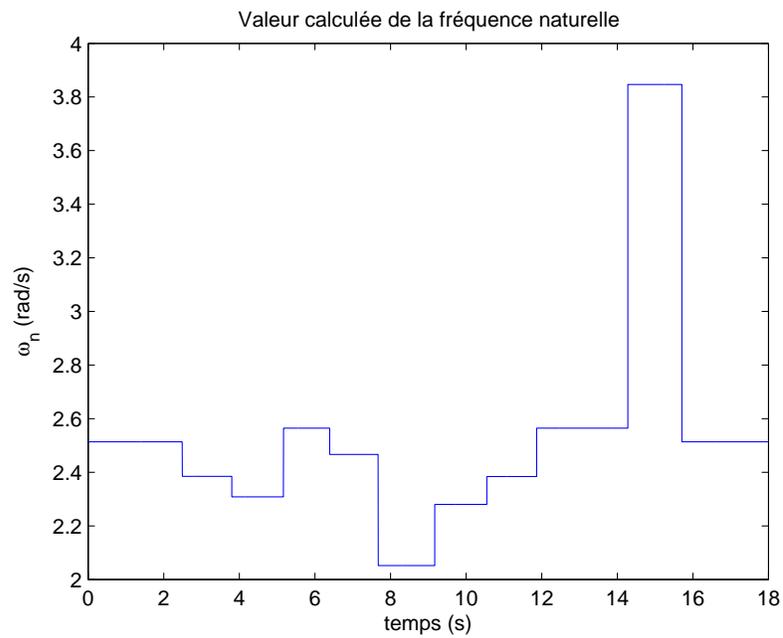


FIGURE A.8 – Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 2.

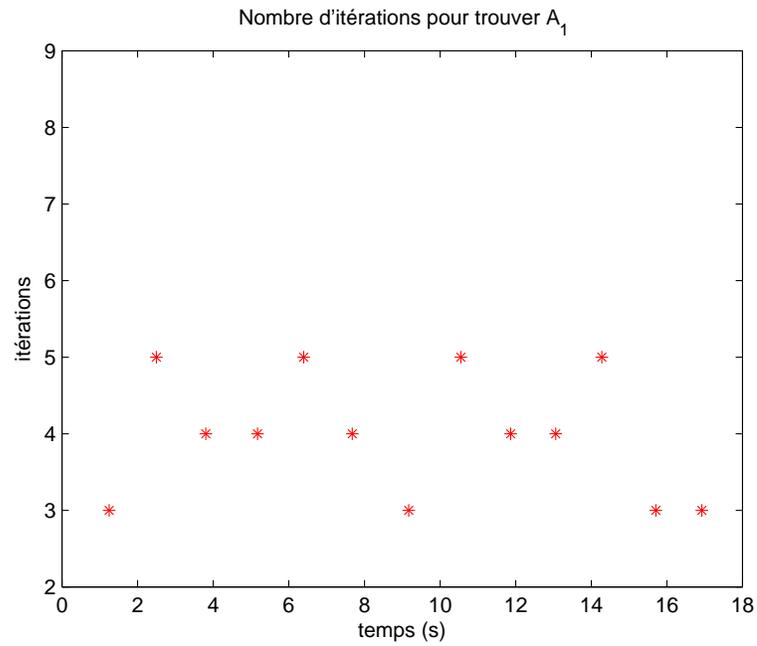


FIGURE A.9 – Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 2.

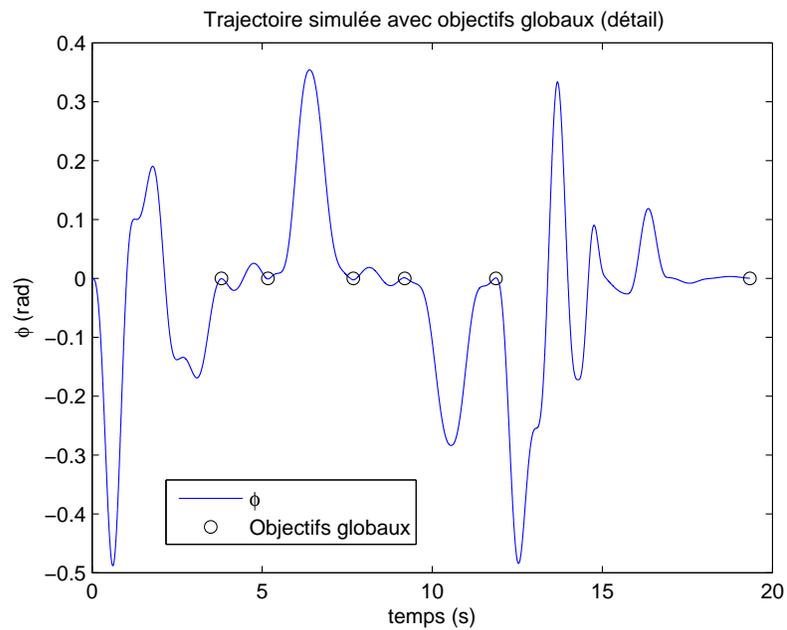


FIGURE A.10 – Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 2.

La figure 4.11 montre les mesures prises lors de la simulation, soit l'angle  $\phi$  et son objectif  $\phi_f$ , la longueur des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et les forces dans les câbles  $F_1$  et  $F_2$ .

La figure A.11 montre la valeur calculée du paramètre libre  $A_1$ , la figure A.12 donne la valeur prédite de la fréquence naturelle, et la figure A.13 indique le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme de recherche identifie les bonnes valeurs de  $A_1$  et  $\omega_n$ . Finalement, la figure A.14 montre en détail l'évolution de  $\phi$  ainsi que l'emplacement des objectifs globaux. Deux objectifs intermédiaires sont indiqués ( $-0,4$  et  $0,4$  rad), car ils se situent entre deux changements de sextique tricirculaire et sont relativement importants. Par clarté, l'objectif 5 n'est pas indiqué mais se situe juste avant l'objectif 6.

TABLE A.5 – Atteinte des objectifs, trajectoire 3

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
-0,6	-0,594	0,006
0,6	0,6	0
0	0,002	0,002
0	-0,001	-0,001
0	0	0
0	0	0

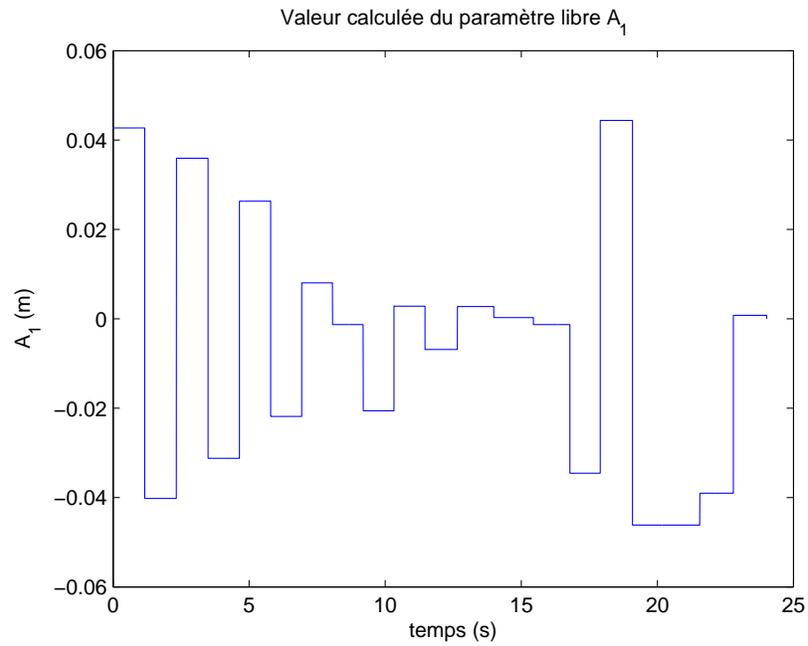


FIGURE A.11 – Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 3.

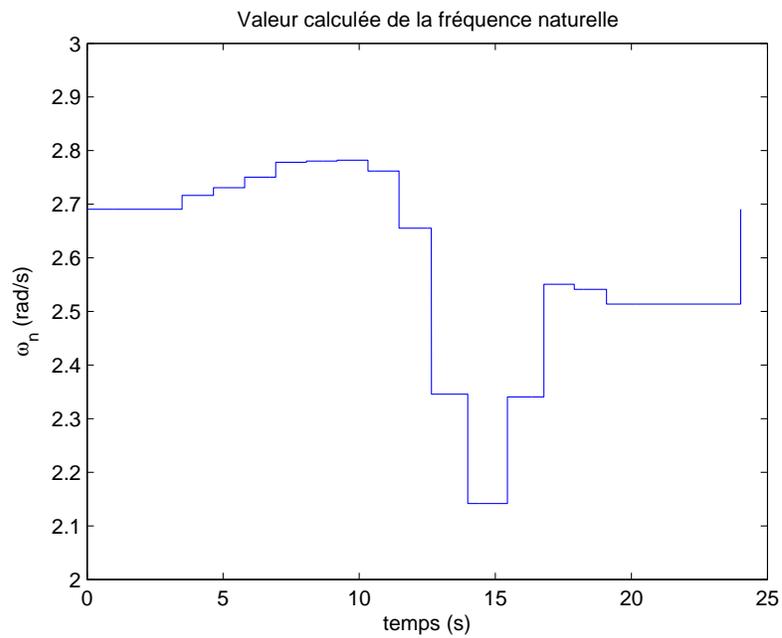


FIGURE A.12 – Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 3.

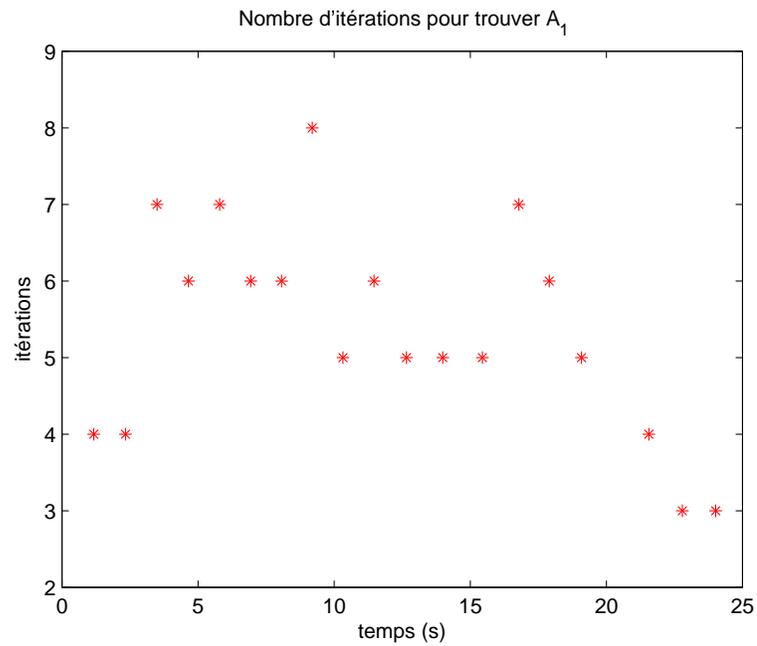


FIGURE A.13 – Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 3.

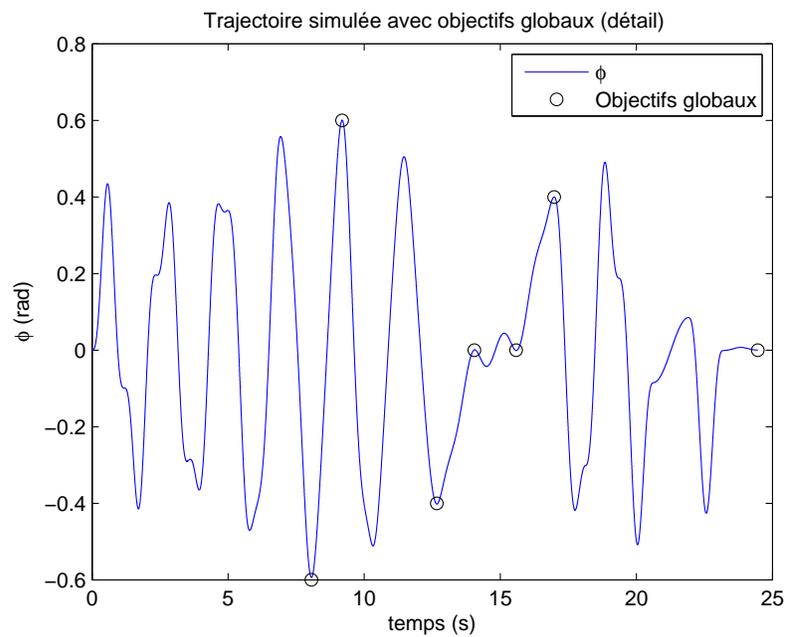


FIGURE A.14 – Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 3.

# Annexe B

## Résultats expérimentaux supplémentaires

Cette annexe présente les résultats obtenus en testant les trajectoires de l'annexe A et tel qu'expliqué au chapitre 5. Les données incluent l'évolution temporelle des variables  $\phi$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , ainsi que l'évolution du paramètre libre  $A_1$ , de la fréquence naturelle et du nombre d'itérations nécessaires pour identifier la valeur correcte de  $A_1$ . Le nombre de pas de calcul nécessaires à la commande sera aussi illustré. Une courte observation des performances du manipulateur lors de l'atteinte des divers objectifs conclura l'étude de chaque trajectoire.

## B.1 Première trajectoire

La première trajectoire consistait en une série d'accélération et de décélération de l'effecteur en restant sur la même sextique tricirculaire.

Les performances réelles sont satisfaisantes. Le signal est clair, avec un peu de rotation autour de l'axe  $x$  au début de l'expérience, principalement avant le premier objectif, mais qui s'estompe très rapidement. Il arrive parfois que la courbe semble dépasser l'objectif, alors que l'erreur est faible. Ceci se produit car la commande a détecté un extremum, soit une vitesse  $\dot{\phi}$  nulle, alors qu'il s'agissait possiblement de bruit qui a faussé la vitesse. À cet instant, la mesure de  $\phi$  est celle indiquée dans le tableau B.1, qui peut être suffisamment proche de l'objectif pour le considérer comme atteint. Une meilleure détection de l'extremum permettrait donc un contrôle plus précis du robot. Les objectifs globaux étaient présentés au tableau A.1. La figure B.1 montre les mesures prises lors de l'expérience, soit l'angle  $\phi$  et son objectif  $\phi_f$ , ainsi que la longueur des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Selon ce qui était mentionné à la section 5.2, il n'était pas possible d'obtenir les forces, mais une constatation visuelle a toujours indiqué que les câbles restaient en tension.

La figure B.2 montre la valeur calculée du paramètre libre  $A_1$ , la figure B.3 donne la valeur prédite de la fréquence naturelle, et la figure B.4 indique le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme de recherche identifie les bonnes valeurs de  $A_1$  et  $\omega_n$ . La figure B.5 illustre le nombre de pas de temps (2 ms) nécessaires à l'algorithme de commande pour terminer ses calculs, et ce à chaque instant : les pics représentent alors les débuts des demi-périodes. Finalement, la figure B.6 montre en détail l'évolution de  $\phi$  ainsi que l'emplacement des objectifs globaux.

TABLE B.1 – Atteinte des objectifs, trajectoire 1

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
-0,3	-0,298	0,002
0	-0,001	-0,001
-0,6	-0,588	0,012
0	-0,003	-0,003

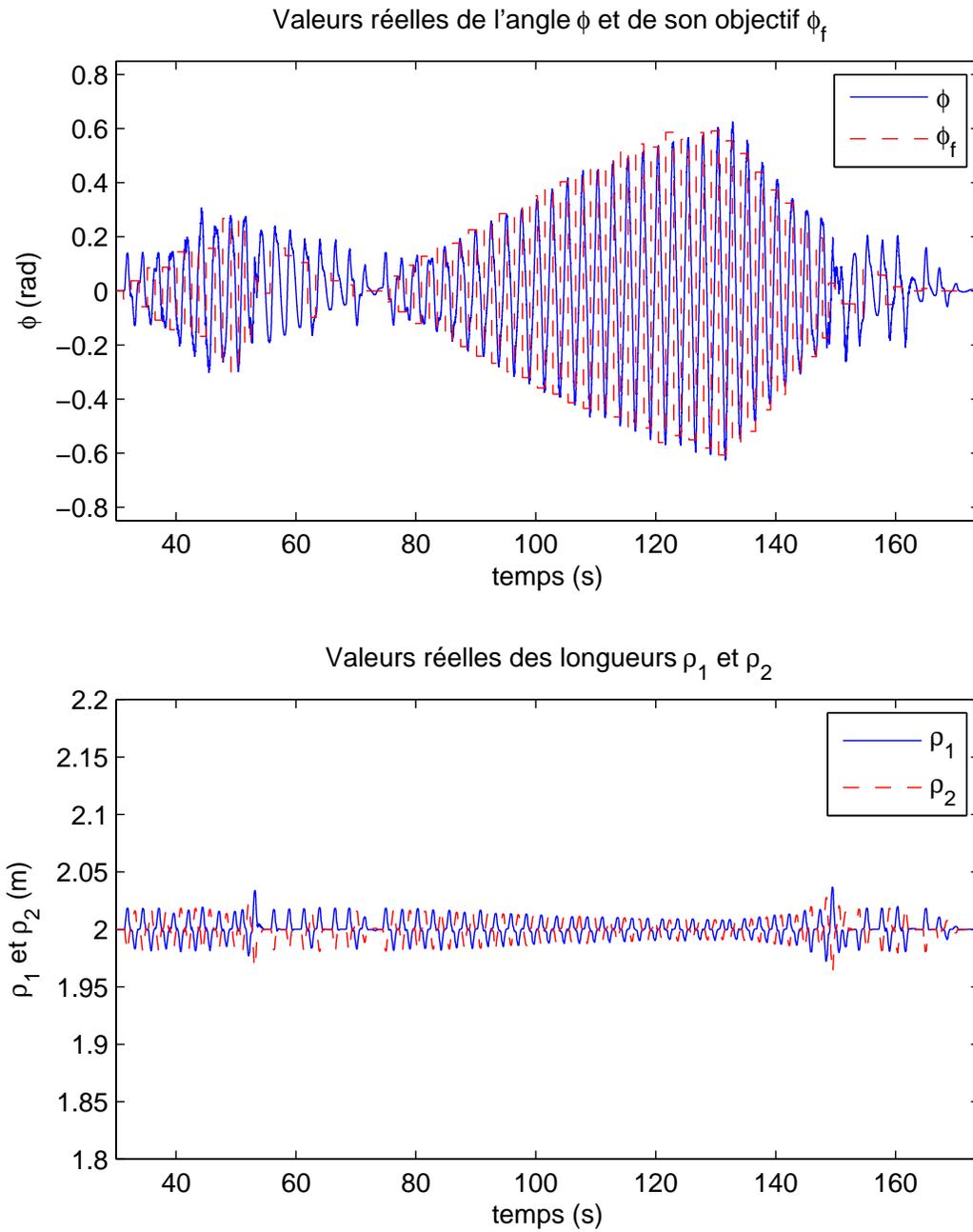


FIGURE B.1 – Résultats de la première trajectoire simulée.

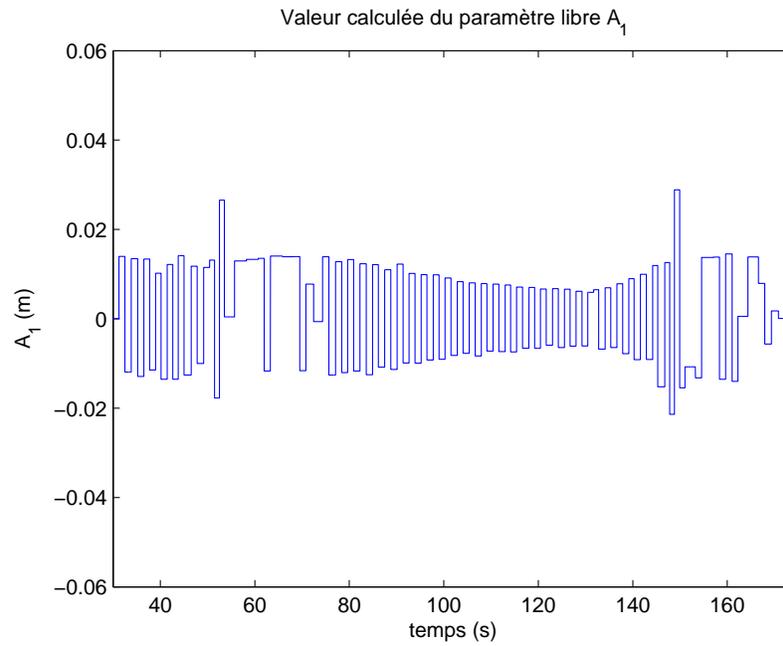


FIGURE B.2 – Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 1.

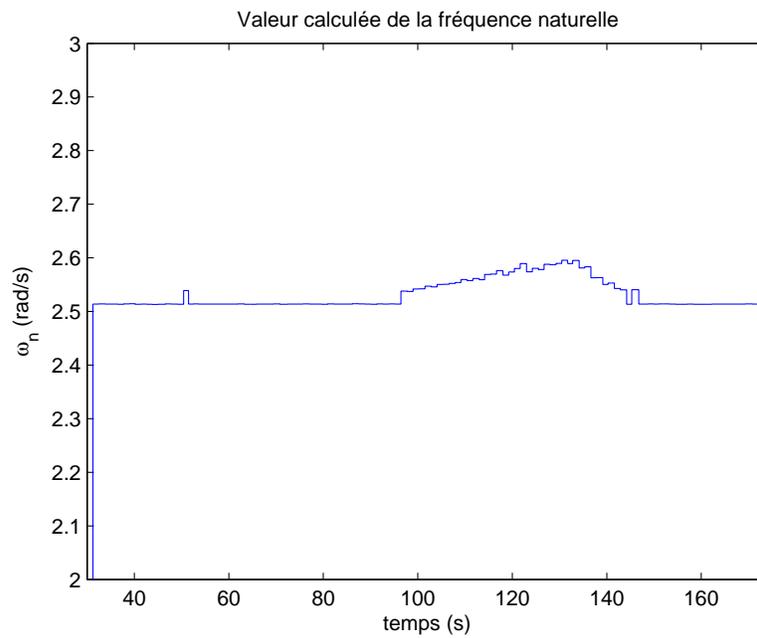


FIGURE B.3 – Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 1.

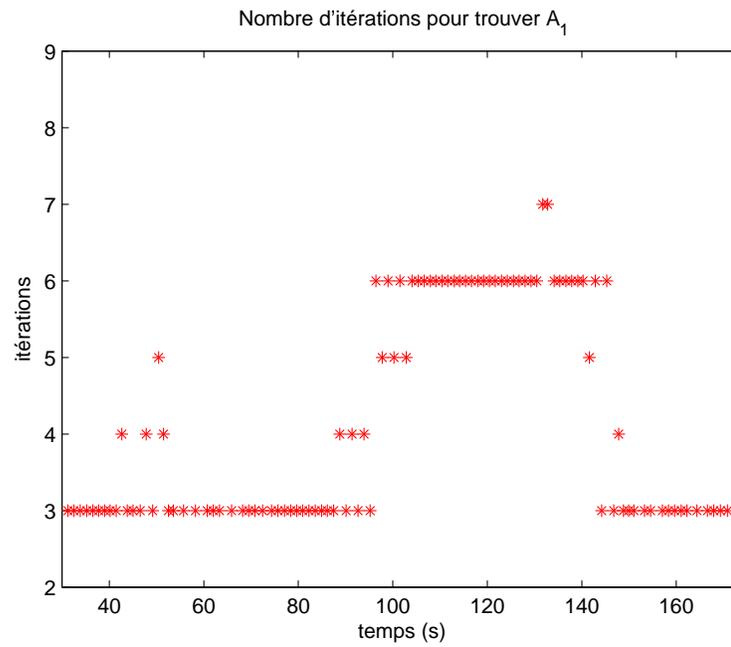


FIGURE B.4 – Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 1.

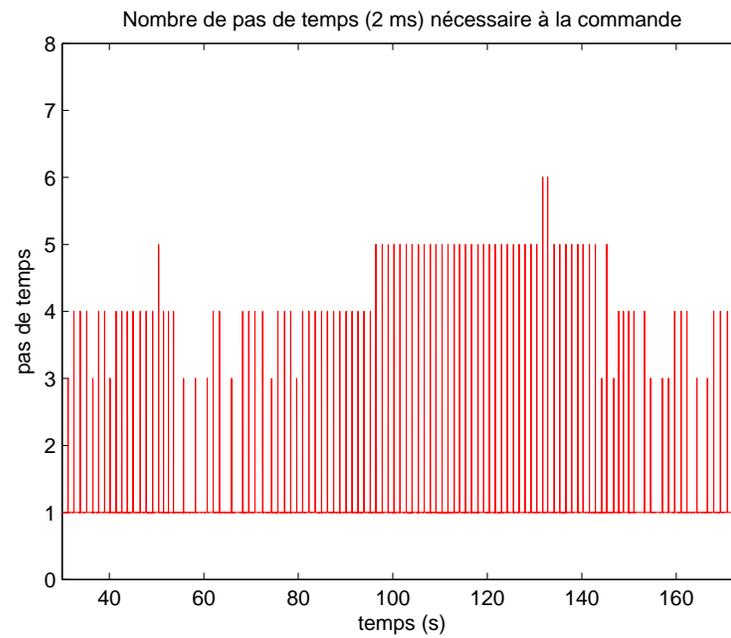


FIGURE B.5 – Nombre de pas de temps nécessaires pour exécuter toute la commande.

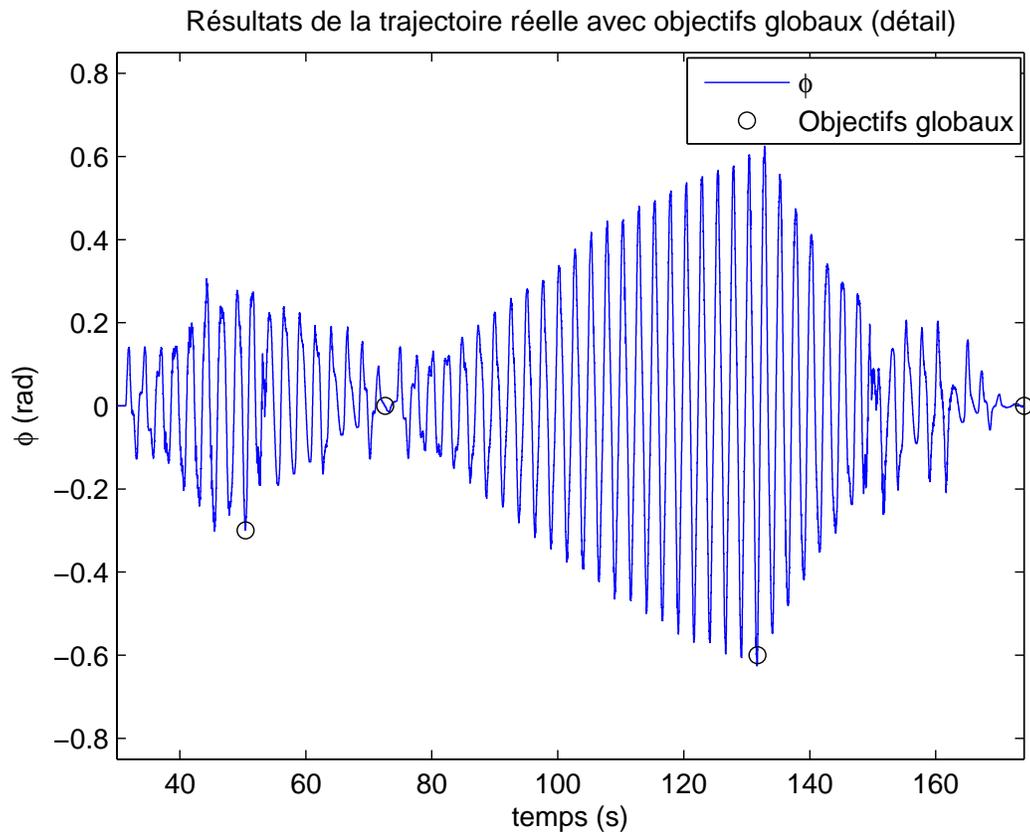


FIGURE B.6 – Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 1.

## B.2 Deuxième trajectoire

La seconde trajectoire consistait à rejoindre les sommets d'un carré de 0,4 m de côté, avec à chaque sommet une orientation  $\phi = 0$  rad.

Les performances réelles sont encore une fois satisfaisantes. Il arrive parfois que le signal de  $\phi$  soit bruité, dans ces moments les câbles commencent à vibrer. Ce mouvement autour de l'axe  $x$  a tendance à s'estomper rapidement, mais il est un problème à garder à l'esprit. De plus, ce mouvement est plus présent dans cette trajectoire que dans la première trajectoire. Ceci s'explique par le changement de sextiques tricirculaires, qui semble exciter plus fortement la rotation autour de l'axe  $x$ . Le tableau B.2 montre les erreurs lors de l'atteinte des objectifs globaux, présentés au tableau A.3. La figure B.7 montre les mesures prises lors de l'expérience, soit l'angle  $\phi$  et son objectif  $\phi_f$ , ainsi que la longueur des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

La figure B.8 montre la valeur calculée du paramètre libre  $A_1$ , la figure B.9 donne la valeur prédite de la fréquence naturelle, et la figure B.10 indique le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme de recherche identifie les bonnes valeurs de  $A_1$  et  $\omega_n$ . La figure B.11 illustre le nombre de pas de temps (2 ms) nécessaires à l'algorithme de commande pour terminer ses calculs. Finalement, la figure B.12 montre en détail l'évolution de  $\phi$  ainsi que l'emplacement des objectifs globaux.

TABLE B.2 – Atteinte des objectifs, trajectoire 2

Objectif (rad)	Mesure (rad)	Erreur (rad)
0	-0,0004	-0,0004
0	-0,001	-0,001
0	-0,002	-0,002
0	0,001	0,001
0	0,001	0,001
0	0,0002	0,0002

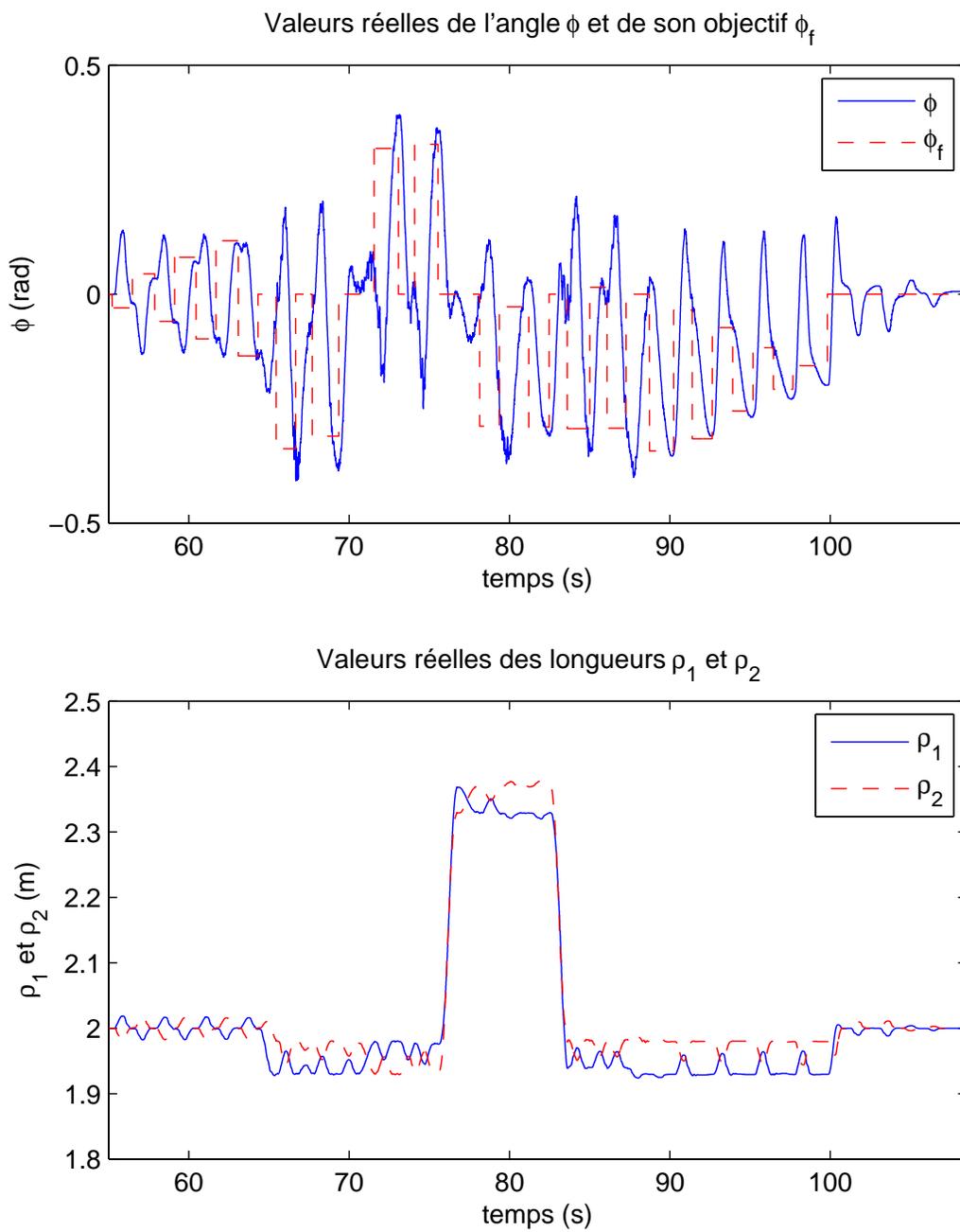


FIGURE B.7 – Résultats de la seconde trajectoire simulée.

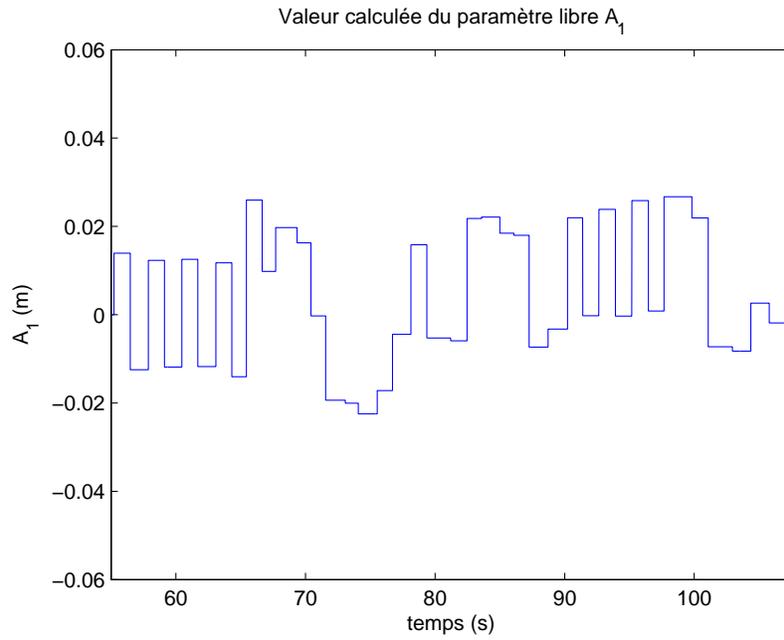


FIGURE B.8 – Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 2.

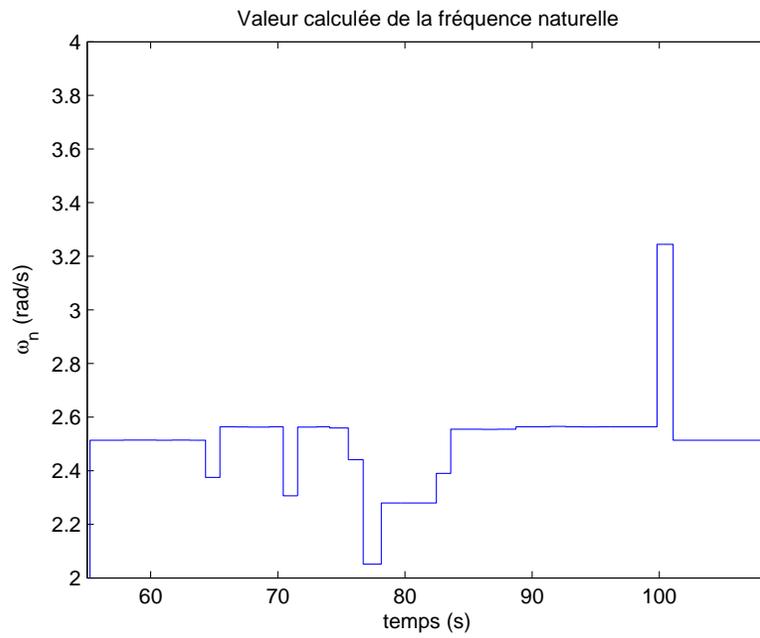


FIGURE B.9 – Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 2.

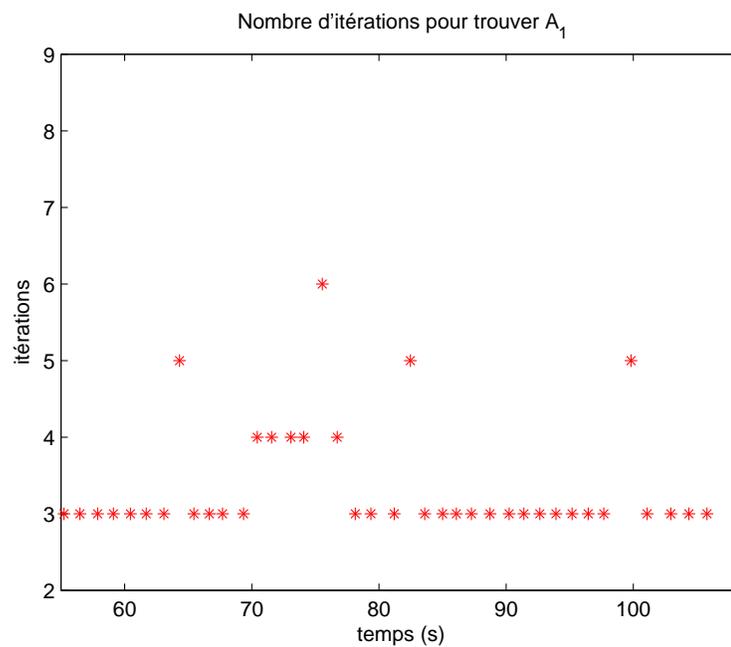


FIGURE B.10 – Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 2.

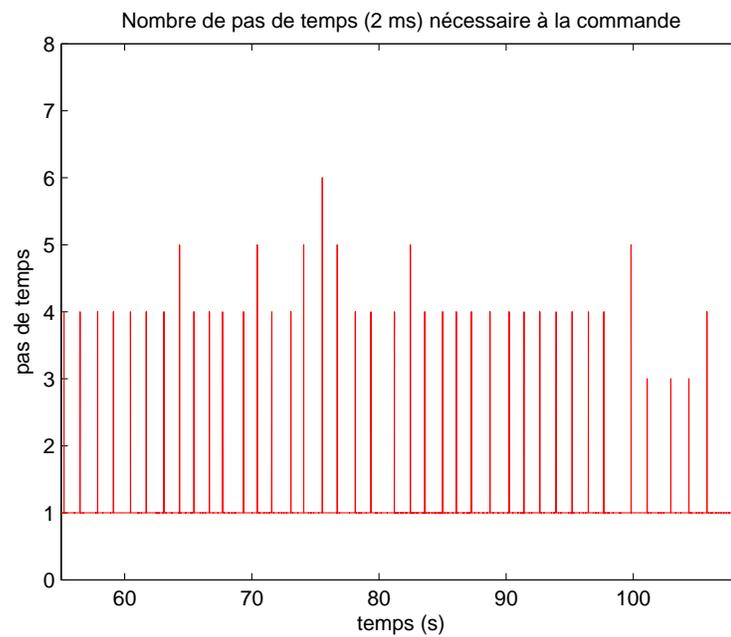


FIGURE B.11 – Nombre de pas de temps nécessaires pour exécuter toute la commande, trajectoire 2.

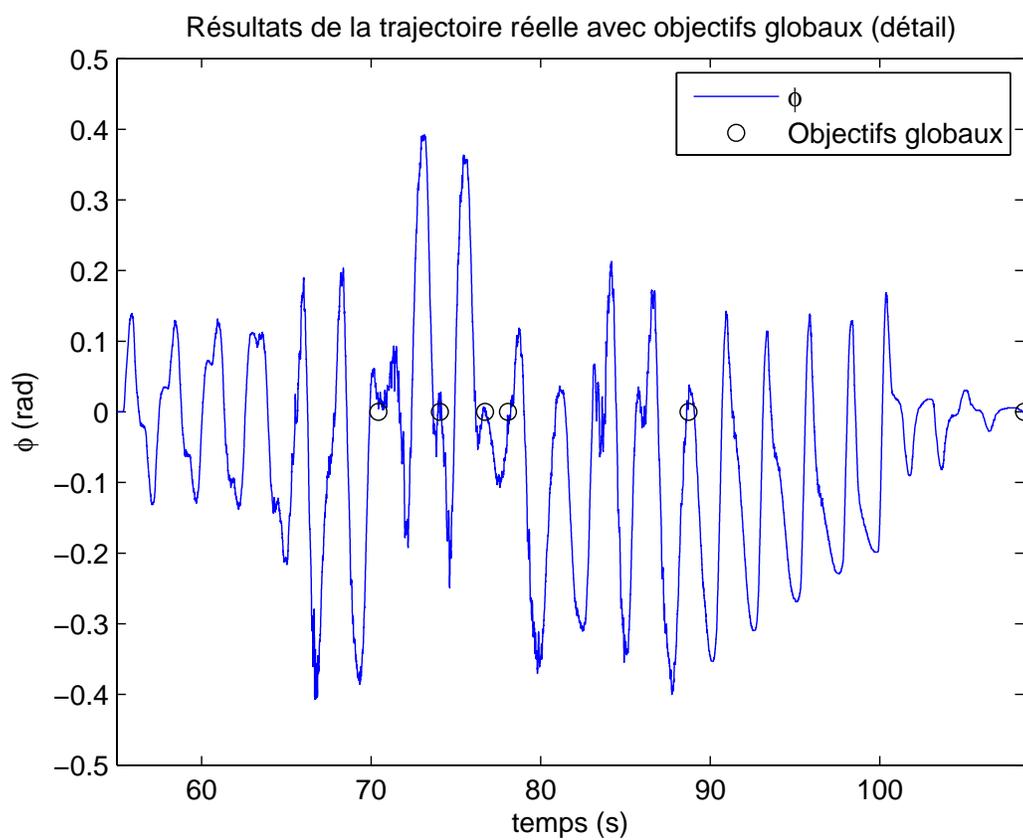


FIGURE B.12 – Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 2.

### B.3 Troisième trajectoire

Les résultats de la troisième trajectoire ont été présentés et commentés à la section 5.2. Les objectifs avaient été définis au tableau 4.1, et les performances au tableau 5.3. Les données obtenues, soit l'angle  $\phi$ , son objectif  $\phi_f$ , ainsi que la longueur des câbles  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont présentées à la figure 5.9.

La figure B.13 montre la valeur calculée du paramètre libre  $A_1$ , la figure B.14 donne la valeur prédite de la fréquence naturelle, et la figure B.15 indique le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme de recherche identifie les bonnes valeurs de  $A_1$  et  $\omega_n$ . La figure B.16 illustre le nombre de pas de temps (2 ms) nécessaires à l'algorithme de commande pour terminer ses calculs. Finalement, la figure B.17 montre en détail l'évolution de  $\phi$  ainsi que l'emplacement des objectifs globaux. Deux objectifs intermédiaires sont indiqués ( $-0,4$  et  $0,4$  rad), car ils se situent entre deux changements de sextique tricirculaire et sont relativement importants. Par clarté, l'objectif 5 n'est pas indiqué mais se situe juste avant l'objectif 6.

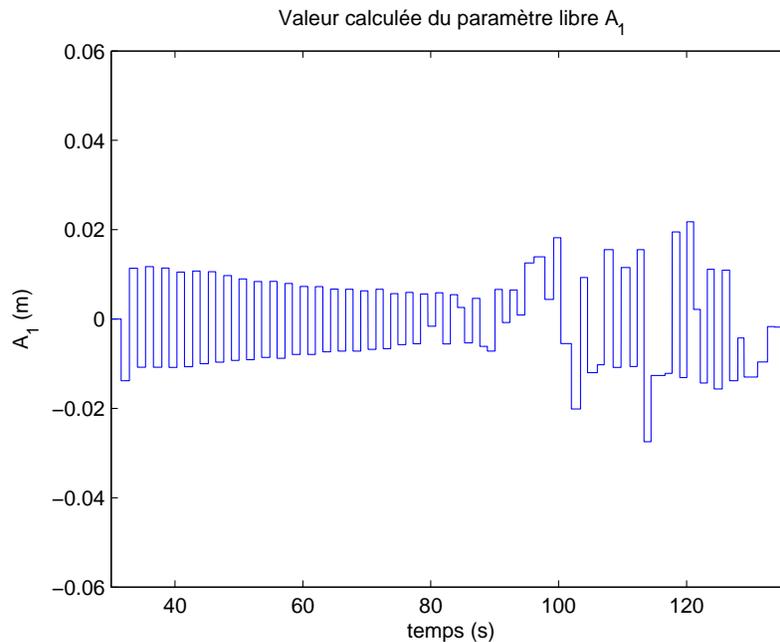


FIGURE B.13 – Valeur du paramètre libre calculée lors de la recherche, trajectoire 3.

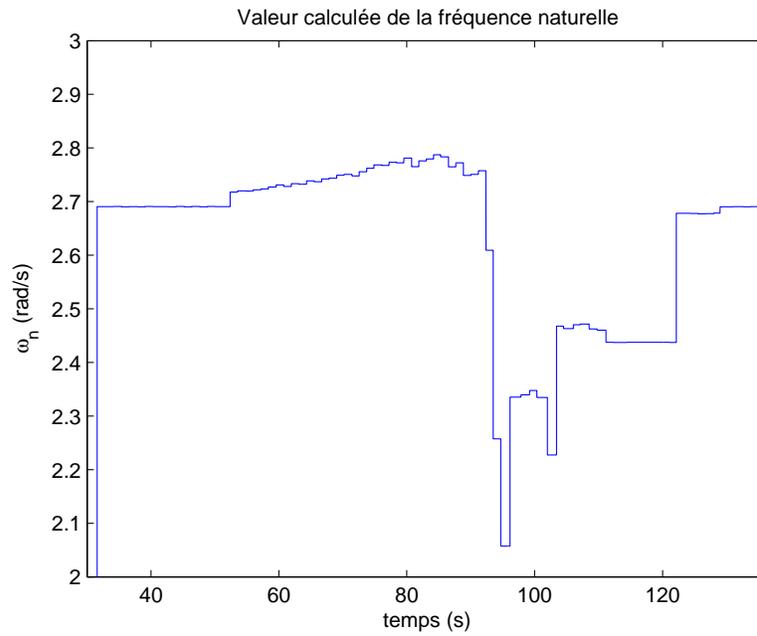


FIGURE B.14 – Valeur de la fréquence naturelle calculée lors de la recherche, trajectoire 3.

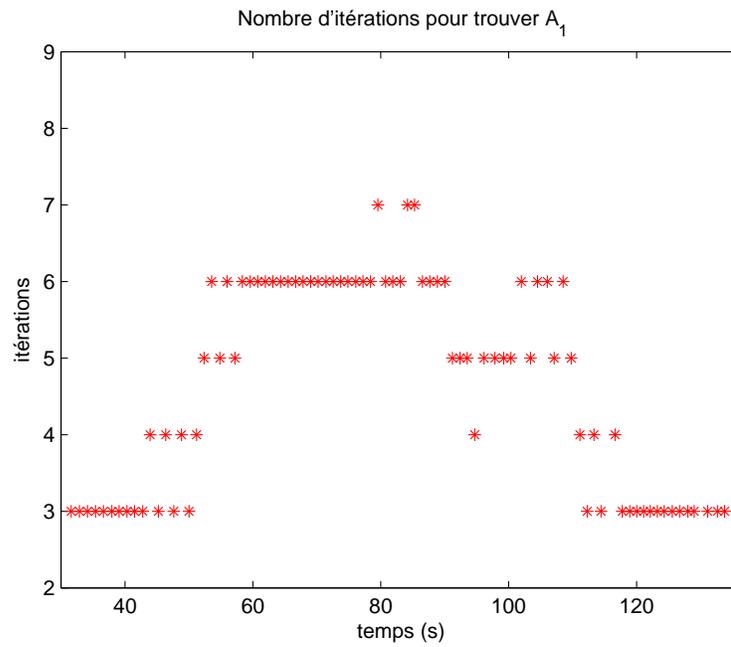


FIGURE B.15 – Nombre d'itérations nécessaires lors de la recherche, trajectoire 3.

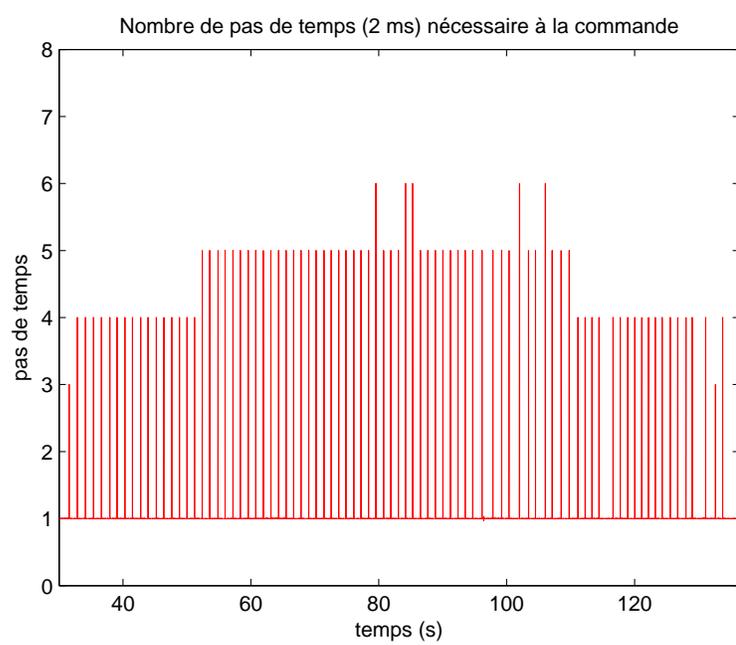


FIGURE B.16 – Nombre de pas de temps nécessaires pour exécuter toute la commande, trajectoire 3.

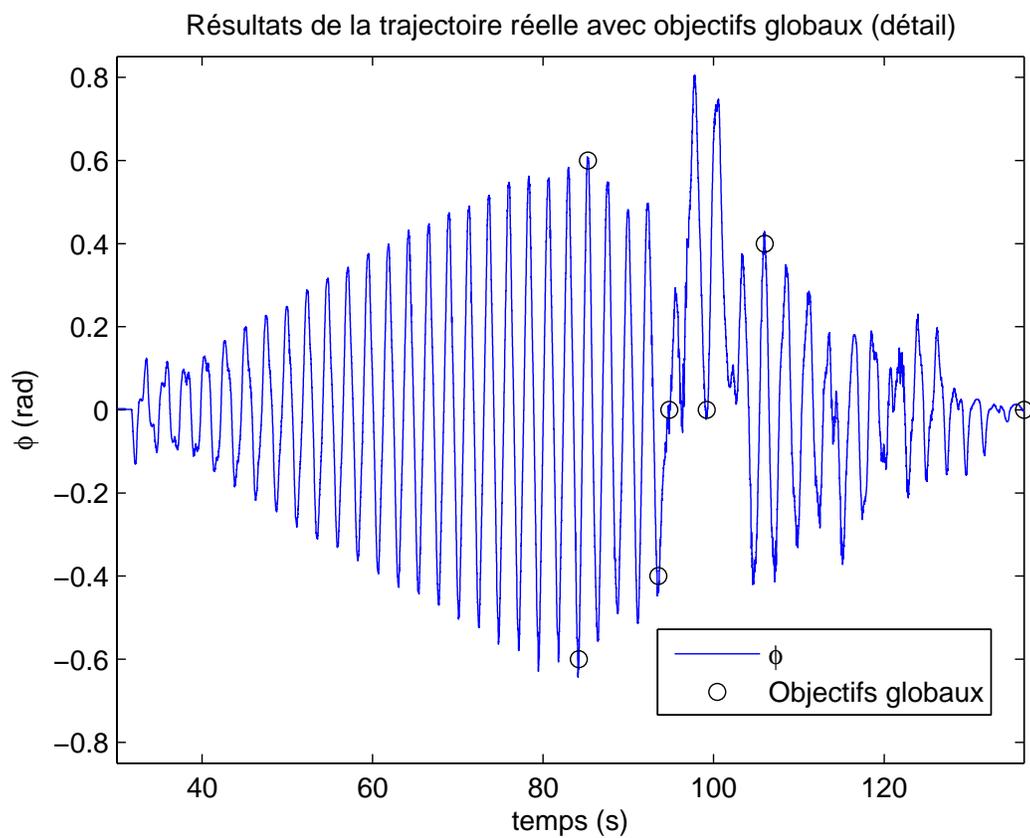


FIGURE B.17 – Détail de l'orientation de l'effecteur et atteinte des objectifs globaux, trajectoire 3.