

PIERRE-LUC RICHARD

**ANALYSE CINÉMATIQUE, SYNTHÈSE ET  
CONCEPTION MÉCANIQUE D'UN MÉCANISME  
PARALLÈLE À QUATRE DEGRÉS DE LIBERTÉ**

Mémoire présenté  
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2005

# Résumé

L'objectif final de ce projet est la conception d'un nouveau manipulateur parallèle générant les degrés de liberté de Schönflies (3 translations et une rotation permises à l'effecteur). Dans un premier temps, l'analyse cinématique complète de 11 architectures de ce type est faite. Celle-ci comprend l'étude des configurations singulières, tant cinématiques que de contrainte, la quantification et la représentation graphique de l'espace atteignable et l'obtention d'un indice de dextérité globale. Suite à cette analyse, une étude comparative est menée afin de déterminer l'architecture possédant les meilleures propriétés. Cette dernière est alors retenue, optimisée pour finalement faire l'objet d'un design mécanique menant à la fabrication d'un prototype.

# Avant-propos

Je tiens tout d'abord à remercier Clément M. Gosselin qui fut le directeur de mon projet de maîtrise. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir fait confiance pendant tout près de quatre années de ma vie pour faire partie des activités de son laboratoire. En effet, c'est au laboratoire de robotique de l'Université Laval que j'ai eu mon premier stage à l'été 2001. Suite à ce stage, j'ai pu en dénicher un autre à l'Université McGill l'été suivant grâce aux contacts de M. Gosselin. Sans oublier mes activités continuelles à temps partiel dans son laboratoire durant mes sessions de cours. Mon projet de maîtrise, en plein dans mes cordes, est une belle façon de conclure ces quelques années avec vous. Merci !

Je ne peux évidemment passer sous silence la contribution des assistants (euh ! ... professionnels...) de recherche du laboratoire. Merci à Thierry et Simon pour leur aide importante au niveau du design mécanique du prototype, ainsi que Boris pour son excellent travail sur l'aspect informatique du laboratoire. Un bon environnement de travail, stable, avec des outils informatiques fonctionnant toujours comme il se doit, a bien entendu facilité mon séjour au laboratoire.

Je veux également remercier M. Xianwen Kong, chercheur post-doctoral au laboratoire, qui est à l'origine des bases théoriques de mon projet. Sans lui, il y aurait un robot de moins au laboratoire.

En terminant, je veux souligner que j'ai fort apprécié connaître deux membres du laboratoire à travers une autre de mes passions : le karaté (la robotique n'étant pas la seule...)!! J'ai pratiqué ce sport avec Ilian et Lionel pendant quelques années, ce qui m'a permis de les connaître dans un lieu différent de celui des singularités...

*"Le but du karaté n'est pas la victoire, mais le dépassement de soi-même"*

Gichin Funakoshi



# Table des matières

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Résumé</b>   | <b>i</b>    |
| <b>Avant-propos</b>   | <b>ii</b>   |
| <b>Table des matières</b>   | <b>iv</b>   |
| <b>Liste des tableaux</b>   | <b>viii</b> |
| <b>Liste des figures</b>  | <b>x</b>    |
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>    |
| <b>1 Généralités</b>  | <b>3</b>    |
| 1.1 Théorie et méthodologie . . . . .   | 4           |
| 1.1.1 Problème géométrique inverse d'un manipulateur . . . . .  | 4           |
| 1.1.2 Matrices Jacobiennes . . . . .  | 5           |
| 1.1.3 Singularités de contrainte . . . . .  | 8           |
| 1.1.4 Dextérité . . . . .   | 8           |
| 1.2 Définition des vecteurs . . . . .   | 10          |
| 1.3 Nomenclature pour les chaînes cinématiques . . . . .  | 12          |
| <b>2 Analyse cinématique</b>  | <b>13</b>   |
| 2.1 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ (4- $\underline{R}\underline{U}\underline{U}$ ) . . . . . | 14          |
| 2.1.1 PGI et espace atteignable . . . . .   | 14          |
| 2.1.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . .  | 17          |
| 2.1.2.1 Singularités de type 1 . . . . .  | 18          |
| 2.1.2.2 Singularités de type 2 . . . . .  | 19          |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.1.3    | Singularités de contrainte . . . . .   | 20        |
| 2.1.4    | Dextérité . . . . .  | 21        |
| 2.2      | 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 21        |
| 2.2.1    | PGI et espace atteignable . . . . .  | 23        |
| 2.2.2    | Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . .   | 25        |
| 2.2.2.1  | Singularités de type 1 . . . . .   | 26        |
| 2.2.2.2  | Singularités de type 2 . . . . .   | 27        |
| 2.2.3    | Singularités de contraintes . . . . .  | 30        |
| 2.2.4    | Dextérité . . . . .  | 31        |
| 2.3      | Analyse des résultats . . . . .  | 32        |
| <b>3</b> | <b>Design du manipulateur 4-<math>\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}</math></b> | <b>35</b> |
| 3.1      | Analyse cinématique . . . . .  | 37        |
| 3.2      | Découplage partiel . . . . .   | 38        |
| 3.3      | Dextérité . . . . .  | 40        |
| 3.4      | Espace atteignable . . . . .   | 41        |
| 3.5      | Design du prototype . . . . .  | 45        |
| 3.5.1    | Structure . . . . .  | 46        |
| 3.5.2    | Actionneurs . . . . .  | 47        |
| 3.5.3    | Prototype complet . . . . .  | 51        |
|          | <b>Conclusion</b>  | <b>53</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>55</b> |
| <b>A</b> | <b>Contraintes géométriques associées aux architectures 3T1R</b>                               | <b>57</b> |
| A.1      | 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                                   | 59        |
| A.2      | 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                                   | 59        |
| A.3      | 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                                   | 59        |
| A.4      | 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 60        |
| A.5      | 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 60        |
| A.6      | 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 60        |
| A.7      | 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 61        |
| A.8      | 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 61        |
| A.9      | 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                                   | 62        |
| A.10     | 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                                   | 62        |
| A.11     | 4- $\underline{R}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .                               | 62        |
| <b>B</b> | <b>Étude cinématique des 9 autres manipulateurs</b>  | <b>64</b> |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| B.1 | $4\text{-}\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ ( $4\text{-}\underline{UUR}$ ) . . . . .                          | 65 |
|     | B.1.1 PGI et espace atteignable . . . . .   | 65 |
|     | B.1.2 Matrices jacobienne et lieux de singularité . . . . .   | 67 |
|     | B.1.2.1 Singularités de type 1 . . . . .  | 68 |
|     | B.1.2.2 Singularités de type 2 . . . . .  | 69 |
|     | B.1.3 Singularités de contrainte . . . . .  | 70 |
|     | B.1.4 Dexterité . . . . .   | 70 |
| B.2 | $4\text{-}\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ ( $4\text{-}\underline{\check{R}}\check{R}U\check{R}$ ) . . . . . | 72 |
|     | B.2.1 PGI et espace atteignable . . . . .   | 72 |
|     | B.2.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . .  | 74 |
|     | B.2.2.1 Singularités de type 1 . . . . .  | 75 |
|     | B.2.2.2 Singularités de type 2 . . . . .  | 75 |
|     | B.2.3 Singularités de contraintes . . . . .   | 76 |
|     | B.2.4 Dexterité . . . . .   | 77 |
| B.3 | $4\text{-}\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}$ ( $4\text{-}\underline{PUU}$ ) . . . . .                                  | 79 |
|     | B.3.1 PGI et espace atteignable . . . . .   | 79 |
|     | B.3.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . .  | 81 |
|     | B.3.2.1 Singularités de type 1 . . . . .  | 82 |
|     | B.3.2.2 Singularités de type 2 . . . . .  | 82 |
|     | B.3.3 Singularités de contraintes . . . . .   | 83 |
|     | B.3.4 Dexterité . . . . .   | 84 |
| B.4 | $4\text{-}\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}$ ( $4\text{-}\underline{P}\check{R}U\check{R}$ ) . . . . .                 | 85 |
|     | B.4.1 PGI et espace atteignable . . . . .   | 85 |
|     | B.4.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . .  | 87 |
|     | B.4.2.1 Singularités de type 1 . . . . .  | 88 |
|     | B.4.2.2 Singularités de type 2 . . . . .  | 88 |
|     | B.4.3 Singularités de contraintes . . . . .   | 89 |
|     | B.4.4 Dexterité . . . . .   | 90 |
| B.5 | $4\text{-}\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}$ ( $4\text{-}\underline{P}\check{R}U\check{R}$ ) . . . . .                 | 91 |
|     | B.5.1 PGI et espace atteignable . . . . .   | 92 |
|     | B.5.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . .  | 93 |
|     | B.5.2.1 Singularités de type 1 . . . . .  | 95 |
|     | B.5.2.2 Singularités de type 2 . . . . .  | 95 |
|     | B.5.3 Singularités de contraintes . . . . .   | 96 |
|     | B.5.4 Dexterité . . . . .   | 97 |
| B.6 | $4\text{-}\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .   | 98 |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| B.6.1    | PGI et espace atteignable . . . . .                    | 98         |
| B.6.2    | Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . . | 100        |
| B.6.2.1  | Singularités de type 1 . . . . .                       | 101        |
| B.6.2.2  | Singularités de type 2 . . . . .                       | 102        |
| B.6.3    | Singularités de contraintes . . . . .                  | 104        |
| B.6.4    | Dextérité . . . . .                                    | 105        |
| B.7      | 4- <u>Ř</u> ŘŘŘŘ . . . . .                             | 106        |
| B.7.1    | PGI et espace atteignable . . . . .                    | 106        |
| B.7.2    | Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . . | 108        |
| B.7.2.1  | Singularités de type 1 . . . . .                       | 109        |
| B.7.2.2  | Singularités de type 2 . . . . .                       | 109        |
| B.7.3    | Singularités de contraintes . . . . .                  | 110        |
| B.7.4    | Dextérité . . . . .                                    | 111        |
| B.8      | 4- <u>Ř</u> ŘŘŘŘ . . . . .                             | 112        |
| B.8.1    | PGI et espace atteignable . . . . .                    | 113        |
| B.8.2    | Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . . | 114        |
| B.8.2.1  | Singularités de type 1 . . . . .                       | 115        |
| B.8.2.2  | Singularités de type 2 . . . . .                       | 116        |
| B.8.3    | Singularités de contraintes . . . . .                  | 117        |
| B.8.4    | Dextérité . . . . .                                    | 118        |
| B.9      | 4- <u>Ř</u> ŘŘŘŘ . . . . .                             | 119        |
| B.9.1    | PGI et espace atteignable . . . . .                    | 119        |
| B.9.2    | Matrices jacobiennes et lieux de singularité . . . . . | 123        |
| B.9.2.1  | Singularités de type 1 . . . . .                       | 124        |
| B.9.2.2  | Singularités de type 2 . . . . .                       | 125        |
| B.9.3    | Singularités de contraintes . . . . .                  | 126        |
| B.9.4    | Dextérité . . . . .                                    | 127        |
| <b>C</b> | <b>Forces aux actionneurs</b>                          | <b>128</b> |
| <b>D</b> | <b>Fiches techniques</b>                               | <b>130</b> |

# Liste des tableaux

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 2.1  | Paramètres du 4- <u>R</u> UU . . . . .                                     | 16  |
| 2.2  | Longueur des membrures du 4- <u>R</u> UU . . . . .                         | 16  |
| 2.3  | Paramètres du 4- <u>P</u> ŘŘŘ (α = 3π/4) . . . . .                         | 24  |
| 2.4  | Longueur des membrures du 4- <u>P</u> ŘŘŘ . . . . .                        | 24  |
| 2.5  | Notation pour qualifier les singularités . . . . .                         | 32  |
| 2.6  | Résumé de l'étude cinématique (base ou effecteur rectangulaire) . . . . .  | 33  |
| 3.1  | Paramètres du 4- <u>C</u> RU . . . . .                                     | 44  |
| 3.2  | Valeurs limites nécessaires aux actionneurs du 4- <u>C</u> RU . . . . .    | 44  |
| B.1  | Longueur des membrures du 4- <u>U</u> UR . . . . .                         | 66  |
| B.2  | Orientation du dernier joint des pattes du 4- <u>Ř</u> ŘUR . . . . .       | 73  |
| B.3  | Longueur des membrures du 4- <u>Ř</u> ŘUR . . . . .                        | 73  |
| B.4  | Orientation de la première membrure des pattes du 4- <u>P</u> UU . . . . . | 80  |
| B.5  | Longueur des membrures du 4- <u>P</u> UU . . . . .                         | 80  |
| B.6  | Paramètres du 4- <u>P</u> ŘUR . . . . .                                    | 86  |
| B.7  | Longueur des membrures du 4- <u>P</u> ŘUR . . . . .                        | 87  |
| B.8  | Paramètres du 4- <u>P</u> ŘUR . . . . .                                    | 93  |
| B.9  | Longueur des membrures du 4- <u>P</u> ŘUR . . . . .                        | 93  |
| B.10 | Paramètres du 4- <u>P</u> ŘŘŘ (α = 3π/4) . . . . .                         | 100 |
| B.11 | Longueur des membrures du 4- <u>P</u> ŘŘŘ . . . . .                        | 100 |
| B.12 | Paramètres du 4- <u>Ř</u> ŘŘŘ (α = 3π/4) . . . . .                         | 108 |
| B.13 | Longueur des membrures du 4- <u>Ř</u> ŘŘŘ . . . . .                        | 108 |
| B.14 | Paramètres du 4- <u>Ř</u> ŘŘŘ (α = 3π/4) . . . . .                         | 114 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| B.15 | Longueur des membrures du $4\text{-}\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .           | 114 |
| B.16 | Paramètres du $4\text{-}\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ ( $\alpha = 3\pi/4$ ) . . . . . | 122 |
| B.17 | Longueur des membrures du $4\text{-}\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ . . . . .           | 123 |

# Liste des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Définition des paramètres. . . . .  | 11 |
| 1.2  | Configuration de base (vue de dessus). . . . .  | 12 |
| 2.1  | a) Manipulateur 4- $\underline{R}\ddot{R}\dot{R}\dot{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{R}UU$ . . . . .                              | 14 |
| 2.2  | Espace atteignable du 4- $\underline{R}UU$ en fonction de l'orientation de l'effecteur. . . . .   | 17 |
| 2.3  | Espace atteignable du 4- $\underline{R}UU$ (effecteur rectangulaire et $\phi = -\pi/3$ ). . . . .   | 18 |
| 2.4  | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}UU$ (effecteur carré, $\phi = 0$ ). . . . .  | 19 |
| 2.5  | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}UU$ (effecteur carré, $\phi = -\pi/3$ ). . . . .   | 19 |
| 2.6  | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}UU$ (effecteur rect. et $\phi = 0$ ). . . . .  | 20 |
| 2.7  | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}UU$ (effecteur rect. et $\phi = -\pi/2$ ). . . . .   | 20 |
| 2.8  | Dextérité moyenne en $x$ et $y$ du 4- $\underline{R}UU$ en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire). . . . . | 22 |
| 2.9  | a) Manipulateur 4- $\underline{P}\ddot{R}\dot{R}\dot{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{P}\ddot{R}\dot{R}\dot{R}$ . . . . .          | 22 |
| 2.10 | Vecteur $\mathbf{e}$ dans le repère de l'effecteur. . . . .   | 23 |
| 2.11 | Espace atteignable du 4- $\underline{P}\ddot{R}\dot{R}\dot{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur. . . . .                       | 25 |
| 2.12 | Espace atteignable du 4- $\underline{P}\ddot{R}\dot{R}\dot{R}$ (base rectangulaire et $\phi = 0$ ). . . . .                               | 26 |
| 2.13 | Dextérité du 4- $\underline{P}\ddot{R}\dot{R}\dot{R}$ en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire). . . . .                     | 31 |
| 3.1  | Schéma du 4- $\underline{C}RU$ . . . . .  | 36 |
| 3.2  | Dextérité globale du 4- $\underline{C}RU$ en fonction des dimensions de son effecteur. . . . .  | 41 |
| 3.3  | Dextérité du 4- $\underline{C}RU$ en fonction de $\phi$ . . . . .   | 42 |
| 3.4  | Espace atteignable du 4- $\underline{C}RU$ ( $\phi = 0$ ). . . . .  | 45 |
| 3.5  | Espace atteignable du 4- $\underline{C}RU$ ( $\phi = \pi/3$ ). . . . .  | 45 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.6  | Espace atteignable cubique du 4- <u>CRU</u> ( $\phi = 0$ ). . . . .  | 45 |
| 3.7  | Espace atteignable cubique du 4- <u>CRU</u> ( $\phi = \pi/3$ ). . . . .  | 45 |
| 3.8  | Une patte du prototype. . . . .  | 47 |
| 3.9  | Effecteur. . . . .   | 47 |
| 3.10 | Chariot, articulation no2 et mâchoire. . . . .   | 48 |
| 3.11 | Moteur, glissière, courroie et poulies. . . . .  | 48 |
| 3.12 | Schéma de l'ensemble moteur-réducteur-poulie. . . . .  | 49 |
| 3.13 | Prototype du 4- <u>CRU</u> . . . . .   | 52 |
| A.1  | Représentation schématique des architectures 3T1R. . . . .   | 58 |
| B.1  | a) Manipulateur 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique <u>UUR</u> . . . . .   | 65 |
| B.2  | Espace atteignable du 4- <u>UUR</u> en fonction de l'orientation de l'effecteur. . . . .   | 66 |
| B.3  | Espace atteignable du 4- <u>UUR</u> (effecteur rectangulaire et $\phi = 0$ ). . . . .  | 68 |
| B.4  | Lieux de singularité du 4- <u>UUR</u> (effecteur carré, $\phi = 0$ ). . . . .  | 69 |
| B.5  | Lieux de singularité du 4- <u>UUR</u> (effecteur carré, $\phi = -\pi/2$ ). . . . .   | 69 |
| B.6  | Lieux de singularité du 4- <u>UUR</u> (effecteur rect. et $\phi = 0$ ). . . . .  | 70 |
| B.7  | Lieux de singularité du 4- <u>UUR</u> (effecteur rect. et $\phi = -\pi/2$ ). . . . .   | 70 |
| B.8  | Dextérité moyenne en $x$ et $y$ du 4- <u>UUR</u> en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire). . . . .                             | 71 |
| B.9  | a) Manipulateur 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ . . . . .                             | 72 |
| B.10 | Espace atteignable du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur. . . . .   | 74 |
| B.11 | Espace atteignable du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ (effecteur rectangulaire et $\phi = \pi/4$ ). . . . .  | 76 |
| B.12 | Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ (effecteur carré, $\phi = 0$ ). . . . .  | 77 |
| B.13 | Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ (effecteur carré, $\phi = \pi/4$ ). . . . .  | 77 |
| B.14 | Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ (effecteur rect. et $\phi = 0$ ). . . . .  | 77 |
| B.15 | Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ (effecteur rect. et $\phi = \pi/4$ ). . . . .  | 77 |
| B.16 | Dextérité moyenne en $x$ et $y$ du 4- $\check{R}\check{R}\check{U}\check{R}$ en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire). . . . . | 78 |
| B.17 | a) Manipulateur 4- $\check{P}\check{R}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique <u>PUU</u> . . . . .   | 79 |
| B.18 | Espace atteignable du 4- <u>PUU</u> en fonction de l'orientation de l'effecteur. . . . .   | 81 |
| B.19 | Espace atteignable du 4- <u>PUU</u> (effecteur rectangulaire et $\phi = 0$ ). . . . .  | 82 |
| B.20 | Lieux de singularité du 4- <u>PUU</u> (effecteur carré). . . . .   | 83 |
| B.21 | Lieux de singularité du 4- <u>PUU</u> (effecteur rect.). . . . .   | 83 |
| B.22 | Dextérité moyenne en $x$ et $y$ du 4- <u>PUU</u> en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire). . . . .                             | 84 |
| B.23 | a) Manipulateur 4- $\check{P}\check{R}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique $\check{P}\check{R}\check{U}\check{R}$ . . . . .                             | 85 |



|   |     |
|---|-----|
| B.24 Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur.   | 87  |
| B.25 Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ (effecteur carré et $\phi = 0$ ).  | 89  |
| B.26 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ (effecteur carré, $\phi = -\pi/4$ ).   | 90  |
| B.27 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ (effecteur carré, $\phi = \pi/2$ ).  | 90  |
| B.28 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ (effecteur rect. et $\phi = -\pi/4$ ).   | 90  |
| B.29 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ (effecteur rect. et $\phi = \pi/2$ ).  | 90  |
| B.30 Dexterite moyenne en $x$ et $y$ du 4- $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ en fonction de l'elevation et de l'orientation (effecteur rectangulaire).   | 91  |
| B.31 a) Manipulateur 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ .                  | 91  |
| B.32 Chaîne cinématique $\underline{P}\acute{R}U\acute{R}$ vue de dessus.   | 92  |
| B.33 Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur.                                     | 94  |
| B.34 Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ (effecteur rectangulaire et $\phi = 0$ ).  | 95  |
| B.35 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ (effecteur carré, $\phi = 0$ ).  | 96  |
| B.36 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ (effecteur carré, $\phi = \pi/4$ ).  | 96  |
| B.37 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ (effecteur rect. et $\phi = 0$ ).  | 96  |
| B.38 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ (effecteur rect. et $\phi = \pi/3$ ).  | 96  |
| B.39 Dexterite moyenne en $x$ et $y$ du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{U}\acute{R}$ en fonction de l'elevation et de l'orientation (effecteur carré).   | 97  |
| B.40 a) Manipulateur 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ . | 98  |
| B.41 Vecteur $\mathbf{e}$ .   | 99  |
| B.42 Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur.                            | 101 |
| B.43 Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (effecteur rectangulaire et $\phi = 0$ ).                               | 102 |
| B.44 Lieux de singularité du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (effecteur rectangulaire).  | 104 |
| B.45 Dexterite du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).                          | 105 |
| B.46 a) Manipulateur 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ . | 106 |
| B.47 Espace atteignable du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur.                            | 109 |
| B.48 Espace atteignable du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (effecteur rectangulaire et $\phi = \pi/2$ ).                           | 110 |
| B.49 Lieux de singularité du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (base carrée, $\phi = \pi/3$ ).                                       | 111 |
| B.50 Lieux de singularité du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (base carrée, $\phi = 3\pi/4$ ).                                      | 111 |
| B.51 Lieux de singularité du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (base rect. et $\phi = \pi/3$ ).                                      | 111 |
| B.52 Lieux de singularité du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ (base rect. et $\phi = 3\pi/4$ ).                                     | 111 |
| B.53 Dextérité du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).                          | 112 |
| B.54 a) Manipulateur 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ . | 112 |
| B.55 Espace atteignable du 4- $\underline{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur.                            | 115 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| B.56 | Espace atteignable du 4- $\underline{R}''\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur rectangulaire et $\phi = \pi/2$ ). . . . .                                | 116 |
| B.57 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}''\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur carré, $\phi = 0$ ). . . . .  | 117 |
| B.58 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}''\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur carré, $\phi = \pi/2$ ). . . . .  | 117 |
| B.59 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}''\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur rect. et $\phi = 0$ ). . . . .  | 117 |
| B.60 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}''\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (base rect. et $\phi = \pi/2$ ). . . . .   | 117 |
| B.61 | Dexterite du 4- $\underline{R}''\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ en fonction de l'orientation (effecteur rectangu-<br>laire). . . . .                          | 118 |
| B.62 | a) Manipulateur 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ , b) Chaîne cinématique $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ . . . . . | 119 |
| B.63 | a) rotations du repère fixe, b) rotation du vecteur $\mathbf{e}_1$ . . . . .   | 121 |
| B.64 | 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (vue dans le plan des membrures 1 et 2). . . . .  | 122 |
| B.65 | Espace atteignable du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ en fonction de l'orientation de l'effecteur. . . . .                                  | 123 |
| B.66 | Espace atteignable du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur rectangulaire et $\phi = \pi/2$ ). . . . .                                 | 125 |
| B.67 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur carré, $\phi = 0$ ). . . . .   | 126 |
| B.68 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur carré, $\phi = \pi/2$ ). . . . .   | 126 |
| B.69 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (effecteur rect. et $\phi = 0$ ). . . . .   | 126 |
| B.70 | Lieux de singularité du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ (base rect. et $\phi = \pi/2$ ). . . . .  | 126 |
| B.71 | Dexterite du 4- $\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}'\underline{R}$ en fonction de l'orientation (effecteur rectangu-<br>laire). . . . .                           | 127 |
| C.1  | Forces aux actionneurs en fonction de l'accélération maximale désirée à<br>l'effecteur. . . . .  | 129 |

# Introduction

## Contexte de recherche

La versatilité des robots possédant les mouvement de type Schönflies [1] (aussi appelés 3T1R) n'est plus à démontrer. En effet, un robot pouvant déplacer un objet d'un point à un autre et orienter celui-ci selon un axe précis peut accomplir une multitude de tâches en industrie. Des opérations de *pick-and-place*, d'assemblage, de peinture et de palletisation n'impliquent que les 4 degrés de liberté sus-mentionnés. Dès 1979, un premier robot de ce type vit le jour au Japon [11] : le robot SCARA (*Selective Compliant Assembly Robot Arm*). Il s'agissait d'un robot sériel, donc à chaîne cinématique ouverte, qui imitait certains mouvements du bras humain [12]. Sa simplicité et sa polyvalence le rendirent excessivement populaire sur les chaînes de montage en industrie.

Dans les même années, soit en 1979, une nouvelle branche de la robotique fit son apparition : la robotique parallèle. Contrairement aux robots sériels, les robots parallèles ont des chaînes cinématiques fermées. Concrètement, l'effecteur n'est pas relié au sol par une, mais bien par plusieurs pattes. Cet différence majeure confère une très bonne rigidité à ce type de robots. Sans oublier que le rapport *charge utile/masse du robot* est beaucoup plus élevé. Ces propriétés permettent soit de déplacer des charges très lourdes (ex. simulateur de vols), soit d'accélérer grandement de faibles charges.

L'avènement des architectures parallèles a tôt fait de stimuler la recherche scienti-

fique dans plusieurs domaines, dont les manipulateurs de type Schönflies. Un des robots les plus populaires à allier mouvements de Schönflies et architecture parallèle est sans aucun doute le robot Delta [3] inventé par Clavel en 1988. Par la suite, un manipulateur hybride sériel-parallèle fut proposé par Angeles, Morozov et Navarro en 2000 [2]. Sans oublier le robot H4 de Company, Pierrot et Shibukawa [4] breveté en Europe en 2001.

Suivant cette lancée, le laboratoire de robotique de l'Université Laval s'est fixé comme objectif de développer un nouveau type de robot pouvant générer les mouvements de Schönflies. Une analyse systématique des manipulateurs parallèles 3T1R a été faite par Kong et Gosselin [7] en 2004. De cette analyse, 11 architectures différentes ont été proposées. C'est à ce point de la recherche que se situe le présent travail, l'objectif étant de poursuivre l'étude en question afin de concevoir un prototype.

## Organisation du mémoire

Ce mémoire présente donc la démarche qui a mené à la conception de ce prototype. Dans un premier temps, le chapitre 1 explique les bases théoriques nécessaires à l'analyse cinématique des 11 architectures. Les propriétés étudiées sont du même coup justifiées d'un point de vue pratique et la nomenclature utilisée dans le mémoire est posée. Le chapitre 2 contient l'analyse proprement dite de deux architectures, les autres faisant l'objet de l'annexe B. À la fin de ce chapitre, les résultats sont portés dans un tableau récapitulatif à partir duquel une analyse comparative est effectuée. Au dernier chapitre, les aspects théoriques de l'architecture choisie sont relatés sommairement et un design mécanique, optimisé selon certains critères, est proposé.

# Chapitre 1

## Généralités

Ce chapitre jette les bases du projet. Dans un premier temps, certaines notions théoriques sont présentées. Ces notions sont nécessaires à la compréhension des équations développées dans les chapitres ultérieurs. Parallèlement à ces explications, la méthodologie utilisée pour l'analyse cinématique des architectures parallèles est mise de l'avant. Finalement, la terminologie et la géométrie en lien avec ces architectures est présentée d'un point de vue global.

## 1.1 Théorie et méthodologie

L'analyse cinématique des 11 architectures 3T1R est faite suivant quatre aspects distincts : les solutions du problème géométrique inverse, les matrices jacobienne, les singularités de contrainte et la dextérité. Dans les pages qui suivent, la théorie de chacun des aspects (basée sur [5]) est présentée en mettant en évidence les raisons et la pertinence de leur étude.

### 1.1.1 Problème géométrique inverse d'un manipulateur

La position d'un manipulateur dans l'espace peut être contrôlée de deux façons. Tout d'abord, on peut spécifier directement les valeurs désirées à chacune des articulations. Dans cette situation, les coordonnées articulaires (connues) permettent de connaître la position cartésienne de l'effecteur (inconnue) : il s'agit du problème géométrique direct (PGD). Toutefois, dans la majorité des cas, on désire plutôt connaître la commande à imposer aux articulations pour atteindre une position cartésienne connue. C'est le problème géométrique inverse (PGI). Mathématiquement, chaque variable articulaire peut être calculée avec une équation qui est fonction des variables cartésiennes et des paramètres géométriques du manipulateur.

Dans un contexte de conception et de contrôle d'un manipulateur, l'étude du PGI est essentielle pour plusieurs raisons. Elle permet notamment de connaître l'espace cartésien atteignable par le manipulateur en question (par exemple, l'ensemble des points  $P(x, y, z)$  pour lesquels ses solutions sont réelles). Une solution imaginaire indique que le manipulateur ne peut pas positionner l'effecteur à cet endroit donné. Cet ensemble de points représente donc un volume dans l'espace où il est possible d'utiliser le manipulateur. Ce qui en fait un critère très intéressant pour comparer les 11 architectures.

Du point de vue du contrôle d'un manipulateur, l'intérêt du PGI est encore plus pertinent. En effet, on désire généralement effectuer une trajectoire cartésienne avec la plate-forme (cercle, sinusoïde...). Dans cette optique, il est primordial de connaître les coordonnées articulaires à imposer aux moteurs afin de générer la trajectoire voulue.

Finalement, les solutions du PGI sont très souvent nécessaires à l'analyse des lieux de singularité, qui sont discutés à la section suivante.

### 1.1.2 Matrices Jacobiennes

La section précédente traitait du positionnement d'un manipulateur dans l'espace. Il ne faut toutefois pas limiter l'étude cinématique à cet aspect. Il est également très important d'étudier le comportement du manipulateur lorsqu'il est en mouvement, c'est-à-dire d'étudier ses équations de vitesse. Tout d'abord, les équations obtenues avec l'étude du PGI peuvent être dérivées par rapport au temps. Ensuite, en exprimant le tout sous forme matricielle, on obtient un système d'équations permettant de passer du domaine des vitesses cartésiennes à celui des vitesses articulaires. Dans le cas d'un manipulateur parallèle 3T1R, on a :

$$\mathbf{J}\mathbf{t} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (1.1)$$

où

$$\mathbf{t} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}]^T, \quad (1.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\rho}_3, \dot{\rho}_4]^T. \quad (1.3)$$

Dans les équations ci-dessus, les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices jacobiennes ( $\mathbf{K}$  est diagonale), le vecteur  $\mathbf{t}$  contient les vitesses cartésiennes de la plate-forme et le vecteur  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , les vitesses articulaires des actionneurs. L'analyse du déterminant des deux matrices jacobiennes permet de connaître les lieux de singularité d'un manipulateur. Ces singularités sont de deux types :

1. **Type 1** : la matrice  $\mathbf{K}$  est singulière  $\Rightarrow \det(\mathbf{K}) = 0$ .

Dans une telle configuration, deux branches du problème géométrique inverse se rencontrent. Concrètement, le manipulateur se trouve à une limite de son espace atteignable, ou encore à une limite interne où ces branches se rencontrent. Il est alors impossible de produire certaines vitesses cartésiennes avec des vitesses articulaires non-nulles : il y a donc perte d'un degré de liberté du manipulateur.

2. **Type 2** : la matrice  $\mathbf{J}$  est singulière  $\Rightarrow \det(\mathbf{J}) = 0$ .

Cela se produit à la rencontre de deux solutions du problème géométrique direct du manipulateur. Cette situation est l'inverse de la précédente puisque pour des vitesses articulaires nulles (actionneurs bloqués), l'effecteur peut subir un mouvement infinitésimal (vitesses cartésiennes non-nulles). On perd donc le contrôle du manipulateur.

L'étude des lieux de singularité est donc très importante puisqu'elle permet de connaître les endroits dans l'espace où il est impossible d'avoir le plein contrôle de l'effecteur. En d'autres termes, on peut savoir si un manipulateur est utilisable dans un espace de travail donné.

### Méthode pour vérifier les matrices jacobiennes

Comme l'étude des singularités est la base de cette section du projet, il est essentiel de s'assurer que les solutions des PGI des mécanismes ainsi que les matrices jacobiennes sont exactes. Les lignes qui suivent expliquent la méthode utilisée pour faire cette vérification.

Tel que mentionné précédemment, on cherche à obtenir l'expression suivante :

$$\mathbf{J}\mathbf{t} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (1.4)$$

que l'on peut réécrire comme suit :

$$(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{J})\mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{t} = \dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad (1.5)$$

Les vecteurs  $\mathbf{t}$  et  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  décrits plus haut peuvent également s'écrire :

$$\mathbf{t} = \left[ \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \quad \frac{d\phi}{dt} \right]^T, \quad (1.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \left[ \frac{d\rho_1}{dt} \quad \frac{d\rho_2}{dt} \quad \frac{d\rho_3}{dt} \quad \frac{d\rho_4}{dt} \right]^T. \quad (1.7)$$

Pour de petites variations de  $\mathbf{t}$  et de  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , on peut écrire :

$$\mathbf{t} \simeq \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right]^T, \quad (1.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} \simeq \left[ \frac{\Delta \rho_1}{\Delta t} \quad \frac{\Delta \rho_2}{\Delta t} \quad \frac{\Delta \rho_3}{\Delta t} \quad \frac{\Delta \rho_4}{\Delta t} \right]^T. \quad (1.9)$$

Après élimination de  $\Delta t$ , l'équation (1.5) devient :

$$\mathbf{M}\Delta\mathbf{c} \simeq \Delta\mathbf{a}, \quad (1.10)$$



où

$$\Delta \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z & \Delta \phi \end{bmatrix}^T, \quad (1.11)$$

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta \rho_1 & \Delta \rho_2 & \Delta \rho_3 & \Delta \rho_4 \end{bmatrix}^T. \quad (1.12)$$

Prenons maintenant le premier élément du vecteur  $\Delta \mathbf{a}$ . Par le produit matriciel, on a :

$$\Delta \rho_1 \simeq M_{11} \Delta x + M_{12} \Delta y + M_{13} \Delta z + M_{14} \Delta \phi, \quad (1.13)$$

où  $M_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $\mathbf{M}$  de l'équation (1.10) (pour  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4$ ). Or, on sait que, par la règle de la dérivée totale d'une variable :

$$d\rho_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho_1}{\partial \phi} d\phi, \quad (1.14)$$

que l'on peut encore écrire comme suit, dans le cas de petites variations :

$$\Delta \rho_1 \simeq \frac{\delta \rho_1}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta \rho_1}{\delta y} \Delta y + \frac{\delta \rho_1}{\delta z} \Delta z + \frac{\delta \rho_1}{\delta \phi} \Delta \phi. \quad (1.15)$$

Par analogie avec l'équation (1.13), la matrice  $\mathbf{M}$  peut alors être réécrite comme ceci :

$$\mathbf{M} \simeq \begin{bmatrix} \frac{\delta \rho_1}{\delta x} & \frac{\delta \rho_1}{\delta y} & \frac{\delta \rho_1}{\delta z} & \frac{\delta \rho_1}{\delta \phi} \\ \frac{\delta \rho_2}{\delta x} & \frac{\delta \rho_2}{\delta y} & \frac{\delta \rho_2}{\delta z} & \frac{\delta \rho_2}{\delta \phi} \\ \frac{\delta \rho_3}{\delta x} & \frac{\delta \rho_3}{\delta y} & \frac{\delta \rho_3}{\delta z} & \frac{\delta \rho_3}{\delta \phi} \\ \frac{\delta \rho_4}{\delta x} & \frac{\delta \rho_4}{\delta y} & \frac{\delta \rho_4}{\delta z} & \frac{\delta \rho_4}{\delta \phi} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

On a donc une nouvelle expression pour évaluer la matrice jacobienne, expression qui est indépendante des équations obtenues en dérivant les solution du PGI par rapport au temps. En comparant les deux matrices, on peut donc savoir si les équations de vitesse sont correctes et, par le fait même, si la solution du PGI l'est aussi. On s'assure ainsi que les lieux de singularité, obtenus à l'aide des matrices jacobienues, sont exacts.

La procédure implantée est la suivante :

1. Obtenir une matrice jacobienne numérique à partir des équations de vitesse (pour une position donnée).
2. Calculer la solution du PGI pour cette position.
3. Incrémenter une coordonnée cartésienne  $i$  d'une valeur  $\delta c_i$ .
4. Calculer la solution du PGI avec la nouvelle position cartésienne et calculer la variation des coordonnées articulaires  $\Delta \mathbf{a}$ .

5. Faire les étapes 2, 3 et 4 pour toutes les coordonnées cartésiennes (ici, 4 au total).  
Il est important de les incrémenter **une à la fois** tout en gardant les autres à leur valeur initiale.
6. Calculer la matrice  $\mathbf{M}$  à partir des éléments  $\delta c_i$  et  $\delta a_i$  obtenus.
7. Comparer avec la matrice  $\mathbf{M}$  obtenue à partir des équations de vitesse.
8. Conclure sur l'exactitude de la matrice  $\mathbf{M}$ .

### 1.1.3 Singularités de contrainte

Il existe un autre type de singularités qui ne peut être étudié à partir des matrices jacobiniennes : les singularités de contraintes (discutées dans [8]). Lorsqu'un manipulateur parallèle rencontre une singularité de contrainte, il gagne un degré de liberté supplémentaire. Comme le manipulateur possède autant d'actionneurs que de degrés de liberté, celui nouvellement acquis ne peut être contrôlé par les actionneurs. On perd alors le contrôle de l'effecteur. Cela se produit lorsque toutes les pattes du manipulateur deviennent dépendantes. Dans une situation "normale", chaque patte contraint un ou plusieurs degrés de liberté donnés. Pour un manipulateur 3T1R, les quatre pattes contraignent la plate-forme aux trois translations et à la rotation autour d'un axe vertical (axe  $z$ ). Mécaniquement, le manipulateur ne possède donc pas les deux autres degrés de liberté (rotations autour des axes  $x'$  et  $y''$  par exemple). Toutefois, si les pattes deviennent dépendantes entre elles, un de ces degrés de liberté s'ajoute puisque les quatre pattes ne peuvent plus contraindre la plate-forme aux quatre degrés de liberté de base (pour les manipulateurs 3T1R). Il est donc essentiel de savoir si un manipulateur peut rencontrer ce type de singularité afin d'éviter une fois de plus d'en perdre le contrôle.

### 1.1.4 Dextérité

Le dernier point à l'étude pour les 11 architectures 3T1R est la dextérité. Elle se définit comme étant la capacité d'un manipulateur d'exécuter avec précision des mouvements très fins. Concrètement, on veut éviter qu'une faible variation de la commande (coordonnées articulaires) engendre un fort déplacement de la plate-forme. Pour caractériser cette propriété, il est pertinent d'utiliser les équations de vitesse du mani-

ulateur en question, soit :

$$\mathbf{J}\mathbf{t} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (1.17)$$

ou encore

$$(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{t}. \quad (1.18)$$

La matrice  $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{N}$  caractérise la transformation linéaire entre les vitesses articulaires ( $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , commande d'entrée du manipulateur) et les vitesses cartésiennes ( $\mathbf{t}$ , variable de sortie du manipulateur). La "qualité" de cette transformation permet d'étudier la dextérité du manipulateur. Pour ce faire, il faut vérifier le conditionnement de la matrice, qui est défini comme suit :

$$\kappa(\mathbf{N}) = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}, \quad (1.19)$$

où  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$  sont respectivement les valeurs singulières minimale et maximale de  $\mathbf{N}$ . Quant à la dextérité, c'est tout simplement l'inverse du conditionnement, soit :

$$\zeta(\mathbf{N}) = \frac{1}{\kappa(\mathbf{N})} \quad (1.20)$$

et

$$0 < \zeta(\mathbf{N}). \quad (1.21)$$

Cet indice dépend à la fois des paramètres géométriques du manipulateur et de sa configuration (coordonnées cartésiennes et/ou articulaires présentes dans les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$ ) : c'est donc une propriété locale du manipulateur. Pour caractériser la dextérité du manipulateur sur l'ensemble de son espace atteignable, on a recours à l'indice de dextérité globale  $\eta$  (qui est la moyenne de la dextérité locale sur l'espace atteignable) :

$$\eta = \frac{A}{B} \quad (1.22)$$

avec

$$A = \int_W \zeta(\mathbf{N}) dW, \quad (1.23)$$

$$B = \int_W dW. \quad (1.24)$$

La matrice  $\mathbf{N}$  étant souvent très compliquée algébriquement, il peut être ardu d'obtenir une expression analytique de l'indice de dextérité globale. Il faut alors la calculer numériquement. Pour implanter une procédure numérique, on doit travailler avec des éléments  $\Delta W_{i,j,k,l} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \Delta \phi_l$  au lieu de l'élément infinitésimal  $dW$ . Or,

si on incrémente les variables cartésiennes d'une valeur constante à chaque itération, l'élément  $\Delta W_{i,j,k,l}$  est constant ( $\Delta W$ ). On peut alors écrire :

$$\eta = \frac{A}{B} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^o \sum_{l=1}^p \zeta(\mathbf{N}_{i,j,k,l})}{mnop}. \quad (1.25)$$

Concrètement, on calcule la dextérité locale à chaque point  $P(x, y, z, \phi)$  et on fait la somme de toutes les valeurs obtenues que l'on divise ensuite par le nombre de points. Cette nouvelle propriété est indépendante de la configuration du manipulateur et peut donc être utilisée pour comparer les diverses architectures 3T1R entre elles.

## 1.2 Définition des vecteurs

Dans ce mémoire, 11 architectures semblables sont à l'étude. Pour éviter des redondances et ainsi alléger le texte, les principaux vecteurs ne seront définis qu'**une seule fois**. La figure qui suit montre ces vecteurs sur une représentation schématique des architectures. Les points noirs correspondent aux différents types d'articulations (rotoïdes, prismatiques, cardans...) et les lignes foncées, aux membrures reliant ces articulations. Il est à noter que les pattes d'une architecture peuvent avoir plus de 2 membrures (tel que montré sur la figure 1.1) et que la position de tous les points sur la figure est arbitraire.

- Le repère fixe ( $\mathcal{R}$ ) est orienté de sorte que la rotation possible de la plate-forme soit autour de l'axe  $z$ . Le repère associé à la plate-forme est le repère mobile  $\mathcal{R}'$ .
- Le vecteur reliant l'origine du repère fixe de la base à l'origine du repère attaché à l'effecteur (repère mobile) est :

$$\mathbf{p} = [x, y, z]^T, \quad (1.26)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les 3 coordonnées cartésiennes de **position** de l'effecteur.

- La matrice de rotation entre le repère fixe et celui de l'effecteur est :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

où  $\phi$  est la coordonnée cartésienne **d'orientation** de l'effecteur.

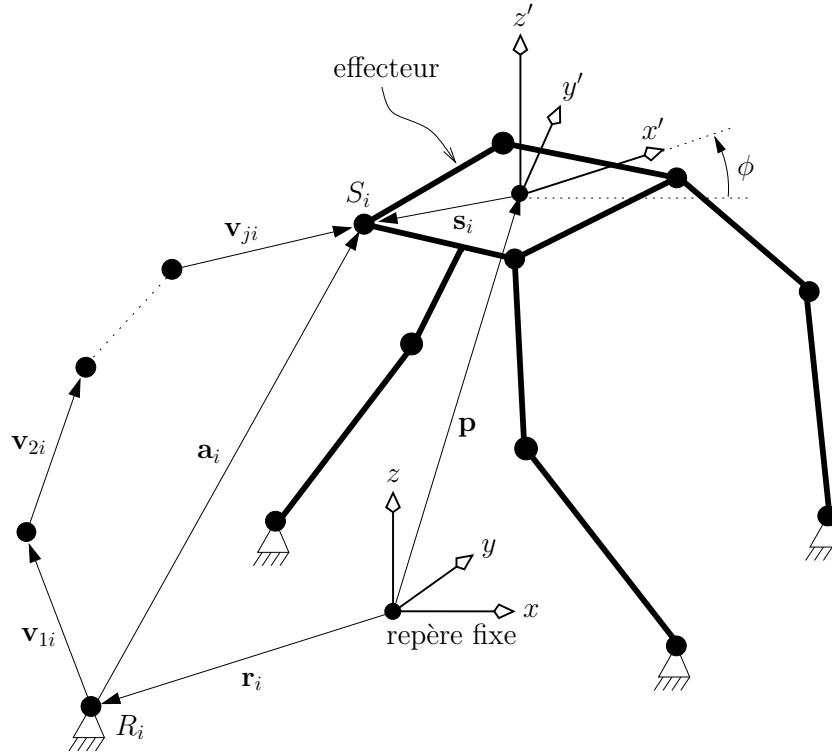


FIG. 1.1 – Définition des paramètres.

- Chaque patte est liée au sol au point  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) et le vecteur reliant l'origine du repère fixe à celui-ci est :

$$\mathbf{r}_i = [r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}]^T. \quad (1.28)$$

- Le point d'attache d'une patte à l'effecteur est noté  $S_i$  et le vecteur reliant l'origine du repère mobile à ce point est :

$$\mathbf{s}_i = [s_{xi}, s_{yi}, s_{zi}]^T. \quad (1.29)$$

Ce même vecteur, exprimé dans le repère mobile, est noté  $\mathbf{s}_{0i}$ .

- Les vecteurs reliant 2 articulations (les vecteurs correspondant aux membrures) sont identifiés  $\mathbf{v}_{ji}$ . L'indice  $i$  indique le numéro de la patte et l'indice  $j$ , celui de la membrure.  $j = 1$  réfère à la membrure attachée au sol, alors que  $j = n$  correspond à la membrure attachée à l'effecteur. Ici,

$$j = 1, 2 \dots n. \quad (1.30)$$

De plus, pour simplifier l'écriture des équations, on identifie un autre vecteur à partir de ceux définis ci-dessus. Le vecteur  $\mathbf{a}_i$ , qui relie les points  $R_i$  et  $S_i$ , est défini comme

suit :

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - r_{xi} + s_{0xi} \cos \phi - s_{0yi} \sin \phi \\ y - r_{yi} + s_{0xi} \sin \phi + s_{0yi} \cos \phi \\ z - r_{zi} + s_{0zi} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Ce vecteur, qui dépend des variables cartésiennes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\phi$ , apparaîtra fréquemment dans les équations. Par ailleurs, comme première approche, la configuration de référence utilisée pour étudier les mécanismes est celle de la figure 1.2, où  $B = b = 80mm$ . L'étude

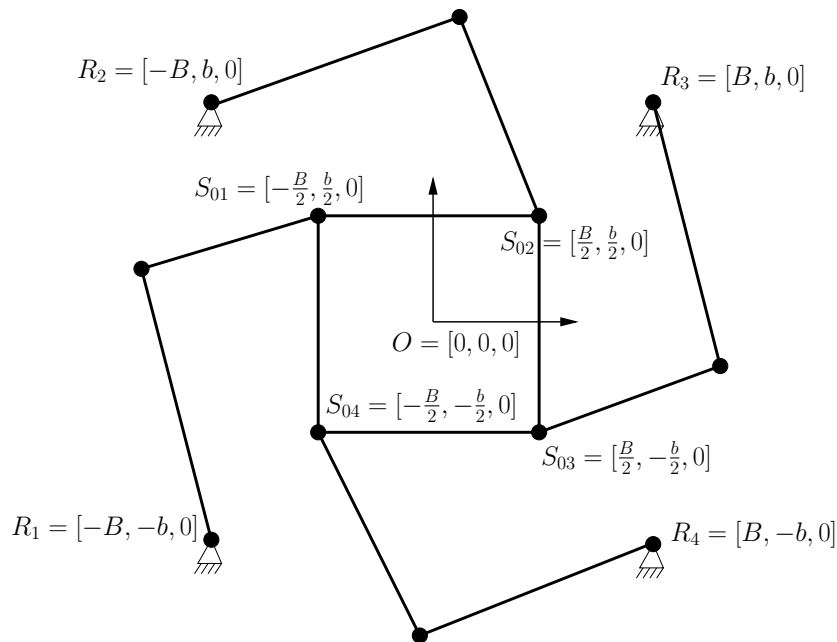


FIG. 1.2 – Configuration de base (vue de dessus).

des mécanismes sera presque toujours faite à partir de cette configuration, à laquelle certaines modifications pourront être apportées. Par exemple,  $B$  et  $b$  pourront prendre des valeurs différentes de manière à avoir une base et/ou un effecteur rectangulaire. Sauf indications contraires, **toutes les dimensions** du documents sont en  $mm$  et **tous les angles**, en  $rads$ .

### 1.3 Nomenclature pour les chaînes cinématiques

Comme le présent travail traite de plusieurs architectures parallèles avec des chaînes cinématiques variée contenant chacune

# Chapitre 2

## Analyse cinématique

Ce chapitre comporte l'étude cinématique détaillée de 2 des 11 architectures 3T1R : le 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$  et le 4- $\underline{\text{P}}\text{R}\text{R}\text{R}$ . Ces architectures ont été choisies pour montrer les différences entre des manipulateurs actionnés avec des articulations rotoïdes et prismatiques. Quant aux autres architectures, les développements mathématiques ainsi que les graphiques nécessaires à l'analyse sont présentés à l'annexe B. À la fin du chapitre, une analyse comparative entre les 11 architectures est faite et une seule d'entre elles est retenue pour des fins de conception.

## 2.1 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}^1$ (4- $\underline{R}UU$ )

Le manipulateur 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}^1$ , dont le schéma est présenté à la figure 2.1a, est soumis à plusieurs contraintes. Ces dernières (disponibles à l'annexe A) doivent être respectées pour que le manipulateur possède les 4 degrés de liberté désirés. Suite à l'étude de ces contraintes, une chaîne cinématique  $\underline{R}UU$  a été choisie et est présentée à la figure 2.1b.

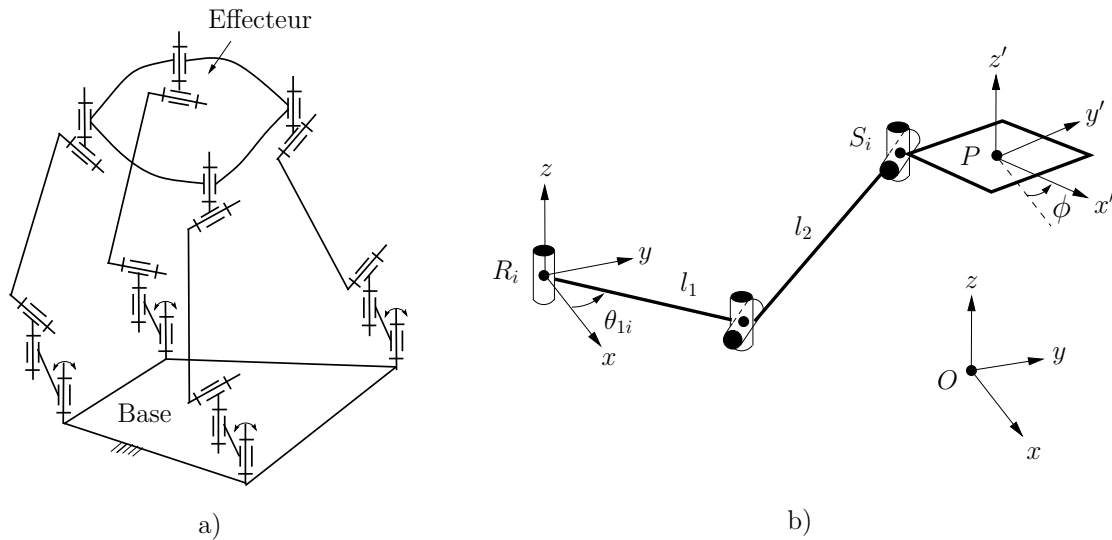


FIG. 2.1 – a) Manipulateur 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}^1$ , b) Chaîne cinématique  $\underline{R}UU$ .

### 2.1.1 PGI et espace atteignable

Pour obtenir la solution du problème géométrique inverse de la chaîne cinématique  $\underline{R}UU$ , on exprime tout d'abord la norme du vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  en fonction des autres vecteurs associés à cette chaîne.

$$\mathbf{v}_{2i} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i}. \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>La nomenclature utilisée pour les articulations est expliquée à l'annexe A



La norme de ce vecteur étant la longueur de la deuxième membrure ( $l_2$ ), on peut donc écrire :

$$l_2^2 = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{v}_{2i} \quad (2.2)$$

$$= (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i}) \quad (2.3)$$

$$= (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i})^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i}) \quad (2.4)$$

$$= \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i} - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{v}_{1i}. \quad (2.5)$$

Sachant que  $\mathbf{v}_{1i}$  est défini dans le plan  $xy$  comme ceci :

$$\mathbf{v}_{1i} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_{1i} \\ l_1 \sin \theta_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

on obtient l'expression suivante après développement et simplifications :

$$\begin{aligned} a_{xi} \cos \theta_{1i} + a_{yi} \sin \theta_{1i} &= \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i} - l_2^2}{2\|\mathbf{v}_{1i}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{a}_i\|^2 + \|\mathbf{v}_{1i}\|^2 - \|\mathbf{v}_{2i}\|^2}{2\|\mathbf{v}_{1i}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{a}_i\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} \\ &= F_i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'expression ci-dessus peut être résolue en utilisant la substitution suivante :

$$\cos \theta_{1i} = \frac{1 - t_{1i}^2}{1 + t_{1i}^2}, \quad \sin \theta_{1i} = \frac{2t_{1i}}{1 + t_{1i}^2}, \quad t_{1i} = \tan\left(\frac{\theta_{1i}}{2}\right), \quad (2.8)$$

d'où on obtient une fonction quadratique faisant intervenir la nouvelle variable  $t_{1i}$  :

$$(a_{xi} + F_i)t_{1i}^2 - (2a_{yi})t_{1i} + (F_i - a_{xi}) = 0. \quad (2.9)$$

Cette équation possède 2 solutions pour  $t_{1i}$ , soit :

$$t_{1i,2} = \frac{a_{yi} \pm \sqrt{a_{xi}^2 + a_{yi}^2 - F_i^2}}{(a_{xi} + F_i)}. \quad (2.10)$$

Finalement, on trouve l'angle  $\theta_{1i}$  avec l'équation de la substitution (équation (2.8))

$$\theta_{1i,2} = 2 \arctan(t_{1i,2}). \quad (2.11)$$

Tel que mentionné précédemment, le développement du problème géométrique inverse s'avère très utile puisqu'il permet d'étudier l'espace atteignable d'un manipulateur.

Pour ce faire, il s'agit de vérifier, dans un volume donné, les régions à l'intérieur desquelles le PGI possède une solution réelle. Dans le cas du 4-RUU, l'équation qui contraint le manipulateur est le discriminant du radical de l'équation (2.10) :

$$a_{xi}^2 + a_{yi}^2 - F_i^2 > 0. \quad (2.12)$$

Cette équation comporte toutefois 4 variables, soit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\phi$ , associées aux 4 degrés de liberté du manipulateur 3T1R. Il est donc impossible d'obtenir une représentation graphique complète de l'espace atteignable de ce type de manipulateur. Par contre, on peut quantifier son espace atteignable en translation en fonction de l'orientation de l'effecteur. En d'autres termes, on calcule une valeur numérique du volume atteignable en translation (fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) pour chaque valeur de  $\phi$  (voir figure 2.2).

Sur le graphique sus-mentionné, une courbe a été obtenue pour 2 architectures particulières du manipulateur (tableau 2.1). Dans la première architectures, les points d'attache à la base et à l'effecteur sont disposés en carré. Alors que dans la seconde, ceux de l'effecteur sont disposés en rectangle.

TAB. 2.1 – Paramètres du 4-RUU

| i | $\mathbf{r}_i$    | $\mathbf{s}_{0i}$ (carré) | $\mathbf{s}_{0i}$ (rect.) |
|---|-------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$ | $[-40, 40, 0]^T$          | $[-30, 50, 0]^T$          |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$  | $[40, 40, 0]^T$           | $[30, 50, 0]^T$           |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$   | $[40, -40, 0]^T$          | $[30, -50, 0]^T$          |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$  | $[-40, -40, 0]^T$         | $[-30, -50, 0]^T$         |

TAB. 2.2 – Longueur des membrures du 4-RUU

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 90     |
| $l_2$     | 175    |

Il est maintenant possible de déterminer la plage angulaire d'opération la plus intéressante du manipulateur. En effet, il apparaît clairement qu'il faut travailler avec des orientations comprises grossièrement entre -3 et 0 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que sont étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-RUU.

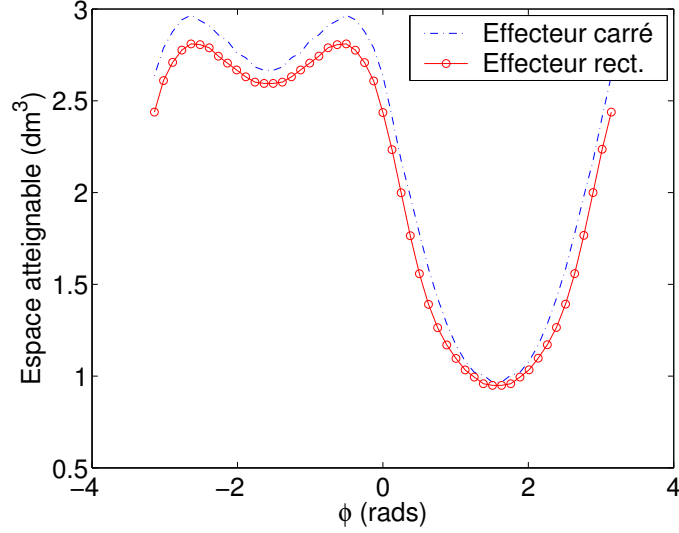


FIG. 2.2 – Espace atteignable du 4-RUU en fonction de l’orientation de l’effecteur.

### 2.1.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

Pour obtenir les équations de vitesse de l’architecture 4-RUU, on dérive tout d’abord l’équation (2.3) par rapport au temps :

$$(\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\mathbf{v}}_{1i}) = 0. \quad (2.13)$$

Dans cette équation, il est pratique de réécrire les vecteurs vitesse” en fonction des vecteurs “position” définis plus tôt. Pour ce faire, on pose :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (2.14)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{1i} = \mathbf{E}\mathbf{v}_{1i}\dot{\theta}_{1i}, \quad (2.15)$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Vectoriellement, la matrice  $\mathbf{E}$  projette un vecteur dans le plan  $xy$  et le fait pivoter de 90 degrés dans le sens anti-horaire autour de l’axe  $z$ . On poursuit maintenant la démarche en substituant les termes ci-dessus. En simplifiant le tout, on obtient alors :

$$\mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i}\dot{\phi} = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{v}_{1i}\dot{\theta}_{1i}. \quad (2.17)$$

Les équations de vitesse de l'architecture 4-RUU sont donc, sous la forme matricielle  $\mathbf{J}\mathbf{t} = \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T & \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{01} \\ \mathbf{v}_{22}^T & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{02} \\ \mathbf{v}_{23}^T & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{03} \\ \mathbf{v}_{24}^T & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

### 2.1.2.1 Singularités de type 1

En observant la matrice  $\mathbf{K}$  du manipulateur, on voit que son déterminant est égal à 0 quand au moins un des termes diagonaux est nul. Cela peut se produire dans 2 situations. Dans la première, un vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  devient parallèle à l'axe  $z$  et, donc, perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{E} \mathbf{v}_{1i}$  (qui est défini dans le plan  $xy$ ). Le manipulateur se trouve à une limite en  $z$  de son espace atteignable. La seconde situation singulière survient lorsque les vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  et  $\mathbf{v}_{1i}$  d'une patte sont dans un plan perpendiculaire au plan  $xy$ . Le vecteur  $\mathbf{E} \mathbf{v}_{1i}$  est alors perpendiculaire à ce plan et, par le fait même, au vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$ . Cette situation correspond à une limite en  $xy$  de l'espace atteignable du manipulateur. La figure 2.3 montre un exemple d'espace atteignable du 4-RUU (et donc, de singularités de type 1) où l'on peut voir les limites discutées ci-dessus. À première

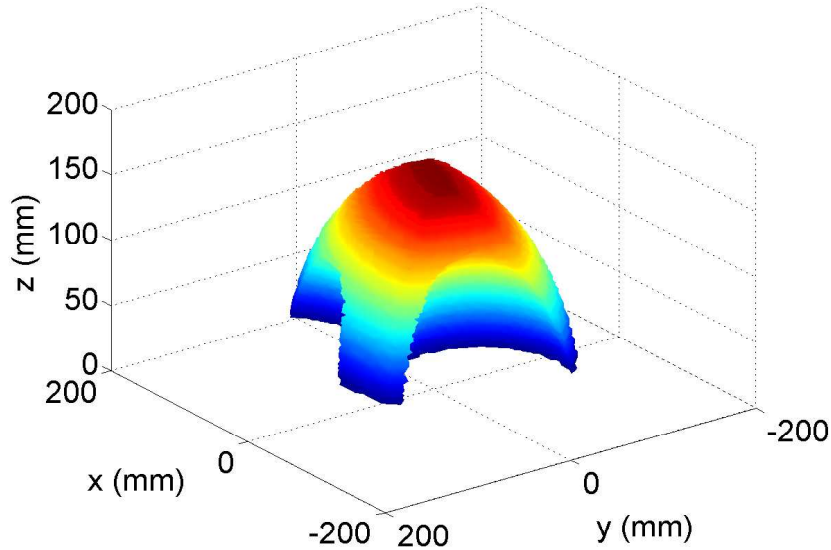


FIG. 2.3 – Espace atteignable du 4-RUU (effecteur rectangulaire et  $\phi = -\pi/3$ ).

vue, un espace de travail de cette sorte peut poser certaines difficultés étant données les

parties concaves rencontrées. Celles-ci engendrent quatre “extrémités” plutôt étroites et peu intéressantes pour y travailler. De plus, elles diminuent l’espace “central” où l’utilisation du manipulateur serait plus propice.

### 2.1.2.2 Singularités de type 2

Les lieux de singularités de type 2 sont trouvés à partir du déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$ . Un coup d’œil rapide permet de voir que le plan  $z = 0$  est singulier. En effet, lorsque l’effecteur est à ce niveau, la composante en  $z$  des vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  est nulle. La troisième colonne de la matrice  $\mathbf{J}$  est donc nulle elle aussi, tout comme son déterminant. Concrètement, les actionneurs ne peuvent plus réagir à des efforts verticaux exercés sur l’effecteur. La coplanarité des tous les vecteurs et l’axe de rotation en  $z$  des actionneurs font en sorte que seuls des efforts dans le plan horizontal  $z = 0$  peuvent être exercés sur la plate-forme. De plus, si tous les vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  deviennent verticaux en même temps, leurs composantes  $x$  et  $y$  sont nulles et la matrice a deux colonnes de zéros. Ce qui constitue également une configuration singulière puisqu’il est impossible pour les actionneurs d’équilibrer des efforts agissant dans le plan  $xy$  (c’est l’opposé de la situation précédente). Les figures 2.4 à 2.7 montrent très clairement le plan singulier ainsi que d’autres lieux de singularité.

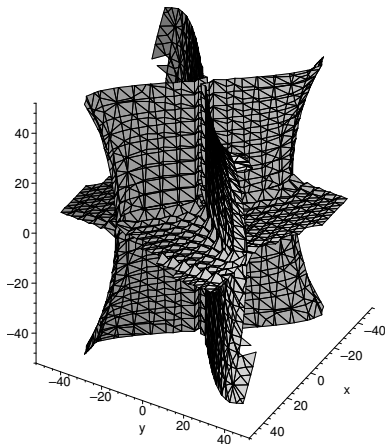


FIG. 2.4 – Lieux de singularité du 4-RUU (effecteur carré,  $\phi = 0$ ).

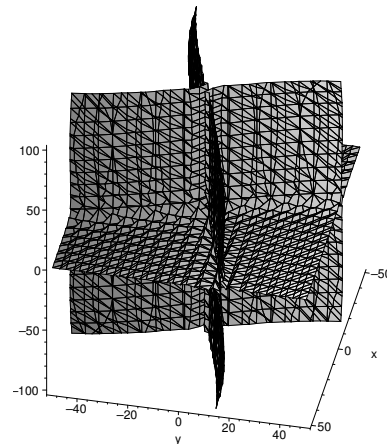


FIG. 2.5 – Lieux de singularité du 4-RUU (effecteur carré,  $\phi = -\pi/3$ ).

L’analyse de ces figures permet d’établir clairement qu’un effecteur carré n’est pas souhaitable pour le manipulateur. En effet, les deux plans verticaux limitent la mobilité de l’effecteur à un seul cadran (peu importe l’orientation de l’effecteur). Cependant, en optant pour un effecteur rectangulaire, ces deux plans disparaissent, libérant ainsi le

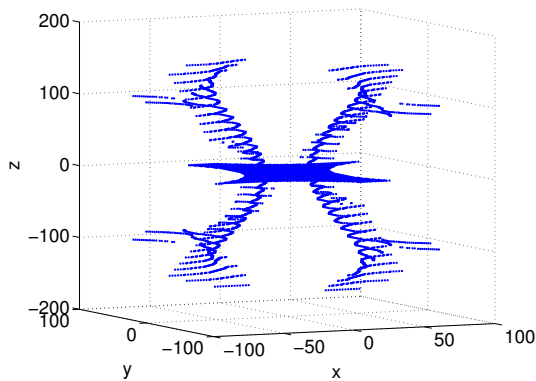


FIG. 2.6 – Lieux de singularité du 4-RUU (effecteur rect. et  $\phi = 0$ ).

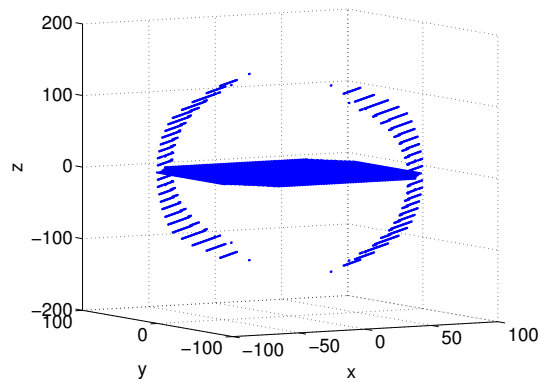


FIG. 2.7 – Lieux de singularité du 4-RUU (effecteur rect. et  $\phi = -\pi/2$ ).

centre de l'espace de travail. Bien que celui-ci soit un peu plus restreint aux limites de la plage angulaire d'opération, il semble possible d'éviter les singularités assez facilement.

### 2.1.3 Singularités de contrainte

Dans chacune des chaînes cinématiques du mécanisme, les articulations rotoïdes forment 2 groupes à l'intérieur desquels tous les axes des articulations sont parallèles entre eux. Le premier groupe est composé de vecteurs verticaux  $\mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$  et leur orientation demeure toujours constante. Quant au second, il est défini par les articulations horizontales (composante en  $z$  nulle). Plus simplement, les vecteurs des ces groupes représentent les axes des joints universels composant chaque patte. Pour qu'une singularité de contrainte soit rencontrée, les vecteurs perpendiculaires aux vecteurs formant les 2 groupes doivent tous être parallèles entre eux (il y a 1 vecteur par patte). Ici, ces vecteurs sont les projections dans le plan  $xy$  de chaque vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$ , que l'on nomme  $\mathbf{v}_{2i_{xy}}$ . Mathématiquement, il faut donc vérifier que :

$$\mathbf{v}_{2i_{xy}} \times \mathbf{v}_{2j_{xy}} = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

ou encore

$$\|\mathbf{v}_{2i_{xy}} \times \mathbf{v}_{2j_{xy}}\| = 0, \quad (2.20)$$

pour  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4$  et  $i \neq j$ . Un espace discrétisé en  $x - y - z - \phi$  est donc balayé et la condition ci-dessus est vérifiée à chacun des points. Évidemment, puisque la procédure est numérique, on n'obtient jamais exactement la valeur 0. La condition de l'équation

(2.20) est plutôt remplacée par l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{v}_{2ixy} \times \mathbf{v}_{2jxy}\| < D, \quad (2.21)$$

où  $D$  est un critère plus ou moins précis, dépendant de la discrétisation. Par exemple, si on travaille avec des vecteurs unitaires dans la direction des vecteurs  $\mathbf{v}_{2ixy}$  plutôt qu'avec les vecteurs  $\mathbf{v}_{2ixy}$  eux-mêmes, le norme du produit vectoriel sera nécessairement comprise entre 0 et 1. On peut vérifier que cette norme est, par exemple, inférieure à 0.1 pour toute valeur de  $i$  et  $j$ .

Suivant cette procédure, l'architecture avec un effecteur rectangulaire a fait l'objet de l'étude et aucune singularité de contrainte n'a été trouvée. Il est à noter que la procédure décrite ci-dessus sera réutilisée pour *plusieurs architectures de l'annexe B*.

#### 2.1.4 Dextérité

Comme les manipulateurs étudiés ont 4 degrés de liberté, une dextérité semi-globale est utilisée pour évaluer la capacité des manipulateurs à effectuer des mouvements précis. Le graphe de la figure 2.8 présente l'évolution de la dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  en fonction de l'élévation et de l'orientation de l'effecteur. On remarque que la dextérité devient nulle pour toute valeur de  $\phi$  lorsque l'effecteur est positionné sur le plan  $z = 0$ . Ce qui est tout à fait normal étant donné que ce plan constitue une configuration singulière du manipulateur.

Afin de comparer l'architecture 4-RUU avec les autres, la dextérité globale a aussi été calculée (pour l'effecteur rectangulaire) : 0.1875. Cette valeur de dextérité globale est jugée satisfaisante pour les fins du manipulateur.

## 2.2 4-PRRRR

La prochaine architecture à l'étude est celle d'un manipulateur à actionneurs prismatiques : le 4-PRRRR. Afin de respecter les contraintes énumérées à l'annexe A, l'angle entre les deux groupes d'articulations rotoïdes n'est pas de  $\frac{\pi}{2}$  (ce qui formerait

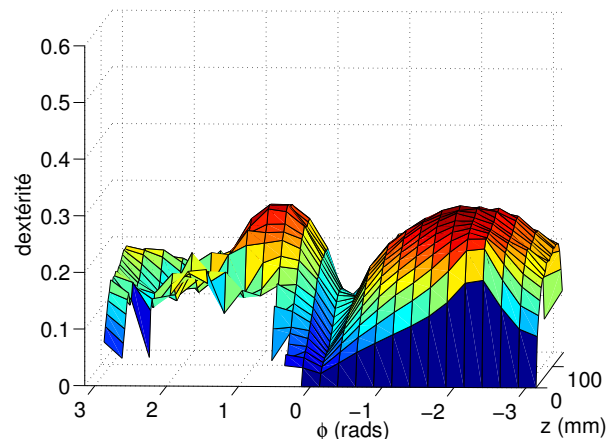


FIG. 2.8 – Dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  du 4-RUU en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire).

des joints universels), mais est plutôt fixé à  $\frac{\pi}{4}$ . De plus, tous les actionneurs prismatiques sont positionnés à la verticale (voir figure 2.9). Cette mesure permet de simplifier énormément l'étude de la cinématique du manipulateur.

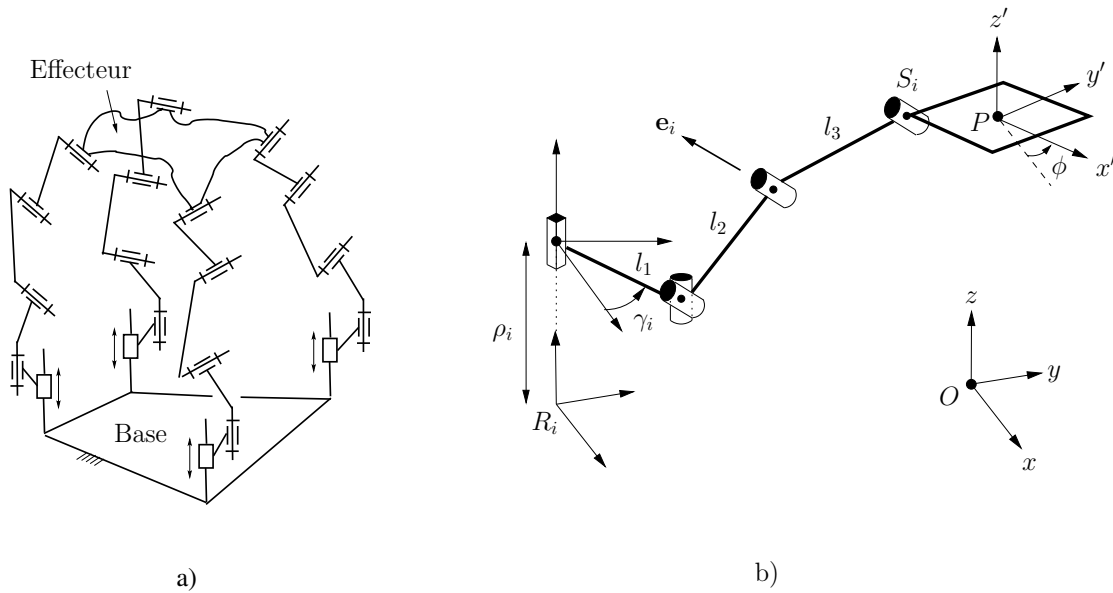


FIG. 2.9 – a) Manipulateur 4- $\underline{P}\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$ , b) Chaîne cinématique  $\underline{P}\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$ .



## 2.2.1 PGI et espace atteignable

Pour obtenir la solution du problème géométrique inverse du 4-P $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , il faut tout d'abord définir le vecteur  $\mathbf{u}_i$ . C'est le vecteur qui relie l'extrémité de la première membrure au point d'attache d'une patte sur la plate-forme :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i \mathbf{k}, \quad (2.22)$$

où

$$\mathbf{v}_{1i} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \gamma_i \\ l_1 \sin \gamma_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$\rho_i$  étant la variable articulaire que l'on cherche. On définit également le vecteur  $\mathbf{e}_{0i}$  qui correspond à l'axe de l'articulation rotoïde attachée à l'effecteur (voir figure 2.10) :

$$\mathbf{e}_{0i} = [\cos \alpha_i \cos \beta_i, \cos \alpha_i \sin \beta_i, \sin \alpha_i]^T. \quad (2.24)$$

Ce dernier vecteur s'exprime dans le repère fixe de la façon suivante :

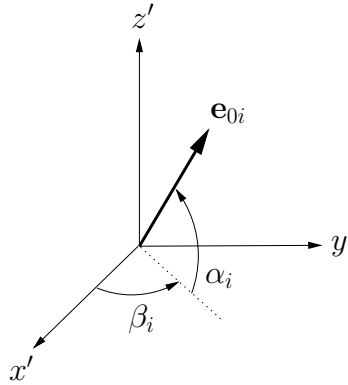


FIG. 2.10 – Vecteur  $\mathbf{e}$  dans le repère de l'effecteur.

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_{0i}. \quad (2.25)$$

Pour respecter l'architecture désirée, les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{e}_i$  doivent être perpendiculaires pour toute valeur de  $i$  :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i = 0. \quad (2.26)$$

Équation qu'on développe comme ceci :

$$0 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i \quad (2.27)$$

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i \mathbf{k})^T \mathbf{e}_i \quad (2.28)$$

$$\rho_i \mathbf{k}^T \mathbf{e}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T \mathbf{e}_i. \quad (2.29)$$

De cette équation, on isole  $\rho_i$  pour obtenir la solution du PGI :

$$\rho_i = a_{zi} + u_{xi} \cot \alpha_i \cos(\beta_i + \phi) + u_{yi} \cot \alpha_i \sin(\beta_i + \phi). \quad (2.30)$$

Comme pour le manipulateur 4-RUU de la section précédente, on étudie l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur. Pour ce faire, il faut ajouter une contrainte supplémentaire qui n'apparaît pas dans la solution du PGI. Cette contrainte limite simplement la norme du vecteur  $\mathbf{u}_i$  en fonction des longueurs des membrures 2 et 3. De plus, comme les quatre actionneurs sont verticaux (parallèle à l'axe  $z$ ), l'espace atteignable serait théoriquement infini dans cette direction. Il faut donc imposer une limite articulaire à ces actionneurs. Cette limite est fixée arbitrairement à  $3dm$  de débattement vertical (ce sera la même pour toutes les architectures avec quatre actionneurs verticaux). Mathématiquement, ces deux contraintes s'écrivent :

$$|l_2 - l_3| < \|\mathbf{u}_i\| < |l_2 + l_3|, \quad (2.31)$$

$$0 < \rho_i < 3. \quad (2.32)$$

Ces inégalités permettent d'obtenir les courbes de la figure 2.11 pour des points d'attache à la base disposés en carré et en rectangle (voir tableaux 2.3 à 2.4).

TAB. 2.3 – Paramètres du 4-PRRRR ( $\alpha = 3\pi/4$ )

| i | $\mathbf{r}_i$ (carré) | $\mathbf{r}_i$ (rect.) | $\mathbf{s}_{0i}$ | $\beta_i$ | $\gamma_i$ |
|---|------------------------|------------------------|-------------------|-----------|------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$      | $[-70, -90, 0]^T$      | $[-40, -40, 0]^T$ | $\pi/4$   | $\pi/4$    |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$       | $[-70, 90, 0]^T$       | $[-40, 40, 0]^T$  | $-\pi/4$  | $-\pi/4$   |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$        | $[70, 90, 0]^T$        | $[40, 40, 0]^T$   | $5\pi/4$  | $5\pi/4$   |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$       | $[70, -90, 0]^T$       | $[40, -40, 0]^T$  | $3\pi/4$  | $3\pi/4$   |

TAB. 2.4 – Longueur des membrures du 4-PRRRR

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 0      |
| $l_2$     | 120    |
| $l_3$     | 120    |

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -2 et 2 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que sont étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-PRRRR.

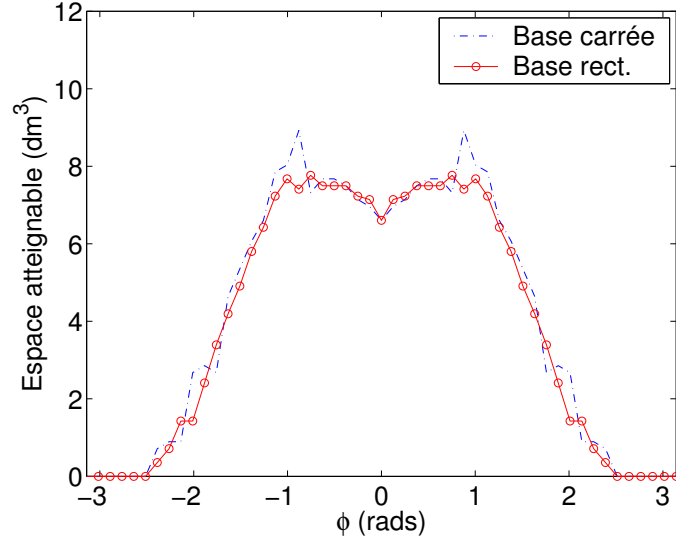


FIG. 2.11 – Espace atteignable du 4-PRRRR en fonction de l'orientation de l'effecteur.

### 2.2.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

Les matrices jacobiennes s'obtiennent en dérivant l'équation (2.26) par rapport au temps :

$$(\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{k}\dot{\rho}_i)^T \mathbf{e}_i + (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{k}\rho_i)^T \dot{\mathbf{e}}_i = 0. \quad (2.33)$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{E}\mathbf{e}_i\dot{\phi}, \quad (2.35)$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{u}_i^T \mathbf{E} \mathbf{e}_i + (\mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i) \dot{\phi} = \mathbf{k}^T \mathbf{e}_i \dot{\rho}_i. \quad (2.37)$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & (\mathbf{u}_1^T \mathbf{E} + (\mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{01})^T) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T & (\mathbf{u}_2^T \mathbf{E} + (\mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{02})^T) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^T & (\mathbf{u}_3^T \mathbf{E} + (\mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{03})^T) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4^T & (\mathbf{u}_4^T \mathbf{E} + (\mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{04})^T) \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^T \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}^T \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

### 2.2.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{k}$ , donc lorsqu'il est dans le plan  $xy$ . Or, l'orientation des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  est fixée pas les angles  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  qui sont trois paramètres constants. Il suffit donc poser  $\alpha_i$  différent de 0 pour  $i = 1, 2, 3, 4$  afin de ne pas avoir de singularité liée à la contrainte de perpendicularité. Cependant, il y a également des lieux singuliers de type 1 lorsque les vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  et  $\mathbf{v}_{3i}$  sont parallèles. Ces singularités sont liées à la seconde contrainte discutée plus tôt, soit celle concernant la norme des vecteurs  $\mathbf{u}_i$  qui définit l'espace atteignable du manipulateur. La figure 2.12 montre un exemple d'espace atteignable du 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}$  pour une base rectangulaire pour  $\phi = 0$ .

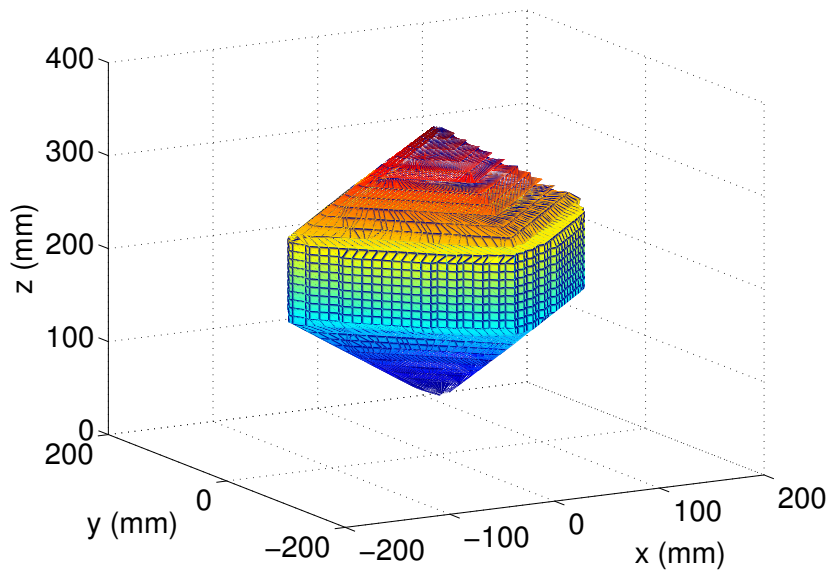


FIG. 2.12 – Espace atteignable du 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}$  (base rectangulaire et  $\phi = 0$ ).

Cet espace de travail semble déjà plus intéressant que celui du manipulateur 4- $\underline{\text{R}}\text{UU}$ . En effet, sa forme est complètement convexe, ce qui donne un espace interne beaucoup plus “dégagé”.

### 2.2.2.2 Singularités de type 2

À prime abord, l'étude de la matrice  $\mathbf{J}$  permet de connaître quelques configurations singulières du manipulateur. Premièrement, si  $\alpha_i = 0$  pour toute valeur de  $i$ , les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont tous dans le plan  $xy$  et leurs composantes  $z$  sont nulles. La matrice  $\mathbf{J}$  a alors uniquement des 0 dans sa troisième colonne. Dans cette situation, le manipulateur ne peut pas résister à des efforts verticaux et l'effecteur perd sa rigidité dans la direction  $z$ . De plus, si les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont tous parallèles à l'axe  $z$  ( $\alpha_i = \pi/2$ ), les deux premières colonnes de la matrice sont composées de zéros et son déterminant est par conséquent nul. Les quatre pattes sont alors toutes dans le plan  $xy$  et les actionneurs verticaux ne peuvent produire aucune vitesse dans ce plan. Donc, certaines configurations singulières peuvent un fois de plus être évitées en choisissant judicieusement l'orientation des vecteurs  $\mathbf{e}_i$ .

En ce qui concerne les autres lieux de singularité, il est possible d'en obtenir une expression analytique étant donnée la simplicité relative de la matrice  $\mathbf{J}$ , et ce, en décomposant linéairement son déterminant. Dans un premier temps, on réécrit le vecteur  $\mathbf{u}_i$  plus simplement pour alléger le développement mathématique ultérieur :

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} -v_{1xi} - r_{xi} + s_{xi} + x \\ -v_{1yi} - r_{yi} + s_{yi} + y \\ -v_{1zi} - r_{zi} + s_{zi} + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i + x \\ g_i + y \\ h_i + z \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

On rappelle également que la forme du vecteur  $\mathbf{e}_i$ , soit :

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_{xi} & e_{yi} & e_{zi} \end{bmatrix}^T. \quad (2.41)$$

Dans le repère mobile de la plate-forme, ce dernier vecteur s'écrit :

$$\mathbf{e}_{0i} = \begin{bmatrix} e_{0xi} & e_{0yi} & e_{0zi} \end{bmatrix}^T. \quad (2.42)$$

Ces modifications et rappels étant faits, on peut réécrire le premier terme de la quatrième colonne de  $\mathbf{J}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{E} \mathbf{e}_i = -e_{yi}x + e_{xi}y - e_{yi}f_i + e_{xi}g_i. \quad (2.43)$$

Notons que la variable cartésienne  $z$  n'apparaît pas dans l'équation parce que l'élément  $E_{33}$  est nul. Quant au deuxième terme de la dernière colonne de  $\mathbf{J}$ , il s'écrit explicitement comme ceci :

$$(\mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i = \mathbf{s}_{0i}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{0i} = s_{0xi}e_{0yi} - s_{0yi}e_{0xi}. \quad (2.44)$$

On rappelle que les indices 0 signifient que les vecteurs sont exprimés dans le repère de l'effecteur. La nouvelle expression pour la matrice  $\mathbf{J}$  est alors :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & (-\mathbf{q}_y x + \mathbf{q}_x y + \mathbf{j}) \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

où les vecteurs  $\mathbf{q}_x$ ,  $\mathbf{q}_y$ ,  $\mathbf{q}_z$  contiennent respectivement les composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  :

$$\mathbf{q}_x = [e_{x1}, e_{x2}, e_{x3}, e_{x4}]^T, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{q}_y = [e_{y1}, e_{y2}, e_{y3}, e_{y4}]^T, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{q}_z = [e_{z1}, e_{z2}, e_{z3}, e_{z4}]^T \quad (2.48)$$

et les éléments du vecteur  $\mathbf{j}$  représentent la somme des termes qui ne sont pas facteurs de  $x$  ou de  $y$  dans les équations (2.43) et (2.44) :

$$j_i = -e_{yi} f_i + e_{xi} g_i + s_{0xi} e_{0yi} - s_{0yi} e_{0xi}. \quad (2.49)$$

Suit alors la décomposition linéaire du déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$  :

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & (-\mathbf{q}_y x + \mathbf{q}_x y + \mathbf{j}) \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

$$= - \begin{vmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{q}_y \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{q}_x \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{j} \end{vmatrix}. \quad (2.51)$$

Comme les deux premiers déterminants de l'équation ci-dessus comportent chacun deux colonnes identiques, l'expression du déterminant de  $\mathbf{J}$  se résume à :

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{j} \end{vmatrix} \quad (2.52)$$

qui ne dépend aucunement des variables cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Maintenant, considérons la variable cartésienne  $\phi$ . On rappelle que (selon les équations (2.42) et (2.40)) :

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_{xi} \\ e_{yi} \\ e_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{0xi} \cos \phi - e_{0yi} \sin \phi \\ e_{0xi} \sin \phi + e_{0yi} \cos \phi \\ e_{0zi} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

et que

$$\begin{aligned} f_i &= -v_{1xi} - r_{xi} + s_{xi} \\ &= m_i + s_{0xi} \cos \phi - s_{0yi} \sin \phi, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} g_i &= -v_{1yi} - r_{yi} + s_{yi} \\ &= n_i + s_{0xi} \sin \phi + s_{0yi} \cos \phi, \end{aligned} \quad (2.55)$$

où

$$m_i = -v_{1xi} - r_{xi}, \quad (2.56)$$

$$n_i = -v_{1yi} - r_{yi}. \quad (2.57)$$

En utilisant les expressions ci-dessus, il est alors possible d'exprimer les éléments du vecteur  $\mathbf{j}$  (équation (2.49)) en fonction de  $\phi$ . Après simplifications, on obtient :

$$j_i = a_i \sin \phi + b_i \cos \phi, \quad (2.58)$$

où

$$a_i = -m_i e_{0xi} - n_i e_{0yi}, \quad (2.59)$$

$$b_i = n_i e_{0xi} - m_i e_{0yi}. \quad (2.60)$$

L'expression du déterminant de  $\mathbf{J}$  devient alors :

$$\det(\mathbf{J}) = \left| \begin{array}{cccc} (\mathbf{q}_{0x} \cos \phi - \mathbf{q}_{0y} \sin \phi) & (\mathbf{q}_{0x} \sin \phi + \mathbf{q}_{0y} \cos \phi) & \mathbf{q}_{0z} & (\mathbf{a}_i \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi) \end{array} \right|. \quad (2.61)$$

Similairement aux vecteurs  $\mathbf{q}_x$ ,  $\mathbf{q}_y$  et  $\mathbf{q}_z$ , les vecteurs  $\mathbf{q}_{0x}$ ,  $\mathbf{q}_{0y}$  et  $\mathbf{q}_{0z}$  contiennent respectivement les composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  des vecteurs  $\mathbf{e}_{0i}$ . La décomposition linéaire du déterminant mène à une expression qui comporte huit déterminants :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}) = & \left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{a} \right| \sin^2 \phi \cos \phi \\ & + \left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{b} \right| \sin \phi \cos^2 \phi \\ & + \left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{a} \right| \sin \phi \cos^2 \phi \\ & + \left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{b} \right| \cos^3 \phi \\ & - \left| \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{a} \right| \sin^3 \phi \\ & - \left| \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{b} \right| \sin^2 \phi \cos \phi \\ & - \left| \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{a} \right| \sin^2 \phi \cos \phi \\ & - \left| \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{b} \right| \sin \phi \cos^2 \phi. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dans l'expression ci-dessus, le deux premiers ainsi que les deux derniers déterminants ont deux colonnes identiques : ils sont donc nuls. Quant aux déterminants 5 et 6, on en permute les deux premières colonnes tout en prenant soin de changer leurs signes. Ils deviennent alors identiques aux déterminants 3 et 4. Après quelques manipulations

algébriques, on obtient l'expression analytique finale des lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}$ , soit :

$$\left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{a} \right| \sin \phi + \left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{b} \right| \cos \phi = 0, \quad (2.63)$$

ou encore

$$\tan \phi = - \frac{\left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{b} \right|}{\left| \mathbf{q}_{0x} \quad \mathbf{q}_{0y} \quad \mathbf{q}_{0z} \quad \mathbf{a} \right|}. \quad (2.64)$$

Les deux déterminants de l'expression ci-dessus ne dépendent que des paramètres géométriques du manipulateur, tels les points d'attache à l'effecteur et à la base et l'orientation des vecteurs  $\mathbf{e}_i$ . Donc, pour une géométrie donnée, on connaît analytiquement les lieux de singularité du manipulateur.

Le graphe des singularités pour un effecteur et une base carrés n'est pas présenté puisque cette configuration est en tout temps singulière. Ceci est dû au choix des angles  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . À priori, les angles  $\alpha_i$  ont été fixés à  $\frac{3\pi}{4}$  et les angles  $\beta_i$  sont tous des multiples de  $\frac{\pi}{4}$ . Cette configuration parfaitement symétrique fait en sorte que les deux dernières colonnes de la matrice  $\mathbf{J}$  sont linéairement dépendantes. En effet, la troisième colonne n'est composée que d'une seule et même valeur parce que les angles  $\alpha_i$  sont constants pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . Quant à la dernière colonne, elle a aussi quatre fois le même élément, et ce, pour deux raisons. Premièrement, le choix des angles  $\beta_i$  et d'un effecteur carré positionne les vecteurs  $\mathbf{s}_{0i}$  et  $\mathbf{e}_i$  dans un même plan vertical. Le terme  $(\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i = \mathbf{s}_i^T \mathbf{E}^T \mathbf{e}_i$  est donc nul puisque les vecteurs  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{E}^T$  sont perpendiculaires aux vecteurs  $\mathbf{e}_i$ . Deuxièmement, une base carrée engendre une projection constante des vecteurs  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{E}$  sur les vecteur  $\mathbf{e}_i$  peu importe l'orientation de l'effecteur. La dernière colonne est donc elle aussi composée d'une seule et même valeur (*constante* + 0) ce qui la rend linéairement dépendante à la colonne 3. En brisant la symétrie avec une base rectangulaire par exemple, la configuration du manipulateur ne devient singulière que pour 2 valeurs de  $\phi$ , soit  $\pm \frac{\pi}{2}$  (équation (2.64)). Ceci rend le manipulateur 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{R}}$  particulièrement intéressant puisque ses lieux singuliers sont très faciles à éviter.

### 2.2.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte ce fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne



cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs s'obtiennent en faisant le produit vectoriel entre les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ . Le vecteur  $\mathbf{k}_i$  étant constant pour chaque patte, il suffit donc d'avoir un seul angle  $\beta_i$  (qui oriente le vecteur  $\mathbf{e}_i$ ) différent des autres pour éviter toute singularité de contrainte. Dans le cas présent, ils sont tous différents : il n'y a donc aucune singularité de contrainte pour ce manipulateur.

### 2.2.4 Dextérité

La configuration des actionneurs du 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (tous parallèles, orientés selon l'axe  $z$ ) fait en sorte que sa dextérité est indépendante de la position en  $z$  de la plateforme. De ce fait, le graphique ci-dessous montre l'évolution de la dextérité globale en  $xy$  en fonction de l'orientation de l'effecteur. On remarque qu'elle est nulle pour les orientations singulières de l'effecteur. Quant à l'indice de dextérité globale, il est de 0.21.

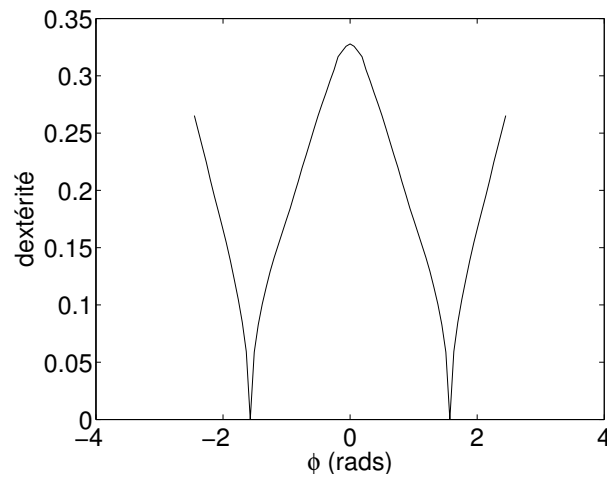


FIG. 2.13 – Dextérité du 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).

## 2.3 Analyse des résultats

Tel que mentionné en début de chapitre, l'étude cinématique des autres architectures se trouve à l'annexe B. Dans les prochaines lignes, les résultats obtenus pour toutes les architectures sont comparés afin de déterminer celle qui a les meilleures propriétés. Notons que l'étude cinématique a été faite en octroyant à chaque manipulateur 3T1R une base et un effecteur de dimensions similaires. Il en fut de même avec les longueurs des membrures qui sont du même ordre de grandeur. Ces choix s'imposaient pour que chaque architecture puisse être comparée aux autres et que les conclusions puissent être un minimum valides. Il est également important de mentionner qu'aucune optimisation n'a été faite jusqu'à présent. Une première analyse devrait faire ressortir une architecture qui semble être la meilleure. Advenant une ambivalence dans le choix de celle-ci, des modifications paramétriques pourront être faites afin de permettre à une architecture de se démarquer davantage.

La performance des architectures vis à vis chaque critère est résumée au tableau 2.6. Le critère le plus important dans la sélection d'une architecture est la présence de singularités et, le cas échéant, leur niveau d'encombrement. En d'autres termes, il faut savoir s'il y a des singularités dans l'espace de travail et si elles sont faciles à éviter. On recherche donc une architecture avec des singularités relativement éloignées d'une position centrale pour avoir un bon espace de travail dans lequel on garde le plein contrôle du manipulateur. Pour caractériser les lieux de singularité des 11 architectures, la notation du tableau 2.5 est utilisée :

TAB. 2.5 – Notation pour qualifier les singularités

| Notation | Signification                                 |
|----------|---|
| 0        | quasi-impossible à éviter                     |
| x        | singularités difficiles à éviter              |
| xx       | singularités relativement difficiles à éviter |
| xxx      | singularités relativement faciles à éviter    |
| xxxx     | singularités très faciles à éviter            |
| xxxxx    | quasi absence de singularité                  |
| aucune   | aucune singularité dans l'espace de travail   |

On donne la mention “singularités difficiles à éviter” à une architecture présentant des singularités qui limitent beaucoup l’espace de travail dans presque toute la plage d’orientation de l’effecteur. À l’opposé, lorsque les singularités sont relativement éloignées, et ce, pour toute valeur de  $\phi$ , on considère qu’elles sont “très faciles à éviter”.

Du point de vue de la dextérité, un manipulateur parallèle ayant un indice de dextérité globale  $\eta \approx 0.2$  est considéré comme étant relativement précis. Quant à l’espace atteignable, plus son volume maximum et sa plage angulaire d’opération sont élevés, plus le mécanisme est intéressant. De plus, une forme convexe de celui-ci est privilégiée par rapport à une forme concave. En ce qui concerne les chiffres du tableau qui quantifient l’espace atteignable, ils sont approximatifs et ne servent qu’à donner un ordre de grandeur pour des fins de comparaison.

TAB. 2.6 – Résumé de l’étude cinématique (base ou effecteur rectangulaire)

| Manipulateur   | Singularités |            | Dextérité | Esp. Atteignable |              |
|--|--------------|------------|-----------|------------------|--------------|
|  | Type 2       | Contrainte |           | Max. ( $dm^3$ )  | Plage (rads) |
| 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ ( $\underline{R}UU$ )  | xxx          | aucune     | 0.19      | 2.8              | 3            |
| 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ ( $\underline{U}UR$ )  | xxx          | aucune     | 0.21      | 6                | 3            |
| 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ ( $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}U\underline{\underline{R}}$ ) | xx           | aucune     | 0.20      | 3.2              | 2.5          |
| 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$  | xxx          | aucune     | 0.13      | 10               | 2            |
| 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$  | xx           | aucune     | 0.13      | 2.5              | 2.5          |
| 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$  | xx           | aucune     | 0.21      | 2.2              | 3            |
| 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ ( $\underline{P}UU$ )  | xxxxxx       | aucune     | 0.21      | 11               | 3.5          |
| 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ ( $\underline{P}\underline{\underline{R}}U\underline{\underline{R}}$ )             | x            | aucune     | 0.24      | 7                | 2            |
| 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ ( $\underline{P}\underline{\underline{R}}U\underline{\underline{R}}$ )             | x            | aucune     | 0.22      | 5                | 2            |
| 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$  | xxxxxx       | aucune     | 0.27      | 7                | 3            |
| 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$  | xxxxxx       | aucune     | 0.21      | 7.8              | 4            |

Un coup d’oeil rapide au tableau 2.6 permet d’éliminer rapidement les manipulateurs 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}U\underline{\underline{R}}$ , 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}U\underline{\underline{R}}$ , 4- $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{R}}U\underline{\underline{R}}$ , 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$  et 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ . En effet, leurs lieux de singularité sont à priori trop encombrants et ils limitent beaucoup l’espace de travail. Les architectures 4- $\underline{R}UU$ , 4- $\underline{U}UR$  et 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ , quant à elles, ont des lieux de singularité jugés “acceptables”. Ils limitent très peu l’espace de travail au centre de leur plage angulaire d’opération. Toutefois, aux frontières de celle-ci, cet espace diminue de façon

notable (sans être totalement inintéressant). Pour cette raison, ils ne sont pas retenus puisque les trois derniers manipulateurs ( $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{UU}$ ,  $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{R}'\text{R}'\text{R}'\text{R}'$  et  $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{R}''\text{R}''\text{R}''\text{R}''$ ) n'ont quasiment pas singularité dans tout leur espace atteignable. Elles ne sont fonction que de l'orientation de l'effecteur, qui est en position singulière uniquement pour 2 valeurs de  $\phi$  distantes de  $\pi$ .

Ces trois manipulateurs ont tous des très bonnes propriétés : aucune singularité de contrainte n'est rencontrée dans l'espace atteignable, leur dextérité est très bonne et ils offrent un bon espace atteignable convexe sur une plage angulaire intéressante. Le  $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{R}'\text{R}'\text{R}'\text{R}'$  et le  $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{R}''\text{R}''\text{R}''\text{R}''$  présentent toutefois l'avantage d'avoir une expression analytique de leurs lieux de singularité. Ce qui permet de connaître *exactement* leurs emplacements dans l'espace. On rejete donc le  $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{UU}$  bien qu'il pourrait être un bon manipulateur.

Pour départager les deux derniers, des considérations de design entrent en jeu. Lors de l'utilisation ultérieure du manipulateur  $3\text{T}1\text{R}$ , les efforts les plus importants seront bien entendus situés près des actionneurs. Un joint universel positionné au début d'une chaîne cinématique pourrait être légèrement problématique puisque ce type de joint est plus complexe qu'un simple joint rotoïde, et donc, fort probablement plus faible. Pour cette raison, on privilégie l'architecture  $4\text{-}\underline{\text{P}}\text{R}'\text{R}'\text{R}'\text{R}'$  dans laquelle les joints universels sont attachés à l'effecteur, et donc, plus faiblement sollicités.

# Chapitre 3

## Design du manipulateur 4-PR<sup>+</sup>R<sup>+</sup>R<sup>+</sup>R<sup>+</sup>

Ce chapitre présente brièvement l'architecture retenue avec les modifications qui lui sont apportées, ses avantages ainsi que certains éléments concernant le design du prototype. Les notions théoriques ne sont pas élaborées ici dans la mesure où elles l'ont été dans l'annexe B. Le lecteur doit se référer à cette section pour un développement plus complet des équations ainsi que pour la définition des paramètres géométriques.



### 3.1 Analyse cinématique

Voici tout d'abord les principaux vecteurs d'une chaîne cinématique CRU :

$$\mathbf{p} = [x, y, z]^T, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_i = [r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}]^T, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{s}_{0i} = [s_{0xi}, s_{0yi}, s_{0zi}]^T, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{e}_i = [\cos \alpha_i \cos \beta_i, \cos \alpha_i \sin \beta_i, \sin \alpha_i]^T. \quad (3.4)$$

On rappelle que les vecteurs  $\mathbf{r}_i$  relient l'origine du repère fixe ( $\mathcal{R}$ ) aux points d'attache au sol des actionneurs. De même, les vecteurs  $\mathbf{s}_{0i}$  relient l'origine du repère mobile  $\mathcal{R}'$  de l'effecteur aux points d'attache des pattes à ce même effecteur (exprimés dans le repère mobile). Dans le repère fixe, ils s'expriment ainsi :

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{xi} \\ s_{yi} \\ s_{zi} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} = \begin{bmatrix} s_{0xi} \cos \phi - s_{0yi} \sin \phi \\ s_{0xi} \sin \phi + s_{0yi} \cos \phi \\ s_{0zi} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Quant aux vecteurs  $\mathbf{e}_i$ , ils définissent ici la direction des axes des articulations cylindriques des chaînes cinématiques CRU. Les angles  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont définis comme à la figure 2.10, mais par rapport au repère fixe au lieu du repère mobile. On définit également le vecteur suivant :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i \mathbf{e}_i. \quad (3.6)$$

Afin de respecter les contraintes de l'architecture, ces vecteurs doivent être perpendiculaires aux vecteurs  $\mathbf{e}_i$  :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i = 0. \quad (3.7)$$

En développant cette équation comme ceci :

$$0 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i \quad (3.8)$$

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \rho_i \mathbf{e}_i)^T \mathbf{e}_i \quad (3.9)$$

$$\rho_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i)^T \mathbf{e}_i, \quad (3.10)$$

on obtient directement la solution du PGI, soit :

$$\rho_i = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i)^T \mathbf{e}_i. \quad (3.11)$$

Spécifiquement, on a pour chacune des pattes :

$$\rho_1 = x + s_{x1} - r_{x1}, \quad (3.12)$$

$$\rho_2 = y + s_{y2} - r_{y2}, \quad (3.13)$$

$$\rho_3 = z + s_{z3} - r_{x3}, \quad (3.14)$$

$$\rho_4 = y + s_{y4} - r_{y4}. \quad (3.15)$$

En ce qui concerne les équations de vitesse, on les obtient en procédant similairement au 4-PRRR $\check{R}$  en annexe B, d'où la représentation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{01})^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{02})^T \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{03})^T \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{04})^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_4^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

qu'on peut écrire explicitement comme ceci :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (-s_{0x1} \sin \phi - s_{0y1} \cos \phi) \\ 0 & 1 & 0 & (s_{0x2} \cos \phi - s_{0y2} \sin \phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (s_{0x4} \cos \phi - s_{0y4} \sin \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$  est donc simplement :

$$\det(J) = \cos(\phi)s_{x4} - \sin(\phi)s_{y4} - \cos(\phi)s_{x2} + \sin(\phi)s_{y2}. \quad (3.18)$$

L'équation analytique des singularités du type 2 est alors :

$$\tan \phi = \frac{s_{x2} - s_{x4}}{s_{y2} - s_{y4}}. \quad (3.19)$$

Comme à l'annexe B, les seules configurations singulières du manipulateur sont deux orientations précises de la plate-forme. En dehors de ces deux valeurs de  $\phi$ , l'espace de travail est vide de singularités.

## 3.2 Découplage partiel

La notion de découplage est très intéressante lorsque vient le temps de contrôler un manipulateur. En effet, lorsqu'il y a un découplage complet entre les variables de



commande et celles de sorties, il est possible de contrôler chaque sortie avec une seule entrée. Dans le cas d'un manipulateur 3T1R, on aurait un découplage parfait si chacun des moteurs contrôlait un seul degré de liberté sans influencer les autres. Intuitivement, il est donc plus facile de visualiser les commandes nécessaires à un tel manipulateur pour exécuter une tâche précise. Concrètement, cela se traduit par un contrôleur plus simple.

Dans le cas de 4-CRU, le découplage est partiel. En effet, certains degrés de liberté sont en tout temps contrôlés par un seul actionneur, alors que d'autres le deviennent dans certaines situations. Il suffit d'observer les équations de vitesse pour remarquer qu'un mouvement vertical de l'effecteur (selon  $z$ ) n'implique que le troisième actionneur :

$$\dot{z} = \dot{\rho}_3. \quad (3.20)$$

Par ailleurs, s'il n'y a aucune rotation dans la trajectoire de l'effecteur (cas de translation pure où  $\dot{\phi} = 0$ ), les trois autres équations de vitesse deviennent :

$$\dot{x} = \dot{\rho}_1, \quad (3.21)$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}_2, \quad (3.22)$$

$$\dot{y} = \dot{\rho}_4. \quad (3.23)$$

Cela signifie que, dans pareille situation, un mouvement de l'effecteur dans la direction  $x$  est contrôlé uniquement par l'actionneur 1. De plus, en donnant la même commande en vitesse aux actionneurs 2 et 4 ( $\dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_4$ ), la vitesse  $\dot{y}$  est indépendante des actionneurs 1 et 3. Une observation rapide de la configuration du 4-CRU permet d'arriver intuitivement aux mêmes conclusions. En résumé :

- translation en  $z$  découplée en tout temps
- translation en  $x$  découplée lorsque  $\dot{\phi} = 0$  (translation pure de l'effecteur)
- translation en  $y$  partiellement découplée lorsque  $\dot{\phi} = 0$  et  $\dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_4$

Ce découplage partiel rend donc cette architecture du manipulateur très intéressante puisque son contrôleur sera très simple.

### 3.3 Dextérité

Au chapitre 1, on a discuté brièvement de l'importance d'avoir une bonne dextérité. La situation à éviter étant des commandes disproportionnées par rapport au mouvement de l'effecteur. En d'autres termes, pour un manipulateur, il est souhaitable qu'en moyenne dans son espace atteignable, les commandes qui lui sont imposées provoquent des mouvements du même ordre de grandeur.

En ce qui concerne le manipulateur 4-CRU, les informations que révèlent les équations (3.20) à (3.23) sont très intéressantes. En effet, non seulement il y a un découplage partiel entre les vitesses des actionneurs et celles de l'effecteur, mais les relations entre les deux sont linéaires (dans le cas d'une translation pure). Cette proportionnalité devrait donc conférer une très bonne dextérité au manipulateur.

Par ailleurs, comme les seuls paramètres géométriques présents dans la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  sont les coordonnées des points d'attaches des pattes à l'effecteur (vecteurs  $\mathbf{s}_{0i}$ ), on peut facilement déterminer les dimensions de celui-ci qui optimisent la dextérité du manipulateur. D'après la disposition des actionneurs (voir figure 3.1), un effecteur en forme de croix semble un choix approprié (deux segments de droite alignés respectivement sur les axes  $x'$  et  $y'$  et se coupant en leurs centres). En effet, une telle configuration de l'effecteur est très simple et permettra de bien séparer les quatre points d'attache afin de limiter les éventuelles interférences entre les membrures lors des mouvements du manipulateur. La figure 3.2 montre l'évolution de la dextérité globale du manipulateur 4-CRU en fonction de la longueur des deux segments :  $l_{13}$  étant la longueur du segment reliant les points d'attache à l'effecteur des pattes 1 et 3 (raisonnement analogique pour  $l_{24}$ ).

Ce graphique montre très bien que la dextérité globale du manipulateur est excellente. En effet, il serait théoriquement possible d'avoir une dextérité globale d'environ 0.7 si  $l_{13} = 0$  et  $l_{24} \simeq 2$ . Cependant, une longueur  $l_{13} = 0$  est plus difficilement réalisable en pratique et cela pourrait éventuellement créer des interférences entre les membrures puisqu'elles seraient trop rapprochées. Quant à  $l_{24} \simeq 2$ , cela engendrerait un effecteur trop grand (donc trop lourd) et une base probablement plus grande elle aussi. Sans oublier que les débattements des actionneurs seraient eux aussi très grands lors de la rotation de l'effecteur. Pour toutes ces raisons, on choisira un effecteur avec  $l_{13}$

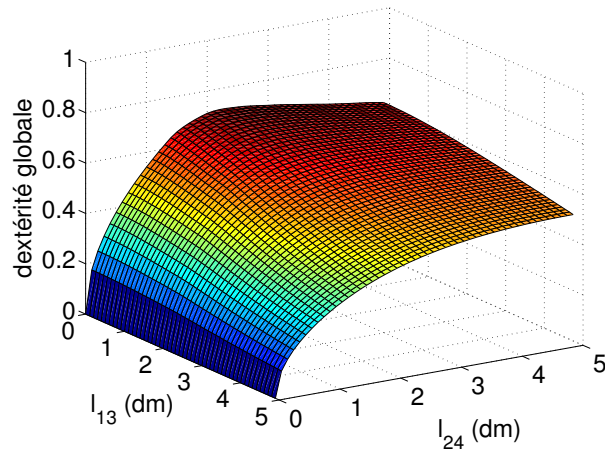


FIG. 3.2 – Dextérité globale du 4-CRU en fonction des dimensions de son effecteur.

légèrement plus grand que 0 et  $l_{24}$  inférieur à 2. Évidemment, la dextérité ne sera pas optimale. Toutefois, comme le montre la figure 3.2, elle ne varie que très peu en fonction de  $l_{13}$ . De plus, on peut facilement choisir une valeur de  $l_{24}$  qui conférera au manipulateur 4-CRU une dextérité supérieure qu'à celle qu'on obtiendrait avec la configuration à actionneurs parallèles.

Par exemple, pour un manipulateur 4-CRU ayant les paramètres présentés au tableau 3.1 de la section suivante ( $l_{13} = l_{24} = 0.8$ ), la dextérité globale est plus du double de celle du manipulateur 4-P $\overline{R}$ R $\overline{R}$ R à actionneurs verticaux, soit 0.45 contre 0.21. La figure 3.3 montre également qu'à  $\phi = 0$ , la dextérité atteint un maximum de 0.6, ce qui est excellent. Donc, la configuration orthogonale des actionneurs combinée à un effecteur partiellement optimisé augmentent de façon significative la dextérité du manipulateur.

### 3.4 Espace atteignable

La nouvelle configuration des actionneurs rend la forme de l'espace atteignable très intéressante. Une forme approchée du problème géométrique direct (PGD) est très révélatrice à ce sujet. Dans un premier temps, on peut isoler les variables cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans les équations (3.13) à (3.15) (on exprime également les composantes des

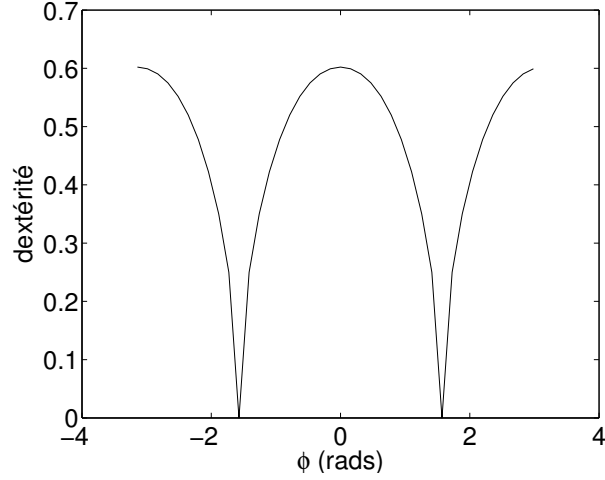


FIG. 3.3 – Dextérité du 4-CRU en fonction de  $\phi$ .

vecteurs  $\mathbf{s}_i$  dans le repère fixe) :

$$x = \rho_1 + r_{x1} - s_{0x1} \cos \phi + s_{0y1} \sin \phi, \quad (3.24)$$

$$y = \rho_2 + r_{y2} - s_{0x2} \sin \phi - s_{0y2} \cos \phi, \quad (3.25)$$

$$z = \rho_3 + r_{z3} - s_{z3}, \quad (3.26)$$

$$y = \rho_4 + r_{y4} - s_{0x4} \sin \phi - s_{0y4} \cos \phi. \quad (3.27)$$

En additionnant les équations (3.25) et (3.27) et en isolant  $y$ , on obtient l'équation suivante :

$$y = \frac{\rho_2 + \rho_4}{2} + \frac{r_{y2} - s_{0x2} \sin \phi - s_{0y2} \cos \phi + r_{y4} - s_{0x4} \sin \phi - s_{0y4} \cos \phi}{2}. \quad (3.28)$$

Les équations (3.24), (3.26) et (3.28) représentent en quelque sorte les solutions du PGD du manipulateur 4-CRU pour une orientation constante de l'effecteur. La solution complète du PGD pourrait également être obtenue. Toutefois, l'interprétation physique des trois équations mentionnées précédemment est plus intéressante pour visualiser l'espace atteignable du robot. En effet, pour une valeur donnée de l'angle  $\phi$ , ces équations se réécrivent comme suit :

$$x = \rho_1 + C_1, \quad (3.29)$$

$$y = \frac{\rho_2 + \rho_4}{2} + C_2, \quad (3.30)$$

$$z = \rho_3 + C_3, \quad (3.31)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes égales à :

$$C_1 = r_{x1} - s_{0x1} \cos \phi + s_{0y1} \sin \phi, \quad (3.32)$$

$$C_2 = \frac{r_{y2} - s_{0x2} \sin \phi - s_{0y2} \cos \phi + r_{y4} - s_{0x4} \sin \phi - s_{0y4} \cos \phi}{2}, \quad (3.33)$$

$$C_3 = r_{z3} - s_{z3}. \quad (3.34)$$

Connaissant les limites articulaires des actionneurs (limites sur  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  et  $\rho_4$ ), on trouve quasi-directement les limites des variables cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et donc, les frontières de l'espace atteignable du manipulateur pour une orientation donnée de son effecteur. Ces limites cartésiennes sont alors définies par les valeurs minimales et maximales que peuvent avoir les actionneurs, valeurs auxquelles on additionne une constante. Les trois variables cartésiennes en question étant mesurées sur des axes orthogonaux, leur limites correspondent simplement aux longueurs des arêtes d'un prisme rectangulaire. Donc, à chaque valeur de  $\phi$  correspond un prisme rectangulaire dans lequel le manipulateur peut travailler, ce qui est très facile à visualiser.

Parallèlement aux limites des actionneurs, il faut tenir compte d'une autre contrainte : l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{v}_{1i}$  et  $\mathbf{v}_{2i}$ . Il faut à tout prix éviter que ces vecteurs soient alignés. En d'autres termes, l'angle entre les deux doit être compris entre 0 et 180 degrés. Toutefois, par mesure de précaution, on fixe arbitrairement ces limites angulaires à environ 20 et 140 degrés. C'est pour prévenir une erreur de commande qui positionnerait l'effecteur sur un lieu de singularité de type 1 (frontière de l'espace atteignable correspondant à une limite physique des pattes).

Tenant compte de ces deux contraintes (limites des actionneurs et des pattes), des objectifs concernant l'espace atteignable ont été fixés :

- l'espace de travail doit être un cube
- ce cube doit pouvoir être atteint sur une plage d'orientations de l'effecteur la plus grande possible

Suivant ces objectifs, un modèle virtuel a été créé avec le logiciel *Pro/Engineer*, puis animé avec le module *Mechanism* de ce même logiciel. Cet outil informatique fut indispensable pour s'assurer que toutes les contraintes soient respectées. Il permettait de faire bouger le manipulateur à l'aide de trajectoire prédéfinies dans *Matlab*. Par exemple, en programmant une trajectoire correspondant au suivi des arêtes d'un cube, il fut possible de vérifier l'angle entre les membrures aux positions extrêmes ainsi que les éventuelles interférences entre ces membrures. Leurs longueurs pouvaient aisément

être ajustées en conséquence, tout comme la position des actionneurs. Cette phase d'optimisation itérative a mené à un manipulateur avec les paramètres du tableau 3.1.

TAB. 3.1 – Paramètres du 4-CRU

| i | $\mathbf{r}_i$      | $\mathbf{s}_{0i}$ | $\alpha_i$ | $\beta_i$ | $l_{1i}$ | $l_{2i}$ |
|---|---------------------|-------------------|------------|-----------|----------|----------|
| 1 | $[0, 140, -135]^T$  | $[0, 40, 0]^T$    | 0          | 0         | 167      | 167      |
| 2 | $[-180, 0, 135]^T$  | $[-40, 0, 0]^T$   | 0          | $\pi/2$   | 154      | 161      |
| 3 | $[-180, -225, 0]^T$ | $[0, -40, 0]^T$   | $\pi/2$    | 0         | 203      | 223      |
| 4 | $[180, 0, 135]^T$   | $[40, 0, 0]^T$    | 0          | $\pi/2$   | 154      | 161      |

La géométrie présentée au tableau 3.1 permet d'obtenir un espace de travail cubique de  $15\text{cm}$  d'arête centré à  $P(0, 0, 0)$  pour toute valeur de  $\phi$  comprise entre  $-60$  et  $60$  degrés. Selon les équations du PGI, on a donc besoin d'actionneurs avec les courses suivantes (tableau 3.2) :

TAB. 3.2 – Valeurs limites nécessaires aux actionneurs du 4-CRU

| i | $\rho_{min}$ | $\rho_{max}$ |
|---|--------------|--------------|
| 1 | -109.64      | 109.64       |
| 2 | -109.64      | 109.64       |
| 3 | -75          | 75           |
| 4 | -109.64      | 109.64       |

Évidemment, la théorie veut que la grosseur maximale du cube pouvant être atteint varie légèrement selon l'orientation de l'effecteur (voir figures 3.4 et 3.5) Toutefois, dans le cadre du design du robot, on tient simplement à s'assurer que le cube puisse être atteint peu importe l'orientation (voir figures 3.6 et 3.7).

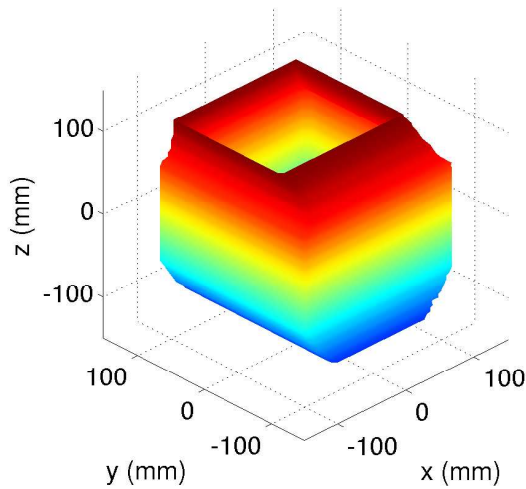


FIG. 3.4 – Espace atteignable du 4-CRU ( $\phi = 0$ ).

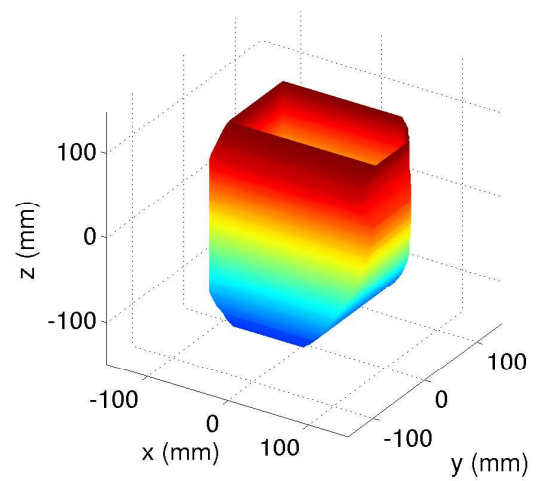


FIG. 3.5 – Espace atteignable du 4-CRU ( $\phi = \pi/3$ ).

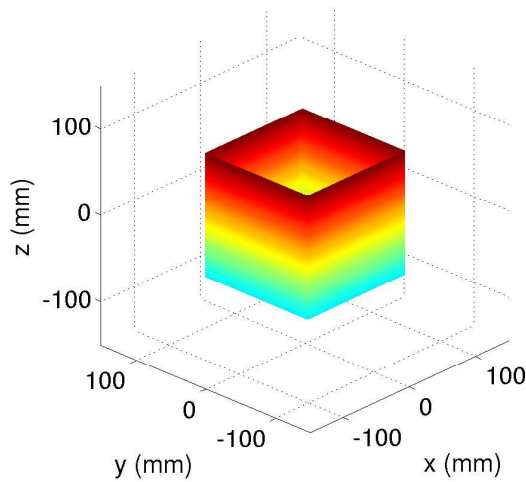


FIG. 3.6 – Espace atteignable cubique du 4-CRU ( $\phi = 0$ ).

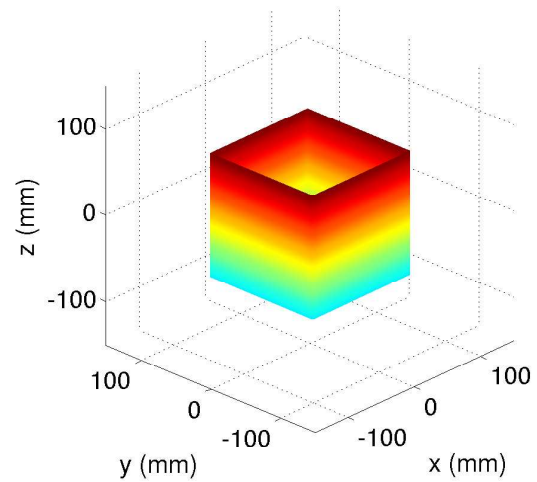


FIG. 3.7 – Espace atteignable cubique du 4-CRU ( $\phi = \pi/3$ ).

### 3.5 Design du prototype

La section précédente a permis de fixer les principales dimensions des pièces du manipulateur : longueurs des membrures, positions des articulations prismatiques, points d'attache à l'effecteur, course des actionneurs, etc. La prochaine étape consiste à déterminer des critères concernant la charge utile à déplacer avec le manipulateur ainsi

que les accélérations auxquelles elle sera soumise. Ces deux critères sont essentiels pour concevoir des pièces suffisamment résistantes (tiges, goupilles...) ainsi que pour choisir des moteurs assez puissants.

Étant donné que l'espace atteignable choisi est relativement petit, il est important que l'effecteur accélère beaucoup afin d'atteindre une vitesse maximale le plus rapidement possible. De ce fait, une accélération de  $3g$  ( $29.43m/s^2$ ) devient l'objectif principal pour le prototype. En ce qui concerne la charge à déplacer, elle est fixée à environ  $50g$ . Ce qui correspond à une situation d'assemblage de composantes électroniques par exemple.

Afin de bien dimensionner les pièces et les moteurs, le prototype a été modélisé sur le logiciel de CAO *Pro/Engineer* puis exporté dans un format supporté par le logiciel de simulation *ADAMS/View*. Ce dernier permet de mener des études dynamiques très importantes sur le modèles. En effet, il est utilisé pour déterminer les forces maximales développées par les actionneurs ainsi que les efforts perçus aux articulations (composantes les plus faibles du prototype). À cet effet, plusieurs trajectoires ont été imposées à l'effecteur dans le but de trouver celle étant la plus "exigeante" pour le manipulateur. De manière générale, les trajectoires choisies sont des sinusoides qui soumettent l'effecteur à des accélérations de  $3g$  aux limites de l'espace atteignable (le cube de  $15cm$  d'arête). Ce choix semble correct puisqu'aux frontières de l'espace de travail, les pattes sont dépliées au maximum (environ  $140$  degrés d'ouverture), ce qui engendre les moments les plus importants dans les pattes. La trajectoire qui sollicite le plus la structure est une oscillation le long d'une diagonale du cube atteignable : du point  $P(-7.5cm, -7.5cm, 7.5cm)$  au point  $Q(7.5cm, 7.5cm, -7.5cm)$ . Ce qui est logique puisque de cette façon, la patte 3 (qui a les plus longues membrures) est ouverte au maximum au point Q. La composante verticale de l'oscillation engendrent donc les moments les plus importants dans cette patte. De plus, il ne faut pas négliger que, dans cette trajectoire, la patte 3 contre les effets inertiels des trois autres pattes.

### 3.5.1 Structure

La majorité des pièces du prototype sont en aluminium 6160-T6 forgé. Les membrures sont des tiges d'aluminium carrées de section  $3/4'' \times 3/4'' \times 1/16''$ , sauf la première



membre de la troisième patte : sa section est de  $1'' \times 1'' \times 1/8''$  pour éviter une trop forte déflexion. Les autres pièces (supports des goupilles, effecteur...) seront usinées dans des blocs d'aluminium avec une machine à commande numérique. Les seules pièces en acier sont les goupilles présentes aux articulations, car ce sont les pièces les plus sollicitées. Elles sont fabriquées avec ce qu'on appelle communément de la "drill rod". Les figures 3.8 et 3.9 montre respectivement une des pattes du manipulateur (avec les tiges, les goupilles et les supports à goupilles) ainsi que son effecteur.

Suivant la démarche présentée à la section précédente, toutes les composantes ont été conçues pour résister aux efforts maximums induits par la trajectoire décrite, et ce, avec un facteur de sécurité d'au moins 3.

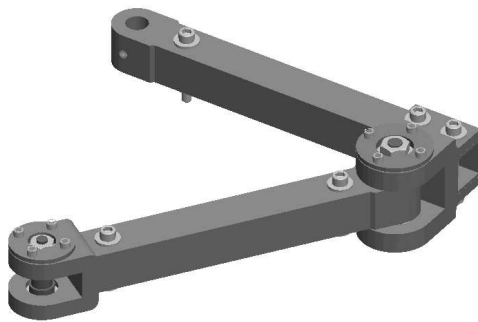


FIG. 3.8 – Une patte du prototype.

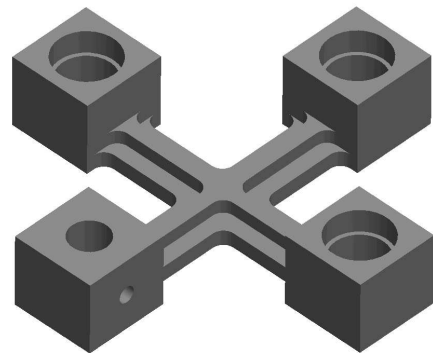


FIG. 3.9 – Effecteur.

### 3.5.2 Actionneurs

Des articulations prismatiques motorisées sont des composantes particulièrement dispendieuses sur le marché. On entreprend donc de concevoir notre propre système d'entraînement des pattes. Le tout comprend, pour chaque patte, un joint linéaire *AccuGlide-Miniature* composé d'une glissière et de deux chariots (voir annexe D). Le choix de deux chariots au lieu d'un est justifié par le fait qu'un seul chariot n'est pas suffisamment résistant. De plus, deux petits chariots de ce type sont plus légers qu'un

seul gros chariot. Ils sont mis en mouvement par une courroie reliée à un moteur rotatif par des poulies (voir figure 3.11). Pour fixer cette courroie aux chariots, des mâchoires (visibles à la figure 3.10) sont usinées avec un profil similaire aux dents de la courroie en question.

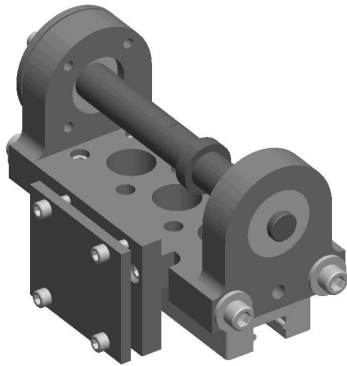


FIG. 3.10 – Chariot, articulation no2 et mâchoire.

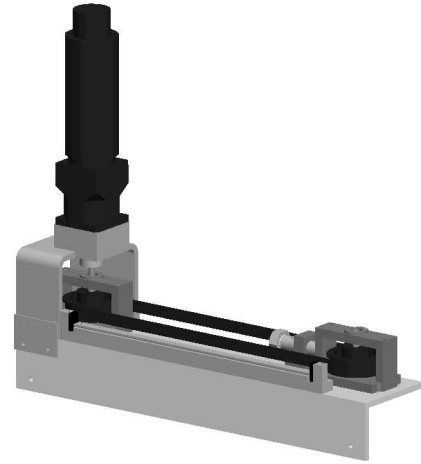


FIG. 3.11 – Moteur, glissière, courroie et poulies.

Le choix de la poulie, de la courroie, du moteur et, si nécessaire, d'un réducteur de vitesse n'est pas trivial. Dans un premier temps, la force nécessaire pour déplacer la partie mobile du joint prismatique (voir annexe C) permet de choisir une courroie appropriée (table 3, p. T29 dans [9]). Cette courroie ne peut cependant pas être utilisée avec n'importe quel type de poulie : un diamètre minimal doit être respecté (table 4, p. T30 dans [9]). De plus, ce diamètre a un effet direct sur le couple et la vitesse que doit avoir le moteur. La somme des moments par rapport à l'axe de l'arbre le montre très bien (voir figure 3.12) :

$$T_m = F_{max} \frac{D_p}{2} + 2(I_p + I_r + I_m r^2) \frac{a_{max}}{D_p}, \quad (3.35)$$

$$\omega_m = \frac{60V_{max}}{2\pi D_p}. \quad (3.36)$$

$T_m$  est le couple produit par le moteur,  $F_{max}$  est la force maximale nécessaire pour déplacer les chariots,  $a_{max}$  est l'accélération maximale vue par les chariots,  $r$  est le rapport de réduction du réducteur de vitesse,  $\omega_m$  est la vitesse de rotation du moteur,

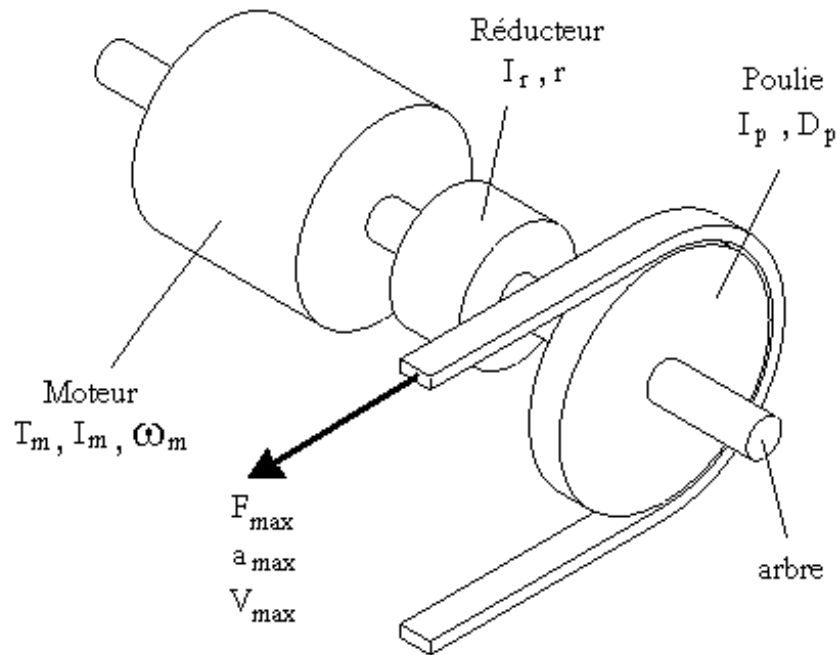


FIG. 3.12 – Schéma de l'ensemble moteur-réducteur-poulie.

$V_{max}$  est la vitesse maximale des chariots et  $D_p$  est le diamètre de la poulie.  $I_p$ ,  $I_r$  et  $I_m$  sont respectivement les inerties de la poulie, du réducteur de vitesse et de rotor du moteur.

L'équation (3.35) peut être utilisée pour optimiser le diamètre de la poulie. En la dérivant par rapport  $D_p$  et égalant le tout à 0, on obtient l'expression du diamètre de la poulie qui engendre le couple minimum que doit fournir par le moteur.

$$D_p = \sqrt{\frac{4(I_p + I_r + I_m r^2) a_{max}}{F_{max}}}. \quad (3.37)$$

Cette étape est très intéressante car en optimisant le diamètre de la poulie, on évite de choisir un moteur trop puissant, et donc, trop cher. Globalement, la méthodologie à suivre est celle-ci. Soit une accélération maximale de  $3g$  de l'effecteur :

1. Choisir une courroie en fonction de la force maximale à exercer sur les chariots.
2. Déterminer (à partir des tables) les caractéristiques que doit avoir la poulie (nombre de dents minimum, diamètre minimum).
3. Calculer le diamètre optimal de la poulie pour minimiser le couple que doit fournir le moteur.

4. Choisir un diamètre de poulie assez près du diamètre optimal tout en respectant la contrainte imposée par la courroie.
5. Calculer la vitesse de rotation maximale engendrée au moteur (à partir du diamètre minimal).
6. Calculer le couple maximal à fournir (à partir du diamètre minimal).
7. Choisir un moteur et, si nécessaire, un réducteur de vitesse pouvant fournir le couple nécessaire à la vitesse maximale.

Suivant cette démarche, une courroie en néoprène de 0.5" de largeur avec un pas de dents de 0.375" est choisie. Elle peut résister à une tension maximale de  $18lbf$ , ce qui est suffisant pour contrer la force de  $70N$  ( $15.7lbf$ ) nécessaire pour faire bouger les chariots de la patte 3 à une accélération maximale de  $3g$  de l'effecteur (voir annexe C). Selon [9], cette courroie nécessite une poulie avec un diamètre minimal de 1.91" (48.5mm) et au moins 16 dents (pour une vitesse de rotation inférieure à  $3500rpm$ ).

En ce qui concerne le moteur, on décide de choisir parmi ceux disponibles au laboratoire. Après étude, il s'avère qu'aucun d'entre eux ne peut satisfaire au critère d'accélération maximale de  $3g$ . On choisit donc le moteur le plus puissant et on procède à l'inverse de la méthodologie, c'est-à-dire qu'on cherche l'accélération maximale pouvant être produite par ce moteur.

Le moteur le plus puissant est le P/N 23SMDC-LCSS de Servo Systems Co. et possède les caractéristiques suivantes (annexe D) :  $55oz - in$  ( $0.389Nm$ ) de couple en continu,  $400oz - in$  ( $2.83Nm$ ) de couple maximal à l'arrêt et une vitesse d'opération à vide de  $6000rpm$ . Ces données permettent de déterminer la vitesse d'opération maximale en continu, soit  $5175rpm$ . Ce moteur sera couplé à un réducteur de vitesse de ratio  $r = 7$  (annexe D) pouvant résister à un couple de  $110lbs - in$  ( $12.5Nm$ ) à une vitesse d'entrée de  $5000rpm$  et dont le rendement  $\eta_r$  est de 0.9. L'ensemble moteur-réducteur peut donc produire un couple de sortie maximal de  $T_{max} = 0.389r\eta_r = 2.45Nm$ . Toutefois, comme le moteur ne sera jamais utilisé en mode "totalement" continu, on peut fixer arbitrairement un couple maximal 1.5 fois plus grand, soit de  $3.68Nm$  (procédure souvent utilisée au laboratoire de robotique de l'Université Laval). Le tout entraînera une poulie de  $53.7mm$  de diamètre ayant 20 dents.

Ces choix de poulie, moteur et réducteur permettront au manipulateur de produire des accélérations de  $2.5g$  à l'horizontale et de  $2g$  à la verticale. L'accélération horizontale (dans le plan  $xy$ ) est déterminée à partir des efforts maximums agissant sur la patte

4 (la plus sollicitée pour un mouvement dans cette direction) et l'accélération selon  $z$ , à partir de ceux de la patte 3. Dans les deux cas, les couples maximums devant être fournis par les moteurs à la sortie du réducteur sont respectivement de  $3.64Nm$  et de  $3.37Nm$  (calculés avec l'équation (3.35)), ce qui est inférieur à  $3.68Nm$ . Quant à la vitesse maximale de déplacement des chariots, elle est limitée par les glissières. Celles-ci supportent des vitesses allant jusqu'à  $3m/s$ , ce qui se traduit par une vitesse de rotation au moteur de  $3734rpm$  (en tenant compte du réducteur). Cette vitesse est largement inférieure aux  $5175rpm$  du moteur et aux  $5000rpm$  du réducteur. Finalement, en ce qui concerne la poulie, son diamètre  $D_p = 53.7mm$  est supérieur à la limite minimale de  $48.5mm$ . Quant à son nombre de dents, bien que la vitesse maximale de  $3734rpm$  soit légèrement supérieure à  $3500rpm$ , on suppose que le fait d'avoir 20 dents au lieu de 16 pourra pallier au dépassement de vitesse (aucune donnée n'est disponible pour des vitesses de rotation supérieures à  $3500rpm$ ).

### 3.5.3 Prototype complet

En somme, le prototype satisfera presque parfaitement aux exigences initiales. L'espace atteignable sera tel que désiré : un cube de  $15cm$  d'arête atteignable sur une plage angulaire de 120 degrés. Au niveau de l'accélération de l'effecteur, bien que les moteurs disponibles ne peuvent pas produire une accélération de  $3g$ , toute les composantes pourront y résister advenant l'achat ultérieur de moteurs plus puissants. La figure 3.13 montre le modèle virtuel du prototype final.

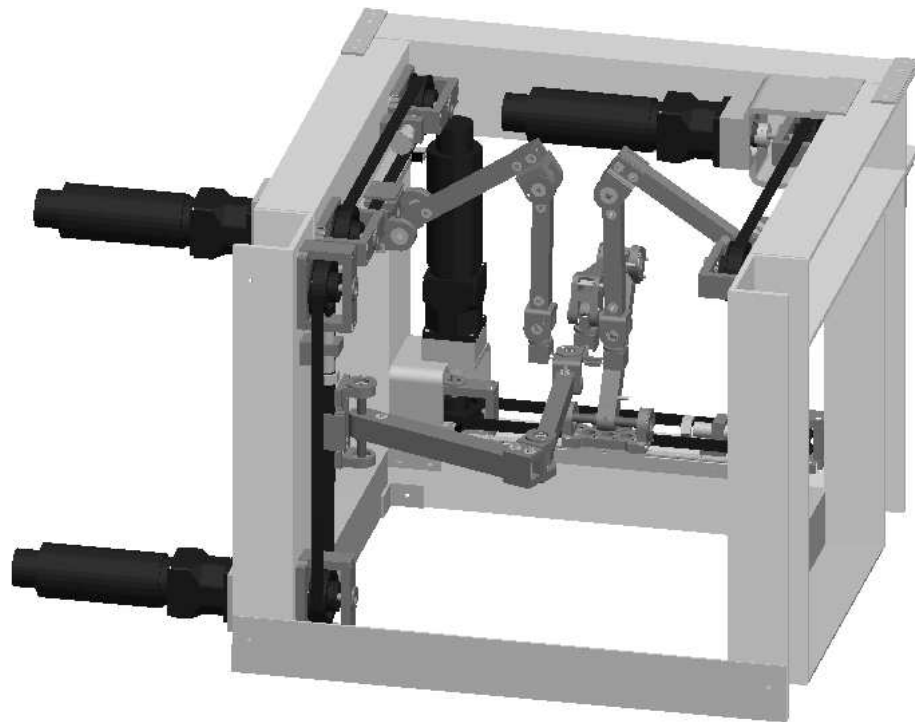


FIG. 3.13 – Prototype du 4-CRU.

# Conclusion

Le but du projet était de concevoir un manipulateur parallèle générant les mouvements de Schönflies. Ceci a été fait après avoir étudié 11 architectures de ce type et sélectionné celle avec les meilleures propriétés. Les prochaines lignes récapitulent l'ensemble des processus d'analyse, de sélection, d'optimisation et de design.

Dans un premier temps, il a été décidé d'évaluer chaque architecture selon trois aspects bien distincts. Les lieux de singularité cinématique et de contrainte consistaient en l'aspect le plus important. La présence de singularité dans un espace de travail n'est pas souhaitable, surtout si elles sont difficiles à contourner. En effet, tout dépendant du type de singularité, le manipulateur peut perdre ou gagner un degré de liberté ou encore perdre sa rigidité. Dans un cas comme dans l'autre, le manipulateur devient soit en partie, soit totalement inutilisable. Parallèlement aux lieux de singularité, la dextérité globale est également un aspect très important à étudier puisqu'elle caractérise la précision moyenne d'un manipulateur dans son espace de travail. Cet espace atteignable fait office de dernier aspect à l'étude. Pour des raisons évidentes, un espace atteignable restreint ou à la forme irrégulière n'est pas intéressant lors des applications pratiques d'un robot.

C'est l'architecture 4- $\underline{P}\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$  (avec 4 actionneurs parallèles) qui a émergé de ce processus de sélection. Du point de vue des singularités, elle offre le net avantage d'avoir une expression analytique de ses lieux singuliers. Qui plus est, le manipulateur est en

position singulière à seulement deux valeurs précises de l'orientation de son effecteur, soit  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Autrement, l'espace de travail est vide de singularités pour toute position  $P(x, y, z)$ . Pour ce qui est de son indice de dextérité globale  $\eta$ , sa valeur de 0.21 est tout à fait acceptable. Quant à son espace atteignable, sa forme convexe le rend plus intéressant à utiliser comparativement au 4- $\ddot{R}\ddot{R}\acute{R}\acute{R}$  par exemple, dont l'espace atteignable concave par endroits rendrait son contrôle plus périlleux.

On a par la suite procédé à une phase d'optimisation. L'architecture a notamment fait l'objet d'une modification majeure : les quatre actionneurs ont été disposés de manière orthogonale plutôt que parallèle, ce qui a amélioré les propriétés cinématiques du manipulateur. Premièrement, l'indice de dextérité globale a plus que doublé, passant de 0.21 à 0.45. De plus, la forme de l'espace atteignable est devenue plus beaucoup conviviale en étant un prisme rectangulaire. Finalement, une nouvelle propriété est apparue : un découplage partiel des actionneurs. Sous certaines conditions, il est possible de contrôler les 3 degrés de liberté en translation en n'utilisant qu'un ou deux actionneurs au lieu des quatre en même temps. Ce qui facilite énormément le contrôle du robot.

Dans la dernière partie du projet, le design du prototype a été fait. Deux objectifs ont été fixés : la plate-forme doit tout d'abord pouvoir se déplacer dans un cube pour une orientation comprise entre  $-\pi/3$  et  $\pi/3$  radians. Elle doit aussi être en mesure de subir des accélérations maximales de  $3g$ . Ce faisant, les dimensions des composantes ont été optimisées pour permettre les débattements requis tout en gardant leurs masses les plus petites possible. Le manipulateur final a donc un espace atteignable cubique de  $15\text{cm} \times 15\text{cm} \times 15\text{cm}$  et les moteurs choisis généreront des accélérations très près de celles désirées : soit de  $2.5g$  dans le plan  $xy$  et de  $2g$  le long de l'axe  $z$ . Notons que pour l'ensemble des pièces à fabriquer, un facteur de sécurité minimal de 3 a été utilisé lors de la conception.



# Bibliographie

- [1] Angeles, J., 2002, “The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators”, *Proc. Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators Workshop*, October 2-4, Quebec City, pp. 159-169.
- [2] Angeles, J., Morozov, A., and Navarro, O., 2000, “A novel manipulator architecture for the production of SCARA motions”, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, April 24-28, San Francisco, pp. 2370-2375.
- [3] Clavel, R., 1988, “Delta, a fast robot with parallel geometry”, *Proc. 18th Int. Symp. Industrial Robots*, Lausanne, pp. 91-100.
- [4] Company, O., Pierrot, F., Shibukawa, T. and Koji, M., 2001, “Four-Degree-of-Freedom parallel Robot” European Patent EP1084802 March 21.
- [5] Gosselin, C.M., 2004, “Mécanique des Manipulateurs GMC-64388 (Notes de cours)”, *Département de Génie Mécanique de l’Université Laval*, Québec.
- [6] Hervé, J.M., 1978, “Analyse structurelle des mécanismes par groupes de déplacements”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 13, pp. 437-450.
- [7] Kong, X. and Gosselin, C.M., 2007, “Type Synthesis of 3T1R 4-DOF Parallel Manipulators Based on Screw Theory”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, April, Vol. 20(2), pp. 181-190.
- [8] Zlatanov, D., Bonev, I. A., and Gosselin, C. M., 2002, “Constraint Singularities as C-Space Singularities”, 8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics (ARK 2002), Caldes de Malavella, Spain, June 24-28.

- [9] *Handbook Of Timing Belts, Chains and Friction Drives - catalog D210*, Stock Drive Products Sterling Instrument, New York, 1993
- [10] <http://www.sdp-si.com/>
- [11] <http://trueforce.com/Articles/RobotHistory.htm>
- [12] <http://www.roboticsonline.com/public/articles/archivedetails.cfm?id=518>
- [13] <http://www.danahermotion.com/>

# Annexe A

## Contraintes géométriques associées aux architectures 3T1R

Cette annexe résume les contraintes d'assemblage de toutes les architectures c'est-à-dire la position et l'orientation des articulations ainsi que les suggestions concernant celles-ci.

Les manipulateurs 3T1R sont représentés schématiquement à la figure ci-dessous. Les descriptions qui suivent font toutes référence à cette figure. Dans ces descriptions, on référera aux pattes d'une architecture par un indice  $i = A, B, C, D$ . Sauf indications contraires, l'usage de cet indice inclura toutes les pattes. De plus, la notation suivante est utilisée pour les articulations (dans cette annexe ainsi que dans tout le document) :

- R (rotoïde), P (prismatique), U (universel) et C (cylindrique),
- Les articulation de type R avec le même nombre d'accent sont parallèles (ex. :  $4-\underline{\ddot{R}}\ddot{R}\ddot{R}\ddot{R}$ ),
- Les articulation de type R dont le nombre d'accent est différent ne sont pas *nécessairement* perpendiculaires,
- Une lettre soulignée indique que l'articulation est actionnée. Toutefois, dans le cas d'une articulation cylindrique, une lettre C soulignée signifie que c'est le degré de liberté en translation qui est contrôlé. Dans le même ordre d'idée, c'est la première articulation rotoïde qui est actionnée lorsque qu'une lettre U est soulignée (joint de cardan).

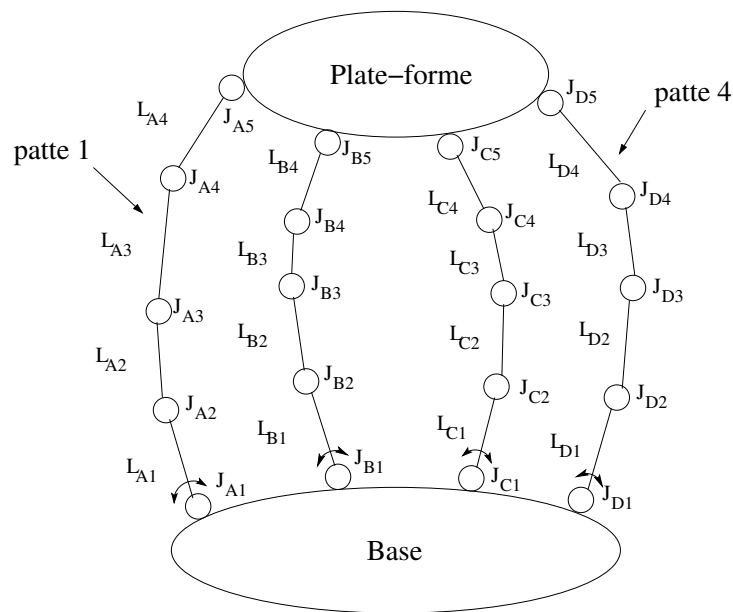


FIG. A.1 – Représentation schématique des architectures 3T1R.

## A.1 4-ŘŘ'Ř'Ř'

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i1,2,5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i3,4}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i2,3}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i4,5}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

## A.2 4-ŘŘ'Ř'Ř'

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i1,4,5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i2,3}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i1,2}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i3,4}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

## A.3 4-ŘŘ'Ř'Ř'

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i1,2,3}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i4,5}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i3,4}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

## A.4 4-PŘŘŘŘ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i2,5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i3,4}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i2,3}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i4,5}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont tous parallèles ou tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i2,5}$ .

## A.5 4-PŘŘŘŘ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i2,3}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i4,5}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i3,4}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont tous parallèles ou tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i4,5}$ .

## A.6 4-PŘŘŘŘ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i4,5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i2,3}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i3,4}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

- Les articulations  $J_{i1}$  sont tous parallèles ou tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i2,5}$ .

## A.7 4-PRRRĚ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i2,3,4}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i2}$  ne sont ni tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i5}$  ni tous parallèles à un même plan.
- Les axes des articulations  $J_{i1}$  ne sont pas tous perpendiculaires à ceux des articulations  $J_{i2}$ .
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i4,5}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont parallèles aux articulations  $J_{i5}$ .

## A.8 4-PRRĚR

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i2}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i3,4,5}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i3}$  ne sont ni tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i2}$  ni tous parallèles à un même plan.
- Les axes des articulations  $J_{i1}$  ne sont pas tous perpendiculaires à ceux des articulations  $J_{i3}$ .
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i2,3}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont parallèles aux articulations  $J_{i2}$ .

## A.9 4-ŘŘŘŘŘ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i1,5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i2,3,4}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i3}$  ne sont pas tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i2}$ .
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i1,2}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.
- Les articulations  $J_{i4,5}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

## A.10 4-ŘŘŘŘŘ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i1,2}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i3,4,5}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i5}$  ne sont ni tous perpendiculaires aux axes des articulations  $J_{i1}$  ni tous parallèles à un même plan.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :

- Les articulations  $J_{i2,3}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

## A.11 4-ŘŘŘŘŘ

Contraintes générales :

- Les axes des articulations  $J_{i4,5}$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i1,2,3}$  d'une même patte  $i$  sont parallèles.
- Les axes des articulations  $J_{i1}$  ne sont pas tous parallèles.
- Les articulations  $J_{i1}$  sont actionnés.

Suggestions :



- Les articulations  $J_{i3,4}$  d'une patte  $i$  forment un articulation de type U.

# Annexe B

## Étude cinématique des 9 autres manipulateurs

Cette annexe inclut l'étude cinématique complète des architectures 3T1R qui ne sont pas présentées dans le corps du mémoire. Le développement mathématique menant aux solutions des problèmes géométriques inverses ainsi qu'aux équations de vitesse sont présentés avec les graphiques correspondants : singularités, espace atteignable et dextérité.

## B.1 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ (4- $\underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{R}}$ )

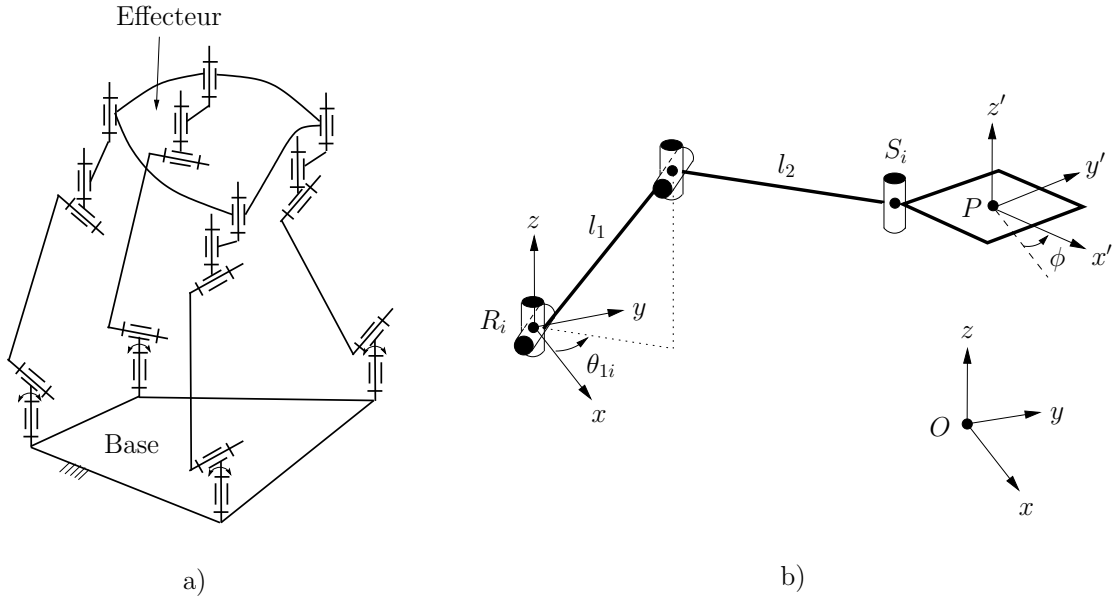


FIG. B.1 – a) Manipulateur 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}$ , b) Chaîne cinématique  $\underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{R}}$ .

### B.1.1 PGI et espace atteignable

La solution du PGI d'une chaîne  $\underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{R}}$  s'obtient exactement de la même manière que pour une chaîne  $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}}$  (voir chapitre 2). On rappelle brièvement que :

$$l_2^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i}). \quad (\text{B.1})$$

Notons cependant que le vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$  change légèrement puisqu'il a maintenant une composante verticale :

$$\mathbf{v}_{1i} = \begin{bmatrix} \sqrt{l_1^2 - a_{zi}^2} \cos \theta_{1i} \\ \sqrt{l_1^2 - a_{zi}^2} \sin \theta_{1i} \\ a_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1i} \cos \theta_{1i} \\ d_{1i} \sin \theta_{1i} \\ a_{zi} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

où la variable  $d_{1i}$  représente la norme de la projection du vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$  dans le plan  $xy$ . Cette modification change évidemment l'expression du terme  $F_i$ , qui devient :

$$F_i = \frac{\|\mathbf{a}_i\|^2 + l_1^2 - l_2^2 - a_{zi}^2}{2\sqrt{l_1^2 - a_{zi}^2}}. \quad (\text{B.3})$$

Prenant note de cette modification, la solution du PGI s'écrit comme aux équations (2.10) et (2.11).

De ces équations, on retient la contrainte permettant d'étudier l'espace atteignable du manipulateur, soit :

$$a_{xi}^2 + a_{yi}^2 - F_i^2 > 0. \quad (\text{B.4})$$

On utilise l'équation ci-dessus pour obtenir l'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur (voir figure B.2). Les points d'attache au sol et à l'effecteur sont les mêmes que pour le 4-RUU (voir table B.1), alors que la longueurs des membrures sont inversées.

TAB. B.1 – Longueur des membrures du 4-UUR

| Paramètres | Valeur |
|------------|--------|
| $l_1$      | 175 mm |
| $l_2$      | 90 mm  |

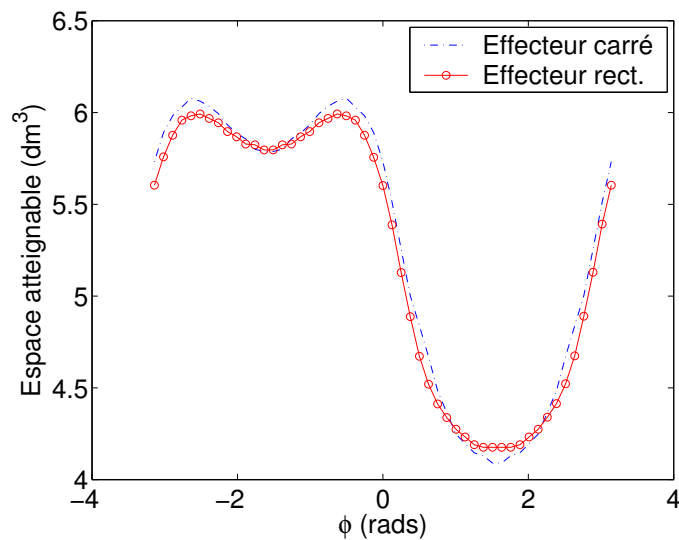


FIG. B.2 – Espace atteignable du 4-UUR en fonction de l'orientation de l'effecteur.

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -3 et 0 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-UUR.

### B.1.2 Matrices jacobienne et lieux de singularité

Pour obtenir les équations de vitesse de l'architecture 4-UUR, on dérive tout d'abord l'équation (B.1) par rapport au temps :

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\mathbf{v}}_{1i}). \quad (\text{B.5})$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.6})$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

La dérivée par rapport au temps du vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$  est :

$$\dot{\mathbf{v}}_{1i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{1i}}{\partial a_z} \cos \theta_{1i} \\ \frac{\partial d_{1i}}{\partial a_z} \sin \theta_{1i} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{z} + \begin{bmatrix} -d_{1i} \sin \theta_{1i} \\ d_{1i} \cos \theta_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.8})$$

où

$$\frac{\partial d_{1i}}{\partial a_z} = \frac{\partial}{\partial a_z} \sqrt{l_1^2 - (a_{zi})^2} = \frac{-a_{zi}}{\sqrt{l_1^2 - (a_{zi})^2}} = \frac{-a_{zi}}{d_{1i}}. \quad (\text{B.9})$$

On peut maintenant écrire l'équation (B.5) en fonction de  $\mathbf{v}_{1i}$  comme suit :

$$\dot{\mathbf{v}}_{1i} = \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{1i} \dot{z} + \mathbf{E} \mathbf{v}_{1i} \dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.10})$$

où

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{-a_{zi}}{d_{1i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a_{zi}}{d_{1i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{zi}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{1i} \dot{z} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} \dot{\phi} = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{1i} \dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.12})$$

ou encore

$$(\mathbf{v}_{2i} - \mathbf{w}_i)^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} \dot{\phi} = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{1i} \dot{\theta}_{1i} \quad (\text{B.13})$$

avec

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{1i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

L'expression de la jacobienne devient donc :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{w}_1)^T & \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{01} \\ (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{w}_2)^T & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{02} \\ (\mathbf{v}_{23} - \mathbf{w}_3)^T & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{03} \\ (\mathbf{v}_{24} - \mathbf{w}_4)^T & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

### B.1.2.1 Singularités de type 1

Les lieux de singularité de type 1 du 4-UUR sont similaires à ceux du 4-RUU : 2 situations peuvent faire en sorte qu'un des termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{K}$  soit nul. Dans la première situation, un vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$  devient parallèle à l'axe  $z$  et, par le fait même, perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{E} \mathbf{v}_{2i}$  (qui est défini dans le plan  $xy$ ). Le manipulateur se trouve alors à une limite en  $z$  de son espace atteignable. La seconde situation singulière survient lorsque tous les vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  et  $\mathbf{v}_{1i}$  d'une patte sont dans un plan perpendiculaire au plan  $xy$ . Le vecteur  $\mathbf{E} \mathbf{v}_{1i}$  est alors perpendiculaire à ce plan et au vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$ . Cette situation correspond à une limite en  $xy$  de l'espace atteignable du manipulateur. La figure B.3 montre un exemple d'espace atteignable du 4-UUR où l'on peut voir les limites discutées ci-dessus.

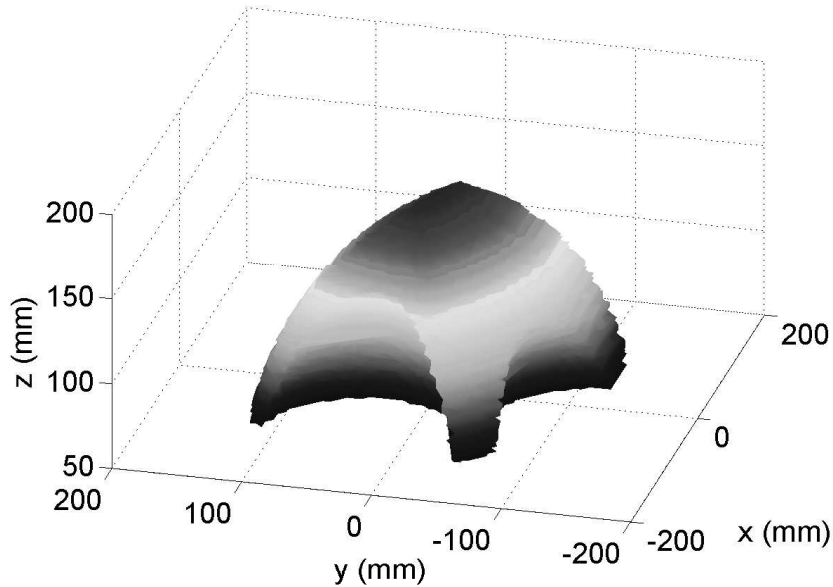


FIG. B.3 – Espace atteignable du 4-UUR (effecteur rectangulaire et  $\phi = 0$ ).

Tout comme pour le 4-RUU, la forme concave de l'espace de travail peut jouer en

sa défaveur lors de la sélection de l'architecture.

### B.1.2.2 Singularités de type 2

Le plan horizontal  $z = 0$  constitue un lieu de singularité de type 2. En effet, lorsque l'effecteur est à ce niveau, la composante  $z$  des vecteurs  $\mathbf{v}_{1i}$  est nulle. Le scalaire  $\mathbf{v}_{2i}\mathbf{F}_i\mathbf{v}_{1i}$  est donc nul puisque les 2 premiers termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{F}$  sont aussi des 0 ( $a_{zi} = 0$ ). Le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  étant défini dans un plan parallèle au plan  $xy$  (composante en  $z$  nulle), la troisième colonne de la matrice  $\mathbf{J}$  est donc composée uniquement de 0, ce qui annule le déterminant de la matrice. Par ailleurs, dans la même veine que pour le 4-RUU, si les vecteurs  $\mathbf{v}_{1i}$  deviennent tous verticaux (parallèles à l'axe  $z$ ), le manipulateur est en position singulière puisque les deux premières colonnes de la matrice sont nulles. Les figures B.4 à B.7 montrent très clairement le plan singulier ainsi que les autres lieux de singularité.

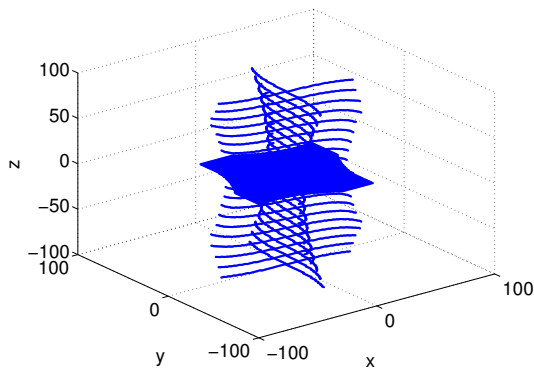


FIG. B.4 – Lieux de singularité du 4-UUR (effecteur carré,  $\phi = 0$ ).

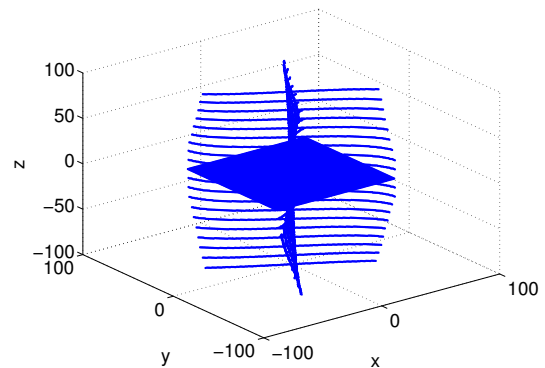


FIG. B.5 – Lieux de singularité du 4-UUR (effecteur carré,  $\phi = -\pi/2$ ).

Comme le laissent entrevoir ces figures, un effecteur carré n'est aucunement approprié pour ce manipulateur. En effet, l'espace de travail étant divisé en 8, cela limite la mobilité de l'effecteur à un seul cadran (peu importe l'orientation de l'effecteur). Cependant, en optant pour un effecteur rectangulaire, il devient alors possible d'éviter les singularités. Toutefois, l'espace de travail peut être relativement restreint dépendant de l'orientation de l'effecteur.

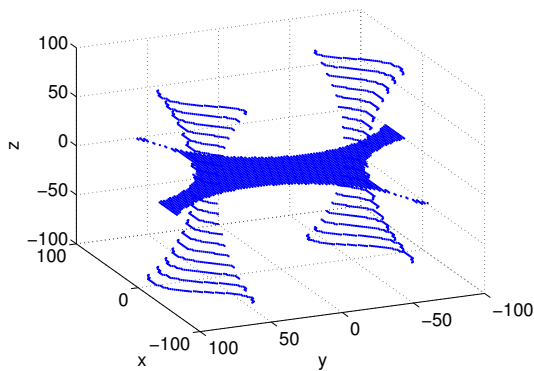


FIG. B.6 – Lieux de singularité du 4-URR (effecteur rect. et  $\phi = 0$ ).

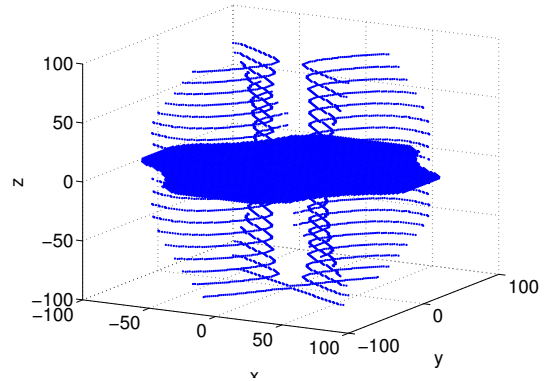


FIG. B.7 – Lieux de singularité du 4-URR (effecteur rect. et  $\phi = -\pi/2$ ).

### B.1.3 Singularités de contrainte

Comme expliqué dans les sections précédentes, l'étude des singularités de contrainte ce fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs sont tout simplement les vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$ . Mathématiquement, il faut donc vérifier que :

$$\mathbf{v}_{2i} \times \mathbf{v}_{2j} = \mathbf{0} \quad (\text{B.16})$$

pour  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4$  et  $i \neq j$ . Dans le cas d'un effecteur rectangulaire, il n'y a aucune singularité de contrainte.

### B.1.4 Dextérité

Comme les manipulateurs étudiés ont 4 degrés de liberté, une dextérité semi-globale est utilisée pour évaluer la capacité des manipulateurs à effectuer des mouvements précis. Le graphe de la figure B.8 présente l'évolution de la dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  en fonction de l'élévation et de l'orientation de l'effecteur. On remarque que la dextérité devient nulle pour toute valeur de  $\phi$  lorsque l'effecteur est positionné sur le plan  $z = 0$ . Ce qui est tout à fait normal étant donné que ce plan constitue une configuration singulière du manipulateur.

Afin de comparer l'architecture 4-URR avec les autres, la dextérité globale a aussi



été calculée (pour l'effecteur rectangulaire) : 0.2058. Cette valeur de dextérité globale est jugée satisfaisante pour les fins du manipulateur.

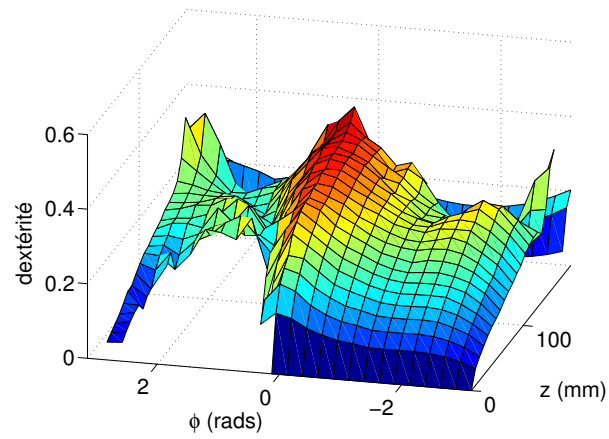


FIG. B.8 – Dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  du 4-URR en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire).

## B.2 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ (4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{U}\check{R}$ )

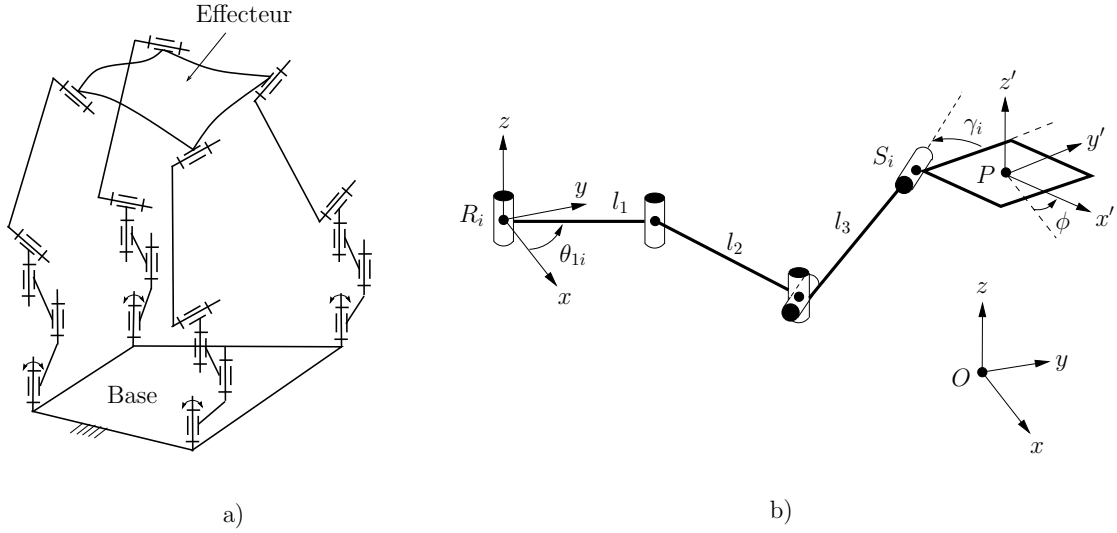


FIG. B.9 – a) Manipulateur 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique  $\underline{\check{R}}\check{R}\check{U}\check{R}$ .

### B.2.1 PGI et espace atteignable

Définissons tout d'abord deux vecteurs :

$$\mathbf{v}_{1i} = [l_1 \cos \theta_{1i}, l_1 \sin \theta_{1i}, 0]^T, \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{v}_{3i} = [\sqrt{l_3^2 - a_{zi}^2} \cos(\phi + \gamma), \sqrt{l_3^2 - a_{zi}^2} \sin(\phi + \gamma), a_{zi}]^T \quad (\text{B.18})$$

$$= [d_{3i} \cos(\phi + \gamma), d_{3i} \sin(\phi + \gamma), a_{zi}]^T. \quad (\text{B.19})$$

On exprime ensuite le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  en fonction des autres vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2i} &= \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{3i} \\ &= \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{3i} \\ &= \mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{1i}, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

où  $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{3i}$ . La norme du vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  étant la longueur de la deuxième membrure ( $l_2$ ), on peut écrire :

$$l_2^2 = (\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{1i})^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{1i}). \quad (\text{B.21})$$

En procédant similairement aux cas du 4- $\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{U}}$  et 4- $\underline{\text{U}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$ , on obtient une équation à résoudre pour  $\theta_{1i}$  :

$$b_{xi} \cos \theta_{1i} + b_{yi} \sin \theta_{1i} = \frac{\|\mathbf{b}_i\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} = F_i, \quad (\text{B.22})$$

dont les solutions sont :

$$t_{1i_{1,2}} = \frac{b_{yi} \pm \sqrt{b_{xi}^2 + b_{yi}^2 - F_i^2}}{(b_{xi} + F_i)}, \quad (\text{B.23})$$

avec

$$\theta_{1i_{1,2}} = 2 \arctan(t_{1i_{1,2}}). \quad (\text{B.24})$$

Des ces équations, on retient la contrainte permettant d'étudier l'espace atteignable du manipulateur, soit :

$$b_{xi}^2 + b_{yi}^2 - F_i^2 > 0. \quad (\text{B.25})$$

On utilise l'équation ci-dessus pour obtenir l'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur (voir figure B.10). Notons que les points d'attache à la base et à l'effecteur demeurent les mêmes que pour les architectures 4-RUU et 4-UUR. Quant à l'angle  $\gamma_i$  et aux longueurs des membrures utilisées, ils sont définis aux tables B.2 et B.3.

TAB. B.2 – Orientation du dernier joint des pattes du 4-RRUR

| i | $\gamma$ (rads) |
|---|-----------------|
| 1 | $\pi/4$         |
| 2 | $-\pi/4$        |
| 3 | $5\pi/4$        |
| 4 | $3\pi/4$        |

TAB. B.3 – Longueur des membrures du 4-RRUR

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 60 mm  |
| $l_2$     | 60 mm  |
| $l_3$     | 150 mm |

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -0.5 et 2 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-RRUR.

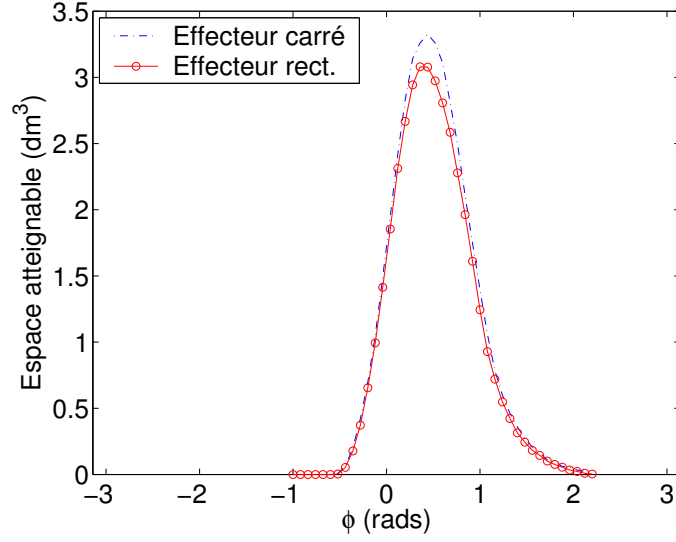


FIG. B.10 – Espace atteignable du 4- $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{R}}$  en fonction de l'orientation de l'effecteur.

## B.2.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

On dérive l'équation (B.21) par rapport au temps :

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{3i})^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\mathbf{v}}_{1i} - \dot{\mathbf{v}}_{3i}). \quad (\text{B.26})$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.27})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{1i} = \mathbf{E}\mathbf{v}_{1i}\dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.28})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{3i} = \mathbf{F}\mathbf{v}_{3i}\dot{z} + \mathbf{E}\mathbf{v}_{3i}\dot{\phi}, \quad (\text{B.29})$$

où

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{-a_{zi}}{d_{3i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a_{zi}}{d_{3i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{zi}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F}\mathbf{v}_{3i}\dot{z} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i}\dot{\phi} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{v}_{3i}\dot{\phi} = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{v}_{1i}\dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.31})$$

ou encore

$$(\mathbf{v}_{2i} - \mathbf{w}_i)^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{v}_{3i})\dot{\phi} = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{v}_{1i}\dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.32})$$

où

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{3i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.33})$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{w}_1)^T & (\mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{01} + \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{31}) \\ (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{w}_2)^T & (\mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{02} + \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{32}) \\ (\mathbf{v}_{23} - \mathbf{w}_3)^T & (\mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{03} + \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{33}) \\ (\mathbf{v}_{24} - \mathbf{w}_4)^T & (\mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{04} + \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{34}) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{14} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

### B.2.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$ . Dans cette situation, le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  en question est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{E} \mathbf{v}_{1i}$ , ce qui annule un terme de la matrice. Le manipulateur est alors à une limite horizontale (en  $xy$ ) de son espace atteignable. La figure B.11 montre ces limites de l'espace de travail du 4- $\check{\text{R}}\check{\text{R}}\check{\text{U}}\check{\text{R}}$  pour un effecteur orienté à  $\phi = \pi/4$ .

Cette forme d'espace atteignable est très peu intéressante puisqu'elle restreint beaucoup la mobilité du manipulateur pour de faibles valeurs de  $z$ .

### B.2.2.2 Singularités de type 2

Le plan horizontal  $z = 0$  constitue un lieu de singularité de type 2 que l'on peut expliquer de la même manière que pour le 4- $\underline{\text{U}}\text{UR}$ . Dans ce plan, la composante  $z$  du vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$  est nulle tout comme les 2 premiers termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{F}$ . Le scalaire  $\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{1i}$  est alors égal à 0 pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . La matrice  $\mathbf{J}$  a donc une colonne de 0 et son déterminant est nul. De plus, si les vecteurs  $\mathbf{v}_{3i}$  deviennent tous verticaux (parallèles à l'axe  $z$ ), leurs composantes  $x$  et  $y$  sont nulles et les scalaires  $\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{3i}$  le sont également. La troisième colonne de la matrice est alors composée uniquement de zéros,

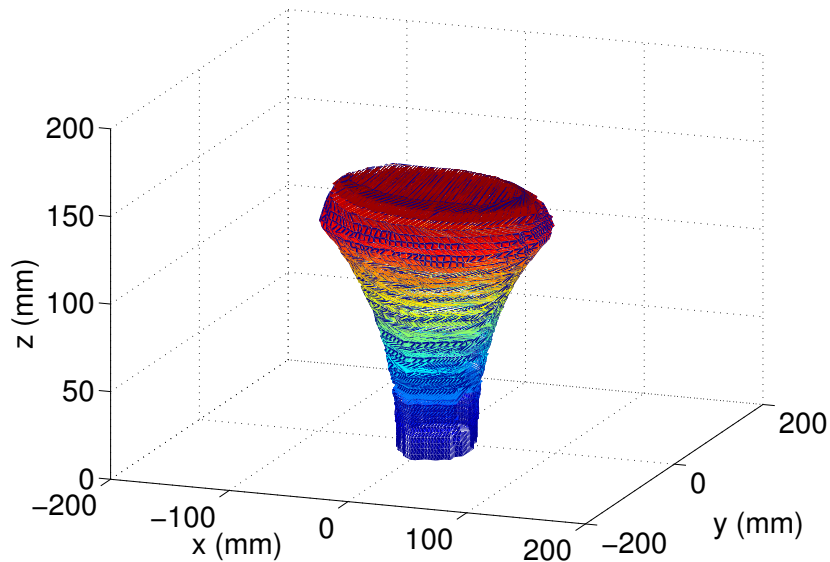


FIG. B.11 – Espace atteignable du 4- $\ddot{R}\ddot{R}\dot{U}\dot{R}$  (effecteur rectangulaire et  $\phi = \pi/4$ ).

ce qui représente également une situation singulière. Les figures B.12 à B.15 montrent très clairement ce plan singulier ainsi que les autres lieux de singularité.

Comme pour le 4- $\underline{R}\underline{U}\underline{U}$  et le 4- $\underline{U}\underline{U}\underline{R}$ , un effecteur carré n'est pas du tout approprié pour ce manipulateur. En effet, l'espace de travail étant divisé en 8, cela limite la mobilité de l'effecteur à un seul cadran (peu importe l'orientation de l'effecteur). Un effecteur rectangulaire éloigne les singularités en position centrale, mais celles-ci se resserrent rapidement avec une rotation de l'effecteur. Ce qui offre un espace de travail relativement restreint.

### B.2.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs sont les projections dans le plan horizontal de chaque vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$ , que l'on nomme  $\mathbf{v}_{3i_{xy}}$ . Mathématiquement, il faut donc vérifier que :

$$\mathbf{v}_{3i_{xy}} \times \mathbf{v}_{3j_{xy}} = \mathbf{0} \quad (\text{B.36})$$

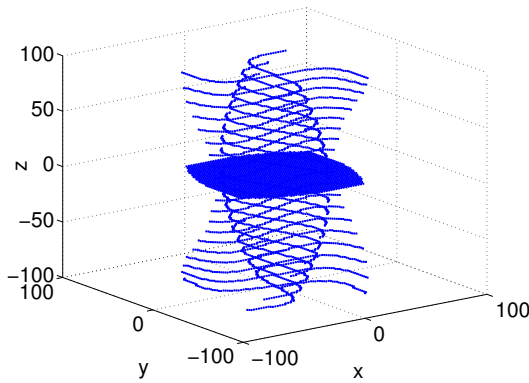


FIG. B.12 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}U\check{R}$  (effecteur carré,  $\phi = 0$ ).

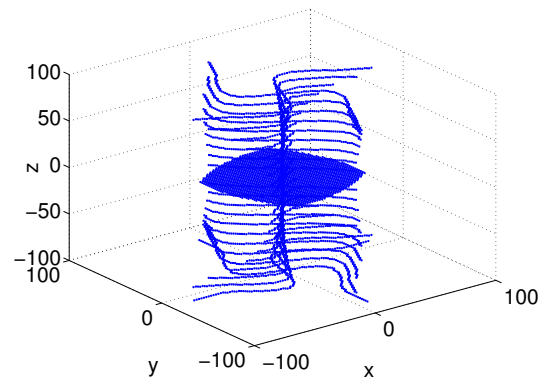


FIG. B.13 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}U\check{R}$  (effecteur carré,  $\phi = \pi/4$ ).

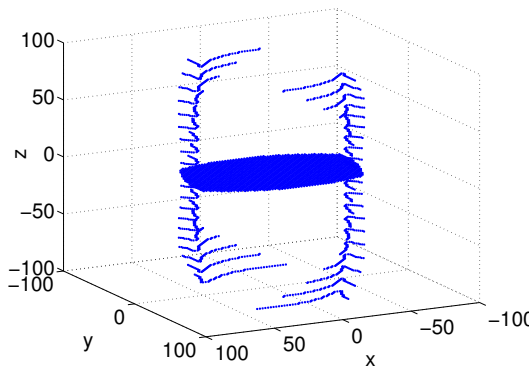


FIG. B.14 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}U\check{R}$  (effecteur rect. et  $\phi = 0$ ).

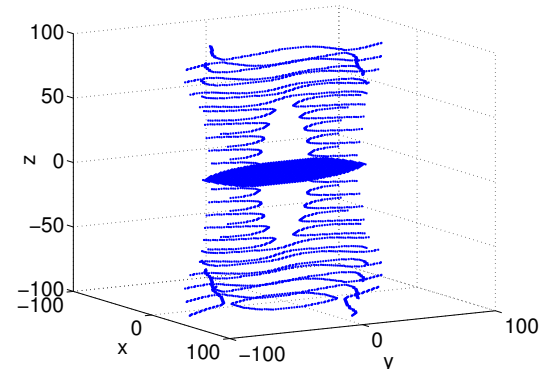


FIG. B.15 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}U\check{R}$  (effecteur rect. et  $\phi = \pi/4$ ).

pour  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4$  et  $i \neq j$ . Dans le cas d'un effecteur rectangulaire, il n'y a aucune singularité de contrainte.

## B.2.4 Dextérité

Comme les manipulateurs étudiés ont 4 degrés de liberté, une dextérité semi-globale est utilisée pour évaluer la capacité des manipulateurs à effectuer des mouvements précis. Le graphe de la figure B.16 présente l'évolution de la dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  en fonction de l'élévation et de l'orientation de l'effecteur. On remarque que la dextérité devient nulle pour toute valeur de  $\phi$  lorsque l'effecteur est positionné sur

le plan  $z = 0$ . Ce qui est tout à fait normal étant donné que ce plan constitue une configuration singulière du manipulateur.

Afin de comparer l'architecture  $4\text{-}\ddot{R}\ddot{R}U\dot{R}$  avec les autres, la dextérité globale a aussi été calculée (pour l'effecteur rectangulaire) : 0.2050. Cette valeur de dextérité globale est jugée satisfaisante pour les fins du manipulateur.

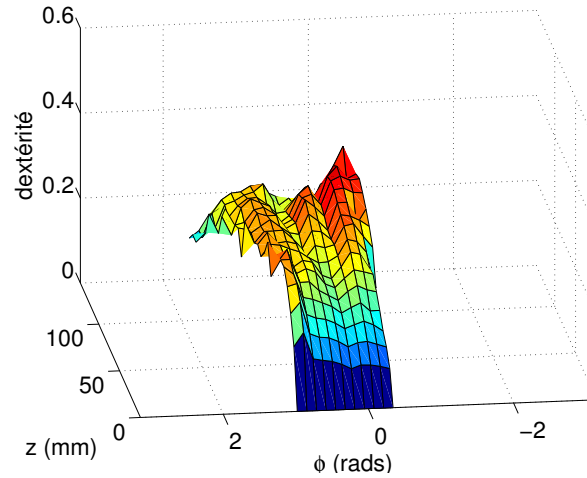


FIG. B.16 – Dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  du  $4\text{-}\ddot{R}\ddot{R}U\dot{R}$  en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire).



### B.3 4-P $\ddot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ (4-P $\underline{U}$ U)

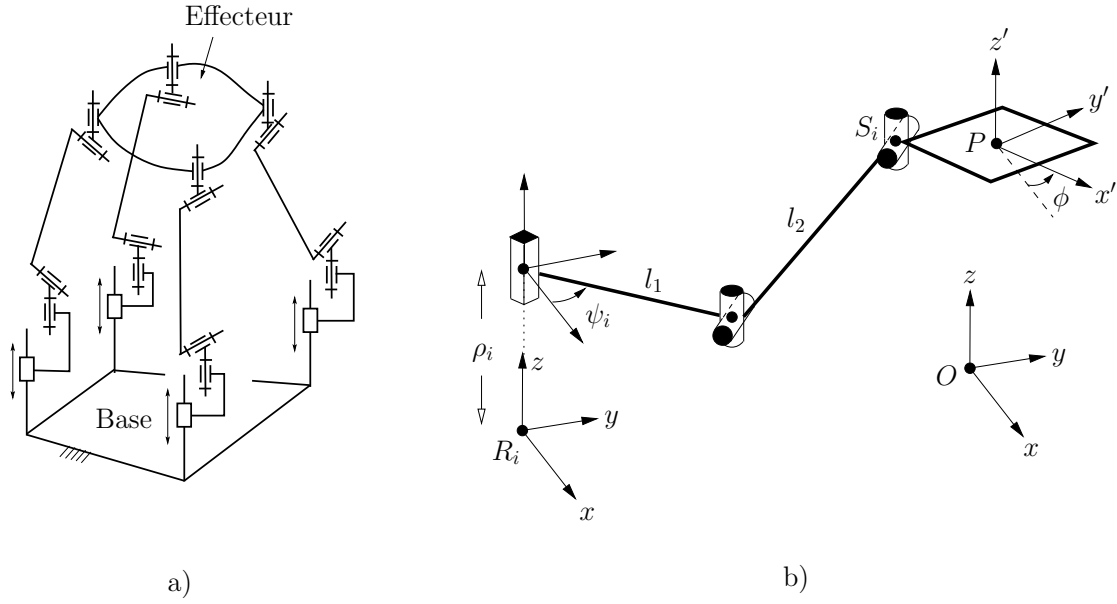


FIG. B.17 – a) Manipulateur 4-P $\ddot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ , b) Cha\u00eene cin\u0309matique  $\underline{P}\underline{U}\underline{U}$ .

#### B.3.1 PGI et espace atteignable

Pour obtenir le PGI, on d\u0309bute par exprimer la norme du vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  en fonction des autres vecteurs :

$$\begin{aligned}
 l_2^2 &= (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i \mathbf{k})^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i \mathbf{k}) \\
 &= (\mathbf{b}_i - \rho_i \mathbf{k})^T (\mathbf{b}_i - \rho_i \mathbf{k}) \\
 &= \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \rho_i^2 \mathbf{k}^T \mathbf{k} - 2\rho_i \mathbf{b}^T \mathbf{k} \\
 &= \mathbf{b}^T \mathbf{b} + \rho_i^2 - 2\rho_i a_{zi},
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

o\u00f9  $\rho_i$  est la coordonn\u0309e articulaire des chaque patte (d\u0309placement lin\u0309aire d'un joint prismatique),  $\mathbf{k}$  est le vecteur unitaire vertical  $[0, 0, 1]^T$  et  $v_{1i} = [l_1 \cos \psi_i, l_1 \sin \psi_i, 0]^T$ . On r\u0309\u0309crit ensuite la derni\u0309re \u0309quation comme ceci :

$$\rho_i^2 - (2a_{zi})\rho_i - l_2^2 + \|\mathbf{b}_i\|^2 = 0, \tag{B.38}$$

qui est une fonction quadratique de la variable  $\rho_i$ , l'inconnue que l'on cherche. Les solutions de cette \u0309quation sont donc :

$$\rho_{i,1,2} = a_{zi} \pm \sqrt{a_{zi}^2 + l_2^2 - \|\mathbf{b}_i\|^2}. \tag{B.39}$$

De ces équations, on retient la contrainte permettant d'étudier l'espace atteignable du manipulateur, soit :

$$a_{z_i}^2 + l_2^2 - \|\mathbf{b}_i\|^2 > 0. \quad (\text{B.40})$$

Par ailleurs, comme les actionneurs sont tous parallèles à l'axe  $z$ , l'espace atteignable pourrait théoriquement être infini dans cette direction. Il faut donc imposer une limite articulaire à chacun des joints prismatiques de manière à avoir un espace atteignable fini. On choisit arbitrairement un débattement maximum de 30cm pour ces joints. En combinant cette limite articulaire avec l'équation de contrainte mentionnée plus haut, on peut obtenir l'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur (voir figure B.18). Notons que les points d'attache à la base et à l'effecteur demeurent les mêmes que pour les architectures que le 4-RUU. Quant à l'angle  $\psi_i$  et aux longueurs des membrures utilisées, ils sont définis aux tables B.4 et B.5.

TAB. B.4 – Orientation de la première membrure des pattes du 4-PUU

| i | $\psi$ (rads) |
|---|---------------|
| 1 | $3\pi/4$      |
| 2 | $\pi/4$       |
| 3 | $-\pi/4$      |
| 4 | $5\pi/4$      |

TAB. B.5 – Longueur des membrures du 4-PUU

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 55 mm  |
| $l_2$     | 190 mm |

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -1 et 2.5 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-PUU.

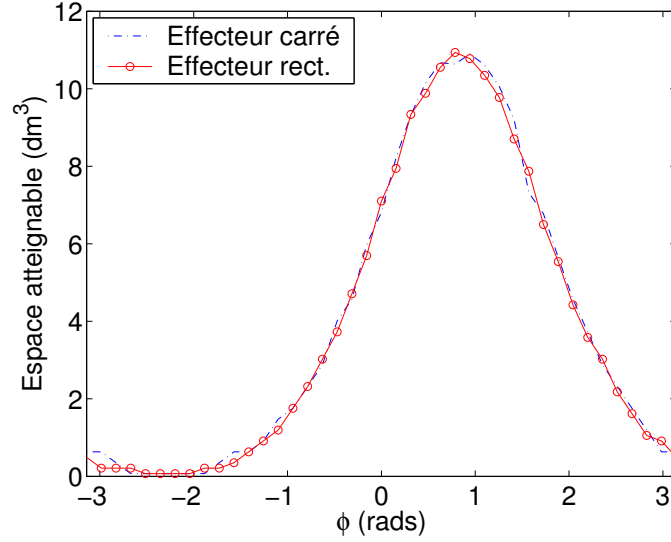


FIG. B.18 – Espace atteignable du 4-PUU en fonction de l'orientation de l'effecteur.

### B.3.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

On dérive l'équation (B.37) par rapport au temps :

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i\mathbf{k})^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\rho}_i\mathbf{k}). \quad (\text{B.41})$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.42})$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.43})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} \dot{\phi} = \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k} \dot{\rho}_i. \quad (\text{B.44})$$

L'expression de la jacobienne devient donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T & \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{01} \\ \mathbf{v}_{22}^T & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{02} \\ \mathbf{v}_{23}^T & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{03} \\ e\mathbf{v}_{24}^T & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.45})$$

### B.3.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  est parallèle au plan  $xy$  (horizontal). Dans cette situation, le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  en question est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{k}$ , ce qui annule un terme de la matrice. Le manipulateur est alors à une limite horizontale de son espace atteignable. La figure B.19 montre ces limites de l'espace de travail du 4-PUU pour un effecteur orienté à  $\phi = 0$ .

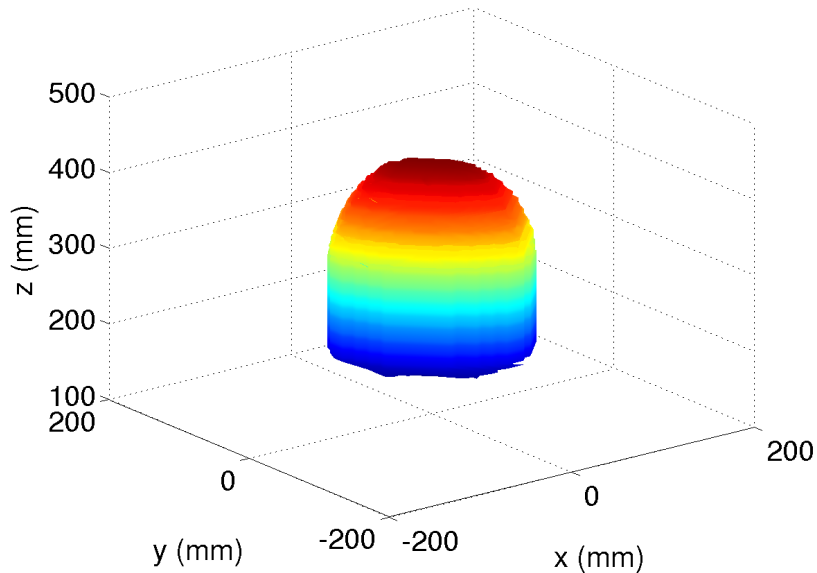


FIG. B.19 – Espace atteignable du 4-PUU (effecteur rectangulaire et  $\phi = 0$ ).

On a ici un espace atteignable très pratique du fait qu'il est convexe et, de surcroît, assez régulier.

### B.3.2.2 Singularités de type 2

Contrairement aux premiers mécanismes, il n'est pas évident de déduire les lieux de singularité du 4-PUU par une simple observation de la matrice  $\mathbf{J}$ . On peut toutefois obtenir une représentation 3D complète des singularités puisque celles-ci sont indépendantes de la position en  $z$  de l'effecteur (les 4 actionneurs sont verticaux). Les graphiques qui suivent montrent ces lieux de singularité en fonction des coordonnées  $x$ ,  $z$  et  $\phi$ .

Comme le laissent entrevoir ces figures, un effecteur carré n'est aucunement appro-

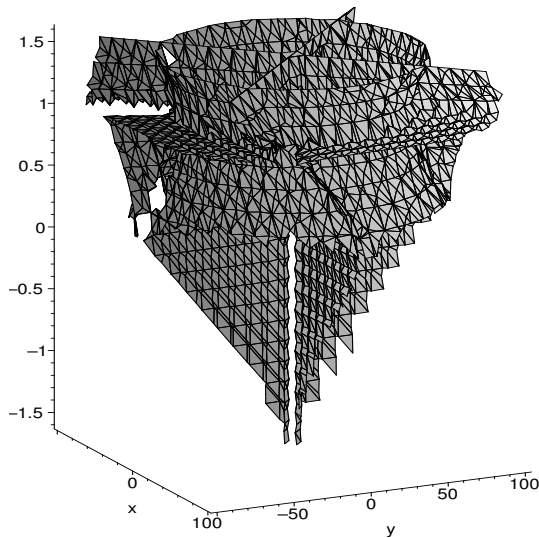


FIG. B.20 – Lieux de singularité du 4-PUU (effecteur carré).

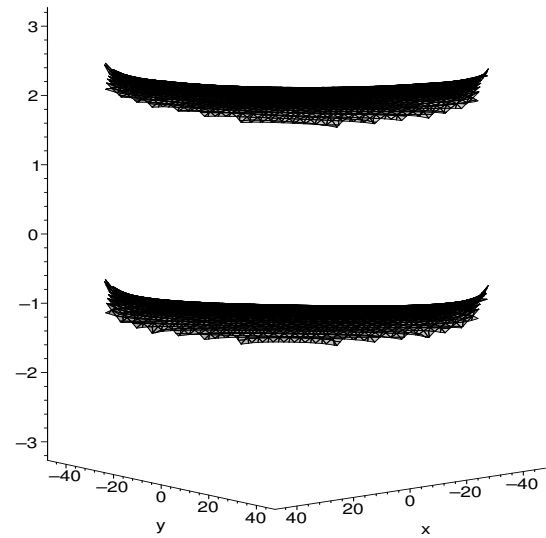


FIG. B.21 – Lieux de singularité du 4-PUU (effecteur rect.).

prié pour ce manipulateur. En effet, l'espace de travail est rempli de lieux singuliers pour toutes les orientations de l'effecteur. Cependant, en optant pour un effecteur rectangulaire, la situation devient très intéressante puisqu'il n'y a des singularités que pour 2 valeurs de  $\phi$  : environ -1 et 2 rads. L'espace de travail est donc limité uniquement par ces positions angulaires de l'effecteur à l'intérieur desquelles aucune singularité n'est rencontrée par ce dernier.

### B.3.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs sont les projections dans le plan horizontal de chaque vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$ , que l'on nomme  $\mathbf{v}_{2i_{xy}}$ . Mathématiquement, il faut donc vérifier que :

$$\mathbf{v}_{2i_{xy}} \times \mathbf{v}_{2j_{xy}} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.46})$$

pour  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4$  et  $i \neq j$ . Dans le cas d'un effecteur rectangulaire, il n'y a aucune singularité de contrainte.

### B.3.4 Dexterité

Comme les actionneurs du manipulateur 4-PUU sont tous parallèles à l'axe  $z$ , la dextérité ne dépend pas de la position en  $z$  de l'effecteur. On peut donc obtenir un graphe 2D de la dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  du manipulateur en fonction de l'orientation.

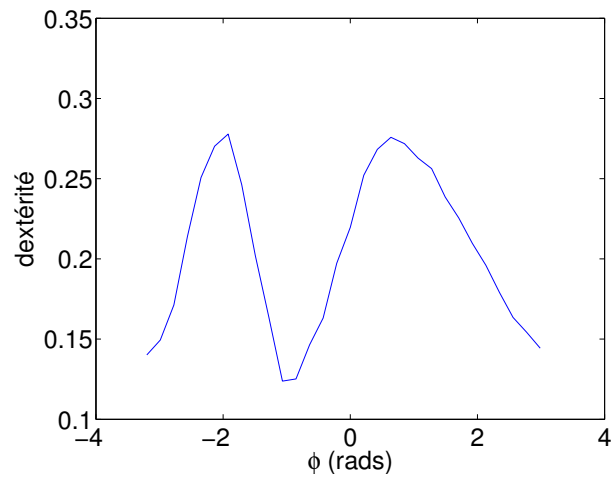


FIG. B.22 – Dexterité moyenne en  $x$  et  $y$  du 4-PUU en fonction de l'élévation et de l'orientation (effecteur rectangulaire).

## B.4 4-PRR (4-PRU)

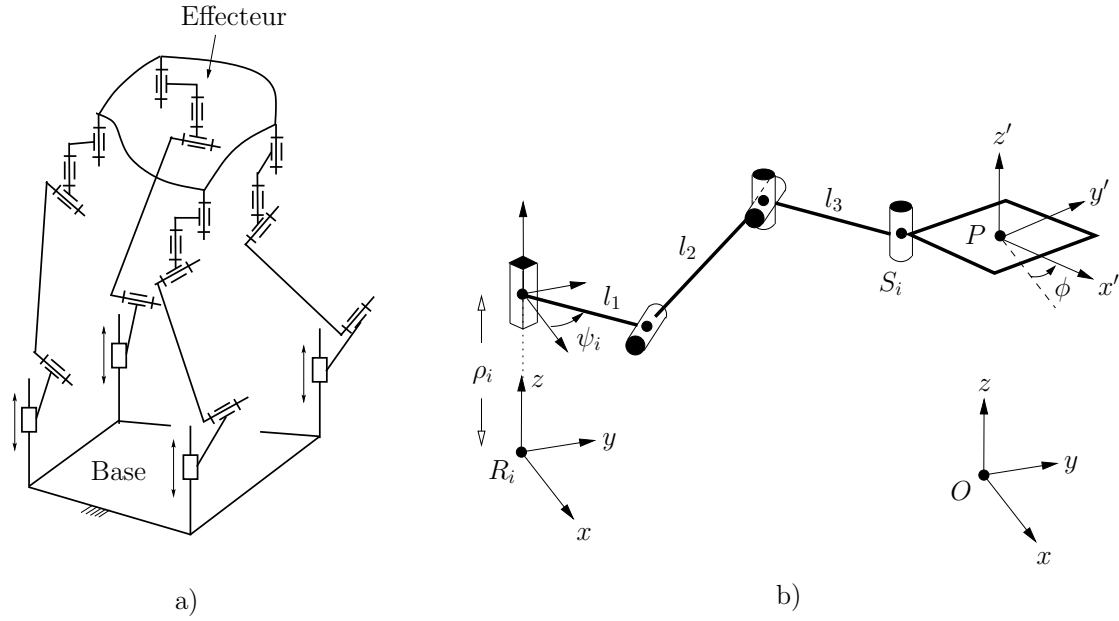


FIG. B.23 – a) Manipulateur 4-PRR, b) Chaîne cinématique PRU.

### B.4.1 PGI et espace atteignable

Soient les 3 vecteurs suivants :

$$\mathbf{v}_{1i} = [l_1 \cos \psi_i, l_1 \sin \psi_i, 0]^T, \quad (\text{B.47})$$

$$\mathbf{v}_{2i} = [d_{2i} \cos \psi_i, d_{2i} \sin \psi_i, a_{zi} - \rho_i]^T, \quad (\text{B.48})$$

$$\mathbf{v}_{3i} = [v_{3xi}, v_{3yi}, 0]^T, \quad (\text{B.49})$$

où  $d_{2i} = \sqrt{l_2^2 - (a_{zi} - \rho_i)^2}$ . Pour obtenir le PGI, on exprime la norme du vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$  en fonction des autres vecteurs :

$$\begin{aligned} l_3^2 &= (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i} - \rho_i \mathbf{k})^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i} - \rho_i \mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{2i} - \rho_i \mathbf{k})^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{v}_{2i} - \rho_i \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{v}_{2i} + \rho_i^2 \mathbf{k}^T \mathbf{k} - 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{v}_{2i} - 2\rho_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{k} + 2\rho_i \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

En développant le tout, on obtient une équation quadratique en fonction de  $d_{2i}$  :

$$d_{2i}^2 + B_i d_{2i} + C_i = 0, \quad (\text{B.51})$$

où

$$B_i = -2(b_{xi} \cos \psi_i + b_{yi} \sin \psi_i), \quad (\text{B.52})$$

$$C_i = \|\mathbf{b}_i\|^2 + a_{zi}^2 - 2a_{zi}b_{zi} - l_3^2. \quad (\text{B.53})$$

Les 2 solutions de l'équation (B.51) sont donc :

$$d_{2i,2} = \frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - 4C_i}}{2}. \quad (\text{B.54})$$

À partir desquelles on trouve les coordonnées articulaires  $\rho_i$  :

$$\rho_{i,2} = a_{zi} \pm \sqrt{l_2^2 - d_{2i}^2}. \quad (\text{B.55})$$

Pour étudier l'espace atteignable du manipulateur, on utilise les inégalités suivantes :

$$l_2^2 - d_{2i}^2 > 0, \quad (\text{B.56})$$

$$B_i^2 - 4C_i > 0, \quad (\text{B.57})$$

$$0 < \rho_i < 3. \quad (\text{B.58})$$

L'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur a été fait à partir de ces équations (voir figure B.24). Notons que les points d'attache à la base et à l'effecteur ont légèrement changé pas rapport aux architectures étudiées précédemment. Les détails des modifications sont présentés aux tableaux B.6 à B.7.

TAB. B.6 – Paramètres du 4-P $\underline{R}$ U $\check{R}$

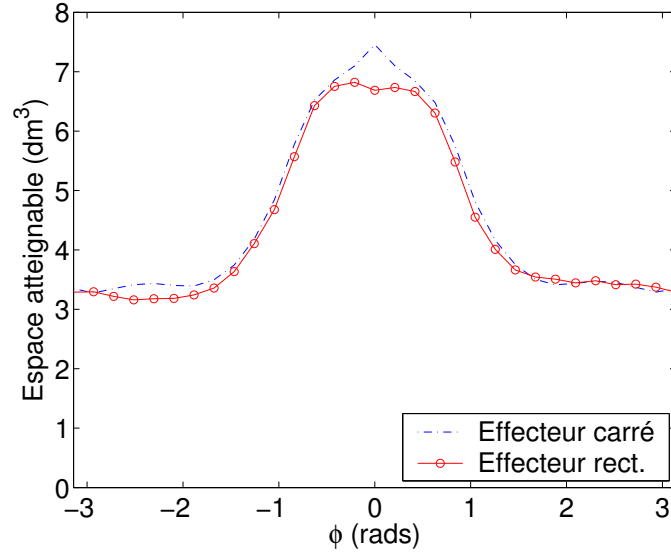
| i | $\mathbf{r}_i$ (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ carré (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ rect. (mm) | $\psi_i$ (rads) |
|---|---------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$   | $[-40, -40, 0]^T$            | $[-30, -50, 0]^T$            | $\pi/4$         |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$    | $[-40, 40, 0]^T$             | $[-30, 50, 0]^T$             | $-\pi/4$        |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$     | $[40, 40, 0]^T$              | $[30, 50, 0]^T$              | $5\pi/4$        |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$    | $[40, -40, 0]^T$             | $[30, -50, 0]^T$             | $3\pi/4$        |

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -1 et 1 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-P $\underline{R}$ U $\check{R}$ .



TAB. B.7 – Longueur des membrures du 4-P $\ddot{R}$ U $\ddot{R}$ 

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 0 mm   |
| $l_2$     | 120 mm |
| $l_3$     | 120 mm |

FIG. B.24 – Espace atteignable du 4-P $\ddot{R}$ U $\ddot{R}$  en fonction de l'orientation de l'effecteur.

### B.4.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

On dérive l'équation (B.50) par rapport au temps :

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \rho_i\mathbf{k} - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i})^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\rho}_i\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}_{2i}). \quad (\text{B.59})$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.60})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{2i} = \mathbf{F}\mathbf{v}_{2i}\dot{z} - \mathbf{F}\mathbf{v}_{2i}\dot{\rho}_i, \quad (\text{B.61})$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{a_{zi}-\rho_i}{d_{2i}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{zi}-\rho_i}{d_{2i}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{zi}-\rho_i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.62})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$(\mathbf{v}_{3i} - \mathbf{w}_i)^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i}) \dot{\phi} = (\mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{k}) \dot{\rho}_i, \quad (\text{B.63})$$

où

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{2i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.64})$$

De plus, le vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$  est toujours perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{k}$  puisqu'il est défini dans le plan horizontal. Ceci dit, le produit scalaire entre les deux est nul. Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  deviennent donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_{31} - \mathbf{w}_1)^T & \mathbf{v}_{31}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{01} \\ (\mathbf{v}_{32} - \mathbf{w}_2)^T & \mathbf{v}_{32}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{02} \\ (\mathbf{v}_{33} - \mathbf{w}_3)^T & \mathbf{v}_{33}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{03} \\ (\mathbf{v}_{34} - \mathbf{w}_4)^T & \mathbf{v}_{34}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{04} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.65})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{31}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{32}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_{33}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}_{34}^T \mathbf{F} \mathbf{v}_{24} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.66})$$

#### B.4.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{v}_{3i}$  est dans le même plan que le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  associé. Le manipulateur est alors à une limite horizontale de son espace atteignable. La figure B.25 montre ces limites de l'espace de travail du 4- $\underline{\text{P}}\dot{\text{R}}\dot{\text{U}}\dot{\text{R}}''$  pour un effecteur orienté à  $\phi = 0$ .

Une forme d'espace atteignable de ce type est assez pratique. Elle presque convexe tout en étant relativement régulière en fonction de  $z$ .

#### B.4.2.2 Singularités de type 2

Tout comme le manipulateur 4- $\underline{\text{P}}\text{U}\text{U}$ , il n'est pas évident de déduire les lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\dot{\text{R}}\dot{\text{U}}\dot{\text{R}}''$  par une simple observation de la matrice  $\mathbf{J}$ . De plus, par souci de clarté sur les figures, les singularités sont représentées dans un plan  $xy$  pour différentes valeurs de  $\phi$  (voir figures B.26 à B.29).

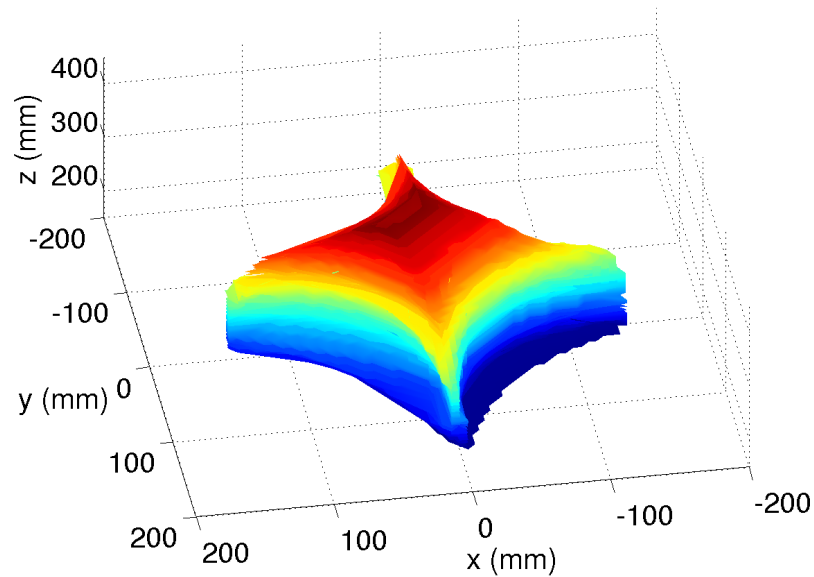


FIG. B.25 – Espace atteignable du 4- $\underline{\text{P}}\overline{\text{R}}\text{U}\overline{\text{R}}$  (effecteur carré et  $\phi = 0$ ).

Comme pour les autres manipulateurs, un effecteur carré n'est toujours pas approprié. En effet, l'espace de travail est rempli de lieux singuliers pour toutes les orientations de l'effecteur. Cependant, en optant pour un effecteur rectangulaire, la situation devient légèrement plus intéressante quoique les singularités sont assez encombrantes.

### B.4.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Dans le cas du 4- $\underline{\text{P}}\overline{\text{R}}\text{U}\overline{\text{R}}$ , les groupes sont les axes de rotation des articulations rotoïdes formant les joints universels (U). Un des axes est le vecteur  $\mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$  (pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ), alors que l'autre est fixé à la membrure 1 dont l'orientation est constante (dépend de l'angle  $\psi_i$ ). Il suffit donc, à lors du design, de choisir des angles  $\psi_i$  de telle sorte qu'il y en ait au moins un différent des autres. Dans les paramètres définis plus haut, ils sont tous différents : il n'y a donc aucune singularité de contrainte.

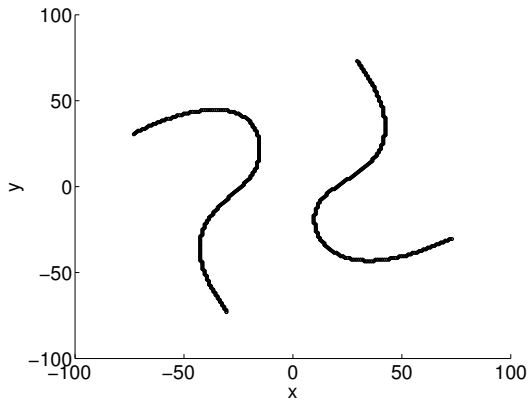


FIG. B.26 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  (effecteur carré,  $\phi = -\pi/4$ ).

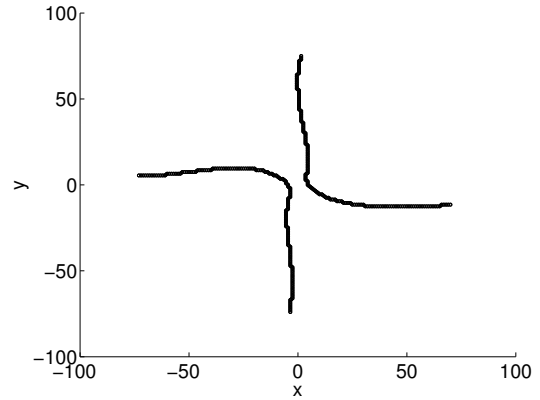


FIG. B.27 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  (effecteur carré,  $\phi = \pi/2$ ).

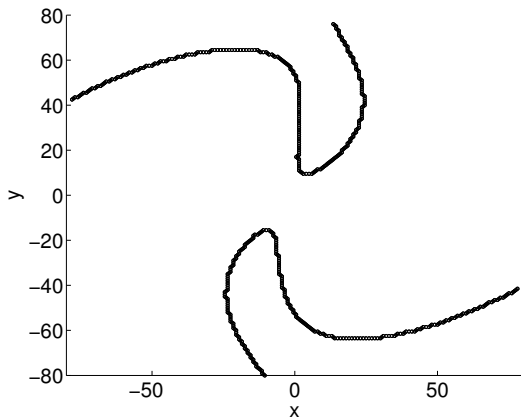


FIG. B.28 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  (effecteur rect. et  $\phi = -\pi/4$ ).

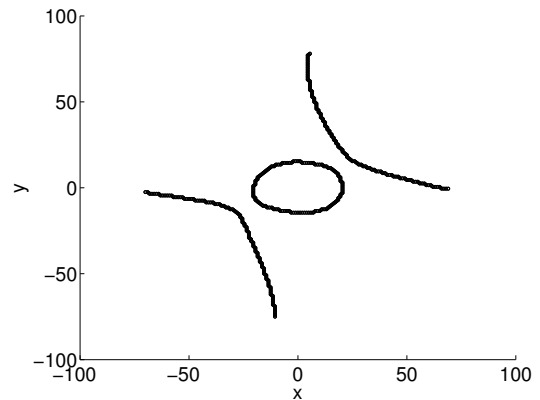


FIG. B.29 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  (effecteur rect. et  $\phi = \pi/2$ ).

#### B.4.4 Dextérité

Comme pour le 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{U}}\underline{\text{U}}$ , les actionneurs du manipulateur 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  sont tous verticaux. La dextérité ne dépend donc pas de la position verticale de l'effecteur, ce qui permet d'obtenir un graphe 2D de la dextérité moyenne en  $x$  et  $y$  du manipulateur en fonction de l'orientation. L'indice de dextérité globale  $\eta$  est quant à lui de 0.2037.

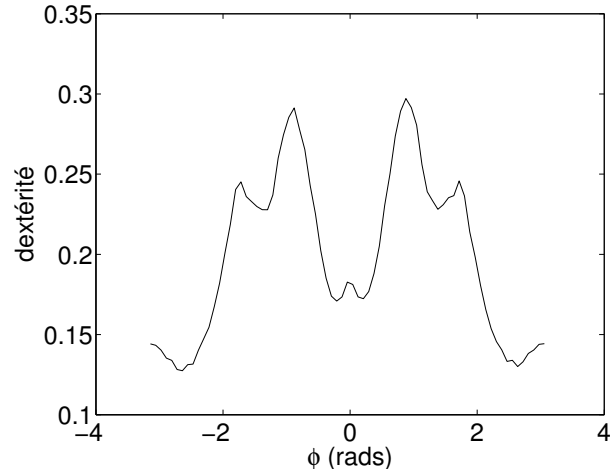


FIG. B.30 – Dexterite moyenne en  $x$  et  $y$  du 4- $\underline{P}\dot{R}\dot{U}\dot{R}$  en fonction de l'elevation et de l'orientation (effecteur rectangulaire).

## B.5 4- $\underline{P}\dot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ (4- $\underline{P}\dot{R}\dot{U}\dot{R}$ )

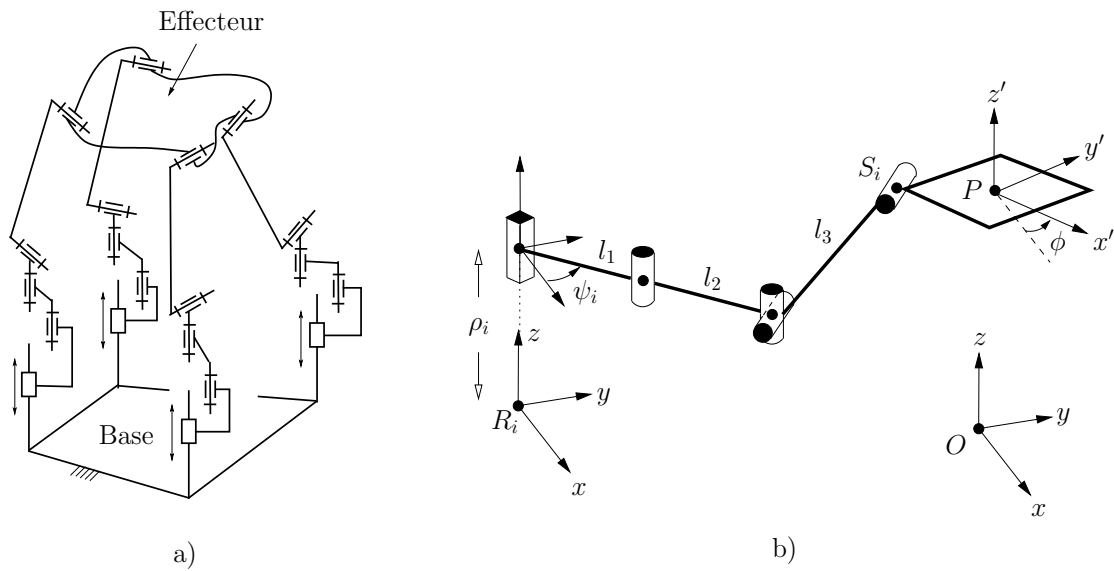


FIG. B.31 – a) Manipulateur 4- $\underline{P}\dot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ , b) Chaîne cinématique  $\underline{P}\dot{R}\dot{U}\dot{R}$ .

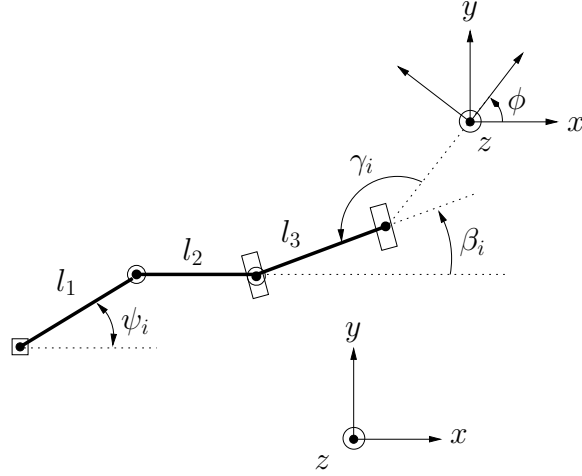


FIG. B.32 – Chaîne cinématique  $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  vue de dessus.

### B.5.1 PGI et espace atteignable

Soient les 3 vecteurs suivants :

$$v_{1i} = [l_1 \cos \psi_i, l_1 \sin \psi_i, 0]^T, \quad (\text{B.67})$$

$$v_{2i} = [v_{2xi}, v_{2yi}, 0]^T, \quad (\text{B.68})$$

$$v_{3i} = [d_{3i} \cos \beta_i, d_{3i} \sin \beta_i, a_{zi} - \rho_i]^T, \quad (\text{B.69})$$

où  $d_{3i} = \sqrt{l_3^2 - (a_{zi} - \rho_i)^2}$  et  $\beta_i = \phi + \gamma_i - \pi$ . À partir de ces vecteurs, le PGI du 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$  s'obtient exactement de la même manière que pour le 4- $\underline{\text{P}}\underline{\text{R}}\underline{\text{U}}\underline{\text{R}}$ , à l'exception qu'il faut travailler avec la norme du vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  au lieu de celle du vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$ . Le développement mathématique mène à deux solutions pour la variable  $d_{3i}$ , soient :

$$d_{3i1,2} = \frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - 4C_i}}{2}, \quad (\text{B.70})$$

où

$$B_i = -2(b_{xi} \cos \beta_i + b_{yi} \sin \beta_i), \quad (\text{B.71})$$

$$C_i = \|\mathbf{b}_i\|^2 + a_{zi}^2 - 2a_{zi}b_{zi} - l_2^2. \quad (\text{B.72})$$

Il est alors possible de trouver les coordonnées articulaires  $\rho_i$  :

$$\rho_{i1,2} = a_{zi} \pm \sqrt{l_3^2 - d_{3i}^2}. \quad (\text{B.73})$$

Pour étudier l'espace atteignable du manipulateur, on utilise les inégalités suivantes :

$$l_3^2 - d_{3i}^2 > 0, \quad (\text{B.74})$$

$$B_i^2 - 4C_i > 0, \quad (\text{B.75})$$

$$0 < \rho_i < 3. \quad (\text{B.76})$$

L'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur a été fait à partir de ces équations (voir figure B.33). Notons que les paramètres ne sont pas exactement les mêmes que ceux du 4-PŘUŘ. Les détails des modifications sont présentés aux tableaux B.8 à B.9.

TAB. B.8 – Paramètres du 4-PŘUŘ

| i | $\mathbf{r}_i$ (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ carré (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ rect. (mm) | $\psi_i$ (rads) | $\gamma_i$ (rads) |
|---|---------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|-------------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$   | $[-40, 40, 0]^T$             | $[-30, 50, 0]^T$             | $3\pi/4$        | $5\pi/4$          |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$    | $[40, 40, 0]^T$              | $[30, 50, 0]^T$              | $\pi/4$         | $3\pi/4$          |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$     | $[40, -40, 0]^T$             | $[30, -50, 0]^T$             | $-\pi/4$        | $\pi/4$           |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$    | $[-40, -40, 0]^T$            | $[-30, -50, 0]^T$            | $5\pi/4$        | $-\pi/4$          |

TAB. B.9 – Longueur des membrures du 4-PŘUŘ

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 57 mm  |
| $l_2$     | 120 mm |
| $l_3$     | 120 mm |

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -1 et 1 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-PŘUŘ.

## B.5.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

On dérive l'équation de la norme du vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  (similaire à celle du 4-PŘUŘ) par rapport au temps :

$$0 = (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \rho_i\mathbf{k} - \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{3i})^T (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\rho}_i\mathbf{k} - \dot{\mathbf{v}}_{3i}). \quad (\text{B.77})$$

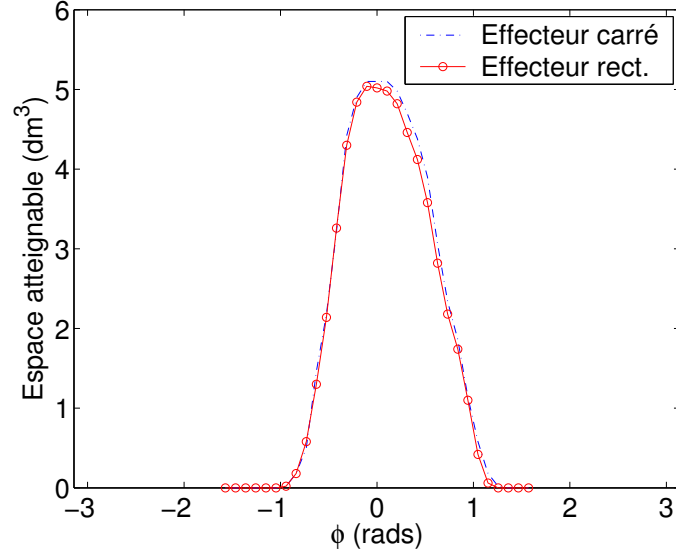


FIG. B.33 – Espace atteignable du 4-PRUR en fonction de l'orientation de l'effecteur.

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.78})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{3i} = \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{3i} \dot{z} - \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{3i} \dot{\rho}_i + \mathbf{E} \mathbf{v}_{3i} \dot{\phi}, \quad (\text{B.79})$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \frac{-(a_{zi}-\rho_i)}{d_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(a_{zi}-\rho_i)}{d_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(a_{zi}-\rho_i)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.80})$$

Après substitution et simplification, on obtient (sachant que le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{k}$ ) :

$$(\mathbf{v}_{2i} - \mathbf{w}_i)^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E} \mathbf{v}_{3i}) \dot{\phi} = (\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{3i}) \dot{\rho}_i. \quad (\text{B.81})$$

où

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{F}_i \mathbf{v}_{3i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.82})$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  deviennent donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_{21} - \mathbf{w}_1)^T & \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{E} (\mathbf{Q} \mathbf{s}_{01} - \mathbf{v}_{31}) \\ (\mathbf{v}_{22} - \mathbf{w}_2)^T & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{E} (\mathbf{Q} \mathbf{s}_{02} - \mathbf{v}_{32}) \\ (\mathbf{v}_{23} - \mathbf{w}_3)^T & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{E} (\mathbf{Q} \mathbf{s}_{03} - \mathbf{v}_{33}) \\ (\mathbf{v}_{24} - \mathbf{w}_4)^T & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{E} (\mathbf{Q} \mathbf{s}_{04} - \mathbf{v}_{34}) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.83})$$



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{21}^T \mathbf{F}_1 \mathbf{v}_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{22}^T \mathbf{F}_2 \mathbf{v}_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_{23}^T \mathbf{F}_3 \mathbf{v}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}_{24}^T \mathbf{F}_4 \mathbf{v}_{34} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.84})$$

### B.5.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{v}_{3i}$  est dans le même plan que le vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  associé. Le manipulateur est alors à une limite horizontale de son espace atteignable. La figure B.34 montre ces limites de l'espace de travail du 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\text{U}\check{\text{R}}$  pour un effecteur orienté à  $\phi = 0$ .

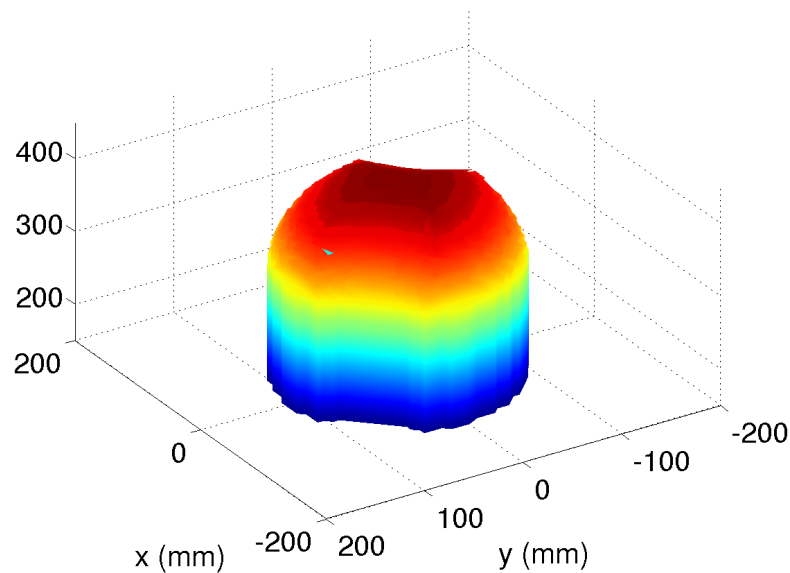


FIG. B.34 – Espace atteignable du 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\text{U}\check{\text{R}}$  (effecteur rectangulaire et  $\phi = 0$ ).

Cet espace de travail est intéressant pour les mêmes raisons que le 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\text{U}\check{\text{R}}$  : il est presque entièrement convexe et assez uniforme.

### B.5.2.2 Singularités de type 2

Tout comme le manipulateur 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\text{U}\check{\text{R}}$ , Les lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\check{\text{R}}\text{U}\check{\text{R}}$  ne sont pas faciles à déceler par une simple observation de la matrice  $\mathbf{J}$ . Ici aussi, par souci de clarté sur les figures, les singularités sont représentées dans un plan  $xy$  pour différentes valeurs de  $\phi$  (voir figures B.35 à B.38).

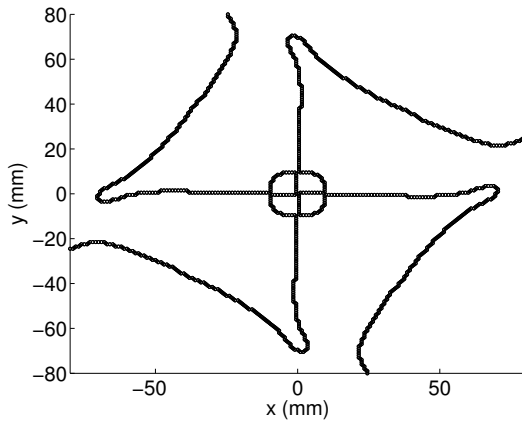


FIG. B.35 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\ddot{\text{R}}\text{U}\ddot{\text{R}}$  (effecteur carré,  $\phi = 0$ ).

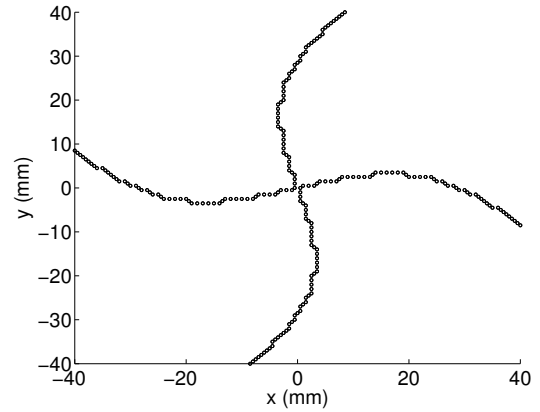


FIG. B.36 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\ddot{\text{R}}\text{U}\ddot{\text{R}}$  (effecteur carré,  $\phi = \pi/4$ ).

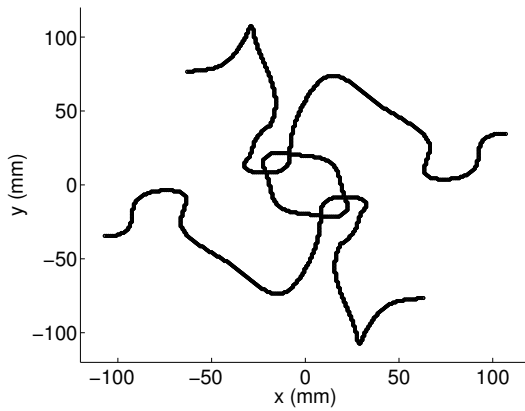


FIG. B.37 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\ddot{\text{R}}\text{U}\ddot{\text{R}}$  (effecteur rect. et  $\phi = 0$ ).

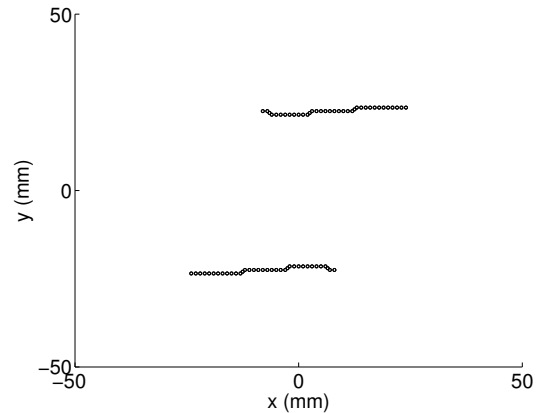


FIG. B.38 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\ddot{\text{R}}\text{U}\ddot{\text{R}}$  (effecteur rect. et  $\phi = \pi/3$ ).

Comme pour les autres manipulateurs, un effecteur carré n'est toujours pas approprié. En effet, l'espace de travail est rempli de lieux singuliers pour toutes les orientations de l'effecteur. La situation n'est guère préférable avec un effecteur rectangulaire puisque les lieux de singularité semblent particulièrement difficiles à éviter.

### B.5.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne

cinématique (patte). Comme pour le 4- $\underline{P}\check{R}U\check{R}$ , les groupes sont les axes de rotation formant les joints universels (U). Un des axes est le vecteur  $\mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$  (pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ), alors que l'autre est fixé à la membrure 3 dont l'orientation est constante (dépend de l'angle  $\gamma_i$ ). S'il y a au moins un angle  $\gamma_i$  de valeur différente pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , aucune singularité de contrainte ne peut être rencontrée par le manipulateur. En se référant au tableau B.8, on remarque que les angles sont tous différents. Le 4- $\underline{P}\check{R}U\check{R}$  n'est donc pas limité par des singularités de contrainte.

### B.5.4 Dexterité

Comme les actionneurs du manipulateur 4- $\underline{P}\check{R}U\check{R}$  sont tous verticaux, la dextérité ne dépend pas de la position verticale de l'effecteur. On peut donc obtenir un graphe de la dextérité locale du manipulateur en fonction de l'orientation. Quant à la singularité globale, elle est de 0.2233.

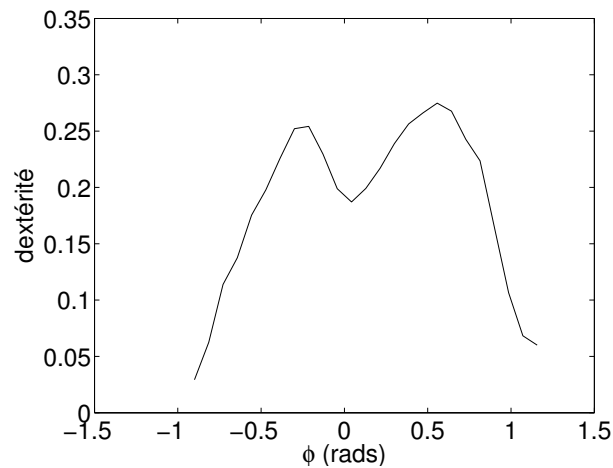


FIG. B.39 – Dexterite moyenne en  $x$  et  $y$  du 4- $\underline{P}\check{R}U\check{R}$  en fonction de l'elevation et de l'orientation (effecteur carré).

## B.6 4-PRRRR''

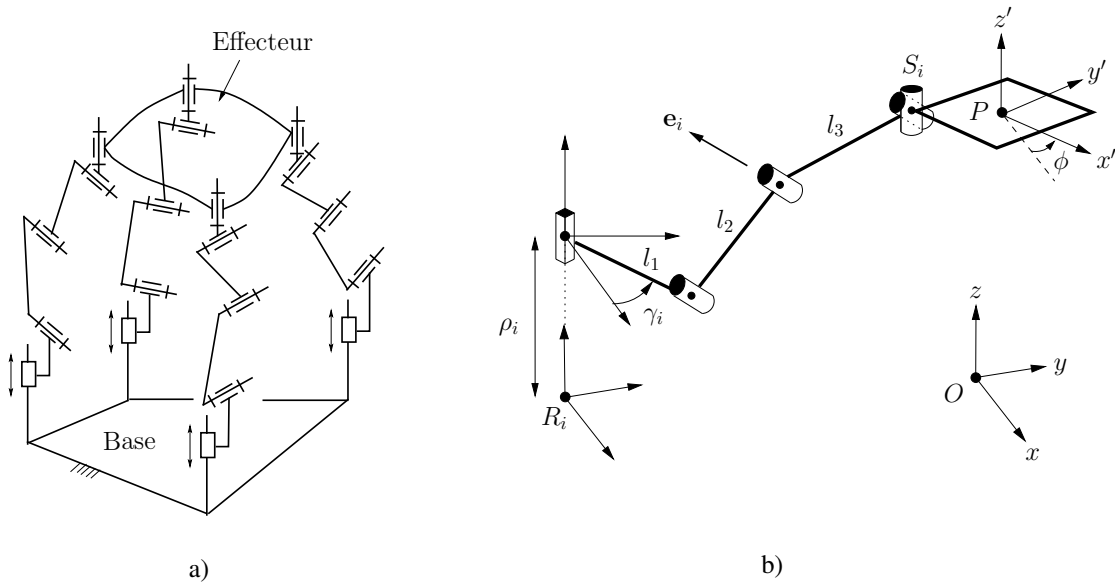


FIG. B.40 – a) Manipulateur 4-PRRRR'', b) Chaîne cinématique PRRRR''.

### B.6.1 PGI et espace atteignable

Soit le vecteur  $\mathbf{u}_i$ , qui relie l'extrémité de la première membre au point d'attache sur la plate-forme :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i} - \rho_i \mathbf{k}, \quad (\text{B.85})$$

où

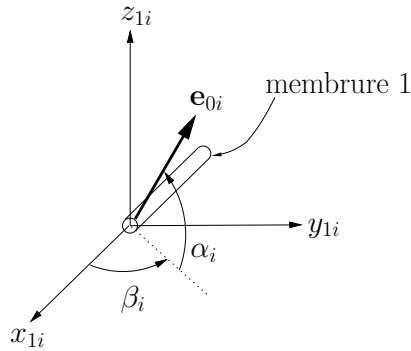
$$\mathbf{v}_{1i} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \gamma_i \\ l_1 \sin \gamma_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.86})$$

On définit aussi le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_{1i}$ , qui correspond à l'axe de rotation des articulations rotoïdes attachées au bout des membres no.1, exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_1$  (voir figure B.41) :

$$\mathbf{e}_{1i} = [\cos \alpha_i \cos \beta_i, \cos \alpha_i \sin \beta_i, \sin \alpha_i]^T. \quad (\text{B.87})$$

Ce dernier vecteur s'exprime dans le repère fixe de la façon suivante :

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{e}_{1i}, \quad (\text{B.88})$$

FIG. B.41 – Vecteur  $\mathbf{e}$ .

où

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_i & -\sin \gamma_i & 0 \\ \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.89})$$

La contrainte entre les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{e}_i$  est la perpendicularité :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{B.90})$$

En développe cette équation et on isole  $\rho_i$  :

$$\rho_i = a_{zi} + u_{xi} \cot \alpha \cos(\beta_i + \gamma_i) + u_{yi} \cot \alpha \sin(\beta_i + \gamma_i). \quad (\text{B.91})$$

Pour étudier l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur, il faut ajouter une contrainte supplémentaire qui n'apparaît pas dans la solution du PGI. Cette contrainte limite simplement la norme du vecteur  $\mathbf{u}_i$  en fonction des longueurs des membrures 2 et 3. De plus, Mathématiquement, elle s'écrit :

$$|l_2 - l_3| < \|\mathbf{u}_i\| < |l_2 + l_3|. \quad (\text{B.92})$$

Cette inégalité permet d'obtenir les courbes de la figure B.42 pour des points d'attache à l'effecteur disposés en carré et en rectangle (voir tableaux B.10 à B.11).

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -1.5 et 1.5 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4-PRRRR.

TAB. B.10 – Paramètres du 4-PRRRR̄ (α = 3π/4)

| i | $\mathbf{r}_i$ (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ carré (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ rect. (mm) | $\beta_i$ (rads) | $\gamma_i$ (rads) |
|---|---------------------|------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$   | $[-40, -40, 0]^T$            | $[-30, -50, 0]^T$            | 0                | $\pi/4$           |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$    | $[-40, 40, 0]^T$             | $[-30, 50, 0]^T$             | 0                | $-\pi/4$          |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$     | $[40, 40, 0]^T$              | $[30, 50, 0]^T$              | 0                | $5\pi/4$          |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$    | $[40, -40, 0]^T$             | $[30, -50, 0]^T$             | 0                | $3\pi/4$          |

TAB. B.11 – Longueur des membrures du 4-PRRRR̄

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 0 mm   |
| $l_2$     | 150 mm |
| $l_3$     | 150 mm |

## B.6.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

Pour obtenir la jacobienne, on dérive l'équation (B.90) par rapport au temps :

$$(\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{k}\dot{\rho}_i)^T \mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{B.93})$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.94})$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.95})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i \dot{\phi} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{k}\dot{\rho}_i. \quad (\text{B.96})$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  deviennent donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{01})^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{02})^T \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{03})^T \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{04})^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.97})$$

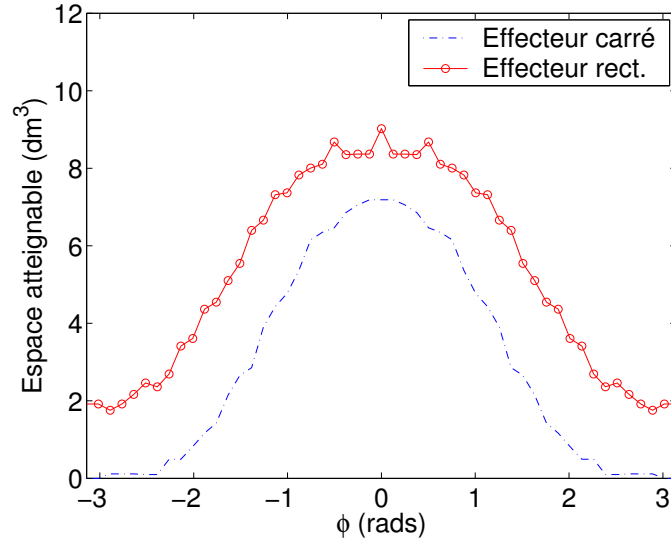


FIG. B.42 – Espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$  en fonction de l'orientation de l'effecteur.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \mathbf{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_4^T \mathbf{k} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.98})$$

### B.6.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{k}$ , donc lorsqu'il est dans le plan  $xy$ . Or, l'orientation des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  est fixée pas les angles  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  qui sont deux paramètres constants. Il suffit donc poser  $\alpha_i$  différent de 0 pour  $i = 1, 2, 3, 4$  afin de ne pas avoir de singularité liée à la contrainte de perpendicularité. Cependant, il y a également des lieux singuliers de type 1 lorsque les vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  et  $\mathbf{v}_{3i}$  sont parallèles. Ces singularités sont liées à la seconde contrainte discutée plus tôt, soit celle concernant la norme des vecteurs  $\mathbf{u}_i$  qui définit l'espace atteignable du manipulateur. La figure B.43 montre un exemple d'espace atteignable du 4- $\underline{P}\acute{R}\acute{R}\acute{R}\acute{R}$  pour un effecteur orienté à  $\phi = 0$ .

Un espace de travail comme celui-ci est relativement intéressant vue sa concavité. Il est toutefois légèrement restreint aux extrémités verticales (en  $z$ ), quoi que cela peut sûrement être amélioré en modifiant légèrement certains paramètres (comme la course des actionneurs par exemple).

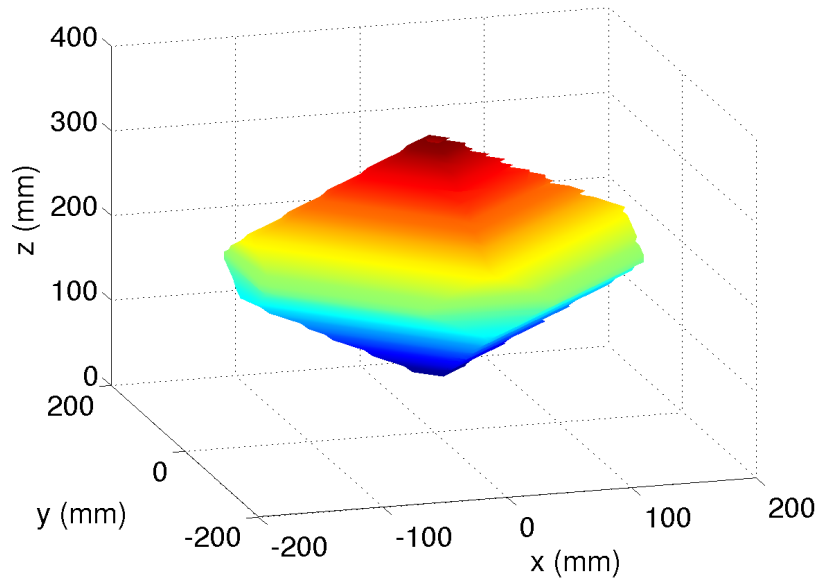


FIG. B.43 – Espace atteignable du 4- $\underline{P}\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$  (effecteur rectangulaire et  $\phi = 0$ ).

### B.6.2.2 Singularités de type 2

À prime abord, l'étude de la matrice  $\mathbf{J}$  permet de connaître quelques configurations singulières du manipulateur. Premièrement, si  $\alpha_i = 0$  pour toute valeur de  $i$ , les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont tous dans le plan  $xy$  et leur composante verticale est nulle. La matrice  $\mathbf{J}$  a alors uniquement des 0 dans sa troisième colonne. Dans cette situation, le manipulateur ne peut pas résister à des efforts verticaux et l'effecteur s'effondre. De plus, si les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont tous verticaux ( $\alpha_i = \pi/2$ ), les deux premières colonnes de la matrice sont composées de zéros et son déterminant est par conséquent nul. Les quatre pattes sont alors toutes dans le plan  $xy$  et les actionneurs verticaux ne peuvent réagir à tout effort dans ce plan. Donc, certaines configurations singulières peuvent un fois de plus être évitées en choisissant judicieusement l'orientation des vecteurs  $\mathbf{e}_i$ .

En ce qui concerne les autres lieux de singularité, il est possible d'en obtenir une expression analytique étant donné la simplicité de la matrice  $\mathbf{J}$ . En effet, les variables cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  n'apparaissent pas dans la matrice, seule l'orientation  $\phi$  de l'effecteur y figure. En décomposant linéairement le déterminant de la matrice, on obtient une équation permettant de connaître exactement les orientations singulières du manipulateur.



Dans un premier temps, la matrice peut être réécrite comme ceci :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (\text{B.99})$$

où

$$\mathbf{q}_x = \begin{bmatrix} e_{x1} & e_{x2} & e_{x3} & e_{x4} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.100})$$

$$\mathbf{q}_y = \begin{bmatrix} e_{y1} & e_{y2} & e_{y3} & e_{y4} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.101})$$

$$\mathbf{q}_z = \begin{bmatrix} e_{z1} & e_{z2} & e_{z3} & e_{z4} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.102})$$

et

$$f_i = (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i, \quad (\text{B.103})$$

Le développement des termes  $f_i$  donne

$$f_i = t_{1i} \sin \phi + t_{2i} \cos \phi, \quad (\text{B.104})$$

où

$$t_{1i} = -s_{0xi} \cos \alpha \cos(\beta_i + \gamma_i) - s_{0yi} \cos \alpha \sin(\beta_i + \gamma_i), \quad (\text{B.105})$$

$$t_{2i} = -s_{0yi} \cos \alpha \cos(\beta_i + \gamma_i) + s_{0xi} \cos \alpha \sin(\beta_i + \gamma_i). \quad (\text{B.106})$$

On réécrit la matrice  $\mathbf{J}$  en fonction des nouveaux vecteurs :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & (\mathbf{t}_1 \sin(\phi) + \mathbf{t}_2 \cos(\phi)) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.107})$$

La décomposition linéaire du déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$  permet de l'écrire comme ceci :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}) &= \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & (\mathbf{t}_1 \sin \phi + \mathbf{t}_2 \cos \phi) \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{t}_1 \sin \phi \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{t}_2 \cos \phi \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{t}_1 \end{array} \right| \sin \phi + \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{q}_x & \mathbf{q}_y & \mathbf{q}_z & \mathbf{t}_2 \end{array} \right| \cos \phi. \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

Les deux déterminants de l'expression ci-dessus ne dépendent que des paramètres géométriques du manipulateur, tels les points d'attache à l'effecteur et l'orientation des vecteurs  $\mathbf{e}_i$ . Donc, pour une géométrie donnée, on connaît analytiquement les lieux de singularité du manipulateur, qui se résument ici à deux valeurs de  $\phi$  ( $\pm \frac{\pi}{2}$ ).

Le graphe des singularités pour un effecteur carré n'est pas présenté puisque cette configuration est en tout temps singulière. Ceci est dû au choix des angles  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$ . À priori, les angles  $\alpha_i$  ont été fixés à  $\frac{3\pi}{4}$  et les angles  $\beta_i + \gamma_i$  sont tous espacés

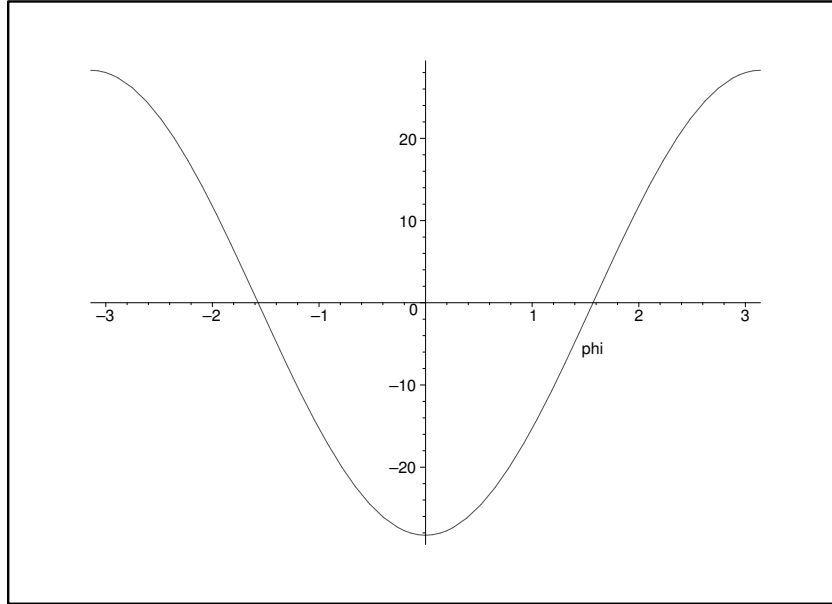


FIG. B.44 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{P}}\overline{\text{R}}\overline{\text{R}}\overline{\text{R}}\overline{\text{R}}$  (effecteur rectangulaire).

de  $\frac{\pi}{2}$  les uns des autres. Cette configuration parfaitement symétrique fait en sorte que les deux dernières colonnes de la matrice  $\mathbf{J}$  sont linéairement dépendantes. Des angles  $\alpha_i$  constants donne une troisième colonne avec une seule et même valeur. Alors qu'un effecteur carré (vecteurs  $\mathbf{s}_i$  espacés de  $\frac{\pi}{2}$ ) combiné au choix des angles  $\beta_i + \gamma_i$  engendre une projection constante des vecteurs  $\mathbf{s}_i^T$  sur les vecteur  $\mathbf{E}^T \mathbf{e}_i$ . La dernière colonne  $((\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i = \mathbf{s}_i^T \mathbf{E}^T \mathbf{e}_i)$  est elle aussi composée d'une seule et même valeur. Ces deux colonnes étant linéairement dépendantes, le déterminant est nul. En brisant la symétrie avec un effecteur rectangulaire, la configuration du manipulateur ne devient singulière que pour deux valeurs  $\phi$ , soit  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Ce qui rend le manipulateur 4- $\underline{\text{P}}\overline{\text{R}}\overline{\text{R}}\overline{\text{R}}\overline{\text{R}}$  particulièrement intéressant puisque ces lieux singuliers sont très faciles à éviter.

### B.6.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs s'obtiennent en faisant le produit vectoriel entre les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ . Le vecteur  $\mathbf{k}_i$  étant constant pour chaque patte, il suffit donc d'avoir un seul angle  $\beta_i + \gamma_i$  différent des autres pour éviter toute singularité de contrainte. Dans le cas présent, il sont tous différents : il n'y a donc

aucune singularité de contrainte pour ce manipulateur.

### B.6.4 Dexterité

La configuration des actionneurs du 4- $\underline{P}\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$  (tous parallèles, orientés selon l'axe  $z$ ) fait en sorte que sa dextérité est indépendante de la position en  $z$  de la plateforme. De ce fait, le graphique ci-dessous montre l'évolution de la dextérité globale en  $xy$  en fonction de l'orientation de l'effecteur. On remarque qu'elle est nulle pour les orientations singulières de l'effecteur. Quant à la dextérité globale, elle est de 0.2719, ce qui est très bon.

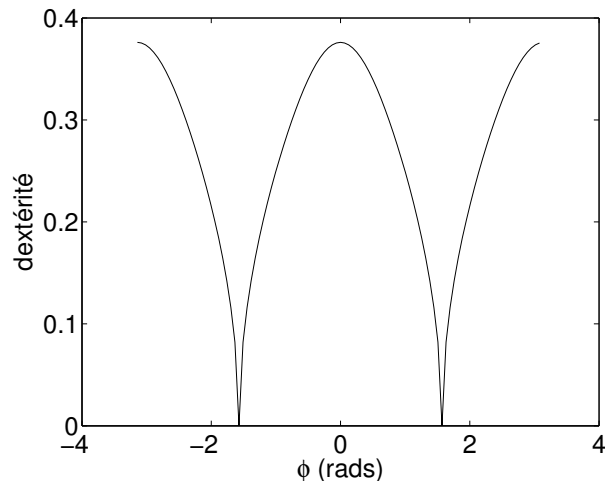


FIG. B.45 – Dexterite du 4- $\underline{P}\overline{R}\overline{R}\overline{R}\overline{R}$  en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).

## B.7 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$

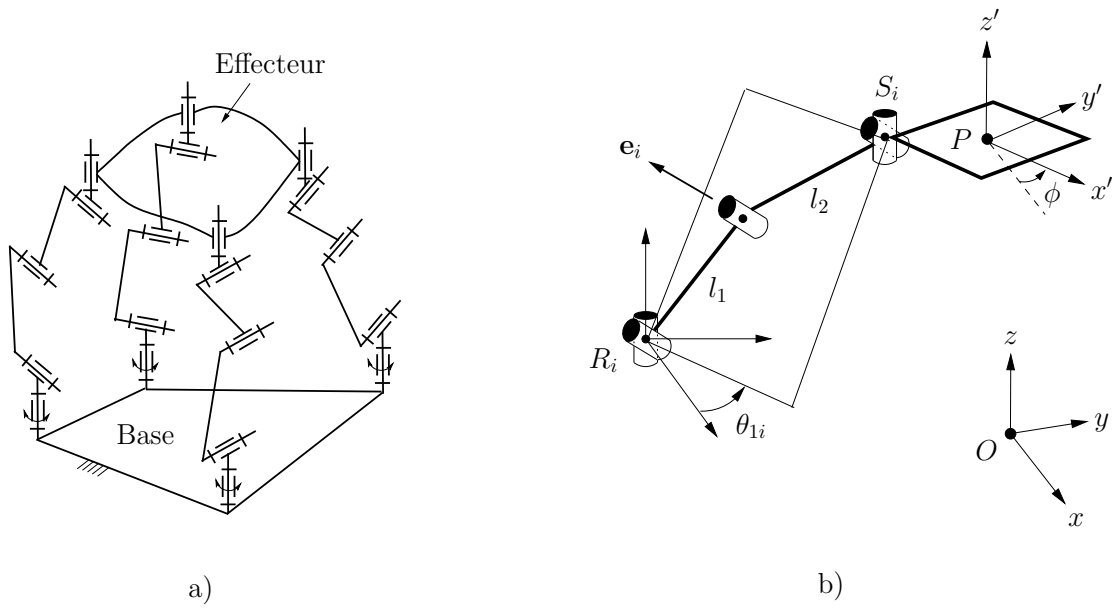


FIG. B.46 – a) Manipulateur 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique  $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ .

### B.7.1 PGI et espace atteignable

Soit le vecteur  $\mathbf{a}_i$  défini plus tôt :

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i. \quad (\text{B.109})$$

Comme pour le 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  et le 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , on définit aussi le vecteur  $\mathbf{e}_{1i}$  dans  $\mathcal{R}_{1i}$  (repère qui tourne autour de la première articulation rotoïde de chaque patte) :

$$\mathbf{e}_{1i} = [\cos \alpha_i \cos \beta_i, \cos \alpha_i \sin \beta_i, \sin \alpha_i]^T. \quad (\text{B.110})$$

Ce dernier vecteur s'exprime dans le repère fixe de la façon suivante :

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{e}_{1i}, \quad (\text{B.111})$$

où

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1i} & -\sin \theta_{1i} & 0 \\ \sin \theta_{1i} & \cos \theta_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.112})$$

$\theta_{1i}$  étant la coordonnée articulaire de chaque patte du manipulateur 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ . La contrainte entre les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{e}_i$  est la perpendicularité :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{B.113})$$

De cette équation, on obtient :

$$A_i \cos(\beta_i + \theta_{1i}) + B_i \sin(\beta_i + \theta_{1i}) = C_i, \quad (\text{B.114})$$

où

$$A_i = a_{xi}, \quad (\text{B.115})$$

$$B_i = a_{yi}, \quad (\text{B.116})$$

$$C_i = -a_{zi} \tan(\alpha). \quad (\text{B.117})$$

On résoud cette équation pour l'angle  $(\beta_i + \theta_{1i})$  avec la même procédure que pour le 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ . On obtient alors les solutions suivantes :

$$t_{1,2} = \frac{a_{yi} \pm \sqrt{a_{xi}^2 + a_{yi}^2 - a_{zi}^2 \tan^2 \alpha}}{(a_{xi} - a_{zi} \tan \alpha)}. \quad (\text{B.118})$$

La variable articulaire recherchée est donc :

$$\theta_{1i,2} = 2 \arctan(t_{1,2}) - \beta_i. \quad (\text{B.119})$$

De ces équations, on retient la contrainte permettant d'étudier l'espace atteignable du manipulateur, soit :

$$a_{xi}^2 + a_{yi}^2 - a_{zi}^2 \tan^2 \alpha > 0. \quad (\text{B.120})$$

Il faut également tenir compte de la longueur des membrures 1 et 2 avec l'inégalité suivante :

$$|l_1 - l_2| < \|\mathbf{a}_i\| < |l_1 + l_2|. \quad (\text{B.121})$$

On utilise les équations ci-dessus pour obtenir l'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur (voir figure B.47). Les points d'attache au sol et à l'effecteur de même que les longueurs des membrures sont présentés aux tables B.12 à B.13.

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est 0.5 et 2.5 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$ .

TAB. B.12 – Paramètres du 4- $\ddot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$  ( $\alpha = 3\pi/4$ )

| i | $\mathbf{r}_i$ carré (mm) | $\mathbf{r}_i$ rect. (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ (mm) | $\beta_i$ (rads) |
|---|---------------------------|---------------------------|------------------------|------------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$         | $[-70, -90, 0]^T$         | $[-40, 40, 0]^T$       | $\pi/2$          |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$          | $[-70, 90, 0]^T$          | $[40, 40, 0]^T$        | 0                |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$           | $[70, 90, 0]^T$           | $[40, -40, 0]^T$       | $-\pi/2$         |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$          | $[70, -90, 0]^T$          | $[-40, -40, 0]^T$      | $\pi$            |

TAB. B.13 – Longueur des membrures du 4- $\ddot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ 

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 120 mm |
| $l_2$     | 120 mm |

## B.7.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

Pour obtenir les matrices jacobiennes, on dérive l'équation (B.113). On obtient ainsi :

$$(\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i + \mathbf{a}_i \dot{\mathbf{e}}_i = 0. \quad (\text{B.122})$$

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.123})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{E}\mathbf{e}_i \dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.124})$$

où

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.125})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i \dot{\phi} = -\mathbf{a}_i^T \mathbf{E}\mathbf{e}_i \dot{\theta}_{1i}. \quad (\text{B.126})$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  deviennent donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{01})^T \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{02})^T \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{03})^T \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4^T & (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{04})^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.127})$$

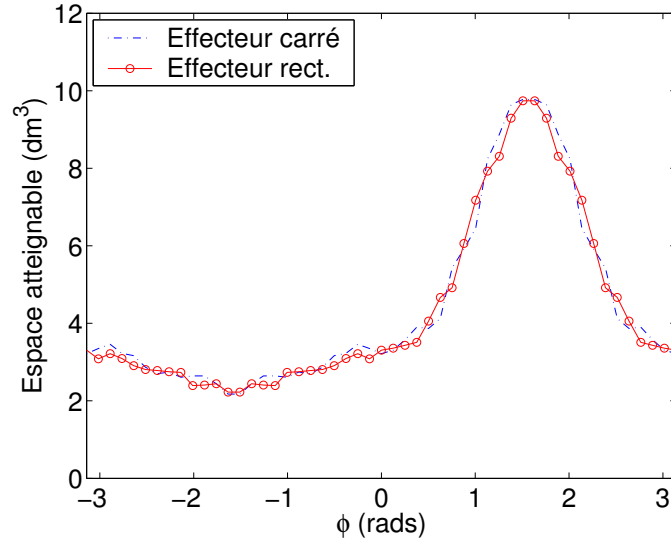


FIG. B.47 – Espace atteignable du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$  en fonction de l'orientation de l'effecteur.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1^T \mathbf{E} \mathbf{e}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{a}_2^T \mathbf{E} \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{a}_3^T \mathbf{E} \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{a}_4^T \mathbf{E} \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.128})$$

### B.7.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{E} \mathbf{e}_i$  est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{a}$ . De plus, la contrainte sur la norme des vecteurs  $\mathbf{a}$  (limite de l'espace atteignable) indique qu'il y a également singularité lorsqu'un des vecteurs  $\mathbf{v}_{1i}$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{v}_{2i}$  associé i.e. lorsqu'une des pattes est en complète extension ou totalement repliée sur elle-même. La figure B.43 montre un exemple très intéressant d'espace atteignable du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  pour un effecteur orienté à  $\phi = \pi/2$ .

### B.7.2.2 Singularités de type 2

Tout comme pour les manipulateurs 4- $\underline{\check{P}}\check{R}\check{R}\check{R}$  et 4- $\underline{\check{P}}\check{R}\check{R}\check{R}$ , le 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  est en position singulière du deuxième type lorsque tous les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont soit dans un même plan, soit tous verticaux. Quant aux autres lieux de singularité, ils sont obtenus numériquement et sont présentés aux figures B.49 à B.52

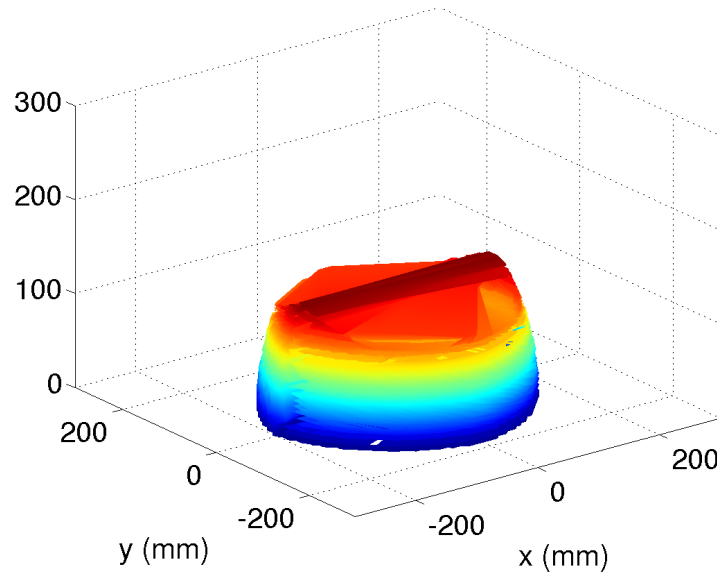


FIG. B.48 – Espace atteignable du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (effecteur rectangulaire et  $\phi = \pi/2$ ).

Un fois de plus, une base carrée est inappropriée comme configuration. L'espace de travail divisé en 4 parties, ce qui est beaucoup trop restreint. Par contre, une base rectangulaire est beaucoup mieux. Au centre de la plage angulaire d'espace atteignable, les singularités semblent suffisamment éloignées pour rendre l'espace de travail intéressant. Toutefois, aux limites de cette même plage, elles sont un peu plus encombrantes puisqu'elles limitent beaucoup la hauteur maximale à laquelle l'effecteur peut se rendre.

### B.7.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs s'obtiennent en faisant le produit vectoriel entre les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ . Mathématiquement, il faut donc vérifier que :

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{k}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.129})$$

pour  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4$  et  $i \neq j$ . Dans le cas d'un effecteur rectangulaire, il n'y a aucune singularité de contrainte.



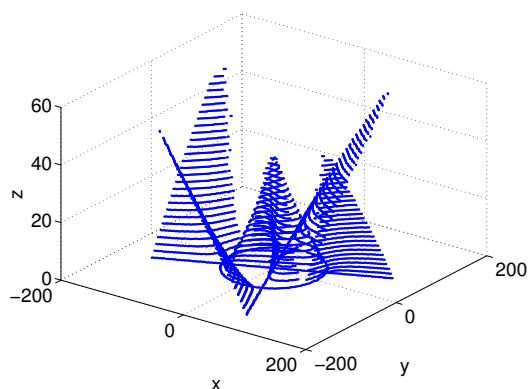


FIG. B.49 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (base carrée,  $\phi = \pi/3$ ).

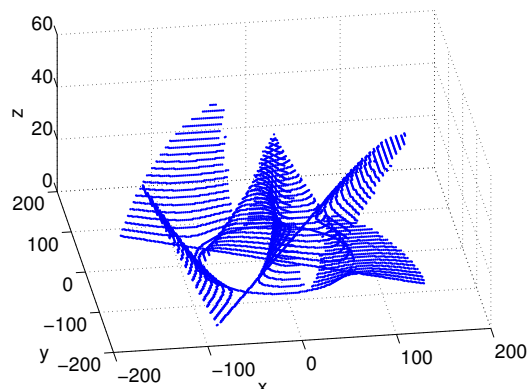


FIG. B.50 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (base carrée,  $\phi = 3\pi/4$ ).

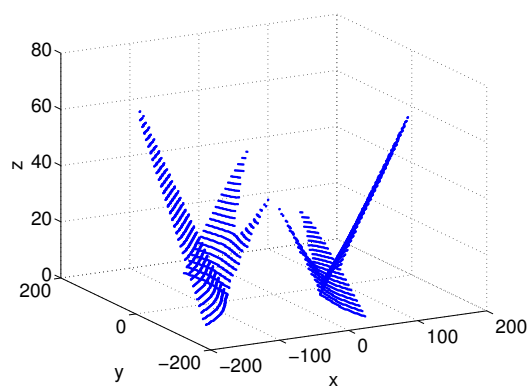


FIG. B.51 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (base rect. et  $\phi = \pi/3$ ).

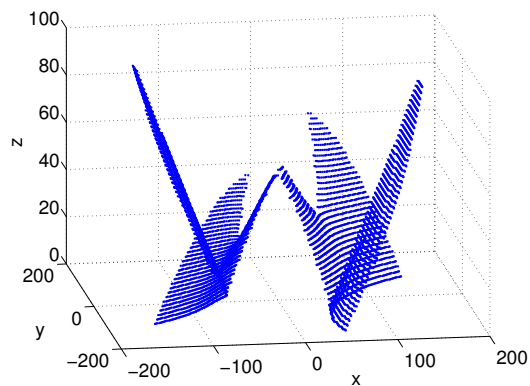


FIG. B.52 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (base rect. et  $\phi = 3\pi/4$ ).

### B.7.4 Dextérité

Le graphique ci-dessous montre donc l'évolution de la dextérité en fonction de l'orientation de l'effecteur et de son élévation. Quant à la dextérité globale, elle est de 0.1302.

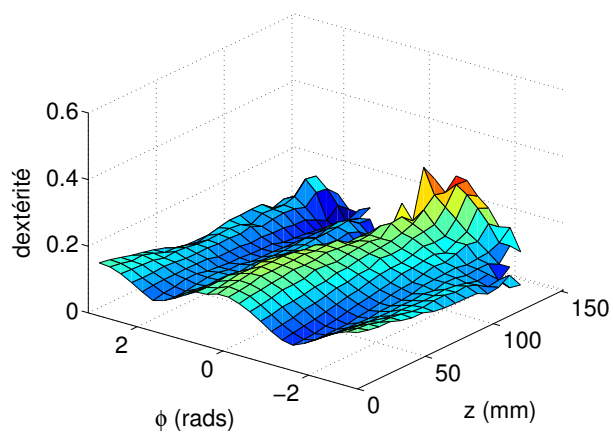


FIG. B.53 – Dextérité du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{P}\check{R}\check{R}$  en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).

## B.8 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$

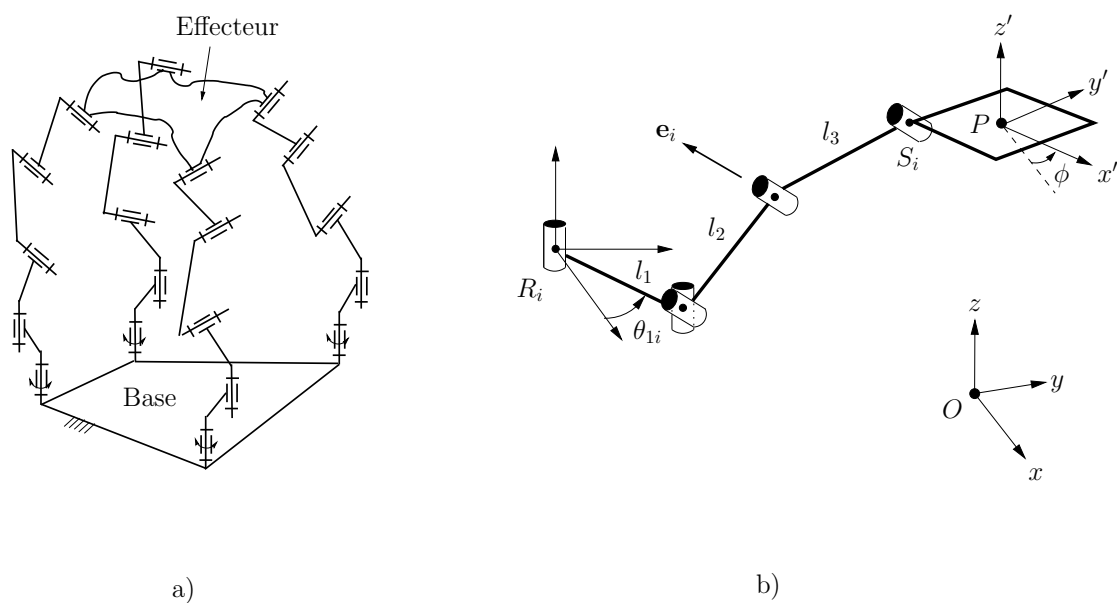


FIG. B.54 – a) Manipulateur 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{P}\check{R}\check{R}$ , b) Chaîne cinématique  $\check{R}\check{R}\check{R}\check{P}\check{R}$ .

### B.8.1 PGI et espace atteignable

Soit les vecteur suivants :

$$\mathbf{v}_{1i} = [l_1 \cos \theta_{1i}, l_1 \sin \theta_{1i}, 0]^T, \quad (\text{B.130})$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i}, \quad (\text{B.131})$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_{0i}, \quad (\text{B.132})$$

où  $\mathbf{e}_{0i}$  est défini à partir des mêmes angles  $\alpha$  et  $\beta$  décrit dans les précédentes sections du rapport. Ici, ce vecteur est attaché à l'effecteur et doit être prémultiplié par  $\mathbf{Q}$  pour l'exprimer dans le repère fixe. À partir des trois vecteurs ci-dessus, la procédure pour obtenir la solution du PGI du 4- $\overset{\text{R}}{\text{R}}\overset{\text{R}}{\text{R}}\overset{\text{R}}{\text{R}}$  est exactement la même que pour le 4- $\overset{\text{R}}{\text{R}}\overset{\text{R}}{\text{R}}\overset{\text{R}}{\text{R}}$ . Le développement mathématique suivant mène à une équation à résoudre pour trouver la coordonnée articulaire  $\theta_{1i}$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i, \\ 0 &= (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{e}_i &= (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i)^T \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.133})$$

d'où on tire :

$$A_i \cos \theta_{1i} + B_i \sin \theta_{1i} = C_i, \quad (\text{B.134})$$

avec

$$A_i = e_{xi} l_1, \quad (\text{B.135})$$

$$B_i = e_{yi} l_1, \quad (\text{B.136})$$

$$C_i = a_{xi} e_{xi} + a_{yi} e_{yi} + a_{zi} e_{zi}. \quad (\text{B.137})$$

Les solutions de cette équation sont :

$$t_{1i,2} = \frac{B_i \pm \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - C_i^2}}{(A_i - C_i)}. \quad (\text{B.138})$$

La variable articulaire recherchée est donc :

$$\theta_{1i,2} = 2 \arctan(t_{1i,2}). \quad (\text{B.139})$$

De ces équations, on retient la contrainte permettant d'étudier l'espace atteignable du manipulateur, soit :

$$A_i^2 + B_i^2 - C_i^2 > 0. \quad (\text{B.140})$$

Il faut également tenir compte de la longueur des membrures 1 et 2 avec l'inégalité suivante :

$$|l_2 - l_3| < \|\mathbf{a}_i\| < |l_2 + l_3|. \quad (\text{B.141})$$

On utilise les équations ci-dessus pour obtenir l'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur (voir figure B.55). Les points d'attache au sol et à l'effecteur de même que les longueurs des membrures sont présentés aux tables B.14 à B.15)

TABLE B.14 – Paramètres du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  ( $\alpha = 3\pi/4$ )

| i | $\mathbf{r}_i$ (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ carré (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ rect. (mm) | $\beta_i$ (rads) |
|---|---------------------|------------------------------|------------------------------|------------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$   | $[-40, 0, 0]^T$              | $[-30, 0, 0]^T$              | $\pi/4$          |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$    | $[0, 40, 0]^T$               | $[0, 50, 0]^T$               | $-\pi/4$         |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$     | $[40, 0, 0]^T$               | $[30, 0, 0]^T$               | $5\pi/4$         |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$    | $[0, -40, 0]^T$              | $[0, -50, 0]^T$              | $3\pi/4$         |

TABLE B.15 – Longueur des membrures du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 100 mm |
| $l_2$     | 100 mm |
| $l_3$     | 100 mm |

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est -0.5 et 2 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ .

## B.8.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

Pour obtenir les matrices jacobiennes, on dérive l'équation de contrainte suivante :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i = 0$$

$$(\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{s}_{0i} - \dot{\mathbf{v}}_{1i})^T \mathbf{e}_i + (\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{1i})^T \dot{\mathbf{e}}_i = 0. \quad (\text{B.142})$$

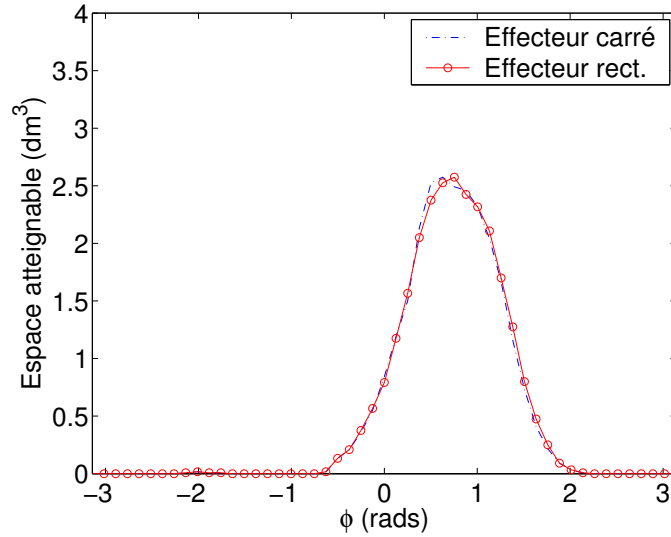


FIG. B.55 – Espace atteignable du 4- $\underline{\check{R}}\check{R}\check{R}\check{R}$  en fonction de l'orientation de l'effecteur.

Or,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}\mathbf{Q}\dot{\phi}, \quad (\text{B.143})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{E}\mathbf{e}_i\dot{\phi}, \quad (\text{B.144})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{1i} = \mathbf{E}\mathbf{v}_{1i}\dot{\theta}_{1i}. \quad (\text{B.145})$$

Après substitution et simplification, on obtient :

$$\mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{u}_i^T \mathbf{E}\mathbf{e}_i + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i) \dot{\phi} = (\mathbf{E}\mathbf{v}_{1i})^T \mathbf{e}_i \dot{\theta}_{1i}. \quad (\text{B.146})$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  deviennent donc :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & (\mathbf{u}_1^T \mathbf{E} + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{01})^T) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T & (\mathbf{u}_2^T \mathbf{E} + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{02})^T) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^T & (\mathbf{u}_3^T \mathbf{E} + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{03})^T) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4^T & (\mathbf{u}_4^T \mathbf{E} + (\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{s}_{04})^T) \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.147})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}\mathbf{v}_{11})^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{E}\mathbf{v}_{12})^T \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{E}\mathbf{v}_{13})^T \mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\mathbf{E}\mathbf{v}_{14})^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.148})$$

### B.8.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{E}\mathbf{e}_i$  est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$ . Ceci correspond à une limite horizontale de l'espace

atteignable du manipulateur. De plus, la contrainte sur la norme des vecteurs  $\mathbf{a}$  (limite de l'espace atteignable) indique qu'il y a également singularité lorsqu'un des vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$  associé i.e. lorsqu'une des pattes est en complète extension ou totalement repliée sur elle-même. La figure B.56 montre un exemple d'espace atteignable du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  pour un effecteur orienté à  $\phi = \pi/2$ .

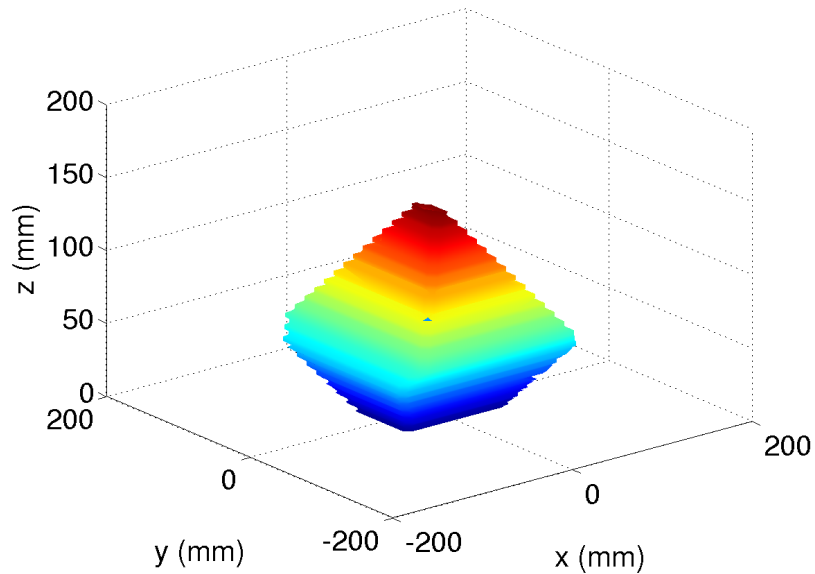


FIG. B.56 – Espace atteignable du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (effecteur rectangulaire et  $\phi = \pi/2$ ).

### B.8.2.2 Singularités de type 2

Tout comme pour les manipulateurs 4- $\underline{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  et 4- $\check{P}\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , le 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  est en position singulière du deuxième type lorsque tous les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont soit dans un même plan, soit tous verticaux. Quant aux autres lieux de singularité, ils sont obtenus numériquement et sont présentés aux figures B.57 à B.60.

Un fois de plus, une base carrée est inappropriée comme configuration. L'espace de travail divisé en 4 parties, ce qui est beaucoup trop restreint. En optant pour une base rectangulaire les singularités sont assez éloignées lorsque l'effecteur est au centre de la plage angulaire d'espace atteignable. Toutefois, aux limites de cette même plage, leur configuration de type "scelle de cheval" rend l'espace de travail moins intéressant.

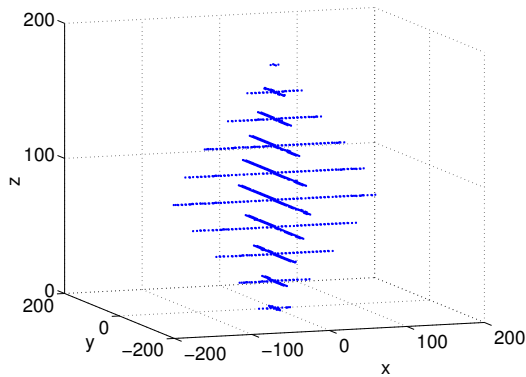


FIG. B.57 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (effecteur carré,  $\phi = 0$ ).

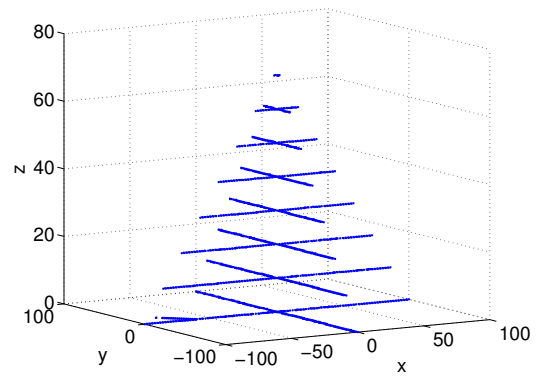


FIG. B.58 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (effecteur carré,  $\phi = \pi/2$ ).

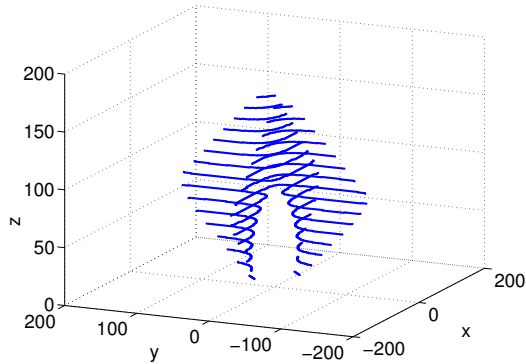


FIG. B.59 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (effecteur rect. et  $\phi = 0$ ).

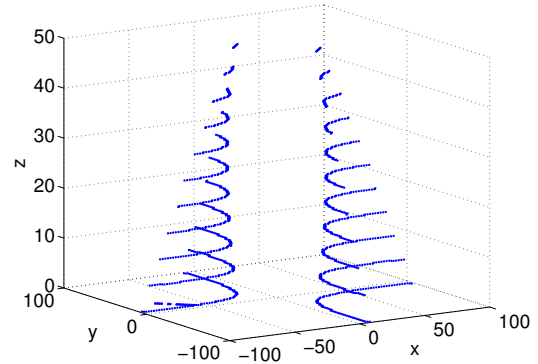


FIG. B.60 – Lieux de singularité du 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$  (base rect. et  $\phi = \pi/2$ ).

### B.8.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs s'obtiennent en faisant le produit vectoriel entre les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ . Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  étant tous fixés à l'effecteur avec des angles  $\beta_i$  différents, aucune singularité ne peut être rencontrée par le manipulateur 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ .

### B.8.4 Dexterité

Le graphique ci-dessous montre donc l'évolution de la dextérité en fonction de l'orientation de l'effecteur et de son élévation. Quant à la dextérité globale, elle est de 0.1302.

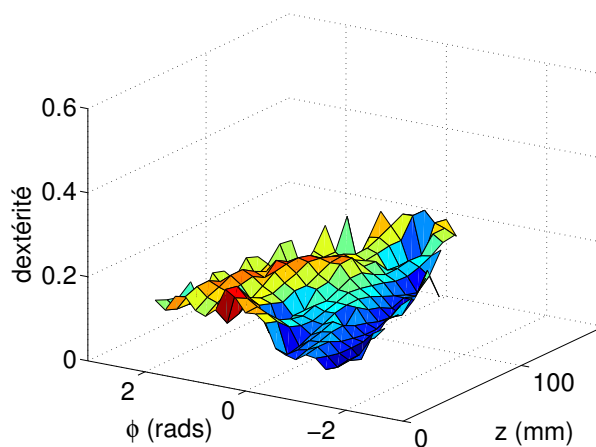


FIG. B.61 – Dexterite du 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$  en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).



## B.9 4- $\underline{\dot{R}}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$

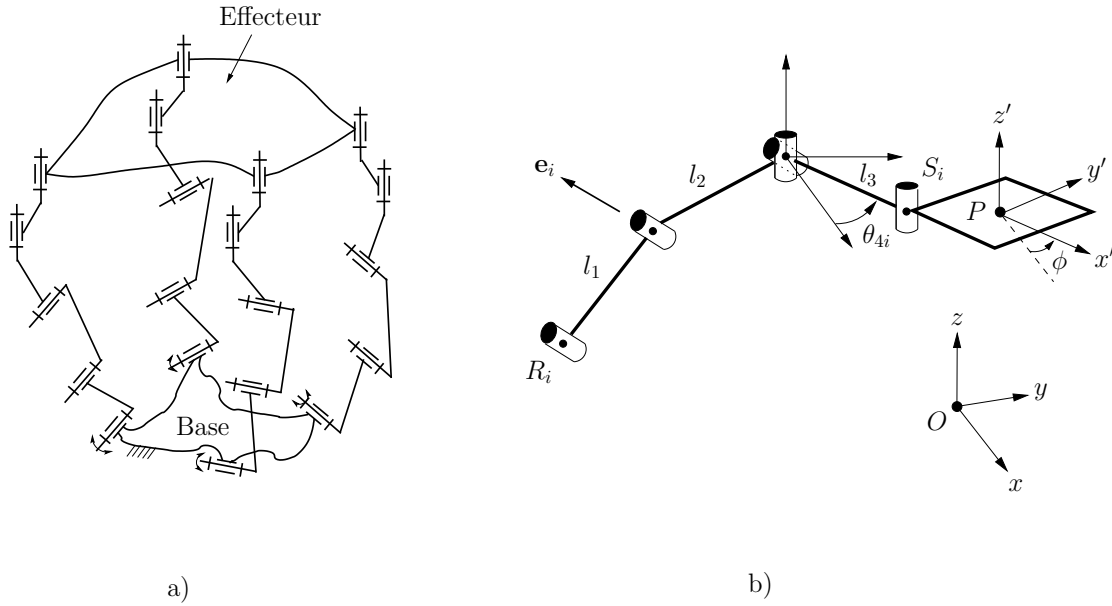


FIG. B.62 – a) Manipulateur 4- $\underline{\dot{R}}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ , b) Chaîne cinématique  $\underline{\dot{R}}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ .

### B.9.1 PGI et espace atteignable

La procédure pour obtenir la solution du PGI du 4- $\underline{\dot{R}}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$  est la suivante :

1. Déterminer l'angle du quatrième joint rotoïde ( $\theta_{4i}$ ) de chaque patte pour connaître les vecteurs  $\mathbf{v}_{3i}$ ,
2. Calculer les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  qui relient le point  $r_i$  aux origines des vecteurs  $\mathbf{v}_{3i}$ ,
3. En travaillant le plan formé par les vecteurs  $\mathbf{v}_{1i}$  et  $\mathbf{v}_{2i}$ , calculer les coordonnées articulaires  $\theta_{1i}$ .

Premièrement, voici quelques vecteurs importants de chaque pattes :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{3i}, \quad (\text{B.149})$$

$$\mathbf{v}_{3i} = [l_3 \cos \theta_{4i}, l_3 \sin \theta_{4i}, 0]^T, \quad (\text{B.150})$$

$$\mathbf{e}_i = [\cos \alpha_i \cos \beta_i, \cos \alpha_i \sin \beta_i, \sin \alpha_i]^T, \quad (\text{B.151})$$

où l'angle  $\theta_{4i}$  est défini par rapport au repère fixe. Les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{e}_i$  doivent en tout temps être perpendiculaires entre eux :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{B.152})$$

En isolant les termes trigonométriques en  $\theta_{4i}$  comme il a été fait à la section précédente pour le 4- $\check{R}\check{R}\check{R}\check{R}$ , on obtient l'équation suivante :

$$A \cos \theta_{4i} + B \sin \theta_{4i} = C, \quad (\text{B.153})$$

où

$$A_i = e_{xi}l_3, \quad (\text{B.154})$$

$$B_i = e_{yi}l_3, \quad (\text{B.155})$$

$$C_i = P_{xi}e_{xi} + P_{yi}e_{yi} + P_{zi}e_{zi}. \quad (\text{B.156})$$

Cette équation se résout de la même manière que pour le mécanisme précédent. Ses solutions sont donc :

$$t_{4i,1,2} = \frac{B_i \pm \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - C_i^2}}{(A_i - C_i)}, \quad (\text{B.157})$$

où

$$\theta_{4i,1,2} = 2 \arctan(t_{4i,1,2}). \quad (\text{B.158})$$

Une fois l'angle  $\theta_{4i}$  trouvé et le vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$  connu, on calcule le vecteur  $\mathbf{u}_i$  par une simple somme vectorielle, soit :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{s}_{0i} - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{3i}. \quad (\text{B.159})$$

Or, ce dernier vecteur peut également s'écrire comme ceci :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{1i} + \mathbf{v}_{2i}. \quad (\text{B.160})$$

Toutefois, étant donné que l'angle  $\theta_{1i}$  est une rotation dans un plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{e}_i$ , il est plus pratique de travailler dans ce plan plutôt que dans le repère fixe habituel. Pour ce faire, on définit un nouveau repère à l'aide des deux rotations suivantes :

1.  $\beta'_i = \beta_i + \frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $z$  du repère fixe
2.  $\alpha'_i = \alpha_i - \frac{\pi}{2}$  autour du nouvel axe  $x$

Les matrices de rotation associées sont :

$$\mathbf{R}_{1i} = \begin{bmatrix} \cos \beta'_i & -\sin \beta'_i & 0 \\ \sin \beta'_i & \cos \beta'_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{2i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha'_i & -\sin \alpha'_i \\ 0 & \sin \alpha'_i & \cos \alpha'_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.161})$$

Après ces 2 rotations (la rotation complète étant  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{2i}^T \mathbf{R}_{1i}^T$ ), l'axe  $y'$  du nouveau repère  $\mathcal{R}'$  coïncide avec le vecteur  $\mathbf{e}_i$ , alors que l'axe  $x'$  est demeuré dans le plan horizontal  $xy$  initial (voir figure B.63). Dans ce repère, le vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$  s'exprime comme ceci :

$$\mathbf{v}'_{1i} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_{1i} \\ 0 \\ l_1 \sin \theta_{1i} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.162})$$

Maintenant, en procédant comme pour le 4-RUU par exemple, il est possible d'obtenir une expression faisant intervenir la variable articulaire désirée. Il suffit d'exprimer la norme du vecteur  $\mathbf{v}'_{2i}$  en fonction des vecteurs  $\mathbf{v}'_{1i}$  et  $\mathbf{u}'_i$  (voir la figure B.64) :

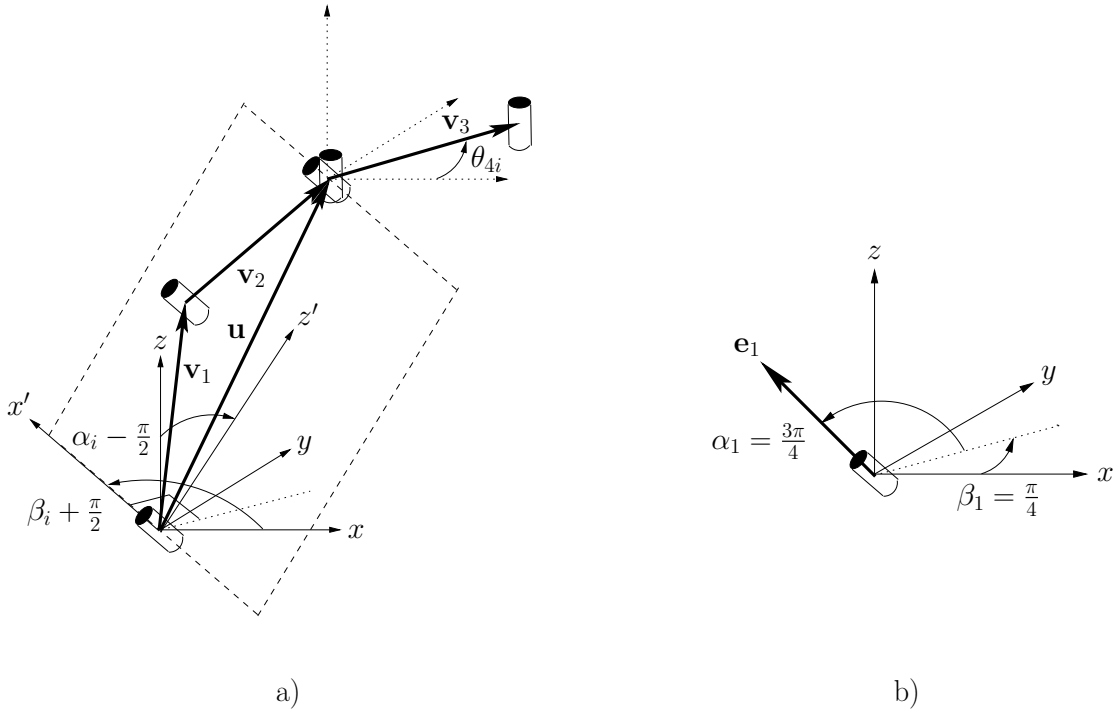


FIG. B.63 – a) rotations du repère fixe, b) rotation du vecteur  $\mathbf{e}_1$ .

$$\begin{aligned} l_2^2 &= \mathbf{v}'_{2i}{}^T \mathbf{v}'_{2i}, \\ &= (\mathbf{u}'_i - \mathbf{v}'_{1i})^T (\mathbf{u}'_i - \mathbf{v}'_{1i}), \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \mathbf{v}'_{1i}{}^T \mathbf{v}'_{1i} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{v}'_{1i}. \end{aligned} \quad (\text{B.163})$$

En développant tous les termes, on obtient l'expression suivante après simplifications :

$$u'_{xi} \cos \theta_{1i} + u'_{zi} \sin \theta_{1i} = \frac{\|\mathbf{u}'_i\|^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1} = F_i. \quad (\text{B.164})$$

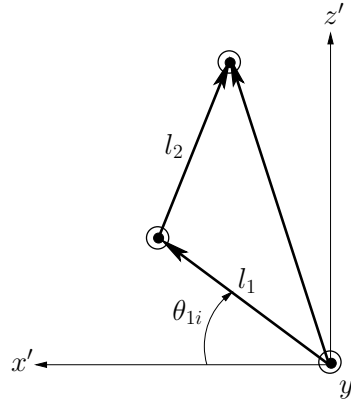


FIG. B.64 – 4- $\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$  (vue dans le plan des membrures 1 et 2).

Cette équation possède 2 solutions pour  $t_{1i}$ , soit :

$$t_{1i,2} = \frac{u_{zi} \pm \sqrt{u_{xi}^2 + u_{zi}^2 - F_i^2}}{(u_{xi} + F_i)}, \quad (\text{B.165})$$

où

$$\theta_{1i,2} = 2 \arctan(t_{1i,2}). \quad (\text{B.166})$$

De ces équations, on retient les contraintes permettant d'étudier l'espace atteignable du manipulateur, soit :

$$A_i^2 + B_i^2 - C_i^2 > 0, \quad (\text{B.167})$$

$$u_{xi}^2 + u_{zi}^2 - F_i^2 > 0. \quad (\text{B.168})$$

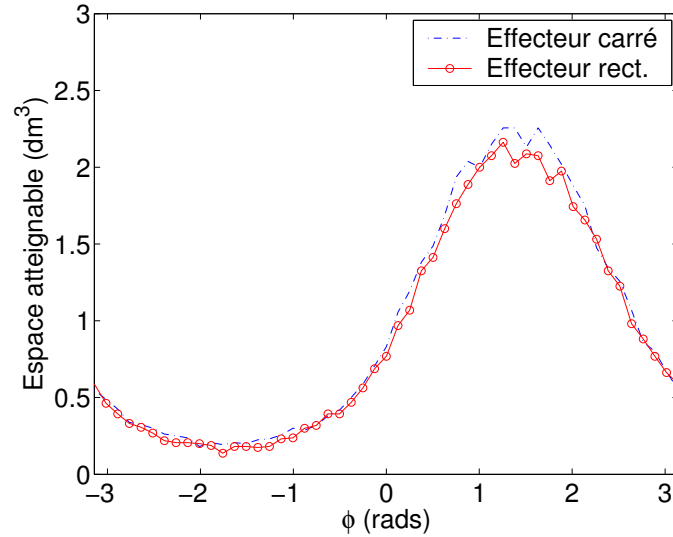
On utilise celles-ci pour obtenir l'évolution de l'espace atteignable en fonction de l'orientation de l'effecteur (voir figure B.65). Les points d'attache au sol et à l'effecteur de même que les longueurs des membrures sont présentés aux tables B.16 et B.17.

TAB. B.16 – Paramètres du 4- $\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$  ( $\alpha = 3\pi/4$ )

| i | $\mathbf{r}_i$ (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ carré (mm) | $\mathbf{s}_{0i}$ rect.(mm) | $\beta_i$ (rads) |
|---|---------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------|
| 1 | $[-80, -80, 0]^T$   | $[-40, 0, 0]^T$              | $[-30, 0, 0]^T$             | $\pi/4$          |
| 2 | $[-80, 80, 0]^T$    | $[0, 40, 0]^T$               | $[0, 50, 0]^T$              | $-\pi/4$         |
| 3 | $[80, 80, 0]^T$     | $[40, 0, 0]^T$               | $[30, 0, 0]^T$              | $5\pi/4$         |
| 4 | $[80, -80, 0]^T$    | $[0, -40, 0]^T$              | $[0, -50, 0]^T$             | $3\pi/4$         |

TAB. B.17 – Longueur des membrures du 4- $\underline{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ 

| Paramètre | Valeur |
|-----------|--------|
| $l_1$     | 100 mm |
| $l_2$     | 100 mm |
| $l_3$     | 100 mm |

FIG. B.65 – Espace atteignable du 4- $\underline{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$  en fonction de l'orientation de l'effecteur.

La plage d'opération angulaire la plus intéressante pour l'effecteur est 0 et 3 rads. C'est donc dans cette plage d'orientations que seront étudiés les lieux de singularités du manipulateur 4- $\underline{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ .

## B.9.2 Matrices jacobiennes et lieux de singularité

Pour obtenir les matrices jacobiennes, on dérive tout d'abord l'équation (B.163) par rapport au temps. Sachant que :

$$\dot{\mathbf{u}}'_i = \mathbf{R}_i^T (\dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} \dot{\phi} - \mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i} \dot{\theta}_{4i}), \quad (\text{B.169})$$

$$\dot{\mathbf{v}}'_{1i} = \mathbf{E}_2 \mathbf{v}'_{1i} \dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.170})$$

où

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.171})$$

On peut donc écrire :

$$\mathbf{v}'_{2i} \mathbf{R}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}'_{2i} \mathbf{R}_i^T \mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} \dot{\phi} - \mathbf{v}'_{2i} \mathbf{R}_i^T \mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i} \dot{\theta}_{4i} = \mathbf{v}'_{2i} \mathbf{E}_2 \mathbf{v}'_{1i} \dot{\theta}_{1i}. \quad (\text{B.172})$$

Dans la dernière équation, le terme  $\dot{\theta}_{4i}$  est inconnu. On peut le trouver utilisant la condition de perpendicularité entre le vecteur  $\mathbf{u}_i$  et le vecteur  $\mathbf{e}_i$  (eq. (B.152)) que l'on dérive par rapport au temps :

$$\mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i \dot{\phi} = (\mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i})^T \mathbf{e}_i \dot{\theta}_{4i}. \quad (\text{B.173})$$

Ici,

$$\dot{\mathbf{v}}_{3i} = \mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i} \dot{\theta}_{4i}, \quad (\text{B.174})$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} \dot{\phi}. \quad (\text{B.175})$$

On isole  $\dot{\theta}_{4i}$  :

$$\dot{\theta}_{4i} = \frac{1}{(\mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i})^T \mathbf{e}_i} \left[ \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i \dot{\phi} \right]. \quad (\text{B.176})$$

On substitue maintenant la valeur de  $\dot{\theta}_{4i}$  dans l'équation (B.172) et on fait la simplification suivante :  $\mathbf{v}'_{2i} \mathbf{R}_i^T = (\mathbf{R}_i \mathbf{v}'_{2i})^T = \mathbf{v}_{2i}^T$ .

$$(\mathbf{v}_{2i}^T - C_i \mathbf{e}_i^T) \dot{\mathbf{p}}_i + (\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i} - C_i (\mathbf{E}_1 \mathbf{Q} \mathbf{s}_{0i})^T \mathbf{e}_i) \dot{\phi} = \mathbf{v}'_{2i} \mathbf{E}_2 \mathbf{v}'_{1i} \dot{\theta}_{1i}, \quad (\text{B.177})$$

où  $C_i$  est un scalaire égal à :

$$C_i = \frac{\mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i}}{(\mathbf{E}_1 \mathbf{v}_{3i})^T \mathbf{e}_i}. \quad (\text{B.178})$$

Les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont obtenues directement à partir des équation ci-dessus (pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ).

### B.9.2.1 Singularités de type 1

Le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$  est nul lorsqu'au moins un des vecteurs  $\mathbf{E} \mathbf{e}_i$  est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}_{1i}$ . Ceci correspond à une limite horizontale de l'espace atteignable du manipulateur. De plus, la contrainte sur la norme des vecteurs  $\mathbf{a}$  (limite de l'espace atteignable) indique qu'il y a également singularité lorsqu'un des vecteurs  $\mathbf{v}_{2i}$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{v}_{3i}$  associé i.e. lorsqu'une des pattes est en complète extension ou

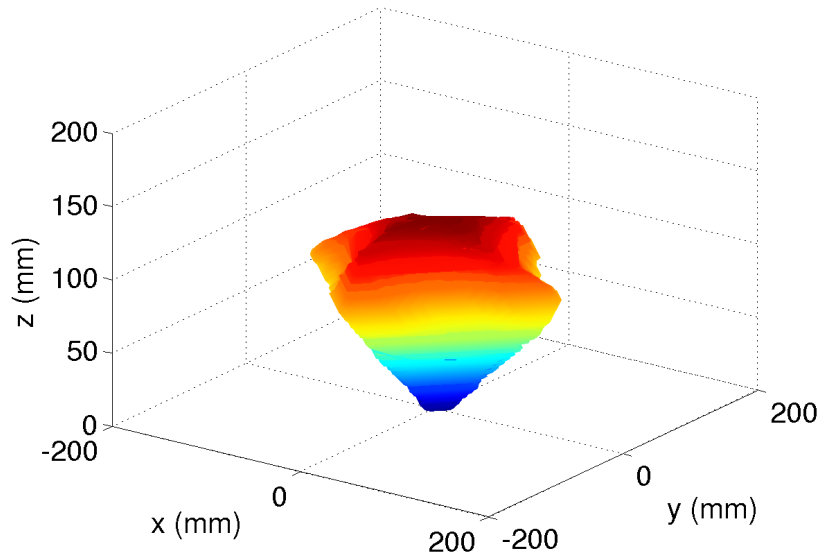


FIG. B.66 – Espace atteignable du 4- $\underline{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}'$  (effecteur rectangulaire et  $\phi = \pi/2$ ).

totalemen repliée sur elle-même. La figure B.66 montre un exemple d'espace atteignable du 4- $\underline{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}'$  pour un effecteur orienté à  $\phi = \pi/2$ .

À première vue, un manipulateur avec un espace atteignable de ce type est plus ou moins pratique. Bien que la forme soit convexe, la mobilité n'est intéressante que pour des valeurs "élevées" de  $z$  : il y a donc un léger manque de versatilité du manipulateur avec les paramètres choisis.

### B.9.2.2 Singularités de type 2

Tout comme pour les manipulateurs 4- $\underline{P}\dot{R}\dot{R}\dot{R}'$  et 4- $\underline{P}\dot{R}\dot{R}\dot{R}$ , le 4- $\underline{R}\dot{R}\dot{R}\dot{R}'$  est en position singulière du deuxième type lorsque tous les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont soit dans un même plan, soit tous verticaux. Quant aux autres lieux de singularité, ils sont obtenus numériquement et sont présentés aux figures B.67 à B.70.

Un fois de plus, une base carrée est inappropriée comme configuration. L'espace de travail divisé en 4 parties, ce qui est beaucoup trop restrictif. Par contre, une base rectangulaire est beaucoup mieux. Au centre de la plage angulaire d'espace atteignable, les singularités semblent suffisamment éloignées pour rendre l'espace de travail intéressant. Toutefois, aux limites de cette même plage, elles sont un peu plus encombrantes.

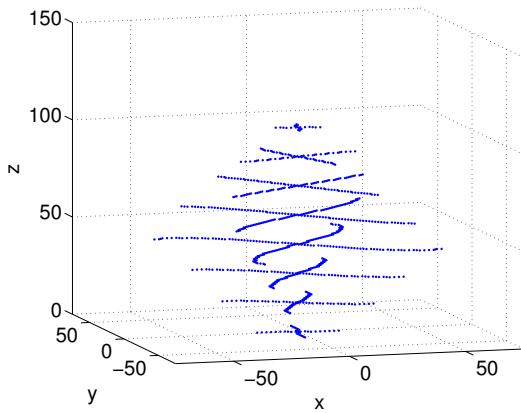


FIG. B.67 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$  (effecteur carré,  $\phi = 0$ ).

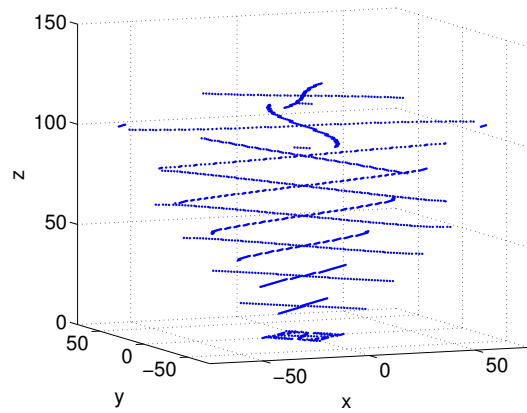


FIG. B.68 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$  (effecteur carré,  $\phi = \pi/2$ ).

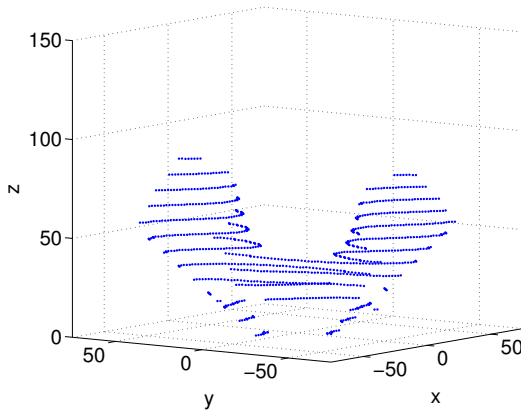


FIG. B.69 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$  (effecteur rect. et  $\phi = 0$ ).

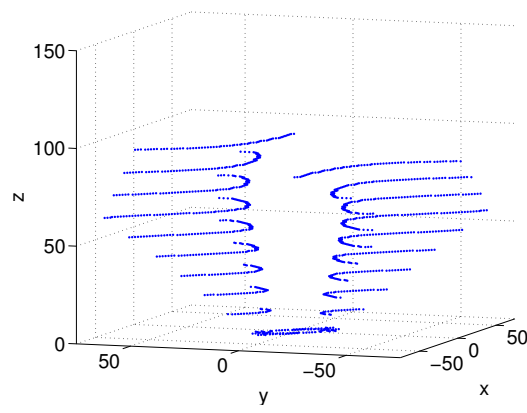


FIG. B.70 – Lieux de singularité du 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$  (base rect. et  $\phi = \pi/2$ ).

### B.9.3 Singularités de contraintes

Comme expliqué précédemment, l'étude des singularités de contrainte se fait à partir de vecteurs appartenant aux 2 groupes d'articulations contenus dans une même chaîne cinématique (patte). Ici, les perpendiculaires à ces vecteurs s'obtiennent en faisant le produit vectoriel entre les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{k}_i$ . Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  étant tous fixés au sol avec des angles  $\beta_i$  différents, aucune singularité ne peut être rencontrée par le manipulateur 4- $\underline{\text{R}}\text{R}\text{R}\text{R}$ .



### B.9.4 Dexterité

Le graphique ci-dessous montre donc l'évolution de la dextérité en fonction de l'orientation de l'effecteur et de son élévation. Quant à la dextérité globale, elle est de 0.21.

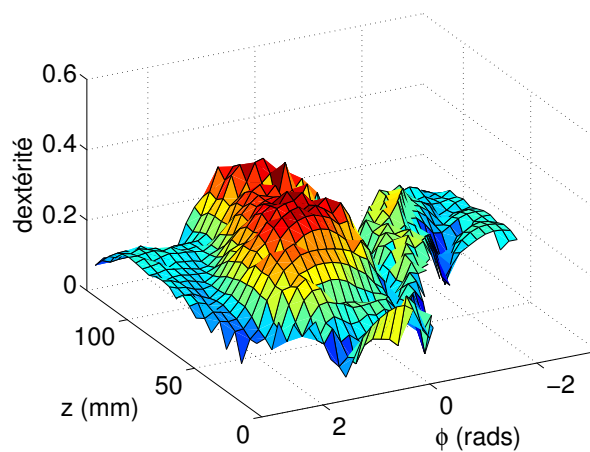


FIG. B.71 – Dexterite du 4-RRRR en fonction de l'orientation (effecteur rectangulaire).

# Annexe C

## Forces aux actionneurs

Cette annexe présente les courbes des forces nécessaires aux actionneurs prismatiques pour effectuer la trajectoire décrite à la section 3.5, et ce, pour différentes accélérations maximales désirées à l'effecteur.

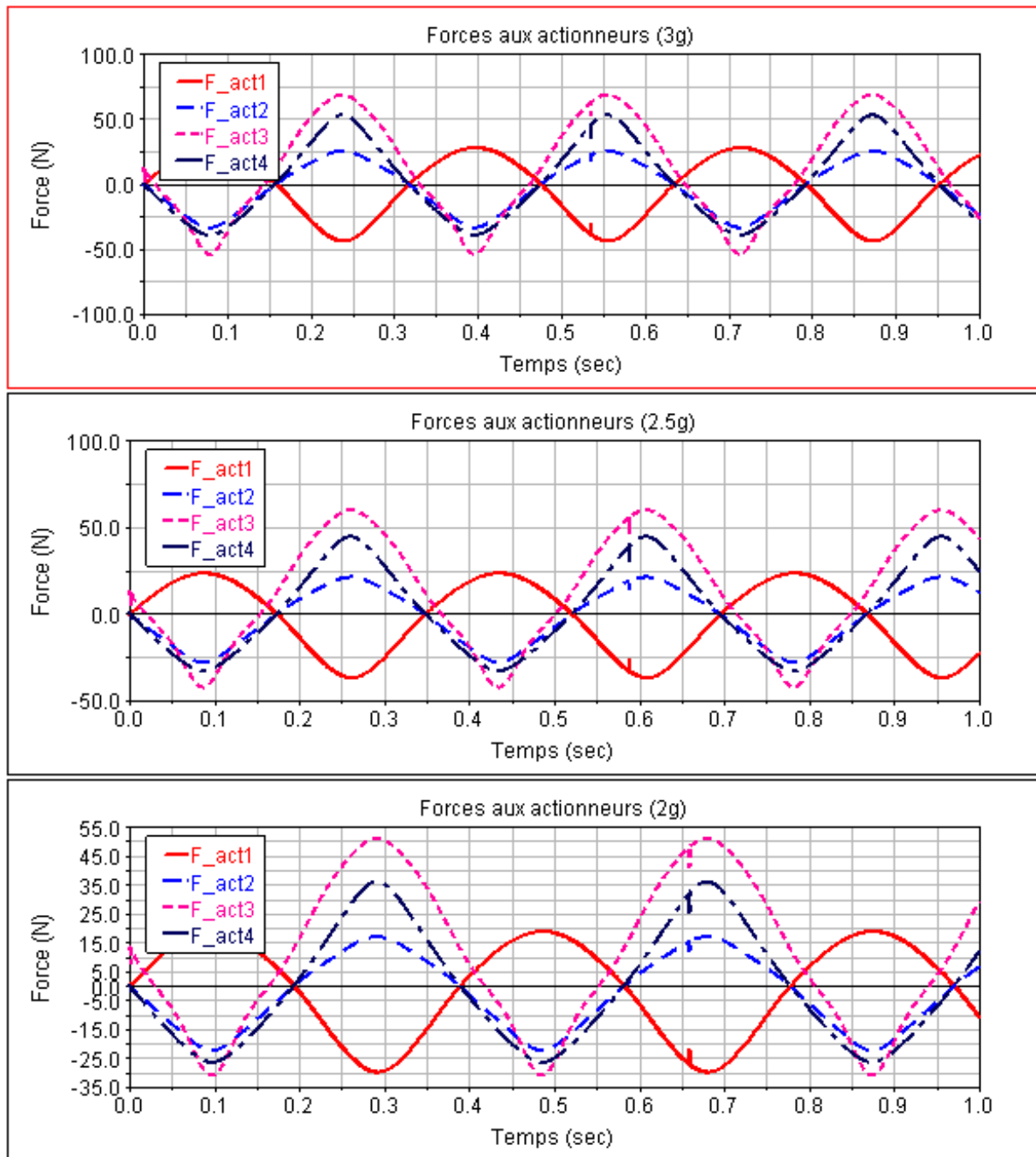


FIG. C.1 – Forces aux actionneurs en fonction de l'accélération maximale désirée à l'effecteur.

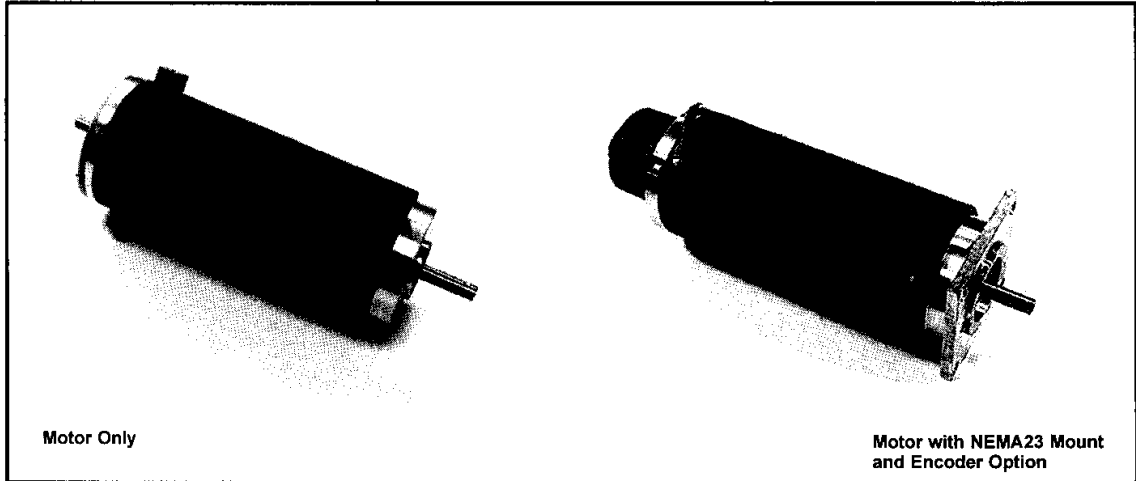
# Annexe D

## Fiches techniques

Cette annexe contient les fiches techniques des principales composantes du manipulateur, telles le moteur, le réducteur et les guides linéaires.

# BRUSH TYPE DC SERVO MOTOR

**with Optical Encoder, Gearhead and NEMA23 Mount Options**



Servo Systems Co. P/N 23SMDC-LCSS

**Motor Ratings**

- Continuous Stall Torque: 55 oz-in.
- Peak Torque: 400 oz-in.
- Max. Terminal Voltage: 60VDC
- Max. Operating Speed: 6000 RPM

**Mechanical Data**

- Rotor Inertia: 0.008 oz-in./sec/sec
- Damping Constant: 0.25oz-in./KRPM
- Thermal Resistance: 4 Deg. C/Watt
- Max. Armature Temp: 155 Deg. C
- Max. Friction Torque: 3 oz-in.
- Max. Radial Load (1" from Bearing): 10 Lbs.
- Weight: 3.5 Lbs.(motor only)

**Electrical Data**

- Torque Constant: 13.7 oz-in./Amp
- Voltage Constant: 10.2 V./KRPM
- Terminal Resistance: 1.6 Ohms
- Electrical Time Constant: 2.6 msec.
- Mechanical Time Constant: 8.9 msec.
- Max. Continuous Current: 4 Amps
- Armature Inductance: 4.1 mh.
- Max. Peak Current: 34 Amps

**SEE NEXT PAGE FOR OUTLINE DIMENSIONS AND SPECIFICATIONS**

**Recommended Servo Amplifier is Advanced Motion Controls Model# 25A8 . . . . . \$295.00**

**Ordering Information**

**Stock No. RDM-103**  
**P/N 23SMDC-LCSS . . . . . \$189.00**  
**Servo Motor with dual shaft (no encoder)**  
**SEE FIGURE #1 FOR DIMENSIONS**

**Stock No. RDM-103**  
**P/N 23SMDC-LCSS . . . . . \$189.00**  
**Servo Motor with H.P. 500 ppr single ended modular incremental encoder mounted.**  
**P/N HEDS-5640-A06 . . . . . \$82.00**  
**Stock No. ADC-244**  
**SEE FIGURE #2 FOR ENCODER DATA**

**Stock No. RDM-103**  
**P/N 23SMDC-LSCC . . . . . \$189.00**  
**Servo Motor with Dynapar 1000 ppr line driver output modular incremental encoder with 3 foot shielded cable.**  
**P/N SSCM15-1000-5VLD . . . . . \$110.00**  
**Stock No. ADC-256**  
**SEE FIGURE #4 FOR ENCODER DATA**

**Optional NEMA23 Mount add \$30.00 to price**  
**SEE FIGURE #3**

**Other Encoder Resolutions available**

**Precision Gearheads available**

# BRUSH TYPE DC SERVO MOTOR

## Mechanical Dimension Data

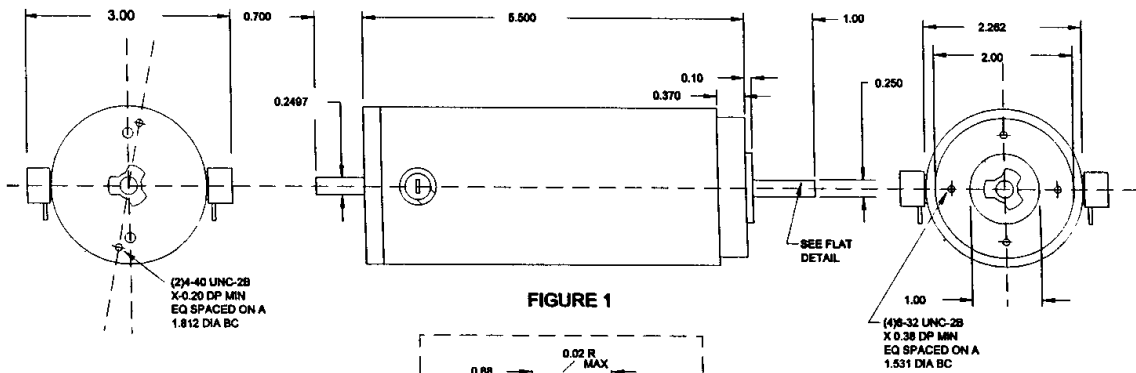
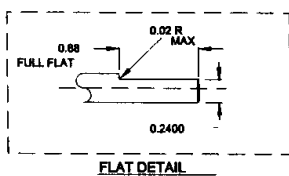
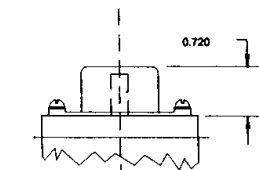


FIGURE 1



FLAT DETAIL



| ENCODER SPECS.    |         |
|-------------------|---------|
| INPUT .....       | 5 VDC   |
| OUTPUT .....      | 5V TTL  |
| CHANNELS .....    | A,B,Z   |
| RESOLUTION .....  | 500 PPR |
| TERMINATION ..... | PINS*   |

\*MATING CONN. SUPPLIED

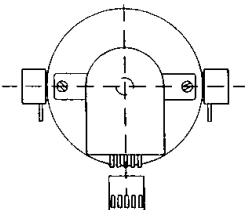
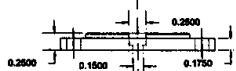


FIGURE 2



4 HOLES EQUALLY SPACED  
COUNTERSINK ON A 1.531  
DIA. BC..

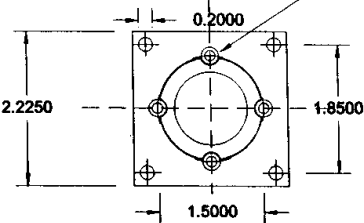
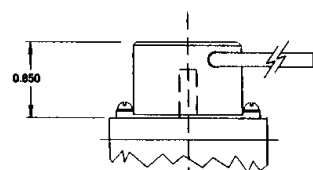


FIGURE 3



| ENCODER SPECS.    |                  |
|-------------------|------------------|
| INPUT .....       | 5 VDC            |
| OUTPUT .....      | 5V LINE DRIVER   |
| CHANNELS .....    | A,B,Z WITH COMP. |
| RESOLUTION .....  | 1000 PPR         |
| TERMINATION ..... | 3FT CABLE        |

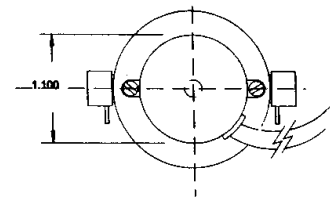
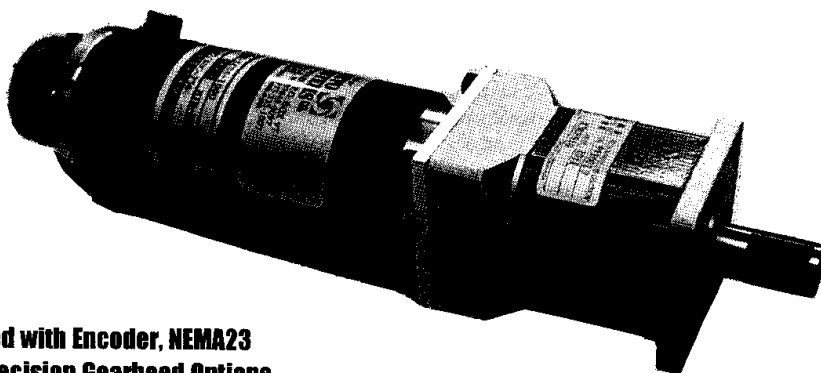


FIGURE 4

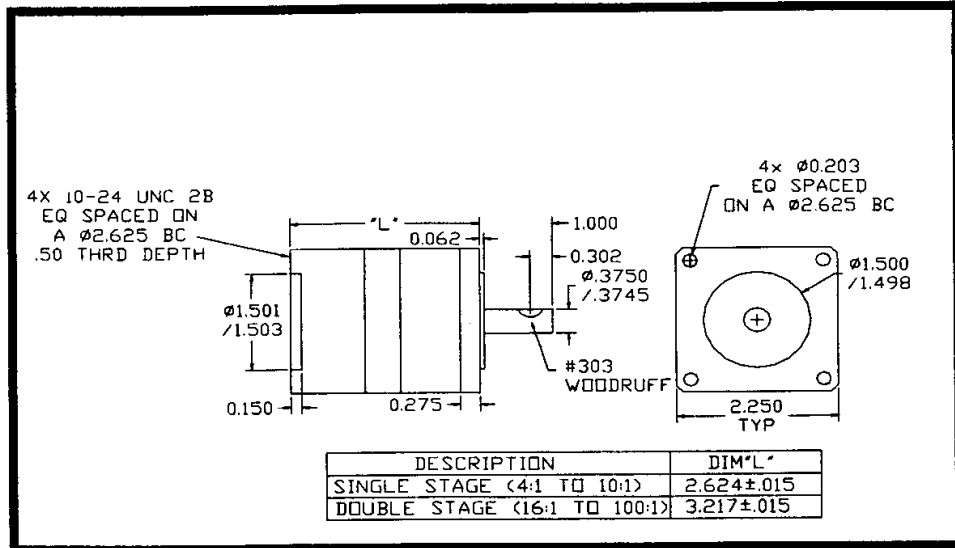


Motor Pictured with Encoder, NEMA23  
Mount and Precision Gearhead Options

# LOW COST PLANETARY GEARHEAD



## SIZE 23 "S" Series



| part #  | ratio | continuous output torque @ 1500rpm input in-lbs | continuous output torque @ 3500rpm input in-lbs | continuous output torque @ 5000rpm input in-lbs | gearhead inertia at input lb-in-sec <sup>2</sup> |
|---------|-------|---|---|---|--|
| 23SP004 | 4:1   | 185   | 133   | 109   | 4.19E-05   |
| 23SP007 | 7:1   | 155   | 126   | 110   | 1.54E-05   |
| 23SP010 | 10:1  | 125   | 107   | 97  | 1.08E-05   |
| 23SP016 | 16:1  | 214   | 190   | 175   | 4.26E-05   |
| 23SP028 | 28:1  | 223   | 208   | 197   | 1.57E-05   |
| 23SP049 | 49:1  | 164   | 158   | 154   | 1.52E-05   |
| 23SP070 | 70:1  | 166   | 161   | 158   | 1.06E-05   |
| 23SP100 | 100:1 | 126   | 124   | 122   | 1.06E-05   |

Add -L to part number for low backlash units.

|  |                                 |                                   |
|--|---------------------------------|-----------------------------------|
|  | Weight: Ratio's 3:1 to 10:1     | 1.85 lbs                          |
|  | Ratio's 16:1 to 100:1           | 2.90 lbs                          |
|  | Backlash: Ratio's 3:1 to 10:1   | Standard = 12arc-minutes          |
|  |                                 | Low backlash unit = 6arc-minutes  |
|  | Ratio's 16:1 to 100:1           | Standard = 16arc-minutes          |
|  |                                 | Low backlash unit = 10arc-minutes |
|  | Efficiency: Ratio's 3:1 to 10:1 | 90%                               |
|  | Ratio's 16:1 to 100:1           | 85%                               |
|  | Input rpm range                 | 0 to 5000 rpm                     |
|  | Peak torque:                    | 15% above continuous rating       |

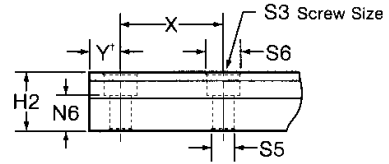
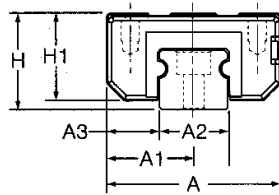
**Prices start at  
\$240.00**

NOTE: Repeated peak torque loading may cause failure

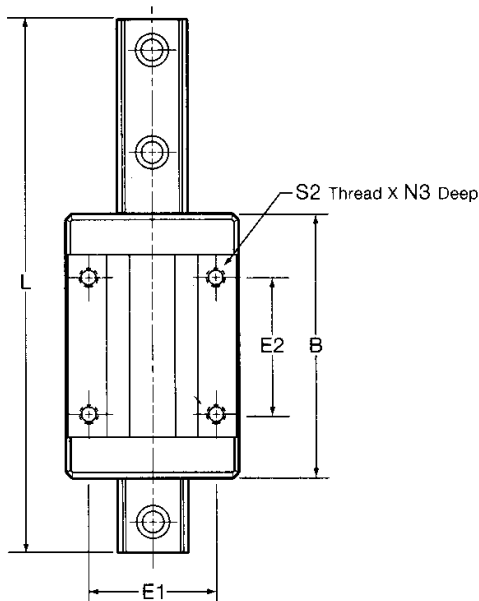
# AccuGlide

## Linear Guide #3 (Miniature Series)

*Low Profile, Compact Design*



† "Y" dimension will be equal on both ends unless specified by customer.



**NOTE:**

The AccuGlide linear guide Miniature Series carriages do not have retained balls. Removing the carriage from the rail without an arbor will result in the balls falling out.

**AccuGlide\* Linear Guide Miniature Series**

| (mm) |    |    |    |      |    |      |    |    |    |    |      |      |     |     |
|------|----|----|----|------|----|------|----|----|----|----|------|------|-----|-----|
| Size | A  | A1 | A2 | A3   | H  | H1   | H2 | B  | E1 | E2 | S2   | S3   | S5  | S6  |
| → 10 | 26 | 13 | 10 | 8    | 15 | 13   | 9  | 40 | 17 | 20 | M2,5 | M2,5 | 3   | 5,5 |
| 15   | 38 | 19 | 15 | 11,5 | 21 | 19   | 13 | 58 | 28 | 30 | M4   | M4   | 4,5 | 8   |
| 20   | 50 | 25 | 20 | 15   | 28 | 25,6 | 18 | 76 | 37 | 40 | M5   | M5   | 5,5 | 9,5 |

For more information, or to place an order, please contact your local authorized Thomson distributor or Thomson Industries, at 1-800-554-THOMSON, Fax: 1-800-445-0329, or E-mail at [linearguides@thomsonmail.com](mailto:linearguides@thomsonmail.com).

The specifications and data in this publication are believed to be accurate and reliable. However, it is the responsibility of the product user to determine the suitability of Thomson products for a specific application. While defective products will be replaced without charge if promptly returned, no liability is assumed beyond such replacement.

\* Trademark of Thomson Industries, Inc. THOMSON is registered in the U.S. Patent and Trademark Office and in other countries.



### Dynamic Load and Moment Ratings

**C** = Dynamic load rating  
**M<sub>p</sub>** = Dynamic pitch moment rating  
**M<sub>r</sub>** = Dynamic roll moment rating  
**M<sub>y</sub>** = Dynamic yaw moment rating

The dynamic load and moment ratings are based upon a 100 km travel life. In order to compare with bearings rated for 50 km, divide the dynamic capacity of the bearing rated for 50 km by 1.26.

### Static Load and Moment Capacities

**C<sub>o</sub>** = Static load capacity  
**M<sub>po</sub>** = Static pitch moment capacity  
**M<sub>ro</sub>** = Static roll moment capacity  
**M<sub>yo</sub>** = Static yaw moment capacity

The static load and moment capacities are the maximum radial load and moment load that should be applied to the bearing while there is no relative motion between the carriage and rail.

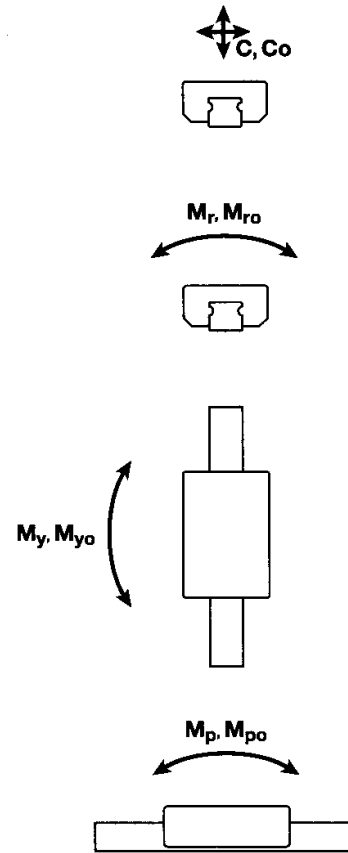
### Bearing Travel Life Calculation

$L = (C/F)^3 \times 100 \text{ km}$   
 where:  
**L** = travel life, km  
**C** = dynamic load rating, N  
**F** = applied dynamic load, N

$C_{min} = F \left(\frac{L}{100}\right)^{1/3}$   
 where:  
**C<sub>min</sub>** = minimum required dynamic load rating, N  
**F** = applied dynamic load, N  
**L** = required travel life, km

### Operating Parameters

**Maximum Velocity** = 3 m/s  
**Maximum Acceleration** = 50 m/s<sup>2</sup>  
**Maximum Temperature** = 80 °C



### AccuGlide\* Linear Guide Miniature Series

| Size | (mm) |     |    |                  | Load Rating N (lbf) |                   | Moment Rating Nm (lbf-ft)       |                                   |                |                 | MASS Carriage Rail |      |
|------|------|-----|----|------------------|---------------------|-------------------|---------------------------------|-----------------------------------|----------------|-----------------|--------------------|------|
|      | N3   | N6  | X  | L <sub>max</sub> | C (@ 100km)         | C <sub>o</sub>    | M <sub>p</sub> , M <sub>y</sub> | M <sub>po</sub> , M <sub>yo</sub> | M <sub>r</sub> | M <sub>ro</sub> | kg                 | kg/m |
| 10   | 4,5  | 5,5 | 25 | 1 500            | 2 820<br>(635)      | 5 300<br>1,190    | 10<br>(7)                       | 20<br>(15)                        | 15<br>(11)     | 28<br>(21)      | 0,045              | 0,65 |
| 15   | 6    | 7,5 | 40 | 1 500            | 6 375<br>(1,430)    | 15 200<br>(3,420) | 35<br>(26)                      | 66<br>(49)                        | 51<br>(38)     | 96<br>(71)      | 0,141              | 1,42 |
| 20   | 8    | 9,5 | 60 | 3 000            | 11 870<br>(2,670)   | 23 000<br>(5,170) | 75<br>(55)                      | 140<br>(105)                      | 125<br>(92)    | 235<br>(175)    | 0,345              | 2,55 |

‡ Maximum rail length in one section. Multiple sections can be butted for longer lengths.

For more information, or to place an order, please contact your local authorized Thomson distributor or Thomson Industries, at 1-800-554-THOMSON, Fax: 1-800-445-0329, or E-mail at linearguides@thomsonmail.com.



\* The specifications and data in this publication are believed to be accurate and reliable. However, it is the responsibility of the product user to determine the suitability of Thomson products for a specific application. While defective products will be replaced without charge if promptly returned, no liability is assumed beyond such replacement.  
 † Trademark of Thomson Industries, Inc. THOMSON is registered in the U.S. Patent and Trademark Office and in other countries.