

SIMON FOUCAULT

**ANALYSE ET CONCEPTION D'UN MANIPULATEUR  
PLAN À 3 DEGRÉS DE LIBERTÉ ÉQUILIBRÉ  
DYNAMIQUEMENT**

Mémoire  
présenté  
à la Faculté des études supérieures  
de l'Université Laval  
pour l'obtention  
du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

AVRIL 2002

# Résumé

La but de la présente recherche est d'analyser et de concevoir un manipulateur plan à 3 degrés de liberté équilibré dynamiquement. En premier lieu, les équations de contrainte permettant au mécanisme étudié d'être équilibré dynamiquement pour toutes trajectoires sont développées analytiquement. Par la suite, on procédera à l'étude cinématique du manipulateur choisi afin de déterminer la relation entre les coordonnées articulaires et les coordonnées généralisées, et vice-versa. Suivra ensuite une analyse dynamique du manipulateur étudié qui permettra d'établir le problème dynamique inverse et ainsi vérifier numériquement l'équilibrage dynamique. L'espace de travail et les lieux de singularité seront ensuite brièvement traités. Pour terminer, divers éléments se rattachant à la conception seront discutés.

---

Simon Foucault

---

Clément M. Gosselin

# Avant-propos

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, monsieur Clément M. Gosselin, sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Ce sont sa passion pour la robotique et la qualité de son enseignement qui m'ont donné l'envie de poursuivre des études supérieures dans ce domaine de recherche. Ses innombrables connaissances, sa disponibilité et sa générosité ont fait de ces deux années une expérience des plus enrichissantes tant au niveau intellectuel que personnel. J'ai eu l'énorme chance qu'il accepte de me confier un projet de maîtrise en plus de me soutenir financièrement : merci d'avoir eu confiance en moi.

Merci aussi à tous les membres du laboratoire de robotique, plus particulièrement : Lionel, Ilian, Thierry et Boris, pour leur aide et leur amitié. Un gros merci à mes parents et mes frères pour leur support et leur patience tout au long de mon baccalauréat et de ma maîtrise. Finalement, merci à mes amis et à tous ceux qui ont fait semblant de comprendre mes explications sur l'équilibrage dynamique et qui m'ont motivé sans le savoir en me demandant sans cesse si ma maîtrise était enfin terminée.

# Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	ii
Table des matières	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Introduction	1
<b>1 Équilibrage dynamique</b>	<b>5</b>
1.1 Mécanisme étudié . . . . .	5
1.1.1 Calcul du nombre de degré de liberté . . . . .	7
1.1.2 Plate-forme équivalente . . . . .	9
1.2 Équilibrage statique . . . . .	11
1.3 Équilibrage dynamique . . . . .	12
1.4 Résolution des équations de contrainte . . . . .	17
1.4.1 Premier cas . . . . .	18
1.4.2 Deuxième cas . . . . .	18
1.5 Optimisation . . . . .	19
<b>2 Cinématique du manipulateur à 3 degrés de liberté</b>	<b>23</b>
2.1 Problème géométrique inverse . . . . .	24
2.1.1 PGI de la première patte . . . . .	26
2.1.2 PGI de la deuxième patte . . . . .	28

2.2	Équations de vitesse et Jacobiennes . . . . .	30
2.2.1	Équations de vitesse et Jacobienne du mécanisme à 3ddl . . . . .	30
2.2.2	Équations de vitesse et Jacobienne du mécanisme à 2 degrés de liberté . . . . .	34
2.3	Équations d'accélération . . . . .	36
2.3.1	Équations d'accélération du mécanisme à 3 degrés de liberté . . . . .	36
2.3.2	Équations d'accélération du mécanisme à 2 ddl . . . . .	37
2.4	Problème géométrique direct . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Dynamique du manipulateur à 3 degrés de liberté</b>	<b>40</b>
3.1	Équations de Newton-Euler . . . . .	41
3.1.1	Problème dynamique inverse . . . . .	42
3.1.2	DCL de la première barre de la première patte . . . . .	42
3.1.3	DCL de la contre-rotation associée à la première barre de la première patte . . . . .	43
3.1.4	DCL de la deuxième barre de la première patte . . . . .	45
3.1.5	DCL de la contre-rotation associée à la deuxième barre de la première patte . . . . .	45
3.1.6	DCL de la troisième barre de la première patte . . . . .	46
3.1.7	DCL de la quatrième barre de la première patte . . . . .	47
3.1.8	DCL de la première barre de la deuxième patte . . . . .	48
3.1.9	DCL de la contre-rotation associée à la première barre de la deuxième patte . . . . .	49
3.1.10	DCL de la deuxième barre de la deuxième patte . . . . .	50
3.1.11	DCL de la contre-rotation associée à la deuxième barre de la deuxième patte . . . . .	51
3.1.12	DCL de la troisième barre de la deuxième patte . . . . .	52
3.1.13	DCL de la quatrième barre de la deuxième patte . . . . .	53
3.1.14	DCL de la plate-forme . . . . .	54
3.2	Résolution des équations . . . . .	54
3.3	Vérification de la somme des forces et des moments sur la base . . . . .	57
3.3.1	Résultats obtenus avec <i>Matlab</i> . . . . .	58
3.3.2	Vérification des résultats obtenus avec ADAMS . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Espace de travail et lieux de singularité</b>	<b>65</b>
4.1	Espace de travail . . . . .	65
4.2	Lieux de singularité . . . . .	71

<b>5</b>	<b>Conception</b>	<b>76</b>
5.1	Prototypé et nomenclature . . . . .	76
5.2	Conception des articulations et des mécanismes d'entraînement . . . . .	77
5.2.1	Articulations . . . . .	79
5.2.2	Mécanisme d'entraînement . . . . .	80
5.3	Calibration et caractérisation des moteurs . . . . .	81
5.3.1	Calibration des moteurs . . . . .	82
5.3.2	Caractérisation . . . . .	85
5.3.2.1	Première méthode . . . . .	85
5.3.2.2	Deuxième méthode . . . . .	87
5.4	Calcul des inerties des contre-rotations . . . . .	90
5.5	Comparaison . . . . .	93
5.5.1	Comparaison ProEngineer versus <i>Matlab</i> . . . . .	93
5.5.2	Comparaison prototype versus <i>Matlab</i> . . . . .	95
	<b>Conclusion</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Intersection de deux cercles</b>	<b>101</b>
A.1	Développement mathématique . . . . .	101
<b>B</b>	<b>Matrice et vecteurs de forces du problème dynamique inverse</b>	<b>105</b>
B.1	Matrice des coefficients . . . . .	105
B.2	Vecteur des inconnues . . . . .	108
B.3	Vecteur des forces inertielles . . . . .	109
<b>C</b>	<b>Croquis et dessins de fabrication</b>	<b>110</b>
C.1	Croquis . . . . .	110
C.2	Dessins de fabrication du prototype . . . . .	112
<b>D</b>	<b>Spécifications des pièces achetées</b>	<b>113</b>
D.1	Section . . . . .	113

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres optimisés pour différentes valeurs de $I_{crmax}$ . . . . .	22
3.1	Paramètres de la trajectoire. . . . .	59
3.2	Paramètres physiques du manipulateur simulé. . . . .	59
5.1	Nomenclature associée aux figures 5.1 et 5.2. . . . .	78
5.2	Inerties calculées par la méthode fréquentielle. . . . .	89
5.3	Comparaison entre les paramètres <i>Matlab</i> et <i>ProEngineer</i> . . . . .	94
5.4	Comparaison entre les paramètres <i>Matlab</i> et les mesures expérimentales. . . . .	95

# Liste des figures

1	Manipulateurs de type sériel et parallèle. . . . .	2
1.1	Mécanisme à 5 barres étudié. . . . .	6
1.2	Manipulateur à trois degrés de liberté. . . . .	8
1.3	Condition d'équivalence pour un mécanisme à deux pattes. . . . .	10
1.4	Premier cas. . . . .	18
1.5	Deuxième cas. . . . .	18
2.1	PGI du manipulateur à 3 ddl. . . . .	24
2.2	Manipulateur équivalent cinématiquement. . . . .	31
2.3	Problème géométrique direct. . . . .	39
3.1	DCL de la barre 1 de la première patte. . . . .	43
3.2	DCL de la contre-rotation associée à la barre 1 de la première patte. . . . .	44
3.3	DCL de la barre 2 de la première patte. . . . .	45
3.4	DCL de la contre-rotation associée à la barre 2 de la première patte. . . . .	46
3.5	DCL de la barre 3 de la première patte. . . . .	47
3.6	DCL de la barre 4 de la première patte. . . . .	48
3.7	DCL de la barre 1 de la deuxième patte. . . . .	49
3.8	DCL de la contre-rotation associée à la barre 1 de la 2 <sup>e</sup> patte. . . . .	49
3.9	DCL de la barre 2 de la 2 <sup>e</sup> patte. . . . .	51
3.10	DCL de la contre-rotation associée à la barre 2 de la deuxième patte. . . . .	51
3.11	DCL de la barre 3 de la deuxième patte. . . . .	52
3.12	DCL de la barre 4 de la deuxième patte. . . . .	53
3.13	DCL de la plate-forme. . . . .	54



3.14	Couples articulaires pour la trajectoire choisie. . . . .	60
3.15	Somme des forces et des moments pour la trajectoire choisie. . . . .	61
3.16	Modèle développé avec le logiciel <i>ADAMS</i> . . . . .	62
3.17	Couples articulaires obtenus avec <i>ADAMS</i> pour la trajectoire choisie. . . . .	63
3.18	Somme des forces et des moments obtenus avec <i>ADAMS</i> . . . . .	64
4.1	Première limite possible. . . . .	67
4.2	Deuxième limite possible. . . . .	68
4.3	Exemple d'espace de travail. . . . .	70
4.4	Angle de la membrure distale en fonction de l'orientation de la plate-forme. . . . .	73
4.5	$\phi = 0^\circ$ . . . . .	75
4.6	$\phi = 30^\circ$ . . . . .	75
4.7	$\phi = 70^\circ$ . . . . .	75
4.8	$\phi = -40^\circ$ . . . . .	75
5.1	Vue aérienne du prototype. . . . .	77
5.2	Vue isométrique du prototype. . . . .	78
5.3	Couples au moteur en fonction des couples réels. . . . .	84
5.4	Accélérations obtenues avec le réducteur. . . . .	87
5.5	Accélérations obtenues sans le réducteur. . . . .	88
5.6	Position en fonction du temps pour un gain proportionnel de $1 \times 10^{-3} \frac{Nm}{deg}$ . . . . .	89
5.7	Inertie en fonction du proportionnel utilisé pour les trois moteurs. . . . .	90
A.1	Deux cercles s'intersectant. . . . .	102
C.1	Assemblage de l'articulation entre la barre 1 et la barre 3 . . . . .	111
C.2	Assemblage de l'articulation entre la plate-forme et les barres distales . . . . .	111
C.3	Assemblage de l'articulation entre la barre 1 et la barre 2 . . . . .	112

# Introduction

La robotique a connu un essor fulgurant depuis ses débuts, il y a de cela quelques décennies. Du sujet de roman de science-fiction qu'elle était, elle est devenue une réalité de la vie de tous les jours. Parmi les facteurs importants qui ont permis des avancements aussi importants en robotique, on se doit de mentionner les progrès constants dans les domaines de l'informatique et de l'électronique, car ils ont permis de réduire les coûts de fabrication tout en augmentant la complexité des programmes des contrôleurs. Un autre facteur qui a sûrement aidé la robotique à atteindre son niveau actuel, est l'intérêt grandissant concernant les manipulateurs parallèles. Ce type d'architecture, trop longtemps négligé, a ouvert des sentiers jusque là laissés pour compte par les manipulateurs sériels. Mais avant d'aller plus loin, il serait important de bien faire la différence entre ces deux types d'architecture.

Les manipulateurs parallèles sont constitués d'un corps rigide (aussi appelé plateforme ou effecteur) connecté à un autre corps rigide (appelé la base), par un minimum de deux chaînes cinématiques indépendantes travaillant en collaboration (voir le schéma de droite à la figure 1). Par opposition, les manipulateurs sériels sont composés d'une seule chaîne cinématique entre la base et son effecteur (voir schéma de gauche à la figure 1). Cette petite différence fait en sorte que les architectures parallèles ont : une meilleure rigidité, un rapport charge utile sur masse propre du robot plus élevé, une meilleure précision de positionnement et des vitesses de fonctionnement très élevées. Par contre, les manipulateurs sériels ont de plus grands espaces de travail et une meilleure

dextérité. La venue des manipulateurs parallèles a, en quelque sorte, permis de combler les lacunes des architectures sérielles.

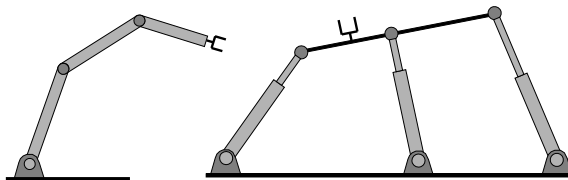


FIG. 1 – Manipulateurs de type sériel et parallèle.

On voit donc que les manipulateurs parallèles sont d'excellents candidats pour les applications avancées en robotique. Dans certaines applications, il est cependant nécessaire d'effectuer des mouvements sans perturber mécaniquement la base sur laquelle repose le mécanisme. On doit donc utiliser, pour ces applications, des mécanismes dits dynamiquement équilibrés, c'est-à-dire que, pour tout mouvement du mécanisme, les forces et couples de réaction sur sa base sont nuls en tout temps. Dans certaines applications spatiales, cette condition est nécessaire afin de préserver la quantité de mouvement de la base mobile (satellite, station spatiale). Dans les télescopes, cette condition est aussi cruciale afin d'éviter d'exciter la structure du télescope lorsque l'on déplace le miroir secondaire à de hautes fréquences afin de corriger les principales aberrations dans l'image.

Plusieurs chercheurs se sont donc intéressés à l'équilibrage dynamique du mécanisme à 4 barres. Déjà à la fin des années soixante, l'équilibrage statique de mécanismes à 4 et 6 barres était traité par Berkof et Lowen [4], jetant ainsi les bases nécessaires à l'équilibrage dynamique. Par la suite, les mêmes auteurs (Berkof et Lowen [5]) ont traité de l'optimisation du couple de réaction d'un mécanisme à 4 barres équilibré statiquement. Plus tard, l'équilibrage dynamique fut atteint avec l'apport de chaînes supplémentaires par Bagci [2] ou de contre-rotations (Bagci [3], Berkof [6], Feng [7]-[8], Ye et Smith [17]). Une autre approche traitée par Abu-Abed et Papadopoulos [1] ainsi que Kochev [11], contraint le mécanisme à suivre des trajectoires définies de telle sorte qu'aucune force ou moment ne soient générés. Finalement, l'équilibrage dynamique du mécanisme à 4 barres est réalisé sans contre-rotation (Ricard [14]). Dans ce même article, l'équilibrage dynamique d'un mécanisme plan à 3 degrés de liberté est aussi démontré en utilisant une cascade de mécanismes à 4 barres équilibrés dynamiquement pour générer les pattes. En faisant de la sorte, aucune contre-rotation n'est nécessaire.

Par contre, les contraintes d'équilibrage régissant les mécanismes à 4 barres sont très limitatives, compliquant ainsi le design d'un tel manipulateur. Afin de simplifier le design, on propose donc dans la présente recherche d'utiliser des mécanismes à 5 barres pour générer les pattes du manipulateur. Ces simplifications auront toutefois comme désavantage d'ajouter des éléments mécaniques au système.

Tout d'abord, l'équilibrage dynamique d'un mécanisme à deux degrés de liberté est considéré et les équations d'équilibrage sont développées. Ces équations sont obtenues en imposant que le centre de masse du mécanisme est fixe et que son moment cinétique est constant. On obtient alors une série de contraintes pour les paramètres des membrures du mécanisme, qui sont en fait les conditions d'équilibrage. Par la suite, on obtiendra le manipulateur parallèle à 3 degrés de liberté désiré en attachant deux sous-systèmes à 2 ddl à la même plate-forme. Les propriétés (masse, position du centre de masse et inertie) de la plate-forme seront choisies pour que l'on puisse la remplacer virtuellement par 2 masses ponctuelles localisées aux points d'attache de chacun des sous-systèmes. Les équations d'équilibrage seront alors modifiées pour tenir compte de la masse de la plate-forme. Les conditions pour la conception d'un manipulateur plan à 3 ddl équilibré dynamiquement seront finalement obtenues.

Par la suite on traitera de la cinématique de nos mécanismes à deux et trois degrés de liberté. Plus spécifiquement, on développera les équations du problème géométrique direct et inverse ainsi que les équations de vitesse et d'accélération. Les matrices jacobiennes des deux mécanismes seront aussi développées.

On passera ensuite à l'étude dynamique du manipulateur. On développera les équations nécessaires pour solutionner le problème dynamique inverse du manipulateur à trois degrés de liberté avec la méthode de Newton-Euler. On vérifiera ensuite que le mécanisme est équilibré dynamiquement en solutionnant numériquement le système développé pour le problème géométrique inverse. Une contre vérification sera aussi effectuée avec un logiciel de simulation dynamique.

L'étude du manipulateur se poursuivra avec une brève description de l'espace de travail et des lieux de singularités à orientation constante, tous deux obtenus de façon analytique.

Pour terminer, les questions concernant la conception du manipulateur à 3 degrés de

liberté seront discutées : conception des articulations et des mécanismes d'entraînement, calibration et caractérisation des moteurs, calcul des inerties à modéliser, comparaison des données recueillies et bien évidemment la présentation du prototype réalisé.

Finalement, une brève conclusion rappellera les divers points traités dans la présente recherche ainsi que les éventuels avenues possibles pour l'équilibrage dynamique.

# Chapitre 1

## Équilibrage dynamique

Dans ce chapitre les équations de contraintes pour l'équilibrage statique et dynamique d'un mécanisme à deux degrés de liberté sont développées. Les conditions nécessaires au remplacement de l'effecteur par des masses ponctuelles sont ensuite explicitées. Une optimisation des divers paramètres du mécanisme sera aussi discutée et les résultats de celle-ci seront présentés.

### 1.1 Mécanisme étudié

L'équilibrage statique de manipulateurs plans et spatiaux a fait l'objet de nombreuses recherches au cours de la dernière décennie. Dans certaines publications (Gosselin et Wang [10]; Laliberté, Gosselin et Jean [12]), on remarque que l'utilisation de

patte ayant comme architecture la forme d'un parallélogramme permet d'obtenir de bonnes performances dynamiques tout en respectant l'équilibrage statique. Il serait donc intéressant d'utiliser ce type d'architecture pour créer les mécanismes à deux degrés de liberté nécessaires à l'assemblage du manipulateur à trois degrés de liberté. On propose donc d'utiliser le mécanisme à 5 barres illustré à la figure 1.1 comme sous-système. Ces sous-systèmes à deux degrés de liberté seront au nombre de deux sur le manipulateur et agiront au même titre que les pattes d'un manipulateur parallèle.

On remarque que le mécanisme à 5 barres proposé est bel et bien un parallélogramme car la distance entre les deux points d'appui est nulle et les dimensions des barres opposées sont égales ( $l_1 = l_4$  et  $l_2 = l_3$ ). Le choix du parallélogramme est justifié par les simplifications qu'il apporte aux équations d'équilibrage dynamique comme on le verra ultérieurement. On en profite pour mentionner que les barres  $l_1$  et  $l_2$  seront aussi appelées les barres proximales, tandis que les barres  $l_3$  et  $l_4$  s'appelleront aussi les barres distales.

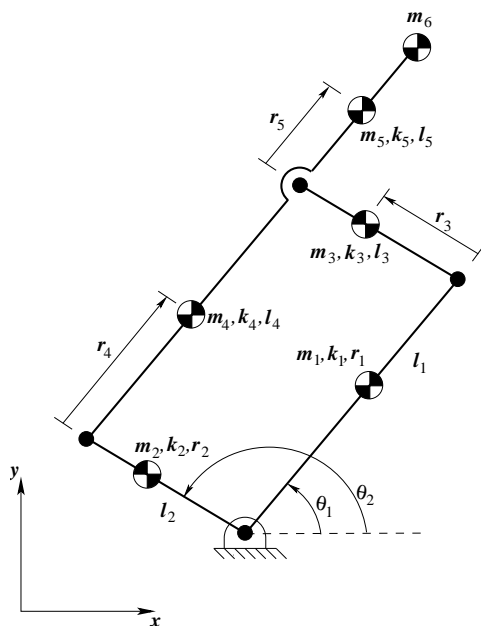


FIG. 1.1 – Mécanisme à 5 barres étudié.

Sur la figure 1.1 on remarque que plusieurs paramètres sont présentés, voici leur signification :

- $m_i$  = masse de l'élément  $i$
- $l_i$  = longueur de la barre  $i$
- $r_i$  = position du centre de masse de la barre  $i$  par rapport à sa première articulation
- $k_i$  = rayon de giration de la barre  $i$  par rapport au centre de masse de cette même barre

### 1.1.1 Calcul du nombre de degré de liberté

Pour déterminer le nombre de degré de liberté de ce mécanisme on utilise la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach (McCarthy [15]). La formule a la forme suivante :

$$l = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (1.1)$$

où  $l$  est le degré de liberté du sous-système,  $d$  est la dimension du système de mouvement considéré (par exemple pour un système plan nous avons  $d=3$ ),  $n$  est le nombre de corps rigides dans le mécanisme,  $g$  est le nombre d'articulations et  $f_i$  est le nombre de degrés de liberté permis par la  $i^{\text{ème}}$  articulation.

Vérifions que le mécanisme proposé à la figure 1.1 a bel et bien 2 degrés de liberté. Le mécanisme bouge uniquement dans un plan, la dimension de son système de mouvement est donc  $d=3$ . Le nombre de corps rigides est de  $n=5$ , 4 membrures mobiles plus la base (la membrure  $l_5$  n'est qu'un prolongement de  $l_4$  et n'influence donc pas le nombre de degré de liberté du mécanisme). On constate aussi que le nombre d'articulations est de  $g=5$  et que chacune des articulations permet un seul degré de liberté, c'est-à-dire,  $f_i = 1$  pour  $i=1, \dots, 7$ . On a donc

$$l = 3(5 - 5 - 1) + 5 = 2 \quad (1.2)$$

et le mécanisme possède deux degrés de liberté.

Comme on l'a mentionné précédemment, il est envisagé d'utiliser deux sous-systèmes à deux degrés de liberté pour construire le manipulateur à trois degrés de liberté.



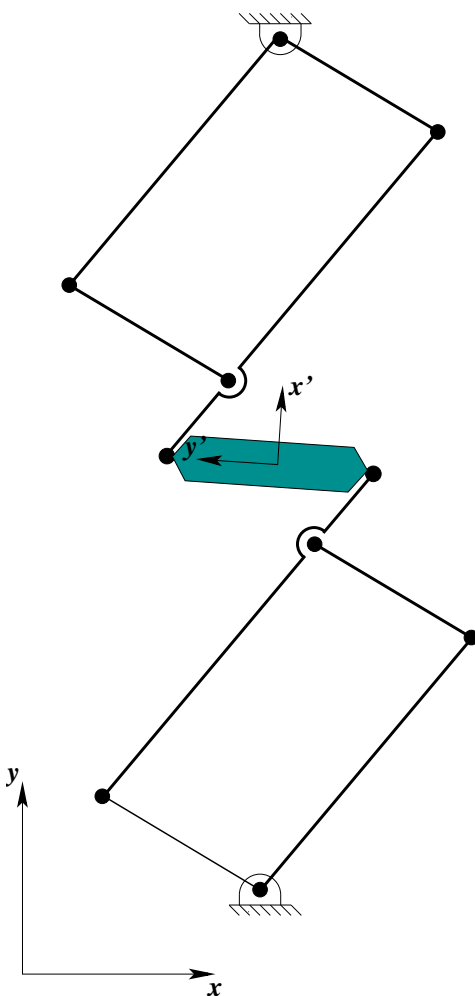


FIG. 1.2 – Manipulateur à trois degrés de liberté.

Le mécanisme présenté à la figure 1.1 servirait donc de sous-système (ou patte) au manipulateur présenté à la figure 1.2.

Tout comme le mécanisme à deux degrés de liberté, on utilise l'équation (1.1) pour vérifier le nombre de degrés de liberté du manipulateur. Le système de mouvement est encore plan, d'où  $d=3$ . Le nombre de corps rigides est quant à lui passé à  $n=10$ , alors que le nombre d'articulations est passé à  $g=12$  et que chacune d'elle ne permet toujours qu'un seul degré de liberté, c'est-à-dire,  $f_i = 1$  pour  $i=1, \dots, 12$ . On a donc

$$l = 3(10 - 12 - 1) + 12 = 3 \quad (1.3)$$

et le manipulateur proposé a donc bel et bien trois degrés de liberté.

### 1.1.2 Plate-forme équivalente

À la section précédente, on a montré qu'il est possible d'obtenir un manipulateur à trois degrés de liberté en assemblant deux sous-systèmes à deux degrés de liberté au même effecteur. Il serait donc intéressant de faire l'équilibrage dynamique des sous-systèmes et non du manipulateur entier afin de simplifier les contraintes d'équilibrage. Mais pour arriver à équilibrer une patte, il faut toutefois trouver un moyen de tenir compte des propriétés de l'effecteur dans le développement de nos équations.

La solution à ce problème a été développée par Bagci [3]. Dans cet article, les conditions d'équivalence permettant de remplacer les propriétés d'un corps rigide quelconque par des masses ponctuelles sont développées. En plaçant ces masses ponctuelles au point de contact entre les pattes et l'effecteur, il est donc possible de faire le transfert des propriétés de l'effecteur sur chacune des pattes du mécanisme indépendamment. Il est donc possible d'imaginer un mécanisme ayant un nombre  $n$  de pattes qui pourra être équilibré dynamiquement si le transfert des propriétés de l'effecteur est cohérent avec la masse ponctuelle qui est virtuellement placée aux extrémités des  $n$  pattes.

Les trois conditions d'équivalence définies dans l'article sont les suivantes :

$$M_{pf} = \sum_{i=1}^n m_{p_i} \quad (1.4)$$

$$I_{pf} = \sum_{i=1}^n m_{p_i} s_i^2 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{c}_{pf} = \frac{1}{M_{pf}} \sum_{i=1}^n m_{p_i} \mathbf{r}_{p_i} \quad (1.6)$$

où  $M_{pf}$ ,  $I_{pf}$  et  $\mathbf{c}_{pf}$  sont la masse, l'inertie et la position du centre de masse de la plate-forme. Les  $m_{p_i}$  et  $\mathbf{r}_{p_i}$  sont les masses et les positions des masses ponctuelles équivalentes. La distance entre l'origine du repère de la plate-forme et les points d'attache est notée  $s_i$  et est en fait la norme des vecteurs positions des masses ponctuelles :  $s_i = \|\mathbf{r}_{p_i}\|$

Dans notre étude actuelle, il est question d'utiliser deux pattes pour générer notre manipulateur à trois degrés de liberté. Il faut donc transposer les propriétés de la plate-forme sur chacun des deux points de contact entre la plate-forme et les pattes (c'est-à-dire les pivots) comme on peut le voir à la figure 1.3.

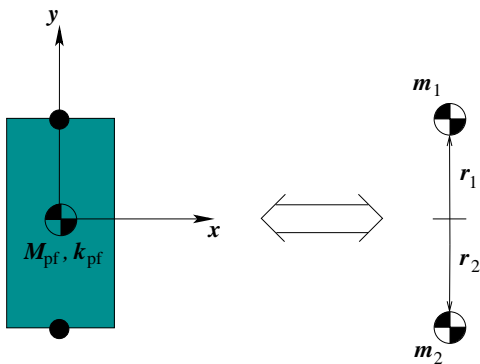


FIG. 1.3 – Condition d'équivalence pour un mécanisme à deux pattes.

Comme les équations d'équilibrage devront être développées de façon générale, il est impératif que les masses ponctuelles qui seront placées sur les points de contact entre la plate-forme et les pattes soient identiques. On aura donc :

$$m_{p_1} = m_{p_2} = \frac{M_{pf}}{2} \quad (1.7)$$

Pour faciliter la conception, on choisit de mettre la plate-forme symétrique par rapport à son centre de masse. Cela ajoute comme contrainte :

$$s_1 = s_2 = \|\mathbf{r}_{p_i}\| = s \quad (1.8)$$

Par le fait même, comme  $\|\mathbf{r}_{p_1}\| = \|\mathbf{r}_{p_2}\| = s$ , on a aussi par symétrie :  $\mathbf{r}_{p_1} = -\mathbf{r}_{p_2}$ . L'équation (1.6) prend maintenant la forme :

$$\mathbf{c}_{pf} = \frac{1}{M_{pf}}(m_{p_1}\mathbf{r}_{p_1} + m_{p_2}(-\mathbf{r}_{p_1})) = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

L'inertie de la plate-forme sera donc donnée par l'équation (1.5) en fonction de la masse de la plate-forme et du paramètre  $s$  choisis. Les masses ponctuelles  $m_{p_1}$  et  $m_{p_2}$  trouvées serviront à remplacer la masse  $m_6$  de chacune des pattes (voir figure 1.1) du manipulateur.

## 1.2 Équilibrage statique

Maintenant que la preuve a été faite que le sous-système proposé permet d'obtenir le bon nombre de degrés de liberté et qu'il est possible de l'équilibrer individuellement, passons à son équilibrage dynamique. Avant d'obtenir l'équilibrage dynamique du sous-système on doit tout d'abord l'équilibrer statiquement. En effet, l'équilibrage statique est obtenu lorsque la position du centre de masse est constante pour toutes trajectoires. Il est donc évident qu'un mécanisme équilibré dynamiquement doit aussi être équilibré statiquement afin d'éliminer les efforts créés par le déplacement du centre de masse. On exprime le vecteur position du centre de masse global ( $\mathbf{c}$ ) pour le mécanisme à 2 ddl étudié (voir figure 1.1) comme suit :

$$\begin{aligned} M\mathbf{c} = & m_1r_1\mathbf{e}_1 + m_2r_2\mathbf{e}_2 + m_3(l_1\mathbf{e}_1 + r_3\mathbf{e}_2) + m_4(l_2\mathbf{e}_2 + r_4\mathbf{e}_1) \\ & + m_5(l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 + r_5\mathbf{e}_1) + m_6(l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 + l_5\mathbf{e}_1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

où

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

où  $m_6$  désigne la masse ponctuelle utilisée pour représenter la contribution de la plateforme. On regroupe les coefficients de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  séparément :

$$\begin{aligned} M\mathbf{c} = & (m_1r_1 + m_3l_1 + m_4r_4 + m_5l_1 + m_5r_5 + m_6l_1 + m_6l_5)\mathbf{e}_1 \\ & + (m_2r_2 + m_3r_3 + m_4l_2 + m_5l_2 + m_6l_2)\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Pour obtenir l'équilibrage statique du mécanisme, il faut donc que le vecteur position du centre de masse global ( $\mathbf{c}$ ) soit constant pour toutes les positions possibles de l'effecteur. La position de l'effecteur étant gouvernée par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , une façon d'obtenir l'équilibrage statique est donc de rendre les coefficients de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  nuls. On obtient donc les deux équations de contrainte pour l'équilibrage statique :

$$m_1r_1 + m_3l_1 + m_4r_4 + m_5(l_1 + r_5) + m_6(l_1 + l_5) = 0 \quad (1.13)$$

$$m_2r_2 + m_3r_3 + m_4l_2 + m_5l_2 + m_6l_2 = 0 \quad (1.14)$$

### 1.3 Équilibrage dynamique

Il faut maintenant obtenir les équations de contrainte qui permettront au mécanisme de ne transmettre aucun moment dynamique à sa base. Nous savons que le moment appliqué en un point est relié au moment cinétique par :

$$M_O = \frac{dH_O}{dt} \quad (1.15)$$

où  $M_O$  est la somme des moments appliqués au point  $O$  et  $H_O$  est le moment cinétique par rapport au point  $O$ .

Ainsi pour avoir la compensation du moment dynamique, il faut que la somme des moments appliqués au point  $O$  soit égale à zéro pour toutes trajectoires. Pour arriver à cela, il faut donc que  $H_O$  soit constant dans le temps pour que sa dérivée par rapport à celui-ci soit nulle.

L'étape suivante consiste à écrire l'équation du moment cinétique pour le mécanisme à 5 barres étudié. Une définition du moment cinétique dans un espace en 2 dimensions est présentée par Berkof et Lowen [5], son expression générale est :

$$H_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i) \quad (1.16)$$

où

- $m_i$  = masse de l'élément  $i$
- $x_i$  = position en  $x$  du centre de masse de l'élément  $i$
- $y_i$  = position en  $y$  du centre de masse de l'élément  $i$
- $\dot{x}_i$  = vitesse en  $x$  du centre de masse de l'élément  $i$
- $\dot{y}_i$  = vitesse en  $y$  du centre de masse de l'élément  $i$
- $k_i$  = rayon de giration de l'élément  $i$  par rapport à son centre de masse
- $\theta_i$  = angle de l'élément  $i$  par rapport au repère global

On doit cependant apporter une modification à cette équation, car il a été prouvé par Ricard [13] qu'il est nécessaire d'ajouter trois contre-rotations pour équilibrer dynamiquement un mécanisme à 5 barres général. Dans le cas du mécanisme étudié ici, il lui faudra seulement deux contre-rotations étant donné son architecture en forme de parallélogramme. Les contre-rotations sont en fait des roues d'inertie qui tournent dans

le sens contraire des barres proximales auxquelles elles sont associées. Pour inverser la rotation entre une barre et sa contre-rotation, on peut utiliser des engrenages ou une courroie en forme d'infinie.

En tenant compte de l'influence des contre-rotations sur le moment cinétique du mécanisme, on obtient l'expression qui sera utilisée pour le mécanisme étudié :

$$H_O = \sum_{i=1}^6 m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i + k_i^2\dot{\theta}_i) - I_{cr_1}\dot{\theta}_1 - I_{cr_2}\dot{\theta}_2 \quad (1.17)$$

Les termes  $I_{cr_1}$  et  $I_{cr_2}$  sont les inerties des contre-rotations associées à la première et deuxième barre respectivement, c'est-à-dire les barres proximales. Les termes  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  sont les vitesses de rotation de la première et deuxième barre respectivement. On note aussi que la somme est maintenant définie de 1 jusqu'à 6, puisque 6 corps sont présents dans le mécanisme.

Passons maintenant au développement des termes  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\dot{x}_i$  et  $\dot{y}_i$  de l'équation (1.17) pour chacun des six éléments. Pour les positions en  $x$  et  $y$  des centres de masse de chacun des éléments on obtient :

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1 \quad (1.18)$$

$$y_1 = r_1 \sin \theta_1 \quad (1.19)$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2 \quad (1.20)$$

$$y_2 = r_2 \sin \theta_2 \quad (1.21)$$

$$x_3 = l_1 \cos \theta_1 + r_3 \cos \theta_2 \quad (1.22)$$

$$y_3 = l_1 \sin \theta_1 + r_3 \sin \theta_2 \quad (1.23)$$

$$x_4 = l_2 \cos \theta_2 + r_4 \cos \theta_1 \quad (1.24)$$

$$y_4 = l_2 \sin \theta_2 + r_4 \sin \theta_1 \quad (1.25)$$

$$x_5 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + r_5 \cos \theta_1 \quad (1.26)$$

$$y_5 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + r_5 \sin \theta_1 \quad (1.27)$$

$$x_6 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_5 \cos \theta_1 \quad (1.28)$$

$$y_6 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_5 \sin \theta_1 \quad (1.29)$$

On dérive ensuite les équations (1.18) à (1.29) par rapport au temps pour obtenir les vitesses en  $x$  et  $y$  des centres de masse de chacun des éléments :

$$\dot{x}_1 = -r_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (1.30)$$

$$\dot{y}_1 = r_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1.31)$$

$$\dot{x}_2 = -r_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (1.32)$$

$$\dot{y}_2 = r_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (1.33)$$

$$\dot{x}_3 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - r_3\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (1.34)$$

$$\dot{y}_3 = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r_3\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (1.35)$$

$$\dot{x}_4 = -l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_4\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (1.36)$$

$$\dot{y}_4 = l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_4\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1.37)$$

$$\dot{x}_5 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_5\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (1.38)$$

$$\dot{y}_5 = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_5\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1.39)$$

$$\dot{x}_6 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_5\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (1.40)$$

$$\dot{y}_6 = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_5\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1.41)$$

On substitue maintenant les équations (1.30) à (1.41) dans l'équation (1.17) du moment cinétique :

$$\begin{aligned} H_O = & m_1[r_1 \cos \theta_1(r_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1) - r_1 \sin \theta_1(-r_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1) + k_1^2\dot{\theta}_1] \\ & + m_2[r_2 \cos \theta_2(r_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) - r_2 \sin \theta_2(-r_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2) + k_2^2\dot{\theta}_2] \\ & + m_3[(l_1 \cos \theta_1 + r_3 \cos \theta_2)(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + r_3\dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\ & - (l_1 \sin \theta_1 + r_3 \sin \theta_2)(-l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - r_3\dot{\theta}_2 \sin \theta_2) + k_3^2\dot{\theta}_2] \\ & + m_4[(l_2 \cos \theta_2 + r_4 \cos \theta_1)(l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_4\dot{\theta}_1 \cos \theta_1) \\ & - (l_2 \sin \theta_2 + r_4 \sin \theta_1)(-l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_4\dot{\theta}_1 \sin \theta_1) + k_4^2\dot{\theta}_1] \\ & + m_5[(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + r_5 \cos \theta_1)(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_5\dot{\theta}_1 \cos \theta_1) \\ & - (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + r_5 \sin \theta_1)(-l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_5\dot{\theta}_1 \sin \theta_1) + k_5^2\dot{\theta}_1] \\ & + m_6[(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_5 \cos \theta_1)(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_5\dot{\theta}_1 \cos \theta_1) \\ & - (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_5 \sin \theta_1)(-l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_5\dot{\theta}_1 \sin \theta_1)] \\ & - I_{cr_1}\dot{\theta}_1 - I_{cr_2}\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Il est à noter que pour le sixième élément,  $k_6 = 0$  car la masse  $m_6$  est une masse ponctuelle qui représente l'effet de la plate-forme sur le mécanisme.

Développons maintenant l'équation (1.42) en effectuant les nombreuses multiplications qui la composent :

$$\begin{aligned}
H_O = & m_1[r_1^2\dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + r_1^2\dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1] + k_1^2\dot{\theta}_1] \tag{1.43} \\
& + m_2[r_2^2\dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 + r_2^2\dot{\theta}_2 \sin^2 \theta_2] + k_2^2\dot{\theta}_2] \\
& + m_3[l_1^2\dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1 r_3 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_1 r_3 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_3^2 \dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 \\
& + l_1^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + l_1 r_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 r_3 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + r_3^2 \dot{\theta}_2 \sin^2 \theta_2 + k_3^2 \dot{\theta}_2] \\
& + m_4[l_2^2 \dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 + l_2 r_4 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_2 r_4 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_4^2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 \\
& + l_2^2 \dot{\theta}_2 \sin^2 \theta_2 + l_2 r_4 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_2 r_4 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + r_4^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + k_4^2 \dot{\theta}_1] \\
& + m_5[l_1^2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_1 r_5 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
& + l_2^2 \dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 + l_2 r_5 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_1 r_5 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_2 r_5 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
& + r_5^2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 r_5 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 \\
& + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2 \sin^2 \theta_2 + l_2 r_5 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 r_5 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 \\
& + l_2 r_5 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + r_5^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + k_5^2 \dot{\theta}_1] \\
& + m_6[l_1^2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_1 l_5 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
& + l_2^2 \dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 + l_2 l_5 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_1 l_5 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_2 l_5 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\
& + l_5^2 \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 l_5 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 \\
& + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2 \sin^2 \theta_2 + l_2 l_5 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 l_5 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 \\
& + l_2 l_5 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_5^2 \dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1] - I_{cr1} \dot{\theta}_1 - I_{cr2} \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

Sachant que  $\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i = 1$ , l'équation (1.43) devient :

$$\begin{aligned}
H_O = & m_1[r_1^2\dot{\theta}_1 + k_1^2\dot{\theta}_1] + m_2[r_2^2\dot{\theta}_2 + k_2^2\dot{\theta}_2] \tag{1.44} \\
& + m_3[l_1^2\dot{\theta}_1 + r_3^2\dot{\theta}_2 + l_1 r_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_1 r_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + k_3^2\dot{\theta}_2] \\
& + m_4[l_2^2\dot{\theta}_2 + r_4^2\dot{\theta}_1 + l_2 r_4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_2 r_4 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + k_4^2\dot{\theta}_1] \\
& + m_5[l_1^2\dot{\theta}_1 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2l_1 r_5 \dot{\theta}_1 + l_2^2\dot{\theta}_2 + l_2 r_5 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
& + r_5^2\dot{\theta}_1 + l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_2 r_5 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + k_5^2\dot{\theta}_1] \\
& + m_6[l_1^2\dot{\theta}_1 + l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2l_1 l_5 \dot{\theta}_1 + l_2^2\dot{\theta}_2 + l_2 l_5 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
& + l_1 l_5 \dot{\theta}_1 + l_5^2\dot{\theta}_1 + l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_2 l_5 \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)] \\
& - I_{cr1} \dot{\theta}_1 - I_{cr2} \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$



Nous remarquons que plusieurs termes peuvent être simplifiés par la propriété trigonométrique :  $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ . L'équation (1.44) devient :

$$\begin{aligned}
H_O = & m_1(r_1^2 + k_1^2)\dot{\theta}_1 + m_2(r_2^2 + k_2^2)\dot{\theta}_2 \\
& + m_3[l_1^2\dot{\theta}_1 + (r_3^2 + k_3^2)\dot{\theta}_2 + l_1r_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\
& + m_4[l_2^2\dot{\theta}_2 + (r_4^2 + k_4^2)\dot{\theta}_1 + l_2r_4(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\
& + m_5[(l_1^2 + 2l_1r_5 + r_5^2 + k_5^2)\dot{\theta}_1 + l_2^2\dot{\theta}_2 + l_1l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& + l_2r_5(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\
& + m_6[(l_1^2 + 2l_1l_5 + l_5^2)\dot{\theta}_1 + l_2^2\dot{\theta}_2 + l_1l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& + l_2l_5(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)] - I_{cr1}\dot{\theta}_1 - I_{cr2}\dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{1.45}$$

On regroupe finalement les coefficients des différentes vitesses angulaires de l'équation (1.45) :

$$\begin{aligned}
H_O = & [m_1(r_1^2 + k_1^2) + m_3l_1^2 + m_4(r_4^2 + k_4^2) + m_5(l_1^2 + 2l_1r_5 + r_5^2 + k_5^2) \\
& + m_6(l_1^2 + 2l_1l_5 + l_5^2) - I_{cr1}]\dot{\theta}_1 + [m_2(r_2^2 + k_2^2) + m_3(r_3^2 + k_3^2) \\
& + (m_4 + m_5 + m_6)l_2^2 - I_{cr2}]\dot{\theta}_2 + [m_3l_1r_3 + m_4l_2r_4 + m_5(l_1l_2 + l_2r_5) \\
& + m_6(l_1l_2 + l_2l_5)] \cos(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, pour avoir l'équilibrage dynamique du mécanisme étudié, il faut que le moment cinétique de celui-ci soit constant dans le temps pour que sa dérivée soit nulle. En égalant à zéro chacun des coefficients des différentes vitesses angulaires de l'équation (1.46), on s'assure que le moment cinétique sera nul pour toutes les vitesses angulaires d'entrée possibles. On obtient alors les trois dernières équations de contrainte pour que le mécanisme soit équilibré dynamiquement :

$$\begin{aligned}
m_1(r_1^2 + k_1^2) + m_3l_1^2 + m_4(r_4^2 + k_4^2) + m_5(l_1^2 + 2l_1r_5 + r_5^2 + k_5^2) \\
+ m_6(l_1^2 + 2l_1l_5 + l_5^2) - I_{cr1} = 0
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$m_2(r_2^2 + k_2^2) + m_3(r_3^2 + k_3^2) + (m_4 + m_5 + m_6)l_2^2 - I_{cr2} = 0 \tag{1.48}$$

$$m_3l_1r_3 + m_4l_2r_4 + m_5(l_1l_2 + l_2r_5) + m_6(l_1l_2 + l_2l_5) = 0 \tag{1.49}$$

## 1.4 Résolution des équations de contrainte

Dans la section précédente nous avons dérivé les équations régissant un mécanisme équilibré dynamiquement. Il faut maintenant vérifier si un tel système d'équations admet des solutions qui sont physiquement réalisables.

Dans les équations de contrainte, les variables utilisées définissent les masses ( $m_i$ ), positions des centres de masse ( $r_i$ ) et rayons de giration ( $k_i$ ) globaux des membrures. Il serait donc préférable de séparer ces valeurs globales en plusieurs éléments simples. Parmi ces éléments, on utilisera des contrepoids qui pourront être positionnés suivant la longueur des membrures. Nous avons donc maintenant des valeurs qui seront imposées (les barres existantes par exemple), les autres seront variables et l'on cherchera à les minimiser (les contrepoids et les contre-rotations). Voici les variables associées aux diverses composantes :

- $l_i$  = longueur de la barre  $i$
- $m_i$  = masse du corps  $i$
- $r_i$  = position du centre de masse global de la barre  $i$
- $k_i$  = rayon de giration global de la barre  $i$  par rapport à son centre de masse
- $m_{c_i}$  = masse du contrepoids  $i$
- $r_{c_i}$  = position du centre de masse du contrepoids  $i$
- $k_{c_i}$  = rayon de giration du contrepoids  $i$  par rapport à son centre de masse

En analysant le problème de la décomposition des membrures globales en leurs éléments primaires, on remarque que deux cas sont possibles. En effet, sachant que les contrepoids sont situés selon la direction axiale des barres, il est possible que ceux-ci soient sur la barre ou sur son prolongement. On peut voir un exemple de chacun des cas aux figures 1.4 et 1.5.

On voit bien que dans le deuxième cas, il faut rallonger la barre initiale pour qu'il soit possible d'accrocher le contrepoids. Le fait d'allonger la barre change évidemment les équations se rapportant à ses propriétés, d'où la nécessité de traiter les deux cas séparément.

Il est à noter que les barres seront traitées comme de longues tiges minces, ce qui permettra de poser leur rayon de giration égal à :  $k_b = \frac{l_i^2}{12}$ .

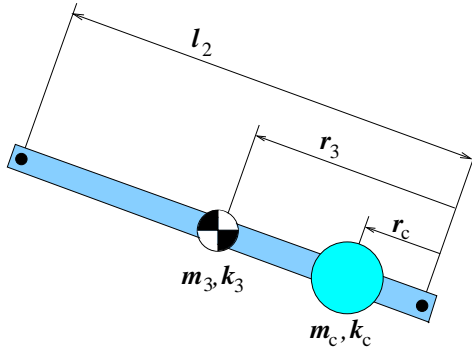


FIG. 1.4 – Premier cas.

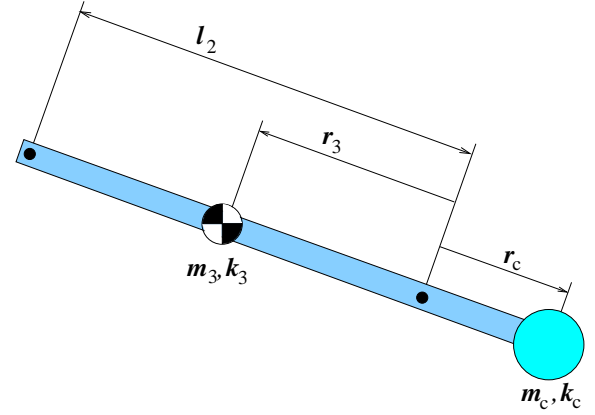


FIG. 1.5 – Deuxième cas.

### 1.4.1 Premier cas

Le premier cas se produit lorsque la position du contrepoids ( $r_{c_i}$ ) a une valeur positive. Le contrepoids est situé sur la barre et il n'est donc pas nécessaire d'ajouter d'éléments au mécanisme. Les différentes variables globales sont calculées comme suit en fonction de ses composantes élémentaires :

$$m_i = m_{c_i} + m_{b_i} \quad (1.50)$$

$$r_i = \frac{1}{m_i} \left( m_{b_i} \frac{l_i}{2} + m_{c_i} r_{c_i} \right) \quad (1.51)$$

$$k_i = \sqrt{\frac{m_{b_i} \frac{l_i^2}{12} + m_{b_i} \left( \frac{l_i}{2} - r_i \right)^2 + m_{c_i} k_{c_i}^2 + m_{c_i} (r_{c_i} - r_i)^2}{m_i}} \quad (1.52)$$

où  $m_{b_i}$  est la masse de la barre. Cette masse est trouvée en posant une densité linéique ( $\rho_l$ ) ce qui permet de trouver comme expression de la masse des barres :  $m_{b_i} = l_i \rho_l$ .

### 1.4.2 Deuxième cas

Le deuxième cas se produit lorsque la position du contrepoids ( $r_{c_i}$ ) a une valeur négative. Pour que cela soit possible, il faut donc ajouter une barre qui prolongera la barre existante pour tenir le contrepoids. On se retrouve donc avec les équations

suivantes pour les différentes variables globales :

$$m_i = m_{c_i} + m_{b_i} + m_{e_i} \quad (1.53)$$

$$r_i = \frac{1}{m_i} \left( m_{b_i} \frac{l_i}{2} + m_{e_i} \frac{r_{c_i}}{2} + m_{c_i} r_{c_i} \right) \quad (1.54)$$

$$k_i = \left[ m_{b_i} \frac{l_i^2}{12} + m_{b_i} \left( \frac{l_i}{2} - r_i \right)^2 + m_{e_i} \frac{r_{c_i}^2}{12} + m_{e_i} \left( \frac{r_{c_i}}{2} - r_i \right)^2 + m_{c_i} k_{c_i}^2 + m_{c_i} (r_{c_i} - r_i)^2 \right]^{1/2} / \sqrt{m_i} \quad (1.55)$$

où  $m_{b_i}$  est la masse de la barre et  $m_{e_i}$  est la masse de la barre qu'il faut rajouter. La masse  $m_{b_i}$  est trouvée de la même façon que dans le premier cas, tandis que la masse de la barre rajoutée est égale à  $m_{e_i} = -r_{c_i} \rho_l$ .

## 1.5 Optimisation

Dans les sections précédentes du présent chapitre, on a développé les équations de contrainte nécessaires pour obtenir l'équilibrage dynamique d'un mécanisme à deux degrés de liberté. On a ensuite développé les paramètres de ces équations afin d'y inclure des éléments plus simples qui ont pour but d'évaluer la faisabilité du mécanisme. La suite logique de notre développement est donc de chercher des solutions à notre système composé des équations (1.13), (1.14) et (1.47) à (1.49).

Il est maintenant évident que le fait d'équilibrer un système ajoute des éléments (contreponds et contre-rotations), et que cela se traduit par une augmentation de la masse totale du système. Pour éviter d'avoir une augmentation trop importante de la masse du mécanisme, on procédera donc à une optimisation des valeurs des composantes élémentaires afin d'obtenir un mécanisme qui a le poids le plus faible possible. Un autre point à ne pas négliger est l'inertie des contre-rotations, car il faut qu'elle soit physiquement réalisable. On cherchera donc à minimiser la masse et l'inertie des contreponds ainsi que l'inertie des contre-rotations, car ces éléments ajoutent beaucoup de poids au mécanisme. Plusieurs fonctions pourraient être minimisées, mais la fonction

qui incorpore le mieux tous les critères mentionnés précédemment est la suivante :

$$F = I_{cr_1} + I_{cr_2} + \sum_{i=1}^4 m_{c_i} + \sum_{i=1}^4 m_{c_i} r_{c_i}^2 \quad (1.56)$$

où  $I_{cr_1}$  et  $I_{cr_2}$  sont les inerties des contre-rotations,  $m_{c_i}$  et  $r_{c_i}$  sont la masse et la position du centre de masse du  $i^{\text{ème}}$  contrepoids.

On se retrouve alors avec un problème d'optimisation à plusieurs variables avec 5 équations de contrainte à respecter qui sont en fait les équations de contrainte de l'équilibrage dynamique (voir équations (1.13), (1.14), (1.47), (1.48), (1.49)). Pour résoudre ce système d'équations, on utilise la fonction *constr* fournie avec le *Optimization Toolbox* du logiciel mathématique *Matlab*. Cette fonction utilise la programmation quadratique séquentielle, c'est-à-dire qu'elle résout un sous-problème de programmation quadratique à chaque itération en plus de vérifier la positivité du Hessien du Lagrangien de la fonction à chaque itération majeure.

Pour débiter, on doit tout d'abord définir le vecteur contenant les variables que l'on désire minimiser :

$$\mathbf{x} = \left[ m_{c_1}, m_{c_2}, m_{c_3}, m_{c_4}, r_{c_1}, r_{c_2}, r_{c_3}, r_{c_4}, I_{cr_1}, I_{cr_2} \right]^T \quad (1.57)$$

Ensuite on doit définir le vecteur contenant les contraintes. On dispose donc les cinq équations nécessaires à l'équilibrage dynamique dans un vecteur :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} m_1 r_1 + m_3 l_1 + m_4 r_4 + m_5 (l_1 + r_5) + m_6 (l_1 + l_5) \\ m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_4 l_2 + m_5 l_2 + m_6 l_2 \\ m_1 (r_1^2 + k_1^2) + m_3 l_1^2 + m_4 (r_4^2 + k_4^2) + m_5 (l_1^2 + 2l_1 r_5 + r_5^2 + k_5^2) + m_6 (l_1^2 + 2l_1 l_5 + l_5^2) - I_{cr_1} \\ m_2 (r_2^2 + k_2^2) + m_3 (r_3^2 + k_3^2) + (m_4 + m_5 + m_6) l_2^2 - I_{cr_2} \\ m_3 l_1 r_3 + m_4 l_2 r_4 + m_5 (l_1 l_2 + l_2 r_5) + m_6 (l_1 l_2 + l_2 l_5) \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

La fonction *constr* va donc chercher le minimum de la fonction  $F$  tout en respectant la contrainte  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$

Il faut aussi définir un vecteur contenant les valeurs initiales des variables de décision. On choisit :

$$\mathbf{x}_0 = \left[ 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T \quad (1.59)$$

Une des options de la fonction *constr* utilisée permet de définir des limites supérieures et inférieures aux variables de décision. Cette option nous permettra de garder les valeurs obtenues dans un ordre de grandeur réalisable. On définit donc un vecteur contenant les limites inférieures ( $\mathbf{x}_{lb}$ ) et un autre contenant les limites supérieures ( $\mathbf{x}_{ub}$ ) :

$$\mathbf{x}_{lb} = \left[ 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, \frac{-l_1}{2}, \frac{-l_2}{2}, \frac{-l_2}{2}, \frac{-l_1}{2}, 0, 0 \right]^T \quad (1.60)$$

$$\mathbf{x}_{ub} = \left[ 0.6, 0.6, 0.2, 0.2, l_1, l_2, l_2, l_1, I_{cr_{max}}, I_{cr_{max}} \right]^T \quad (1.61)$$

On remarque que l'on se laisse une certaine liberté en laissant la valeur maximale de l'inertie des contre-rotations ( $I_{cr_{max}}$ ) libre.

Afin de pouvoir résoudre notre système d'équations, on doit par contre choisir quelques-unes des valeurs de design du mécanisme. Voici les valeurs choisies :

- $l_1 = 0.2m$
- $l_2 = 0.1m$
- $l_5 = 0m$
- $M_{pf} = 0.1kg$
- $s = 0.03m$

Avec les deux dernières valeurs, on peut calculer les masses ponctuelles à l'aide des expressions que l'on retrouve à la section 1.1.2. On trouve avec l'équation (1.7) que  $m_{p1} = m_{p2} = m_6 = 0.05kg$ . L'inertie de la plate-forme peut ensuite être trouvée avec l'équation (1.5). La valeur obtenue est de :  $I_{pf} = 9 \times 10^{-5}kg \cdot m^2$ .

Aussi pour simplifier les équations de contrainte, on pose que les contrepoids sont des disques de rayon  $r_d = 0.03m$ , ce qui permet de remplacer les rayons de giration des contrepoids par :  $k_{c_i} = \frac{1}{2}r_d^2 = 4.5 \times 10^{-4}m^2$ .

On pose aussi que les barres sont des tiges cylindriques en aluminium ayant un diamètre de  $1cm$ . En prenant la densité de l'aluminium égale à  $\rho = 2690 \frac{kg}{m^3}$ , on trouve que la densité linéique des membrures est donc de :

$$\rho_l = \rho A_{section} = \rho \frac{\pi D^2}{4} = 2690 \frac{kg}{m^3} \frac{\pi (0.01m)^2}{4} = 0.211272 \frac{kg}{m} \quad (1.62)$$

Les éléments que l'on vient de décrire ont été programmés dans *Matlab* et les deux fichiers écrits (*opt\_5bar\_effecteur.m* et *def\_5bar\_effecteur.m*), comme tous les autres programmes qui seront ultérieurement décrits, ne seront pas présentés dans ce mémoire afin

$I_{cr_{max}}[kg \cdot m^2]$	1	0.007	0.0065	0.0063
$m_{c_1}[kg]$	0.1092	0.0793	0.1366	0.2396
$m_{c_2}[kg]$	0.5235	0.5627	0.5874	0.6
$m_{c_3}[kg]$	0.01	0.01	0.01	0.01
$m_{c_4}[kg]$	0.1375	0.1506	0.163	0.17
$r_{c_1}[m]$	-0.1	-0.1	-0.0584	-0.0343
$r_{c_2}[m]$	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
$r_{c_3}[m]$	-0.05	-0.0101	0	0
$r_{c_4}[m]$	-0.1	-0.1	-0.0944	-0.0909
$I_{cr_1}[kg \cdot m^2]$	0.0075	0.007	0.0065	0.0063
$I_{cr_2}[kg \cdot m^2]$	0.0042	0.0045	0.0046	0.0047
$F$	0.7959	0.8177	0.9116	1.0339

TAB. 1.1 – Paramètres optimisés pour différentes valeurs de  $I_{cr_{max}}$ .

de ne pas l'alourdir inutilement. Les résultats de l'optimisation pour quelques valeurs de  $I_{cr_{max}}$  sont présentés au tableau 1.1.

En analysant les résultats obtenus, on remarque qu'en faisant varier seulement la valeur de l'inertie maximale admise pour les contre-rotations ( $I_{cr_{max}}$ ), on obtient plusieurs solutions satisfaisant les contraintes d'équilibrage. On remarque aussi que lorsque l'on diminue l'inertie maximale des contre-rotations, les masses des contrepoids ont tendance à augmenter. Cela se traduit aussi par une augmentation de la valeur de la fonction à optimiser  $F$ . La solution obtenue est donc très liée à l'importance que l'on accorde à l'atteinte des limites de certains paramètres. Pour notre part, on mettra l'emphasis sur la minimisation de l'inertie des contre-rotations, car il est assez difficile de concevoir des roues d'inertie ayant d'aussi grandes valeurs.

# Chapitre 2

## Cinématique du manipulateur à 3 degrés de liberté

Dans le chapitre précédent, l'équilibrage dynamique d'un mécanisme à 2 ddl a été traité. La méthode utilisée pour obtenir le manipulateur à 3 ddl a aussi été discutée et des solutions physiquement réalisables ont été obtenues. La prochaine étape pour qu'un prototype puisse être construit est d'étudier la cinématique du manipulateur à 3 ddl.

Dans ce chapitre, la transformation reliant les coordonnées généralisées, décrivant la position et l'orientation de l'effecteur, aux coordonnées articulaires est décrite. La matrice reliant les vitesses généralisées aux vitesses articulaires, aussi appelée Jacobienne, sera également développée. Les équations d'accélération des mécanismes étudiés seront ensuite traitées. Finalement, la solution du problème géométrique direct (PGD) reliant les coordonnées articulaires aux coordonnées généralisées sera discutée.



## 2.1 Problème géométrique inverse

La transformation qui permet de relier les coordonnées généralisées aux coordonnées articulaires est aussi appelée le problème géométrique inverse ou PGI. Grâce au PGI, il est donc possible de connaître les positions angulaires des actionneurs pour une trajectoire imposée à l'effecteur. Pour le mécanisme étudié ici, on pourra donc avoir les angles à prescrire aux trois moteurs ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ ) pour suivre une trajectoire donnée dans le plan (position en  $x$  et  $y$ , ainsi qu'une orientation  $\phi$ ).

Définissons maintenant les vecteurs nécessaires à l'élaboration du PGI en se référant à la figure 2.1.

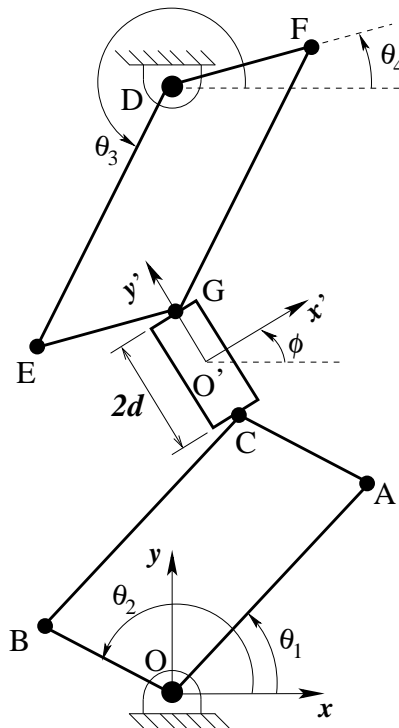


FIG. 2.1 – PGI du manipulateur à 3 ddl.

$$\mathbf{u}_1 = \overline{OA} = \overline{BC} = l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}_1 = \overline{OB} = \overline{AC} = l_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_2 = \overline{DE} = \overline{FG} = l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_2 = \overline{DF} = \overline{EG} = l_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La position du centre de masse de l'effecteur est définie par :

$$\mathbf{c} = \overline{OO'} \quad (2.5)$$

Le vecteur reliant l'origine au point d'attache de la deuxième patte est :

$$\mathbf{r}_2 = \overline{OD} \quad (2.6)$$

On définit aussi deux vecteurs exprimés dans le repère  $O'x'y'$  qui vont du centre de masse de l'effecteur aux deux points d'attache de celui-ci :

$$\mathbf{d}'_1 = \overline{O'C} = [0, -d]^T \quad (2.7)$$

$$\mathbf{d}'_2 = \overline{O'G} = [0, d]^T \quad (2.8)$$

Définissons maintenant la matrice de rotation entre le repère de base  $Oxy$  et le repère attaché à l'effecteur  $O'x'y'$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

On peut donc exprimer les vecteurs  $\mathbf{d}'_1$  et  $\mathbf{d}'_2$  dans le repère de base en les pré-multipliant par  $\mathbf{Q}$  :

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{d}'_1 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{d}'_2 \quad (2.11)$$

### 2.1.1 PGI de la première patte

Procédons au PGI pour trouver les coordonnées articulaires de la première patte. On exprime la position de l'effecteur comme suit :

$$\mathbf{c} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{d}_1 \quad (2.12)$$

On réarrange l'équation (2.12) pour isoler  $\mathbf{v}_1$  :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_1 \quad (2.13)$$

On calcule le carré du module de chacun des membres de l'équation (2.13) et l'on développe le produit du membre de droite :

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = l_2^2 = (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_1)^T (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_1) \quad (2.14)$$

$$l_2^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_1 - 2\mathbf{c}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1 - 2\mathbf{d}_1^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 \quad (2.15)$$

Dans l'équation (2.15), on remplace  $\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1 = \|d_1\|^2 = d^2$  et  $\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = \|u_1\|^2 = l_1^2$ , et l'on réarrange l'équation :

$$-2\mathbf{c}^T \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{d}_1^T \mathbf{u}_1 + (\mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_1 + d^2 - l_2^2 + l_1^2) = 0 \quad (2.16)$$

Cette dernière équation possède une seule inconnue qui est en fait  $\theta_1$ . Il est donc possible de l'exprimer sous la forme :

$$A_1 \cos \theta_1 + B_1 \sin \theta_1 + C_1 = 0 \quad (2.17)$$

avec

$$A_1 = -2\mathbf{c}^T \mathbf{q}_1 l_1 - 2\mathbf{d}_1^T \mathbf{q}_1 l_1 \quad (2.18)$$

$$B_1 = -2\mathbf{c}^T \mathbf{q}_2 l_1 - 2\mathbf{d}_1^T \mathbf{q}_2 l_1 \quad (2.19)$$

$$C_1 = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_1 + d^2 - l_2^2 + l_1^2 \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{q}_1 = [1, 0]^T$  et  $\mathbf{q}_2 = [0, 1]^T$

On pose maintenant que :

$$T_1 = \tan \frac{\theta_1}{2} \quad (2.21)$$

et grâce à ce dernier artifice mathématique, il est possible de remplacer :  $\cos \theta_1 = \frac{1-T_1^2}{1+T_1^2}$  et  $\sin \theta_1 = \frac{2T_1}{1+T_1^2}$  dans l'équation (2.17) :

$$\frac{1-T_1^2}{1+T_1^2}A_1 + \frac{2T_1}{1+T_1^2}B_1 + C_1 = 0 \quad (2.22)$$

On multiplie les deux côtés de l'équation (2.22) par  $(1+T_1^2)$  et l'on obtient :

$$(1-T_1^2)A_1 + 2T_1B_1 + (1+T_1^2)C_1 = 0 \quad (2.23)$$

Finalement, on isole les termes en  $T_1$  dans (2.23) :

$$(C_1 - A_1)T_1^2 + 2B_1T_1 + (A_1 + C_1) = 0 \quad (2.24)$$

On résout l'équation quadratique (2.24) par :

$$T_{1(1,2)} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - (C_1 - A_1)(C_1 + A_1)}}{C_1 - A_1} \quad (2.25)$$

Ce qui nous donne deux solutions pour  $T_1$  que l'on peut introduire dans l'équation (2.21) pour trouver les deux angles  $\theta_1$  correspondants :

$$\theta_{1(1,2)} = 2 \arctan T_{1(1,2)} \quad (2.26)$$

Pour trouver l'angle  $\theta_2$ , on utilise l'équation (2.13). L'angle  $\theta_1$  étant connu, le vecteur  $\mathbf{u}_1$  est lui aussi déterminé, ce qui permet d'exprimer  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$  comme suit :

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{l_2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_{1(1,2)})^T \mathbf{q}_1 \quad (2.27)$$

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{l_2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_{1(1,2)})^T \mathbf{q}_2 \quad (2.28)$$

Finalement, on trouve l'angle  $\theta_2$  avec la fonction informatique *atan2* :

$$\theta_2 = \text{atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2) \quad (2.29)$$

### 2.1.2 PGI de la deuxième patte

Procédons maintenant au PGI pour les angles de la deuxième patte. On utilise la même méthode que pour la première patte, c'est-à-dire qu'on exprime la position de l'effecteur mais en passant par la deuxième patte :

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{d}_2 \quad (2.30)$$

On isole  $\mathbf{v}_2$  dans l'équation (2.30),

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2 \quad (2.31)$$

On calcule le carré du module de chacun des membres de l'équation (2.31) et l'on développe le produit du membre de droite :

$$\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = l_2^2 = (\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2)^T (\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} l_2^2 = & \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_2 - 2\mathbf{c}^T \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{c}^T \mathbf{r}_2 + \mathbf{d}_2^T \mathbf{d}_2 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{r}_2 \\ & + \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dans l'équation (2.33), on remplace  $\mathbf{d}_2^T \mathbf{d}_2 = \|d_2\|^2 = d^2$  et  $\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 = \|u_2\|^2 = l_1^2$ , et l'on réarrange l'équation :

$$-2\mathbf{c}^T \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_2^T \mathbf{r}_2 + (\mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_2 - 2\mathbf{c}^T \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 + d^2 - l_2^2 + l_1^2) = 0 \quad (2.34)$$

Cette dernière équation possède une seule inconnue qui est  $\theta_3$ . Il est donc possible d'exprimer l'équation (2.34) sous la forme :

$$A_3 \cos \theta_3 + B_3 \sin \theta_3 + C_3 = 0 \quad (2.35)$$

avec

$$A_3 = -2\mathbf{c}^T \mathbf{q}_1 l_1 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{q}_1 l_1 + 2l_1 \mathbf{q}_1^T \mathbf{r}_2 \quad (2.36)$$

$$B_3 = -2\mathbf{c}^T \mathbf{q}_2 l_1 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{q}_2 l_1 + 2l_1 \mathbf{q}_2^T \mathbf{r}_2 \quad (2.37)$$

$$C_3 = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_2 - 2\mathbf{c}^T \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 + d^2 - l_2^2 + l_1^2 \quad (2.38)$$

On pose maintenant que :

$$T_3 = \tan \frac{\theta_3}{2} \quad (2.39)$$

et grâce à ce dernier artifice mathématique, il est possible de remplacer :  $\cos \theta_3 = \frac{1-T_3^2}{1+T_3^2}$  et  $\sin \theta_3 = \frac{2T_3}{1+T_3^2}$  dans l'équation (2.35) :

$$\frac{1-T_3^2}{1+T_3^2}A_3 + \frac{2T_3}{1+T_3^2}B_3 + C_3 = 0 \quad (2.40)$$

On multiplie les deux côtés de l'équation (2.40) par  $(1+T_3^2)$  :

$$(1-T_3^2)A_3 + 2T_3B_3 + (1+T_3^2)C_3 = 0 \quad (2.41)$$

Finalement, on isole les termes en  $T_3$  dans (2.41) :

$$(C_3 - A_3)T_3^2 + 2B_3T_3 + (A_3 + C_3) = 0 \quad (2.42)$$

On résout l'équation quadratique (2.42) par :

$$T_{3(1,2)} = \frac{-B_3 \pm \sqrt{B_3^2 - (C_3 - A_3)(C_3 + A_3)}}{C_3 - A_3} \quad (2.43)$$

Ce qui nous donne deux solutions pour  $T_3$  que l'on peut introduire dans l'équation (2.39) pour trouver les deux angles  $\theta_3$  correspondant :

$$\theta_{3(1,2)} = 2 \arctan T_{3(1,2)} \quad (2.44)$$

Pour trouver l'angle  $\theta_4$ , on utilise l'équation (2.31). L'angle  $\theta_3$  étant connu, le vecteur  $\mathbf{u}_2$  est lui aussi déterminé, ce qui permet d'exprimer  $\cos \theta_4$  et  $\sin \theta_4$  comme suit :

$$\cos \theta_4 = \frac{1}{l_2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_{2(1,2)} - \mathbf{r}_2)^T \mathbf{q}_1 \quad (2.45)$$

$$\sin \theta_4 = \frac{1}{l_2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_{2(1,2)} - \mathbf{r}_2)^T \mathbf{q}_2 \quad (2.46)$$

Finalement, on trouve l'angle  $\theta_4$  avec la fonction informatique *atan2* :

$$\theta_4 = \text{atan2}(\sin \theta_4, \cos \theta_4) \quad (2.47)$$

Globalement, le PGI du manipulateur peut donc être résolu par la solution de deux équations quadratiques et il conduit à 4 solutions.

## 2.2 Équations de vitesse et Jacobiennes

Dans cette section les équations de vitesse du manipulateur seront traitées. Comme le manipulateur possède trois degrés de liberté, le développement des équations générales du mécanisme nous donnera les vitesses des trois angles actionnés de celui-ci. Ces équations seront donc développées en premier lieu. Par la suite, on procédera à une méthode dite patte par patte. Cette dernière méthode sera surtout utile parce qu'elle nous permettra de connaître la vitesse de la patte passive. Pour le contrôle du mécanisme cette vitesse n'est pas nécessaire, mais elle est impérative pour les calculs dynamiques qui seront traités au prochain chapitre.

### 2.2.1 Équations de vitesse et Jacobienne du mécanisme à 3ddl

Le but de la présente section est d'établir une relation entre les vitesses articulaires et les vitesses généralisées. Les vitesses généralisées représentent les vitesses cartésiennes et la vitesse angulaire de l'effecteur. On note le vecteur des vitesses généralisées comme suit :

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

On appelle vitesses articulaires, les vitesses des trois actionneurs du mécanisme, c'est-à-dire les vitesses des trois moteurs qui serviront à actionner le manipulateur. On note le vecteur des vitesses articulaires comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Il est à noter que comme il faut seulement trois moteurs pour contrôler les trois degrés de liberté, la patte passive du mécanisme n'est donc pas nécessaire pour obtenir les relations désirées. On a donc schématiquement un manipulateur comme celui présenté à la figure 2.2.

Pour exprimer les vitesses on utilise les vecteurs définis à la section précédente.

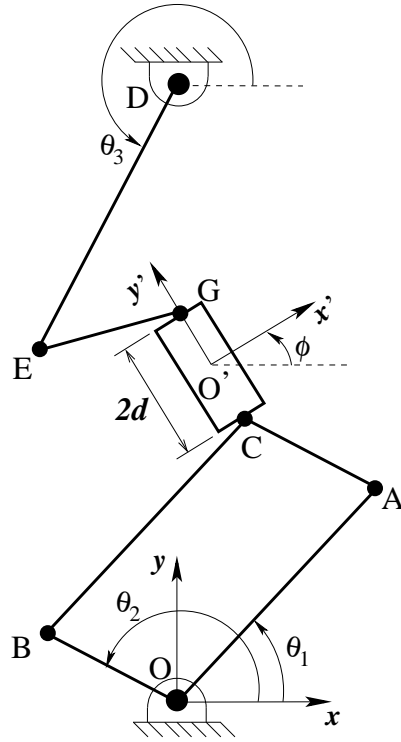


FIG. 2.2 – Manipulateur équivalent cinématiquement.

L'équation qui relie la vitesse du premier actionneur,  $\dot{\theta}_1$ , aux vitesses de l'effecteur est obtenue en dérivant par rapport au temps l'équation (2.15), c'est-à-dire :

$$0 = 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + 2\mathbf{d}_1^T \dot{\mathbf{c}} + 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{d}}_1 - 2\mathbf{u}_1^T \dot{\mathbf{c}} - 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}_1 - 2\mathbf{u}_1^T \dot{\mathbf{d}}_1 - 2\mathbf{d}_1^T \dot{\mathbf{u}}_1 \quad (2.50)$$

Pour aider à la simplification de l'équation précédente, on définit la matrice suivante :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Pour avoir la vitesse angulaire des coordonnées généralisées, on dérive l'équation (2.10) par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{d}}_1 = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{d}'_1 + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{d}}'_1 = \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{d}'_1 = \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_1 \quad (2.52)$$

$\dot{\mathbf{d}}'_1 = 0$  puisque la distance entre l'origine  $O'$  de l'effecteur et le point d'attache  $C$  exprimée dans ce même repère est constante.

Il faut aussi avoir la vitesse angulaire de la première coordonnée articulaire présente



dans nos équations, on exprime donc la vitesse du vecteur  $\mathbf{u}_1$  de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{u}_1 \quad (2.53)$$

Finalement, on réarrange l'équation (2.50) avec l'aide des équations (2.52) et (2.53) et l'on obtient :

$$0 = (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_1)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{c} - \mathbf{u}_1)^T \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{d}_1 - (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1)^T \dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{u}_1 \quad (2.54)$$

Passons maintenant à l'équation qui relie la vitesse du deuxième actionneur,  $\dot{\theta}_2$ , avec les vitesses généralisées. On réarrange tout d'abord l'équation (2.13) comme suit :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{v}_1 \quad (2.55)$$

On calcule ensuite le carré du module de chaque membre de l'équation (2.55) et l'on développe le produit du membre de droite :

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = l_1^2 = (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{v}_1)^T (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{v}_1) \quad (2.56)$$

$$l_1^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{d}_1 - 2\mathbf{c}^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1 - 2\mathbf{d}_1^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 \quad (2.57)$$

On dérive par rapport au temps l'équation (2.57) et l'on trouve :

$$0 = 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + 2\mathbf{d}_1^T \dot{\mathbf{c}} + 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{d}}_1 - 2\mathbf{v}_1^T \dot{\mathbf{c}} - 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{v}}_1 - 2\mathbf{v}_1^T \dot{\mathbf{d}}_1 - 2\mathbf{d}_1^T \dot{\mathbf{v}}_1 \quad (2.58)$$

Il ne faut pas oublier qu'il faut avoir la vitesse angulaire de la deuxième coordonnée articulaire dans nos équations. On exprime donc la vitesse du vecteur  $\mathbf{v}_1$  de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{v}_1 \quad (2.59)$$

On peut donc simplifier l'équation (2.58) avec l'aide des équations (2.52) et (2.59) comme suit :

$$0 = (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{v}_1)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{c} - \mathbf{v}_1)^T \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{d}_1 - (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1)^T \dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{v}_1 \quad (2.60)$$

Pour obtenir la matrice jacobienne, il faut finalement trouver l'expression qui relie la vitesse du troisième actionneur aux vitesses généralisées. On dérive donc l'équation (2.33) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} 0 = & 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} + 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{d}}_2 + 2\mathbf{d}_2^T \dot{\mathbf{c}} - 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}_2 - 2\mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{c}} - 2\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{r}}_2 - 2\mathbf{r}_2^T \dot{\mathbf{c}} \\ & - 2\mathbf{d}_2^T \dot{\mathbf{u}}_2 - 2\mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{d}}_2 - 2\mathbf{d}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2 - 2\mathbf{r}_2^T \dot{\mathbf{d}}_2 + 2\mathbf{u}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2 + 2\mathbf{r}_2^T \dot{\mathbf{u}}_2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Il est possible de simplifier l'équation (2.61) car le vecteur qui relie le repère de base au point d'attache de la deuxième patte est constant dans le temps, donc sa vitesse est nulle ( $\dot{\mathbf{r}}_2 = 0$ ). On peut aussi exprimer le vecteur  $\dot{\mathbf{d}}_2$  en fonction de la vitesse généralisée  $\dot{\phi}$  en dérivant l'équation (2.11) par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{d}}_2 = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{d}'_2 + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{d}}'_2 = \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{Q}\mathbf{d}'_2 = \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_2 \quad (2.62)$$

car  $\dot{\mathbf{d}}'_2 = 0$ .

Il faut aussi avoir la vitesse angulaire de la troisième coordonnée articulaire présente dans nos équations, on exprime donc la vitesse du vecteur  $\mathbf{u}_2$  de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = \dot{\theta}_3 \mathbf{E}\mathbf{u}_2 \quad (2.63)$$

En remplaçant (2.62) et (2.63) dans l'équation (2.61) on obtient :

$$0 = (\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2)^T \dot{\mathbf{c}} + (\mathbf{c} - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2)^T \dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_2 - (\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{r}_2)^T \dot{\theta}_3 \mathbf{E}\mathbf{u}_2 \quad (2.64)$$

Finalement, on regroupe les équations (2.54), (2.60) et (2.64) sous la forme  $\mathbf{J}\mathbf{t} + \mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$  et on trouve :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^T \\ \mathbf{j}_2^T \\ \mathbf{j}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.65)$$

avec

$$\mathbf{j}_1^T = \left[ (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_1)^T \quad (\mathbf{c} - \mathbf{u}_1)^T \mathbf{E} \mathbf{d}_1 \right]_{1 \times 3} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{j}_2^T = \left[ (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{v}_1)^T \quad (\mathbf{c} - \mathbf{v}_1)^T \mathbf{E} \mathbf{d}_1 \right]_{1 \times 3} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{j}_3^T = \left[ (\mathbf{c} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2)^T \quad (\mathbf{c} - \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2)^T \mathbf{E} \mathbf{d}_2 \right]_{1 \times 3} \quad (2.68)$$

$$K_1 = -(\mathbf{c} + \mathbf{d}_1)^T \mathbf{E} \mathbf{u}_1 \quad (2.69)$$

$$K_2 = -(\mathbf{c} + \mathbf{d}_1)^T \mathbf{E} \mathbf{v}_1 \quad (2.70)$$

$$K_3 = -(\mathbf{c} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{r}_2)^T \mathbf{E} \mathbf{u}_2 \quad (2.71)$$

Il est maintenant possible d'exprimer la matrice jacobienne du manipulateur qui relie les vitesses articulaires aux vitesses généralisées :

$$\mathbf{t} = \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{K} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.72)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice jacobienne du manipulateur à trois degrés de liberté.

## 2.2.2 Équations de vitesse et Jacobienne du mécanisme à 2 degrés de liberté

Comme il a déjà été mentionné, les vitesses de la patte passive sont nécessaires lors des calculs dynamiques du mécanisme. On développe donc une méthode dite patte par patte pour trouver les vitesses de chacune des barres présentes. Pour ce faire, on utilise la vitesse des points d'attache de l'effecteur avec chacune des pattes. Une fois cette vitesse trouvée, on résout chacune des pattes comme un simple mécanisme à 2 degrés de liberté.

La vitesse des points d'attache est facilement trouvée par l'addition de la vitesse cartésienne de l'effecteur au produit vectoriel de la vitesse angulaire par le vecteur reliant le centre de l'effecteur au point d'attache, c'est-à-dire :

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{d}_1 \quad (2.73)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{d}_2 \quad (2.74)$$

Pour la première patte, on peut aussi développer la position du point d'attache  $P_1$

(voir figure 2.3) de la façon suivante :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

En dérivant l'équation (2.75) par rapport au temps, on obtient la relation désirée entre la vitesse du point d'attache et les vitesses articulaires de la première patte :

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

On exprime l'équation (2.76) sous forme matricielle :

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_2 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

où  $\mathbf{A}_1$  est la Jacobienne de la première de la patte.

Avec l'équation (2.77) il est aussi possible de trouver les vitesses articulaires de la première patte en fonction de la vitesse du point d'attache et par le fait même en fonction des vitesses généralisées de l'équation (2.73) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^{-1} \dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} (\dot{\mathbf{c}} + \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{d}_1) \quad (2.78)$$

Pour la deuxième patte, on procède de la même façon, c'est-à-dire en développant la position du point d'attache  $P_2$  (voir figure 2.3) de la façon suivante :

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_3 + l_2 \cos \theta_4 \\ l_1 \sin \theta_3 + l_2 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

En dérivant l'équation (2.79) par rapport au temps, on obtient la relation désirée entre la vitesse du point d'attache et les vitesses articulaires de la deuxième patte :

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 - l_2 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \\ l_1 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 + l_2 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

On exprime l'équation (2.80) sous forme matricielle :

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_3 & -l_2 \sin \theta_4 \\ l_1 \cos \theta_3 & l_2 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

où  $\mathbf{A}_2$  est la Jacobienne de la deuxième de la patte.

Avec l'équation (2.81) il est aussi possible de trouver les vitesses articulaires de la deuxième patte en fonction de la vitesse du point d'attache et par le fait même en fonction des vitesses généralisées de l'équation (2.74) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2^{-1} \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} (\dot{\mathbf{c}} + \dot{\phi} \mathbf{E} \mathbf{d}_2) \quad (2.82)$$

## 2.3 Équations d'accélération

Pour trouver les accélérations des membrures du système, on peut encore une fois procéder de 2 façons : pour la totalité du mécanisme qui ne tient pas compte de la patte passive ou par une méthode patte par patte.

### 2.3.1 Équations d'accélération du mécanisme à 3 degrés de liberté

Pour trouver les accélérations des trois actionneurs du manipulateur, on dérive tout simplement l'équation (2.65) par rapport au temps :

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{J}}\mathbf{t} + \mathbf{K}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (2.83)$$

On peut aussi réarranger la dernière équation de la façon suivante pour avoir directement les accélérations des actionneurs :

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{J}\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{J}}\mathbf{t} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.84)$$

Le développement des termes de l'équation (2.84) ne sera pas traité ici car la méthode patte par patte nous permet de trouver l'accélération de la patte passive qui sera nécessaire à l'analyse dynamique du mécanisme.

### 2.3.2 Équations d'accélération du mécanisme à 2 ddl

Dans cette sous-section on traite du problème des accélérations du mécanisme dans une optique patte par patte ce qui permet de diviser le mécanisme en deux parties rendant les équations plus faciles à manipuler.

Encore une fois, on utilise l'accélération des points d'attache pour décomposer le mécanisme en deux sous-systèmes à 2 degrés de liberté. Les accélérations des points d'attache sont données par les relations suivantes :

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_1 + \dot{\phi}\mathbf{E}(\dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_1) \quad (2.85)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_2 = \ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_2 + \dot{\phi}\mathbf{E}(\dot{\phi}\mathbf{E}\mathbf{d}_2) \quad (2.86)$$

On se sert donc des résultats obtenus à la sous-section 2.2.2, en commençant tout d'abord par la première patte. On dérive par rapport au temps l'équation (2.77) :

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{A}}_1 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

où l'on peut développer les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\dot{\mathbf{A}}_1$  :

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_2 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & -l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Finalement, on réarrange l'équation (2.88) de façon à obtenir les accélérations des membrures de la première patte en fonction de l'accélération du premier point d'attache et des vitesses des actionneurs de la première patte :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^{-1} \left( \ddot{\mathbf{p}}_1 - \dot{\mathbf{A}}_1 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.89)$$

Pour trouver les accélérations articulaires présentes dans la deuxième patte, on procède de la même façon que pour la première patte, soit en dérivant l'équation (2.81) par rapport au temps :

$$\ddot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{A}}_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

où l'on peut développer les matrices  $\mathbf{A}_2$  et  $\dot{\mathbf{A}}_2$  :

$$\ddot{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_3 & -l_2 \sin \theta_4 \\ l_1 \cos \theta_3 & l_2 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 & -l_2 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ -l_1 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 & -l_2 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Évidemment, l'équation (2.91) est réarrangée de façon à avoir les accélérations des membres de la deuxième patte en fonction de l'accélération du deuxième point d'attache et des vitesses des actionneurs de la deuxième patte :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2^{-1} \left( \ddot{\mathbf{p}}_2 - \dot{\mathbf{A}}_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \right) \quad (2.92)$$

## 2.4 Problème géométrique direct

Le problème géométrique direct est très utile car il permet de connaître la position de l'effecteur en fonction des angles prescrits aux actionneurs du manipulateur. Le PGD est donc la transformation qui permet le passage des coordonnées articulaires aux coordonnées généralisées. Dans le cas des robots sériels, cette transformation est assez directe, mais pour les manipulateurs parallèles elle est généralement plus complexe. Comme le mécanisme parallèle étudié ici est assez simple, nous prenons le temps d'expliquer son PGD.

Les angles des trois actionneurs étant connus, la première patte est donc complètement définie comme on peut le voir à la figure (2.3). On peut donc positionner le point d'attache  $P_1$  de la première patte ( $\mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$ ). On voit également que le vecteur  $\mathbf{u}_2$  est défini grâce à l'angle  $\theta_3$  et l'on peut donc définir son extrémité par le point  $P_3$  ( $\mathbf{p}_3 = \mathbf{u}_2$ ). L'inconnue du problème est par conséquent le point d'attache  $P_2$  qui relie la deuxième patte à l'effecteur.

En analysant les positions possibles pour la plate-forme, on remarque qu'elle peut se positionner n'importe où sur le cercle  $N_1$  centré en  $P_1$  ayant pour rayon la longueur de la plate-forme. En effet, le point d'attache entre la première patte et la plate-forme est une liaison rotoïde et doit idéalement permettre une rotation de  $360^\circ$ . On développe l'équation paramétrique du cercle  $N_1$  :

$$x_1 = \mathbf{p}_1^T \mathbf{q}_1 + 2d \cos \psi \quad (2.93)$$

$$y_1 = \mathbf{p}_1^T \mathbf{q}_2 + 2d \sin \psi \quad (2.94)$$

avec  $\psi \in [0, 2\pi]$ ,  $\mathbf{q}_1 = [1, 0]^T$  et  $\mathbf{q}_2 = [0, 1]^T$

On remarque aussi que le vecteur  $\mathbf{v}_2$  qui va du point  $P_3$  au point  $P_2$  et qui représente la barre 3 de la deuxième patte peut tourner autour du point  $P_3$  de  $360^\circ$  car c'est aussi

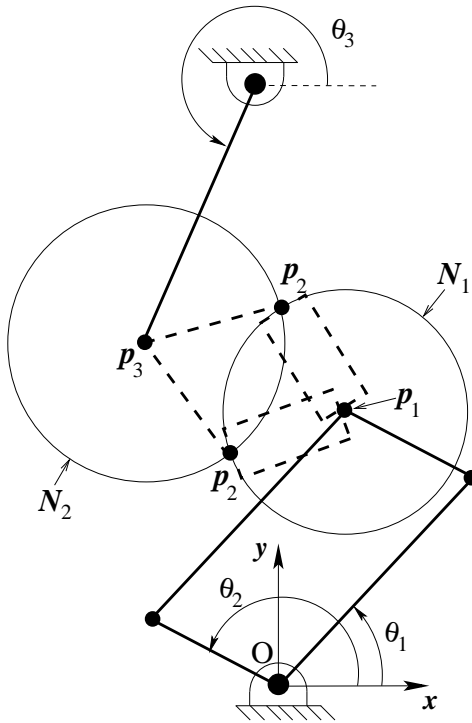


FIG. 2.3 – Problème géométrique direct.

une liaison rotoïde qui relie la barre 1 à la barre 3. Le point d'attache entre la deuxième patte et la plate-forme se retrouve donc sur le cercle  $N_2$  de rayon égal à la longueur de la barre 3 (c'est-à-dire  $l_2$ ) et centré en  $P_3$ . L'équation paramétrique du cercle  $N_2$  est la suivante :

$$x_3 = \mathbf{p}_3^T \mathbf{q}_1 + l_2 \cos \eta \quad (2.95)$$

$$y_3 = \mathbf{p}_3^T \mathbf{q}_2 + l_2 \sin \eta \quad (2.96)$$

avec  $\eta \in [0, 2\pi]$

La solution de la position du point  $P_2$  est donc donnée par l'intersection des cercles  $N_1$  et  $N_2$ . La méthode utilisée pour trouver les points d'intersection entre ces deux cercles est développée à l'annexe A.

On obtient donc un maximum de 2 solutions pour le problème géométrique direct du manipulateur étudié.



# Chapitre 3

## Dynamique du manipulateur à 3 degrés de liberté

Le chapitre précédent traitait de la cinématique du manipulateur à 3 ddl. Les vitesses et accélérations des actionneurs étant maintenant connues en fonction des vitesses et accélérations prescrites à l'effecteur, on peut maintenant développer le modèle dynamique du manipulateur étudié.

Dans ce chapitre on traitera de la dynamique du manipulateur étudié. On se concentrera surtout sur la dynamique inverse du mécanisme qui consiste à trouver les efforts aux actionneurs et dans les articulations pour une trajectoire donnée. Finalement, on vérifiera numériquement l'équilibrage dynamique du manipulateur à 3 ddl.

### 3.1 Équations de Newton-Euler

L'équilibrage dynamique d'un mécanisme a pour but d'éliminer les forces et moments de réactions sur la base de celui-ci. Pour prouver que la somme des forces et des moments est bel et bien égale à zéro, il est impératif d'établir un modèle dynamique du manipulateur qui nous permettra de connaître les efforts impliqués. Comme on désire prouver mathématiquement que l'équilibrage dynamique est respecté pour les solutions trouvées au chapitre 1, on utilisera le problème dynamique inverse avec les équations de Newton-Euler. En effet, l'approche de Newton-Euler permet de calculer les forces internes du mécanisme, ainsi que les forces de réaction du mécanisme sur sa base. Toutes les forces et moments nécessaires pour prouver l'équilibrage dynamique seront donc connus et les autres forces internes seront utiles pour le design du mécanisme.

Avant de passer à l'élaboration des équations de Newton-Euler, il semble important de bien établir la différence entre le problème dynamique direct et inverse.

Le problème dynamique direct permet de trouver les mouvements générés par des forces et couples articulaires. Donc si l'on connaît les valeurs des coordonnées articulaires et de leurs dérivées à un instant  $t_0$  (conditions initiales en position et en vitesse) et que les forces et couples articulaires sont connus dans le temps, on peut déterminer par intégration du modèle dynamique, les valeurs des coordonnées articulaires et de leurs dérivées par rapport au temps à un instant ultérieur  $t$ . Le modèle dynamique consiste en fait en un système non-linéaire ordinaire d'équations différentielles couplées et peut par conséquent être solutionné à l'aide de techniques standards.

Le problème dynamique inverse quant à lui permet de trouver l'évolution des couples et forces articulaires pour des variables articulaires et leur dérivée première et seconde connues. Comme la trajectoire est habituellement spécifiée dans l'espace cartésien, on peut facilement trouver la trajectoire articulaire à l'aide du problème géométrique inverse et de la Jacobienne définie au chapitre précédent. Pour les besoins de notre étude actuelle, le problème dynamique inverse sera privilégié car il conduit à de simples équations algébriques faciles à résoudre.

### 3.1.1 Problème dynamique inverse

Pour appliquer les équations de Newton-Euler au manipulateur étudié ici, nous devons tout d'abord séparer le problème pour créer les diagrammes des corps libres. Le diagramme des corps libres, ou DCL, facilite l'analyse d'un système en le séparant en sous-systèmes habituellement beaucoup moins complexes. On divise donc le manipulateur en 13 DCL qui correspondent aux 13 corps en mouvement dans le mécanisme. Comme il a déjà été mentionné au chapitre 1, l'équilibrage dynamique d'un mécanisme à 5 barres nécessite l'ajout de 2 contre-rotations. Commençons donc par définir les éléments et hypothèses nécessaires pour les calculs dynamiques les impliquant.

On pose que l'inversion de la rotation entre les barres et les contre-rotations se fait à l'aide d'engrenages. On ne tiendra pas compte de l'inertie des engrenages dans les calculs, elle sera plutôt rajoutée aux barres lors du design. On pose aussi un rayon quelconque,  $r = 0.02m$ , pour les engrenages. Finalement, on définit le point d'attache des contre-rotations comme étant à gauche des pattes, à une distance de 2 fois le rayon d'un engrenage selon l'axe des  $x$ .

### 3.1.2 DCL de la première barre de la première patte

On commence donc par la création du DCL de la première barre (voir figure 3.1). La force  $\mathbf{F}_1$  est la force de contact entre la barre 1 et la barre 3 qui est transmise par la liaison rotoïde. La force  $\mathbf{R}_1$  est la force de contact entre la base et la première barre. La force  $\mathbf{E}_1$  est la force de contact entre les engrenages. On retrouve aussi le moment  $M_1$  qui est le couple nécessaire pour actionner la première barre. Les propriétés de la barre sont données par  $m_1, k_1, r_1$  et  $\mathbf{u}_1$  qui sont respectivement sa masse, son rayon de giration, la position de son centre de masse et le vecteur reliant la première articulation rotoïde à la deuxième. On peut donc maintenant écrire les équations de Newton-Euler pour ce DCL :

$$\sum F_x = F_{1_x} + R_{1_x} = m_1 \bar{a}_{1_x} - E_{1_x} \quad (3.1)$$

$$\sum F_y = F_{1_y} + R_{1_y} = m_1 \bar{a}_{1_y} - E_{1_y} \quad (3.2)$$

$$\sum M = \mathbf{u}_1^T \mathbf{V} \mathbf{F}_1 + M_1 = m_1 (k_1^2 + r_1^2) \ddot{\theta}_1 + \mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_1 \quad (3.3)$$

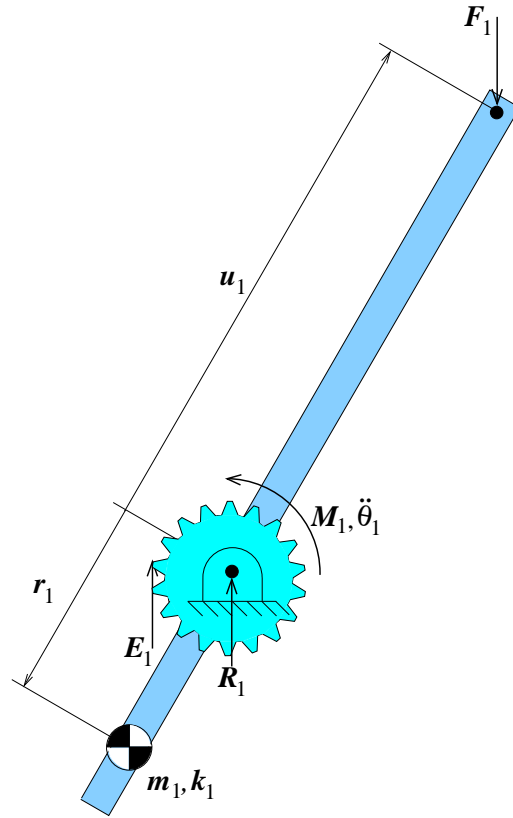


FIG. 3.1 – DCL de la barre 1 de la première patte.

où l'on a défini la matrice  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  pour permettre le produit vectoriel dans le plan.

### 3.1.3 DCL de la contre-rotation associée à la première barre de la première patte

Dans le DCL de la première contre-rotation présenté à la figure 3.2, on retrouve la force de contact entre les engrenages,  $\mathbf{E}_1$ , mais de signe contraire pour respecter le principe d'action-réaction. Il y a aussi la force de contact,  $\mathbf{C}_1$ , entre le sol et la contre-rotation. On peut donc tirer les équations suivantes de ce DCL :

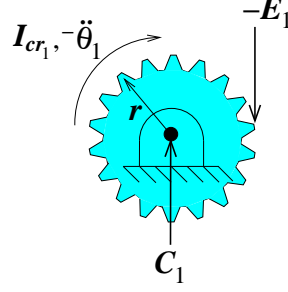


FIG. 3.2 – DCL de la contre-rotation associée à la barre 1 de la première patte.

$$\sum F_x = -E_{1x} + C_{1x} = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum F_y = -E_{1y} + C_{1y} = 0 \quad (3.5)$$

$$\sum M = -\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_1 = -I_{cr_1} \ddot{\theta}_1 \quad (3.6)$$

On remarque que l'équation (3.6) peut nous permettre de simplifier l'équation (3.3). On remplace donc  $\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_1$  dans l'équation (3.3) et l'on obtient :

$$\sum M = \mathbf{u}_1^T \mathbf{V} \mathbf{F}_1 + M_1 = m_1(k_1^2 + r_1^2) \ddot{\theta}_1 + I_{cr_1} \ddot{\theta}_1 \quad (3.7)$$

Nous pouvons aussi développer l'équation (3.6) pour avoir les deux composantes de la force  $\mathbf{E}_1$  qui sont nécessaires dans les équations (3.1) et (3.2) :

$$r_y E_{1x} - r_x E_{1y} = I_{cr_1} \ddot{\theta}_1 \quad (3.8)$$

En posant que les engrenages se situent à gauche de la barre, le vecteur  $\mathbf{r}$  prend la forme  $\mathbf{r} = [-r, 0]^T$  et donc la force de contact entre les engrenages est :

$$E_{1x} = 0 \quad (3.9)$$

$$E_{1y} = \frac{I_{cr_1} \ddot{\theta}_1}{r} \quad (3.10)$$

Il ne restera plus qu'à poser une valeur quelconque pour  $r$  et de connaître l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}_1$  pour connaître la force  $E_{1y}$ .

On remarque aussi que maintenant que le vecteur de force  $\mathbf{E}_1$  est connu on peut calculer la force  $\mathbf{C}_1$  avec les équations (3.4) et (3.5). On les réarrange comme suit :

$$C_{1x} = E_{1x} = 0 \quad (3.11)$$

$$C_{1y} = E_{1y} = \frac{I_{cr_1} \ddot{\theta}_1}{r} \quad (3.12)$$

### 3.1.4 DCL de la deuxième barre de la première patte

On passe maintenant au DCL de la deuxième barre (voir figure 3.3). La force  $\mathbf{F}_2$  est

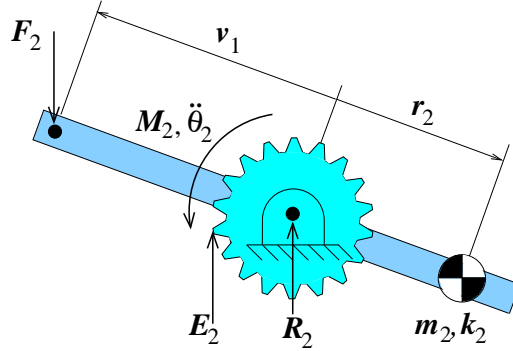


FIG. 3.3 – DCL de la barre 2 de la première patte.

la force de contact entre la barre 2 et la barre 4 qui est transmise par la liaison rotoïde. La force  $\mathbf{R}_2$  est la force de contact entre la base et la deuxième barre. La force  $\mathbf{E}_2$  est la force de contact entre les engrenages. On retrouve aussi le moment  $M_2$  qui est le couple nécessaire pour actionner la deuxième barre. Les propriétés de la barre sont données par  $m_2, k_2, r_2$  et  $\mathbf{v}_1$  qui sont respectivement sa masse, son rayon de giration, la position de son centre de masse et le vecteur reliant les deux articulations rotoïdes de la barre. On peut donc maintenant écrire les équations de Newton-Euler pour ce DCL :

$$\sum F_x = F_{2_x} + R_{2_x} = m_2 \bar{a}_{2_x} - E_{2_x} \quad (3.13)$$

$$\sum F_y = F_{2_y} + R_{2_y} = m_2 \bar{a}_{2_y} - E_{2_y} \quad (3.14)$$

$$\sum M = \mathbf{v}_1^T \mathbf{V} \mathbf{F}_2 + M_2 = m_2 (k_2^2 + r_2^2) \ddot{\theta}_2 + \mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_2 \quad (3.15)$$

### 3.1.5 DCL de la contre-rotation associée à la deuxième barre de la première patte

Dans le DCL de la deuxième contre-rotation présenté à la figure 3.4, on retrouve la force de contact entre les engrenages,  $\mathbf{E}_2$ , mais de signe contraire pour respecter le principe d'action-réaction. Il y a aussi la force de contact,  $\mathbf{C}_2$ , entre le sol et la contre-rotation. On peut donc écrire les équations suivantes pour ce DCL :

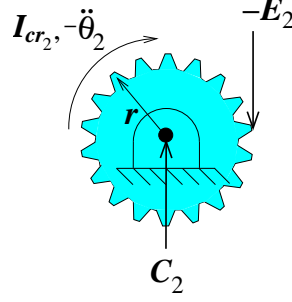


FIG. 3.4 – DCL de la contre-rotation associée à la barre 2 de la première patte.

$$\sum F_x = -E_{2x} + C_{2x} = 0 \quad (3.16)$$

$$\sum F_y = -E_{2y} + C_{2y} = 0 \quad (3.17)$$

$$\sum M = -\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_2 = -I_{cr_2} \ddot{\theta}_2 \quad (3.18)$$

On peut encore faire les mêmes simplifications qu'à la section 3.1.3, c'est-à-dire que l'on peut réécrire l'équation (3.15) en y substituant l'équation (3.18). Ce qui nous donne :

$$\sum M = \mathbf{v}_1^T \mathbf{V} \mathbf{F}_2 + M_2 = m_2(k_2^2 + r_2^2)\ddot{\theta}_2 + I_{cr_2}\ddot{\theta}_2 \quad (3.19)$$

On refait aussi le même développement pour la force de contact entre les engrenages et l'on obtient ;

$$E_{2x} = 0 \quad (3.20)$$

$$E_{2y} = \frac{I_{cr_2}\ddot{\theta}_2}{r} \quad (3.21)$$

On isole aussi la force  $\mathbf{C}_2$  dans les équations (3.16) et (3.17) maintenant que l'on connaît la force  $\mathbf{E}_2$

$$C_{2x} = E_{2x} = 0 \quad (3.22)$$

$$C_{2y} = E_{2y} = \frac{I_{cr_2}\ddot{\theta}_2}{r} \quad (3.23)$$

### 3.1.6 DCL de la troisième barre de la première patte

Passons maintenant aux barres distales du mécanisme, c'est-à-dire les barres 3 et 4 (voir figure 1.1). Le DCL pour la barre 3 est présenté à la figure 3.5. La force de

contact  $\mathbf{F}_1$  qui agit entre la barre 1 et 3 est de signe négatif pour tenir compte du principe d'action-réaction. La force  $\mathbf{F}_3$  quant à elle, est la force qui agit entre la barre 3 et 4 par le biais de l'articulation rotoïde qui les unit. Les autres éléments présents sur la figure sont reliés aux propriétés intrinsèques de la barre. Les équations suivantes sont donc tirées de ce DCL :

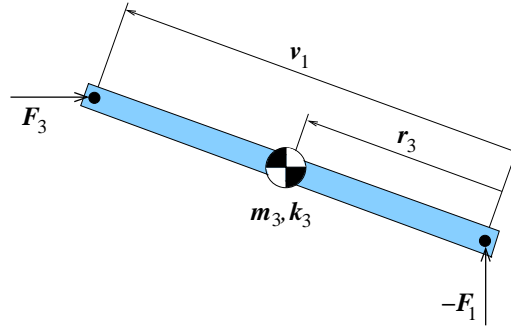


FIG. 3.5 – DCL de la barre 3 de la première patte.

$$\sum F_x = -F_{1x} + F_{3x} = m_3 \bar{a}_{3x} \quad (3.24)$$

$$\sum F_y = -F_{1y} + F_{3y} = m_3 \bar{a}_{3y} \quad (3.25)$$

$$\sum M = \mathbf{r}_3^T \mathbf{V} \mathbf{F}_1 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{r}_3)^T \mathbf{V} \mathbf{F}_3 = m_3 k_3^2 \ddot{\theta}_2 \quad (3.26)$$

### 3.1.7 DCL de la quatrième barre de la première patte

Finalisons la première patte avec le DCL de la quatrième barre. On peut voir à la figure 3.6 que le DCL est semblable à ceux que l'on a vu jusqu'à présent. On retrouve la force  $\mathbf{F}_2$  mais de signe contraire parce qu'elle agit par action-réaction avec celle présentée dans la figure 3.3. Le même phénomène se produit avec la force  $\mathbf{F}_3$ , mais par rapport au DCL de la figure 3.5. La dernière force présente dans la figure est la force transmise entre la barre 4 et la plate-forme par le biais du pivot qui les unit. Cette force est notée  $\mathbf{F}_4$ . Encore une fois, les autres éléments présentés sur la figure ont trait aux propriétés intrinsèques de la barre.

$$\sum F_x = -F_{2x} + F_{4x} - F_{3x} = m_4 \bar{a}_{4x} \quad (3.27)$$

$$\sum F_y = -F_{2y} + F_{4y} - F_{3y} = m_4 \bar{a}_{4y} \quad (3.28)$$

$$\sum M = \mathbf{r}_4^T \mathbf{V} \mathbf{F}_2 + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_4)^T \mathbf{V} (\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_3) = m_4 k_4^2 \ddot{\theta}_1 \quad (3.29)$$



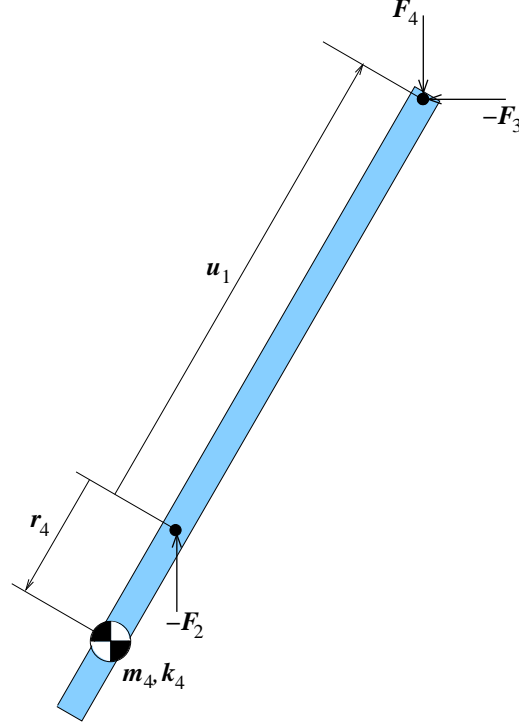


FIG. 3.6 – DCL de la barre 4 de la première patte.

### 3.1.8 DCL de la première barre de la deuxième patte

Les DCL relatifs à la première patte étant terminés, passons aux DCL de la deuxième patte. Comme la deuxième patte est identique à la première, la notation des barres qui la composent restera identique elle aussi. La figure 3.7 présente le DCL de la première barre associée à la deuxième patte. La force de contact entre la barre et la base est identifiée comme étant  $\mathbf{R}_3$ . On a aussi  $\mathbf{F}_5$  qui est la force de contact entre la barre 1 et la barre 3. Le moment  $M_3$  est le moment nécessaire pour actionner cette barre et la force  $\mathbf{E}_3$  est la force de contact entre les engrenages.

$$\sum F_x = F_{5_x} + R_{3_x} = m_5 \bar{a}_{5_x} - E_{3_x} \quad (3.30)$$

$$\sum F_y = F_{5_y} + R_{3_y} = m_5 \bar{a}_{5_y} - E_{3_y} \quad (3.31)$$

$$\sum M = \mathbf{u}_2^T \mathbf{V} \mathbf{F}_5 + M_3 = m_5 (k_5^2 + r_5^2) \ddot{\theta}_3 + \mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_3 \quad (3.32)$$

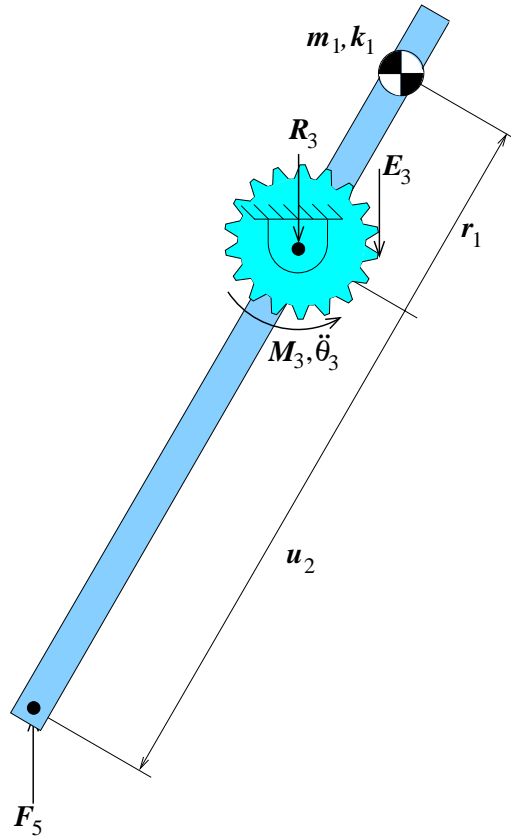


FIG. 3.7 – DCL de la barre 1 de la deuxième patte.

### 3.1.9 DCL de la contre-rotation associée à la première barre de la deuxième patte

Passons au DCL de la troisième contre-rotation présenté à la figure 3.8. On y retrouve la force de contact entre les engrenages,  $\mathbf{E}_3$ , mais de signe contraire pour respecter le principe d'action-réaction. Il y a aussi la force de contact,  $\mathbf{C}_3$ , entre le sol et la contre-rotation. On peut donc tirer les équations suivantes de ce DCL :

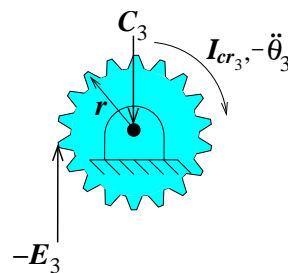


FIG. 3.8 – DCL de la contre-rotation associée à la barre 1 de la 2<sup>e</sup> patte.

$$\sum F_x = -E_{3_x} + C_{3_x} = 0 \quad (3.33)$$

$$\sum F_y = -E_{3_y} + C_{3_y} = 0 \quad (3.34)$$

$$\sum M = -\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_3 = -I_{cr_3} \ddot{\theta}_3 \quad (3.35)$$

Encore une fois, on peut faire les mêmes simplifications qu'à la section 3.1.3, c'est-à-dire que l'on peut réécrire l'équation (3.32) en y substituant l'équation (3.35). Ce qui nous donne :

$$\sum M = \mathbf{u}_2^T \mathbf{V} \mathbf{F}_5 + M_3 = m_5(k_5^2 + r_5^2) \ddot{\theta}_3 + I_{cr_3} \ddot{\theta}_3 \quad (3.36)$$

On refait aussi le même développement pour la force de contact entre les engrenages et l'on obtient ;

$$E_{3_x} = 0 \quad (3.37)$$

$$E_{3_y} = \frac{I_{cr_3} \ddot{\theta}_3}{r} \quad (3.38)$$

On isole encore la force  $\mathbf{C}_3$  dans les équations (3.33) et (3.34) maintenant que l'on connaît la force  $\mathbf{E}_3$

$$C_{3_x} = E_{3_x} = 0 \quad (3.39)$$

$$C_{3_y} = E_{3_y} = \frac{I_{cr_3} \ddot{\theta}_3}{r} \quad (3.40)$$

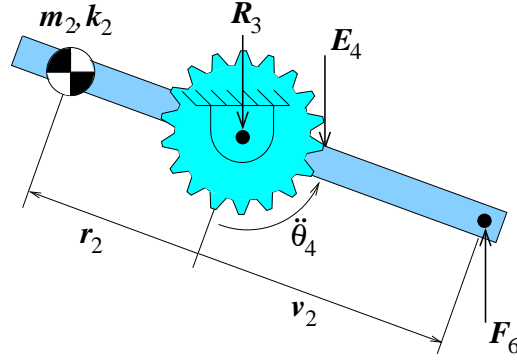
### 3.1.10 DCL de la deuxième barre de la deuxième patte

On passe maintenant au DCL de la deuxième barre présenté à la figure 3.9. La force  $\mathbf{F}_6$  est la force de contact entre la barre 2 et la barre 4 qui est transmise par le pivot. La force  $\mathbf{R}_4$  est la force de contact entre la base et la deuxième barre. La force  $\mathbf{E}_4$  est la force de contact entre les engrenages. Les propriétés de la barre sont données par  $m_6, k_6, r_6$  et  $\mathbf{v}_2$  qui sont respectivement sa masse, son rayon de giration, la position de son centre de masse et le vecteur reliant les deux articulations rotoïdes de la barre. On peut donc maintenant écrire les équations de Newton-Euler pour ce DCL :

$$\sum F_x = F_{6_x} + R_{4_x} = m_6 \bar{a}_{6_x} - E_{4_x} \quad (3.41)$$

$$\sum F_y = F_{6_y} + R_{4_y} = m_6 \bar{a}_{6_y} - E_{4_y} \quad (3.42)$$

$$\sum M = \mathbf{v}_2^T \mathbf{V} \mathbf{F}_6 = m_6(k_6^2 + r_6^2) \ddot{\theta}_4 + \mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_4 \quad (3.43)$$

FIG. 3.9 – DCL de la barre 2 de la 2<sup>e</sup> patte.

### 3.1.11 DCL de la contre-rotation associée à la deuxième barre de la deuxième patte

Dans le DCL de la quatrième contre-rotation présenté à la figure 3.10, on retrouve la force de contact entre les engrenages,  $\mathbf{E}_4$ , mais de signe contraire pour respecter le principe d'action-réaction. Il y a aussi la force de contact,  $\mathbf{C}_4$ , entre le sol et la contre-rotation. On peut donc écrire les équations suivantes pour ce système DCL :

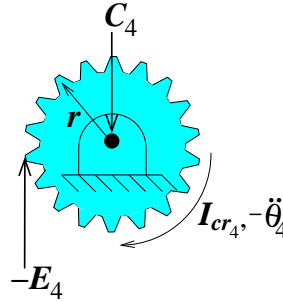


FIG. 3.10 – DCL de la contre-rotation associée à la barre 2 de la deuxième patte.

$$\sum F_x = -E_{4x} + C_{4x} = 0 \quad (3.44)$$

$$\sum F_y = -E_{4y} + C_{4y} = 0 \quad (3.45)$$

$$\sum M = -\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{E}_4 = -I_{cr4} \ddot{\theta}_4 \quad (3.46)$$

Pour une dernière fois, on effectue les mêmes simplifications qu'à la section 3.1.3, c'est-à-dire que l'on réécrit l'équation (3.43) en y substituant l'équation (3.46). Ce qui nous donne :

$$\sum M = \mathbf{v}_2^T \mathbf{V} \mathbf{F}_6 = m_6(k_6^2 + r_6^2) \ddot{\theta}_4 + I_{cr4} \ddot{\theta}_4 \quad (3.47)$$

On refait aussi le même développement pour la force de contact entre les engrenages et l'on obtient ;

$$E_{4x} = 0 \quad (3.48)$$

$$E_{4y} = \frac{I_{cr4} \ddot{\theta}_4}{r} \quad (3.49)$$

On isole finalement la force  $\mathbf{C}_4$  dans les équations (3.44) et (3.45) maintenant que l'on connaît la force  $\mathbf{E}_4$  :

$$C_{4x} = E_{4x} = 0 \quad (3.50)$$

$$C_{4y} = E_{4y} = \frac{I_{cr4} \ddot{\theta}_4}{r} \quad (3.51)$$

### 3.1.12 DCL de la troisième barre de la deuxième patte

Passons maintenant aux barres distales de la deuxième patte, c'est-à-dire les barres 3 et 4. Le DCL pour la barre 3 est présenté à la figure 3.11. La force de contact  $\mathbf{F}_5$  qui agit entre la barre 1 et 3 est de signe négatif pour tenir compte du principe d'action-réaction. La force  $\mathbf{F}_7$  quant à elle, est la force qui agit entre la barre 3 et 4 par le biais de l'articulation rotoïde qui les unit. Les autres éléments présents sur la figure sont reliés aux propriétés intrinsèques de la barre. Les équations suivantes sont donc tirées de ce DCL :

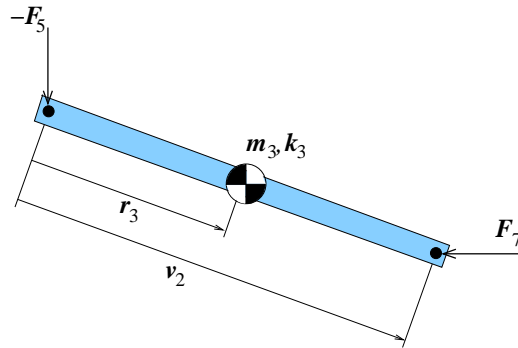


FIG. 3.11 – DCL de la barre 3 de la deuxième patte.

$$\sum F_x = -F_{5x} + F_{7x} = m_7 \bar{a}_{7x} \quad (3.52)$$

$$\sum F_y = -F_{5y} + F_{7y} = m_7 \bar{a}_{7y} \quad (3.53)$$

$$\sum M = \mathbf{r}_7^T \mathbf{V} \mathbf{F}_5 + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_7)^T \mathbf{V} \mathbf{F}_7 = m_7 k_7^2 \ddot{\theta}_4 \quad (3.54)$$

### 3.1.13 DCL de la quatrième barre de la deuxième patte

Finalisons la deuxième patte avec le DCL de la quatrième barre. On peut voir à la figure 3.12 que ce DCL est semblable à ceux que l'on a vus jusqu'à présent. On retrouve la force  $\mathbf{F}_6$  mais de signe contraire parce qu'elle agit par action-réaction avec celle présentée dans la figure 3.9. La même phénomène se produit avec la force  $\mathbf{F}_7$ , mais par rapport au DCL de la figure 3.11. La dernière force présente dans la figure est la force transmise entre la barre 4 et la plate-forme par le biais du pivot qui les unit. Cette force est notée  $\mathbf{F}_8$ . Encore une fois, les autres éléments présentés sur la figure ont trait aux propriétés intrinsèques de la barre.

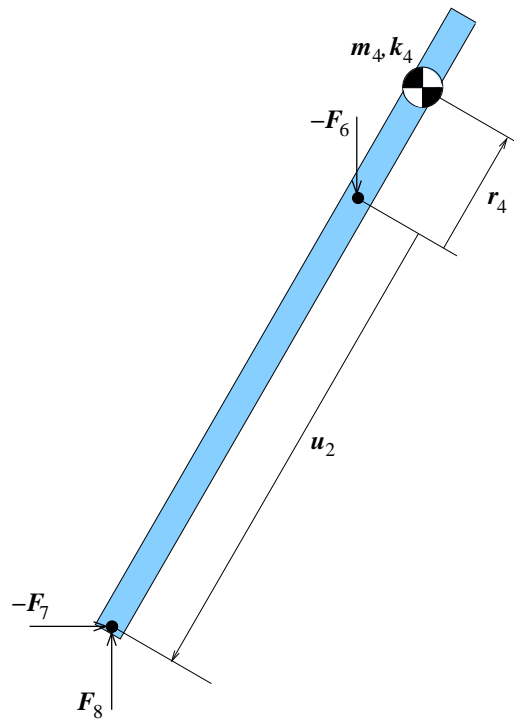


FIG. 3.12 – DCL de la barre 4 de la deuxième patte.

$$\sum F_x = -F_{6x} + F_{8x} - F_{7x} = m_8 \bar{a}_{8x} \quad (3.55)$$

$$\sum F_y = -F_{6y} + F_{8y} - F_{7y} = m_8 \bar{a}_{8y} \quad (3.56)$$

$$\sum M = \mathbf{r}_8^T \mathbf{V} \mathbf{F}_6 + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_8)^T \mathbf{V} (\mathbf{F}_8 - \mathbf{F}_7) = m_8 k_8^2 \ddot{\theta}_3 \quad (3.57)$$

### 3.1.14 DCL de la plate-forme

Le dernier DCL nécessaire pour effectuer le problème dynamique inverse du mécanisme est celui de la plate-forme. Celui-ci est présenté à la figure 3.13 et l'on peut y apercevoir deux forces de contact. La première,  $\mathbf{F}_4$ , est en fait la force transmise entre la première patte et la plate-forme par la liaison rotoïde qui les réunit. La deuxième force,  $\mathbf{F}_8$ , est la force transmise par la deuxième patte à la plate-forme. Les autres éléments présents sur la figure se rapportent aux propriétés intrinsèques de la plate-forme. On peut donc passer aux équations de Newton-Euler pour ce dernier DCL :

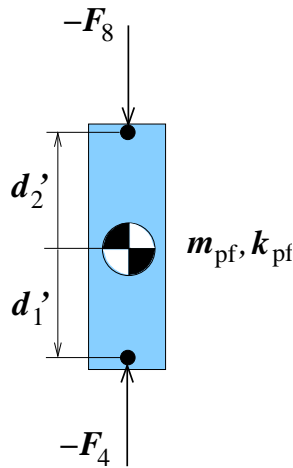


FIG. 3.13 – DCL de la plate-forme.

$$\sum F_x = -F_{4_x} - F_{8_x} = m_{pf}c_x \quad (3.58)$$

$$\sum F_y = -F_{4_y} - F_{8_y} = m_{pf}c_y \quad (3.59)$$

$$\sum M = -\mathbf{d}_1^T \mathbf{V} \mathbf{F}_4 - \mathbf{d}_2^T \mathbf{V} \mathbf{F}_8 = m_{pf}k_{pf}^2 \ddot{\phi} \quad (3.60)$$

## 3.2 Résolution des équations

Dans la section précédente, les équations de Newton-Euler pour tous les corps du mécanisme étudié ont été développées. Il faut maintenant établir une procédure pour résoudre ces équations afin d'obtenir les forces et moments présents dans le manipulateur et ainsi calculer la somme des forces et moments présents à la base.

En analysant les équations trouvées, on remarque qu'elles forment un système linéaire de 27 équations à 27 inconnues. On exprime donc le système sous forme matricielle :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.61)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice des coefficients des inconnues,  $\mathbf{x}$  est le vecteur des forces et moments recherchés (c'est-à-dire le vecteur des inconnues), et  $\mathbf{b}$  est le vecteur des forces inertielles. On peut se référer à l'annexe B pour avoir une description plus détaillée de ces vecteurs et cette matrice.

Comme on peut le constater dans l'annexe B, le vecteur des forces inertielles,  $\mathbf{b}$ , ne peut être évalué que si les accélérations des centres de masse de toutes les membrures sont connues. Pour trouver les accélérations des centres de masse, il faut tout d'abord connaître les accélérations angulaires de chacune des barres.

On définit donc une trajectoire paramétrique quelconque à l'effecteur, tout en s'assurant que celle-ci est bel et bien dans l'espace de travail du mécanisme et qu'elle ne traverse pas de lieux de singularité. On prend par exemple une trajectoire définie par rapport au temps ( $t$ ) pour la position de l'effecteur ( $\mathbf{c} = [x, y]^T$ ) et l'orientation ( $\phi$ ) de l'effecteur, que l'on regroupe dans le vecteur des coordonnées généralisées  $\mathbf{t}$  :

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{moy} + \alpha_x \cos\left(\frac{2\pi t}{\beta_x}\right) \\ y_{moy} + \alpha_y \sin\left(\frac{2\pi t}{\beta_y}\right) \\ \phi_{moy} + \alpha_\phi \sin\left(\frac{t}{\beta_\phi}\right) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Dans ce vecteur, plusieurs paramètres sont laissés variables afin de pouvoir générer une vaste gamme de trajectoires. Les paramètres  $x_{moy}$ ,  $y_{moy}$  et  $\phi_{moy}$  permettent de varier la valeur moyenne, tandis que  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  et  $\alpha_\phi$  permettent de varier l'amplitude, et finalement  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_\phi$  font varier la fréquence de la trajectoire.

On dérive ensuite le vecteur de l'équation (3.62) par rapport au temps pour obtenir le vecteur des vitesses généralisées :

$$\dot{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_x \left(\frac{2\pi}{\beta_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{\beta_x}\right) \\ \alpha_y \left(\frac{2\pi}{\beta_y}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{\beta_y}\right) \\ \alpha_\phi \left(\frac{1}{\beta_\phi}\right) \cos\left(\frac{t}{\beta_\phi}\right) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Pour terminer, on dérive le vecteur de vitesse de l'équation (3.63) par rapport au



temps pour obtenir le vecteur des accélérations généralisées :

$$\ddot{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_x \left(\frac{2\pi}{\beta_x}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\beta_x}\right) \\ -\alpha_y \left(\frac{2\pi}{\beta_y}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi t}{\beta_y}\right) \\ \alpha_\phi \left(\frac{1}{\beta_\phi}\right)^2 \sin\left(\frac{t}{\beta_\phi}\right) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Maintenant que l'on connaît les positions, vitesses et accélérations de l'effecteur en fonction du temps, il est possible de trouver les positions, vitesses et accélérations des variables articulaires, c'est-à-dire  $\theta_1$  à  $\theta_4$ . En effet, on utilise les équations développées au chapitre 2, plus particulièrement les sections 2.1, 2.2.2 et 2.3.2.

Une fois que les vitesses et accélérations des variables articulaires sont obtenues, on calcule les vitesses et accélérations correspondantes au centre de masse des différentes membrures. Pour les vitesses, il s'agit tout simplement de faire le produit vectoriel entre la vitesse angulaire et le vecteur qui relie le centre de masse. Comme le produit vectoriel n'est défini que pour un espace en trois dimensions, on se doit d'utiliser une nouvelle notation pour effectuer ce produit dans le plan. La vitesse angulaire est donc traitée comme un scalaire car celle-ci sera toujours orientée selon une direction perpendiculaire au plan d'action du mécanisme. On utilise aussi la matrice  $\mathbf{E}$  définie à la section 2.2.1, pour aider à la simplification. On trouve donc les équations suivantes pour les vitesses des membrures :

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_1 \quad (3.65)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_2 \quad (3.66)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{u}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_3 \quad (3.67)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_4 = \dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{v}_1 + \dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_4 \quad (3.68)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_5 = \dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_5 \quad (3.69)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_6 = \dot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_6 \quad (3.70)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_7 = \dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{u}_2 + \dot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_7 \quad (3.71)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_8 = \dot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{v}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_8 \quad (3.72)$$

Les vecteurs  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  ont déjà été définis à la section 2.1 du chapitre 2.

Pour trouver les accélérations des centres de masse, on utilise la formule bien connue :  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ . On applique cette formule à chacune des

barres :

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{E}(\dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_1) + \ddot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_1 \quad (3.73)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\theta}_2 \mathbf{E}(\dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_2) + \ddot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_2 \quad (3.74)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \dot{\theta}_1 \mathbf{E}(\dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{u}_1) + \ddot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{u}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{E}(\dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_3) + \ddot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_3 \quad (3.75)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_4 = \dot{\theta}_2 \mathbf{E}(\dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{v}_1) + \ddot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{v}_1 + \dot{\theta}_1 \mathbf{E}(\dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_4) + \ddot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_4 \quad (3.76)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_5 = \dot{\theta}_3 \mathbf{E}(\dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_5) + \ddot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_5 \quad (3.77)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_6 = \dot{\theta}_4 \mathbf{E}(\dot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_6) + \ddot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_6 \quad (3.78)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_7 = \dot{\theta}_3 \mathbf{E}(\dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{u}_2) + \ddot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{u}_2 + \dot{\theta}_4 \mathbf{E}(\dot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_7) + \ddot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_7 \quad (3.79)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_8 = \dot{\theta}_4 \mathbf{E}(\dot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{v}_2) + \ddot{\theta}_4 \mathbf{E} \mathbf{v}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{E}(\dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_8) + \ddot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_8 \quad (3.80)$$

Maintenant que toutes les données nécessaires à la résolution du problème dynamique inverse sont connues, on procède à la résolution de l'équation (3.61) à l'aide d'un algorithme numérique pour calculer le vecteur solution  $\mathbf{x}$ .

La résolution de cette dernière équation a été effectuée pour plusieurs trajectoires à l'aide du programme *MED3\_DYN.m* qui a été écrit en langage *Matlab*.

### 3.3 Vérification de la somme des forces et des moments sur la base

Maintenant que l'on connaît toutes les forces présentes dans le mécanisme pour des trajectoires données, on peut vérifier si le mécanisme est bel et bien équilibré dynamiquement. On effectue tout d'abord la somme des forces sur la base selon les 2 axes du plan, soit  $x$  et  $y$ .

Les forces qui ont été trouvées à la section précédente sont les forces internes du mécanisme, donc si on veut avoir les forces ressenties par la base il faut prendre les forces de signe inverse. Par exemple, la force de contact entre la base et la première patte (que l'on a notée  $\mathbf{R}_1$ ) qui est ressentie par la base est donc  $-\mathbf{R}_1$ . Il en va de même pour les autres forces de contact avec la base c'est-à-dire :  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{R}_4$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$  et

$\mathbf{C}_4$ . La somme des forces selon  $x$  et  $y$  est donc tout simplement :

$$\sum F_x = -R_{1_x} - R_{2_x} - R_{3_x} - R_{4_x} - C_{1_x} - C_{2_x} - C_{3_x} - C_{4_x} \quad (3.81)$$

$$\sum F_y = -R_{1_y} - R_{2_y} - R_{3_y} - R_{4_y} - C_{1_y} - C_{2_y} - C_{3_y} - C_{4_y} \quad (3.82)$$

Il ne reste maintenant qu'à définir la somme des moments selon l'axe des  $Z$  pour prouver si l'équilibrage dynamique est bel et bien possible pour un mécanisme à 3 degrés de liberté. On doit tout d'abord choisir un point par rapport auquel la somme des moments sera calculée. Notre choix s'est arrêté sur le point d'attache de la première patte, noté  $O$  sur la figure 2.1.

Il s'agit maintenant de faire le produit vectoriel entre les forces agissant sur la base et les vecteurs qui les lient avec le point  $O$ . Le tout additionné avec les couples ressentis par la base, c'est-à-dire l'inverse des couples articulaires  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . On obtient l'équation suivante :

$$\sum M_O = -M_1 - M_2 - M_3 - 2\mathbf{r}^T \mathbf{V}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) - \mathbf{r}_2^T \mathbf{V}(\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4) - (\mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r})^T \mathbf{V}(\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_4) \quad (3.83)$$

On se rappelle que le vecteur qui relie les points d'attache aux points de contact des engrenages ont la forme  $\mathbf{r} = [-r, 0]^T$  et que les forces de contact entre la base et les contre-rotations ont la forme  $\mathbf{C}_1 = \left[0, \frac{I_{cr1} \ddot{\theta}_1}{r}\right]^T$ . Si on effectue le produit vectoriel en 2 dimensions de ces 2 vecteurs, c'est-à-dire  $-2\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{C}_1$ , on obtient :

$$-2\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{C}_1 = 2I_{cr1} \ddot{\theta}_1 \quad (3.84)$$

On effectue les mêmes opérations sur les termes  $-2\mathbf{r}^T \mathbf{V} \mathbf{C}_2$  et  $-(\mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r})^T \mathbf{V}(\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_4)$ , ce qui permet de simplifier l'équation (3.83) à la forme suivante :

$$\sum M_O = -M_1 - M_2 - M_3 + 2I_{cr1} \ddot{\theta}_1 + 2I_{cr2} \ddot{\theta}_2 + 2I_{cr3} \ddot{\theta}_3 + 2I_{cr4} \ddot{\theta}_4 - \mathbf{r}_2^T \mathbf{V}(\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4) \quad (3.85)$$

### 3.3.1 Résultats obtenus avec *Matlab*

Passons maintenant à l'évaluation numérique des équations (3.81), (3.82) et (3.85). On a donc ajouté les lignes de codes concernant le calcul des sommes des forces et

des moments au programme *MED3\_dyn.m* mentionné à la section précédente. Les paramètres de la trajectoire choisie pour l'évaluation numérique sont présentés au tableau 3.1.

$x_{moy}$	$y_{moy}$	$\phi_{moy}$	$\alpha_x$	$\alpha_y$	$\alpha_\phi$	$\beta_x$	$\beta_y$	$\beta_\phi$
0	0.2	0	0.02	0.02	0.2	3	1.5	2

TAB. 3.1 – Paramètres de la trajectoire.

On doit aussi mentionner que les paramètres physiques utilisés ne font pas partie de ceux trouvés à la section 1.5. On a plutôt utilisé les paramètres physiques présentés au tableau 3.2. Ces paramètres ont été obtenus en jumelant la conception du prototype avec le programme d'optimisation de la section 1.5. On a agi de cette façon afin de tenir compte de toutes les petites pièces nécessaires au montage (arbre, vis, écrou, etc.) qui n'étaient pas comprises dans l'optimisation initiale. En faisant de la sorte, on a même réussi à concevoir la membrure 3 sans qu'elle ait besoin d'avoir de contrepoids. Cela permet de libérer l'espace de travail, car la membrure 3 s'y retrouve la plupart du temps. Par contre, le fait d'éliminer le contrepoids de la membrure 3, augmente les masses et inerties des autres membrures, ce qui a pour effet de diminuer les performances dynamiques du manipulateur. Comme notre but n'est pas de concevoir un mécanisme performant, nous avons jugé bon d'éliminer le contrepoids de la membrure 3 afin de désencombrer l'espace de travail du manipulateur. Les résultats obtenus avec la trajectoire choisie et les paramètres physiques du tableau 3.2 sont présentés aux figures 3.14 et 3.15.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$m_i[kg]$	0.12002842	0.38131853	0.04090172	0.23465756
$r_i[m]$	-0.034166	-0.08	0.04986897	-0.06
$k_i[m]$	0.11986922	0.04598	0.04300885	0.08615174
$I_{cr_i}[kg \cdot m^2]$	0.00808725	0.00627056	-	-

TAB. 3.2 – Paramètres physiques du manipulateur simulé.

En observant la figure 3.14, on remarque que les couples obtenus semblent tout-à-fait raisonnables et il ne devrait pas être trop compliqué de trouver un moteur qui sera capable de les produire. Quant à la figure 3.15, la somme des forces et des moments sur la base du manipulateur sont présentés. On constate assez rapidement que les valeurs

sont extrêmement petites, de l'ordre de  $10^{-16}$ , et que l'on peut donc les considérer comme nulles. L'équilibrage dynamique est bel et bien démontré numériquement car la somme des forces et la somme des moments sur la base sont nulles pour la trajectoire choisie. Les calculs ont été refaits avec d'autres trajectoires et les résultats sont tout aussi concluants.

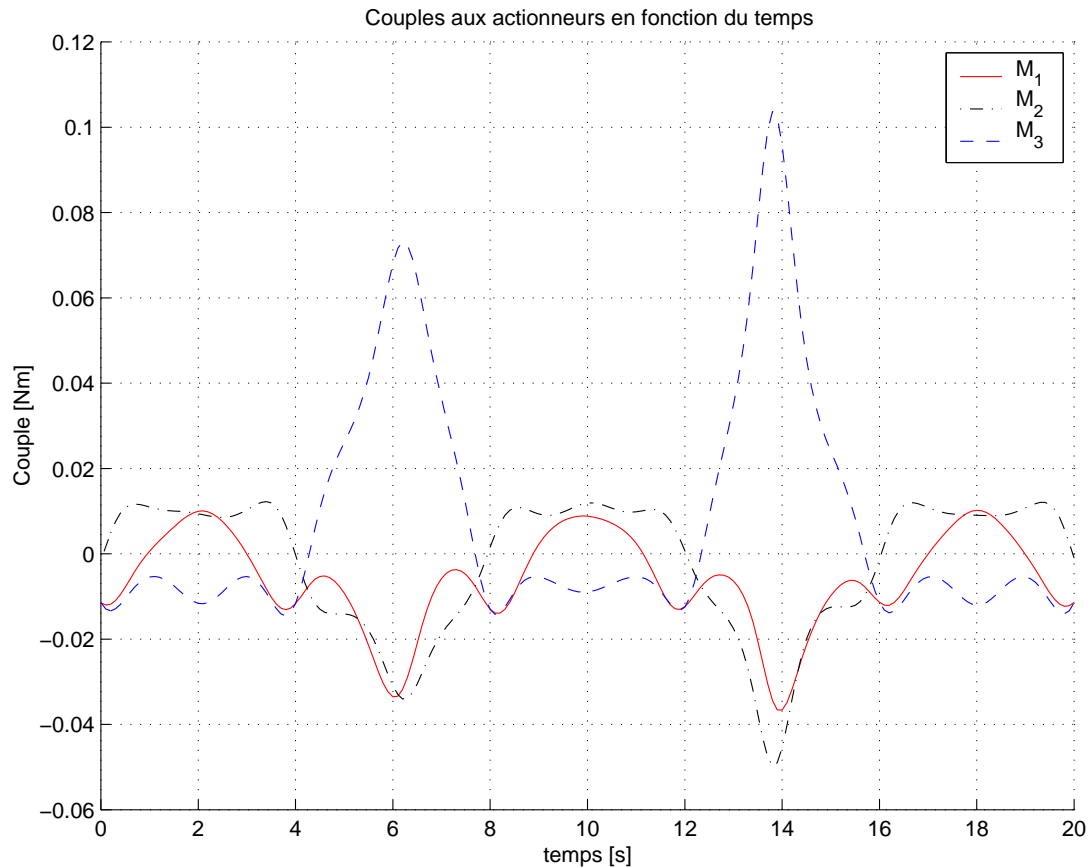


FIG. 3.14 – Couples articulaires pour la trajectoire choisie.

### 3.3.2 Vérification des résultats obtenus avec ADAMS

Le but de cette section est de vérifier les résultats obtenus avec le programme *Matlab* utilisé précédemment pour faire la dynamique inverse du manipulateur étudié. On utilise donc le logiciel de simulation dynamique *ADAMS*. Ce logiciel somme toute très convivial, offre de nombreuses possibilités allant de la dynamique directe à la simulation d'éléments flexibles.

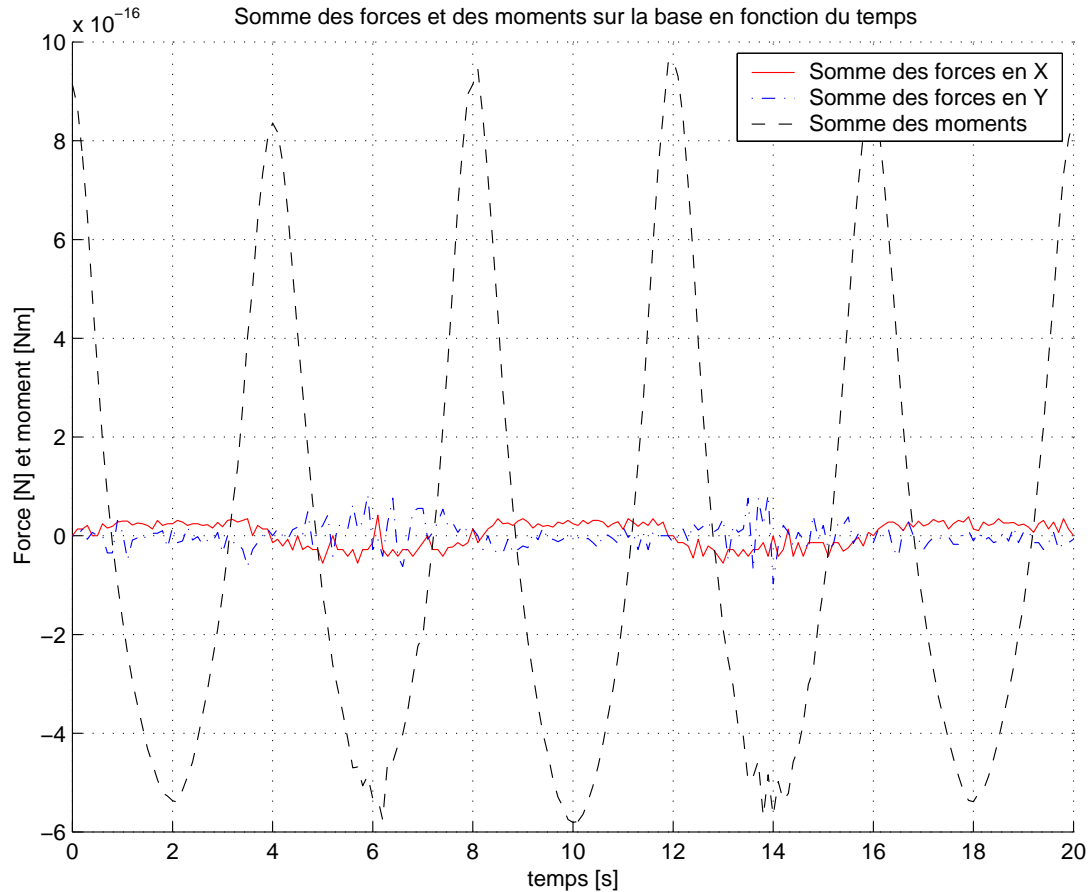


FIG. 3.15 – Somme des forces et des moments pour la trajectoire choisie.

Le but du présent travail n'étant pas de faire la démonstration des capacités du logiciel *ADAMS*, on se contentera de faire une brève présentation du modèle développé et des résultats obtenus.

Un aspect intéressant d'*ADAMS* est la possibilité de construire un modèle à partir d'éléments simples. En effet, l'utilisation de barres et d'articulations permet de réaliser la plupart des modèles. Parmi les articulations prédéfinies dans le logiciel on retrouve les articulations : rotoïde, prismatique, sphérique, cardan et cylindrique. Il est aussi possible de définir les propriétés (masse, inertie, position du centre de masse) des barres que l'on crée.

On utilise donc les mêmes données que pour l'évaluation du programme *Matlab*, c'est-à-dire les paramètres physiques présentés au tableau 3.2, pour construire le modèle. Le modèle obtenu est présenté à la figure 3.16. On remarque sur cette figure que les

contre-rotations ont été modélisées comme de simples cylindres ayant l'inertie désirée. On a aussi modélisé des engrenages qui assurent la transmission de la rotation entre les barres proximales et les contre-rotations.

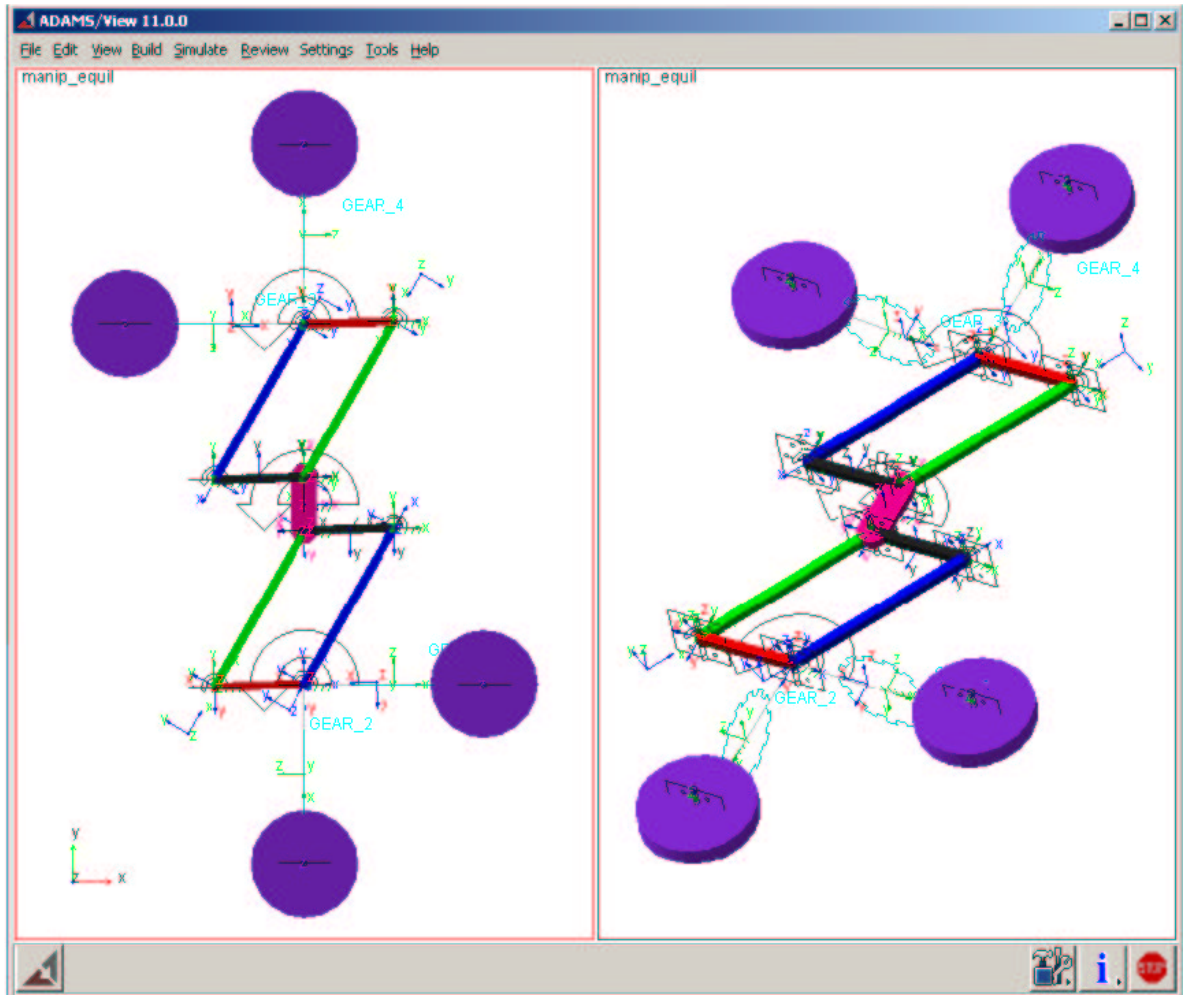


FIG. 3.16 – Modèle développé avec le logiciel *ADAMS*.

La trajectoire définie au tableau 3.1 est simulée dans *ADAMS* et les résultats obtenus sont présentés aux figures 3.17 et 3.18.

On constate que les figures 3.14 et 3.17 sont identiques. Cela nous permet d'affirmer que les couples calculés avec le programme *MED3* créé dans *Matlab* sont valables car ils concordent avec ceux obtenus avec *ADAMS*. On est aussi porté à croire que le reste des résultats obtenus avec le programme *Matlab* sont valables car les couples calculés font partie d'un système d'équations et que toute variation des couples devrait en théorie faire varier le reste des inconnues du vecteur  $\mathbf{x}$ .

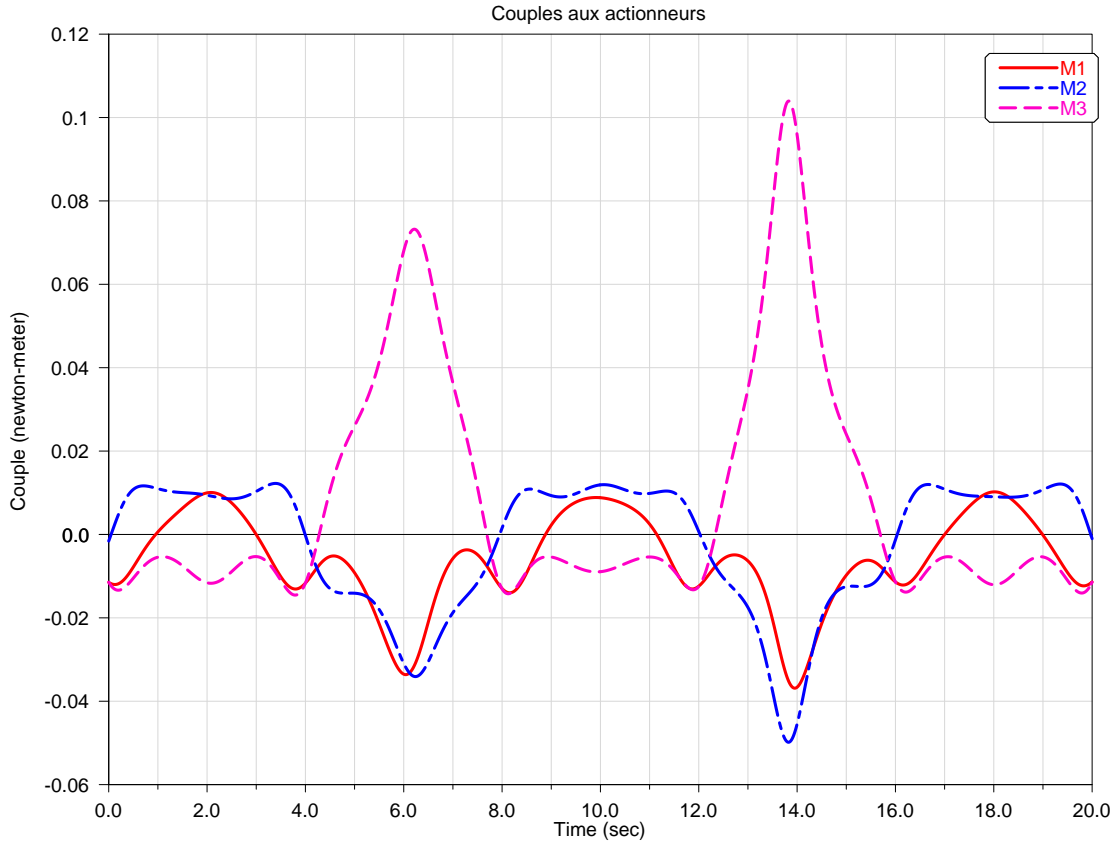


FIG. 3.17 – Couples articulaires obtenus avec *ADAMS* pour la trajectoire choisie.

Pour ce qui est des sommes des forces et des moments, on voit que les résultats diffèrent entre *Matlab* et *ADAMS*. En effet, l'ordre de grandeur des valeurs obtenues avec *Matlab* sur la figure 3.15 est de  $10^{-16}$ , tandis que l'ordre de grandeur des résultats obtenus avec *ADAMS* sur la figure 3.18 est de  $10^{-6}$ . Il est difficile de savoir exactement la raison de cette différence. Il est fort probable que cette différence vient du fait que la somme des forces et la somme des moments ne sont pas calculées automatiquement par *ADAMS*. Il a en effet fallu créer des fonctions pour pouvoir avoir la somme des forces et des moments. La précision utilisée pour calculer ses fonctions est peut-être inférieure pour éviter de ralentir les simulations, ce qui expliquerait la différence. On ne cherchera toutefois pas à comprendre plus amplement cette différence, car les résultats obtenus par *ADAMS* sont eux aussi très près de zéro et on peut affirmer que les forces et couples donnés à la figure 3.18 sont tout simplement du bruit numérique.

On a maintenant une deuxième preuve numérique de l'équilibrage dynamique, ce qui nous permet d'envisager la conception d'un prototype. Celui-ci devrait nous permettre de vérifier expérimentalement les limites de l'équilibrage dynamique ainsi que



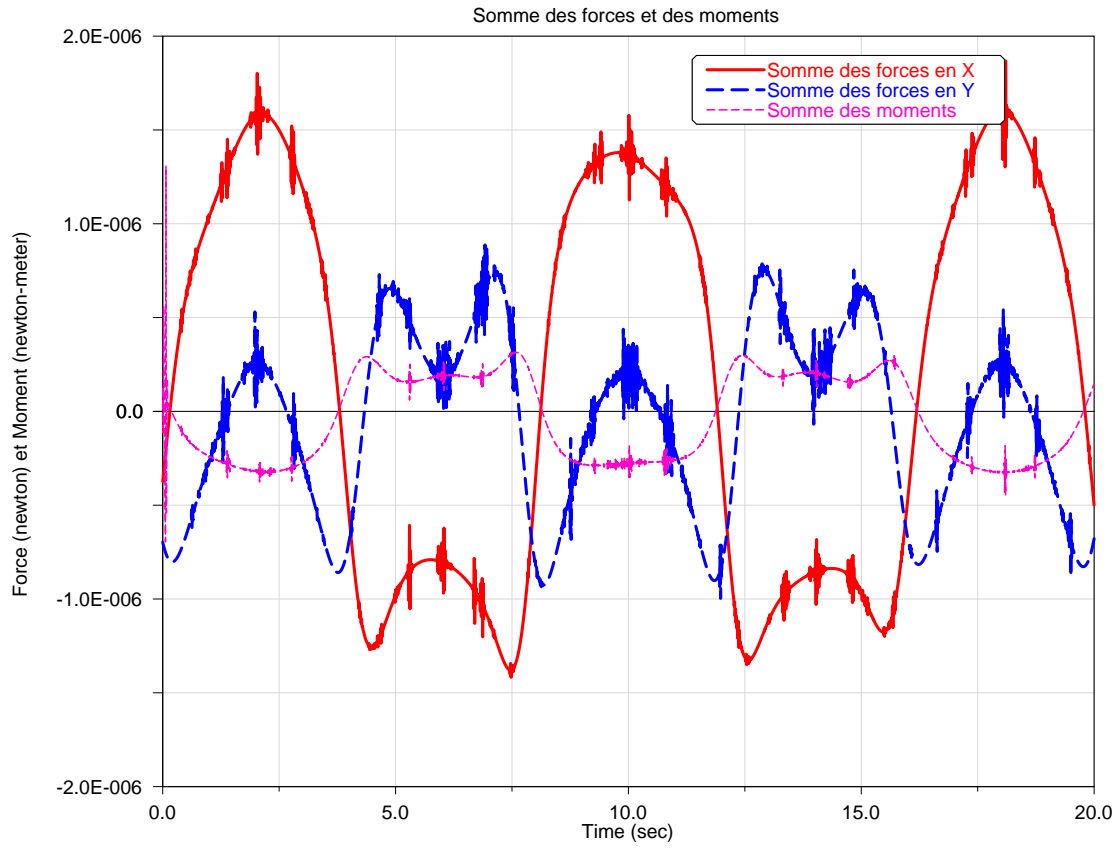


FIG. 3.18 – Somme des forces et des moments obtenus avec *ADAMS*.

ses possibilités d'applications.

# Chapitre 4

## Espace de travail et lieux de singularité

Dans ce chapitre on développe les expressions géométriques permettant de déterminer les frontières de l'espace de travail du manipulateur étudié. On développera aussi les expressions géométriques des courbes de singularité de celui-ci.

### 4.1 Espace de travail

L'espace de travail d'un robot est défini comme l'ensemble des positions et orientations atteignables pour des limites articulaires données. Cette caractéristique est très

utile car elle permet de connaître la surface pour un robot plan (ou le volume pour un robot spatial) dans lequel le manipulateur pourra effectuer ses tâches. Deux méthodes sont en général utilisées pour déterminer l'espace de travail d'un manipulateur : numérique et analytique.

Dans le cas de la méthode numérique, on discrétise une certaine surface (ou volume) de travail qui est idéalement plus grande que l'espace de travail du mécanisme. On applique ensuite le problème géométrique inverse à cette surface discrétisée. Les coordonnées généralisées possédant une transformation dans le domaine articulaire feront partie de l'espace atteignable, alors que celles qui n'auront pas de solution dans le domaine articulaire seront rejetées. L'un des désavantages de cette méthode est que la précision des frontières de l'espace de travail est fonction du pas de discrétisation choisi. Le temps de calcul est aussi relié au pas de la discrétisation, plus il sera précis plus l'évaluation sera longue. De plus, aucune expression mathématique des frontières de l'espace ne peuvent être tirée de cette méthode.

Par opposition, la méthode analytique permet justement d'obtenir l'espace de travail en fonction de ces frontières. Avec cette méthode, on définit l'espace atteignable en faisant l'intersection des courbes géométriques qui définissent les limites du mécanisme. Ces courbes géométriques peuvent prendre plusieurs formes allant du simple cercle au tore de révolution. Dans notre cas, l'espace de travail sera défini par l'intersection de quatre cercles.

Jusqu'à présent on a parlé simplement d'espace de travail, mais il faut préciser que l'on parle en fait d'espace de travail à orientation constante. En effet, puisque notre mécanisme est plan, son espace atteignable pour toutes orientations nécessiterait une représentation en trois dimensions : les deux premières pour les positions cartésiennes en  $x$  et  $y$ , la troisième pour l'angle d'orientation  $\phi$  de l'effecteur. Comme notre but n'est pas d'optimiser ce volume, mais plutôt d'avoir une idée de l'espace qui sera disponible, on se contentera de visualiser l'espace de travail à différentes orientations. L'espace atteignable devra tout simplement être assez satisfaisant pour qu'un prototype puisse être conçu.

Passons maintenant au développement des courbes géométriques qui définissent les limites de l'espace atteignable. La méthode utilisée ici est une variation de celle présentée dans [9] étant donné que le nombre de patte est différent (deux au lieu de

trois) et qu'aucune limite articulaire n'est définie pour les articulations rotoïdes du manipulateur.

Tout d'abord, considérons une patte individuellement. La première limite se produit lorsque la barre 3 est complètement repliée sur la barre 1, comme on peut l'observer à la figure 4.1. La position de l'effecteur est limitée dans ce cas à un cercle centré au point d'attache de cette patte moins le vecteur reliant le centre de la plate-forme au point de contact avec la première patte. De plus le rayon de ce cercle,  $r_{N_1}$ , est égal à la différence entre la longueur de la barre 1 et la barre 3. On a donc les équations paramétriques suivantes pour le cercle  $N_1$  :

$$C_{N_1} = (l_1 - l_2) \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} - \mathbf{d}_1 + \mathbf{r}_1 = r_{N_1} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{centre\_patte1} \\ y_{centre\_patte1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où  $\psi$  est le paramètre que l'on fait varier de  $-\pi$  à  $\pi$ ,  $\mathbf{d}_1$  est le vecteur qui relie le centre de la plate-forme au point de contact entre celle-ci et la première patte et  $\mathbf{r}_1$  est le vecteur qui relie le système de coordonnées global au point d'attache de la patte avec sa base. Étant donné, que le système de coordonnées global a son origine en  $O$ , le vecteur  $\mathbf{r}_1$  est donc nul.

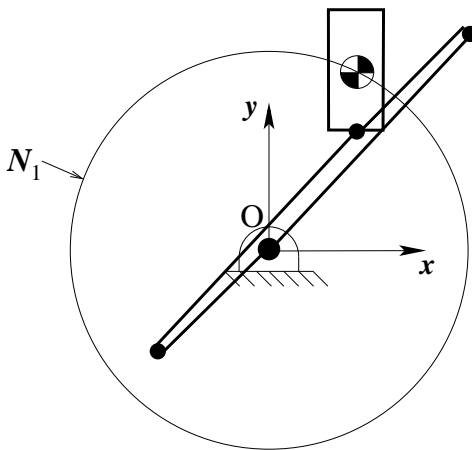


FIG. 4.1 – Première limite possible.

La deuxième limite possible se produit lorsque la barre 1 et la barre 3 pointent dans la même direction comme on peut le voir à la figure 4.2. L'ensemble des positions possibles pour l'effecteur dans ce cas se retrouvent confinées sur le cercle  $N_2$ . Celui-ci possède un rayon ( $r_{N_2}$ ) égal à la somme des longueurs des barres 1 et 3. Il est aussi décentré de l'origine  $O$  de l'inverse du vecteur  $\mathbf{d}_1$ . L'équation paramétrique du cercle

$N_2$  est :

$$C_{N_2} = (l_1 + l_2) \begin{bmatrix} \cos \eta \\ \sin \eta \end{bmatrix} - \mathbf{d}_1 + \mathbf{r}_1 = r_{N_2} \begin{bmatrix} \cos \eta \\ \sin \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{centre\_patte1} \\ y_{centre\_patte1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où  $\eta$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ .

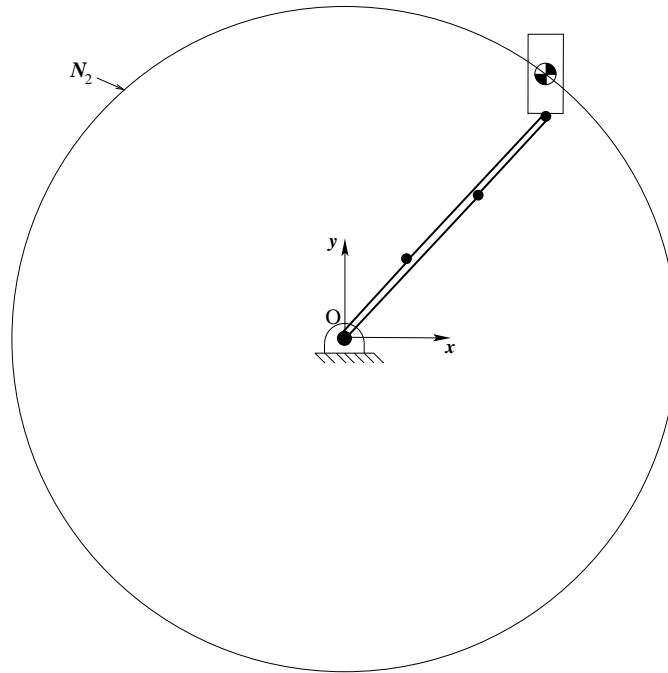


FIG. 4.2 – Deuxième limite possible.

On refait évidemment le même raisonnement pour la deuxième patte. La figure 4.3 présente donc simplement les quatre cercles des limites qui sont présents lorsque les deux pattes du manipulateur sont prises en compte. Il est à noter que les dimensions des cercles ne sont qu'à titre indicatif car elles sont fonction des paramètres  $l_1$  et  $l_2$  des membrures. L'espace de travail, qui est en fait l'intersection des quatre cercles des limites, a été ombragé afin d'améliorer sa visibilité.

Il est maintenant aisé d'écrire les équations des cercles  $N_3$  et  $N_4$  car on peut les trouver de la même façon que pour ceux de la première patte. Pour le cercle  $N_3$ , les membrures 1 et 3 sont repliées l'une sur l'autre, et le cercle a donc un rayon de valeur  $r_{N_3} = l_1 - l_2$ . On ne doit pas oublier de le décentrer de l'inverse du vecteur  $\mathbf{d}_2$  additionné avec le vecteur  $\mathbf{r}_2$  qui relie le repère global au point d'attache de la deuxième patte.

L'équation paramétrique du cercle  $N_3$  est donc :

$$C_{N_3} = (l_1 - l_2) \begin{bmatrix} \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{bmatrix} - \mathbf{d}_2 + \mathbf{r}_2 = r_{N_3} \begin{bmatrix} \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{centre\_patte2} \\ y_{centre\_patte2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où  $\zeta$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ .

Pour le cercle  $N_4$ , on utilise encore le même développement qui nous conduit à l'équation suivante :

$$C_{N_4} = (l_1 + l_2) \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ \sin \epsilon \end{bmatrix} - \mathbf{d}_2 + \mathbf{r}_2 = r_{N_4} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ \sin \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{centre\_patte2} \\ y_{centre\_patte2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où  $\epsilon$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ .

Maintenant que les quatre cercles qui définissent l'espace atteignable sont connus, on peut passer à la délimitation des frontières de cet espace. Pour résumer en quelques mots la tâche à accomplir : il s'agit de trouver les points d'intersections entre les cercles de limitation de la première patte avec les cercles de limitation de la deuxième patte. Par la suite, on crée des arcs de cercle avec les points d'intersections trouvés et finalement on teste pour savoir si ces arcs sont à l'intérieur ou non de l'espace de travail.

On prend par exemple le cercle  $N_1$  de la première patte et le cercle  $N_3$  de la deuxième patte. On calcule tout d'abord la distance centre-à-centre entre les deux cercles avec la formule suivante :

$$d_{N_1N_3} = \sqrt{(x_{centre\_patte1} - x_{centre\_patte2})^2 + (y_{centre\_patte1} - y_{centre\_patte2})^2} \quad (4.5)$$

On vérifie ensuite pour savoir si les cercles s'intersectent avec les conditions suivantes :

$$d_{N_1N_3} < r_{N_1} + r_{N_3} \quad (4.6)$$

$$d_{N_1N_3} > r_{N_1} - r_{N_3} \quad (4.7)$$

Si les deux dernières conditions sont remplies, on calcule les angles des points d'intersection des cercles avec la méthode décrite à l'annexe A.

On arrange ensuite les angles trouvés dans un vecteur en prenant soin de les ordonner et de copier le premier angle à la fin du vecteur afin de faire le tour du cercle. On examine ensuite chaque paire d'angle pour vérifier si l'arc de cercle qu'elle forme fait partie ou

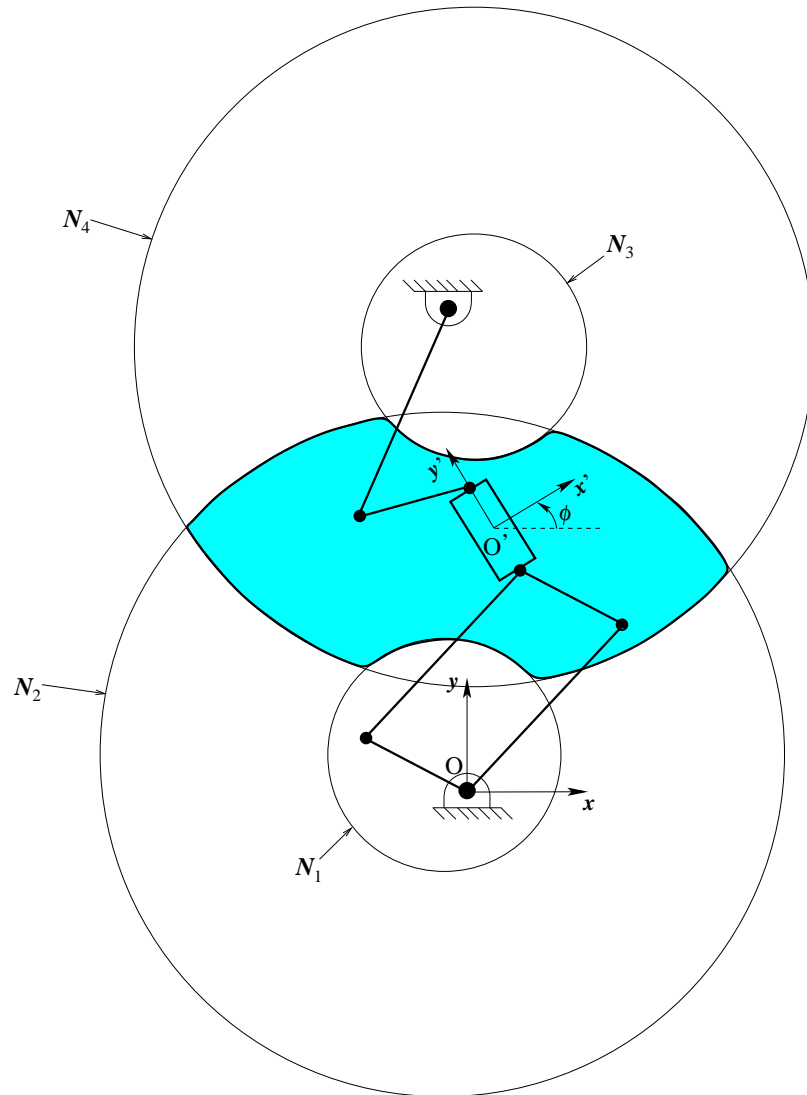


FIG. 4.3 – Exemple d'espace de travail.

non de l'espace de travail. Pour  $y$  arriver, on se crée un angle au milieu des deux angles vérifiés :

$$\gamma_{test} = atan2(\sin(\gamma_2 - \gamma_1), \cos(\gamma_2 - \gamma_1)) \quad (4.8)$$

On trouve les coordonnées cartésiennes de cet angle en posant qu'il est sur le cercle  $N_1$  :

$$\begin{bmatrix} x_{test} \\ y_{test} \end{bmatrix} = r_{N_1} \begin{bmatrix} \cos \gamma_{test} \\ \sin \gamma_{test} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{centre\_patte1} \\ y_{centre\_patte1} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Pour savoir si le point milieu de cet arc de cercle est une des frontières de l'espace de travail, on trouve la distance entre notre point de test et le centre des cercles de

limites de l'autre patte, dans le cas présent : la deuxième patte. La distance entre notre point de test et le centre des cercles de limites de la deuxième patte est :

$$d_{test} = \sqrt{(x_{test} - x_{centre\_patte2})^2 + (y_{test} - y_{centre\_patte2})^2} \quad (4.10)$$

Pour savoir si l'arc vérifié est une frontière de l'espace de travail, on utilise les deux conditions suivantes :

$$d_{test} > l_1 - l_2 \quad (4.11)$$

$$d_{test} < l_1 + l_2 \quad (4.12)$$

Si les deux conditions sont respectées, l'arc de cercle fait partie de l'espace de travail et est une frontière de ce même espace. On répète évidemment le test du point milieu pour tous les arcs de cercle trouvés, ce qui nous permet d'obtenir un espace de travail (région ombragée) semblable à celui présenté à la figure 4.3.

La procédure qui vient d'être définie a été programmée dans le fichier *WORKSPACE.m*. Ce programme fait partie du programme *MED3.m* déjà mentionné dans les chapitres précédents.

## 4.2 Lieux de singularité

Les lieux de singularité d'un mécanisme sont définis comme l'ensemble des configurations cartésiennes dans lequel le mécanisme perd le contrôle d'un ou plusieurs de ses degrés de liberté. Les configurations singulières peuvent être des configurations pour lesquelles une vitesse articulaire donnée correspond à une vitesse nulle de l'organe terminal. Les positions qui permettent une vitesse à l'organe terminal pour des vitesses articulaires nulles sont aussi des configurations singulières. Il est aussi clair que les frontières de l'espace de travail feront partie des configurations singulières puisque le manipulateur y est incapable de bouger dans au moins une direction. On voit donc que l'étude de telles configurations est essentielle lors de la conception d'un mécanisme car à défaut de pouvoir les éliminer ou pourra au moins tenter de les éviter afin de garder le contrôle du mécanisme.



Encore une fois, deux méthodes sont mises à notre disposition pour trouver les lieux de singularité d'un mécanisme : numérique et analytique. Pour la première méthode, on se sert du fait que la matrice jacobienne devient singulière à l'approche des lieux de singularité. En faisant une discrétisation de l'espace de travail, il est alors possible d'évaluer le déterminant de la matrice jacobienne qui tendra vers zéro à l'approche des configurations singulières. Cette méthode prend évidemment beaucoup de temps de calcul et ne permet pas de connaître exactement les courbes qui représentent les lieux recherchés.

Pour la méthode analytique, une des façons de procéder est d'étudier le déterminant de la matrice jacobienne afin d'obtenir les plages de valeurs pour lesquelles il devient nul. Cette manière de faire a le désavantage de devenir ardue avec les manipulateurs parallèles, car l'expression de leur déterminant peut être très complexe. Une autre façon de faire est d'utiliser la géométrie de Grassmann telle que présentée par Merlet [16]. Celle-ci permet de déterminer que les configurations singulières ont lieu lorsque les trois vecteurs porteurs des membrures distales actionnées se croisent en un seul et même point. Cette simple condition nous sera très utile car pour le manipulateur étudié les positions qui la satisfont se retrouvent sur de simples cercles. Passons donc au développement des équations qui définissent les lieux de singularité.

Les configurations singulières se produisent lorsque les vecteurs porteurs des membrures distales, c'est-à-dire les droites associées aux vecteurs  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , se croisent en un même point. En observant le manipulateur étudié (voir figure 2.1), on remarque que les vecteurs  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{v}_1$  se croisent au point  $C$ . Les configurations recherchées seront donc indépendantes des valeurs de ces deux vecteurs. C'est plutôt le vecteur  $\mathbf{v}_2$  qui nous permettra de trouver les courbes tant recherchées puisque c'est au moment où il croise le point  $C$  que le manipulateur entre en configuration singulière. Cette condition de croisement se produit lorsque le vecteur  $\mathbf{v}_2$  est parallèle et orienté selon un des vecteurs porteurs de la plate-forme, soit  $\mathbf{d}_1$  ou  $\mathbf{d}_2$ .

On prend par exemple le cas où le vecteur  $\mathbf{v}_2$  est orienté selon la direction de  $\mathbf{d}_1$  comme présenté à la figure 4.4. L'angle  $\beta_1$  que forme la membrure distale avec l'horizontale est tout simplement donné par :

$$\beta_1 = \phi + \frac{3\pi}{2} \quad (4.13)$$

Dans le cas où  $\mathbf{v}_2$  serait orienté selon  $\mathbf{d}_2$ , l'angle  $\beta_1$  est simplement déphasé de  $180^\circ$ , ce qui nous donne l'angle suivant pour le deuxième cas :

$$\beta_2 = \phi + \frac{\pi}{2} \quad (4.14)$$

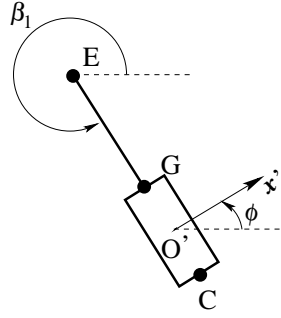


FIG. 4.4 – Angle de la membrure distale en fonction de l'orientation de la plate-forme.

Pour une orientation donnée de l'effecteur (par le fait même de l'angle  $\beta_1$  ou  $\beta_2$ ), si on fait tourner la membrure portant le vecteur  $\mathbf{u}_2$  autour de son pivot  $D$ , on obtient les cercles des lieux de singularité qui ont pour rayon la longueur de ce même vecteur, c'est-à-dire  $l_1$ . Ces cercles sont au nombre de deux, selon l'angle  $\beta$  choisi. L'équation paramétrique du premier cercle de singularité est donnée par :

$$C_{S_1} = l_1 \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{2_1} - \mathbf{d}_2 + \mathbf{r}_2 = l_1 \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{bmatrix} - \mathbf{d}_2 + \mathbf{r}_2 \quad (4.15)$$

où  $\nu$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ .

L'équation du deuxième cercle est identique sauf pour le vecteur  $\mathbf{v}_2$  qui est alors fonction de l'angle  $\beta_2$  :

$$C_{S_2} = l_1 \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{2_2} - \mathbf{d}_2 + \mathbf{r}_2 = l_1 \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \end{bmatrix} - \mathbf{d}_2 + \mathbf{r}_2 \quad (4.16)$$

où  $\nu$  varie encore de  $-\pi$  à  $\pi$ .

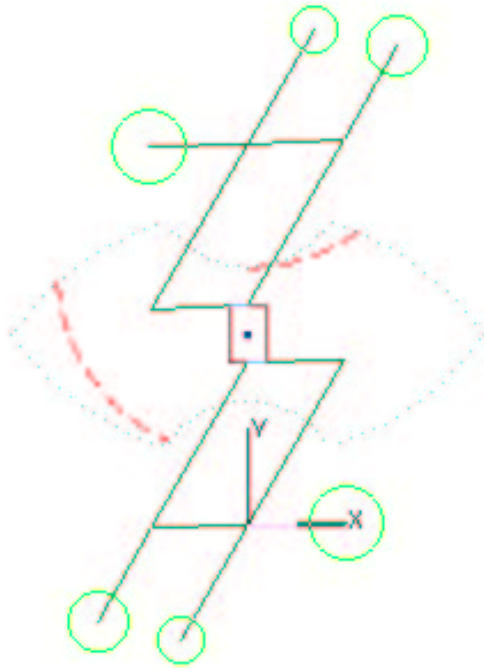
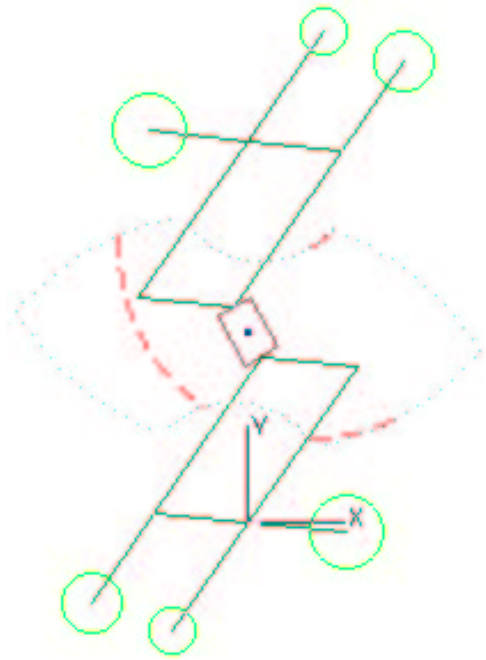
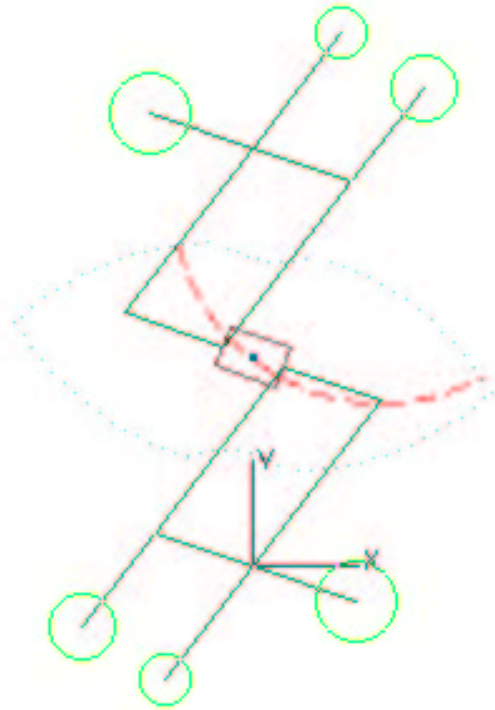
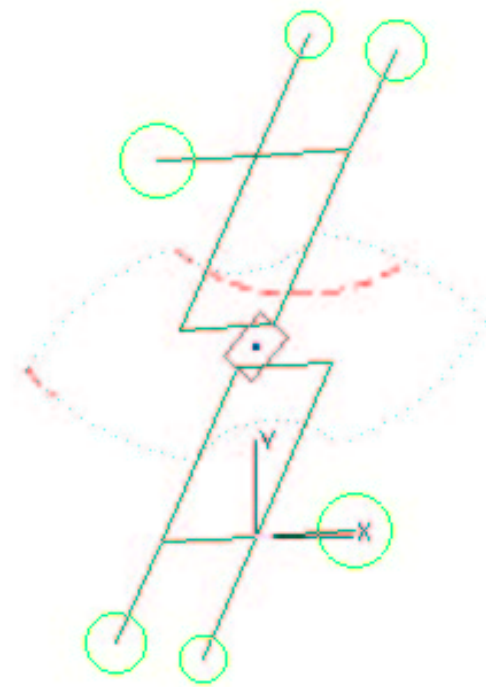
Il ne faut toutefois pas oublier que ces cercles de singularité doivent être contenus dans l'espace atteignable discuté à la section précédente. On devra donc trouver l'intersection des cercles  $C_{S_1}$  et  $C_{S_2}$  avec les cercles définis aux équations (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4). Cela implique aussi qu'une fois les points d'intersection trouvés, des tests devront

être effectués pour connaître les portions d'arc de cercle de singularité qui font partie de l'espace de travail. Le développement de chacune de ces étapes étant identique à ce qui a été présenté à la section précédente, on évite de se répéter et l'on présente immédiatement les résultats obtenus.

Les étapes que l'on vient de décrire pour trouver les courbes représentant les lieux de singularité ont été incluses dans le programme *WORKSPACE.m*. Plusieurs captures d'écran ont été effectuées pour différents angles de l'effecteur et sont présentées aux figures 4.5 à 4.8. Les longueurs des barres sont toujours les mêmes :  $l_1 = 0.2m$  et  $l_2 = 0.1m$ . La distance entre les points d'attache des pattes a aussi été fixée à  $0.4m$ . Sur ces figures les limites de l'espace atteignable sont représentées par les courbes fermées en pointillé et les courbes des lieux de singularité sont représentées par les courbes en tiret. On remarque aussi que des cercles sont dessinés sur les prolongement des membrures 1, 2 et 4. Ils représentent les contrepoids nécessaires à l'équilibrage statique du manipulateur et ont été dessinés afin de mieux visualiser leur grosseur et leur proximité de l'espace de travail.

Sur la figure 4.5, le manipulateur est dans sa position de référence et l'on voit que les courbes de singularité sont plus près des limites de l'espace de travail que de l'effecteur. En augmentant l'angle de l'effecteur, on voit qu'une des courbes de singularité disparaît, alors que l'autre se rapproche de plus en plus de l'effecteur (voir figure 4.6), allant même jusqu'à croiser le centre de l'effecteur lorsque l'angle atteint  $70^\circ$  (voir figure 4.7). Si l'on fait tourner l'effecteur dans l'autre sens, le même phénomène se produit, c'est-à-dire que l'une des courbes de singularité disparaît et l'autre s'approche de l'effecteur (voir figure 4.8).

L'espace de travail est donc bel et bien affecté par la valeur de l'angle d'orientation de l'effecteur. Les courbes de singularité qui se dirige vers le centre de l'espace de travail lorsque l'angle d'orientation approche  $70^\circ$  empêcheront même d'utiliser une partie de l'espace atteignable. Mais en analysant les figures, on voit tout même qu'entre  $30^\circ$  et  $-40^\circ$ , l'espace de travail est assez grand pour les fins auxquelles on veut utiliser le manipulateur.

FIG. 4.5 -  $\phi = 0^\circ$ .FIG. 4.6 -  $\phi = 30^\circ$ .FIG. 4.7 -  $\phi = 70^\circ$ .FIG. 4.8 -  $\phi = -40^\circ$ .

# Chapitre 5

## Conception

Dans ce chapitre, on traitera des aspects de la conception du manipulateur étudié. Dans un premier temps, la conception des articulations et des mécanismes d'entraînement est traitée. Par la suite, la calibration et la caractérisation des moteurs achetés sont discutées. Le calcul des inerties des contre-rotations pour le modèle CAO est ensuite traité. Pour terminer, divers paramètres mesurés sur le prototype sont comparés avec les valeurs imposées par les équations d'équilibrage dynamique.

### 5.1 Prototype et nomenclature

Afin de démystifier les différents termes qui seront utilisés dans le présent chapitre, on présente tout d'abord les pièces qui s'y rattachent sur quelques photos du prototype

réalisé (voir figures 5.1 et 5.2). Les chiffres présents sur ces 2 figures font référence à la nomenclature présentée au tableau 5.1.

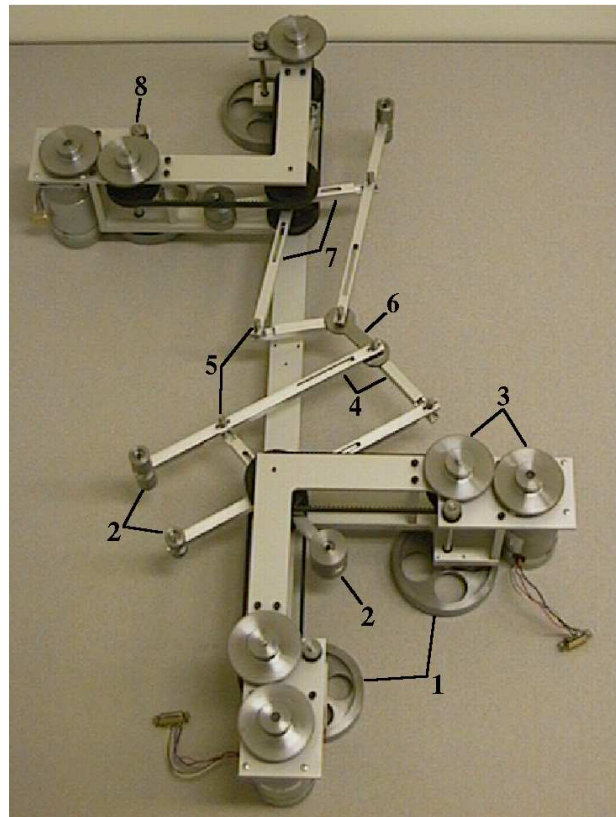


FIG. 5.1 – Vue aérienne du prototype.

## 5.2 Conception des articulations et des mécanismes d'entraînement

La discussion entourant la conception d'un prototype n'est pas une chose des plus facile. En effet, la conception n'est pas toujours le résultat d'une méthode très directe. Elle est plutôt le résultat de nombreuses itérations de design. Les pièces qui sont discutées dans la présente section sont donc l'aboutissement d'un long processus d'essais et erreurs.

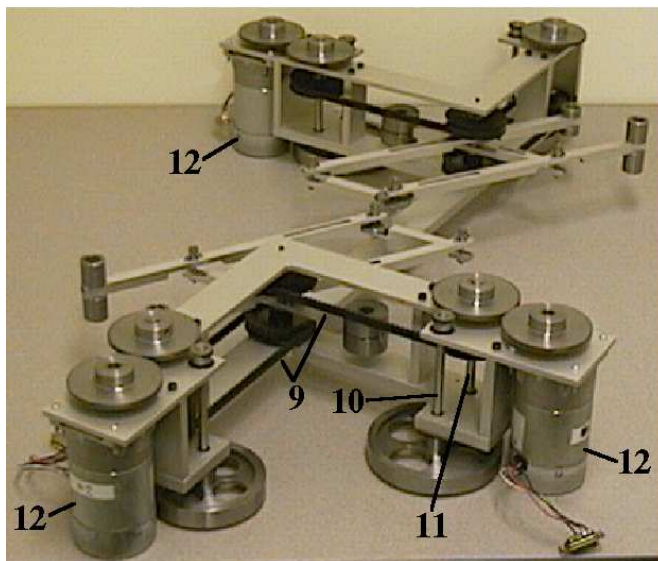


FIG. 5.2 – Vue isométrique du prototype.

#	pièces	#	pièces
1	Contre-rotations	7	Barres proximales
2	Contrepoids	8	Engrenages à 24 dents
3	Engrenages à 96 dents	9	Courroies et poulies
4	Barres distales	10	Arbre contre-rotation
5	Articulations	11	Arbre d'entraînement
6	Plate-forme	12	Moteurs

TAB. 5.1 – Nomenclature associée aux figures 5.1 et 5.2.

### 5.2.1 Articulations

Un élément très important de la conception du prototype est sans contredit ses articulations. Un soin très particulier doit leurs être apportées, car un jeu trop important ou une rigidité trop faible peuvent nuire au bon fonctionnement du manipulateur. Dans notre cas, le design des articulations a été grandement influencé par le choix du profil des membrures. En effet, comme les articulations doivent être fixées aux membrures, on peut comprendre que le choix de l'un influence le design de l'autre.

Notre première idée était, comme on l'a mentionné à la section 1.5, de prendre des tiges à section circulaire de  $1\text{cm}$  de diamètre pour faire la construction des barres du mécanisme. Notre choix s'est finalement tourné vers un profil à section carrée à paroi mince, car il offrait une rigidité équivalente en flexion pour un poids moindre. Les dimensions du profil choisi, le plus petit disponible, sont de  $\frac{1}{2}'' \times \frac{1}{2}''$  avec une épaisseur de paroi de  $\frac{1}{16}''$ . Pour la conception des articulations, l'utilisation de roulements à billes a donc été rejetée car l'épaisseur des parois ne permettait pas d'usiner un alésage pour fixer les roulements à billes. Notre attention se porte plutôt vers l'utilisation de paliers lisses pour assurer la rotation entre les membrures du mécanisme. Il s'agira donc, pour générer la rotation entre deux membrures, de fixer un arbre sur la première et de fixer un palier lisse sur la deuxième. Un schéma de cet assemblage est présenté aux figures C.1 et C.2 de l'annexe C. Pour s'assurer que l'arbre et le palier lisse restent bien alignés, il serait important d'ajouter un deuxième palier lisse. Vu la dimension réduite du profil des membrures, il est nécessaire de concevoir une pièce dans laquelle les deux paliers lisses pourront être fixés. On a appelé cette pièce le *manchon de fixation* et elle se fixe à l'intérieur du profil à l'aide de vis. On peut voir le dessin de fabrication de cette



pièce à l'annexe C sous l'appellation A4-MED-D7. Cette pièce est présente entre les barres 1 et 3, 2 et 4, et au point d'attache de la plate-forme avec ses pattes. On doit cependant aussi assurer la rotation entre les barres proximales et la base. Le schéma de l'assemblage s'y rattachant est présenté à la figure C.3 de l'annexe C. On utilise dans ce cas une pièce appelé *manchon de fixation pour poulie* (voir dessin A4-MED-9 de l'annexe C). La seule différence entre cette pièce et celle mentionnée précédemment, est sa méthode de fixation et sa longueur. Dans le cas de la dernière, elle est maintenue avec la barre proximale à l'aide de la vis de pression d'une poulie. La poulie permet de transmettre la rotation des moteurs aux barres proximales et sera discutée plus en détail ultérieurement. Pour les barres proximales 1 et 2, l'axe de rotation est une tige d'acier de  $\frac{3}{16}$ " de diamètre fixée sur la base.

### 5.2.2 Mécanisme d'entraînement

On doit maintenant trouver le moyen de transmettre la rotation de chacun des trois moteurs aux éléments en rotation du mécanisme, c'est-à-dire les barres proximales et les contre-rotations. Dans le cas des contre-rotations, il faut utiliser des engrenages ou des courroies (en ayant soin de les inverser) pour inverser la rotation. Notre choix s'est arrêté sur les engrenages, car ils nous semblaient plus fiables et permettaient de bons rapports de réduction. On profite de l'occasion pour mentionner que le rapport de réduction choisi est de 4 : 1. Les vitesses et accélérations des contre-rotations seront donc 4 fois plus grandes que celles des moteurs. On pourra alors utiliser des contre-rotations ayant des inerties 4 fois plus petites. Cela est très intéressant étant donné que les valeurs calculées des inerties des contre-rotations sont très élevées.

Pour ce qui est de transmettre la rotation des moteurs aux barres proximales, on utilise des courroies dentées. Ce choix est justifié par notre désir d'éloigner les moteurs et les contre-rotations le plus possible de l'axe de rotation des barres proximales. De plus, comme presque toutes les barres du mécanisme possèdent des contrepoids qui sont situés sur leur prolongement, on a jugé bon d'éloigner les moteurs et les contre-rotations pour réduire les risques d'interférence entre les divers éléments du système.

Reste maintenant à décider comment les moteurs seront assemblés avec les courroies et les poulies. En premier lieu, on a pensé assembler les moteurs sur le même arbre que

les poulies, mais le fait qu'il faut tenir compte de l'inertie des moteurs dans notre design nous a fait changer d'idée. Dans notre vérification de l'équilibrage dynamique de la section 3.3, on a seulement tenu compte des moments purs générés par les moteurs. Il ne faut cependant pas oublier que ces couples sont le résultat de la force électromagnétique qui est générée lorsque le rotor tourne à l'intérieur du stator. Comme le rotor a lui aussi une inertie, il faut l'inclure dans notre système s'y l'on veut conserver l'équilibrage dynamique. Selon le sens de rotation du rotor, il faudra donc ajouter ou soustraire son inertie à l'inertie de la contre-rotation qu'il actionne. Comme les moteurs achetés possèdent des réducteurs, il a fallu en démonter un pour voir si le rotor tournait dans le même sens que l'arbre en sortie du réducteur, ce qui était bien le cas. L'inertie des contre-rotations devra donc être augmentée de la valeur de l'inertie des moteurs. Pour éviter de grossir les contre-rotations, il serait plus judicieux que les moteurs soient eux aussi des contre-rotations, ce qui permettra de réduire l'inertie des contre-rotations. Pour inverser la rotation des moteurs on utilise donc encore des engrenages.

Pour résumer le système d'entraînement du manipulateur, il y a tout d'abord le moteur sur lequel est fixé un engrenage. Cet engrenage est en contact avec un autre engrenage, ayant le même nombre de dents, qui est fixé sur une pièce que l'on a nommée *arbre d'entraînement* (voir le sous-ensemble 5 sur le dessin A1-MED-S2 de l'annexe C). L'engrenage de l'*arbre d'entraînement* est aussi en contact avec un engrenage, ayant 4 fois moins de dents, qui est fixé sur une pièce nommée *arbre contre-rotation* (voir les sous-ensembles 2, 3 et 9 sur le dessin A1-MED-S2 de l'annexe C). C'est sur cet arbre que les contre-rotations sont fixées. Revenons à l'*arbre d'entraînement*, sur celui-ci il y a aussi une poulie. Cette poulie est reliée par une courroie à une poulie fixée sur la barre proximale (voir les sous-ensembles 6 et 13 du dessin A1-MED-S1 de l'annexe C). Le moteur et la contre-rotation tournent donc dans le même sens, alors que l'*arbre d'entraînement* et la barre proximale tournent dans le sens inverse.

### 5.3 Calibration et caractérisation des moteurs

En analysant les courbes des couples articulaires trouvés à la section 3.3 du chapitre 3, on voit que l'ajout de contre-rotations et de contrepoids augmente sensiblement les couples moteurs. On a donc choisi d'acheter des moteurs ayant des réducteurs, délaissant un peu de vitesse au profit d'un gain en couple en sortie.

Notre choix s'est donc porté vers des moteurs GMX-7MC019B de la compagnie Matsushita. Les quelques caractéristiques fournies par le manufacturier sont présentées à l'annexe D. Le rapport de réduction entre le moteur et sa sortie est de 18.5 :1, ce qui permet au moteur de générer des couples de 4.5N·m à 155rpm. Les moteurs comportent des encodeurs optiques d'une résolution de 400 pas/tour au moteur, ce qui nous donne une résolution de 7400 pas/tour en sortie du réducteur.

Avec les courbes fournies par le manufacturier il est possible de calculer deux autres paramètres :  $K_T$  et  $T_m$ . La constante de couple,  $K_T$ , est en fait la relation entre le courant fourni et le couple résultant produit en sortie. Les pertes en couple du moteur,  $T_m$ , définissent quant à elles les pertes dues au frottement des pièces mobiles du moteur. Ces deux caractéristiques sont très utiles lors de la programmation du contrôleur qui gère le bon fonctionnement des moteurs. Mais comme un contrôleur est déjà installé au laboratoire de robotique et que son fonctionnement a été simplifié au maximum, il ne sera pas nécessaire d'utiliser ces deux paramètres.

### 5.3.1 Calibration des moteurs

Comme on vient de le mentionner, le laboratoire de robotique est équipé d'un contrôleur qui permet de contrôler jusqu'à 4 moteurs simultanément. Le contrôleur consiste en fait en un ordinateur fonctionnant avec le système d'exploitation QNX, auquel une carte d'entrées-sorties a été ajoutée. Cette carte permet de lire la position des encodeurs (entrée digitale), d'ouvrir l'amplificateur (sortie digitale) et d'envoyer la commande aux moteurs via l'amplificateur (sortie analogique). Les programmes qui assurent la gestion de chacune des composantes ont été écrits en C et on n'a donc pas à les refaire. Une des seules choses que l'on doit modifier dans un des programmes est la valeur de la constante de couple,  $K_T$ . Comme plusieurs moteurs semblables à ceux achetés ont déjà été calibrés sur ce même contrôleur, on utilise une valeur de  $K_T$  initiale semblable à celles utilisées pour les autres moteurs au lieu de prendre la valeur calculée avec les courbes fournies par le manufacturier. La valeur initiale du  $K_T$  importe peu, car c'est celle-ci qui sera modifiée lors de la calibration.

La calibration du moteur consiste en fait à trouver la valeur du  $K_T$  à fournir au contrôleur pour que le couple appliqué par le moteur soit identique au couple calculé par

le programme du contrôleur. La méthode utilisée pour trouver la valeur du  $K_T$  consiste à soulever et descendre des masses dont le poids est connu car on connaîtra ainsi le couple qu'elles produisent. On effectue des essais de montée et de descente pour que les effets du frottement interne du réducteur soient pris en compte dans notre calibration pour les deux sens de rotation du moteur.

Pour réaliser les essais, on a dû faire usiner une barre d'aluminium avec deux trous distants de  $0.3m$ , car il est assez difficile de faire tenir des masses sur l'arbre du moteur. Le premier trou sert à fixer la barre sur l'axe du moteur à l'aide d'une vis de pression. Le deuxième sert à suspendre les masses calibrées. Le poids de la barre a été évalué avec le logiciel de CAO utilisé pour dessiner la pièce. Le poids évalué de la barre est de  $97.4g$  pour de l'aluminium 6061-T6 ayant une densité de  $2656.84 \frac{kg}{m^3}$ . En considérant que la densité de la barre est uniforme, on pose que le centre de masse de la barre se situe au milieu de sa longueur. Pour ce qui est des masses calibrées, elles sont suspendues au deuxième trou à une distance de  $0.3m$  de l'axe de l'arbre du moteur. Le couple généré à l'arbre du moteur, que l'on notera couple réel, par la barre et les masses calibrées peut être développé comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_{reel} &= \tau_{barre} + \tau_{masse} \\ &= m_{barre}g\frac{l}{2} + m_{cal}gl \end{aligned} \tag{5.1}$$

où  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  est l'accélération gravitationnelle,  $l = 0.3m$  est la longueur de la barre,  $m_{barre} = 97.4g$  est la masse de la barre et  $m_{cal}$  est la masse de la masse calibrée. Il est à noter que comme les masses calibrées sont suspendues à l'extrémité de la barre, le terme  $m_{cal}gl$  devrait donc être multiplié par le cosinus de l'angle que fait la barre avec l'horizontale. On néglige ce terme car les essais de montée et de descente se font entre  $-18.5^\circ$  et  $18.5^\circ$ , et que le cosinus d'un angle près de zéro peu être approximé par 1. De plus, on fait la moyenne du couple calculé par le contrôleur pour filtrer un peu du bruit des résultats, ce qui enlève aussi un peu de précision.

Le programme utilisé permet d'assigner une commande en position avec un asservissement de type PID. Dans notre cas, on utilise seulement le proportionnel et le dérivé pour nos essais de montée et de descente. La durée de chacun des essais est de 2 secondes avec un pas de 0.001 seconde. Une fois les tests réalisés, on obtient des fichiers contenant les données suivantes pour chacun des 2000 pas de temps :

- temps (secondes)
- consigne en position (degrés)

- position réelle (degrés)
- commande Proportionnelle (Newton-mètre)
- commande Intégrale (Newton-mètre)
- commande Dérivée (Newton-mètre)
- commande PID (Newton-mètre)
- commande dynamique (Newton-mètre)
- commande totale = commande PID + commande dynamique (Newton-mètre)

On commence donc la calibration en spécifiant la valeur initiale du  $K_T$  comme étant égale à  $19\frac{Nm}{A}$  dans le programme du contrôleur. Une fois les divers essais effectués, l'étape suivante de la calibration consiste à tracer le graphique des couples au moteur en fonction des couples réels pour les essais de montée et de descente (voir figure 5.3). On calcule ensuite les approximations linéaires des données pour la montée et la descente. Par la suite, on calcule l'équation de la droite qui se situe au milieu des deux droites d'approximation car notre calibration doit être valide autant pour la montée que la descente. Pour calculer la pente de la courbe milieu on utilise le ratio des deux pentes des approximations :

$$\sigma_{ratio} = \sqrt{\sigma_{montee} \times \sigma_{descente}} \quad (5.2)$$

où  $\sigma$  est la pente.

Idéalement la pente de cette courbe devrait avoir une valeur de 1, car le couple moteur devrait être identique au couple réel. Pour être plus précis, la pente devrait avoir une valeur de  $\sigma_{ratio} = \frac{1}{18.5}$  car le moteur possède un réducteur 18.5 :1 (les couples en sortie du réducteur sont 18.5 fois plus grands que ceux générés par le moteur seul). On se servira donc de cette propriété pour calibrer les moteurs.

Avec le  $K_T = 19\frac{Nm}{A}$  que l'on a donné au contrôleur, on trouve que la pente de la courbe milieu est de  $\sigma_{ratio} = 0.0605$ . La pente devrait être de  $\frac{1}{18.5}$ , alors le pourcentage de modification à apporter au  $K_T$  est de :

$$\%_{modification} = 100 \times \frac{\sigma_{ratio}}{\frac{1}{18.5}} = 100 \times \frac{0.0605}{0.0541} = 111.925\% \quad (5.3)$$

On applique le  $\%_{modification}$  trouvé au  $K_T$  initial de  $19\frac{Nm}{A}$ , ce qui nous donne un nouveau  $K_T$  égal à  $21.266\frac{Nm}{A}$  pour la première itération de la calibration.

On refait ensuite les mêmes étapes, c'est-à-dire : les essais de montée et de descente,

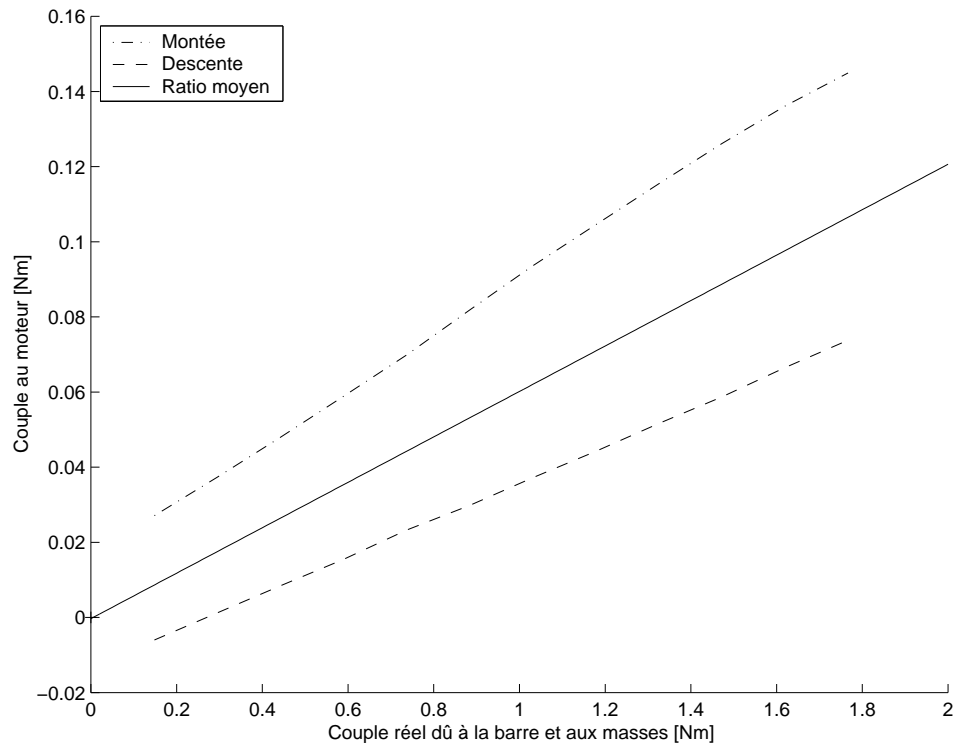


FIG. 5.3 – Couples au moteur en fonction des couples réels.

le traçage du graphique des couples au moteur en fonction des couples réels, le calcul des approximations linéaires ainsi que l'équation de la courbe milieu. On trouve alors que la pente du ratio des pentes des approximations linéaires ( $\sigma_{ratio}$ ) est de 0.0546. Le nouveau pourcentage de modification (calculé avec l'équation (5.3)) est donc de 101.01%. On applique ce nouveau pourcentage de modification de 101.01% au  $K_T$  de  $21.266 \frac{Nm}{A}$ , ce qui nous donne un  $K_T$  égal à  $21.481 \frac{Nm}{A}$  pour la deuxième itération de la calibration.

Évidemment on refait les essais de calibration et l'on trouve que la pente du ratio est de 0.0542. On recalcule le pourcentage de modification avec l'équation (5.3) et l'on obtient qu'il est de 100.19%. Étant donné, que le pourcentage de modification est de moins de 1%, on décide d'arrêter les itérations et de garder la dernière valeur de  $21.481 \frac{Nm}{A}$  comme valeur de  $K_T$  pour le programme du contrôleur.

### 5.3.2 Caractérisation

Parmi les caractéristiques fournies par le manufacturier, il en est une cruciale qui n'est pas donnée : l'inertie des rotors. En effet il est extrêmement important de connaître l'inertie des rotors pour pouvoir en tenir compte lors du design du prototype. Selon le sens de rotation du rotor, on doit soit ajouter ou enlever son inertie à l'inertie de la contre-rotation qui lui est adjointe. On voit donc toute l'importance de connaître leur inertie. Comme cette valeur n'est pas fournie par le manufacturier, on devra donc la déterminer nous même.

#### 5.3.2.1 Première méthode

La première méthode pour caractériser les moteurs utilise le fait qu'ils ont été calibrés à la section précédente. La calibration a permis d'établir les paramètres qui rendent les couples donnés par le programme du contrôleur équivalents aux couples produits par le moteur. On peut donc se servir directement des couples qui sont obtenus par le programme du contrôleur. On procède alors à des essais à vide, c'est-à-dire sans charge, pour différentes commandes à couple constant au moteur. Pour chaque couple essayé, on peut alors calculer l'accélération du moteur car la position à chaque pas de temps est connue. On trace finalement les accélérations calculées en fonction des couples prescrits comme on peut le voir à la figure 5.4. Sur cette même figure on a aussi ajouté la courbe de l'approximation linéaire des données. L'équation de l'approximation linéaire est bien sûr de la forme  $y = \sigma x + b$ , ce qui donne avec les variables utilisées :

$$\ddot{\theta} = \sigma_{avec} \tau_{moteur} + b \quad (5.4)$$

où  $\ddot{\theta}$  est l'accélération du moteur,  $\sigma_{avec}$  est la pente de la droite,  $\tau_{moteur}$  est le couple au moteur et  $b$  est l'ordonnée à l'origine de la droite. En analysant l'équation (5.4), on remarque que la pente  $\sigma_{avec}$  doit être égale à l'inverse de l'inertie. La pente de l'approximation linéaire a une valeur de  $1.1248 \times 10^4 [kg \cdot m^2]^{-1}$ , ce qui nous permet d'obtenir l'inertie du moteur :

$$\sigma_{avec} = \frac{1}{I_{avec}} = 1.1248 \times 10^4 [kg \cdot m^2]^{-1} \Rightarrow I_{avec} = \frac{1}{\sigma_{avec}} = 8.8907 \times 10^{-5} kg \cdot m^2 \quad (5.5)$$

Afin de pousser un peu plus loin la caractérisation, nous avons décidé de refaire les tests d'accélération à couples constants mais en enlevant le réducteur cette fois. Cela

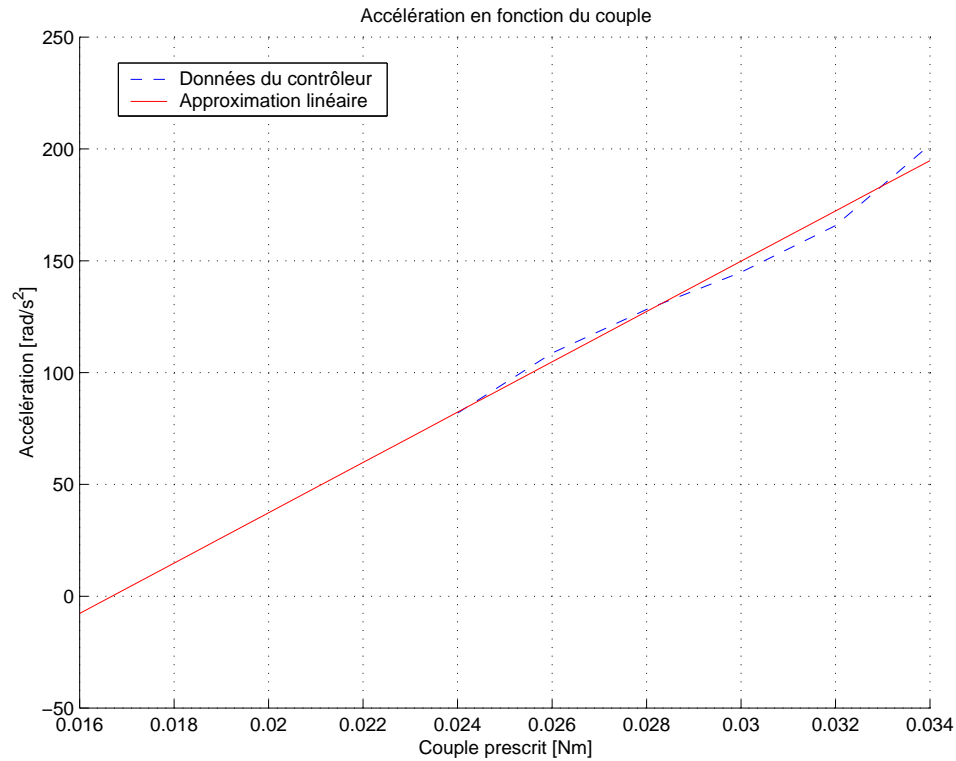


FIG. 5.4 – Accélérations obtenues avec le réducteur.

avait pour but d'empêcher le frottement dû aux engrenages d'interférer avec le calcul de l'inertie. Les tests ont été effectués et l'on obtient un graphique de l'accélération en fonction des couples prescrits fort semblable à celui obtenu lorsque le réducteur était présent. Le graphique pour les tests effectués sans le réducteur est présenté à la figure 5.5.

La pente de la droite d'approximation a une valeur de  $1.0644 \times 10^4 [kg \cdot m^2]^{-1}$  ce qui nous permet de trouver l'inertie de la même façon qu'à l'équation (5.5) :

$$\sigma_{sans} = \frac{1}{I_{sans}} = 1.0644 \times 10^4 [kg \cdot m^2]^{-1} \Rightarrow I_{sans} = \frac{1}{\sigma_{sans}} = 9.3952 \times 10^{-5} kg \cdot m^2 \quad (5.6)$$

Les résultats obtenus aux équations (5.5) et (5.6), c'est-à-dire avec et sans le réducteur, diffèrent d'environ 5%. C'est à cause de cet écart que l'on a décidé d'utiliser une autre méthode pour caractériser l'inertie des moteurs.



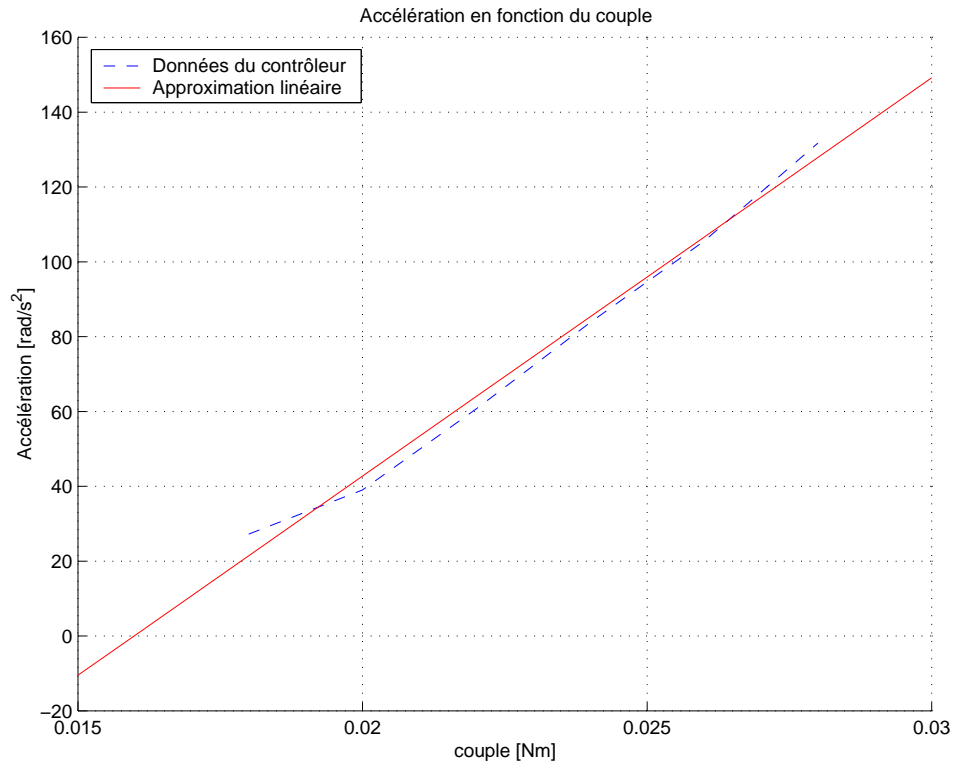


FIG. 5.5 – Accélérations obtenues sans le réducteur.

### 5.3.2.2 Deuxième méthode

Pour la deuxième méthode, on fait une incursion dans le domaine des vibrations. On utilise en fait un cas très précis de la théorie vibratoire : la vibration libre avec frottement de Coulomb. Mais est-ce que cela peut s'appliquer à notre cas ? Comme le frottement visqueux est très négligeable dans les moteurs (pas vraiment de fluide présent à part l'air) et que le frottement de coulomb est toujours présent, on peut affirmer que cela s'applique à notre cas. Pour ce qui est de la vibration libre, qui est habituellement représentée par un système masse-ressort, on sera capable de la reproduire grâce au PID du contrôleur. En utilisant uniquement le gain proportionnel, on se retrouve avec un ressort virtuel car le couple est proportionnel au déplacement comme dans le cas d'un ressort.

Pour trouver l'inertie avec des essais en vibration libre, on utilise le fait que le frottement de Coulomb n'affecte pas la fréquence naturelle d'un système. La fréquence naturelle d'un système masse-ressort en rotation est bien connue et on l'exprime comme

suit :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (5.7)$$

où  $k$  est la valeur de la constante du ressort et  $J$  est l'inertie du moteur. Dans notre cas, on remplace la valeur du  $k$  par la valeur du gain proportionnel utilisé.

Pour réaliser les essais, on entre d'abord une valeur pour le gain proportionnel. On commande ensuite le moteur avec un couple constant pendant un court instant. Lorsque la commande est terminée, le moteur oscille jusqu'à sa position initiale et les positions du moteur sont enregistrées dans un fichier. Un exemple des résultats obtenus avec un gain proportionnel d'une valeur de  $1 \times 10^{-3} \frac{Nm}{deg}$  est présenté à la figure 5.6.

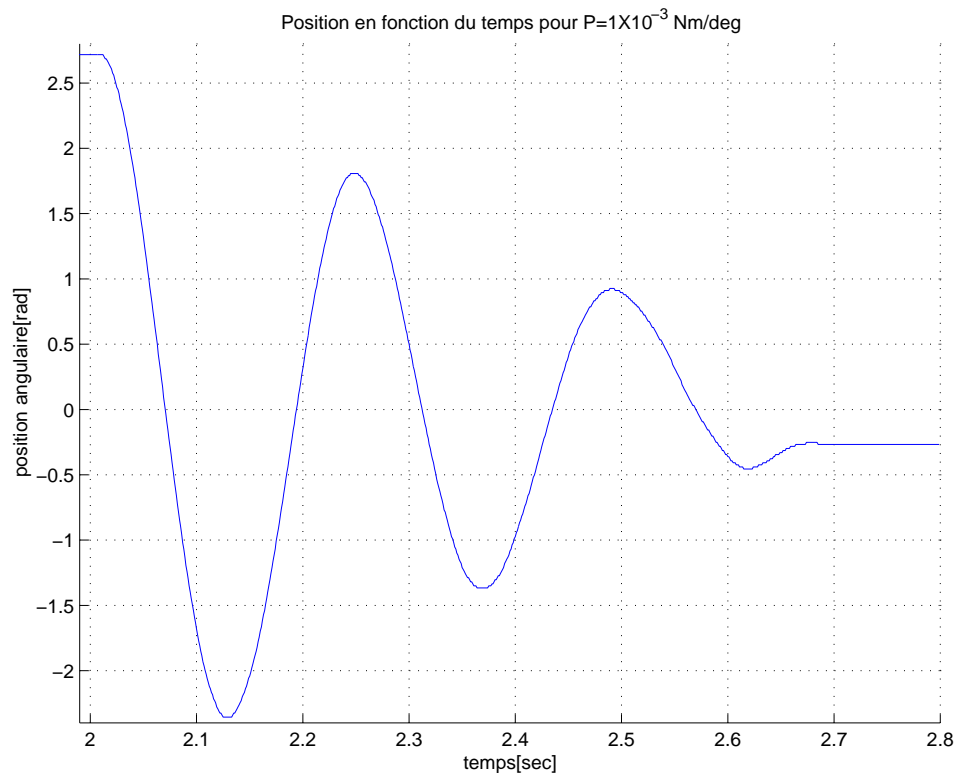


FIG. 5.6 – Position en fonction du temps pour un gain proportionnel de  $1 \times 10^{-3} \frac{Nm}{deg}$ .

Comme les données recueillies sont numériques, un programme *Matlab* a été écrit pour calculer les fréquences naturelles des divers essais. Pour chaque moteur on fait une série d'essais pour une plage de valeurs de gains proportionnels choisis. Les résultats sont présentés à la figure 5.7. On fait la moyenne de chacune des courbes présentées et

les valeurs trouvées sont présentées dans le tableau 5.2.

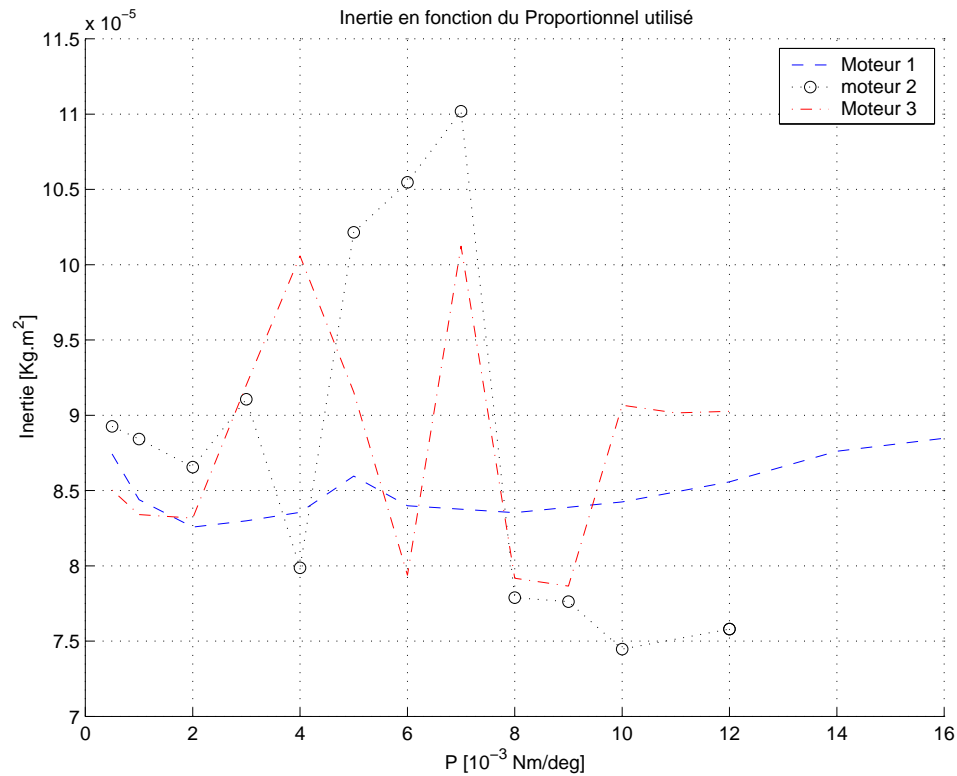


FIG. 5.7 – Inertie en fonction du proportionnel utilisé pour les trois moteurs.

	Inertie [ $kg \cdot m^2$ ]
Moteur 1	$8.503 \times 10^{-5}$
Moteur 2	$8.823 \times 10^{-5}$
Moteur 3	$8.8099 \times 10^{-5}$

TAB. 5.2 – Inerties calculées par la méthode fréquentielle.

Les deux méthodes utilisées pour trouver l'inertie des moteurs semblent s'équivaloir. Comme on ne saurait dire laquelle est la meilleure, on emploie donc toutes les valeurs trouvées pour en faire la moyenne. Cela permettra d'avoir une valeur globale pour tous les moteurs, ce qui facilitera grandement le design et surtout la construction des contre-rotations. La valeur moyenne est donc :

$$\begin{aligned}
 I_{moteur} &= \frac{(8.8907 + 9.3952 + 8.503 + 8.823 + 8.8099) \times 10^{-5}}{5} \\
 &= 8.88432 \times 10^{-5} kg \cdot m^2
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Il ne faut toutefois pas oublier que le rapport de réduction entre le moteur et la sortie du réducteur est de 18.5 :1, ce qui a pour effet de rendre l'inertie utilisée lors de la conception 18.5 fois plus grande. L'inertie utile est donc de :

$$I_{utile} = 18.5 \times 8.88432 \times 10^{-5} = 1.6436 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.9)$$

## 5.4 Calcul des inerties des contre-rotations

Maintenant que l'inertie des moteurs a été évaluée, il faut calculer l'inertie des contre-rotations que l'on doit modéliser dans *ProEngineer*. L'inertie des contre-rotations ne sera pas seulement modifiée pour tenir compte des moteurs. On en profite aussi pour inclure tous les éléments en rotation pure qui se sont rajoutés lors de la conception. Outre les moteurs, on tiendra aussi compte de l'inertie des engrenages, des courroies, des poulies, des arbres, des manchons de fixation et des paliers lisses. Pour faciliter les calculs, on a utilisé *ProEngineer* afin d'évaluer l'inertie en rotation de sous-assemblages de pièces.

Le premier sous-assemblage comporte les pièces du système d'entraînement suivantes : un *arbre d'entraînement*, une poulie et un engrenage à 96 dents (voir le sous-ensemble 5 du dessin A1-MED-S2 à l'annexe C). Avec *ProEngineer* on obtient comme inertie pour ce sous-assemblage :

$$I_{poulie-arbre-engrenage} = 1.5842237 \times 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad (5.10)$$

Le deuxième sous-assemblage se compose de : deux paliers lisses, une poulie et un *manchon de fixation pour poulie*. Ce sous-assemblage est fixé sur les barres proximales, mais comme il effectue seulement des rotations, on en tient compte dans les contre-rotations. L'inertie du sous-assemblage modélisé est de :

$$I_{poulie-manchon-paliers} = 2.5247364 \times 10^{-5} kg \cdot m^2 \quad (5.11)$$

Il faut aussi tenir compte de l'inertie des engrenages à 96 dents qui sont fixés aux moteurs. Le fabricant ne fournissant pas l'inertie de ses engrenages, on l'a évaluée avec *ProEngineer*. La valeur calculée est de :

$$I_{engrenage} = 1.3271288 \times 10^{-4} kg \cdot m^2 \quad (5.12)$$

Les courroies sont les derniers éléments dont il faut connaître l'inertie. Les courroies choisies ont une longueur de  $600mm$  et comportent 120 dents. La documentation fournie par le fabricant et les dimensions des courroies sont présentées à l'annexe D. Afin d'évaluer leur inertie, on pose comme première hypothèse que le renforcement en fibre de verre est situé dans la partie qui fait tout le tour de la courroie. On pose donc que le volume de la partie plate de la courroie est uniquement fait de fibre de verre. On approxime ce volume par :

$$V_{fv} = 9mm \times 1.73mm \times 600mm = 9.342 \times 10^{-6}m^3 \quad (5.13)$$

La densité de la fibre de verre étant approximativement de  $\rho_{fv} = 2400 \frac{kg}{m^3}$ , on a donc une masse de fibre de verre de :

$$m_{fv} = \rho_{fv}V_{fv} = 0.02242kg \quad (5.14)$$

Pour les dents, on pose qu'elles sont entièrement en néoprène et que leur volume peut être approximé par :

$$V_{neo} = 120(2.08mm \times 2.5mm \times 9mm) = 5.616 \times 10^{-6}m^3 \quad (5.15)$$

La densité du néoprène étant d'environ  $\rho_{neo} = 1000 \frac{kg}{m^3}$ , on obtient comme masse pour les dents :

$$m_{neo} = \rho_{neo}V_{neo} = 0.005616kg \quad (5.16)$$

Reste maintenant à déterminer quelle portion de la courroie est en rotation. Celle-ci est en fait la partie qui est en contact avec les poulies, c'est-à-dire deux demi-cercles, donc une circonférence. Le pourcentage de la courroie qui est en rotation est approximé par :

$$\%_{rotation} = \frac{\pi D_{poulie}}{l_{courroie}} = \frac{\pi 0.0636m}{0.6m} = 33.3\% \quad (5.17)$$

Pour calculer l'inertie de la courroie, on pose donc que 33.3% de la somme de la masse du fibre de verre et du néoprène est en rotation à une distance égale au rayon de la poulie :

$$I_{courroie} = \%_{rotation}(m_{fv} + m_{neo})r_{poulie}^2 = 9.45 \times 10^{-6}kg \cdot m^2 \quad (5.18)$$

Maintenant que l'on connaît l'inertie de tous les sous-assemblages qui effectuent des rotations, on peut calculer l'inertie que l'on devra modéliser pour les sous-assemblages des contre-rotations. On parle de sous-assemblage car chaque contre-rotation est fixée sur un arbre et que sur cet arbre est aussi fixé un engrenage à 24 dents. Pour ce qui est des valeurs initiales d'inertie, on se sert des valeurs optimisées présentées au tableau 3.2 :

$$I_{cr_1} = 8.08724823535 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.19)$$

$$I_{cr_2} = 6.27056026208 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.20)$$

Pour l'inertie du sous-assemblage de la contre-rotation 1, on doit faire la soustraction des éléments qui tournent dans le même sens qu'elle et l'addition des éléments qui tournent dans le sens contraire. On additionne donc les inerties des équations (5.10), (5.11), (5.12) et l'on soustrait les inerties des équations (5.9), (5.12) à l'inertie de l'équation (5.19), le tout divisé par quatre pour tenir compte du rapport de réduction des engrenages. On obtient finalement :

$$I_{cr_1}(ProE) = 1.626 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.21)$$

Dans le cas de la deuxième contre-rotation, il faut faire la distinction entre la première et la deuxième patte car seulement la première est actionnée par un moteur. Donc, pour la première patte l'inertie de la deuxième contre-rotation est donnée par l'addition de (5.10), (5.11), (5.12) et la soustraction de (5.9), (5.12) à l'inertie de (5.20), le tout divisé par quatre pour tenir compte du rapport de réduction des engrenages. Ce qui permet d'obtenir :

$$I_{cr_2}(ProE)_{(patte\#1)} = 1.1718 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.22)$$

Pour la deuxième contre-rotation de la deuxième patte, on fait le même calcul sans la soustraction de l'inertie du moteur, car elle n'est pas actionnée. La valeur obtenue est :

$$I_{cr_2}(ProE)_{(patte\#2)} = 1.5827 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.23)$$

Le design des sous-assemblages contenant les contre-rotations a été fait en fonction des valeurs que l'on vient de calculer. Les dessins des sous-assemblages conçus sont présentés à l'annexe C sur le plan A1-MED-S2.

## 5.5 Comparaison

### 5.5.1 Comparaison ProEngineer versus *Matlab*

Dans le premier chapitre, on a défini les équations de contraintes qui permettent de trouver les paramètres des membrures et des contre-rotations pour obtenir un mécanisme équilibré dynamiquement. On a ensuite développé un modèle CAO dans *ProEngineer* dans le but de construire un prototype. Mais étant donné le grand nombre de pièces présentes dans chacun des sous-assemblages des membrures, les paramètres de design obtenus avec *Matlab* ne peuvent pas être respectés parfaitement. On veut dire par là que le simple ajout d'un écrou peut faire en sorte que les paramètres d'équilibrage ne soient plus réalisés. De nombreuses itérations ont donc été nécessaires afin de s'approcher des conditions d'équilibrage. Le tableau 5.3 présente la comparaison entre les paramètres optimisés dans *Matlab* et ceux modélisés dans *ProEngineer*.

On constate que le modèle *ProEngineer* est très près des paramètres imposés par l'optimisation *Matlab*, car les pourcentages d'erreur trouvés sont minimes (le plus grand étant de seulement 0.1%).

### 5.5.2 Comparaison prototype versus *Matlab*

Une autre comparaison que l'on peut effectuer, porte sur les valeurs réelles mesurées à même le prototype et les valeurs optimisées par *Matlab*. Par contre, cette comparaison ne touchera que les masses étant donné qu'il est très difficile de mesurer expérimentalement le centre de masse et le rayon de giration d'un assemblage de pièces. Le tableau 5.4 présente les résultats obtenus et les pourcentages d'erreur calculés.

Les pourcentages d'erreur obtenus sont dans l'ordre de grandeur auquel on s'attendait étant donné le nombre élevé de pièces présentes dans les sous-assemblages des barres. Cette observation semble être confirmée par le fait que le pourcentage d'erreur est très faible dans le cas d'un sous-assemblage comportant peu de pièces comme celui de la plate-forme.

	<i>Matlab</i>	<i>ProEngineer</i>	Pourcentage d'erreur
$m_1[kg]$	0.1200284	0.12002221	0.005%
$r_1[m]$	-0.034166	-0.03417843	0.036%
$k_1[m]$	0.11986922	0.11992708	0.048%
$m_2[kg]$	0.3813185	0.38125069	0.018%
$r_2[m]$	-0.08	-0.07991738	0.1%
$k_2[m]$	0.04598	0.04601399	0.074%
$m_3[kg]$	0.0409017	0.0409017	0%
$r_3[m]$	0.04986897	0.04986897	0%
$k_3[m]$	0.04300885	0.04300885	0%
$m_4[kg]$	0.2346575599	0.23475207	0.04%
$r_4[m]$	-0.06	-0.05999764	0.004%
$k_4[m]$	0.08615174	0.0861361	0.018%
$I_{cr1}[kg \cdot m^2]$	0.001626	0.001625992	0.0005%
$I_{cr2}[kg \cdot m^2]$ (patte #1)	0.0011718	0.0011717412	0.005%
$I_{cr2}[kg \cdot m^2]$ (patte #2)	0.0015827	0.0015824159	0.018%
$m_{pf}[kg]$	0.1	0.100005	0.005%
$r_{pf}[m]$	0	0	0%
$k_{pf}[m]$	0.03	0.029995	0.017%

TAB. 5.3 – Comparaison entre les paramètres *Matlab* et *ProEngineer*.

	<i>Matlab</i>	Prototype	Pourcentage d'erreur
$m_1[kg]$	0.120028042	0.11546	3.81%
$m_2[kg]$	0.3813185	0.37648	1.27%
$m_3[kg]$	0.0409017	0.040103	1.95%
$m_4[kg]$	0.2346575599	0.22937	2.25%
$m_{pf}[kg]$	0.1	0.10001	0.01%

TAB. 5.4 – Comparaison entre les paramètres *Matlab* et les mesures expérimentales.



# Conclusion

Dans un premier temps, on s'est attaqué à développer les équations de contrainte qui régissent l'équilibrage dynamique d'un mécanisme à 2 degrés de liberté. Dans ces équations, on a aussi pris soin d'inclure une masse ponctuelle au point terminal du mécanisme. C'est grâce à cette masse ponctuelle qu'il est possible d'équilibrer un manipulateur à 3 degrés de liberté, car elle représente la partie des propriétés de l'effecteur qui doit être répartie sur chacune des pattes. Par la suite, on a trouvé quelques solutions optimisées à notre système d'équations. Le design d'un tel manipulateur pouvait donc être considéré car les équations de contrainte admettent un nombre très élevé de solutions.

Dans le second chapitre, on a étudié la cinématique du manipulateur choisi. Les problèmes géométriques direct et inverse ont été développés, établissant ainsi les transformations qui relient les coordonnées articulaires aux coordonnées généralisées, et vice-versa. Les équations de vitesse, d'accélération et les Jacobiennes ont ensuite été développées pour le manipulateur à 3 ddl et les sous-mécanismes à 2 ddl. Les éléments traités dans ce chapitre sont très importants, car ils ont servi à l'élaboration du modèle dynamique au chapitre suivant ainsi que dans le contrôleur du prototype.

Le troisième chapitre présentait l'étude dynamique de notre manipulateur plan, plus particulièrement son problème dynamique inverse. Les équations de Newton-Euler ont été appliquées à une série de diagrammes des corps libres (ou DCL), subdivisant le

manipulateur en 13 sous-systèmes. En regroupant ces sous-systèmes sous une forme matricielle, on obtient un système de 39 équations et 39 inconnues que l'on peut facilement solutionner. On a ensuite calculé les forces présentes dans le mécanisme pour plusieurs trajectoires. Avec ces forces, les sommes des forces et des moments à la base ont été calculées. Les résultats étant très petits, de l'ordre de  $10^{-16}$ , l'équilibrage dynamique du manipulateur étudié était donc démontré numériquement. La validation des résultats obtenus a ensuite été réalisée avec *ADAMS*, un logiciel de simulation dynamique.

Le développement analytique des frontières de l'espace atteignable fut ensuite traité dans le quatrième chapitre. Cela avait pour but de s'assurer que le prototype qui serait construit aurait un espace de travail assez grand pour nous permettre de l'actionner. Pour la même raison, on a aussi développé analytiquement les courbes définissant les lieux de singularité.

Le dernier chapitre, quant à lui, traitait des aspects entourant la conception du prototype. La conception des articulations et des mécanismes d'entraînement a été expliquée en détail, car se sont des éléments vitaux au bon fonctionnement du mécanisme. Par la suite, on a pris soin de calibrer les moteurs afin que les valeurs de couples données par le contrôleur soient justes. Il a aussi fallu caractériser l'inertie de ces mêmes moteurs car elle n'était pas fournie par le manufacturier. Cela était d'autant plus important, car les moteurs servent eux aussi de contre-rotation. Les calculs des inerties à modéliser dans *ProEngineer* ont ensuite été explicités. La comparaison entre les valeurs modélisées et les valeurs optimisées, nous a ensuite permis de lancer la fabrication du prototype, car les pourcentages d'erreur étaient très satisfaisants, 0.1% au maximum. Une fois le prototype construit on a aussi fait la comparaison entre quelques unes des masses obtenues et les masses optimisées, et encore une fois les résultats furent très acceptables avec des pourcentages d'erreur inférieurs à 4%.

Le prototype a bien sûr été construit dans le but de démontrer expérimentalement l'équilibrage dynamique et il faut donc trouver un moyen de mesurer les efforts transmis à la base. Pour ce faire, on propose d'utiliser un capteur de force déjà propriété du laboratoire de robotique. Ce capteur de force est très précis et devrait donc permettre de mesurer les forces et moments que l'on espère être très faibles. En contrepartie, ce capteur ne peut supporter un poids de plus de 5kg. Le poids du prototype étant d'au moins le double de cette limite, on propose donc de le suspendre à l'aide de câbles pour venir le déposer sur le capteur. Cela implique qu'il faudra acheter ou fabriquer

une structure pour attacher les câbles. On voit que la vérification expérimentale de l'équilibrage dynamique n'est pas directe et qu'il reste encore un peu de travail avant qu'elle soit atteinte. Par contre, l'équilibrage statique du prototype a facilement pu être démontré en plaçant le prototype à la verticale. Une fois dans cette position, on a changé aléatoirement la position de l'effecteur et celui-ci a toujours maintenu la nouvelle position sans aucune aide extérieure.

Pour ce qui est du contrôle de ce prototype, il va être mis en oeuvre sur un système de contrôle en temps réel. Ce système utilise plusieurs noeuds de calcul en parallèle pour séparer le modèle et ainsi être capable d'effectuer un contrôle temps réel. La programmation s'effectue en bloc diagramme *Simulink* et devrait donc se faire aisément.

Lorsque la structure sera disponible et que le programme du contrôleur sera complété, les tests pourront alors être effectués et l'équilibrage dynamique d'un manipulateur plan à 3 degrés de liberté devrait pouvoir être vérifié expérimentalement pour toutes trajectoires.

# Bibliographie

- [1] Abu-Abed, A. and Papadopoulos, E., 1994. 'Design and motion planning for a zero-reaction manipulator', IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1554-1559, San Diego, USA.
- [2] Bagci, C., 1982. 'Complete shaking force and shaking moment balancing of link mechanisms using balancing idler loops', Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol.104, pp.482-493.
- [3] Bagci, C., 1992. 'Complete balancing of linkage using complete dynamical equivalents of floating links : CDEL method', in DE Flexible Mechanisms, Dynamics, and Analysis 22nd Biennial Mechanisms Conference, Vol. 47, pp. 477 488.
- [4] Berkof, R.S. and Lowen, G.G., 1969. 'A new method for completely force balancing simple linkages', ASME Journal of Engineering for Industry. Vol. 91, No. 1, pp.21-26.
- [5] Berkof, R.S. and Lowen, G.G., 1971. 'Theory of shaking moment optimization of force-balanced four-bar linkages', ASME Journal of Engineering for Industry. Vol 93, No. 1, pp.53-60.
- [6] Berkof, R.S., 1973. 'Complete force and moment balancing of inline four-bar linkages', Mechanism and Machine Theory, Vol 8, pp.397-410.
- [7] Feng, G., 1989. 'Complete shaking force and shaking moment balancing of four types of six-bar linkages', Mechanism and Machine Theory, Vol 24, No. 4, pp.275-287.

- [8] Feng, G., 1990. 'Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four-, five- and six-bar linkages with prismatic pairs', *Mechanism and Machine Theory*, Vol 25, No. 2, pp.183-192.
- [9] Gosselin, C.M. and Jean, M., 1995. 'Determination of the workspace of planar parallel manipulators with joints limits', *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 17, No. 3, pp. 129-138.
- [10] Gosselin, C.M. and Wang, J., 2000. 'Static balancing of spatial six-degree-of-freedom parallel mechanisms with revolute actuators', *Journal of Robotic Systems*, Vol. 17, No. 3, pp. 159-170.
- [11] Kochev, I.S., 1990. 'Full shaking moment balancing of planar linkages by a prescribed input speed fluctuation', *Mechanism and Machine Theory*, Vol 25, No. 4, pp.459-466.
- [12] Laliberté, T., Gosselin, C.M. and Jean, M., 1999. 'Static balancing of 3-DOF planar parallel mechanisms', *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 4, No. 4, pp. 363-377.
- [13] Ricard, R., 1999. 'Compensation dynamique appliquée aux mécanisme à 5 barres', *Rapport technique*, Université Laval, Qué, Can.
- [14] Ricard, R., and Gosselin, C.M., 2000. 'On the development of reactionless parallel manipulators', *Comptes-Rendus de la ASME 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Baltimore, USA, No. MECH-14098, septembre.
- [15] McCarthy, J.M., 1990. 'Introduction to Theoretical Kinematics', The MIT Press, pp.67-73.
- [16] Merlet, J.-P. 1989. 'Singular configurations of parallel manipulators and Grassman geometry', *International Journal of Robotics Research*. Vol.8,No.5, pp. 45-56.
- [17] Ye, Z. and Smith, M.R., 1994. 'Complete balancing of planar linkages by an equivalence method', *Mechanism and Machine Theory*, Vol 25=9, No. 5, pp.701-712.

# Annexe A

## Intersection de deux cercles

### A.1 Développement mathématique

Soit deux cercles quelconques, ayant pour centre respectifs  $\mathbf{p}_{c_1} = [x_{c_1}; y_{c_1}]^T$  et  $\mathbf{p}_{c_2} = [x_{c_2}; y_{c_2}]^T$ , et ayant pour rayon respectif  $r_1$  et  $r_2$  (voir figure A.1). On peut alors écrire l'équation de chacun de ces cercles sous forme paramétrique.

Pour le premier cercle on a :

$$x_1 = x_{c_1} + r_1 \cos \psi \quad (\text{A.1})$$

$$y_1 = y_{c_1} + r_1 \sin \psi \quad (\text{A.2})$$

où  $\psi \in [-\pi, \pi]$ . Et pour le deuxième cercle on a :

$$x_2 = x_{c_2} + r_2 \cos \eta \quad (\text{A.3})$$

$$y_2 = y_{c_2} + r_2 \sin \eta \quad (\text{A.4})$$

où  $\eta \in [-\pi, \pi]$ . On peut donc trouver les points d'intersection de ces deux cercles en égalant  $x_1$  à  $x_2$  et  $y_1$  à  $y_2$ . On obtient donc :

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_{c_1} + r_1 \cos \psi = x_{c_2} + r_2 \cos \eta \quad (\text{A.5})$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow y_{c_1} + r_1 \sin \psi = y_{c_2} + r_2 \sin \eta \quad (\text{A.6})$$

On isole les expressions contenant les  $r_1$  dans les équations (A.5) et (A.6) :

$$r_1 \cos \psi = (x_{c_2} - x_{c_1}) + r_2 \cos \eta \quad (\text{A.7})$$

$$r_1 \sin \psi = (y_{c_2} - y_{c_1}) + r_2 \sin \eta \quad (\text{A.8})$$

Additionnons maintenant le carré de l'équation (A.7) au carré de l'équation (A.8) ce qui permet d'éliminer l'angle  $\psi$  :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x_{c_2} - x_{c_1})^2 + 2(x_{c_2} - x_{c_1})r_2 \cos \eta + r_2^2 \cos^2 \eta \\ &+ (y_{c_2} - y_{c_1})^2 + 2(y_{c_2} - y_{c_1})r_2 \sin \eta + r_2^2 \sin^2 \eta \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Maintenant que nous avons une expression trigonométrique en  $\eta$  seulement, on peut utiliser l'artifice mathématique  $T = \tan \frac{\eta}{2}$ . Celui-ci permet de remplacer les sinus et les cosinus par :

$$\cos \eta = \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\sin \eta = \frac{2T}{1 + T^2} \quad (\text{A.11})$$

On remplace alors (A.10) et (A.11) dans l'équation (A.9) :

$$r_1^2 - (x_{c_2} - x_{c_1})^2 - (y_{c_2} - y_{c_1})^2 - r_2^2 = 2(x_{c_2} - x_{c_1})r_2 \frac{1 - T^2}{1 + T^2} + 2(y_{c_2} - y_{c_1})r_2 \frac{2T}{1 + T^2} \quad (\text{A.12})$$

On multiplie ensuite chaque côté de l'équation par  $(1 + T^2)$  :

$$\begin{aligned} &2(x_{c_2} - x_{c_1})r_2(1 - T^2) + 2(y_{c_2} - y_{c_1})r_2(2T) \\ &+ [(x_{c_2} - x_{c_1})^2 + (y_{c_2} - y_{c_1})^2 + r_2^2 - r_1^2](1 + T^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

On regroupe finalement tout les coefficients des  $T$  pour avoir une équation de la forme  $AT^2 + BT + C = 0$ , où :

$$A = (x_{c_2} - x_{c_1})^2 + (y_{c_2} - y_{c_1})^2 + r_2^2 - r_1^2 - 2(x_{c_2} - x_{c_1})r_2 \quad (\text{A.14})$$

$$B = 4(y_{c_2} - y_{c_1})r_2 \quad (\text{A.15})$$

$$C = (x_{c_2} - x_{c_1})^2 + (y_{c_2} - y_{c_1})^2 + r_2^2 - r_1^2 + 2(x_{c_2} - x_{c_1})r_2 \quad (\text{A.16})$$

Cette équation quadratique admet 2 solutions qui sont données par :

$$T_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{A.17})$$

Avec les deux valeurs de  $T$  trouvées, on obtient deux valeurs pour  $\eta$  :

$$\eta_{1,2} = 2 \arctan T_{1,2} \quad (\text{A.18})$$

Il est alors aisé de trouver les coordonnées des point d'intersection en réinjectant  $\eta_{1,2}$  dans les équations (A.3) et (A.4).

Finalement, on peut aussi utiliser les équations (A.7) et (A.8) pour trouver les angles  $\psi_{1,2}$  correspondant :

$$\psi_{1,2} = \text{atan2} \left( \frac{(y_{c_2} - y_{c_1}) + r_2 \sin \eta_{1,2}}{r_1}, \frac{(x_{c_2} - x_{c_1}) + r_2 \cos \eta_{1,2}}{r_1} \right) \quad (\text{A.19})$$



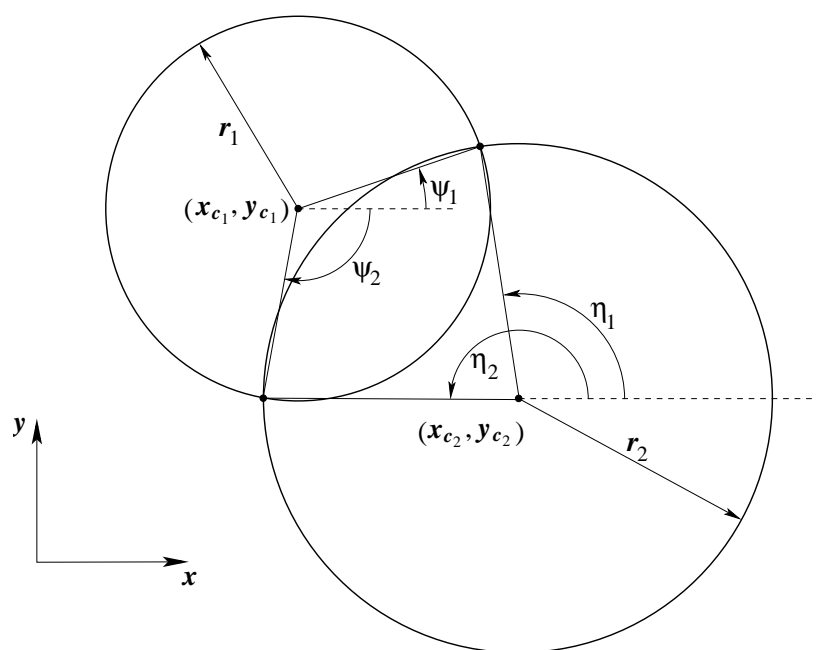


FIG. A.1 – Deux cercles s'intersectant.

# Annexe B

## Matrice et vecteurs de forces du problème dynamique inverse

### B.1 Matrice des coefficients

Comme la matrice  $\mathbf{A}$  des coefficients est de dimension 27 par 27 et comporte de nombreux zéros, il semble plus approprié d'énumérer les éléments non-nuls de celle-ci. On utilise la même notation que le logiciel *Matlab*, c'est-à-dire que le premier élément définit la ligne et le deuxième la colonne. Par exemple,  $\mathbf{A}(5, 3)$  identifie l'élément situé à l'intersection de la cinquième ligne et de la troisième colonne. Comme les éléments qui sont présents dans la matrice des coefficients sont souvent la décomposition d'un produit vectoriel, il faut donc identifier les composantes en  $x$  et  $y$  par un indice. Voici donc les éléments non-nuls de la matrice des coefficients :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(1, 1) &= 1; \\
\mathbf{A}(1, 9) &= 1; \\
\mathbf{A}(2, 2) &= 1; \\
\mathbf{A}(2, 10) &= 1; \\
\mathbf{A}(3, 1) &= -u_{1y}; \\
\mathbf{A}(3, 2) &= u_{1x}; \\
\mathbf{A}(3, 13) &= 1; \\
\mathbf{A}(4, 3) &= 1; \\
\mathbf{A}(4, 11) &= 1; \\
\mathbf{A}(5, 4) &= 1; \\
\mathbf{A}(5, 12) &= 1; \\
\mathbf{A}(6, 3) &= -v_{1y}; \\
\mathbf{A}(6, 4) &= v_{1x}; \\
\mathbf{A}(6, 14) &= 1; \\
\mathbf{A}(7, 1) &= -1; \\
\mathbf{A}(7, 5) &= 1; \\
\mathbf{A}(8, 2) &= -1; \\
\mathbf{A}(8, 6) &= 1; \\
\mathbf{A}(9, 1) &= -r_{3y}; \\
\mathbf{A}(9, 2) &= r_{3x}; \\
\mathbf{A}(9, 5) &= -(v_{1y} - r_{3y}); \\
\mathbf{A}(9, 6) &= (v_{1x} - r_{3x}); \\
\mathbf{A}(10, 3) &= -1; \\
\mathbf{A}(10, 5) &= -1; \\
\mathbf{A}(10, 7) &= 1; \\
\mathbf{A}(11, 4) &= -1; \\
\mathbf{A}(11, 6) &= -1; \\
\mathbf{A}(11, 8) &= 1; \\
\mathbf{A}(12, 3) &= -r_{4y}; \\
\mathbf{A}(12, 4) &= r_{4x}; \\
\mathbf{A}(12, 5) &= (u_{1y} - r_{4y}); \\
\mathbf{A}(12, 6) &= -(u_{1x} - r_{4x}); \\
\mathbf{A}(12, 7) &= -(u_{1y} - r_{4y}); \\
\mathbf{A}(12, 8) &= (u_{1x} - r_{4x}); \\
\mathbf{A}(13, 15) &= 1; \\
\mathbf{A}(13, 23) &= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(14, 16) &= 1; \\
\mathbf{A}(14, 24) &= 1; \\
\mathbf{A}(15, 15) &= -u_{2y}; \\
\mathbf{A}(15, 16) &= u_{2x}; \\
\mathbf{A}(15, 27) &= 1; \\
\mathbf{A}(16, 17) &= 1; \\
\mathbf{A}(16, 25) &= 1; \\
\mathbf{A}(17, 18) &= 1; \\
\mathbf{A}(17, 26) &= 1; \\
\mathbf{A}(18, 17) &= -v_{2y}; \\
\mathbf{A}(18, 18) &= v_{2x}; \\
\mathbf{A}(19, 15) &= -1; \\
\mathbf{A}(19, 19) &= 1; \\
\mathbf{A}(20, 16) &= -1; \\
\mathbf{A}(20, 20) &= 1; \\
\mathbf{A}(21, 15) &= -r_{7y}; \\
\mathbf{A}(21, 16) &= r_{7x}; \\
\mathbf{A}(21, 19) &= -(v_{2y} - r_{7y}); \\
\mathbf{A}(21, 20) &= (v_{2x} - r_{7x}); \\
\mathbf{A}(22, 17) &= -1; \\
\mathbf{A}(22, 19) &= -1; \\
\mathbf{A}(22, 21) &= 1; \\
\mathbf{A}(23, 18) &= -1; \\
\mathbf{A}(23, 20) &= -1; \\
\mathbf{A}(23, 22) &= 1; \\
\mathbf{A}(24, 17) &= -r_{8y}; \\
\mathbf{A}(24, 18) &= r_{8x}; \\
\mathbf{A}(24, 19) &= (u_{2y} - r_{8y}); \\
\mathbf{A}(24, 20) &= -(u_{2x} - r_{8x}); \\
\mathbf{A}(24, 21) &= -(u_{2y} - r_{8y}); \\
\mathbf{A}(24, 22) &= (u_{2x} - r_{8x}); \\
\mathbf{A}(25, 7) &= -1; \\
\mathbf{A}(25, 21) &= -1; \\
\mathbf{A}(26, 8) &= -1; \\
\mathbf{A}(26, 22) &= -1; \\
\mathbf{A}(27, 7) &= d_{1y};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(27, 8) = -d_{1x};$$

$$\mathbf{A}(27, 21) = d_{2y};$$

$$\mathbf{A}(27, 22) = -d_{2x};$$

## B.2 Vecteur des inconnues

Le vecteur  $\mathbf{x}$  contient les forces et les couples que l'on cherche à trouver. Voici les éléments qui le compose :

$$\mathbf{x}(1) = F_{1x},$$

$$\mathbf{x}(2) = F_{1y},$$

$$\mathbf{x}(3) = F_{2x},$$

$$\mathbf{x}(4) = F_{2y},$$

$$\mathbf{x}(5) = F_{3x},$$

$$\mathbf{x}(6) = F_{3y},$$

$$\mathbf{x}(7) = F_{4x},$$

$$\mathbf{x}(8) = F_{4y},$$

$$\mathbf{x}(9) = R_{1x},$$

$$\mathbf{x}(10) = R_{1y},$$

$$\mathbf{x}(11) = R_{2x},$$

$$\mathbf{x}(12) = R_{2y},$$

$$\mathbf{x}(13) = M_1,$$

$$\mathbf{x}(14) = M_2,$$

$$\mathbf{x}(15) = F_{5x},$$

$$\mathbf{x}(16) = F_{5y},$$

$$\mathbf{x}(17) = F_{6x},$$

$$\mathbf{x}(18) = F_{6y},$$

$$\mathbf{x}(19) = F_{7x},$$

$$\mathbf{x}(20) = F_{7y},$$

$$\mathbf{x}(21) = F_{8x},$$

$$\mathbf{x}(22) = F_{8y},$$

$$\mathbf{x}(23) = R_{3x},$$

$$\mathbf{x}(24) = R_{3y},$$

$$\mathbf{x}(25) = R_{4x},$$

$$\mathbf{x}(26) = R_{4y},$$

$$\mathbf{x}(27) = M_3$$

### B.3 Vecteur des forces inertielles

Le vecteur  $\mathbf{b}$  contient les forces inertielles. Il est possible de calculer ces forces grâce à la trajectoire que l'on fournit à l'effecteur.

$$\mathbf{b}(1) = m_1 \ddot{r}_{1x},$$

$$\mathbf{b}(2) = m_1 \ddot{r}_{1y},$$

$$\mathbf{b}(3) = [m_1(k_1^2 + r_1^2) + I_{cr1}] \ddot{\theta}_1,$$

$$\mathbf{b}(4) = m_2 \ddot{r}_{2x},$$

$$\mathbf{b}(5) = m_2 \ddot{r}_{2y},$$

$$\mathbf{b}(6) = [m_2(k_2^2 + r_2^2) + I_{cr2}] \ddot{\theta}_2,$$

$$\mathbf{b}(7) = m_3 \ddot{r}_{3x},$$

$$\mathbf{b}(8) = m_3 \ddot{r}_{3y},$$

$$\mathbf{b}(9) = m_3 k_3^2 \ddot{\theta}_2,$$

$$\mathbf{b}(10) = m_4 \ddot{r}_{4x},$$

$$\mathbf{b}(11) = m_4 \ddot{r}_{4y},$$

$$\mathbf{b}(12) = m_4 k_4^2 \ddot{\theta}_1,$$

$$\mathbf{b}(13) = m_5 \ddot{r}_{5x},$$

$$\mathbf{b}(14) = m_5 \ddot{r}_{5y},$$

$$\mathbf{b}(15) = [m_5(k_5^2 + r_5^2) + I_{cr3}] \ddot{\theta}_3,$$

$$\mathbf{b}(16) = m_6 \ddot{r}_{6x},$$

$$\mathbf{b}(17) = m_6 \ddot{r}_{6y},$$

$$\mathbf{b}(18) = [m_6(k_6^2 + r_6^2) + I_{cr4}] \ddot{\theta}_4,$$

$$\mathbf{b}(19) = m_7 \ddot{r}_{7x},$$

$$\mathbf{b}(20) = m_7 \ddot{r}_{7y},$$

$$\mathbf{b}(21) = m_7 k_7^2 \ddot{\theta}_4,$$

$$\mathbf{b}(22) = m_8 \ddot{r}_{8x},$$

$$\mathbf{b}(23) = m_8 \ddot{r}_{8y},$$

$$\mathbf{b}(24) = m_8 k_8^2 \ddot{\theta}_3,$$

$$\mathbf{b}(25) = m_{pf} \ddot{r}_{pf_x},$$

$$\mathbf{b}(26) = m_{pf} \ddot{r}_{pf_y},$$

$$\mathbf{b}(27) = m_{pf} k_{pf}^2 \ddot{\phi}$$

# Annexe C

## Croquis et dessins de fabrication

### C.1 Croquis

On présente ici les croquis des articulations qui ont été décrites au chapitre 5.

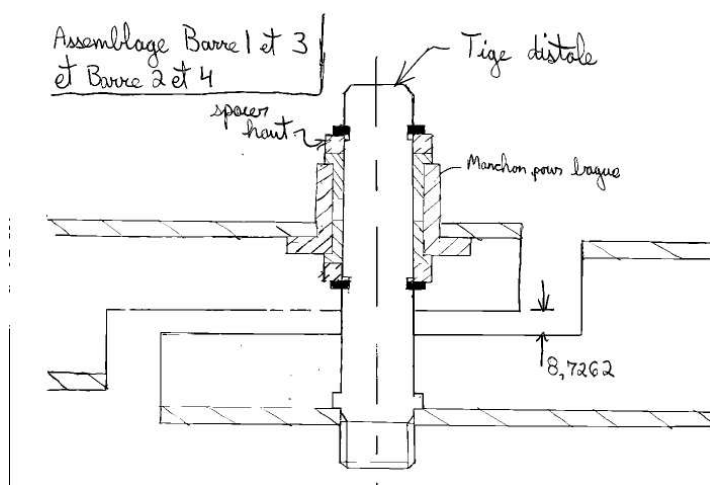


FIG. C.1 – Assemblage de l'articulation entre la barre 1 et la barre 3



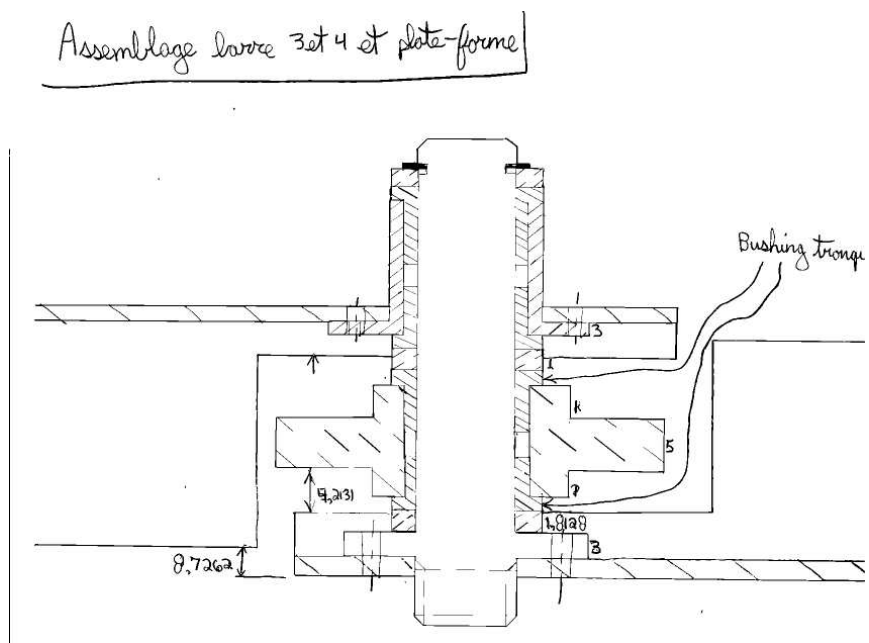


FIG. C.2 – Assemblage de l'articulation entre la plate-forme et les barres distales

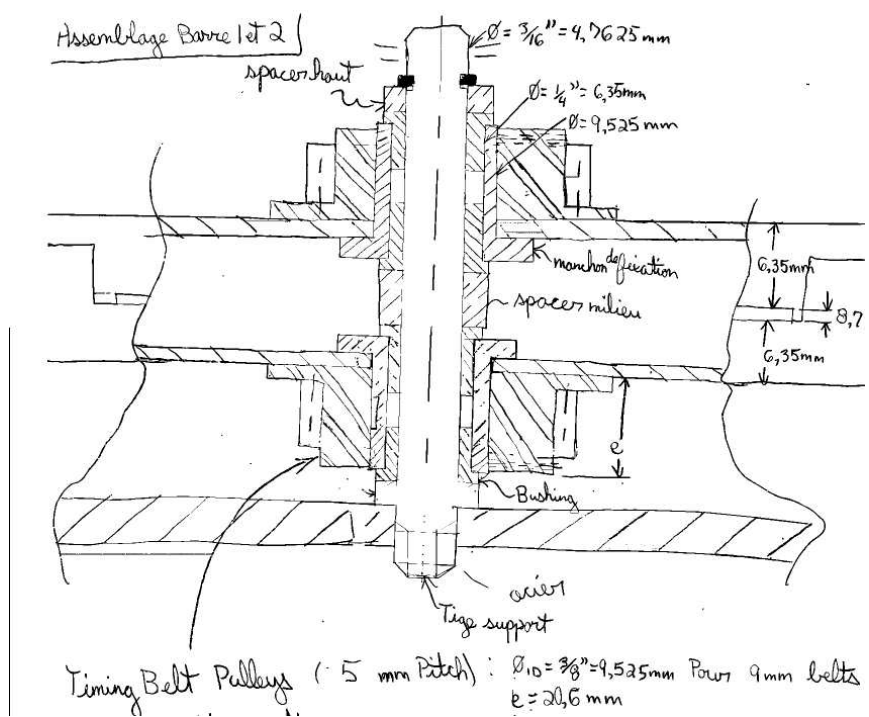


FIG. C.3 – Assemblage de l'articulation entre la barre 1 et la barre 2

## C.2 Dessins de fabrication du prototype

Les dessins de fabrication du prototype sont présentés dans cette section.

# Annexe D

## Spécifications des pièces achetées

### D.1 Section

Dans cet annexe, on présente les documents donnant les spécifications des pièces qui ont été achetées pour la fabrication du prototype.