

SIMON LEFRANÇOIS

**MODÉLISATION, COMMANDE ET PROTOTYPAGE  
D'UN ROBOT SOUS-ACTIONNÉ ENTRAÎNÉ  
À L'AIDE DE CÂBLES**

Mémoire présenté

à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2010

# Résumé

Les robots sous-actionnés entraînés à l'aide de câbles permettent de combiner les avantages du sous-actionnement (peu d'actionneurs, simplicité) et de l'utilisation des câbles (agilité, légèreté, grand espace de travail) afin de réduire les coûts d'opération des tâches de manipulation et de manutention. Puisqu'il s'agit d'une des premières études sur le sujet, l'objectif de ce mémoire est d'établir les bases nécessaires à la commande de tels robots à travers un mécanisme simple.

Le mécanisme étudié est un robot combinant les aspects d'un pendule double à ceux d'un pendule de longueur variable, possédant trois degrés de liberté et seulement deux actionneurs. Ce dernier peut atteindre différents objectifs (position et orientation) successivement en oscillant tel un enfant sur une balançoire.

Les analyses cinématique et dynamique sont d'abord présentées et validées à l'aide de simulations numériques. Puis, les différentes méthodes de planification de trajectoire sont discutées et une planification incluant des trajectoires paramétriques pour les articulations actionnées et un algorithme d'optimisation pour la liaison libre est retenue.

La précision et la robustesse de la commande sont finalement démontrées à l'aide d'un robot virtuel et, enfin, d'un prototype. Au meilleur de nos connaissances, il s'agit des premiers travaux présentant la commande en temps réel de tels systèmes.

# Avant-propos

*“A mind that is stretched to a new idea never returns to its original dimension.”*

*- Oliver Wendell Holmes*

Ces mots ne pourraient mieux résumer mon expérience au Laboratoire de robotique de l’Université Laval. Bien que ce mémoire porte sur la mécanique des câbles et le sous-actionnement, ces travaux ne représentent qu’une infime partie de l’apprentissage fait au cours de cette maîtrise. En réalité, c’est davantage mon désir de savoir, ma capacité à réfléchir et mon esprit critique que j’ai développé.

Je ne pourrais débiter ces remerciements par nul autre que le professeur Clément Gosselin. Seules les connaissances qu’il a pu me transmettre auraient été amplement suffisantes pour justifier ce remerciement. Toutefois, c’est aussi pour son accueil, sa disponibilité et son incroyable passion pour son domaine que je le remercie.

Merci aux professeurs Philippe Cardou et Yves St-Amant qui ont pris le temps de lire attentivement ce mémoire. Vos commentaires ont certainement permis d’améliorer le produit final.

Je remercie aussi l’ensemble des membres du Laboratoire de robotique pour ces moments privilégiés passés en votre compagnie. Un merci particulier aux professionnels de recherche, Boris, Simon et Thierry, qui ont contribué, chacun à leur façon, à la réussite de ce projet.

Plus personnellement, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour leur support. Votre présence a suffi à me fournir la motivation nécessaire à la réalisation de ce mémoire. Un merci spécial à ma conjointe Annie-Claude pour sa joie de vivre et sa confiance en moi qui ont été plus qu'utiles tout au long de cette maîtrise.

Ces remerciements seraient bien-sûr incomplets sans mentionner mes parents, qui m'ont fourni les meilleures conditions possibles au développement. Merci de m'avoir transmis votre passion pour le savoir et d'avoir été des modèles de réussite pour moi. Je vous remercie de tout cœur car, sans vous, rien n'aurait été possible.

Je remercie aussi le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) ainsi que le professeur Clément Gosselin pour leur appui financier.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont influencé le chemin de ma vie, car je n'aurais pu demander mieux.

*À Fernand, qui m'a enseigné pourquoi un clou  
rouillé tient toujours mieux qu'un neuf.*

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Présentation du mécanisme, cinématique et dynamique</b>	<b>6</b>
1.1 Généralités . . . . .	7
1.2 Présentation du mécanisme . . . . .	7
1.3 Analyse cinématique . . . . .	9
1.3.1 Degré de liberté et de redondance . . . . .	9
1.3.2 Problème géométrique direct . . . . .	10
1.3.3 Problème géométrique inverse . . . . .	10
1.3.4 Équations de vitesse et matrice jacobienne . . . . .	12
1.3.5 Lieux de singularités . . . . .	12
1.3.6 Espace de travail . . . . .	13
1.4 Analyse dynamique . . . . .	13
1.4.1 Formulation lagrangienne . . . . .	14
1.4.2 Modèle dynamique . . . . .	15
1.5 Validation des modèles cinématique et dynamique . . . . .	18
1.6 Conclusion . . . . .	19

<b>2</b>	<b>Planification de trajectoires globales</b>	<b>20</b>
2.1	Objectifs . . . . .	21
2.2	Stratégie de planification . . . . .	21
2.3	Évaluation théorique des performances . . . . .	23
2.3.1	Objectif de validation . . . . .	23
2.4	Trajectoires polynomiales . . . . .	24
2.4.1	Description . . . . .	24
2.4.2	Problème d’optimisation . . . . .	26
2.4.3	Performances théoriques . . . . .	27
2.5	Trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées . . . . .	30
2.5.1	Description . . . . .	30
2.5.2	Problème d’optimisation . . . . .	31
2.5.3	Performances théoriques . . . . .	32
2.6	Trajectoires poly-sinusoidales . . . . .	35
2.6.1	Description . . . . .	35
2.6.2	Problème d’optimisation . . . . .	39
2.6.3	Performances théoriques . . . . .	39
2.7	Construction d’un robot virtuel . . . . .	42
2.7.1	Évaluation de la planification de trajectoires globales . . . . .	44
2.8	Conclusion . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Planification de trajectoires locales</b>	<b>49</b>
3.1	Motivation et stratégie de planification . . . . .	50
3.1.1	Horizon de prédiction . . . . .	50
3.1.2	Définition des trajectoires . . . . .	52
3.2	Extension du câble . . . . .	53
3.2.1	Fréquence et phase . . . . .	54
3.2.2	Fonction paramétrique . . . . .	55
3.2.3	Conditions frontières . . . . .	57
3.3	Balancement de l’effecteur . . . . .	58
3.3.1	Fréquence et phase . . . . .	59
3.3.2	Fonction paramétrique . . . . .	61
3.3.3	Conditions frontières . . . . .	62
3.4	Comportement de l’angle du câble . . . . .	64
3.4.1	Problème d’optimisation . . . . .	64
3.4.2	Algorithme d’optimisation . . . . .	66
3.4.3	Algorithme d’intégration et détermination de la fréquence naturelle . . . . .	69

3.4.4	Structure de la commande . . . . .	72
3.5	Évaluation à l'aide du robot virtuel . . . . .	73
3.6	Conclusion . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Prototype et validation expérimentale</b>	<b>79</b>
4.1	Conception mécanique . . . . .	80
4.1.1	Architecture générale . . . . .	80
4.1.2	Extension des câbles . . . . .	82
4.1.3	Balancement de l'effecteur . . . . .	84
4.1.4	Mouvement de l'angle du câble . . . . .	86
4.1.5	Paramètres physiques du prototype . . . . .	87
4.2	Commande et mesures . . . . .	88
4.2.1	Commande multi-pas . . . . .	88
4.2.2	Asservissement des moteurs . . . . .	89
4.2.3	Mesures des positions articulaires . . . . .	90
4.3	Validation expérimentale . . . . .	90
4.3.1	Trajectoire initiale d'excitation . . . . .	91
4.3.2	Réalisation de trajectoires simples . . . . .	91
4.3.2.1	Planification globale . . . . .	92
4.3.2.2	Planification locale . . . . .	93
4.3.3	Réalisation de trajectoires complexes . . . . .	96
4.3.4	Effets des perturbations et limitations physiques du mécanisme	101
4.4	Conclusion . . . . .	104
	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>108</b>
<b>A</b>	<b>Résultats issus de la validation des modèles cinématique et dynamique</b>	<b>111</b>
A.1	Validation du modèle cinématique . . . . .	112
A.1.1	Trajectoire articulaire imposée . . . . .	112
A.1.2	Trajectoire cartésienne imposée . . . . .	113
A.2	Validation du modèle dynamique . . . . .	115
A.2.1	Trajectoire articulaire imposée . . . . .	115
A.2.2	Efforts articulaires imposés . . . . .	116
A.2.3	Trajectoire articulaire imposée aux variables actionnées seulement	117
<b>B</b>	<b>Résultats issus des évaluations théoriques de la planification globale</b>	<b>119</b>

B.1	Trajectoires polynomiales . . . . .	120
B.2	Trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées . . . . .	122
B.3	Trajectoires poly-sinusoïdales . . . . .	124
<b>C</b>	<b>Résultats issus des évaluations à l'aide du robot virtuel</b>	<b>126</b>
C.1	Planification de trajectoires globales . . . . .	127
C.2	Planification de trajectoires locales . . . . .	129
<b>D</b>	<b>Résultats issus de la validation expérimentale</b>	<b>132</b>
D.1	Trajectoires simples . . . . .	133
D.2	Trajectoires complexes . . . . .	136
D.3	Trajectoires complexes avec perturbations . . . . .	140
<b>E</b>	<b>Plans de fabrication et d'assemblage du prototype</b>	<b>142</b>

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres numériques considérés pour la validation des modèles cinématique et dynamique. . . . .	19
2.1	Erreurs de modèle considérées pour la création du robot virtuel perturbé.	46
4.1	Contraintes relatives à l'extension des câbles. . . . .	84
4.2	Contraintes relatives au balancement de l'effecteur. . . . .	86
4.3	Paramètres du prototype considérés pour la validation expérimentale. .	87
4.4	Résolution des mesures des positions articulaires fournies par les encodeurs.	90
B.1	Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales sans pénalité. . . . .	120
B.2	Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales sans pénalité.	120
B.3	Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales avec pénalités. . . . .	121
B.4	Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales avec pénalités.	121
B.5	Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité. . . . .	122
B.6	Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité. . . . .	122
B.7	Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités. . . . .	123
B.8	Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités. . . . .	123

B.9	Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité. . . . .	124
B.10	Performances théoriques pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité. . . . .	124
B.11	Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités. . . . .	125
B.12	Performances théoriques pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités. . . . .	125
C.1	Coefficients obtenus par optimisation pour la planification globale par poly-sinusoidales implantée dans les robots virtuels. . . . .	127
C.2	Performances de la planification globale par poly-sinusoidales implantée dans le robot virtuel. . . . .	127
C.3	Performances de la planification globale par poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé. . . . .	128
C.4	Performances de la planification locale implantée dans le robot virtuel. . . . .	130
C.5	Performances de la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé. . . . .	131
D.1	Coefficients des trajectoires poly-sinusoidales obtenus par optimisation pour la planification globale de la trajectoire simple. . . . .	133
D.2	Performances des trajectoires poly-sinusoidales pour la planification globale de la trajectoire simple. . . . .	133
D.3	Performances pour la planification locale de la trajectoire simple. . . . .	135
D.4	Performances pour la planification locale de la première trajectoire complexe. . . . .	137
D.5	Performances pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe. . . . .	139
D.6	Performances pour la planification locale de la première trajectoire complexe en ajoutant des perturbations. . . . .	141

# Liste des figures

1	Exemple de mécanisme entraîné à l'aide de câbles [6]. . . . .	2
2	Le Skycam, une caméra robotisée entraînée à l'aide de câbles. . . . .	2
3	Le NIST Robocrane et le robot FALCON, deux grues spécialisées entraînées par des câbles. . . . .	3
4	Exemple de trajectoire pour l'Acrobot, l'un des premiers mécanismes sous-actionnés. . . . .	4
1.1	Représentation schématique du mécanisme étudié et notation associée.	8
1.2	Espace de travail pour un angle de câble $\theta_1$ inférieur à $ \pi/3 $ rad et une longueur de câble $\rho$ entre 0,2 m et 2,5 m. . . . .	14
2.1	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales sans pénalité. . . . .	28
2.2	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales sans pénalité. . . . .	28
2.3	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales avec pénalités. . . . .	29
2.4	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales avec pénalités. . . . .	29
2.5	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité. . . . .	33
2.6	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité. . . . .	33
2.7	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités. . . . .	34

2.8	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités. . . . .	34
2.9	Modélisation du mécanisme comme un pendule double idéal. . . . .	35
2.10	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité. . . . .	40
2.11	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité. . . . .	40
2.12	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités. . . . .	41
2.13	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités. . . . .	41
2.14	Représentation schématique du robot virtuel et de son contrôleur. . . . .	43
2.15	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel. . . . .	44
2.16	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel. . . . .	45
2.17	Évolution de l'erreur de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel. . . . .	45
2.18	Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé. . . . .	46
2.19	Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé. . . . .	47
2.20	Évolution de l'erreur de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé. . . . .	47
3.1	Représentation de l'horizon de prédiction en fonction de l'angle du câble $\theta_1$ . . . . .	51
3.2	Représentation d'un pendule de longueur variable [22]. . . . .	53
3.3	Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble $\theta_1$ par demi-période en fonction de la fréquence d'excitation $\omega$ et de la phase initiale $\psi$ pour l'extension du câble. . . . .	54
3.4	Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble $\theta_1$ par demi-période en fonction de la phase initiale $\psi$ pour une fréquence d'excitation de $\omega = 6$ rad/s de l'extension du câble. . . . .	55
3.5	Effets des conditions frontières sur la trajectoire articulaire pour l'extension du câble ( $A_1 = 0,05$ ). . . . .	58

3.6	Représentation d'un robot brachiateur [20]. . . . .	59
3.7	Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble $\theta_1$ par demi-période en fonction de la fréquence d'excitation $\omega$ et de la phase initiale $\psi$ pour le balancement de l'effecteur. . . . .	60
3.8	Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble $\theta_1$ par demi-période en fonction de la phase initiale $\psi$ pour une fréquence d'excitation de $\omega = 3$ rad/s du balancement de l'effecteur. . . . .	61
3.9	Effets des conditions frontières sur la trajectoire articulaire pour le balancement de l'effecteur ( $B_1 = \pi/2$ ). . . . .	63
3.10	Représentation de la fonction d'optimisation dans le plan $(A_1, B_1)$ en excitation et lors de l'atteinte d'un objectif. . . . .	66
3.11	Progression de l'algorithme et évolution de la solution dans le plan $(A_1, B_1)$ en excitation ( $\theta_{1g} = 0, 70$ ). . . . .	68
3.12	Progression de l'algorithme et évolution de la solution dans le plan $(A_1, B_1)$ lors de l'atteinte d'un objectif ( $\theta_{1g} = 0, 50$ ). . . . .	69
3.13	Fréquence naturelle du système en fonction des paramètres libres $A_1$ et $B_1$ pour une longueur de câble de $\rho = 1, 2$ m. . . . .	72
3.14	Structure d'un contrôleur à $N$ pas d'optimisation. . . . .	73
3.15	Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel. . . . .	74
3.16	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel. . . . .	74
3.17	Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification locale implantée dans le robot virtuel. . . . .	75
3.18	Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé. . . . .	76
3.19	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé. . . . .	76
3.20	Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé. . . . .	77
4.1	Architecture générale du prototype. . . . .	81
4.2	Architecture du système permettant l'extension des câbles incluant l'enrouleur double, les guides et les poulies. . . . .	83
4.3	Architecture de la base et de l'effecteur. . . . .	85

4.4	Architecture du système permettant de découpler l'angle et l'extension du câble. . . . .	87
4.5	Structure d'un contrôleur à N pas d'asservissement comprenant M itérations par pas de l'algorithme d'optimisation. . . . .	89
4.6	Évolution des coordonnées articulaires pour la planification globale par poly-sinusoïdes de la trajectoire simple. . . . .	92
4.7	Évolution des efforts articulaires pour la planification globale par poly-sinusoïdes de la trajectoire simple. . . . .	93
4.8	Évolution de l'erreur de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification globale par poly-sinusoïdes de la trajectoire simple. . . . .	93
4.9	Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale de la trajectoire simple. . . . .	94
4.10	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la trajectoire simple. . . . .	94
4.11	Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification locale de la trajectoire simple. . . . .	95
4.12	Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale de la première trajectoire complexe. . . . .	98
4.13	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la première trajectoire complexe. . . . .	98
4.14	Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification locale de la première trajectoire complexe. . . . .	99
4.15	Réalisation de la première trajectoire complexe. . . . .	99
4.16	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe. . . . .	100
4.17	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe. . . . .	100
4.18	Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe. . . . .	101
4.19	Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale de la première trajectoire en ajoutant des perturbations. . . . .	102
4.20	Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la première trajectoire en ajoutant des perturbations. . . . .	102
4.21	Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble $\theta_1$ pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe en ajoutant des perturbations. . . . .	103

A.1	Coordonnées et vitesses cartésiennes obtenues du modèle cinématique et de la simulation numérique. . . . .	113
A.2	Coordonnées et vitesses articulaires obtenues du modèle cinématique et de la simulation numérique. . . . .	114
A.3	Efforts articulaires obtenus du modèle dynamique et de la simulation numérique. . . . .	116
A.4	Trajectoire articulaire obtenue du modèle dynamique et de la simulation numérique. . . . .	117
A.5	Trajectoire de la variable libre et efforts articulaires obtenus du modèle dynamique et de la simulation numérique. . . . .	118
C.1	Évolution des paramètres libres pour la planification locale implantée dans le robot virtuel. . . . .	129
C.2	Évolution de la fréquence du système pour la planification locale implantée dans le robot virtuel. . . . .	129
C.3	Évolution des paramètres libres pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé. . . . .	130
C.4	Évolution de la fréquence du système pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé. . . . .	131
D.1	Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la trajectoire simple. . . . .	134
D.2	Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la trajectoire simple. . . . .	134
D.3	Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la première trajectoire complexe. . . . .	136
D.4	Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la première trajectoire complexe. . . . .	136
D.5	Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe. . . . .	138
D.6	Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe. . . . .	138
D.7	Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la première trajectoire complexe en ajoutant des perturbations. . . . .	140
D.8	Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la deuxième première trajectoire complexe en ajoutant des perturbations. . . . .	140

# Introduction

## Mise en situation

Les mécanismes entraînés par des câbles consistent en des systèmes, souvent d'architectures parallèles, pour lesquels les pattes rigides conventionnelles ont été remplacées par des câbles dont l'allongement permet de positionner et d'orienter l'effecteur dans l'espace. Un exemple d'un tel mécanisme est présenté à la figure 1. De nombreux avantages liés à l'utilisation de ces derniers ont permis leur ascension dans la robotique actuelle. D'une part, grâce à l'enroulement des câbles, un très grand espace de travail est possible. D'autre part, comme les câbles sont légers et leur inertie est faible, l'agilité d'un tel mécanisme est excellente et de grandes accélérations sont réalisables. Enfin, les faibles coûts liés à la construction de ceux-ci ont ouvert la porte sur un nouveau monde d'applications, car les câbles sont extrêmement peu onéreux en comparaison aux pattes rigides.

L'application la plus répandue est bien entendu le Skycam [12] (voir figure 2) une caméra robotisée utilisée pour la télédiffusion des parties de football américain. Celle-ci permet, entre autres, d'obtenir des plans de vue beaucoup plus près du terrain, ce qui amène une nouvelle dimension au spectacle télévisuel. Dans ce cas, il aurait été impensable de réaliser un robot à pattes rigides transportant la caméra considérant les dimensions du terrain. Pour cette même raison, d'autres ont utilisé ces mécanismes

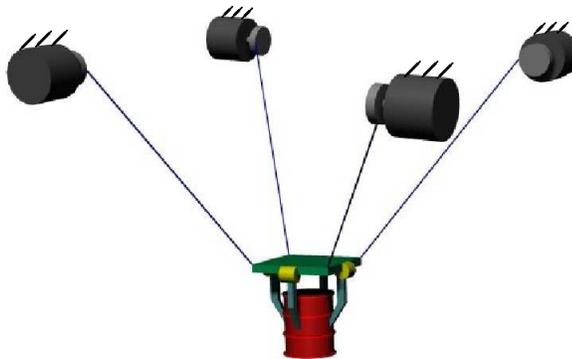


FIG. 1 – Exemple de mécanisme entraîné à l'aide de câbles [6].

pour la manipulation et la manutention d'objets sur de grands espaces de travail. Parmi les plus populaires, il y a le NIST Robocrane [1] et le robot FALCON [18] deux grues spécialisées coordonnant plusieurs enrouleurs afin de manipuler différents objets. Ces dernières sont d'ailleurs montrées à la figure 3.

Cependant, des inconvénients majeurs sont aussi reliés à l'utilisation de câbles. D'abord, ces derniers exercent des forces en tension seulement (un câble ne peut pousser un objet), ce qui augmente la complexité d'actionnement. De plus, ceux-ci étant naturellement flexibles, la précision d'un tel mécanisme est généralement inférieure à celle d'un à pattes rigides. Ainsi, pour pallier ces défauts, les mécanismes à câbles sont habituellement sur-actionnés, c'est-à-dire, qu'il possèdent plus d'actionneurs que



FIG. 2 – Le Skycam, une caméra robotisée entraînée à l'aide de câbles.

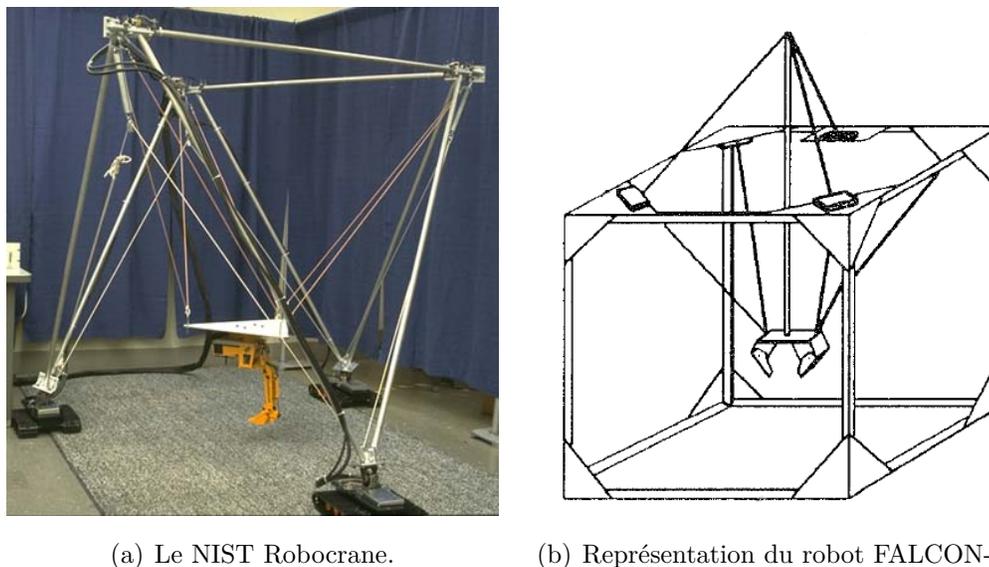


FIG. 3 – Le NIST Robocrane et le robot FALCON, deux grues spécialisées entraînées par des câbles.

de degrés de liberté. Par conséquent, il devient nécessaire d'installer de nombreux actionneurs à différents endroits dans l'espace et une calibration étendue du mécanisme doit être réalisée [7]. Les coûts associés à l'implantation d'un tel mécanisme sont donc drastiquement augmentés, d'où l'objet de ce mémoire.

Les principes du sous-actionnement seront donc utilisés ici afin de réduire le nombre d'actionneurs et, par conséquent, les coûts d'implantation. Par définition, un mécanisme sous-actionné est un système comprenant moins d'actionneurs que de degrés de liberté. Le plus célèbre étant sans aucun doute l'Acrobot [25], un pendule double pour lequel seule la deuxième articulation est actionnée. La figure 4 montre une séquence de positions illustrant un exemple de trajectoire de ce dernier.

Pour ces robots, le mouvement des articulations libres (non-actionnées) est généralement relié à celui des autres par des dynamiques complexes ce qui fait de la commande un défi intéressant [15]. Ainsi, de toutes les trajectoires cinématiquement possibles, seules quelques trajectoires sont dynamiquement réalisables car le mouvement des articulations libres est fonction de celui des articulations actionnées. Une rigoureuse planification de trajectoire devient donc indispensable. Toutefois, de tels mécanismes sont parfaitement indiqués pour les opérations de manutention car celles-ci impliquent principalement de se rendre d'un point à un autre sans égard à la trajectoire entre les deux.

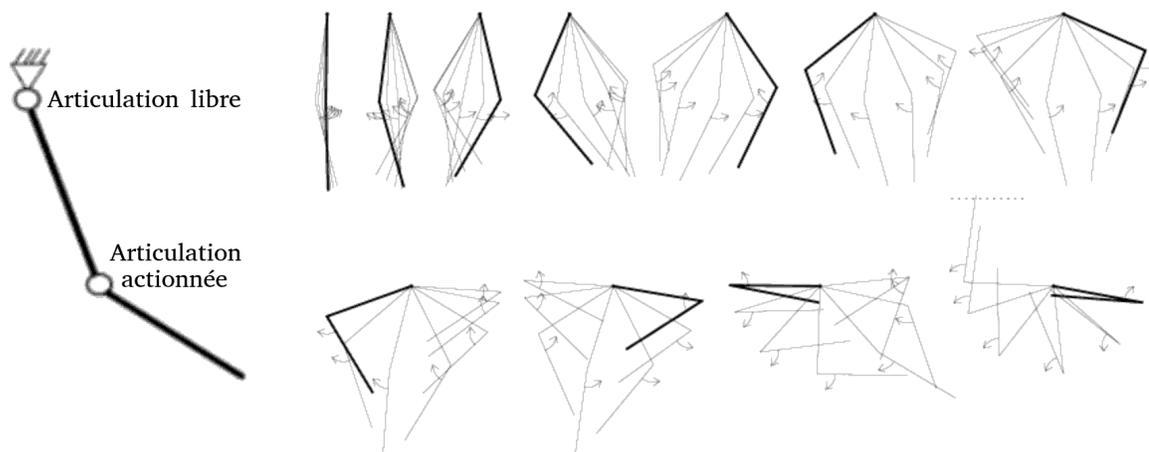


FIG. 4 – Exemple de trajectoire pour l’Acrobot, l’un des premiers mécanismes sous-actionnés.

Ainsi, combiner les avantages du sous-actionnement (peu d’actionneurs, simplicité) et de l’utilisation des câbles (agilité, grand espace de travail, légèreté) est une avenue prometteuse pour réduire les coûts d’opération sur de grands espaces de travail. Les applications potentielles incluent les quais de chargement, la construction, la robotique de terrain, la domotique, les systèmes de surveillance, les serres automatisées ainsi que le divertissement et la collaboration humain-robot. Cette dernière est en effet possible car les mécanismes sous-actionnés entraînés par des câbles sont légers et leur mouvement n’est pas contraint, ce qui permet d’éviter les accidents par écrasement [17].

## Motivation et méthodologie

Ce mémoire étant l’un des premiers pas sur la route des mécanismes sous-actionnés entraînés par des câbles, l’objet de ce projet était de valider les concepts de base à travers un mécanisme simple. La première étape consistait donc à établir la cinématique et la dynamique du mécanisme. Puis, des algorithmes de planification de trajectoires ont été développés et vérifiés à l’aide d’un robot virtuel. Finalement, la validation a été complétée expérimentalement grâce à la conception d’un prototype et à la réalisation de sa commande.

## Structure du mémoire

La structure de ce mémoire est en quelque sorte analogue à l'évolution du projet. L'ordre des chapitres respecte donc la logique suivie en cours de projet, ce qui facilitera la compréhension du lecteur. En fin de document, des annexes sont disponibles et ces dernières seront référencées au moment opportun dans le texte. Celles-ci contiennent, entre autres, les résultats expérimentaux ainsi que les plans de fabrication du prototype.

Le premier chapitre débute par l'élaboration des concepts de base et le choix du mécanisme sur lequel est basée cette étude. Les analyses cinématique et dynamique de ce dernier sont présentées et ensuite validées à l'aide de simulations numériques.

Le deuxième chapitre enchaîne avec la présentation de la planification de trajectoires globales. Les objectifs, la stratégie de planification générale ainsi que la motivation derrière celle-ci y sont d'abord présentées. Puis, différents types de trajectoires possibles sont décrits et évalués à l'aide d'une trajectoire théorique. Enfin, un robot virtuel est construit afin de caractériser les performances de l'algorithme lorsque implanté dans un contrôleur.

Le troisième chapitre aborde ensuite la planification de trajectoires locales, soit la solution retenue. Le choix des trajectoires des articulations actionnées y est détaillé et suivi par un algorithme d'optimisation définissant le comportement de l'articulation libre. Une évaluation à l'aide du robot virtuel est ensuite réalisée.

Enfin, la réalisation du prototype est décrite au quatrième chapitre. Celui-ci ainsi que les critères ayant influencé sa conception y sont détaillés. L'intégration des algorithmes de planification dans le contrôleur et la validation expérimentale des résultats viennent ensuite compléter ce mémoire.

# Chapitre 1

## Présentation du mécanisme, cinématique et dynamique

Ce chapitre débute par une brève description de la notation utilisée pour l'ensemble de ce mémoire. Le mécanisme retenu pour établir les concepts de base et les raisons ayant guidé son choix sont ensuite présentés. Puis, les analyses cinématique et dynamique de ce dernier sont réalisées. Enfin, ces dernières sont validées à l'aide de simulations numériques.

## 1.1 Généralités

De manière générale, une lettre minuscule ou majuscule en caractère normal tel que  $x$  ou  $X$  représentera un scalaire. Par contre, l'utilisation du caractère gras annoncera une entité contenant plus d'une composante tel que  $\mathbf{x}$  pour un vecteur et  $\mathbf{X}$  pour un tenseur.

Les unités utilisées tout au long de ce mémoire correspondent à celles proposées par le Système International SI [28]. Ainsi, sauf indication contraire, les unités de temps, de longueur et de masse seront respectivement, la seconde  $s$ , le mètre  $m$  et le kilogramme  $kg$ . Pour ce qui est des unités SI dérivées tel que l'angle plan, le moment d'inertie, la force et le moment de force, les mesures utilisées seront respectivement le radian  $rad$  (de même que le degré  $^\circ$  lorsque spécifié), le kilogramme-mètre carré  $kg \cdot m^2$ , le Newton  $N$  et le Newton-mètre  $N \cdot m$ . Enfin, le sens positif des rotations respectera toujours la règle de la main droite.

## 1.2 Présentation du mécanisme

Le mécanisme choisi est présenté à la figure 1.1. Ce dernier est composé d'un effecteur entraîné par un moteur suspendu à un câble dont la longueur est contrôlée à l'aide d'un enrouleur actionné par un moteur fixe. Le mécanisme opère donc dans le plan et peut être considéré comme un mécanisme RPR (rotoïde-prismatique-rotoïde) pour lequel la première articulation n'est pas actionnée. Celui-ci est donc similaire à un pendule double possédant un premier lien de longueur variable.

Bien que relativement simple, ce mécanisme a été choisi parce que son comportement est tout à fait similaire à celui d'un enfant sur une balançoire. En effet, le mouvement de l'effecteur imite l'allongement des jambes pratiqué lors du balancement en position assise étudié par Case [10] et l'élongation du câble imite le déplacement du centre de masse pratiqué lors de balancement en position debout aussi étudié par Case [11]. Ce choix permettra ainsi de bien établir les bases nécessaires à la commande des mécanismes sous-actionnés entraînés par des câbles car les développements seront basés sur des phénomènes largement documentés.

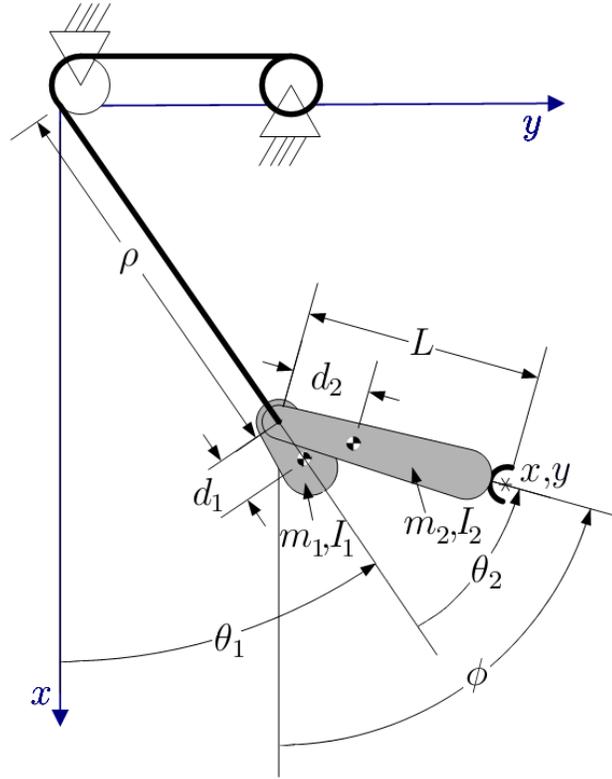


FIG. 1.1 – Représentation schématique du mécanisme étudié et notation associée.

Tout au long de ce mémoire, la notation particulière au mécanisme sera conforme à celle présentée à la figure 1.1. Ainsi, les coordonnées cartésiennes sont définies par  $\mathbf{t} = [x, y, \phi]^T$ , soient respectivement les distances verticale et horizontale par rapport au point d'attache ainsi que l'angle de rotation par rapport à la verticale. Ce dernier est défini positif dans le sens anti-horaire conformément à la règle de la main droite.

Quant à elles, les coordonnées articulaires sont définies par  $\mathbf{q} = [\theta_1, \rho, \theta_2]^T$ , soient respectivement l'angle du câble par rapport à la verticale, la longueur du câble et l'angle de l'effecteur par rapport au câble. Ces derniers étant aussi définis positifs dans le sens anti-horaire conformément à la règle de la main droite. Enfin, la variable  $L$  représente la longueur de l'effecteur et les variables  $m_i, I_i$  et  $d_i$  représentent respectivement la masse, l'inertie par rapport au centre de masse et la position du centre de masse du corps  $i$ .

Dans les prochaines analyses et tout au long de ce mémoire, les mouvements du mécanisme seront toujours considérés contraints au plan par définition. Les équations associées aux autres plans ne seront donc pas détaillées ici. De plus, le câble sera

considéré comme un lien rigide sans masse. Ceci implique que la tension dans ce dernier doit toujours être suffisante afin d'éviter la flexion de celui-ci. Enfin, la friction dans le système ainsi que les effets aérodynamiques seront toujours négligés.

## 1.3 Analyse cinématique

L'analyse cinématique consiste à déterminer les principales relations entre les variables cartésiennes et articulaires définissant le mouvement du robot. Le degré de liberté et de redondance du mécanisme ainsi que les développements définissant les équations de position et de vitesse sont présentés. Les questions de singularités et d'espace de travail sont finalement abordées.

### 1.3.1 Degré de liberté et de redondance

Le degré de liberté d'une chaîne cinématique représente le nombre de paramètres indépendants qu'il faut spécifier pour en déterminer la configuration. Pour déterminer le degré de liberté du mécanisme, la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach, aussi appelée critère de mobilité général est utilisée. Celle-ci s'écrit :

$$l = d(n - p - 1) + \sum_{i=1}^p f_i \quad (1.1)$$

où  $l$  est le degré de liberté de la chaîne à l'étude,  $d$  est la dimension du système considéré (ici 3 pour le plan),  $n$  est le nombre de corps rigides dans la chaîne,  $p$  est le nombre d'articulations et  $f_i$  est le degré de liberté de l'articulation  $i$ .

Si on modélise le mécanisme présenté ci-haut comme une chaîne RPR, on a trois corps mobiles (le câble, la base de l'effecteur et l'effecteur) ainsi que le corps fixe et trois articulations qui possèdent chacune un degré de liberté. On a donc :

$$d = 3, \quad n = 4, \quad p = 3, \quad f_{1,2,3} = 1. \quad (1.2)$$

Par conséquent, le degré de liberté du mécanisme est trois, ce qui permet de définir le mouvement plan par la position  $[x, y]$  et l'orientation  $\phi$ . Ainsi, puisque le degré de liberté du mécanisme correspond à celui de la dimension ( $l = d = 3$ ), sa configuration sera toujours entièrement définie.

Enfin, le degré de redondance de l'actionnement est la différence entre le nombre d'actionneurs et le degré de liberté du mécanisme. Ici, puisque seulement deux actionneurs sont utilisés, le degré de redondance est de  $-1$  et le mécanisme est, par conséquent, sous-actionné. Il se retrouve ainsi en configuration hypostatique, c'est-à-dire, en mouvement non-contraint.

### 1.3.2 Problème géométrique direct

Le problème géométrique direct (PGD) consiste à déterminer la pose (position et orientation) de l'effecteur en fonction des coordonnées articulaires. Cette relation permet de faire le lien entre les mesures prises aux articulations et la position spatiale du mécanisme. En analysant directement la géométrie du mécanisme, on obtient la solution au PGD :

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta_1 + L \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \rho \sin \theta_1 + L \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

On fait l'hypothèse ici que, bien qu'elle corresponde à une articulation non-actionnée, la coordonnée  $\theta_1$  est mesurée par un encodeur et est donc disponible dans le contrôleur.

### 1.3.3 Problème géométrique inverse

À l'opposé, le problème géométrique inverse (PGI) consiste à obtenir les coordonnées articulaires correspondant à une pose (position et orientation) de l'effecteur donnée. Cette relation est ici obtenue en manipulant algébriquement les équations du PGD. D'abord, en insérant les termes de rotation dans les relations de position définies à

l'équation (1.3), les égalités suivantes sont obtenues :

$$x - L \cos \phi = \rho \cos \theta_1 \quad (1.4)$$

$$y - L \sin \phi = \rho \sin \theta_1. \quad (1.5)$$

En élevant ces dernières au carré et en les additionnant, on obtient la relation définissant la longueur du câble  $\rho$  :

$$\rho^2 \cos^2 \theta_1 + \rho^2 \sin^2 \theta_1 = (x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2 \quad (1.6)$$

$$\rho^2 = (x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2 \quad (1.7)$$

$$\rho = \sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}. \quad (1.8)$$

Ici, le résultat négatif de la racine carrée est ignoré car la longueur du câble ne peut qu'être positive par définition. Puis, en insérant ce dernier résultat dans les équations (1.4) et (1.5), les relations suivantes sont obtenues :

$$\cos \theta_1 = \frac{x - L \cos \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}} \quad (1.9)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y - L \sin \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}}. \quad (1.10)$$

Et, à partir de celles-ci, on définit l'angle du câble  $\theta_1$  selon :

$$\theta_1 = \text{atan2} \left( \frac{y - L \sin \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}}, \frac{x - L \cos \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}} \right). \quad (1.11)$$

Enfin, en insérant cette dernière équation dans la relation d'orientation définie à l'équation (1.3), on obtient l'angle de l'effecteur  $\theta_2$  :

$$\theta_2 = \phi - \text{atan2} \left( \frac{y - L \sin \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}}, \frac{x - L \cos \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}} \right). \quad (1.12)$$

La solution au PGI du mécanisme est donc :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \rho \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2} \left( \frac{y - L \sin \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}}, \frac{x - L \cos \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}} \right) \\ \sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2} \\ \phi - \text{atan2} \left( \frac{y - L \sin \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}}, \frac{x - L \cos \phi}{\sqrt{(x - L \cos \phi)^2 + (y - L \sin \phi)^2}} \right) \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

### 1.3.4 Équations de vitesse et matrice jacobienne

Les équations de vitesse sont ici obtenues en dérivant le PGD présenté à l'équation (1.3) par rapport au temps :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \cos \theta_1 - \rho \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - L (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{\rho} \sin \theta_1 + \rho \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Ces équations peuvent ensuite être réécrites sous un système d'équations linéaires de la forme :

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.15)$$

où la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  reliant les vitesses cartésiennes à l'effecteur et les vitesses articulaires est :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} [-\rho \sin \theta_1 - L \sin(\theta_1 + \theta_2)] & \cos \theta_1 & [-L \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ [\rho \cos(\theta_1) + L \cos(\theta_1 + \theta_2)] & \sin \theta_1 & [L \cos(\theta_1 + \theta_2)] \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

### 1.3.5 Lieux de singularités

Les lieux de singularité correspondent aux lieux articulaires (ou cartésiens) où se produit une dégénérescence de la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses cartésiennes présentée à l'équation (1.15). Le robot se retrouve alors à une limite de son espace de travail ou à une limite interne de son espace où se rejoignent deux branches du problème géométrique inverse. Puisque le noyau de  $\mathbf{J}$  n'est pas vide, il devient alors possible de trouver des vecteurs de vitesses articulaires non-nulles  $\dot{\mathbf{q}}$  qui produisent des vitesses cartésiennes  $\dot{\mathbf{t}}$  nulles. Ainsi, certains vecteurs de vitesses cartésiennes ne peuvent être produits et ces singularités sont, par conséquent, à éviter. Ces dernières se produisent lorsque la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est singulière, c'est-à-dire, lorsque :

$$\det(\mathbf{J}) = 0. \quad (1.17)$$

Pour le robot décrit ici, les singularités se produisent donc lorsque :

$$\det(\mathbf{J}) = -\rho = 0. \quad (1.18)$$

Or, ceci correspond à une longueur nulle du câble, ce qui a évidemment très peu d'intérêt dans notre cas. Les lieux de singularités ne seront donc pas considérés dans les prochains développements.

### 1.3.6 Espace de travail

L'espace de travail définit l'ensemble des configurations atteignables  $[x, y, \phi]$  par le mécanisme. Dans notre cas, peu importe la pose du mécanisme  $\mathbf{t}$ , du point de vue de la cinématique, il y aura toujours une solution au PGI. Ainsi, l'espace de travail théorique correspond à l'ensemble du plan cartésien en excluant bien-sûr le lieu de singularité  $\rho = 0$ .

En réalité, il est évident qu'il sera impossible d'atteindre des valeurs d'angle du câble  $\theta_1$  très élevées tout en maintenant une tension positive dans ce dernier. De plus, les longueurs minimale et maximale du câble sont aussi limitées dans un environnement physique. Les dimensions de l'espace atteignable physiquement réalisable sont donc nettement inférieures à celles de l'espace théorique. La figure 1.2 montre ainsi un exemple d'espace atteignable en considérant ces limites articulaires.

## 1.4 Analyse dynamique

L'analyse dynamique d'un mécanisme permet de définir les équations différentielles régissant son comportement. Les relations entre les forces et les mouvements articulaires sont ainsi obtenues. Celles-ci seront d'ailleurs à la base de la planification de trajectoire présentée aux chapitres suivants. Ici, ces relations sont obtenues par la mécanique lagrangienne.

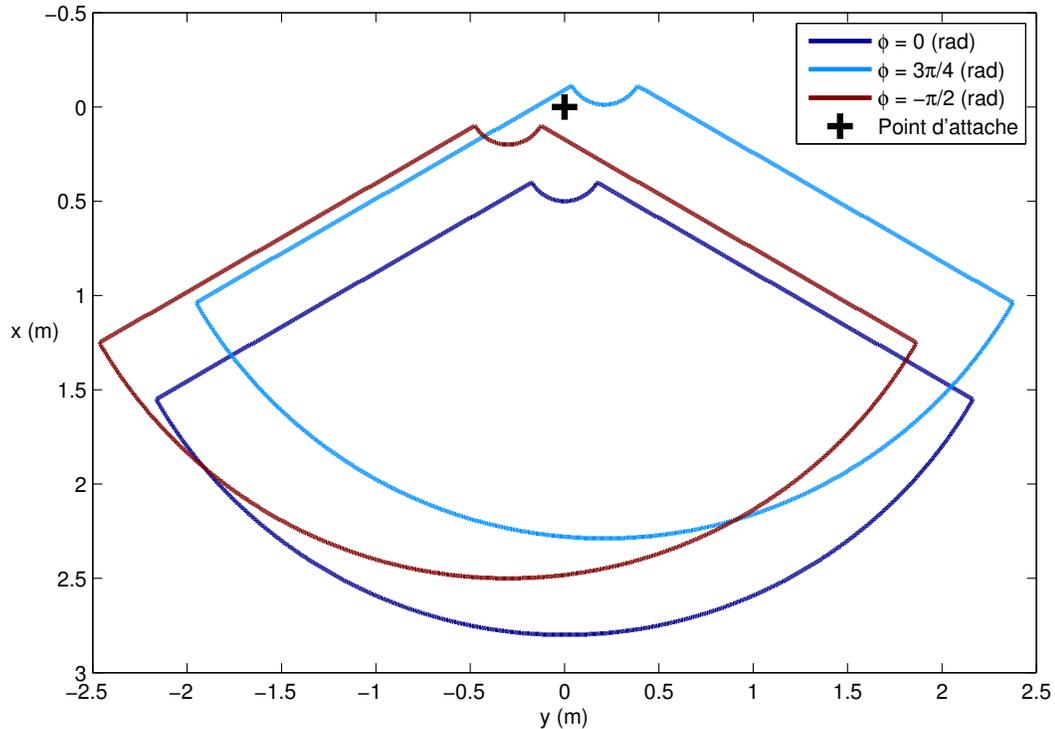


FIG. 1.2 – Espace de travail pour un angle de câble  $\theta_1$  inférieur à  $|\pi/3|$  rad et une longueur de câble  $\rho$  entre 0,2 m et 2,5 m.

### 1.4.1 Formulation lagrangienne

D'abord, on définit la fonction de Lagrange  $\mathcal{L}$  selon :

$$\mathcal{L} = T - V \quad (1.19)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique et  $V$  l'énergie potentielle, on obtient les équations de Lagrange définies par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\eta} \quad (1.20)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées articulaires et  $\boldsymbol{\eta}$  est le vecteur des forces non-conservatrices associées aux articulations.

Or, pour un mécanisme quelconque, ces équations peuvent être réécrites selon :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\eta} \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice d'inertie généralisée du mécanisme définie par :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}. \quad (1.22)$$

## 1.4.2 Modèle dynamique

Dans la formulation lagrangienne décrite ci-haut, l'énergie cinétique du mécanisme réfère à la somme de l'énergie cinétique de chacun des corps :

$$T = \sum T_i \quad (1.23)$$

où  $T_i$  est l'énergie cinétique du corps  $i$  définie comme :

$$T_i = \frac{1}{2}m_i \dot{\mathbf{c}}_i^T \dot{\mathbf{c}}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T [\mathbf{I}]_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (1.24)$$

où  $\dot{\mathbf{c}}_i$  et  $\boldsymbol{\omega}_i$  représentent respectivement les vecteurs de vitesse du centre de masse et de vitesse angulaire du corps  $i$ ,  $m_i$  est sa masse et  $[\mathbf{I}]_i$  est la matrice d'inertie par rapport à son centre de masse, soit :

$$[\mathbf{I}]_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_i. \quad (1.25)$$

En dérivant directement la position du centre de masse de chaque corps exprimée dans le repère fixe, on obtient leur vitesse selon :

$$\dot{\mathbf{c}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \cos \theta_1 - (\rho + d_1) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{\rho} \sin \theta_1 + (\rho + d_1) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \cos \theta_1 - \rho \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - d_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{\rho} \sin \theta_1 + \rho \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + d_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

où  $d_i$  est la position du centre de masse du corps  $i$  dans le repère local (voir figure 1.1).

Quant à elles, les vitesses angulaires sont :

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix}^T. \quad (1.29)$$

L'énergie cinétique du mécanisme est donc :

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_1 \left( \dot{\rho}^2 + (\rho + d_1)^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2 \left( \left( \dot{\rho} - d_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \right)^2 + \left( \rho \dot{\theta}_1 + d_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \right)^2 \right) \\ & + \frac{1}{2}I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  correspondent respectivement à  $(I_{zz})_1$  et  $(I_{zz})_2$ . Cette notation sera d'ailleurs conservée dans les développements futurs afin d'alléger le texte.

À partir de l'équation (1.22), la matrice d'inertie généralisée  $\mathbf{M}$  est construite :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \left[ I_1 + I_2 + m_1 (\rho + d_1)^2 + m_2 (\rho^2 + d_2^2 + 2\rho d_2 \cos \theta_2) \right] & -m_2 d_2 \sin \theta_2 & \left[ I_2 + m_2 (d_2^2 + \rho d_2 \cos \theta_2) \right] \\ -m_2 d_2 \sin \theta_2 & m_1 + m_2 & -m_2 d_2 \sin \theta_2 \\ \left[ I_2 + m_2 (d_2^2 + \rho d_2 \cos \theta_2) \right] & -m_2 d_2 \sin \theta_2 & I_2 + m_2 d_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

et la dérivée de cette dernière par rapport au temps est :

$$\dot{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \left[ 2m_1 (\rho + d_1) \dot{\rho} + 2m_2 \rho \dot{\rho} + 2m_2 d_2 (\dot{\rho} \cos \theta_2 - \rho \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \right] & -m_2 d_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & m_2 d_2 (\dot{\rho} \cos \theta_2 - \rho \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & 0 & -m_2 d_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ m_2 d_2 (\dot{\rho} \cos \theta_2 - \rho \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) & -m_2 d_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Le terme suivant de l'équation (1.21) est ensuite obtenu à l'aide de la relation :

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1(\rho + d_1)\dot{\theta}_1^2 + m_2(\rho\dot{\theta}_1^2 + d_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2) \\ m_2d_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(\dot{\rho}\cos\theta_2 + \rho\dot{\theta}_1\sin\theta_2) \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Puis, on obtient l'énergie potentielle du mécanisme selon :

$$V = V_1 + V_2 \quad (1.35)$$

$$V = -(m_1\mathbf{g}^T \mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{g}^T \mathbf{c}_2) \quad (1.36)$$

où  $\mathbf{g}$  est le vecteur d'accélération gravitationnelle :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (1.37)$$

Celle-ci se résume donc à :

$$V = -m_1g(\rho + d_1)\cos\theta_1 - m_2g(\rho\cos\theta_1 + d_2\cos(\theta_1 + \theta_2)) \quad (1.38)$$

et le dernier terme de gauche de l'équation (1.21) est :

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m_1g(\rho + d_1)\sin\theta_1 + m_2g(\rho\sin\theta_1 + d_2\sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ -(m_1 + m_2)g\cos\theta_1 \\ m_2d_2g\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Quant à lui, le vecteur des efforts articulaires est :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & -F & \tau \end{bmatrix}^T \quad (1.40)$$

où  $F$  est la tension dans le câble et  $\tau$  représente le couple articulaire à l'effecteur. Le premier terme de ce vecteur est évidemment nul puisque l'angle du câble  $\theta_1$  n'est pas actionné.

Enfin, en combinant les différents termes obtenus ci-haut, on obtient les équations différentielles régissant le comportement du mécanisme :

$$\begin{aligned}
& \left( I_1 + I_2 + m_1 (\rho + d_1)^2 + m_2 (\rho^2 + d_2^2 + 2\rho d_2 \cos \theta_2) \right) \ddot{\theta}_1 \\
& \quad - m_2 d_2 \sin \theta_2 \ddot{\rho} + \left( I_2 + m_2 (d_2^2 + \rho d_2 \cos \theta_2) \right) \ddot{\theta}_2 \\
& - m_2 \rho \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + 2 (m_1 (\rho + d_1) + m_2 (\rho + d_2 \cos \theta_2)) \dot{\rho} \dot{\theta}_1 \\
& \quad + m_1 g (\rho + d_1) \sin \theta_1 + m_2 g (\rho \sin \theta_1 + d_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)) = 0 \quad (1.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_2 d_2 \sin \theta_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - (m_1 + m_2) \ddot{\rho} + (m_1 (\rho + d_1) + m_2 \rho) \dot{\theta}_1^2 \\
& \quad + m_2 d_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (m_1 + m_2) g \cos \theta_1 = F \quad (1.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( I_2 + m_2 (d_2^2 + \rho d_2 \cos \theta_2) \right) \ddot{\theta}_1 - m_2 d_2 \sin \theta_2 \ddot{\rho} + \left( m_2 d_2^2 + I_2 \right) \ddot{\theta}_2 \\
& \quad + 2 m_2 d_2 \dot{\rho} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 d_2 \rho \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 d_2 g \sin (\theta_1 + \theta_2) = \tau. \quad (1.43)
\end{aligned}$$

De ces trois équations décrivant le mouvement du mécanisme, la première gouverne le système, puisqu'elle définit le comportement de la variable libre  $\theta_1$  à partir de celui des autres. De leur côté, les deux dernières équations permettent de définir les efforts articulaires nécessaires au mouvement. Elles seront principalement utilisées pour vérifier qu'une tension positive est toujours appliquée et que les limites en couple aux articulations sont respectées.

## 1.5 Validation des modèles cinématique et dynamique

Afin de valider les équations cinématiques et dynamiques développées dans les sections précédentes, un modèle du mécanisme a été réalisé à l'aide du logiciel ADAMS<sup>1</sup>. Puisque ce logiciel opère numériquement, il est impossible d'obtenir directement les équations du modèle à partir de celui-ci. Toutefois, pour des systèmes définis à l'aide de paramètres numériques, il est possible de réaliser des simulations du mouvement. La validation des modèles analytiques a donc été réalisée en comparant les résultats

<sup>1</sup>Le site web de MSC ADAMS est <http://www.mscsoftware.com>

issus des simulations numériques à ceux issus des équations développées ci-haut pour les paramètres du mécanisme présentés au tableau 1.1.

Puisque les résultats étaient identiques, les modèles cinématiques et dynamiques ont été considérés exacts et ces derniers seront donc conservés pour la suite de ce mémoire. Le détail de la validation des modèles est disponible à l'annexe A.

TAB. 1.1 – Paramètres numériques considérés pour la validation des modèles cinématique et dynamique.

Description		$i = 1$	$i = 2$
Masse	$m_i$ (kg)	1,200	0,500
Inertie	$I_i$ (kg·m <sup>2</sup> )	0,005	0,004
Position du centre de masse	$d_i$ (m)	0,070	0,050
Longueur de l'effecteur	$L$ (m)	0,300	

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a débuté par un bref exposé sur la notation et une présentation du mécanisme. Une analyse cinématique a ensuite été réalisée. Les degrés de liberté et de redondance ainsi que les solutions aux problèmes géométriques ont été obtenus. Les équations de vitesse et la matrice jacobienne ont ensuite été établies. Puis, les notions de singularité et d'espace de travail du mécanisme ont été abordées afin de compléter l'analyse cinématique.

Une analyse dynamique basée sur la mécanique lagrangienne a ensuite permis d'établir les trois équations différentielles régissant le comportement du mécanisme. Puisque ces modèles sont à la base des développements présentés dans les prochains chapitres, il était primordial d'en vérifier l'exactitude. Ceci a été réalisé en comparant les résultats issus des modèles analytiques à ceux provenant de simulations numériques.

# Chapitre 2

## Planification de trajectoires globales

La planification de trajectoires globales consiste à prévoir le comportement du mécanisme pour l'ensemble de la trajectoire, c'est-à-dire, du point de départ jusqu'à l'atteinte des objectifs. Ce chapitre débute donc par une description des objectifs et de la stratégie de planification utilisée. Un objectif de validation permettant d'évaluer les performances théoriques de chaque trajectoire est ensuite présenté. Puis, différents types de trajectoires sont étudiés et évalués à l'aide de ce dernier. Enfin, la construction d'un robot virtuel permettant une caractérisation plus réaliste des performances lorsque implanté dans un contrôleur termine ce chapitre.

## 2.1 Objectifs

Tel que mentionné antérieurement, l'objectif principal est de pouvoir effectuer la manutention et manipulation d'objets, c'est-à-dire, de tout simplement les déplacer d'un point à un autre. En d'autres mots, l'objet de la planification de trajectoire est, à partir de conditions initiales au repos  $[x_i, y_i, \phi_i]^T$ , d'amener le mécanisme à une configuration finale  $[x_f, y_f, \phi_f]^T$ . Ces objectifs cartésiens peuvent alors être traduits en coordonnées articulaires à l'aide de la solution au problème géométrique inverse (PGI) décrite à l'équation (1.13).

Les objectifs secondaires sont de minimiser les vitesses au point d'arrivée afin de permettre des atterrissages doux et de limiter les efforts nécessaires (couple et tension) pour atteindre la cible. De plus, la tension dans le câble devra toujours être positive due à l'unilatéralité des efforts transmis par ce dernier.

## 2.2 Stratégie de planification

D'abord, il est nécessaire de préciser que, comme pour la plupart des mécanismes, ce sont des trajectoires qui seront prescrites pour les articulations actionnées. En d'autres mots, les forces et couples articulaires ne sont pas imposés directement mais plutôt définis à l'aide d'un contrôleur comme, par exemple, un régulateur proportionnel-intégral-dérivatif (PID).

On utilisera donc ces trajectoires pour prédire le comportement de l'articulation libre. En effet, bien qu'il n'y ait aucune façon connue de définir analytiquement la trajectoire de l'articulation libre à partir de celle des articulations actionnées, il est possible de déterminer celle-ci en intégrant les équations dynamiques. Ainsi, pour des conditions initiales données, le comportement de l'angle du câble  $\theta_1(t)$  peut être prédit à partir du mouvement des liaisons actionnées  $\rho(t)$  et  $\theta_2(t)$  en intégrant l'équation (1.41). Comme l'objectif est facilement atteignable pour les liaisons actionnées, l'objet de la planification de trajectoire devient donc de choisir la trajectoire entre les conditions initiales et finales de ces derniers qui permet d'obtenir la trajectoire désirée pour la liaison libre.

Cependant, étant donné la complexité des équations dynamiques, il est très difficile d'établir la réaction à long terme de l'articulation libre en fonction de la trajectoire instantanée des articulations actionnées. En d'autres mots, à un instant donné, il est pratiquement impossible de choisir adéquatement le mouvement des liaisons actionnées qui conduira au comportement désiré de la liaison libre. Par conséquent, les méthodes de planification de trajectoire habituelles où les objectifs sont redéfinis à chaque pas de temps ne sont pas envisageables. Une approche différente a donc été privilégiée.

Ainsi, tout au long de ce mémoire, une méthode similaire à celle présentée par Tortopidis et Papadopoulos [29] pour les manipulateurs spatiaux sous-actionnés sera utilisée. Pour chacune des articulations actionnées, une trajectoire définie selon  $p + q$  paramètres sera donc utilisée conjointement à  $p$  conditions frontières incluant ici les positions, vitesses et accélérations initiales ainsi que finales. Pour chaque trajectoire, il reste donc  $q$  paramètres arbitraires et indépendants des conditions frontières pouvant être utilisés à d'autres fins. Ici, ceux-ci serviront à influencer le comportement du joint libre.

Par définition, l'angle de l'effecteur  $\theta_2(t)$  ainsi que les vitesses et accélérations des deux articulations actionnées seront toujours considérées nulles au départ car le mécanisme est considéré au repos. Quant à elles, les vitesses finales sont posées nulles pour permettre des atterrissages doux. Les  $p$  conditions frontières à remplir sont donc :

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \rho_i & \rho(t_f) &= \rho_f & \theta_2(0) &= 0 & \theta_2(t_f) &= \theta_{2f} \\ \dot{\rho}(0) &= 0 & \dot{\rho}(t_f) &= 0 & \dot{\theta}_2(0) &= 0 & \dot{\theta}_2(t_f) &= 0 \\ \ddot{\rho}(0) &= 0 & & & \ddot{\theta}_2(0) &= 0 & & \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $\rho_i$  indique la longueur initiale du câble alors que  $\rho_f$  et  $\theta_{2f}$  sont les positions articulaires finales obtenues de l'objectif  $[x_f, y_f, \phi_f]^T$  à l'aide de la solution au problème géométrique inverse (PGI) présentée à l'équation (1.13).

Tel que mentionné ci-haut, les  $q$  paramètres restants sont utilisés pour définir le comportement de l'angle du câble  $\theta_1(t)$ . Ainsi, c'est la manière dont les articulations actionnées atteignent leurs conditions finales qui établit la trajectoire de l'articulation libre. En optimisant ces  $q$  paramètres, on peut donc obtenir la trajectoire voulue pour l'angle du câble  $\theta_1(t)$ . Or, comme le type de trajectoire choisie pour les liaisons actionnées affectera évidemment la qualité des résultats pour la liaison libre, une étude de différents types de trajectoires sera présentée aux sections suivantes.

Enfin, puisque l'optimisation implique un temps de calcul relativement important, l'approche privilégiée sera d'abord de réaliser l'optimisation hors-ligne afin de prédéfinir la trajectoire des articulations actionnées et ensuite entrer cette dernière en consigne dans le contrôleur du robot.

## 2.3 Évaluation théorique des performances

Afin de comparer les résultats associés aux planifications, les performances de ces dernières ont été évaluées à l'aide d'un objectif général représentant bien le problème. En réalité, de nombreux objectifs ont été testés, mais afin d'alléger ce mémoire, un seul est présenté ici, les résultats étant similaires dans les autres cas.

Pour la validation, le modèle du robot a d'une part été supposé exact, c'est-à-dire, qu'il est représenté par les équations dynamiques (1.41), (1.42) et (1.43). D'autre part, les paramètres du robot considérés correspondent à ceux présentés au tableau 1.1 alors que  $q = 5$  coefficients libres ont été utilisés pour chacune des articulations actionnées.

La minimisation de la fonction objectif a été réalisée à l'aide de l'algorithme génétique de MATLAB® (*ga*) combiné à la recherche directe (*fminsearch*). Le nombre de générations (200) et le nombre d'individus (12) ont été maintenus élevés afin de réduire la variance entre les différents essais. La recherche directe n'est utilisée ici qu'afin de raffiner la solution obtenue de l'algorithme génétique.

### 2.3.1 Objectif de validation

L'objectif considéré consiste à atteindre un point hors d'équilibre en posant l'effecteur à l'horizontale à partir d'un point initial à l'équilibre. Le câble doit aussi être allongé pour atteindre la position finale et les vitesses d'arrivée sont nulles par définition. Celui-ci se résume aux conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_i & y_i & \phi_i \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} 1,10 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}^T, & \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{\phi}_i \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} x_f & y_f & \phi_f \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} 0,88 & 0,78 & 1,57 \end{bmatrix}^T, & \begin{bmatrix} \dot{x}_f & \dot{y}_f & \dot{\phi}_f \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En transformant ces points à l'aide de la solution au problème géométrique inverse (PGI) présentée à l'équation (1.13), on obtient les conditions frontières suivantes pour les coordonnées articulaires :

$$\begin{aligned} \left[ \theta_{1i} \quad \rho_i \quad \theta_{2i} \right]^T &= \left[ 0,00 \quad 0,80 \quad 0,00 \right]^T, & \left[ \dot{\theta}_{1i} \quad \dot{\rho}_i \quad \dot{\theta}_{2i} \right]^T &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \\ \left[ \theta_{1f} \quad \rho_f \quad \theta_{2f} \right]^T &= \left[ 0,50 \quad 1,00 \quad 1,07 \right]^T, & \left[ \dot{\theta}_{1f} \quad \dot{\rho}_f \quad \dot{\theta}_{2f} \right]^T &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Toutefois, il est aussi primordial de maintenir une tension minimale dans le câble  $F_{min}$  pour éviter la flexion, ce qui est à la base même du modèle dynamique utilisé. Il est aussi nécessaire de respecter la tension maximale permise par le câble  $F_{max}$ , le couple maximal à la base de l'effecteur  $\tau_{max}$ , ainsi que les longueurs de câble minimale  $\rho_{min}$  et maximale  $\rho_{max}$ . Par conséquent, les contraintes suivantes ont aussi été imposées :

$$\begin{aligned} F_{min} &= 0 \text{ N} & \rho_{min} &= 0,2 \text{ m} \\ F_{max} &= 40 \text{ N} & \rho_{max} &= 1,7 \text{ m} \\ \tau_{max} &= 1,5 \text{ N}\cdot\text{m}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Enfin, un temps final de  $t_f = 40$  s a été choisi expérimentalement.

Cet objectif de validation permet donc d'établir une base fixe pour l'évaluation des performances de la planification, qui sera présentée aux prochaines sections.

## 2.4 Trajectoires polynomiales

### 2.4.1 Description

L'utilisation de polynômes pour définir la trajectoire des articulations actionnées s'est montré un choix simple et évident car les conditions au départ et à l'arrivée peuvent être définies directement à travers les coefficients du polynôme. Cette méthode est d'ailleurs très similaire à celle présentée par Angeles et al. [2] pour la planification de trajectoires de type *Pick-and-Place* des manipulateurs à actionnement conventionnel. Ici,  $q$  coefficients supplémentaires sont simplement ajoutés et ensuite optimisés. En effet, en choisissant un polynôme dont le degré est supérieur au nombre de coefficients

nécessaires pour déterminer les conditions frontières des articulations actionnées, les coefficients supplémentaires peuvent être utilisés pour définir l'allure des trajectoires et, par conséquent, le comportement de l'articulation libre.

Cependant, contrairement aux résultats de Angeles et al. [2], le temps final devra ici être fixé à priori, étant donné la présence de termes relatifs à l'énergie potentielle dans l'équation définissant le comportement de l'articulation libre (1.41). Ceci empêche d'effectuer une mise à l'échelle du temps, ce qui complique légèrement le problème.

Les trajectoires des articulations actionnées  $\rho(t)$  et  $\theta_2(t)$  sont ainsi définis par des polynômes de degré  $n = p + q - 1$  selon :

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^n A_i \left( \frac{t}{t_f} \right)^i \quad (2.5)$$

$$\theta_2(t) = \sum_{i=0}^n B_i \left( \frac{t}{t_f} \right)^i \quad (2.6)$$

pour  $0 \leq t \leq t_f$  où  $t_f$  est le temps final.

En dérivant ces équations par rapport au temps, on obtient ensuite les vitesses articulaires selon :

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{t_f} \sum_{i=1}^n i A_i \left( \frac{t}{t_f} \right)^{i-1} \quad (2.7)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \frac{1}{t_f} \sum_{i=1}^n i B_i \left( \frac{t}{t_f} \right)^{i-1} \quad (2.8)$$

et les accélérations articulaires selon :

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{1}{t_f^2} \sum_{i=2}^n i(i-1) A_i \left( \frac{t}{t_f} \right)^{i-2} \quad (2.9)$$

$$\ddot{\theta}_2(t) = \frac{1}{t_f^2} \sum_{i=2}^n i(i-1) B_i \left( \frac{t}{t_f} \right)^{i-2} . \quad (2.10)$$

Puis, on obtient les  $p = 5$  premiers coefficients pour chaque articulation en introduisant les conditions frontières décrites à l'équation (2.1) dans les équations de position, vitesse et accélération présentées ci-haut au temps  $t = 0$  et  $t = t_f$ . Ces derniers sont :

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i \\ 0 \\ 0 \\ 4(\rho_f - \rho_i) + \sum_{i=5}^n (i-4) A_i \\ -3(\rho_f - \rho_i) - \sum_{i=5}^n (i-3) A_i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\theta_{2f} + \sum_{i=5}^n (i-4) B_i \\ -3\theta_{2f} - \sum_{i=5}^n (i-3) B_i \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

## 2.4.2 Problème d'optimisation

Comme pour les articulations actionnées, les conditions finales désirées pour l'articulation libre sont établies à partir de la cible  $[x_f, y_f, \phi_f]^T$  en utilisant la solution du problème géométrique inverse (PGI) présentée à l'équation (1.13). On a donc comme objectif :

$$\begin{aligned} \theta_1(t_f) &\Rightarrow \theta_{1f} \\ \dot{\theta}_1(t_f) &\Rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ainsi, tel que mentionné précédemment, en incluant ces objectifs dans une fonction de minimisation, il est possible d'optimiser les  $q$  coefficients libres en conséquence. Cependant, il est aussi primordial de satisfaire les contraintes présentées à l'équation 2.4. Ainsi, pour chacune d'elles, une fonction de pénalité basée sur une combinaison d'un échelon et d'une rampe de la forme suivante a été définie :

$$P_\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } \max(\psi(t)) \leq \psi_{max} \\ K_1 + K_2 (\max(\psi(t)) - \psi_{max}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\psi(t)$  est la variable associée à une contrainte  $\psi_{max}$  (ou  $\psi_{min}$ ) à satisfaire,  $K_{\psi 1}$  et  $K_{\psi 2}$  sont des constantes établies expérimentalement selon chacune des contraintes.

Le problème d'optimisation se résume donc à :

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \Delta \quad (2.15)$$

où

$$\Delta = K_p (\theta_1(t_f) - \theta_{1f})^2 + K_v (\dot{\theta}_1(t_f))^2 + \sum_{j=1}^c P_j \quad (2.16)$$

$$\mathbf{a} = [A_5, \dots, A_n]^T \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b} = [B_5, \dots, B_n]^T \quad (2.18)$$

où  $K_p$ ,  $K_v$  sont des constantes établies expérimentalement et  $c = 5$  est le nombre de contraintes.

Enfin, dans les fonctions de pénalité, la longueur de câble est obtenue directement de sa trajectoire  $\rho(t)$  alors que la tension dans le câble  $F(t)$  et le couple à la base de l'effecteur  $\tau(t)$  sont obtenus des équations dynamiques (1.42) et (1.43).

### 2.4.3 Performances théoriques

Pour l'objectif de validation défini à la section 2.3.1, des trajectoires polynomiales ont été obtenues pour les articulations actionnées en utilisant la planification décrite ci-haut. Pour ces trajectoires, les évolutions des variables articulaires en fonction du temps sont respectivement tracées aux figures 2.1 et 2.3 en n'incluant pas et en incluant les pénalités. Les efforts articulaires respectifs sont présentés aux figures 2.2 et 2.4. Enfin, l'ensemble des résultats numériques est disponible à l'annexe B.

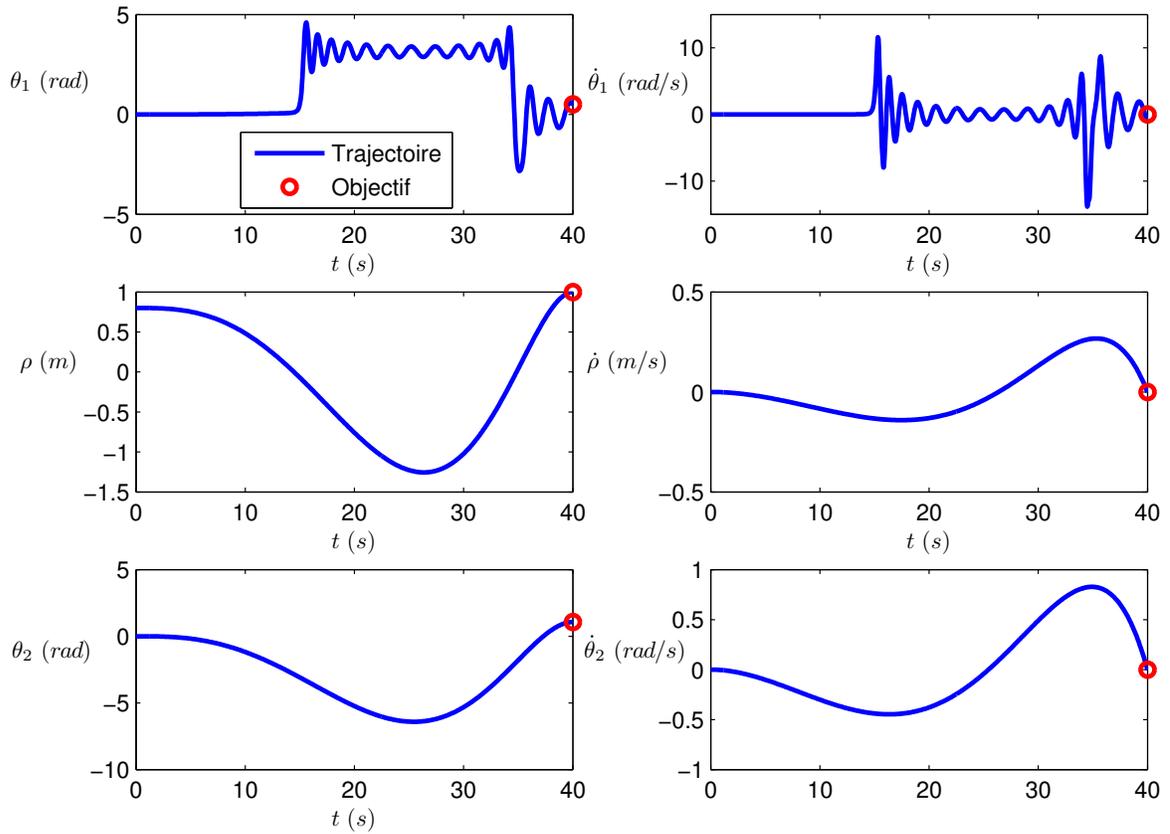


FIG. 2.1 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales sans pénalité.

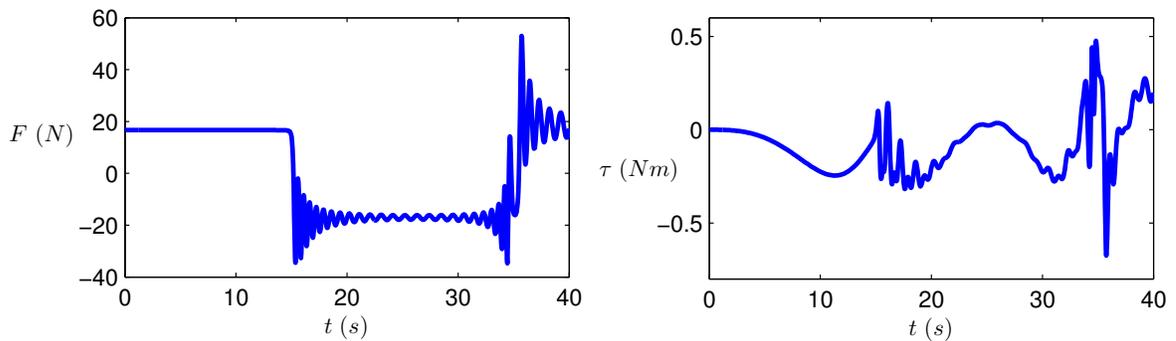


FIG. 2.2 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales sans pénalité.

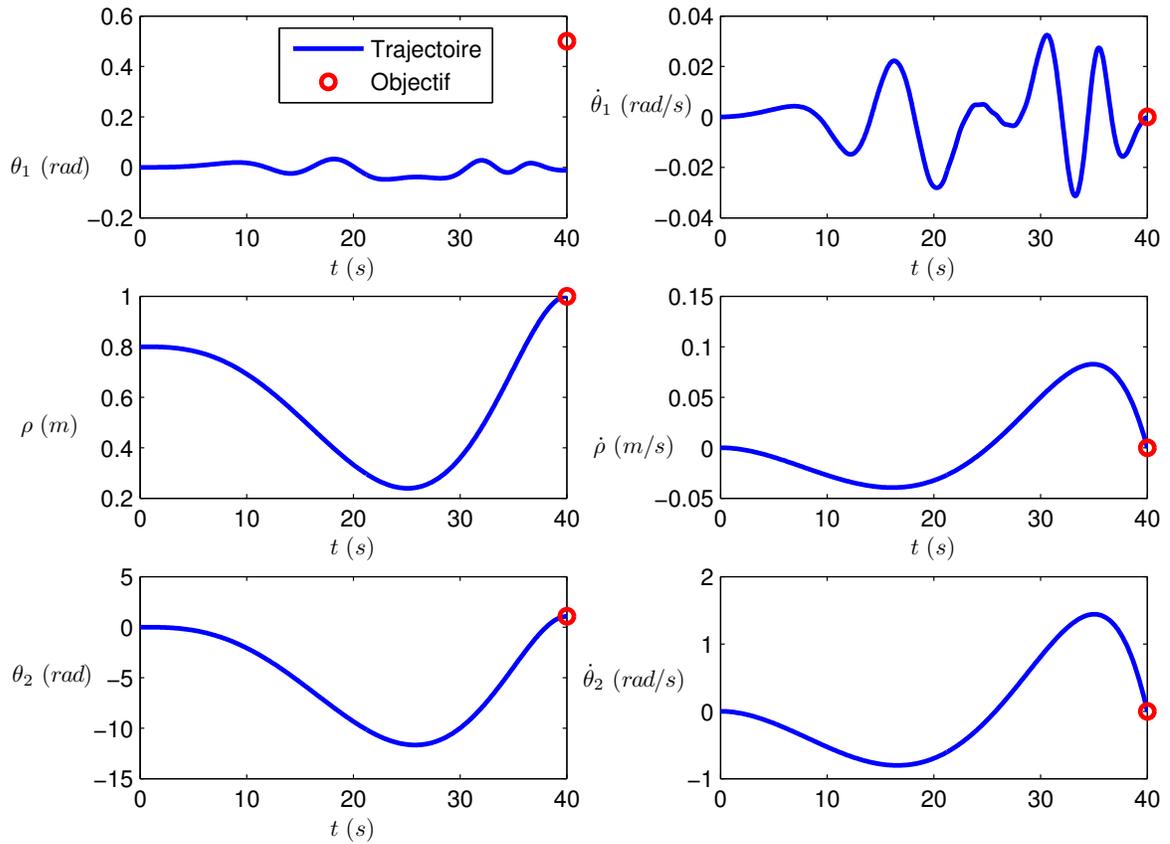


FIG. 2.3 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales avec pénalités.

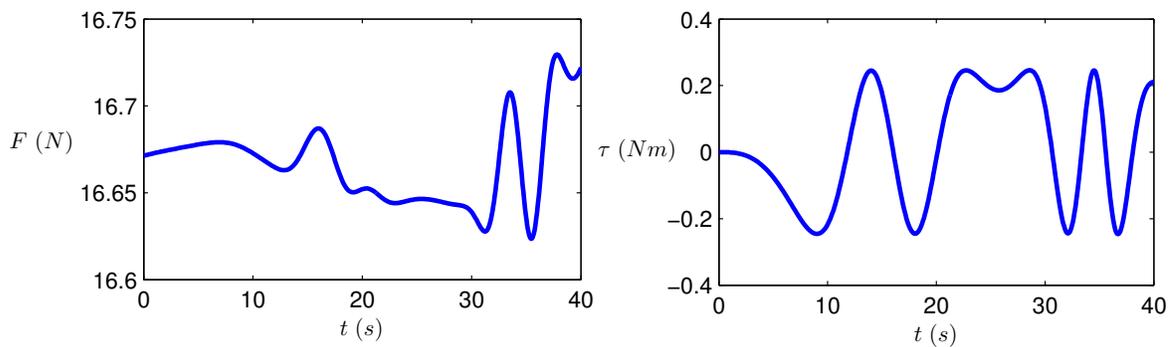


FIG. 2.4 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales avec pénalités.

En observant ces figures, on note que, bien qu'il soit possible de résoudre le problème en n'appliquant pas les pénalités, il est clair que les trajectoires ne sont pas physiquement réalisables. Entre autres, la longueur du câble devient négative tout comme la tension dans ce dernier, ce qui est évidemment impossible, d'où la nécessité des pénalités. Or, en appliquant ces dernières, la résolution devient presque impossible car la forme de la trajectoire proposée est mal adaptée au problème. En effet, on note que l'angle de l'effecteur  $\theta_2(t)$  augmente de façon importante dans une direction (quelques tours) pour ensuite revenir à la configuration finale.

En respectant les contraintes, il devient donc difficile de produire une excitation pour l'angle du câble  $\theta_1(t)$  car, plus la variation de position l'effecteur devient grande, plus les forces en jeu deviennent importantes puisqu'il faut renverser le sens du mouvement de ce dernier afin d'atteindre la configuration finale.

Cependant, en examinant la solution au problème géométrique direct (PGD) présentée à l'équation (1.3), on note que le nombre de tours effectués par l'effecteur avant d'atteindre sa position finale n'affecte pas la position cartésienne finale. La position désirée pour l'angle de l'effecteur peut donc être modifiée, ce qui sera l'objet de la section suivante.

## 2.5 Trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées

### 2.5.1 Description

Tel que mentionné ci-haut, il est possible que l'effecteur réalise plusieurs tours sur lui-même afin d'atteindre la cible. Appliquer une condition finale rigide sur l'angle final à l'effecteur n'est donc pas la solution optimale. La condition finale sur l'angle de l'effecteur  $\theta_{2f}$  se doit en fait d'être indépendante du nombre de tours complétés. En d'autres mots, une valeur finale de  $2\pi r + \theta_{2f}$  où  $r$  est un entier doit plutôt être considérée.

Ainsi, les mêmes fonctions sont toujours à la base de la planification, soit :

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^n A_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^i \quad (2.19)$$

$$\theta_2(t) = \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^i. \quad (2.20)$$

Toutefois, la condition finale  $\theta_2(t_f) = \theta_{2f}$  a été retirée des coefficients du polynôme et insérée dans la fonction à minimiser puisque imposer une condition variable à travers les coefficients du polynôme s'est montré très peu efficace pour la résolution numérique.

On a donc  $p = 4$  coefficients associés aux conditions frontières pour l'angle à l'effecteur  $\theta_2(t)$  et  $p = 5$  coefficients pour la longueur du câble  $\rho(t)$ . Comme précédemment, ces coefficients sont obtenus en imposant les conditions frontières de l'équation (2.1) dans les équations de position, vitesse et accélération aux temps  $t = 0$  et  $t = t_f$ . Les équations de vitesse et d'accélération sont d'ailleurs identiques à celles présentées aux équations (2.8) et (2.10) et les coefficients suivants sont obtenus :

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i \\ 0 \\ 0 \\ 4(\rho_f - \rho_i) + \sum_{i=5}^n (i-4) A_i \\ -3(\rho_f - \rho_i) - \sum_{i=5}^n (i-3) A_i \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \sum_{i=4}^n i B_i \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

### 2.5.2 Problème d'optimisation

Comme le problème est resté de la même forme, les pénalités définies à la section 2.4.2 ont été maintenues alors que la condition finale sur l'angle de l'effecteur a été ajoutée au problème.

Celui-ci devient donc :

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \Delta \quad (2.23)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta = & K_p (\theta_1(t_f) - \theta_{1f})^2 + K_v (\dot{\theta}_1(t_f))^2 \\ & + K_e (\theta_2(t_f) - (2\pi r + \theta_{2f}))^2 + \sum_{j=1}^c P_j \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{a} = [A_5, \dots, A_n]^T \quad (2.25)$$

$$\mathbf{b} = [B_4, \dots, B_n]^T \quad (2.26)$$

où  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_e$  sont des constantes établies expérimentalement,  $c = 5$  est le nombre de contraintes et  $r$  est un entier minimisant  $(\theta_2(t_f) - 2\pi r)^2$ , soit le nombre de tours complets réalisés.

### 2.5.3 Performances théoriques

Pour l'objectif de validation défini à la section 2.3.1, des trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées ont été obtenues pour les articulations actionnées en utilisant la planification décrite ci-haut. Pour ces trajectoires, les évolutions des variables articulaires en fonction du temps sont respectivement tracées aux figures 2.5 et 2.7 en n'incluant pas et en incluant les pénalités. Les efforts articulaires respectifs sont présentés aux figures 2.6 et 2.8. Enfin, l'ensemble des résultats numériques est disponible à l'annexe B.

En observant ces figures, on note qu'en n'appliquant pas les pénalités, les trajectoires ne sont toujours pas physiquement réalisables car la longueur du câble et la tension dans ce dernier deviennent négatives.

Néanmoins, en ajoutant ces pénalités, les résultats sont meilleurs que précédemment puisque la réponse de l'angle du câble  $\theta_1(t)$  face à l'excitation est plus importante même si l'on applique les mêmes contraintes. Toutefois, bien que les résultats soient plus intéressants, il est toujours très difficile d'atteindre les résultats désirés en respectant les pénalités. Une approche plus près de la physique doit alors être privilégiée, ce qui sera l'objet de la prochaine section.

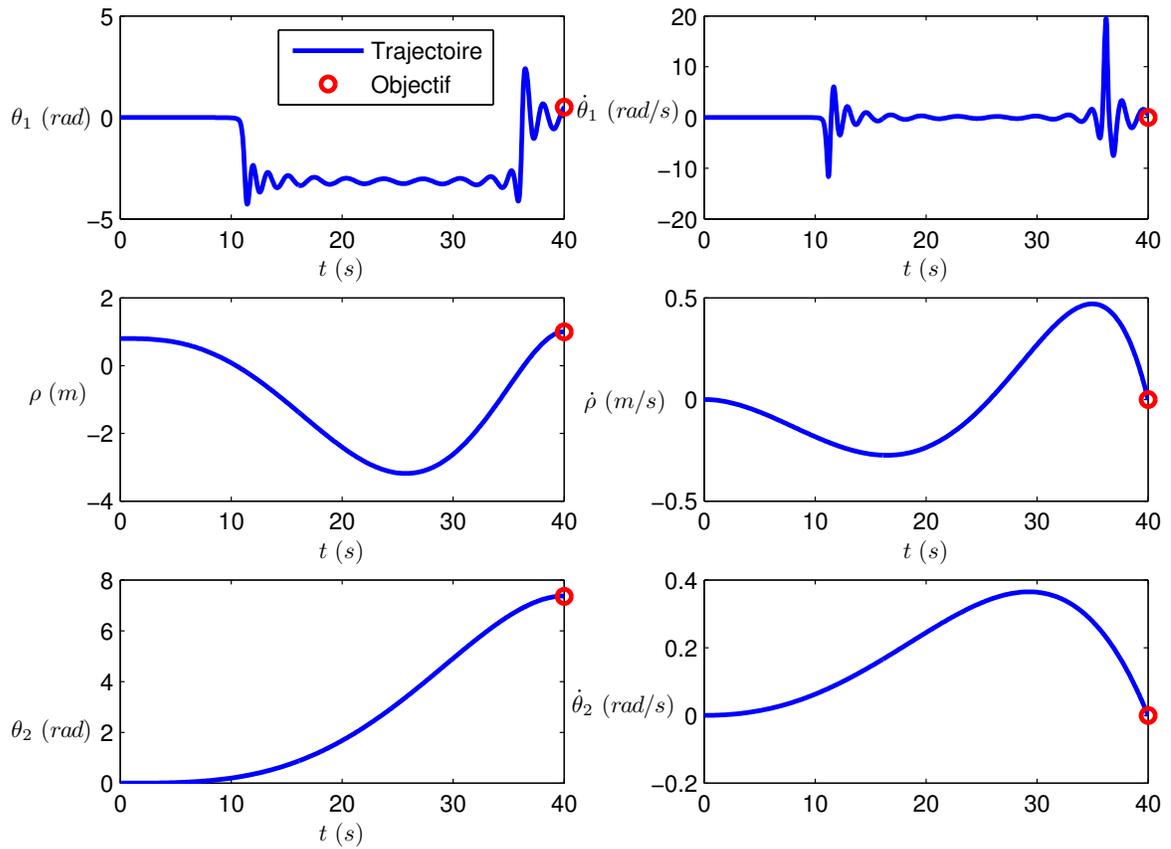


FIG. 2.5 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité.

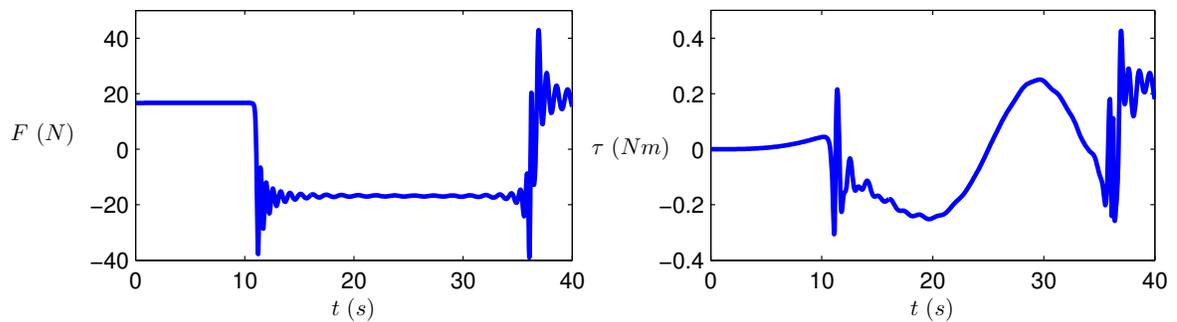


FIG. 2.6 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité.

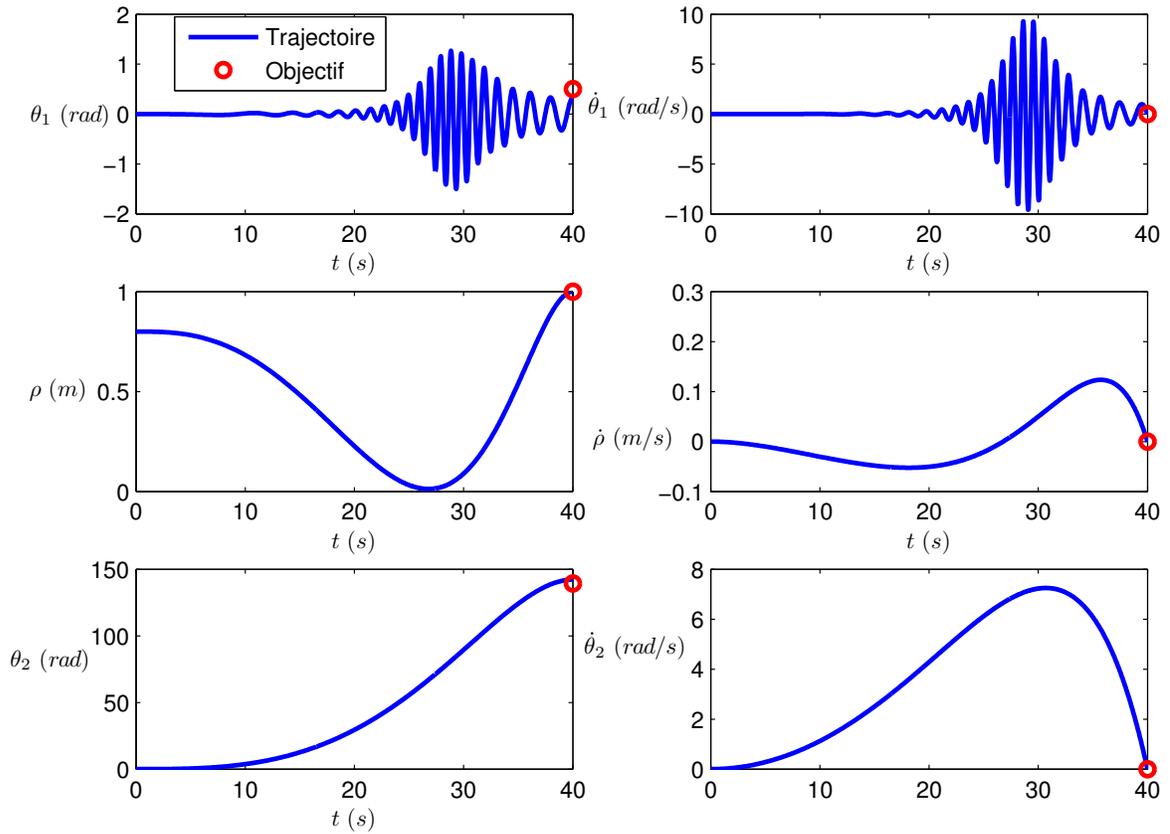


FIG. 2.7 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités.

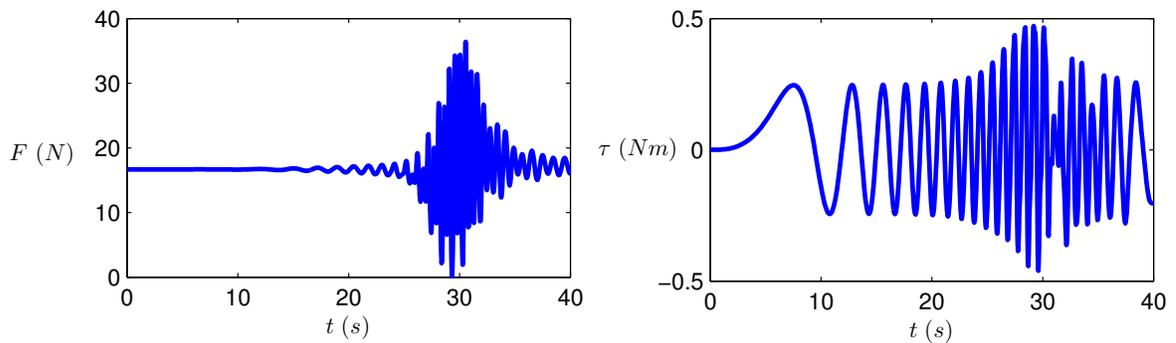


FIG. 2.8 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités.

## 2.6 Trajectoires poly-sinusoidales

### 2.6.1 Description

Bien que les trajectoires polynomiales offrent une très grande liberté dans la résolution du problème, celles-ci comportent une faiblesse majeure. En effet, les trajectoires quelconques issues des polynômes n'exploitent pas les caractéristiques intrinsèques au système. Puisqu'il s'agit d'un système dont la physique est similaire à celle d'un pendule double, il devient intéressant d'utiliser les fréquences naturelles de celui-ci ce qui permet de coordonner les mouvements du câble et de l'effecteur. Les deux corps se déplacent ainsi à l'unisson ce qui produit un mouvement plus souple et limite les efforts articulaires. Ce phénomène est appelé excitation paramétrique.

Pour définir les fréquences, le mécanisme étudié a été modélisé comme un pendule double idéal tel que présenté à la figure 2.9, c'est-à-dire, un pendule pour lequel les masses sont ponctuelles (donc sans inertie). En fait, le mécanisme se rapproche beaucoup de cette situation idéale car la masse du câble est négligeable et les inerties des corps sont très faibles comparées à leurs masses. La modélisation est donc très réaliste.

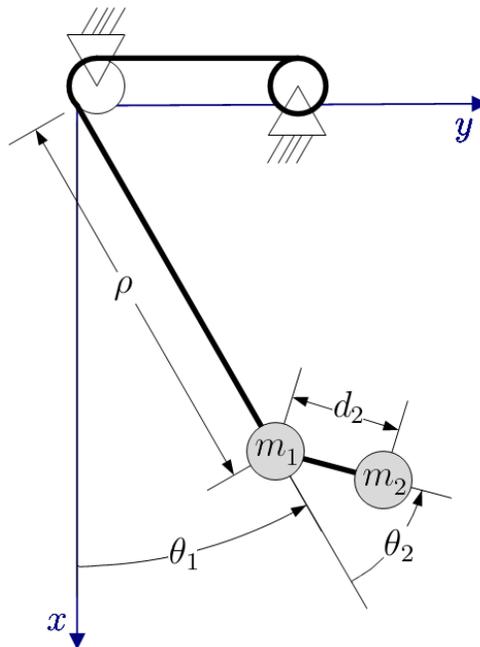


FIG. 2.9 – Modélisation du mécanisme comme un pendule double idéal.

D'autre part, le moteur de l'effecteur est considéré à une distance  $\rho$  du point d'attache (au lieu un  $\rho + d_1$ ) afin que son centre de masse se retrouve au point de pivot de l'effecteur tel un pendule double. Cette simplification n'affecte que très peu les fréquences naturelles car la dimension  $d_1$  est minime en comparaison à la longueur du câble  $\rho$ .

Ainsi, tel que défini par Blevins [4] en considérant de faibles déplacements angulaires, les fréquences naturelles d'un double pendule idéal sont :

$$\omega_{(1,2)} = \sqrt{\frac{g}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right) \mp W} \quad (2.27)$$

où

$$W = \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\rho d_2}\right)}. \quad (2.28)$$

Dans notre cas, il a été établi expérimentalement que seule la première fréquence naturelle serait utilisée car les résultats étaient nettement meilleurs pour cette dernière, ce qui permet de réduire la complexité du problème. Or, puisque la longueur du câble  $\rho(t)$  est fonction du temps, les dérivées de la fréquence naturelle doivent aussi être considérées afin d'évaluer les vitesses et accélérations présentes. La fréquence naturelle utilisée et ses dérivées sont donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right) - W} \quad (2.29)$$

$$\dot{\omega}_n = -\sqrt{\frac{g}{8}} \left( \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \dot{W}}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right) - W}} \right) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_n = & -\sqrt{\frac{g}{32}} \frac{\left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \dot{W}\right)^2}{\left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right) - W\right)^{3/2}} \\ & + \sqrt{\frac{g}{8}} \frac{\left(2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^3} - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{\ddot{\rho}}{\rho^2} - \ddot{W}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right) - W}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

où

$$W = \sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\rho d_2}\right)} \quad (2.32)$$

$$\dot{W} = \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{2}{d_2} - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)\right) \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\rho d_2}\right)}} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{1 \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{4}{d_2} - 2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)\right) \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\right)^2}{4 \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\rho d_2}\right)\right)^{3/2}} \\ & + \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{\dot{\rho}^2}{\rho^4} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right) \left(\frac{2\dot{\rho}^2}{\rho^3} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho^2}\right)\right) + \frac{\ddot{\rho}}{\rho^2 d_2} - 2 \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^3 d_2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{d_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\rho d_2}\right)}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Cette fréquence est alors utilisée dans une sinusoïde combinée à un polynôme similaire à ceux obtenus précédemment pour définir le comportement de l'effecteur  $\theta_2(t)$ . La trajectoire du câble est quant à elle maintenue identique à celle décrite antérieurement et les trajectoires des articulations actionnées sont par conséquent :

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^n A_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^i \quad (2.35)$$

$$\theta_2(t) = \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^i \sin(\omega t). \quad (2.36)$$

Puis, en dérivant ces équations, on obtient les vitesses articulaires selon :

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{t_f} \sum_{i=1}^n i A_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^{i-1} \quad (2.37)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \frac{1}{t_f} \sum_{i=1}^n i B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^{i-1} \sin(\omega t) + \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^i (\dot{\omega} t + \omega) \cos(\omega t) \quad (2.38)$$

et les accélérations articulaires sont :

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{1}{t_f^2} \sum_{i=2}^n i(i-1) A_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^{i-2} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2(t) = & \frac{1}{t_f^2} \sum_{i=2}^n i(i-1) B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^{i-2} \sin(\omega t) \\ & + \frac{2}{t_f} \sum_{i=1}^n i B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^{i-1} (\dot{\omega} t + \omega) \cos(\omega t) \\ & - \sum_{i=0}^n B_i \left(\frac{t}{t_f}\right)^i \left((\dot{\omega} t + \omega)^2 \sin(\omega t) - (\ddot{\omega} t + 2\dot{\omega}) \cos(\omega t)\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Tel que fait précédemment, on obtient les  $p = 5$  premiers coefficients définissant la trajectoire du câble  $\rho(t)$  en incluant les conditions frontières décrites à l'équation (2.1) dans les équations de position, vitesse et accélération ci-haut au temps  $t = 0$  et  $t = t_f$ . On obtient donc les coefficients suivants :

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i \\ 0 \\ 0 \\ 4(\rho_f - \rho_i) + \sum_{i=5}^n (i-4) A_i \\ -3(\rho_f - \rho_i) - \sum_{i=5}^n (i-3) A_i \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Toutefois, cette façon de faire s'est montrée inefficace pour le mouvement de l'effecteur  $\theta_2(t)$  car les caractéristiques du système ne sont plus exploitées en fin de course, puisqu'on force l'amplitude du sinus à une valeur fixe. En d'autres mots, pour que les conditions finales soient satisfaites, l'influence du polynôme devait être très importante ce qui anéantit celle de la sinusoïde.

Pour contrer ce problème, la solution retenue est de fixer le temps final  $t_f$  de façon à ce qu'il corresponde à la crête du sinus. La définition de la vitesse en fin de trajectoire est donc facilitée car la majeure partie des termes la composant sont nuls. Quant à elle, la fréquence au temps final  $\omega_f$  est toujours connue, car la longueur de câble en ce point  $\rho(t_f)$  est fixée à  $\rho_f$  par la définition des coefficients  $A_i$ . De cette façon, le temps final  $t_f$  est fixé à :

$$t_f = \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right) \pi}{\omega_f} \quad (2.42)$$

où  $s$  est un entier positif.

Ainsi, au temps final  $t_f$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sin(\omega_f t_f) &= \sin\left(\left(s + \frac{1}{2}\right) \pi\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0, 2, 4 \dots \\ -1 & \text{si } s = 1, 3, 5 \dots \end{cases} \\ \cos(\omega_f t_f) &= \cos\left(\left(s + \frac{1}{2}\right) \pi\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

De plus, à l'initialisation, soit lorsque  $t = 0$ , l'angle à l'effecteur  $\theta_2(t)$  est nul par définition car  $\sin(0) = 0$ . La première condition frontière est donc toujours satisfaite ce qui implique que seulement  $p = 4$  coefficients sont nécessaires pour satisfaire les conditions frontières, soit :

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sum_{i=4}^n (i-3)B_i \sin^2(\omega t_f) + (3 \sin(\omega t_f) + \omega t_f \cos(\omega t_f))\theta_{2f}}{\sin^2(\omega t_f)} \\ -\frac{\sum_{i=4}^n (i-2)B_i \sin^2(\omega t_f) + (2 \sin(\omega t_f) + \omega t_f \cos(\omega t_f))\theta_{2f}}{\sin^2(\omega t_f)} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

### 2.6.2 Problème d'optimisation

Contrairement à la trajectoire polynomiale avec conditions finales modifiées, la condition finale en position de l'effecteur  $\theta_2(t_f)$  n'a pas à être réajustée car, grâce à la forme du sinus, l'effecteur croise toujours la position d'équilibre  $\theta_2 = 0$  à chaque demi-période. Ainsi, contrairement aux trajectoires précédentes, les tours d'effecteurs ne s'accumulent pas d'une période à l'autre, ce qui est certainement un avantage considérant le design du prototype qui sera présenté au chapitre 4. Les pénalités initiales sont donc maintenues et le problème d'optimisation est identique à celui présenté à la section 2.4.2.

### 2.6.3 Performances théoriques

Pour l'objectif de validation défini à la section 2.3.1, des trajectoires poly-sinusoidales ont été obtenues pour les articulations actionnées en utilisant la planification décrite ci-haut. Dans ce cas, le temps final a cependant dû être légèrement modifié afin de correspondre à une crête du sinus tel que décrit ci-haut. Une valeur de  $t_f = 39,31$  s a donc été choisie. Pour ces trajectoires, les évolutions des variables articulaires en fonction du temps sont respectivement tracées aux figures 2.10 et 2.12 en n'incluant pas et en incluant les pénalités. Les efforts articulaires respectifs sont présentés aux figures 2.11 et 2.13. Enfin, l'ensemble des résultats numériques est disponible à l'annexe B.

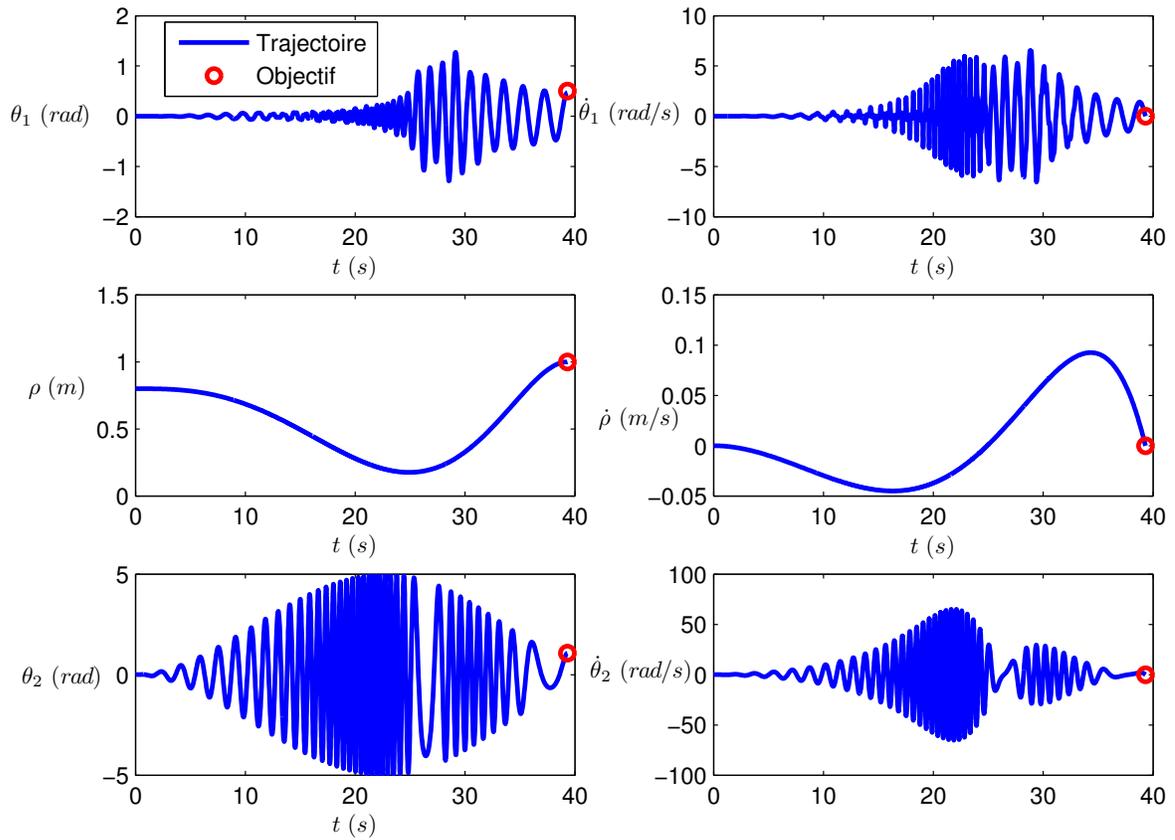


FIG. 2.10 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité.

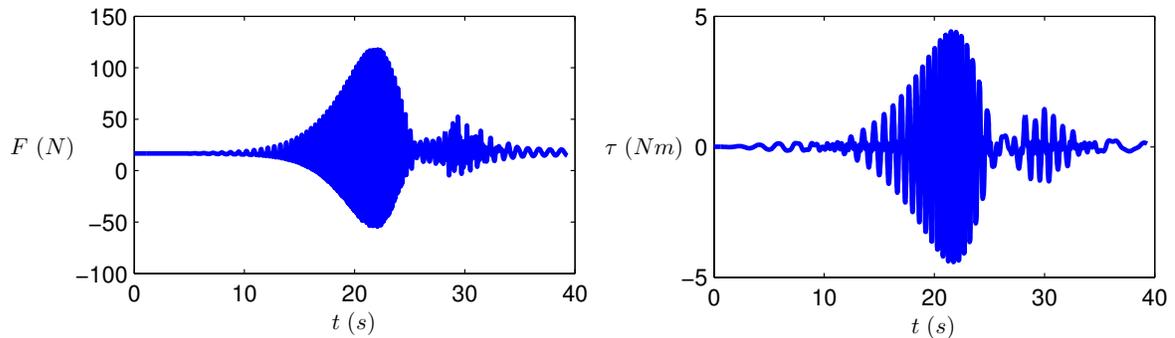


FIG. 2.11 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité.

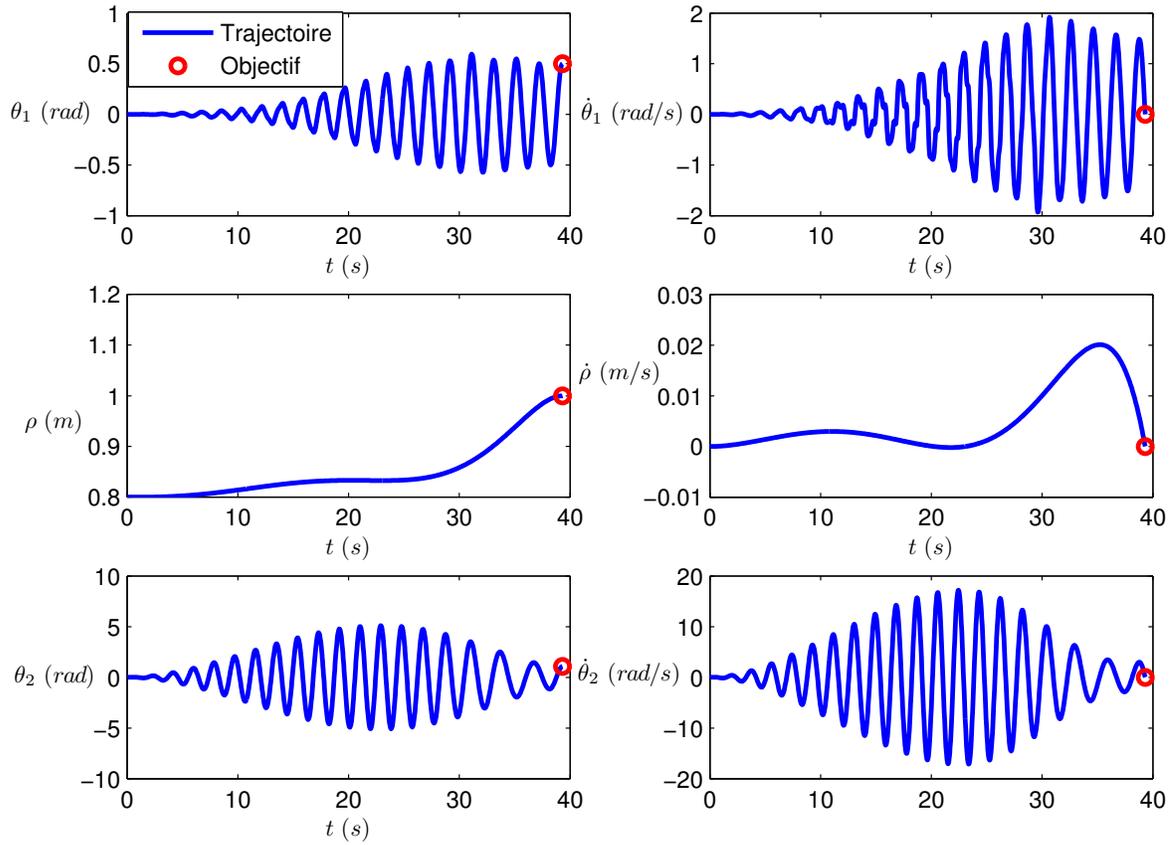


FIG. 2.12 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités.

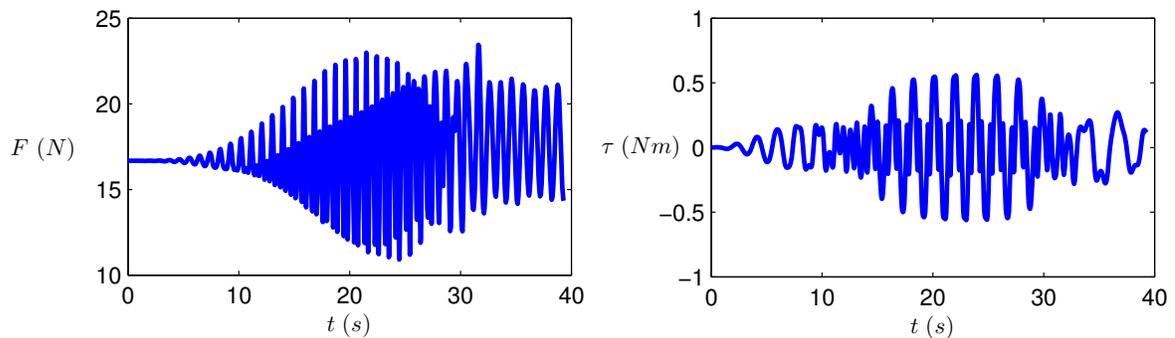


FIG. 2.13 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités.

Dans ce cas, on note que les trajectoires obtenues satisfont amplement les objectifs fixés antérieurement puisque l'on atteint la configuration finale tout en satisfaisant les contraintes imposées. De plus, l'amplitude de l'angle du câble  $\theta_1(t)$  augmente graduellement pendant la trajectoire, ce qui témoigne du bien-fondé de cette approche. En effet, contrairement aux méthodes précédentes, l'excitation est maintenue tout au long de la trajectoire et les forces en jeu sont nettement inférieures.

L'utilisation de la physique du système sous forme d'excitation paramétrique permet donc ici d'obtenir une nette amélioration des performances tout en réduisant les valeurs du couple et de la tension nécessaire.

## 2.7 Construction d'un robot virtuel

À l'aide de trajectoires poly-sinusoïdales, d'excellents résultats théoriques sont obtenus. Cependant, certains doutes planent toujours sur les performances réelles obtenues lorsque ces trajectoires seront implantées dans un contrôleur. En effet, l'absence de rétroaction sur l'articulation libre laisse entrevoir des difficultés techniques. En d'autres mots, comme l'horizon de prédiction est long, les différences entre le robot et son modèle pourraient être amplifiées ce qui réduirait grandement la qualité de la planification réalisée. De plus, avant de fabriquer un prototype, il est d'intérêt de vérifier les principes développés précédemment. Ainsi, un robot virtuel et son contrôleur ont été développés à l'aide de MATLAB®/SIMULINK afin d'examiner les performances en situation plus réaliste.

Le robot virtuel est en fait un modèle du robot bâti à l'aide des équations dynamiques (1.41), (1.42) et (1.43). En recombinaison algébrique, il a d'abord été possible d'isoler les accélérations de chacune des variables selon :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \left( \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} \right) \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\dot{\mathbf{M}}$  sont respectivement la matrice d'inertie généralisée et sa dérivée telles que définies aux équations (1.31) et (1.32),  $\boldsymbol{\eta}$  est le vecteur des efforts articulaires présenté à l'équation (1.40) alors que  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}$  et  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$  sont respectivement les dérivées des énergies

cinétique et potentielle telles que définies aux équations (1.34) et (1.39).

Puis, à partir de ces accélérations, le système est linéarisé selon le schéma d'Euler. Les positions et les vitesses au pas suivant sont donc :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \rho \\ \theta_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \dot{\theta}_1 t_p + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_1 t_p^2 \\ \rho_1 + \dot{\rho}_1 t_p + \frac{1}{2} \ddot{\rho}_1 t_p^2 \\ \theta_2 + \dot{\theta}_2 t_p + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 t_p^2 \end{bmatrix}_k \quad (2.46)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_1 t_p \\ \dot{\rho}_1 + \ddot{\rho}_1 t_p \\ \dot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2 t_p \end{bmatrix}_k \quad (2.47)$$

où  $k$  et  $t_p$  correspondent respectivement à l'indice et à la durée du pas. Dans ces équations, il faut noter que les positions et vitesses au pas  $k$  sont obtenues de mesures à la sortie du robot virtuel alors que les accélérations sont obtenues de l'équation (2.45).

À la place d'imposer les trajectoires au modèle tel que fait à la planification, ce sont plutôt les efforts articulaires qui seront entrés dans ce dernier. Cette simulation est en fait beaucoup plus réaliste car, physiquement, ce sont les efforts qui sont appliqués.

Afin de déterminer ces efforts, un régulateur proportionnel-intégral-dérivatif (PID) comparant les commandes issues de la planification de trajectoire à des mesures prises sur le modèle est utilisé. La figure 2.14 est d'ailleurs une représentation schématique du robot virtuel et de son contrôleur.

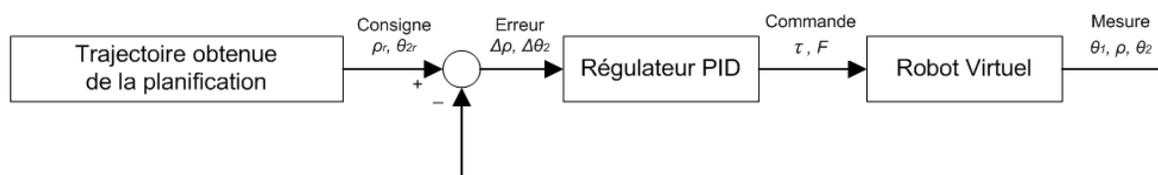


FIG. 2.14 – Représentation schématique du robot virtuel et de son contrôleur.

### 2.7.1 Évaluation de la planification de trajectoires globales

D'abord, les performances du système ont été évaluées en utilisant l'objectif de validation présenté à la section 2.3.1 pour consigne. Les figures 2.15 et 2.16 montrent l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires lors de cette simulation en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 2.17 montre l'évolution de l'erreur de prédiction pour l'angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l'annexe C.

Bien que les résultats soient satisfaisants à première vue, on note que la différence entre les valeurs désirées et obtenues pour l'angle du câble  $\theta_1$  augmente avec le temps. Tel que soupçonné, les écarts entre le robot et son modèle, même s'ils ne sont ici qu'attribuables à la linéarisation de ce dernier, s'amplifient avec le temps ce qui décroît la précision.

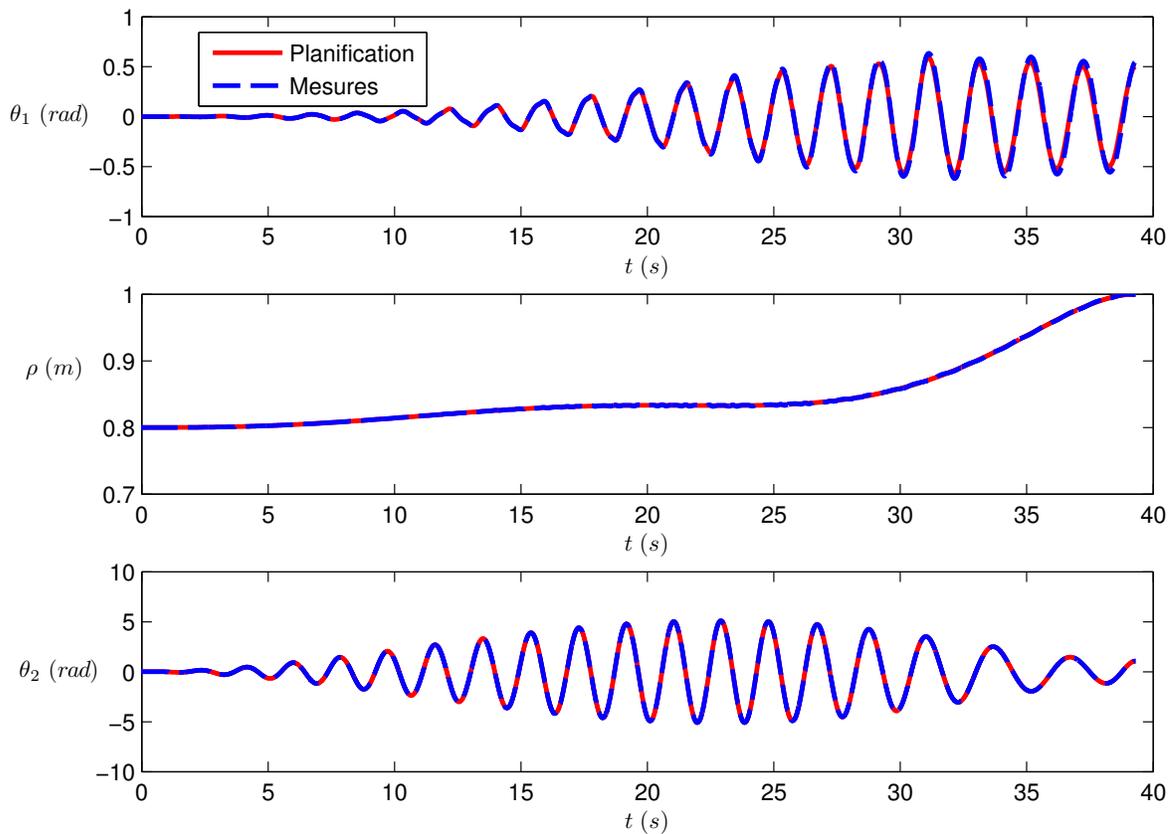


FIG. 2.15 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel.

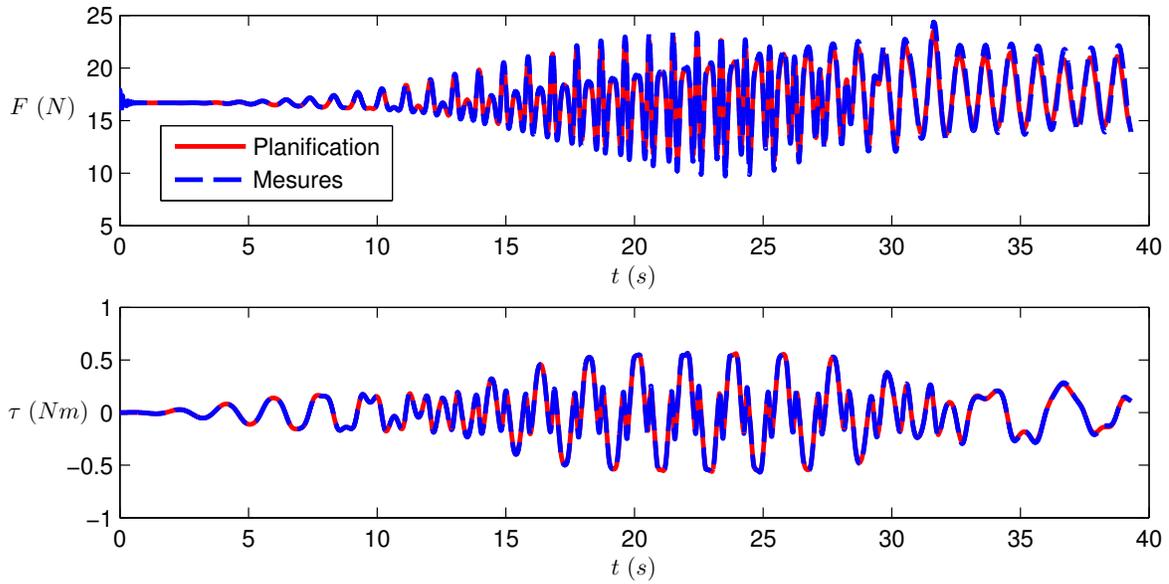


FIG. 2.16 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel.

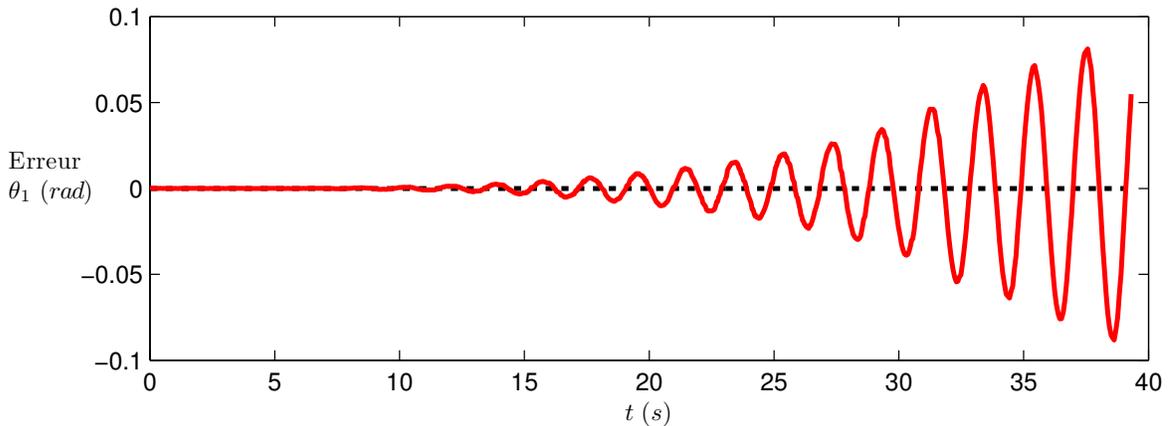


FIG. 2.17 – Évolution de l'erreur de prédiction sur l'angle du câble  $\theta_1$  pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel.

Ainsi, pour mieux évaluer l'impact de ces écarts, le modèle du robot virtuel a été perturbé afin de simuler des erreurs de modélisation. En d'autres mots, les paramètres (masses, inerties, positions des centres de masse et longueur initiale du câble) utilisés dans celui-ci ont été légèrement modifiés par rapport à ceux utilisés pour la planification. Les valeurs ont été choisies aléatoirement en supposant une distribution normale des erreurs variant entre  $-5\%$  et  $+5\%$ . Ces dernières sont d'ailleurs présentées au tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Erreurs de modèle considérées pour la création du robot virtuel perturbé.

Description		Erreur de modèle
Masse de la base	$m_1$	-0,15%
Masse de l'effecteur	$m_2$	+3,00%
Inertie de la base	$I_1$	-3,58%
Inertie de l'effecteur	$I_2$	-0,78%
Position du centre de masse de la base	$d_1$	+4,16%
Position du centre de masse de l'effecteur	$d_2$	+2,92%
Longueur initiale du câble	$\rho_i$	+4,59%

Pour la même trajectoire que précédemment, les figures 2.18 et 2.19 montrent l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 2.20 montre l'évolution de l'erreur de prédiction pour l'angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l'annexe C.

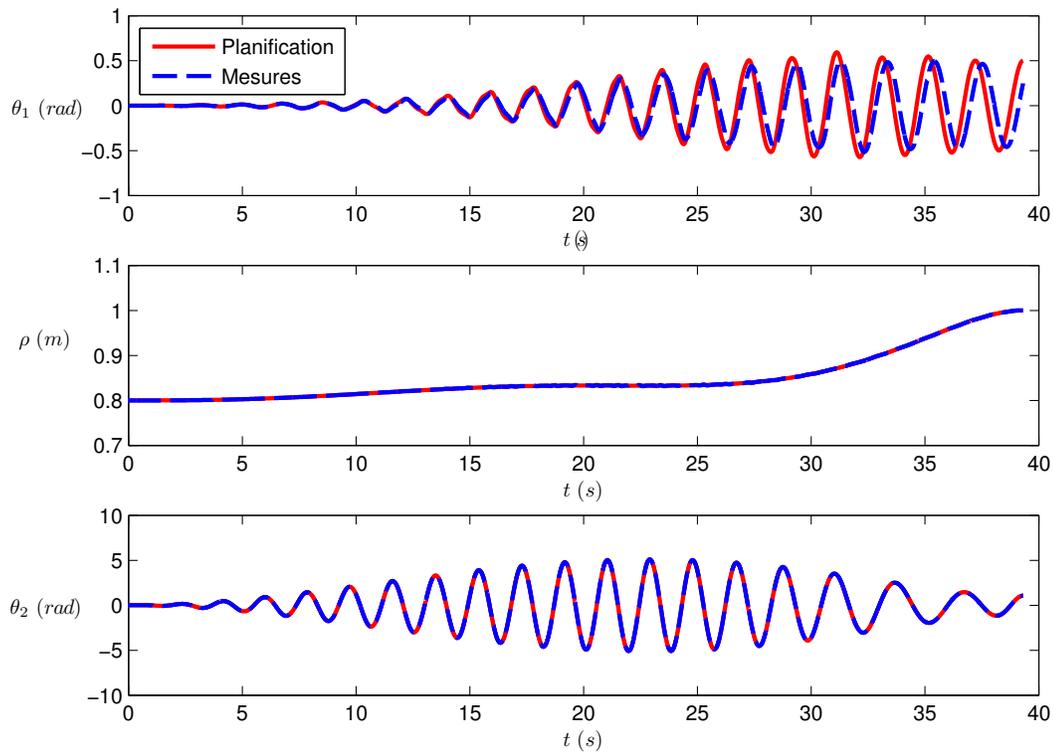


FIG. 2.18 – Évolution des coordonnées articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé.

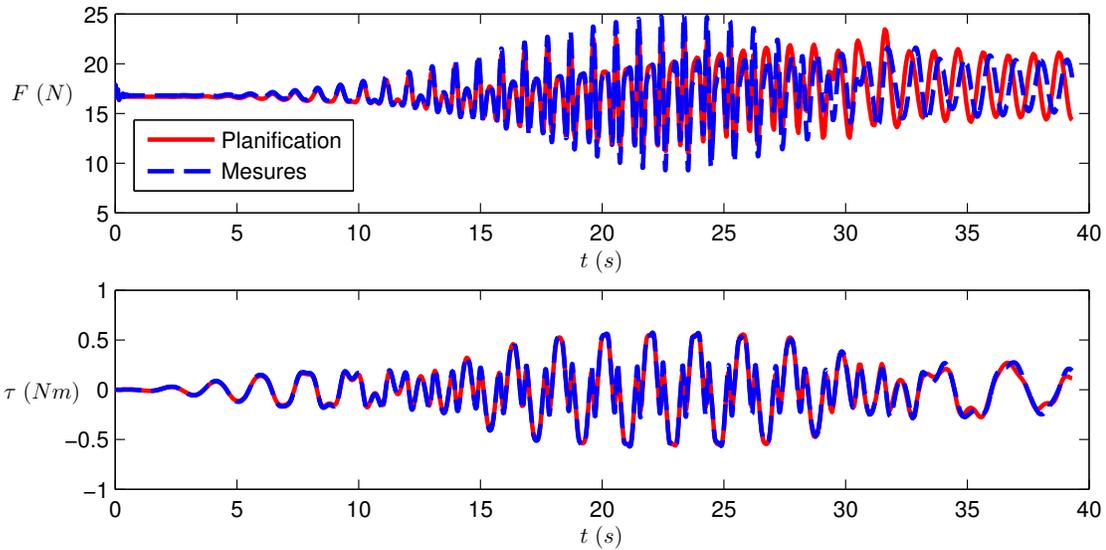


FIG. 2.19 – Évolution des efforts articulaires pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé.

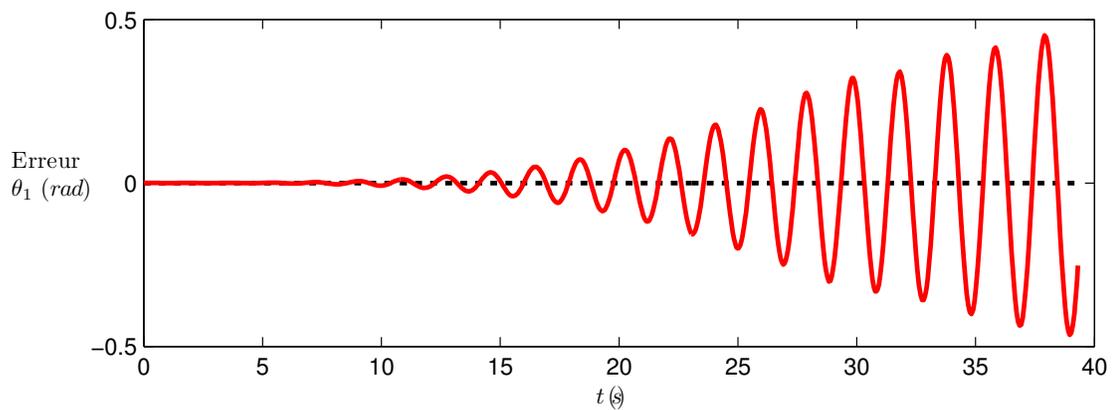


FIG. 2.20 – Évolution de l'erreur de prédiction sur l'angle du câble  $\theta_1$  pour les trajectoires poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé.

En observant ces résultats, on note que la différence entre les valeurs désirées et obtenues pour l'angle du câble  $\theta_1$  est nettement plus importante, soit jusqu'à 0,45 rad ( $25,8^\circ$ ) alors qu'elle ne dépassait pas 0,1 rad ( $5,7^\circ$ ) dans le premier cas. On peut donc conclure que la planification n'est pas du tout robuste face aux erreurs de modèle. Or, il faut s'attendre à ce que le modèle ne soit pas exact, particulièrement en raison de la flexion du câble qui n'a pas été modélisée. L'absence de rétroaction sur l'angle du câble  $\theta_1$  devient donc critique et une autre approche doit être considérée, ce qui sera fait au chapitre suivant.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre a débuté par une description des objectifs pour la manipulation et la manutention d'objets. La stratégie de planification de trajectoires globales et la motivation appuyant son choix ont ensuite été présentées. Un objectif de validation permettant d'évaluer les performances théoriques de chaque trajectoire a ensuite été présenté.

Puis, différents types de trajectoires possibles pour les articulations actionnées ont été étudiés, soit les trajectoires polynomiales, les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et les trajectoire poly-sinusoidales. Il a été établi que les trajectoires poly-sinusoidales permettent théoriquement d'obtenir des trajectoires satisfaisant tous les objectifs.

Puis, suite à la construction d'un robot virtuel, une caractérisation des performances obtenues lorsque implantées dans un contrôleur a été réalisée. Il a ainsi été démontré que la planification de trajectoires globales n'était pas robuste face aux erreurs de modèle. L'absence de rétroaction sur l'angle du câble  $\theta_1$  est critique et une autre approche est donc présentée au chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Planification de trajectoires locales

La planification de trajectoires locales consiste à prévoir le comportement du mécanisme pour un horizon de prédiction donné, c'est-à-dire, une seule partie de la trajectoire globale. En combinant ces dernières, il est alors possible de réaliser l'ensemble de la trajectoire. Ainsi, ce chapitre débute par la motivation derrière cette façon de faire et la stratégie générale de planification. L'horizon de prédiction est ensuite établi afin de construire des trajectoires paramétriques pour chacune des articulations actionnées.

Puis, une brève revue littéraire conduisant à la définition des trajectoires et au choix des conditions frontières est présentée pour chaque articulation. Le tout est suivi par la description de la fonction d'optimisation, de son algorithme et de la gestion de la fréquence naturelle permettant de définir le comportement de l'articulation libre. Enfin, une évaluation à l'aide du robot virtuel vient terminer ce chapitre.

## 3.1 Motivation et stratégie de planification

Suite aux résultats obtenus à l'aide du robot virtuel pour la planification globale présentée au chapitre précédent, il est évident qu'une rétroaction sur l'angle du câble  $\theta_1$  est nécessaire. En effet, avec le temps, les écarts créés par les différences entre le robot et son modèle deviennent importants ce qui décroît la précision. De plus, comme il n'y a pas de rétroaction, la commande n'est pas du tout robuste face aux perturbations extérieures.

De plus, le temps final  $t_f$  étant fixé arbitrairement, la commande du mécanisme exige une bonne connaissance du système par l'utilisateur, ce qui réduit la portée du projet. Par ailleurs, le temps nécessaire à la planification de trajectoire est beaucoup trop important pour que celle-ci soit réalisée en ligne. Enfin, comme les trajectoires sont définies à partir d'un point d'équilibre, le mécanisme doit toujours revenir à ce point entre deux objectifs. Il est donc impensable d'atteindre plusieurs objectifs lors d'un seul essai.

Cependant, certains points développés précédemment sont d'intérêt majeur. Premièrement, la méthode de planification de trajectoires à l'aide de coefficients libres s'est montrée efficace, bien que le temps de résolution soit important. Deuxièmement, les trajectoires poly-sinusoïdales excitent fortement le système ce qui confirme l'importance de l'excitation paramétrique. Ces méthodes seront donc maintenues au cours de ce chapitre et pour le reste de ce mémoire.

Puis, afin de limiter la propagation des erreurs de modèle et d'appliquer une rétroaction, l'approche sera de réduire l'horizon de prédiction (temps final). En effet, en combinant plusieurs trajectoires locales, on forme une trajectoire globale remplissant les objectifs et, en définissant chaque trajectoire locale à partir de la précédente, on applique une rétroaction sur l'angle du câble  $\theta_1$ .

### 3.1.1 Horizon de prédiction

Tel que mentionné précédemment, réduire l'horizon de prédiction permet de réduire la propagation des erreurs de modèle. À l'opposé, il est difficile d'évaluer les consé-

quences d'une action instantanée des articulations actionnées sur le comportement général de l'articulation libre, ce qui suggère un long horizon de prédiction. Le choix de cet horizon devient donc une question de compromis.

Puisque le mouvement du mécanisme est principalement gouverné par une dynamique similaire à celle d'un pendule, les fréquences de ce dernier seront utilisées pour définir l'horizon. En effet, pour chaque demi-période de l'angle du câble  $\theta_1(t)$ , ce dernier atteint deux points où la position atteint un extremum et où la vitesse devient nulle, tel que présenté à la figure 3.1.

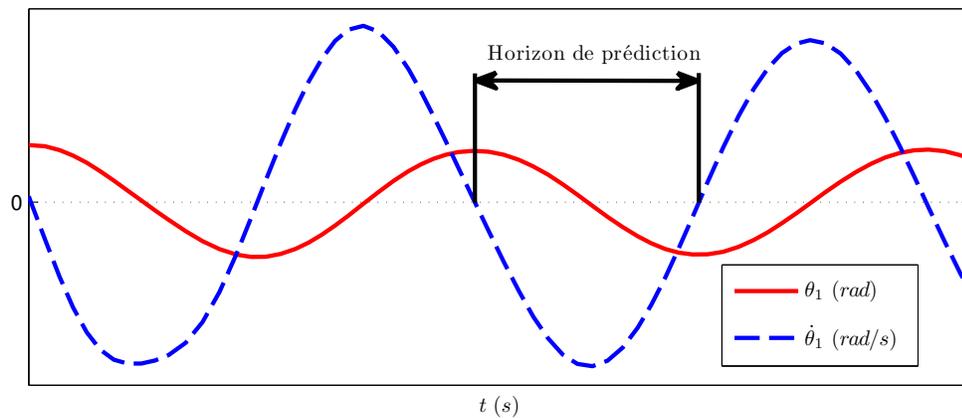


FIG. 3.1 – Représentation de l'horizon de prédiction en fonction de l'angle du câble  $\theta_1$ .

Or, ces points correspondent aux mêmes conditions que pour l'atteinte d'un objectif global  $[\theta_1 = \theta_{1g}, \dot{\theta}_1 = 0]$ , soit l'objectif final visé pour l'ensemble de la trajectoire. L'utilisation de la demi-période est donc un choix d'horizon judicieux car ce temps est relativement court et le mouvement est similaire pour chaque horizon. Par conséquent, l'évolution de l'articulation libre sera toujours de la même forme pendant un horizon de prédiction, ce qui facilitera grandement la résolution du problème. En synchronisant l'évolution des variables actionnées avec l'angle du câble, il devient alors possible d'effectuer une planification locale (sur un horizon) ayant comme objectif d'atteindre l'angle du câble visé  $\theta_{1g}$  ou, du moins, de s'en rapprocher. Dans les sections qui suivent, on utilisera ainsi les termes objectifs locaux pour identifier les objectifs sur un horizon de prédiction alors que le terme global sera conservé pour identifier l'objectif pour l'ensemble de la trajectoire.

Toutefois, limiter les vitesses au point d'arrivée pour permettre des atterrissages doux et limiter les efforts nécessaires (couple et tension) pour atteindre la cible feront toujours partie des critères de résolution. De plus, la tension dans le câble devra toujours être positive en raison de l'unilatéralité des efforts transmis par le câble.

### 3.1.2 Définition des trajectoires

Ici, tout comme au chapitre précédent, une méthode de planification de trajectoires à l'aide de coefficients libres est utilisée. En effet, pour chacune des articulations actionnées, une trajectoire définie selon  $p + q$  paramètres sera utilisée conjointement à  $p$  conditions frontières.

Or, contrairement aux développements précédents, les conditions initiales pour chaque trajectoire locale seront établies à partir de mesures prises sur le robot. Lorsqu'une vitesse nulle sera atteinte pour l'angle du câble ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ), les positions, vitesses et accélérations seront mesurées expérimentalement afin de définir les conditions initiales. Ceci permettra une certaine forme de rétroaction puisque l'on construit chaque trajectoire à partir de la précédente.

Quant à elles, les conditions finales seront définies pour chaque trajectoire locale et le choix de ces dernières sera décrit ultérieurement. Il y aura en fait  $p = 6$  conditions frontières à remplir localement, soit les positions, vitesses et accélérations initiales ainsi que finales. Afin d'éviter la confusion, l'indice  $f$  sera maintenant utilisé pour identifier les objectifs de chaque trajectoire locale alors que l'indice  $g$  sera utilisé pour définir les objectifs globaux.

Enfin, puisqu'un des aspects appuyant le choix cette méthode de planification est l'exécution en temps réel, seulement  $q = 1$  paramètre libre sera utilisé par articulation actionnée pour définir le comportement de la variable libre. Ainsi, comme un grand espace atteignable est désiré et peu de paramètres libres sont disponibles, la forme des trajectoires élémentaires de chaque articulation actionnée devient primordiale afin de fournir une bonne excitation du système. Une attention spéciale sera donc portée aux trajectoires des articulations actionnées et ceci sera fait pour chaque articulation indépendamment au cours des prochaines sections.

## 3.2 Extension du câble

En considérant un effecteur fixe, c'est-à-dire, aucun actionnement à la base du câble, le système devient similaire à un pendule de longueur variable tel qu'illustré à la figure 3.2. Or, les méthodes d'excitation de ce genre de mécanisme ont été largement étudiées dans le passé. En autres, Burns [9], Curry [14] et Case [11] ont successivement utilisé ce modèle pour décrire le mouvement d'un enfant se balançant debout sur une balançoire. Pinsky et Zevin [22] ont ensuite proposés des algorithmes de commande des oscillations du pendule alors que Arisumi et al. [3] ainsi que Cunningham et Asada [13] ont abordé la question de trajectoires.

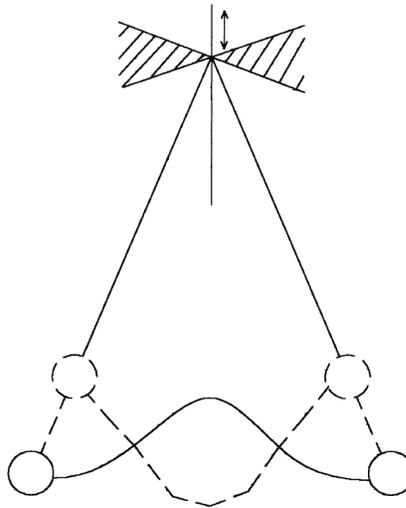


FIG. 3.2 – Représentation d'un pendule de longueur variable [22].

Enfin, il a été suggéré par Burns [9], et prouvé optimal par Piccoli et Kulkarni [21] pour des variations d'élongation instantanées, qu'allonger le câble lorsque la vitesse angulaire de ce dernier est minimale et réduire sa longueur lorsque qu'elle est maximale augmente l'énergie du système. Ces résultats suggèrent donc que le mouvement d'extension du câble devrait être synchronisé avec le double de la fréquence d'oscillation du pendule.

Puisque l'angle du câble  $\theta_1$  suit des trajectoires quasi-sinusoidales, le choix d'une sinusoïde pour définir l'extension du câble  $\rho$  s'est montré efficace. Ceci avait d'ailleurs déjà été fait par Stilling et Szyszkowski [26], [27] afin d'amortir les vibrations d'un tel pendule. Dans notre cas, il s'agit du problème inverse. Enfin, pour obtenir la meilleure

excitation possible, le choix de la fréquence et de la phase entre l'extension et l'angle du câble est primordial et ce sera le sujet de la prochaine section.

### 3.2.1 Fréquence et phase

À l'aide du robot virtuel décrit à la section 2.7 et en considérant un effecteur fixe  $\theta_2(t) = \theta_{2i}$ , le gain en amplitude pour l'angle du câble  $\theta_1$ , c'est-à-dire, la variation de l'amplitude d'oscillation sur un horizon, a été évalué en fonction de la fréquence  $\omega$  et de la phase initiale  $\psi$  entre l'angle et l'extension du câble. Pour cette simulation, la fonction choisie afin de définir l'extension de l'effecteur est :

$$\rho(t) = 1,2 + \frac{1}{20} \sin(\omega t + \psi) \quad (3.1)$$

où  $t$  est le temps,  $\omega$  est la fréquence d'excitation et  $\psi$  la phase initiale entre les deux mouvements.

En fonction de différentes fréquences et phases, le gain d'amplitude moyen de l'angle du câble  $\theta_1$  a donc été évalué en considérant un effecteur fixe  $\theta_2 = 0$  et les paramètres du robot présentés au tableau 1.1. Les résultats sont présentés à la figure 3.3.

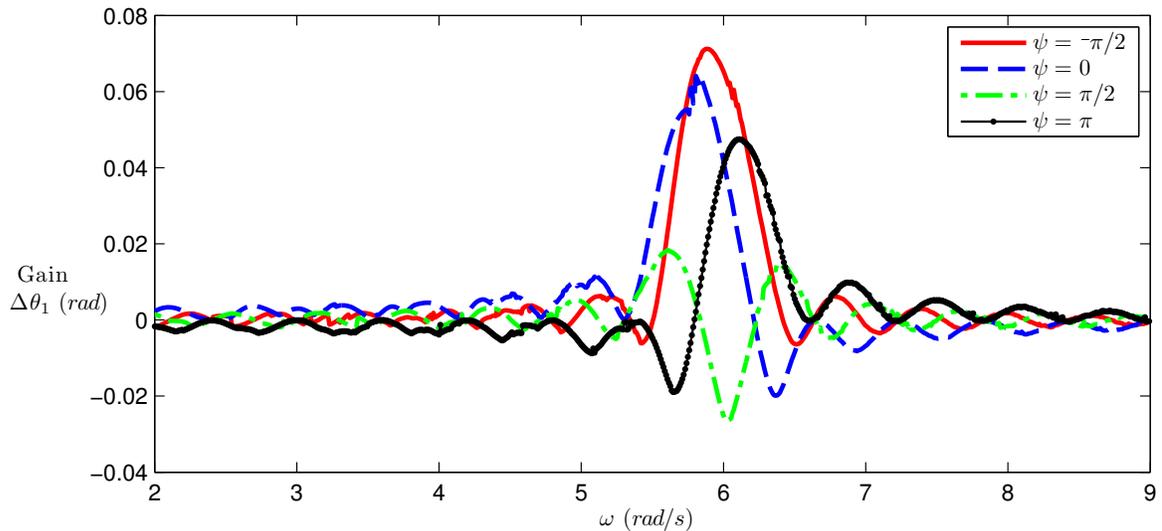


FIG. 3.3 – Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble  $\theta_1$  par demi-période en fonction de la fréquence d'excitation  $\omega$  et de la phase initiale  $\psi$  pour l'extension du câble.

En observant la figure, il est clair qu'exciter le système au double de sa fréquence naturelle (dans ce cas  $\omega = 6$  rad/s) est le meilleur moyen pour augmenter ou réduire l'angle du câble  $\theta_1$ , ce qui correspond aux résultats obtenus par Burns [9]. De plus, tel que montré à la figure 3.4, il serait préférable de déphaser le système d'environ  $\pm\pi/2$  pour maximiser les effets de l'extension, soit de  $-\pi/2$  pour augmenter l'angle du câble et de  $\pi/2$  pour le réduire.

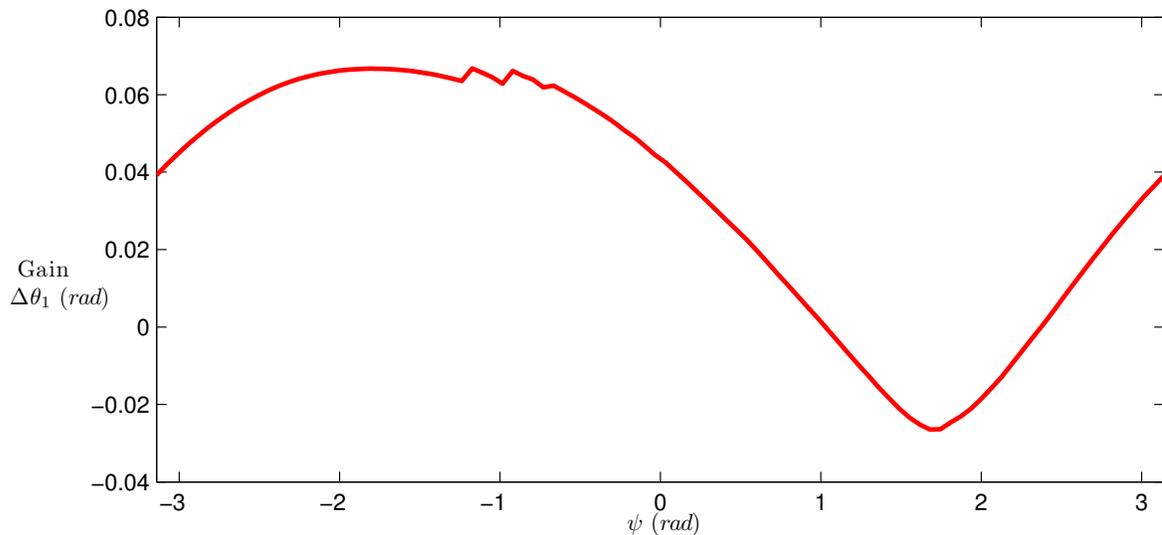


FIG. 3.4 – Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble  $\theta_1$  par demi-période en fonction de la phase initiale  $\psi$  pour une fréquence d'excitation de  $\omega = 6$  rad/s de l'extension du câble.

### 3.2.2 Fonction paramétrique

Dans notre cas, puisque le début et la fin de l'horizon de prédiction sont définis par des vitesses nulles pour l'angle du câble ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ), ce dernier décrira une trajectoire quasi-cosinusoidale sur un horizon. Or, comme le cosinus et le sinus sont déphasés de  $\pi/2$ , une sinusoïde de phase nulle a été choisie pour décrire l'extension du câble. Ainsi, la fonction suivante a été adoptée :

$$\rho(t) = A_1 \sin(2\omega t) + A_2 \sin(3\omega t) + A_3 \sin(4\omega t) + \rho_i + \frac{(\rho_f - \rho_i)\omega t}{\pi} \quad (3.2)$$

pour  $0 \leq t \leq \pi/\omega$ , soit un horizon de prédiction. Dans cette équation,  $\omega$  est la fréquence naturelle du système,  $\rho_i$  est la position initiale mesurée en début de cycle et  $\rho_f$  est la position finale désirée. Le coefficient  $A_1$  est le paramètre libre qui servira à la définition

du comportement de l'articulation libre  $\theta_1$  alors que les coefficients  $A_2$  et  $A_3$  permettront de satisfaire les conditions limites.

En dérivant l'équation (3.2) par rapport au temps, la vitesse et l'accélération sont alors obtenues selon :

$$\dot{\rho}(t) = 2A_1\omega \cos(2\omega t) + 3A_2\omega \cos(3\omega t) + 4A_3\omega \cos(4\omega t) + \frac{(\rho_f - \rho_i)\omega}{\pi} \quad (3.3)$$

$$\ddot{\rho}(t) = -4A_1\omega^2 \sin(2\omega t) - 9A_2\omega^2 \cos(3\omega t) - 16A_3\omega^2 \cos(4\omega t). \quad (3.4)$$

Aux limites du cycle, soit lorsque  $t = 0$  et  $t = \pi/\omega$ , on obtient donc :

$$\begin{bmatrix} \rho(0) \\ \dot{\rho}(0) \\ \ddot{\rho}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i \\ 2A_1\omega + 3A_2\omega + 4A_3\omega + \frac{(\rho_f - \rho_i)\omega}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \rho(\pi/\omega) \\ \dot{\rho}(\pi/\omega) \\ \ddot{\rho}(\pi/\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_f \\ 2A_1\omega - 3A_2\omega + 4A_3\omega + \frac{(\rho_f - \rho_i)\omega}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ainsi, par définition, les accélérations initiales et finales sont nulles ce qui augmente la stabilité du système. Enfin, en imposant les conditions de vitesse frontières  $[\dot{\rho}_i, \dot{\rho}_f]$ , on obtient les coefficients  $A_2$  et  $A_3$  :

$$A_2 = \frac{\dot{\rho}_i - \dot{\rho}_f}{6\omega} \quad (3.7)$$

$$A_3 = -\frac{A_1}{2} + \frac{\rho_i - \rho_f}{4\pi} + \frac{\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_f}{8\omega}. \quad (3.8)$$

Tout comme pour les trajectoires globales, on pourra donc optimiser la valeur de  $A_1$  servant à définir le comportement de la variable libre  $\theta_1(t)$  sans affecter le respect des conditions frontières pour l'extension du câble.

### 3.2.3 Conditions frontières

Dans la définition des trajectoires, les conditions initiales sont tout simplement mesurées du système. À l’opposé, le choix des conditions finales est quelque peu arbitraire puisqu’il n’y a pas d’objectifs intermédiaires pour les articulations actionnées mais seulement pour l’angle du câble  $\theta_1$ , soit de se rapprocher de l’objectif  $\theta_{1g}$ . Les conditions finales pour chaque trajectoire locale peuvent donc être choisies afin d’obtenir la meilleure excitation possible.

D’abord, comme la variation de la longueur du câble  $\rho$  est limitée sur un horizon par la performance de l’enrouleur, il est préférable d’atteindre la valeur de câble objectif  $\rho_g$  en premier lieu. Ainsi, la valeur finale pour la longueur du câble sera fixée à sa valeur visée si le changement d’élongation est possible, soit ( $\rho_f = \rho_g$ ). Sinon, le changement d’élongation maximal permis  $\Delta\rho_{max}$  sera appliqué selon ( $\rho_f = \rho_i \pm \Delta\rho_{max}$ ) afin de se rapprocher de l’objectif le plus rapidement possible.

Pour ce qui est de la vitesse, un choix élémentaire serait de la poser nulle aux conditions frontières afin de favoriser la symétrie. Cependant, un tel choix cause de grandes accélérations en cours de trajectoire, ce qui augmente les vibrations. Ainsi, pour limiter ces accélérations, la vitesse finale est ici définie afin de correspondre à celle d’un sinus de base d’amplitude  $A_1$ . L’impact de ces deux types de conditions frontières sur l’accélération est illustré à la figure 3.5.

De plus, puisque l’élongation est limitée par les performances de l’enrouleur, il est intéressant de maintenir cette vitesse afin d’atteindre la valeur visée plus rapidement. Dans le cas où l’angle du câble visé  $\theta_{1g}$  est atteignable, la vitesse finale sera évidemment posée nulle, soit  $\dot{\rho}_f = 0$ . Les conditions finales pour l’extension du câble  $\rho(t)$  se résument donc à :

$$\rho_f = \begin{cases} \rho_g & \text{si } |\rho_g - \rho_i| < \Delta\rho_{max} \\ \rho_i + \Delta\rho_{max} & \text{sinon si } \rho_g > \rho_i \\ \rho_i - \Delta\rho_{max} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\dot{\rho}_f = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_1(\pi/\omega) = \theta_{1g} \\ 2\omega A_1 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (3.10)$$

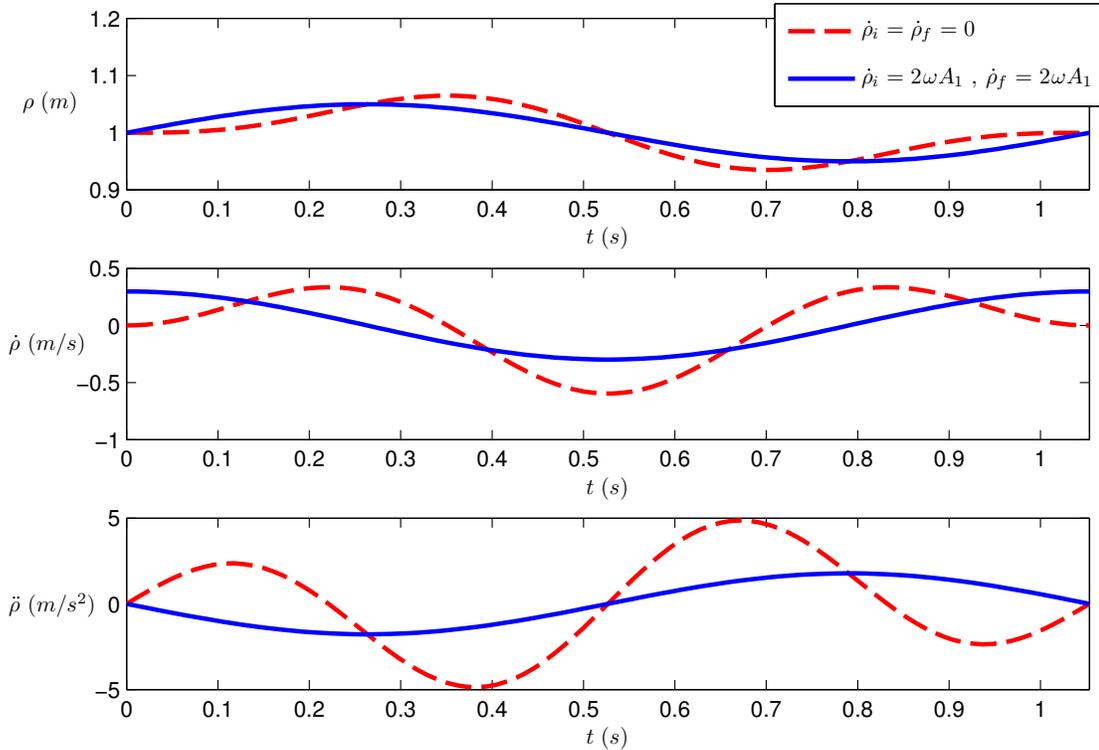


FIG. 3.5 – Effets des conditions frontières sur la trajectoire articulaire pour l’extension du câble ( $A_1 = 0,05$ ).

### 3.3 Balancement de l’effecteur

En considérant une longueur de câble fixe, le système devient similaire à un pendule double ayant un très long premier membre. Or, les méthodes d’excitation de tels mécanismes ont déjà été étudiées par plusieurs. D’abord, les principes de base du mouvement ont été présentés par Spong [25] dans le contexte de l’Acrobot présenté à la figure 4, un pendule double pour lequel seule la deuxième articulation est actionnée. Puis, Brown et Passino [8] ont développé plusieurs algorithmes de commande de ce même robot et Boone [5] a présenté un algorithme permettant de réduire le temps nécessaire à l’excitation.

L’atteinte de cible par de tels robots a été vu par Nakanishi et al. [20] dans le contexte des robots brachiateurs, des robots imitant le mouvement de singes se balançant de branche en branche tels que présentés à la figure 3.6. Enfin, ce type de mécanisme a aussi été utilisé par Case [11] pour décrire le mouvement d’un enfant se balançant assis sur une balançoire.

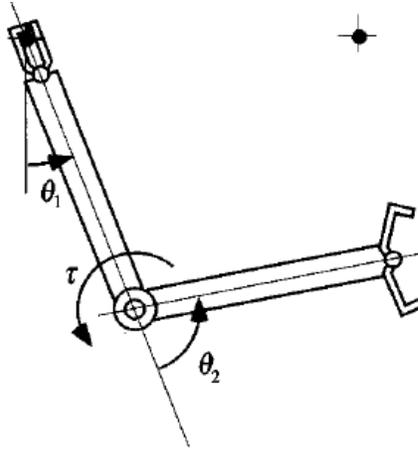


FIG. 3.6 – Représentation d’un robot brachiateur [20].

Afin d’augmenter l’énergie du système, Spong [25] suggère que le mouvement du membre inférieur, soit l’effecteur  $\theta_2(t)$ , doit être en phase avec celui du membre supérieur, soit l’angle du câble  $\theta_1(t)$ . Puisque l’angle du câble  $\theta_1(t)$  suit des trajectoires quasi-sinusoidales, le choix d’une sinusoïde pour décrire le mouvement de l’effecteur  $\theta_2$  s’est montré évident afin d’être similaire à l’extension du câble. Enfin, pour obtenir la meilleure excitation possible, le choix de la fréquence et de la phase entre le balancement de l’effecteur et l’angle du câble est primordial et ce sera le sujet de la prochaine section.

### 3.3.1 Fréquence et phase

À l’aide du robot virtuel décrit à la section 2.7 et en considérant une longueur de câble fixe  $\rho(t) = \rho_i$ , le gain en amplitude pour l’angle du câble  $\theta_1$ , c’est-à-dire, la variation de l’amplitude d’oscillation sur un horizon, a été évalué en fonction de la fréquence  $\omega$  et de la phase initiale  $\psi$  entre le mouvement du câble et le balancement de l’effecteur. Pour cette simulation, la fonction choisie afin de définir le mouvement de l’effecteur est :

$$\theta_2(t) = \frac{\pi}{2} \sin(\omega t + \psi) \quad (3.11)$$

où  $t$  est le temps,  $\omega$  est la fréquence d’excitation et  $\psi$  et la phase initiale entre le mouvement du câble et de l’effecteur.

En fonction de différentes fréquences et phases, le gain d'amplitude moyen de l'angle du câble  $\theta_1$  a donc été évalué pour une longueur de câble fixe  $\rho = 1,2\text{ m}$  et les paramètres du robot présentés au tableau 1.1. Les résultats sont présentés à la figure 3.7.

En observant ces données, il est clair qu'exciter le système à sa fréquence naturelle (dans ce cas  $\omega = 3\text{ rad/s}$ ) est le meilleur moyen pour augmenter ou réduire l'angle du câble  $\theta_1$ , ce qui correspond aux résultats obtenus par Spong [25]. Contrairement à l'extension du câble, il serait ici préférable de déphaser le système d'environ  $\pm\pi/4$  afin de maximiser les effets du balancement tel que montré à la figure 3.8. Dans ce cas, le déphasage optimal est de  $\pi/4$  pour augmenter l'angle du câble et de  $-\pi/4$  pour le réduire. Cependant, afin de synchroniser ce dernier avec l'extension du câble, une phase de  $\pm\pi/2$  sera plutôt utilisée car celle-ci produit presque la même excitation tout en simplifiant grandement la résolution.

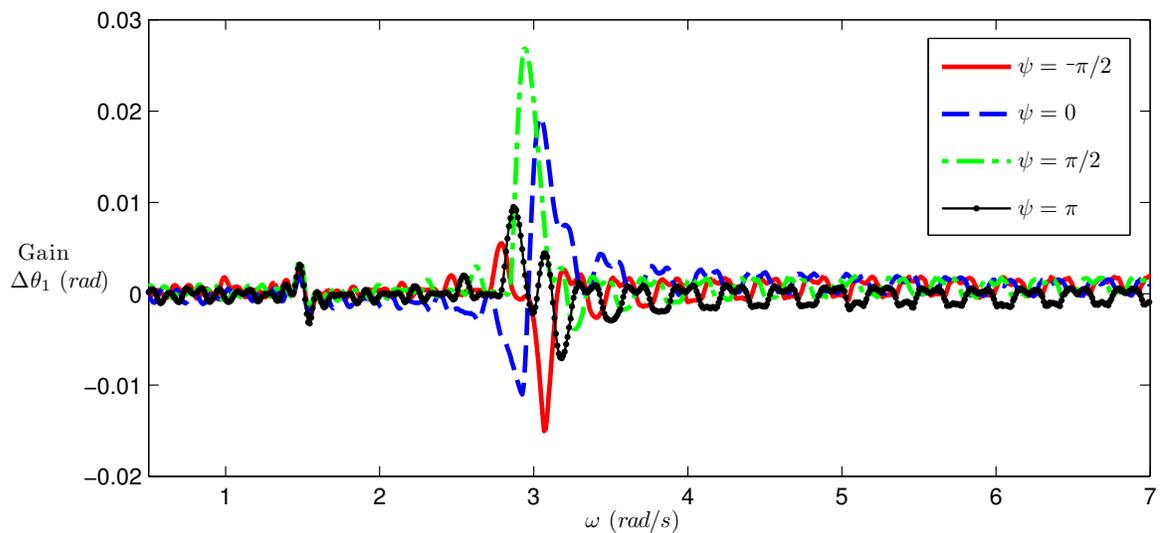


FIG. 3.7 – Gain d'amplitude moyen de l'angle du câble  $\theta_1$  par demi-période en fonction de la fréquence d'excitation  $\omega$  et de la phase initiale  $\psi$  pour le balancement de l'effecteur.

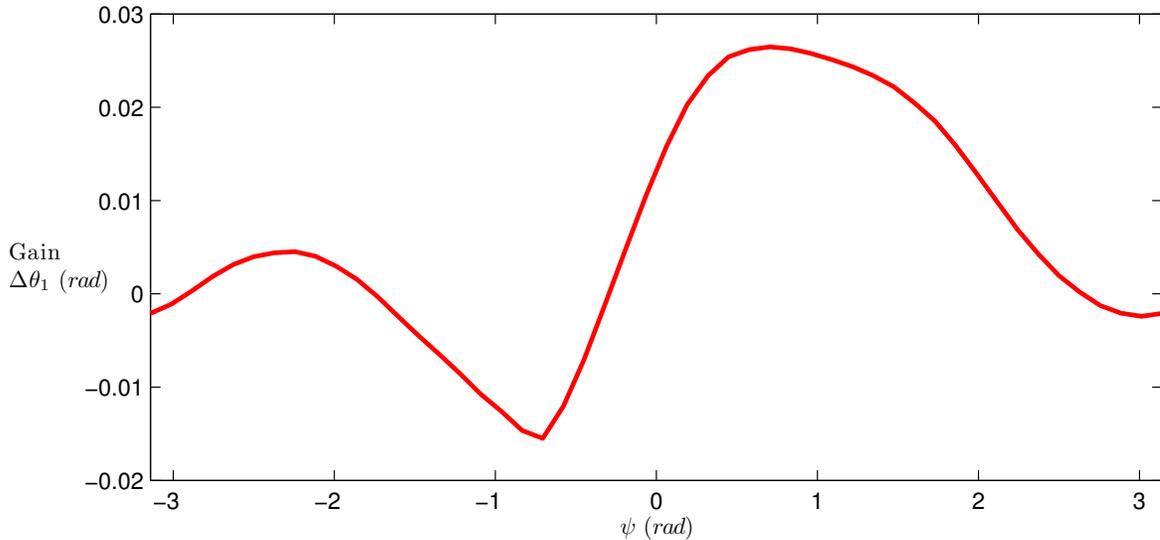


FIG. 3.8 – Gain d’amplitude moyen de l’angle du câble  $\theta_1$  par demi-période en fonction de la phase initiale  $\psi$  pour une fréquence d’excitation de  $\omega = 3$  rad/s du balancement de l’effecteur.

### 3.3.2 Fonction paramétrique

Dans notre cas, puisque le début et la fin de l’horizon de prédiction sont définis par des vitesses nulles pour l’angle du câble ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ), ce dernier décrira une trajectoire quasi-cosinoïdale sur un horizon. Or, comme le cosinus et le sinus sont déphasés de  $\pi/2$ , une sinusoïde de phase nulle a été choisie pour décrire le balancement de l’effecteur. Ainsi, la fonction suivante a été adoptée :

$$\theta_2(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + B_3 \sin(3\omega t) + \theta_{2i} + \frac{(\theta_{2f} - \theta_{2i})\omega t}{\pi} \quad (3.12)$$

pour  $0 \leq t \leq \pi/\omega$ , soit un horizon de prédiction. Dans cette équation,  $\omega$  est la fréquence naturelle du système,  $\theta_{2i}$  est la position initiale mesurée en début de cycle et  $\theta_{2f}$  est la position finale désirée. Le coefficient  $B_1$  est le paramètre libre qui servira à la définition du comportement de l’articulation libre  $\theta_1$  alors que les coefficients  $B_2$  et  $B_3$  permettront de satisfaire les conditions limites.

En dérivant l’équation (3.12) par rapport au temps, la vitesse et l’accélération sont alors obtenues selon :

$$\dot{\theta}_2(t) = B_1\omega \cos(\omega t) + 2B_2\omega \cos(2\omega t) + 3B_3\omega \cos(3\omega t) + \frac{(\theta_{2f} - \theta_{2i})\omega}{\pi} \quad (3.13)$$

$$\ddot{\theta}_2(t) = -B_1\omega^2 \sin(\omega t) - 4B_2\omega^2 \cos(2\omega t) - 9B_3\omega^2 \cos(3\omega t). \quad (3.14)$$

Aux limites du cycle, soit lorsque  $t = 0$  et  $t = \pi/\omega$ , on obtient donc :

$$\begin{bmatrix} \theta_2(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \\ \ddot{\theta}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{2i} \\ B_1\omega + 2B_2\omega + 3B_3\omega + \frac{(\theta_{2f}-\theta_{2i})\omega}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2(\pi/\omega) \\ \dot{\theta}_2(\pi/\omega) \\ \ddot{\theta}_2(\pi/\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{2f} \\ -B_1\omega + 2B_2\omega - 3B_3\omega + \frac{(\theta_{2f}-\theta_{2i})\omega}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Ainsi, par définition, les accélérations initiales et finales sont nulles, ce qui augmente la stabilité du système. Enfin, en imposant les conditions de vitesse frontières  $[\dot{\theta}_{2i}, \dot{\theta}_{2f}]$ , on obtient les coefficients  $B_2$  et  $B_3$  :

$$B_2 = \frac{\theta_{2i} - \theta_{2f}}{2\pi} + \frac{\dot{\theta}_{2i} + \dot{\theta}_{2f}}{4\omega} \quad (3.17)$$

$$B_3 = -\frac{B_1}{3} + \frac{\dot{\theta}_{2i} - \dot{\theta}_{2f}}{6\omega}. \quad (3.18)$$

Tout comme pour les trajectoires globales, on pourra donc optimiser la valeur de  $B_1$  servant à définir le comportement de la variable libre  $\theta_1(t)$  sans affecter le respect des conditions frontières pour le balancement de l'effecteur.

### 3.3.3 Conditions frontières

Dans la définition des trajectoires, les conditions initiales sont tout simplement mesurées du système. Or, comme pour l'extension du câble, le choix des conditions finales pour chaque trajectoire locale est arbitraire et peut donc être fait afin d'obtenir la meilleure excitation possible. Dans ce cas, puisque l'angle de l'effecteur  $\theta_2$  est facilement modifiable sur un horizon, la valeur finale de l'angle sera posée à sa valeur d'équilibre, soit  $\theta_{2f} = 0$ , ce qui permet de maintenir la symétrie du système. Dans le cas où l'angle du câble visé  $\theta_{1g}$  est atteignable, la valeur finale sera évidemment la valeur visée soit  $\theta_{2f} = \theta_{2g}$ .

Tout comme pour l'extension du câble, poser une vitesse nulle aux conditions frontières s'est montré peu efficace puisque ceci engendre de grandes accélérations. La vitesse

finale a donc été choisie afin de correspondre à celle d'un sinus de base d'amplitude  $B_1$ . L'impact de ces conditions frontières sur l'accélération est aussi montré à la figure 3.9.

Dans le cas où l'angle du câble visé  $\theta_{1g}$  est atteignable, la vitesse finale sera définie nulle, soit  $\theta_{2f} = 0$ , et les conditions finales pour le balancement de l'effecteur  $\theta_2(t)$  se résument donc à :

$$[\theta_{2f}, \dot{\theta}_{2f}]^T = \begin{cases} [\theta_{2g}, 0]^T & \text{si } \theta_1(\pi/\omega) = \theta_{1g} \\ [0, -\omega B_1]^T & \text{sinon} \end{cases} . \quad (3.19)$$

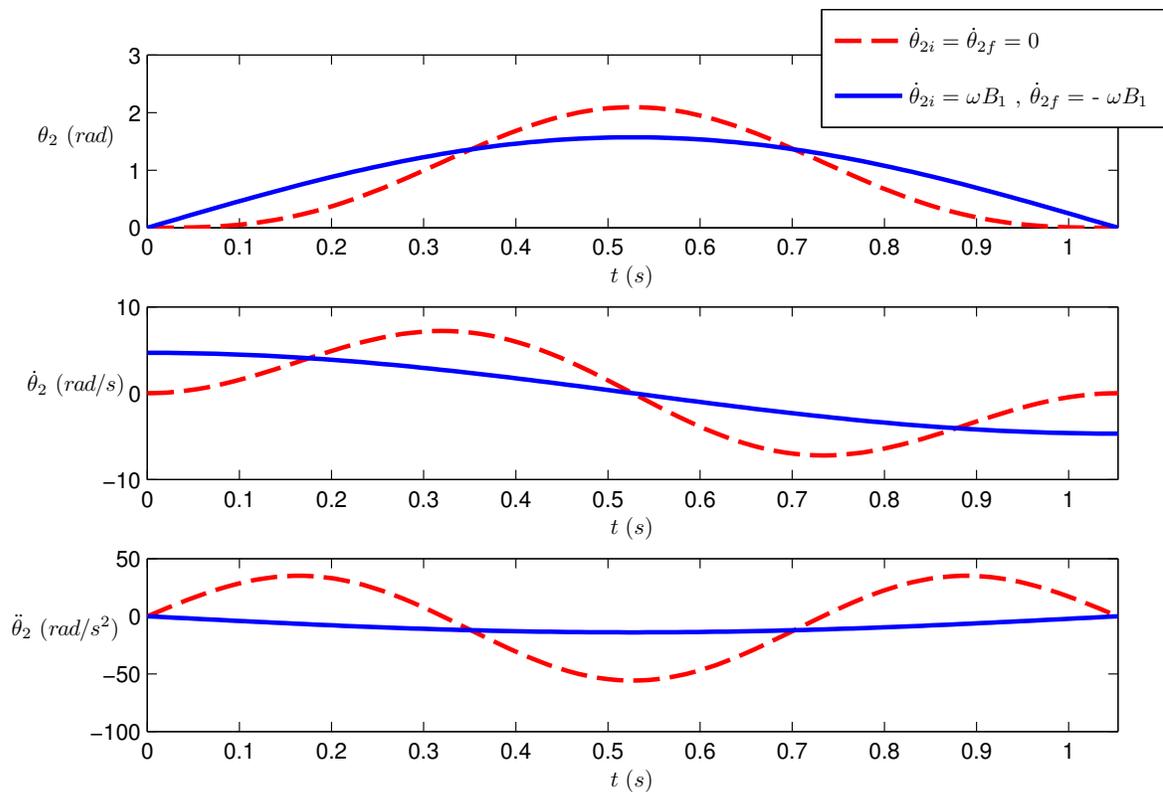


FIG. 3.9 – Effets des conditions frontières sur la trajectoire articulaire pour le balancement de l'effecteur ( $B_1 = \pi/2$ ).

## 3.4 Comportement de l'angle du câble

Dans la définition de chacune des trajectoires aux sections précédentes, un paramètre a été laissé libre pour chaque articulation, soit  $A_1$  et  $B_1$ . Ces paramètres peuvent donc être optimisés afin d'obtenir le comportement voulu pour l'angle du câble  $\theta_1(t)$ . Or, comme les effets de ces paramètres ne peuvent être obtenus analytiquement, ceux-ci seront plutôt évalués en intégrant l'équation dynamique (1.41) comme pour les trajectoires globales. Ainsi, pour chaque couple de paramètres libres  $A_1, B_1$ , une prédiction de la trajectoire de l'angle du câble  $\theta_1(t)$  est obtenue et celle-ci peut être comparée aux résultats désirés. Les performances d'un couple de paramètres peuvent donc être évaluées et optimisées en résolvant un problème d'optimisation.

### 3.4.1 Problème d'optimisation

L'objectif étant toujours d'effectuer la manutention d'objets, c'est-à-dire, de les déplacer d'un point à un autre, l'objectif de chaque planification locale sera d'atteindre l'objectif global  $[\theta_{1g}, \rho_g, \theta_{2g}]^T$  ou, du moins, de s'en approcher. Puisque les articulations actionnées sont facilement manipulables, l'objectif de chaque planification locale est principalement basé sur la valeur de l'angle du câble final  $\theta_{1g}$ .

De plus, grâce à l'horizon de prédiction et aux trajectoires articulaires présentés antérieurement, les vitesses d'arrivée n'auront plus à être considérées puisqu'elles seront toujours nulles par définition. Toutefois, il est toujours primordial de maintenir une tension minimale dans le câble  $F_{min}$  pour éviter la flexion. La tension maximale permise par le câble  $F_{max}$ , le couple maximal à la base de l'effecteur  $\tau_{max}$ , ainsi que les longueurs minimale  $\rho_{min}$  et maximale du câble  $\rho_{max}$  devront aussi être respectés. Puis, des limites sur l'angle maximal à l'effecteur  $\theta_{2max}$  et la vitesse maximale du câble  $\dot{\rho}_{max}$  ont été ajoutées alors que la longueur minimale de câble a été augmentée suite à la réalisation du prototype qui sera décrite au chapitre 4. Par conséquent, les contraintes suivantes ont été imposées :

$$\begin{aligned}
 F_{min} &= 0 \text{ N} & \rho_{min} &= 0,3 \text{ m} \\
 F_{max} &= 40 \text{ N} & \rho_{max} &= 1,7 \text{ m} \\
 \tau_{max} &= 1,5 \text{ N}\cdot\text{m} & \dot{\rho}_{max} &= 0,25 \text{ m/s} \\
 \theta_{2max} &= \pm\pi \text{ rad.}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ainsi, en incluant l'objectif et les contraintes dans une fonction de minimisation, il est possible d'optimiser les coefficients libres en conséquence. Pour chacune des contraintes, une fonction de pénalité basée sur une combinaison d'un échelon et d'une rampe de la forme suivante a donc été définie :

$$P_\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } \max(\psi(t)) \leq \psi_{max} \\ K_{\psi 1} + K_{\psi 2} (\max(\psi(t)) - \psi_{max}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $\psi(t)$  est la variable associée à une contrainte  $\psi_{max}$  (ou  $\psi_{min}$ ) à respecter et  $K_{\psi 1}$  et  $K_{\psi 2}$  sont des constantes déterminées expérimentalement selon chacune des contraintes. Pour ces pénalités, la longueur et la vitesse du câble ainsi que l'angle à l'effecteur sont obtenus directement des trajectoires  $[\rho(t), \theta_2(t)]$  alors que la tension dans le câble  $F(t)$  et le couple à la base de l'effecteur  $\tau(t)$  sont obtenus des équations dynamiques (1.42) et (1.43).

Le problème d'optimisation se résume donc à :

$$\min_{A_1, B_1} \Delta \quad (3.22)$$

où

$$\Delta = K_p (|\theta_1(t_f)| - |\theta_{1g}|)^2 + \sum_{j=1}^c P_j(t) \quad (3.23)$$

où  $K_p$  est une constante établie expérimentalement.  $c = 7$  est le nombre de contraintes.

Dans cette équation, les valeurs absolues de l'angle du câble sont utilisées puisque, pour chaque horizon de prédiction, la valeur de l'angle du câble  $\theta_1(t_f)$  variera de positive à négative dû à l'effet de pendule.

La figure 3.10 donne un aperçu de la fonction d'optimisation en fonction des paramètres libres  $A_1, B_1$  en excitation et lors de l'atteinte d'un objectif. Sur cette figure, on note clairement la position des pénalités par la présence de murs dans la fonction d'optimisation.

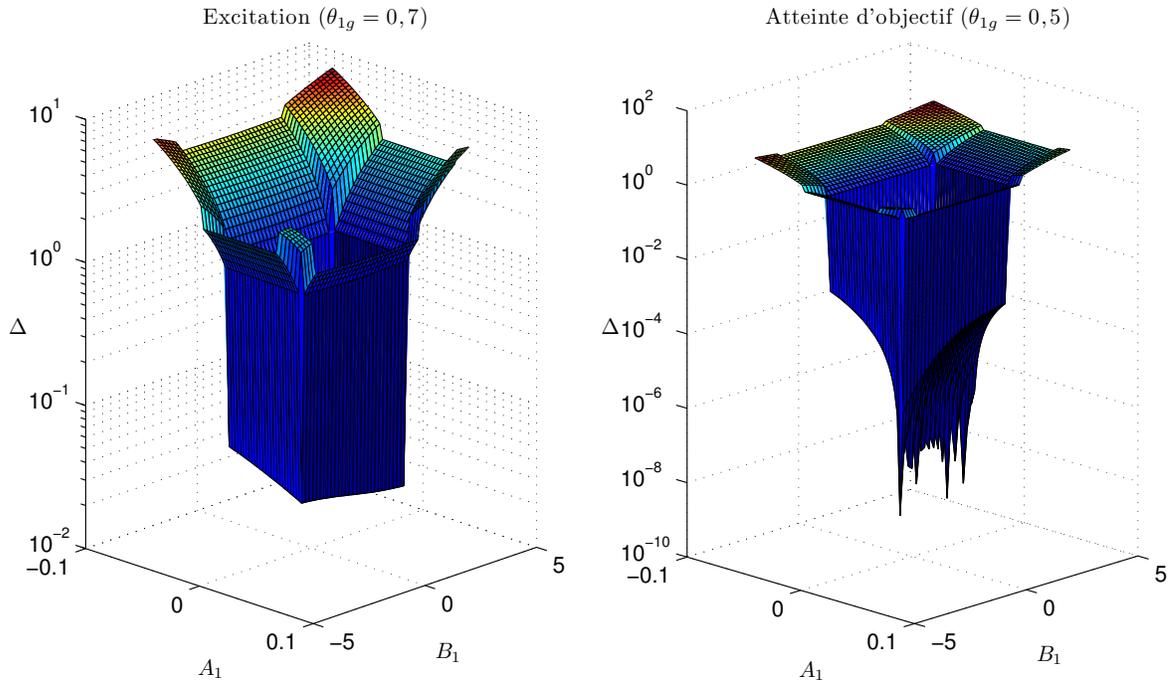


FIG. 3.10 – Représentation de la fonction d’optimisation dans le plan  $(A_1, B_1)$  en excitation et lors de l’atteinte d’un objectif.

### 3.4.2 Algorithme d’optimisation

L’objectif de l’algorithme d’optimisation est évidemment de déterminer les valeurs de  $A_1$  et  $B_1$  qui minimisent la fonction d’optimisation  $\Delta$ . Cependant, puisque cette dernière est obtenue suite à des intégrations numériques (dont l’algorithme sera présenté à la section suivante), il est primordial de limiter le nombre d’itérations afin de permettre l’exécution en ligne. Par conséquent, les méthodes classiques basées sur l’évaluation de dérivées (Newton, sécante, etc.) ne sont pas envisageables car celles-ci n’auraient pu qu’être évaluées à l’aide de différences finies. C’est pourquoi un algorithme de recherche directe, soit le Simplex de Nelder-Mead [19], a été préféré.

Par surcroît, cet algorithme est rapide et la convergence en deux dimensions est garantie pour les fonctions strictement convexes. Les paramètres universels de l’algorithme ont été choisis en raison de leur bon fonctionnement soit :

$$\alpha = 1 \quad \chi = 2 \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de réflexion,  $\chi$  est le coefficient d’expansion et  $\gamma$  est le coefficient de contraction.

Dans notre cas, le coefficient de réduction  $\sigma$  n'a pas été nécessaire, dû à la forme du problème et ne sera donc pas considéré dans les prochaines étapes. Ainsi, à partir de trois couples de départ  $\mathbf{x}_i = (A_1, B_1)_i$ , un algorithme en  $N$  itérations se déroule comme suit :

Pour  $0 \leq n \leq N$ ,

1. On incrémente l'itération,  $n = n + 1$ .
2. Si  $n = 1$ , on évalue  $\Delta(\mathbf{x}_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ .
3. On classe les couples  $\mathbf{x}_i$  pour que  $\Delta(\mathbf{x}_1) \leq \Delta(\mathbf{x}_2) \leq \Delta(\mathbf{x}_3)$ .
4. On calcule le centroïde des deux meilleurs points  $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ .
5. On calcule le point de réflexion  $\mathbf{x}_r = \bar{\mathbf{x}} + \rho(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_3)$  et on évalue  $\Delta(\mathbf{x}_r)$ .
6. Si le point de réflexion est le meilleur  $\Delta(\mathbf{x}_r) < \Delta(\mathbf{x}_1)$ , on calcule le point d'expansion  $\mathbf{x}_e = \bar{\mathbf{x}} + \chi(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}})$  et on évalue  $\Delta(\mathbf{x}_e)$ .

Si le point d'expansion est meilleur que le point de réflexion  $\Delta(\mathbf{x}_e) < \Delta(\mathbf{x}_r)$ ,

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_e$ ,  $\Delta(\mathbf{x}_3) = \Delta(\mathbf{x}_e)$ . Fin de l'itération.

Sinon,

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_r$ ,  $\Delta(\mathbf{x}_3) = \Delta(\mathbf{x}_r)$ . Fin de l'itération.

7. Si le point de réflexion est meilleur que le dernier point  $\Delta(\mathbf{x}_r) < \Delta(\mathbf{x}_3)$ , on calcule le point de contraction extérieur  $\mathbf{x}_c = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}})$  et on évalue  $\Delta(\mathbf{x}_c)$ .

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_c$ ,  $\Delta(\mathbf{x}_3) = \Delta(\mathbf{x}_c)$ . Fin de l'itération.

8. Si le point de réflexion est le pire point  $\Delta(\mathbf{x}_r) > \Delta(\mathbf{x}_3)$ , on calcule le point de contraction intérieur  $\mathbf{x}_{cc} = \bar{\mathbf{x}} - \gamma(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_3)$  et on évalue  $\Delta(\mathbf{x}_{cc})$ .

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_{cc}$ ,  $\Delta(\mathbf{x}_3) = \Delta(\mathbf{x}_{cc})$ . Fin de l'itération.

Ainsi, le triangle de base évolue dans le plan  $(A_1, B_1)$  en échangeant à chaque itération son pire sommet contre un nouveau. Les figures 3.11 et 3.12 montrent d'ailleurs la progression de l'algorithme et l'évolution de la solution dans le plan  $(A_1, B_1)$  en excitation et lors de l'atteinte d'un objectif. Quant à eux, les trois points de départ choisis pour l'algorithme sont définis par :

$$\mathbf{X}_1 = (A_1, B_1)_1 = \left( \frac{-\dot{\rho}_{max}}{4\omega}, \frac{\theta_{2max}}{2} \right) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{X}_2 = (A_1, B_1)_2 = \left( \frac{-\dot{\rho}_{max}}{4\omega}, \frac{-\theta_{2max}}{2} \right) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{X}_3 = (A_1, B_1)_3 = \left( \frac{\dot{\rho}_{max}}{4\omega}, \frac{\theta_{2max}}{2} \right). \quad (3.27)$$

Ces valeurs ont été choisies car, lorsqu'elles sont incluses dans les équations de trajectoire paramétrique (3.2) et (3.12) pour des conditions initiales et finales habituelles, elles correspondent approximativement à atteindre la moitié de l'angle maximal permis pour l'effecteur et de la vitesse permise pour l'extension du câble. Ces conditions étant associés aux fonctions de pénalité les plus contraignantes, le triangle de départ se retrouve donc approximativement au milieu de la zone exempte de pénalité, ce qui accélère la convergence.

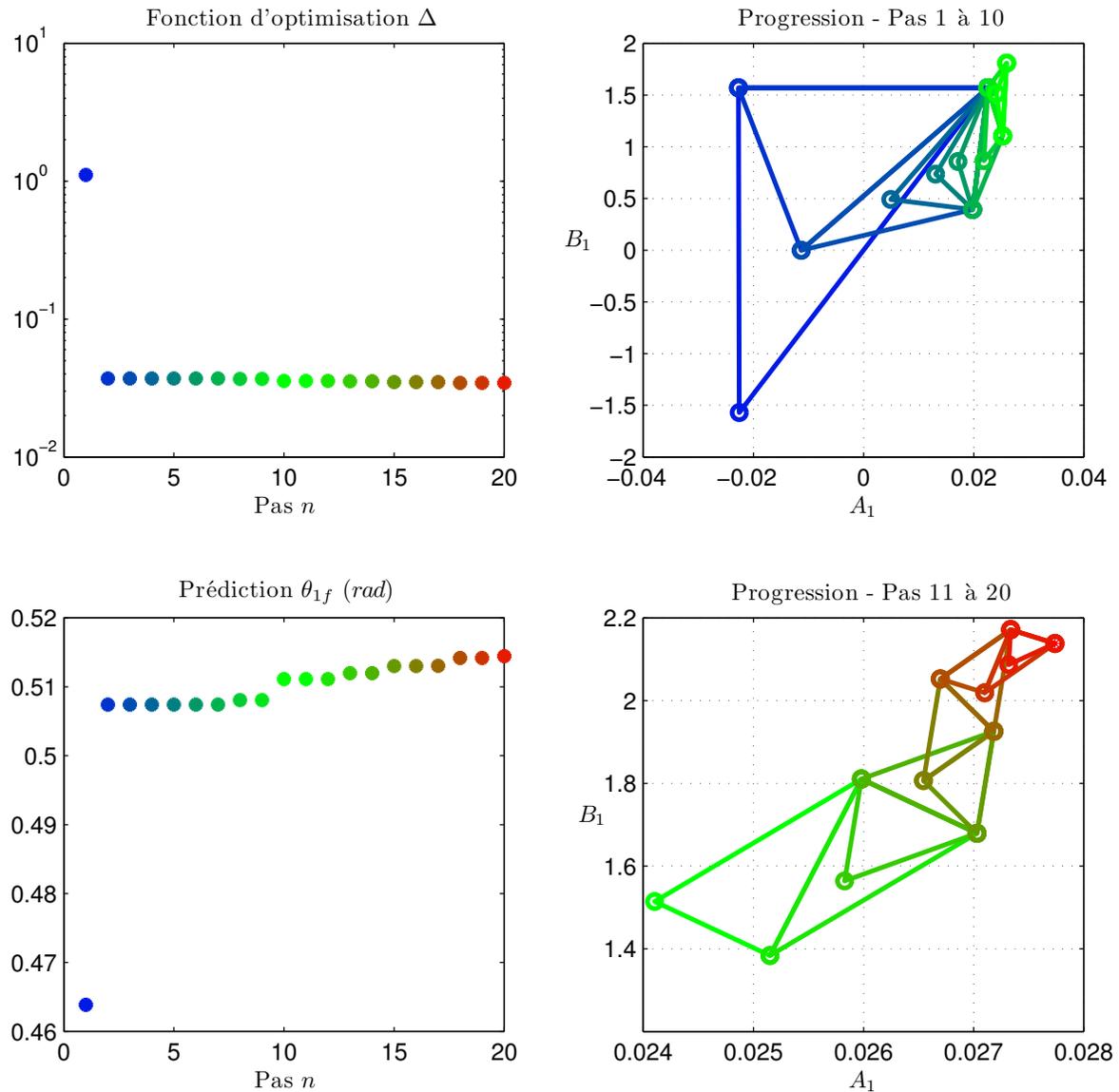


FIG. 3.11 – Progression de l'algorithme et évolution de la solution dans le plan  $(A_1, B_1)$  en excitation ( $\theta_{1g} = 0, 70$ ).

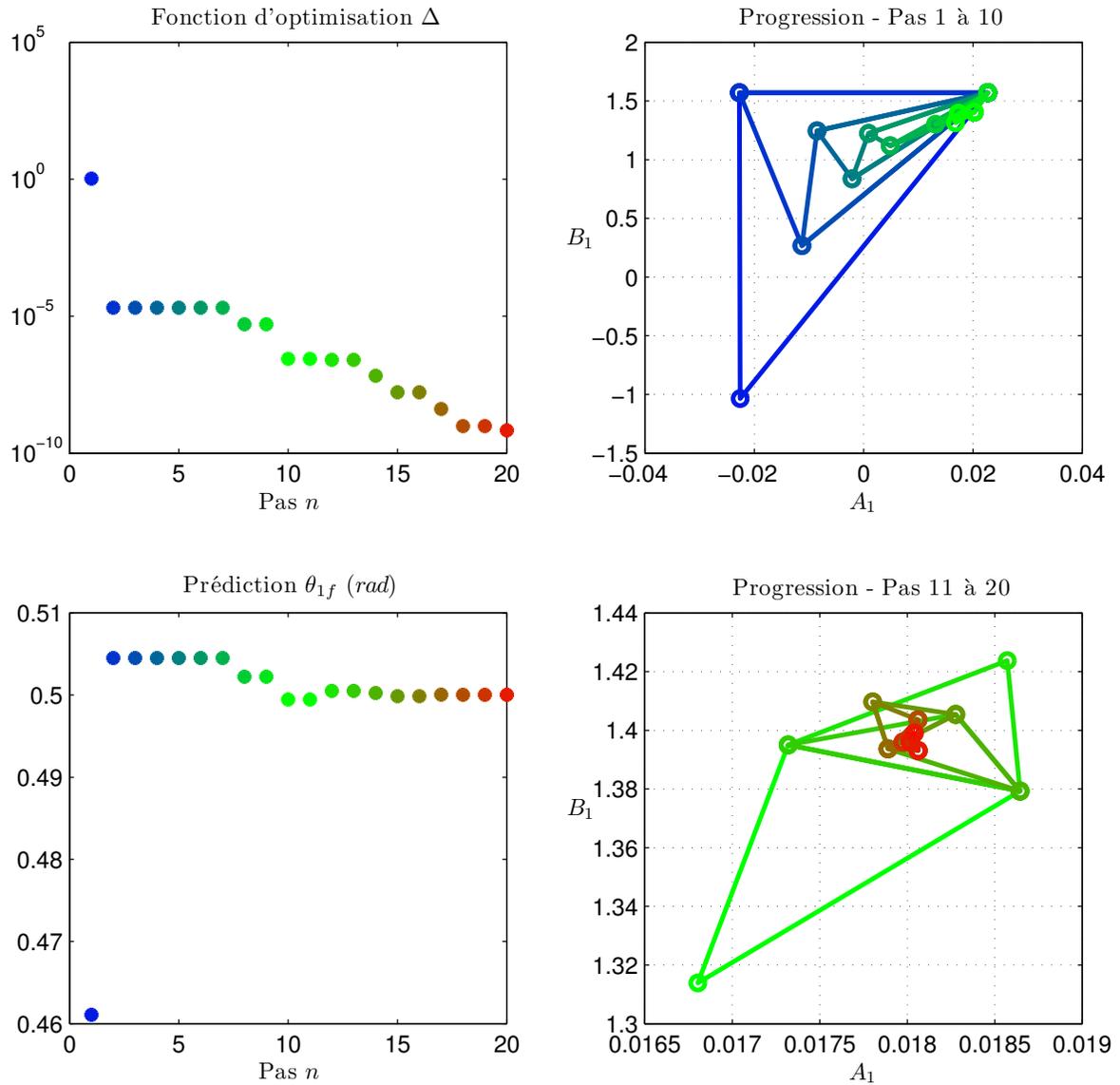


FIG. 3.12 – Progression de l’algorithme et évolution de la solution dans le plan  $(A_1, B_1)$  lors de l’atteinte d’un objectif ( $\theta_{1g} = 0,50$ ).

### 3.4.3 Algorithme d’intégration et détermination de la fréquence naturelle

Lors des validations réalisées à l’aide du robot virtuel au chapitre 2, l’intégration des équations dynamiques du mouvement a été réalisée à l’aide d’algorithmes fournis par MATLAB®. Cependant, afin de contrôler le système en temps réel au prochain chapitre, la rapidité d’exécution était de première importance, l’algorithme se devait

donc d'être plus simple et plus rapide sans trop sacrifier la précision. Pour ces raisons, l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe [23] a été retenu. Bien que sa rapidité soit légèrement inférieure à celle du même algorithme à pas variable, un pas fixe à été choisi afin de niveler le temps de calcul entre les différentes itérations.

À l'initialisation, l'angle du câble  $\theta_{1i}$  est mesuré, alors que sa vitesse est nulle par définition  $\dot{\theta}_{1i} = 0$ . Le mouvement des autres articulations est quant à lui défini à l'aide des trajectoires paramétriques présentées antérieurement. Enfin, pour des paramètres  $A_1, B_1$  connus et un horizon de prédiction  $t_f$  divisé en  $M$  pas de temps de largeur  $h$ , l'algorithme se déroule comme suit :

Pour  $0 \leq m \leq M$  :

1. On calcule la largeur du pas,

$$t_m = mh.$$

2. On évalue les coordonnées articulaires au temps  $t_m$ ,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1(t_m) & \dot{\theta}_1(t_m) \end{bmatrix}^T.$$

$$\begin{bmatrix} \rho & \dot{\rho} & \ddot{\rho} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \rho(t_m) & \dot{\rho}(t_m) & \ddot{\rho}(t_m) \end{bmatrix}^T \text{ selon (3.2), (3.3) et (3.4).}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 & \dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_2(t_m) & \dot{\theta}_2(t_m) & \ddot{\theta}_2(t_m) \end{bmatrix}^T \text{ selon (3.12), (3.13) et (3.14).}$$

3. On établit les premiers coefficients d'intégration,

$$k_{11} = h\dot{\theta}_1.$$

$$k_{12} = h\ddot{\theta}_1 \text{ où } \ddot{\theta}_1 \text{ est obtenu selon (2.45).}$$

4. On évalue les coordonnées articulaires au temps  $t_m + h/2$  et pour  $k_{1i}$ ,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1(t_m) + k_{11}/2 & \dot{\theta}_1(t_m) + k_{12}/2 \end{bmatrix}^T.$$

$$\begin{bmatrix} \rho & \dot{\rho} & \ddot{\rho} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \rho(t_m + h/2) & \dot{\rho}(t_m + h/2) & \ddot{\rho}(t_m + h/2) \end{bmatrix}^T.$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 & \dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_2(t_m + h/2) & \dot{\theta}_2(t_m + h/2) & \ddot{\theta}_2(t_m + h/2) \end{bmatrix}^T.$$

5. On établit les seconds coefficients d'intégration,

$$k_{21} = h\dot{\theta}_1.$$

$$k_{22} = h\ddot{\theta}_1.$$

6. On évalue les coordonnées articulaires au temps  $t_m + h/2$  et pour  $k_{2i}$ ,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1(t_m) + k_{21}/2 & \dot{\theta}_1(t_m) + k_{22}/2 \end{bmatrix}^T.$$

7. On établit les troisièmes coefficients d'intégration,

$$k_{31} = h\dot{\theta}_1.$$

$$k_{32} = h\ddot{\theta}_1.$$

8. On évalue les coordonnées articulaires au temps  $t_m + h$  et pour  $k_{3i}$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \theta_1(t_m) + k_{31} & \dot{\theta}_1(t_m) + k_{32} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \rho & \dot{\rho} & \ddot{\rho} \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \rho(t_m + h) & \dot{\rho}(t_m + h) & \ddot{\rho}(t_m + h) \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \theta_2 & \dot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \theta_2(t_m + h) & \dot{\theta}_2(t_m + h) & \ddot{\theta}_2(t_m + h) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

9. On établit les derniers coefficients d'intégration,

$$\begin{aligned} k_{41} &= h\dot{\theta}_1. \\ k_{42} &= h\ddot{\theta}_1. \end{aligned}$$

10. On évalue la position et la vitesse de l'angle du câble au temps  $t_{m+1}$ ,

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t_{m+1}) \\ \dot{\theta}_1(t_{m+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1\left(t_m + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})\right) \\ \dot{\theta}_1\left(t_m + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})\right) \end{bmatrix}.$$

11. On incrémente le pas,

$$m = m + 1.$$

L'horizon de prédiction est donc divisé en  $m$  points où sont calculées les positions, vitesses et accélérations de chacune des articulations. Les valeurs associées aux pénalités sont donc évaluées pour chacun de ces points, ce qui assure le respect de ces dernières.

À l'opposé, il suffirait de considérer le point  $\theta_1(t_f) = \theta_1(t_M)$  pour le calcul de la fonction d'optimisation. Cependant, puisque l'on pose d'abord la fréquence du système, il est possible que le point final de l'algorithme ne corresponde pas exactement à la fin de la demi-période, ce qui désynchroniserait le système. Or, la fréquence est fonction de la longueur du câble ainsi que du mouvement de l'effecteur et, par conséquent, de  $A_1$  et  $B_1$  tel que montré à la figure 3.13. Elle varie donc légèrement à chaque itération ce qui signifie qu'elle doit constamment être réévaluée.

Or, comme il n'y a pas de fonction analytique permettant de déterminer la fréquence du système, celle-ci doit l'être à travers l'algorithme. Cette dernière est ici obtenue en interpolant (ou extrapolant) le temps pour lequel la vitesse de l'angle câble redevient nulle ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ) à partir des  $m$  points calculés. On utilise ensuite les valeurs de  $\theta_1$  et de  $\omega$  issues de l'interpolation dans la fonction d'optimisation et dans la prochaine itération de l'algorithme d'optimisation.

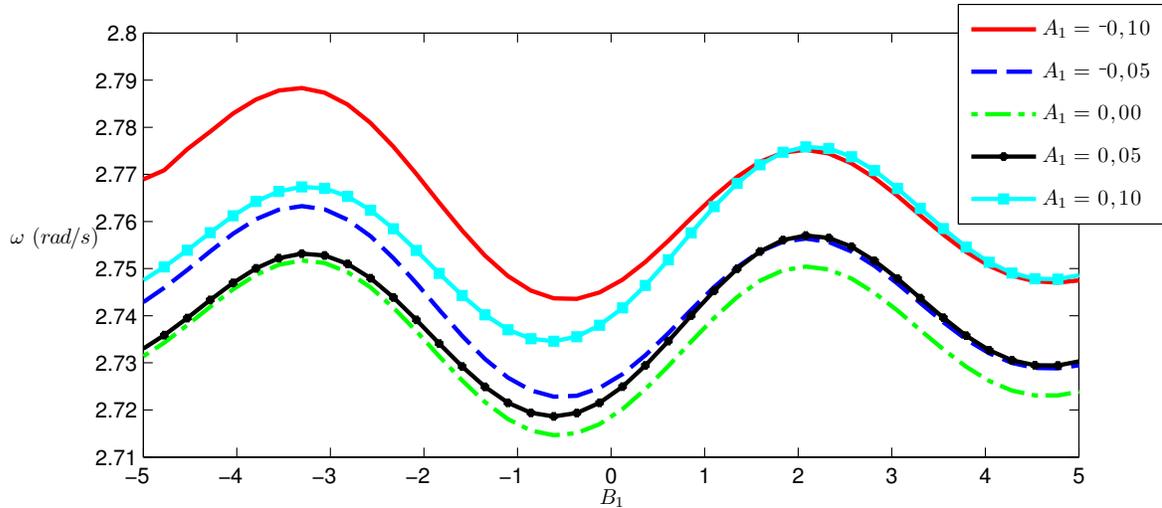


FIG. 3.13 – Fréquence naturelle du système en fonction des paramètres libres  $A_1$  et  $B_1$  pour une longueur de câble de  $\rho = 1,2$  m.

### 3.4.4 Structure de la commande

Les algorithmes de planification locale, soit les algorithmes d'optimisation et d'intégration, ainsi que la détermination de la fréquence naturelle, ont ensuite été intégrés dans un contrôleur. La structure du contrôleur utilisé est montrée à la figure 3.14. Ainsi, pour chaque pas de temps  $k$ , si une vitesse nulle est atteinte pour l'angle du câble ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ), le nombre de pas de calcul de l'algorithme d'optimisation  $n$  est remis à zéro et les points de départ décrits à la section 3.4.2 sont utilisés pour l'horizon suivant. Puisque le système est discret, ces vitesses nulles sont simplement détectées en repérant un changement de signe pour la vitesse du câble  $\dot{\theta}_1$ .

$N$  pas de l'algorithme d'optimisation incluant la définition des paramètres libres, l'intégration des équations dynamiques, la détermination de la fréquence naturelle et l'évaluation de la fonction d'optimisation sont ensuite réalisés. Puis, les trajectoires désirées sont envoyées au contrôleur PID opérant les moteurs. Enfin, les positions articulaires sont mesurées du robot et le prochain pas de calcul est débuté. Si la vitesse de l'angle du câble n'est pas nulle ( $\dot{\theta}_1 \neq 0$ ), les valeurs précédentes des paramètres libres ( $A_1, B_1$ ) sont maintenues.

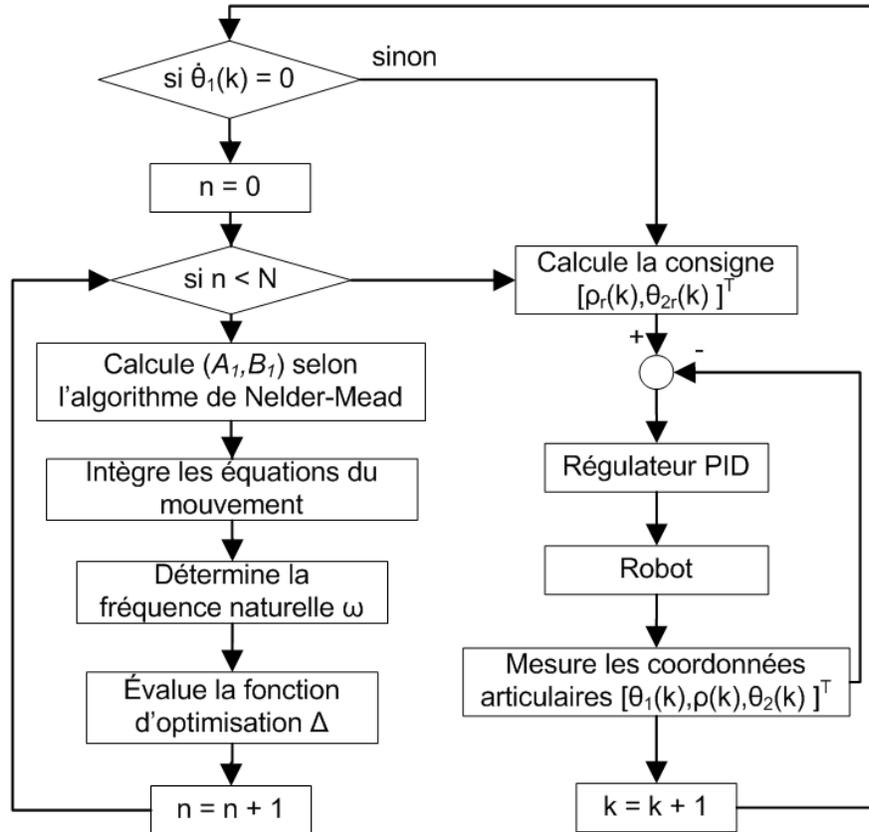


FIG. 3.14 – Structure d’un contrôleur à  $N$  pas d’optimisation.

### 3.5 Évaluation à l’aide du robot virtuel

Tout comme au chapitre précédent, la planification de trajectoires locales est évaluée à l’aide du robot virtuel présenté à la section 2.7. D’abord, les performances du système sont vérifiées en utilisant le même objectif que pour les trajectoires globales soit celui présenté à la section 2.3.1. Les figures 3.15 et 3.16 montrent l’évolution des coordonnées et des efforts articulaires lors de cette simulation en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 3.17 montre l’évolution des erreurs de prédiction pour l’angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l’annexe C.

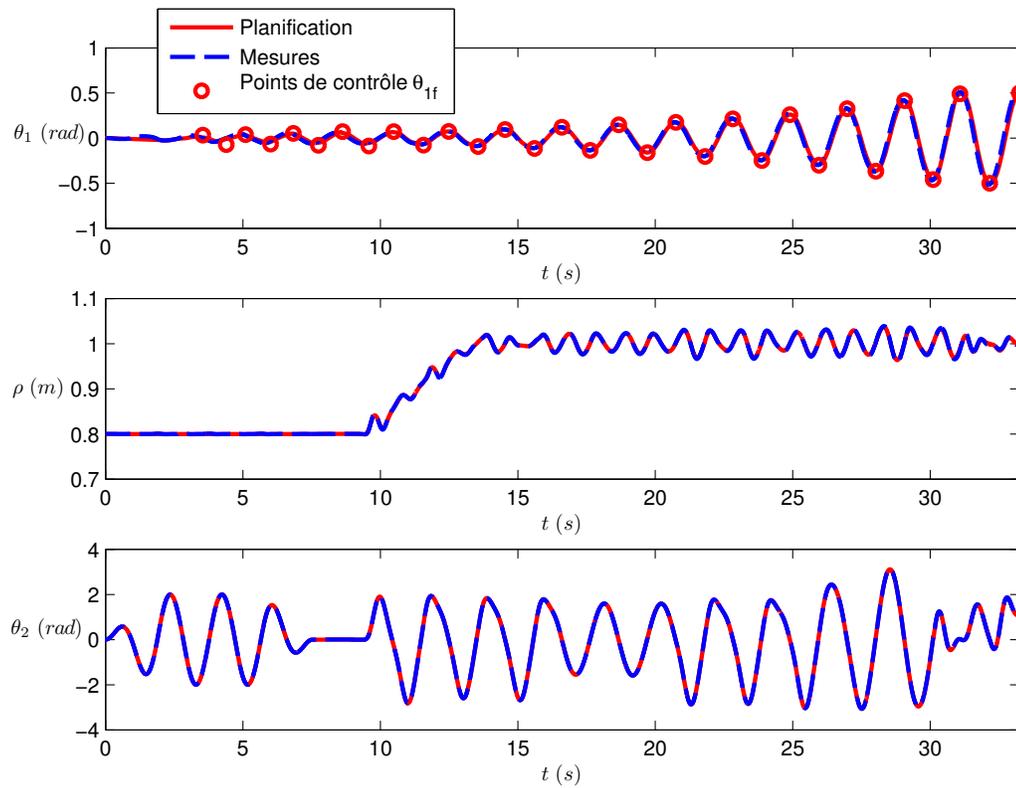


FIG. 3.15 – Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel.

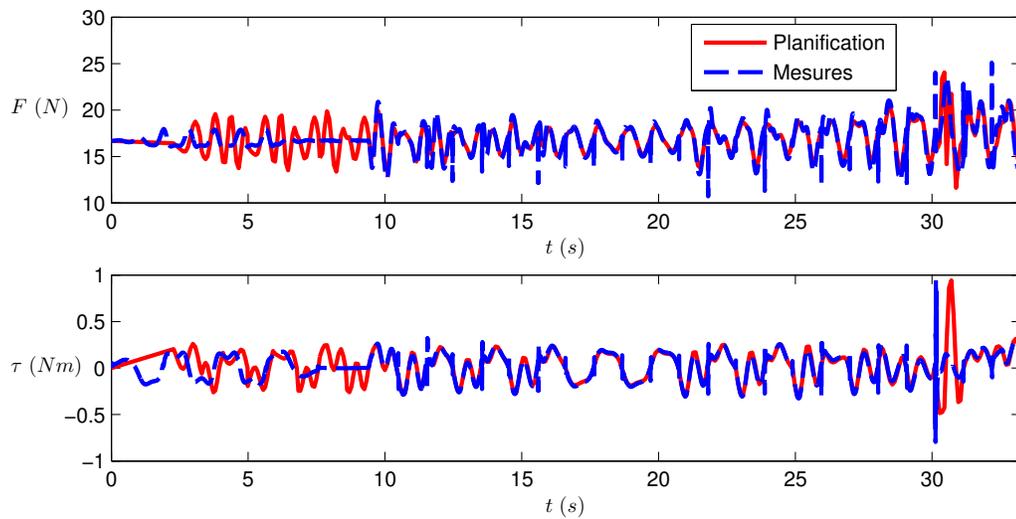


FIG. 3.16 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel.

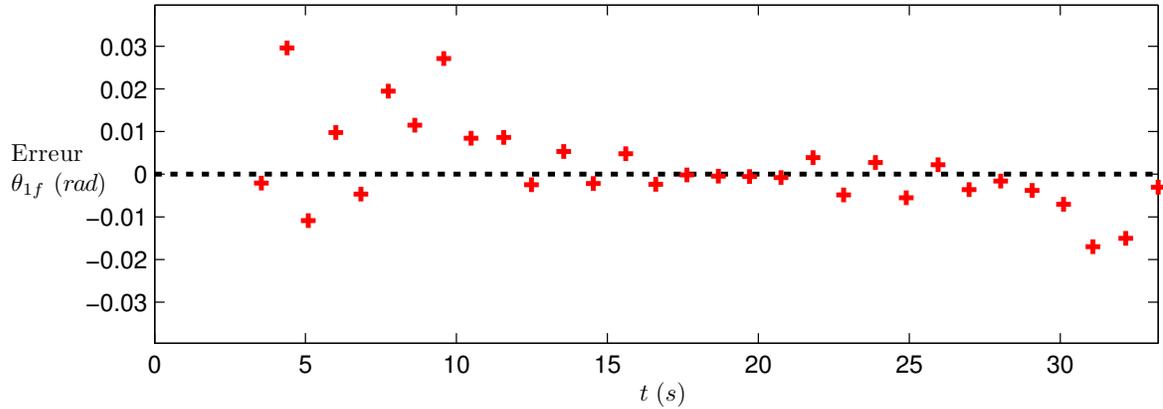


FIG. 3.17 – Évolution des erreurs de prédiction sur l’angle du câble  $\theta_1$  pour la planification locale implantée dans le robot virtuel.

En supposant un modèle idéal, il était prévisible que les résultats allaient être satisfaisants. Toutefois, on note que la différence entre les valeurs désirées et obtenues pour l’angle du câble  $\theta_1(t)$  n’augmente pas avec le temps contrairement à ce qui se produisait pour les trajectoires globales. Ainsi, les écarts entre le robot et son modèle, bien qu’ils ne soient qu’attribuables à la linéarisation de ce dernier, ne s’amplifient pas avec le temps, ce qui suggère une amélioration par rapport aux trajectoires globales.

Comme au chapitre 2, afin de mieux évaluer la planification, le modèle du robot virtuel a été perturbé afin de simuler les erreurs de modèle. Les paramètres ont été modifiés de la même façon que pour les trajectoires globales et les valeurs utilisées sont présentées au tableau 2.1. Ainsi, pour la même trajectoire que précédemment, les figures 3.18 et 3.19 montrent l’évolution des coordonnées et des efforts articulaires par rapport aux valeurs prévues. De plus, la figure 3.20 montre l’évolution des erreurs de prédiction pour l’angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l’annexe C.

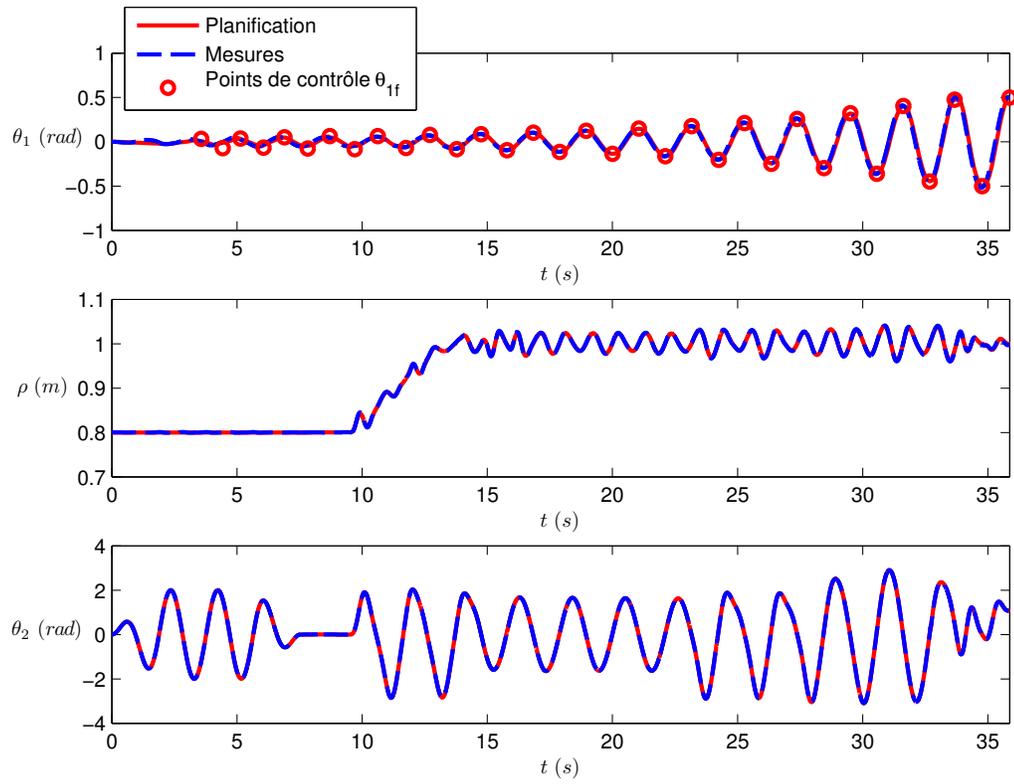


FIG. 3.18 – Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé.

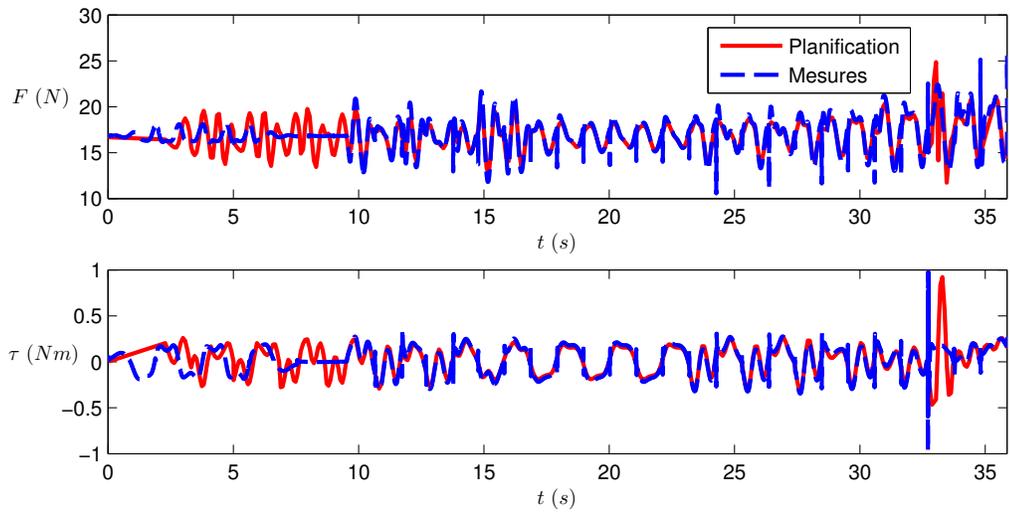


FIG. 3.19 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé.

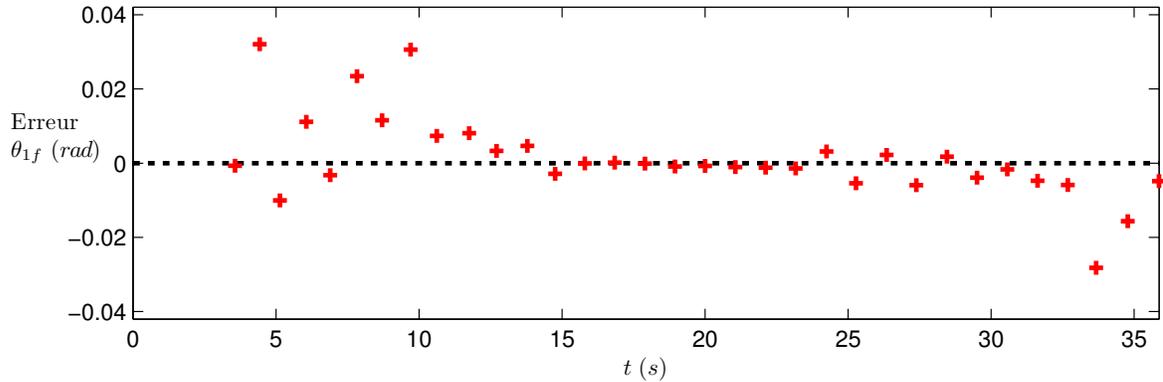


FIG. 3.20 – Évolution des erreurs de prédiction sur l’angle du câble  $\theta_1$  pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé.

Dans ce cas, grâce à la rétroaction effectuée à chaque horizon de prédiction sur la trajectoire de l’articulation libre, on note que les erreurs de modèle ne s’amplifient pas. En effet, la différence entre les valeurs désirées et obtenues pour l’angle du câble  $\theta_1(t)$  ne dépasse pas 0,04 rad ( $2,3^\circ$ ) alors qu’elle atteignait jusqu’à 0,45 rad ( $25,8^\circ$ ) pour la planification globale.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que, dans le cas du modèle perturbé, un cycle de plus est réalisé avant d’atteindre la valeur finale ce qui démontre la capacité d’adaptation de la commande présentée ici. En échange, la qualité de la prédiction des forces et des couples est légèrement inférieure. Toutefois, ces valeurs n’ont que très peu d’intérêt par rapport à l’angle du câble, car elles ne servent qu’à vérifier le respect des limites. Une prédiction généralement bonne est donc tout à fait acceptable dans ce cas.

Ainsi, il est clair que la planification locale est nettement supérieure à la planification globale présentée au chapitre 2. Elle est, entre autres, excellente du point de vue de la stabilité et de la précision des résultats tout en possédant une grande adaptabilité. De plus, puisque sa construction est simple et ses algorithmes sont rapides, la planification locale peut être réalisée en temps réel ce qui augmente grandement la portée du projet. Une connaissance approfondie du mécanisme n’est donc plus nécessaire à son utilisation et plusieurs objectifs peuvent être atteints successivement sans retourner à l’état d’équilibre. Puisque la planification locale est satisfaisante à tous les points de vue, elle est implantée dans un prototype tel que décrit au prochain chapitre.

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre a exposé la planification de trajectoires locales, soit la solution retenue. D'abord, la motivation derrière ce choix ainsi que la stratégie générale de planification ont été exposées. Puis, l'horizon de prédiction a été établi afin de construire des trajectoires paramétriques pour chacune des articulations actionnées.

Une brève revue littéraire conduisant à la définition des trajectoires et le choix des conditions frontières ont ensuite été présentés pour chaque articulation. Le tout a été suivi par la description de la fonction d'optimisation, de son algorithme et de la gestion de la fréquence naturelle permettant de définir le comportement de l'articulation libre. Enfin, une évaluation à l'aide du robot virtuel a permis de démontrer les qualités de la planification locale lorsque implantée dans un contrôleur. En effet, il a été possible de maintenir la différence entre les valeurs prévues et obtenues pour l'angle du câble à moins de  $0,04$  rad ( $2,3^\circ$ ), soit une erreur presque dix fois inférieure à la planification globale. Ainsi, puisque les résultats sont très satisfaisants, les algorithmes développés ici sont implantés dans un prototype au prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Prototype et validation expérimentale

Ce quatrième et dernier chapitre décrit la conception du prototype et la validation expérimentale des algorithmes développés au chapitre précédent. D'abord, la conception mécanique du prototype et les critères de design ayant influencé cette dernière sont détaillés. Le tout débute par une description de l'architecture générale et est suivi par la présentation des principales composantes. Puis, l'implantation des algorithmes dans le contrôleur et la prise de mesures sont discutées. Enfin, la validation expérimentale comprenant la réalisation de trajectoires simples et complexes ainsi que les effets des perturbations et limites physiques du mécanisme complètent ce chapitre.

## 4.1 Conception mécanique

Afin de bien valider les performances des algorithmes développés précédemment, la construction d'un prototype physique s'imposait. En effet, bien que l'évaluation faite à l'aide du robot virtuel au chapitre précédent se soit montrée très satisfaisante, il s'agissait toujours de simulations. D'ailleurs, les effets dus à la flexion des câbles ont été ignorés, tout comme les erreurs de mesures. On a tenté de simuler ces erreurs expérimentales à l'aide du robot virtuel perturbé mais, encore une fois, ceci n'était qu'une représentation de la réalité. Pour toutes ces raisons, un prototype physique du mécanisme a été réalisé et un résumé de sa conception est présenté aux prochaines sections. L'ensemble des plans nécessaires à la fabrication et à l'assemblage du prototype sont présentés à l'annexe E.

### 4.1.1 Architecture générale

Pour débiter, le mécanisme devait être confiné dans un cube de  $2\text{m} \times 2\text{m} \times 2\text{m}$  servant à la fois de support aux diverses composantes et de cage de sécurité. Des glissières étaient intégrées à chacune de arêtes afin de pouvoir y fixer les composantes. De plus, il était possible d'ajouter des barres de soutien, ce qui a été fait au milieu de la face supérieure pour centrer le mécanisme.

Dans la description du mécanisme présentée à la section 1.2, une des premières hypothèses était que le mouvement de ce dernier soit confiné au plan. Bien que cette hypothèse simplifie grandement la résolution du problème, elle représente un grand défi pour la conception du prototype car l'effecteur aura naturellement tendance à pivoter autour de l'axe du câble. L'effet de plan serait donc perdu, ce qui modifierait complètement la dynamique. Ainsi, pour que tous les développements précédents soient valides, il est primordial que le robot soit réellement confiné au plan.

Une première approche possible aurait été d'appuyer le robot sur une surface verticale tel un mur afin de restreindre le mouvement au plan du mur. Toutefois, le contact entre le robot et le mur produirait une friction qui complexifierait les équations différentielles du système et affecterait grandement la qualité de la prédiction. La valeur de cette friction serait, entre autres, fonction de la vitesse du mécanisme, de l'angle entre

le câble et le mur, des surfaces de contact et même de la force de contact qui pourrait varier avec le temps. Celle-ci serait donc très difficile à évaluer et c'est pourquoi cette façon de faire a été rejetée.

L'approche retenue a plutôt été d'augmenter le nombre de câbles afin de créer un système similaire à un trapèze ou une balançoire, tel que montré à la figure 4.1. Ainsi, en suspendant l'effecteur à deux câbles espacés dans le plan normal au mouvement, il est possible de limiter la rotation du mécanisme. En effet, les câbles s'opposent mutuellement pour atténuer les mouvements des rotation dans d'autres plans que celui du mouvement.



FIG. 4.1 – Architecture générale du prototype.

Grâce aux glissières présentes sur la barre de soutien (en gris sur la figure 4.1), il a aussi été possible de tester différents écartements des points d'attache dans le plan normal au mouvement. Cependant, la position à angle droit a été préférée parce qu'elle offre le meilleur compromis entre l'espace occupé, la stabilité et le couple moteur.

Bien que cette solution n'assure pas un mouvement plan parfait, elle n'ajoute pas de frottement dans le système car aucun appui n'est nécessaire et, en supposant que l'on puisse attacher ces câbles à une même structure, elle n'augmente pas les coûts d'infrastructure. En échange, il sera nécessaire de bien coordonner la longueur des câbles et de maintenir la symétrie afin d'obtenir le mouvement désiré et c'est ce qui sera discuté à la prochaine section.

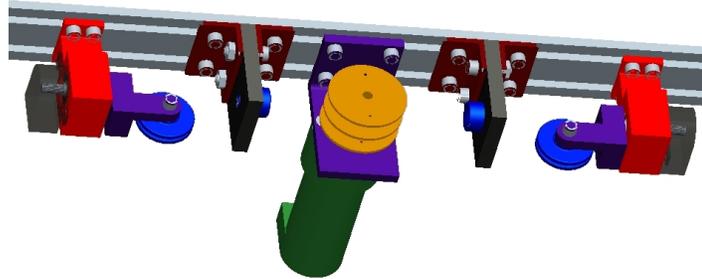
### 4.1.2 Extension des câbles

Pour permettre l'extension des câbles  $\rho$ , des moteurs rotatifs actionnant des enrouleurs autour desquels les câbles sont enroulés ont été préférés. Bien que les longueurs de câble soient relativement courtes ( $< 2$  m), ce choix s'est montré évident dans l'optique de pouvoir adapter le robot à de plus grands espaces de travail.

Tel que mentionné à la section précédente, deux câbles espacés dans le plan normal ont été choisis afin de maintenir le mécanisme dans le plan et ceux-ci doivent être de la même longueur par définition. Il aurait été simple d'utiliser un actionneur pour chaque câble et de les coordonner à l'aide du contrôleur. Cependant, cette façon de faire aurait entraîné des problèmes de synchronisation et l'introduction d'erreurs entre les longueurs des câbles. Par ailleurs, l'utilisation de deux moteurs augmente évidemment les coûts d'infrastructure ce qui est contraire au but de ce projet.

Ainsi, pour assurer la synchronisation des deux câbles, un seul moteur possédant un enrouleur double a été choisi. De cette façon, les deux câbles sont enroulés simultanément ce qui maintient la perpendicularité entre l'axe de la base et le plan du mouvement. L'enrouleur est quant à lui centré par rapport aux points de pivot des câbles et, en fixant les câbles en deux points diamétralement opposés de l'enrouleur, on obtient un mouvement parfaitement simultané de ceux-ci.

Les câbles sont ensuite dirigés à travers des poulies pour maintenir l'espacement. Ces dernières sont décrites à la section 4.1.4. Enfin, des guides ont été ajoutés entre l'enrouleur principal et les poulies afin de limiter les effets de l'enroulement sur la mesure de l'angle du câble  $\theta_1$ . Le système complet permettant l'extension des câbles est présenté à la figure 4.2.



(a) Modèle CAO.



(b) Prototype.

FIG. 4.2 – Architecture du système permettant l'extension des câbles incluant l'enrouleur double, les guides et les poulies.

Le moteur choisi devait quant à lui permettre d'enrouler le câble à une vitesse suffisante tout en fournissant la tension nécessaire au bon fonctionnement. Ces valeurs ont donc simplement été ajustées en fixant le rayon de l'enrouleur qui définit à la fois la relation entre la vitesse du moteur et celle du câble et la relation entre le couple moteur et la tension selon :

$$\dot{\rho} = \omega_m r \quad (4.1)$$

$$F = \frac{\tau_m}{r} \quad (4.2)$$

où  $\dot{\rho}$  est la vitesse d'élongation du câble,  $\omega_m$  est la vitesse angulaire du moteur,  $r$  est le rayon de l'enrouleur,  $F$  est la tension dans le câble et  $\tau_m$  est le couple moteur.

De leur côté, les câbles devaient présenter deux caractéristiques importantes. Premièrement, ils devaient posséder une masse et une inertie négligeables car ces dernières n'ont pas été considérées dans la dynamique du système. Puis, leur rigidité en flexion devait être suffisamment élevée pour empêcher la flexion de ceux-ci à basse tension, ce qui entraînerait une distorsion du modèle dynamique. Enfin, les contraintes relatives à l'extension des câbles suite au choix de la motorisation sont présentées au tableau 4.1.

TAB. 4.1 – Contraintes relatives à l'extension des câbles.

Description		<i>Minimum</i>	<i>Maximum</i>
Longueur du câble	$\rho$ (m)	0,30	1,70
Vitesse de l'extension	$\dot{\rho}$ (m/s)	-0,28	0,28
Tension dans le câble	$F$ (N)	0,00	44,5

### 4.1.3 Balancement de l'effecteur

Pour ce qui est du balancement de l'effecteur, plusieurs facteurs étaient à considérer. D'abord, la masse doit être relativement faible, afin de limiter les efforts articulaires tant au niveau du couple que de la tension. À l'opposé, la masse de l'effecteur  $m_2$  et l'excentricité de celle-ci  $d_2$  doivent être suffisantes pour permettre l'excitation du système. Ainsi, l'objectif de base est de maximiser le rapport entre la masse de l'effecteur  $m_2$  et la masse de la base  $m_1$ .

En revanche, si la masse de la base est trop faible, le couple créé par le moteur entre les deux corps ne permettra pas de faire pivoter l'effecteur. C'est plutôt la base qui pivotera et ceci se traduira par une flexion du câble. Ainsi, il a été établi que la masse de la base devait être supérieure à celle de l'effecteur et c'est pourquoi le moteur sera fixé à la base et non mobile avec l'effecteur. De plus, puisque l'on a supposé, lors de la dérivation du modèle dynamique, que la base et les câbles étaient parfaitement alignés, des tiges rigides ont été incluses à l'extrémité des câbles afin de déplacer le premier point de flexion de ces derniers, ce qui empêche la base de pivoter autour des câbles. Cette façon de faire est d'ailleurs utilisée pour la plupart des balançoires commerciales destinées aux enfants.

Le montage des différents corps se devait aussi d'être symétrique afin de réduire le couple induit dans les autres plans par effet de giration. La base et l'effecteur doivent par conséquent être centré par rapport aux points d'attache des câbles. Toutefois, l'effecteur doit aussi pouvoir effectuer des rotations libres autour de la base et, donc, du moteur. La solution retenue est d'inclure le moteur à l'intérieur de l'effecteur qui est lui-même fixé tel une fourchette autour de ce dernier.

L'architecture présentée à la figure 4.3 a donc été choisie pour la base et l'effecteur. D'abord, la base est soutenue par une tige d'aluminium permettant un bon espacement des deux câbles pour minimiser les effets de rotations hors plan. Le moteur y est ensuite joint et centré par un support. Celui-ci se retrouve sous la tige afin d'obtenir une configuration plus stable.

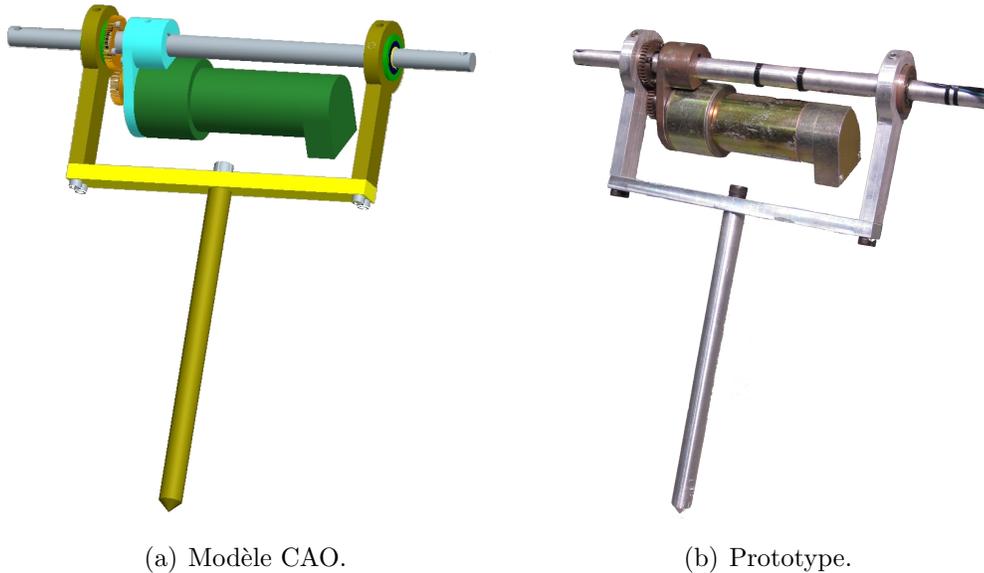


FIG. 4.3 – Architecture de la base et de l'effecteur.

Quant à lui, l'effecteur est soutenu par des roulements à billes appuyés sur la tige et il est relié au moteur par un système d'engrenages. Le choix des engrenages a d'ailleurs été optimisé afin d'obtenir la meilleure combinaison de couple et de vitesse. La majeure partie de la masse de l'effecteur est éloignée du point de rotation autour de la base afin d'augmenter l'excentricité et, par conséquent, les effets du balancement. Enfin, les contraintes relatives au balancement de l'effecteur suite au choix de la motorisation sont présentées au tableau 4.2.

TAB. 4.2 – Contraintes relatives au balancement de l'effecteur.

Description		<i>Maximum</i>
Rotation de l'effecteur	$\theta_2$ (rad)	$\pm 5\pi/4$
Vitesse de rotation	$\dot{\theta}_2$ (rad/s)	$\pm 19,8$
Couple à l'effecteur	$\tau$ (N·m)	$\pm 1,58$

#### 4.1.4 Mouvement de l'angle du câble

Le mouvement de la variable libre  $\theta_1$ , soit l'angle du câble, doit être fluide afin de simuler une articulation purement rotoïde. Or, si l'on suppose que le câble est simplement attaché, ce dernier pivoterait dans son œillet d'attache, ce qui entraînerait beaucoup de friction.

De plus, le mouvement de l'angle du câble doit aussi être combiné au mouvement d'enroulement des deux câbles et ce, sans que l'un n'affecte l'autre. Puisque les câbles doivent être séparés l'un de l'autre dans le plan normal, des poulies ont été fixées dans ce plan pour favoriser l'extension. Puis, ces dernières ont été montées sur des axes libres dans le plan du mouvement qui sont, quant à eux, supportés par des roulements à billes. Ceci assure souplesse et fluidité du mouvement et concentre les effets de rotations en un point afin d'imiter une liaison rotoïde. Puisque l'axe de rotation des poulies est perpendiculaire à l'axe d'enroulement, les deux mouvements articulaires, soit l'angle  $\theta_1$  et l'extension  $\rho$  du câble, sont découplés. L'architecture du système est d'ailleurs présentée à la figure 4.4.

Enfin, les poulies ont été conçues avec des gorges profondes et minces afin d'empêcher le câble de sortir de celles-ci lorsque l'angle d'inclinaison  $\theta_1$  est important et pour maintenir une bonne linéarité entre le mouvement de la poulie et celui du câble.

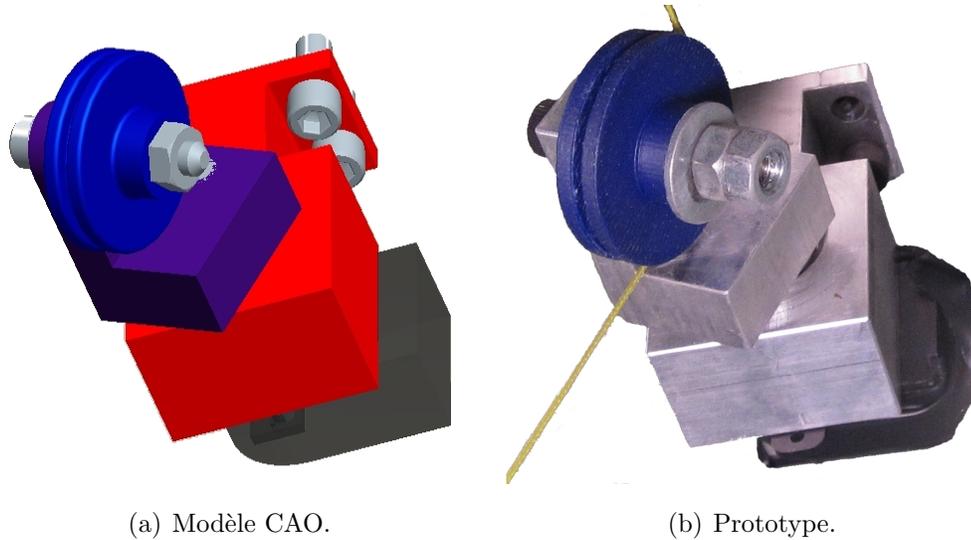


FIG. 4.4 – Architecture du système permettant de découpler l’angle et l’extension du câble.

#### 4.1.5 Paramètres physiques du prototype

Suite à la conception et à la fabrication du mécanisme, les paramètres du système ont été établis à partir des modèles CAO et de mesures expérimentales. Un ajustement final des paramètres a ensuite été réalisé une fois le montage réalisé afin de maximiser la qualité des résultats. Le tableau 4.3 présente donc les paramètres considérés pour la validation expérimentale.

TAB. 4.3 – Paramètres du prototype considérés pour la validation expérimentale.

Description		$i = 1$	$i = 2$
Masse	$m_i$ (kg)	1,291	0,404
Inertie	$I_i$ (kg·m <sup>2</sup> )	0,004	0,005
Position du centre de masse	$d_i$ (m)	0,046	0,033
Longueur de l’effecteur	$L$ (m)	0,300	

## 4.2 Commande et mesures

Les algorithmes de planification et de commande décrits aux chapitres 2 et 3 ont ensuite été intégrés dans un contrôleur en temps réel. Celui-ci a été réalisé à l'aide de RT-LAB<sup>1</sup> et opéré sous le système d'exploitation QNX<sup>2</sup>. Ces systèmes ont été choisis afin de permettre une fréquence d'asservissement de 500 Hz, ce qui correspond à une fréquence d'asservissement couramment employée en robotique et ce qui avait été considéré pour le robot virtuel.

### 4.2.1 Commande multi-pas

En réalité, le temps de calcul associé à l'algorithme de planification locale présenté antérieurement était toutefois supérieur au pas d'asservissement (0,002 s). La planification a donc été séparée en plusieurs pas. Ainsi, seulement  $M = 4$  itérations de l'algorithme d'optimisation (voir section 3.4.2) ont pu être réalisées par pas d'asservissement et un total de  $N = 6$  pas (0,012 s) ont donc été nécessaires pour définir les paramètres libres ( $A_1, B_1$ ). Pour ce qui est de l'algorithme d'intégration des équations dynamiques (voir section 3.4.3), 12 pas ont été requis.

La structure du contrôleur multi-pas utilisé est montrée à la figure 4.5. Ainsi, pour chaque pas de temps  $k$ , si le nombre de pas d'asservissement calculés  $n$  est inférieur au nombre maximal  $N$ ,  $M$  pas de l'algorithme d'optimisation incluant la définition des paramètres libres, l'intégration des équations dynamiques, la détermination de la fréquence naturelle et l'évaluation de la fonction d'optimisation sont réalisés en utilisant les valeurs précédentes de ( $A_1, B_1$ ) comme point de départ. Puis, les trajectoires désirées sont envoyées au contrôleur PID opérant les moteurs. Enfin, les positions articulaires sont mesurées et le prochain pas de calcul est débuté.

Finalement, lorsqu'une vitesse nulle est atteinte pour l'angle du câble ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ), le nombre de pas de calcul est remis à zéro et les points de départ décrits à la section 3.4.2 sont utilisés pour l'horizon suivant.

---

<sup>1</sup>Le site web de Opal-RT RT-LAB est <http://www.rt-lab.com/>

<sup>2</sup>Le site web de QNX Software Systems est <http://www.qnx.com/>

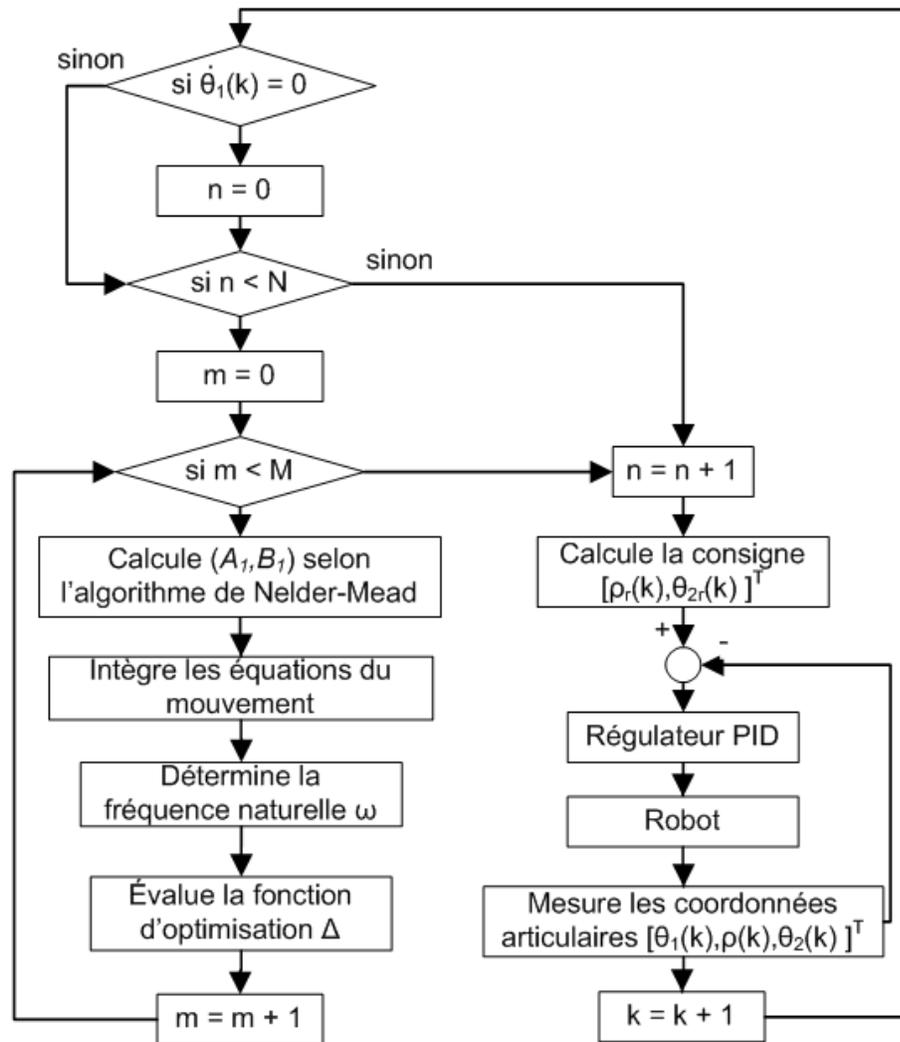


FIG. 4.5 – Structure d'un contrôleur à  $N$  pas d'asservissement comprenant  $M$  itérations par pas de l'algorithme d'optimisation.

### 4.2.2 Asservissement des moteurs

Les moteurs ont été asservis en courant à l'aide d'un système d'amplification fourni par le Laboratoire de robotique de l'Université Laval. Comme le couple et le courant sont linéairement liés, il a été possible de réguler directement le couple tel qu'il a été fait pour le robot virtuel. Ceci aurait en échange été plus difficile à l'aide de système standard régulant la tension (voltage).

### 4.2.3 Mesures des positions articulaires

Pour les articulations actionnées  $\rho$  et  $\theta_2$ , les mesures ont été prises directement à partir des encodeurs présents sur les moteurs. Les valeurs ont ensuite été corrigées directement dans le contrôleur afin de traduire les déplacements moteur en coordonnées articulaires. Ceci a entre autres permis de rendre transparent les impacts des rapports de réduction, du rayon de l'enrouleur et du système de transmission à la base de l'effecteur dans la commande.

Pour mesurer l'angle du câble  $\theta_1$ , des encodeurs ont été ajoutés aux axes de support des poulies décrits antérieurement et montrés à la figure 4.4. L'acquisition des mesures a été faite à la fréquence d'asservissement (500 Hz) et des filtres numériques passe-bas, soit des filtres de Butterworth discrets [24] avec une fréquence de coupure de 20 Hz, ont été ajoutés pour éliminer les erreurs de mesure dues à la vibration dans les câbles. La résolution des différentes mesures est ainsi présentée au tableau 4.4.

TAB. 4.4 – Résolution des mesures des positions articulaires fournies par les encodeurs.

Description		Résolution
Angle du câble	$\theta_1$ (rad)	$1,53 \times 10^{-3}$
Longueur du câble	$\rho$ (m)	$2,48 \times 10^{-6}$
Angle de l'effecteur	$\theta_2$ (rad)	$1,28 \times 10^{-4}$

## 4.3 Validation expérimentale

Suite à la réalisation du prototype et à l'implantation du système de commande et de mesure présentés antérieurement, la dernière étape est évidemment la validation expérimentale des méthodes de planification. Toutefois, la nécessité d'utiliser une trajectoire d'excitation pour démarrer la planification locale est d'abord abordée. Puis, la réalisation de trajectoires simples (un objectif) et complexes (plusieurs objectifs) sont successivement présentées. Enfin, les effets des perturbations et les limitations physiques du mécanisme sont discutées.

### 4.3.1 Trajectoire initiale d'excitation

Tel que présenté précédemment, l'algorithme de planification locale débute lorsque la vitesse est nulle pour l'angle du câble ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ), ce qui correspond au point de repos. Ainsi, il aurait été normal de croire que l'algorithme peut débiter sans perturbation extérieure.

Cependant, lorsque l'angle du câble est faible, il est difficile de faire de bonnes prédictions car la flexion et la vibration dans le câble surpassent les effets des excitations provenant des articulations actionnées. Ainsi, il devient difficile de synchroniser le mécanisme avec ses propres oscillations, ce qui rend les départs lents et ardu. Ce phénomène avait d'ailleurs déjà été étudié par Gore [16] lorsqu'un humain commence à se balancer à partir du repos.

Pour ces raisons, des trajectoires d'excitation à amplitude et fréquence fixe ont été utilisées pour le balancement de l'effecteur afin de débiter le mouvement. En fixant la fréquence près de la fréquence naturelle du système, on crée une oscillation de base permettant d'atténuer l'impact des effets de flexion et de vibration sur la mesure de l'angle du câble  $\theta_1$ . Il est alors possible de synchroniser le système et l'algorithme est débiter. Dans les développements suivants, la trajectoire initiale d'excitation sera donc utilisée sur une durée d'environ 15 s à 20 s pour toute trajectoire issue de la planification locale.

### 4.3.2 Réalisation de trajectoires simples

D'abord, les performances du système ont été vérifiées en utilisant le même objectif que pour les évaluations à l'aide du robot virtuel, soit celui présenté à la section 2.3.1. Cependant, contrairement aux chapitres précédents, le prototype sera ici directement utilisé pour remplacer le robot virtuel. Ainsi, les méthodes de planification globale du chapitre 2 et locale du chapitre 3 ont pu être comparées et évaluées dans une situation réelle.

### 4.3.2.1 Planification globale

Pour l'objectif décrit à la section 2.3.1, une trajectoire poly-sinusoidale a été générée pour les articulations actionnées en utilisant la planification globale présentée au chapitre 2. Un temps final de  $t_f = 29,97$  s a été choisi afin de correspondre à une crête du sinus tel que mentionné précédemment. Puis, la trajectoire a été entrée en consigne dans le contrôleur du prototype et les figures 4.6 et 4.7 montrent l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 4.8 montre l'évolution de l'erreur de prédiction pour l'angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l'annexe D.

En observant ces résultats, on note que la différence entre les valeurs désirées et obtenus pour l'angle du câble  $\theta_1$  augmente avec le temps jusqu'à  $0,27$  rad ( $15,5^\circ$ ). De plus, la réponse est inférieure à la prédiction due à la présence de plusieurs facteurs tels que la friction et les effets de flexion du câble qui réduisent les performances. Tel qu'établi à l'aide du robot virtuel à la section 2.7.1, la planification globale n'est pas du tout robuste face aux erreurs de modèle. L'absence de rétroaction sur l'angle du câble  $\theta_1$  est donc critique dans ce cas. Pour ces raisons, la planification globale est rejetée et il n'en sera d'ailleurs plus question pour la suite de ce mémoire.

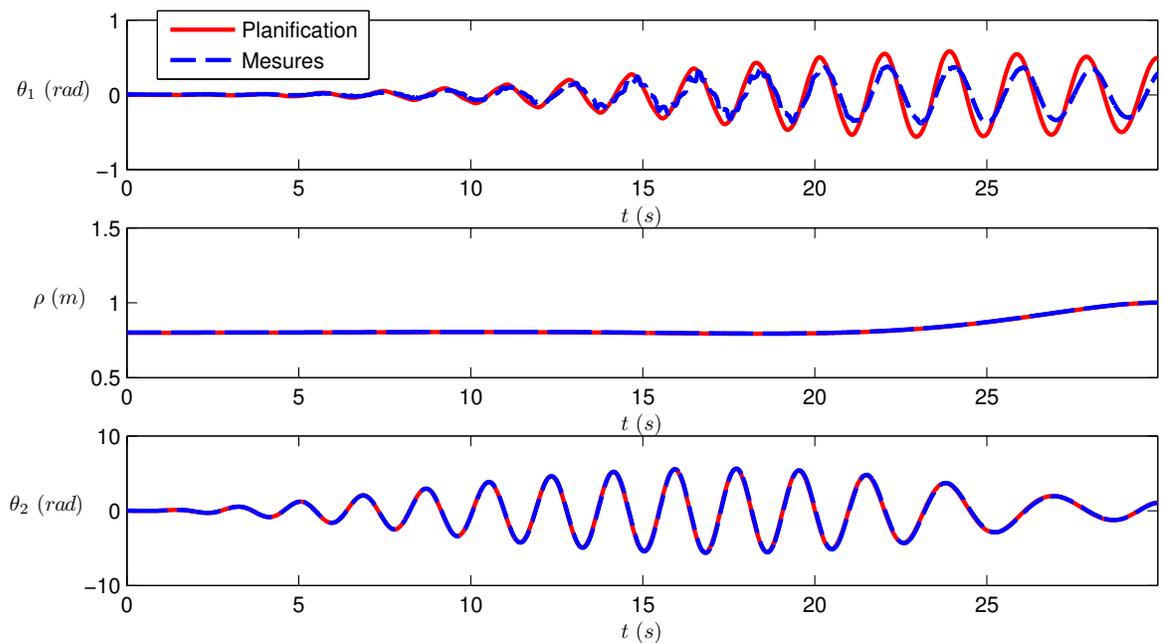


FIG. 4.6 – Évolution des coordonnées articulaires pour la planification globale par poly-sinusoides de la trajectoire simple.

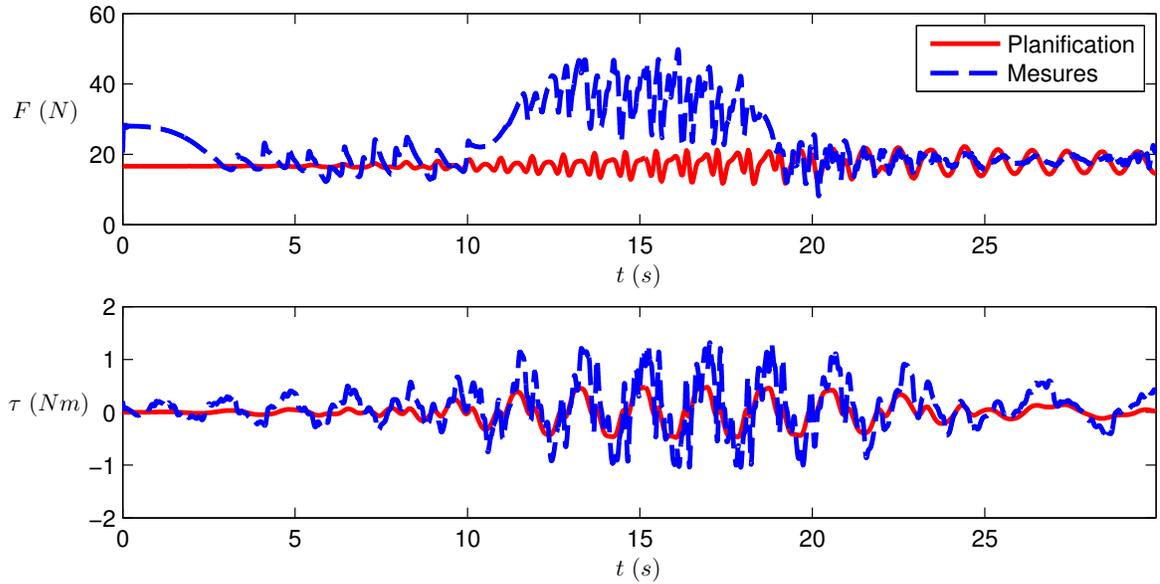


FIG. 4.7 – Évolution des efforts articulaires pour la planification globale par poly-sinusoides de la trajectoire simple.

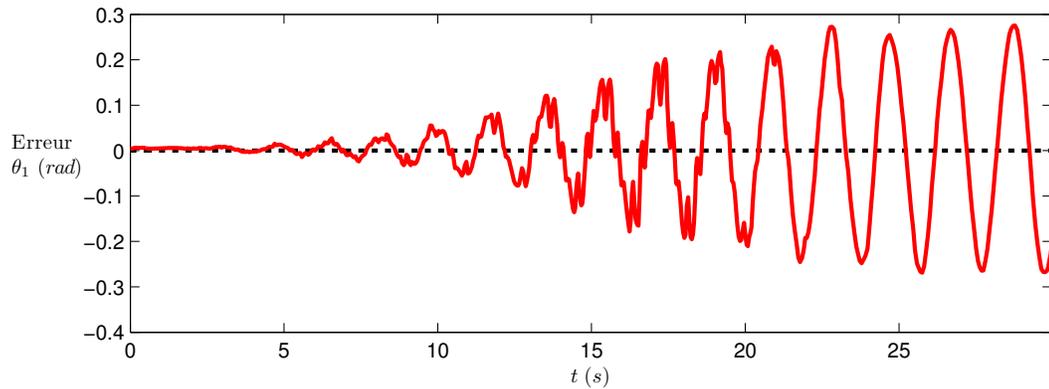


FIG. 4.8 – Évolution de l'erreur de prédiction sur l'angle du câble  $\theta_1$  pour la planification globale par poly-sinusoides de la trajectoire simple.

#### 4.3.2.2 Planification locale

Pour l'objectif décrit à la section 2.3.1, une trajectoire a été générée en temps réel en utilisant la planification locale présentée au chapitre 3 et la commande multi-pas décrite à la section 4.2.1. Les figures 4.9 et 4.10 montrent l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 4.11 présente l'évolution des erreurs de prédiction pour l'angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l'annexe D.

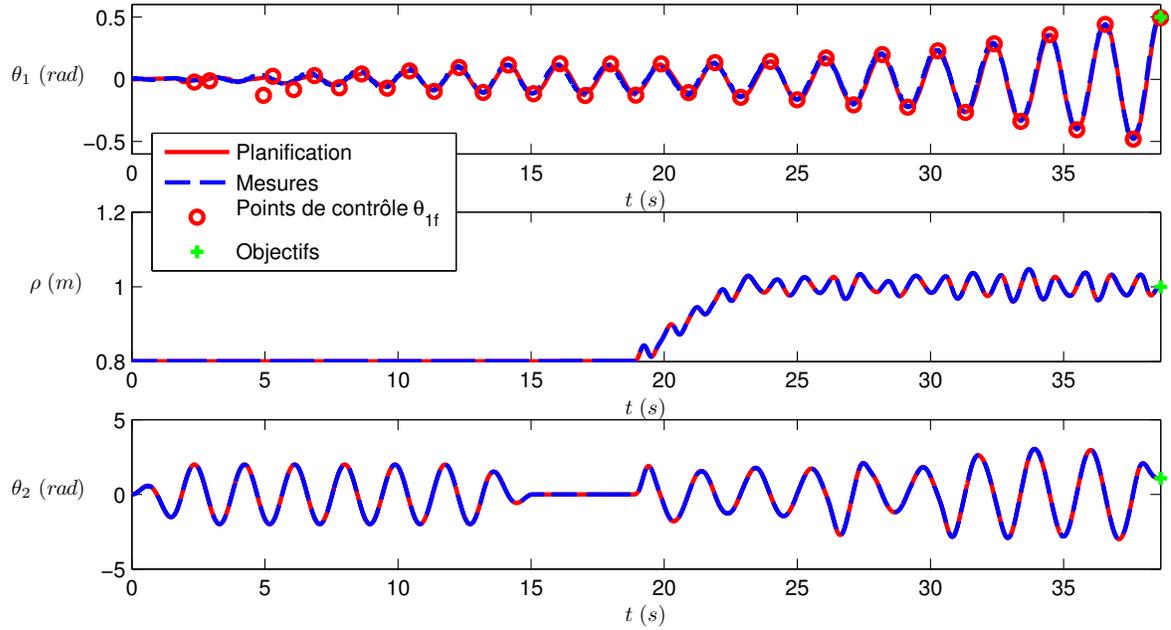


FIG. 4.9 – Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale de la trajectoire simple.

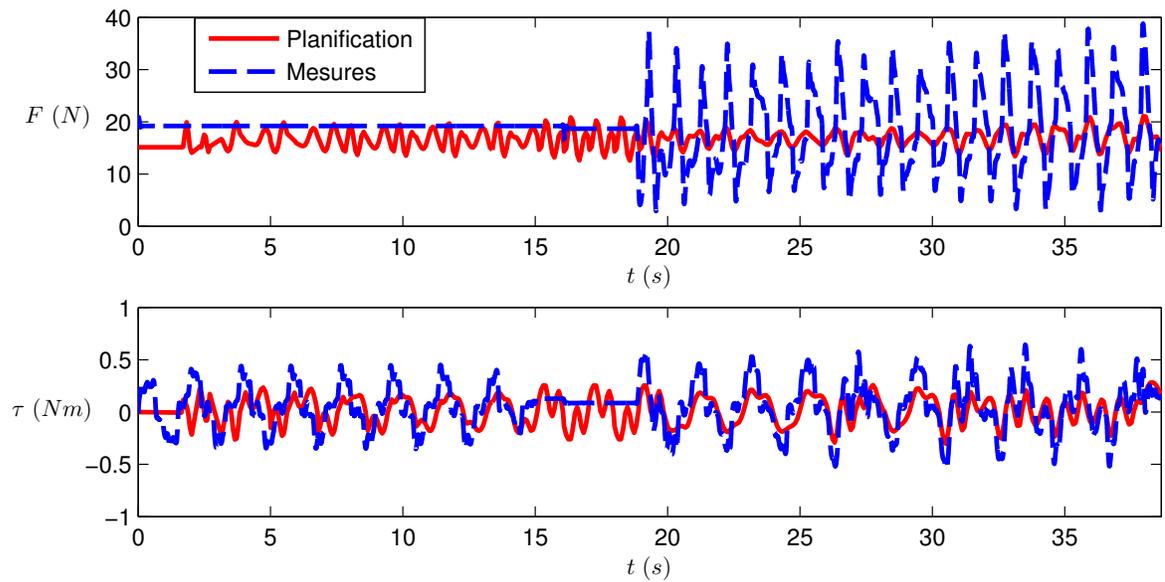


FIG. 4.10 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la trajectoire simple.

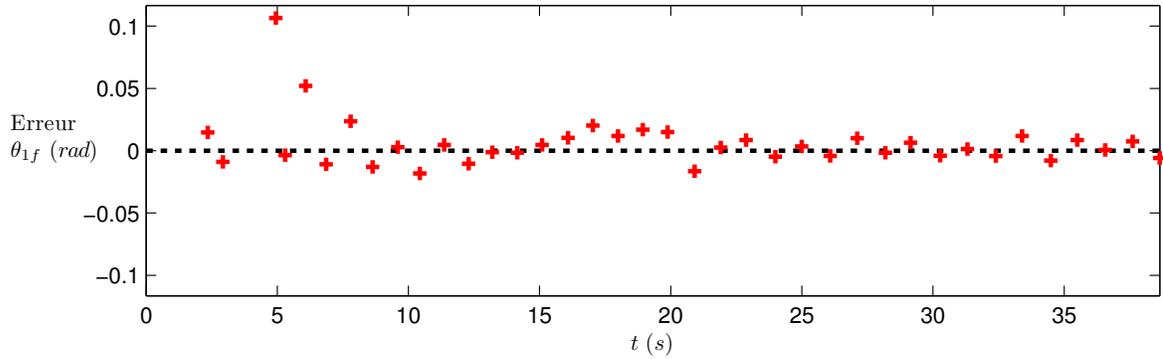


FIG. 4.11 – Évolution des erreurs de prédiction sur l’angle du câble  $\theta_1$  pour la planification locale de la trajectoire simple.

Ici, grâce à la rétroaction effectuée à chaque horizon de prédiction sur la trajectoire de l’articulation libre  $\theta_1$ , on note que les erreurs de modèle ne se propagent pas. En effet, la différence entre les valeurs désirées et obtenues pour l’angle du câble  $\theta_1$  est généralement inférieure à  $0,05$  rad ( $2,9^\circ$ ), ce qui est du même ordre de grandeur que pour le robot virtuel.

Toutefois, on note que le temps nécessaire à la réalisation de la trajectoire est supérieur d’environ 10 s à celui prévu pour la planification globale, ce qui confirme que le prototype est légèrement moins performant que la prédiction. Cependant, comme la commande s’adapte avec les cycles grâce à la rétroaction, l’objectif est tout de même atteint sans problème et les prédictions sont excellentes tout au long de la trajectoire.

Quant à elle, la prédiction des efforts articulaires est très modeste. Premièrement, celle-ci est mauvaise car le prototype et le modèle sont évidemment différents et, par conséquent, l’application des forces l’est aussi. De plus, le contrôleur PID utilisé ici possède des gains forts ce qui empêche les trajectoires de s’écarter mais qui, à l’opposé, crée de grandes variations dans les forces appliquées. Enfin, particulièrement pour la tension  $F$  dans le câble, les mesures sont erronées, car ces dernières sont directement obtenues à partir du courant moteur. Ainsi, la friction des poulies et des guides est négligée, alors qu’elle est en fait très importante.

De plus grandes variations de couples moteurs sont donc nécessaires pour générer les mêmes tensions dans le câble, car il faut toujours vaincre la friction du système, ce qui vient diminuer les accélérations pouvant être générées. Ce constat est moins présent pour le couple à l'effecteur  $\tau$ , car le système est plus simple et, par conséquent, moins sujet à la friction. Toutefois, tel que mentionné antérieurement, les efforts n'ont que très peu d'intérêt en comparaison avec l'angle du câble, car ils ne servent qu'à vérifier les contraintes.

Ainsi, puisque la réalisation de trajectoires simples est satisfaisante, des trajectoires complexes (plusieurs objectifs) seront réalisées à la prochaine section.

### 4.3.3 Réalisation de trajectoires complexes

Comme l'objectif de ce projet est la manutention et manipulation d'objets divers, il est évidemment d'intérêt de simuler ces tâches par la création de trajectoires complexes regroupant divers objectifs. Deux trajectoires possédant chacune trois objectifs différents sont donc présentées ici afin de simuler le déplacement d'un objet entre différents points. Pour mieux représenter tous les cas possibles, celles-ci incluent à la fois le raccourcissement et l'élongation du câble tout comme l'augmentation et la réduction de l'angle de ce dernier.

Ainsi, à partir d'angles nuls pour le câble ( $\theta_1 = 0$ ) et pour l'effecteur ( $\theta_2 = 0$ ) et d'une longueur de câble initiale de 1,62 m, les objectifs de la première trajectoire complexe sont d'atteindre successivement les points suivants à vitesse nulle :

$$\begin{bmatrix} \theta_{1g} & \rho_g & \theta_{2g} \end{bmatrix}_1^T = \begin{bmatrix} 0,55 & 1,20 & 1,02 \end{bmatrix}^T \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1g} & \rho_g & \theta_{2g} \end{bmatrix}_2^T = \begin{bmatrix} -0,30 & 1,50 & -0,87 \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1g} & \rho_g & \theta_{2g} \end{bmatrix}_3^T = \begin{bmatrix} 0,80 & 1,00 & 1,56 \end{bmatrix}^T. \quad (4.5)$$

Pour ce qui est de la deuxième trajectoire, les objectifs sont d'atteindre successivement les points suivants à vitesse nulle :

$$\begin{bmatrix} \theta_{1g} & \rho_g & \theta_{2g} \end{bmatrix}_1^T = \begin{bmatrix} -0,50 & 0,80 & -2,00 \end{bmatrix}^T \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1g} & \rho_g & \theta_{2g} \end{bmatrix}_2^T = \begin{bmatrix} 0,70 & 1,20 & 0,40 \end{bmatrix}^T \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1g} & \rho_g & \theta_{2g} \end{bmatrix}_3^T = \begin{bmatrix} 0,40 & 1,50 & -1,50 \end{bmatrix}^T. \quad (4.8)$$

Pour la première trajectoire, les figures 4.12 et 4.13 montrent l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 4.14 présente les erreurs de prédiction pour l'angle du câble  $\theta_1$ . Des photos du mécanisme lors de l'atteinte des objectifs sont aussi présentées à la figure 4.15. Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l'annexe D.

Pour la deuxième trajectoire, les figures 4.16 et 4.17 montrent l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires en comparaison avec les valeurs prévues. De plus, la figure 4.18 présente les erreurs de prédiction pour l'angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l'annexe D.

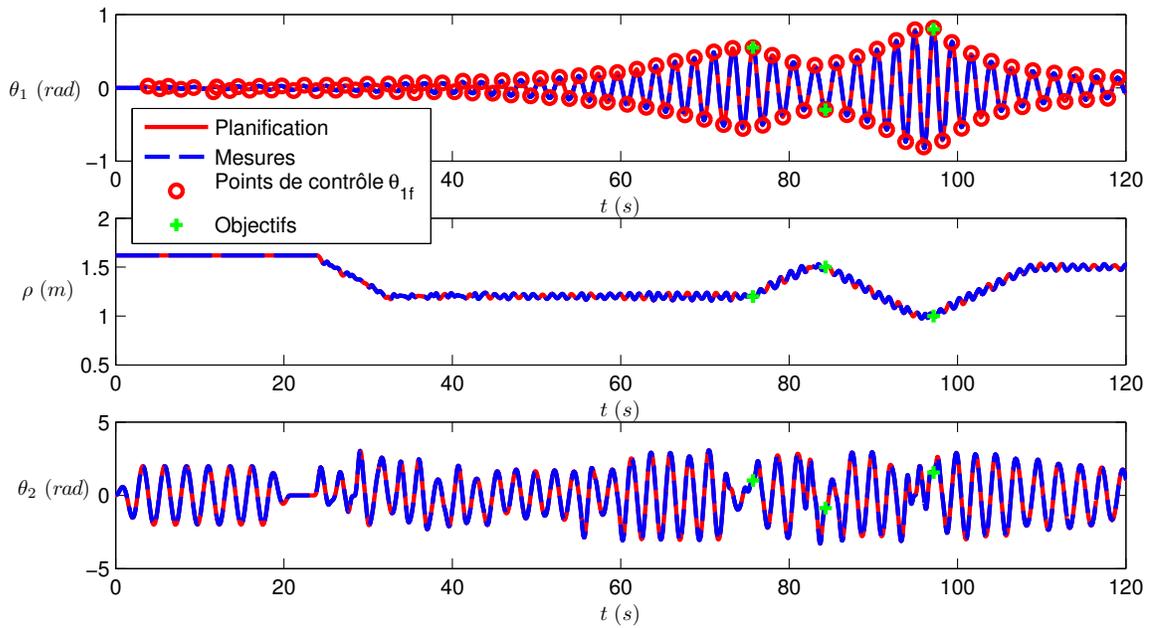


FIG. 4.12 – Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale de la première trajectoire complexe.

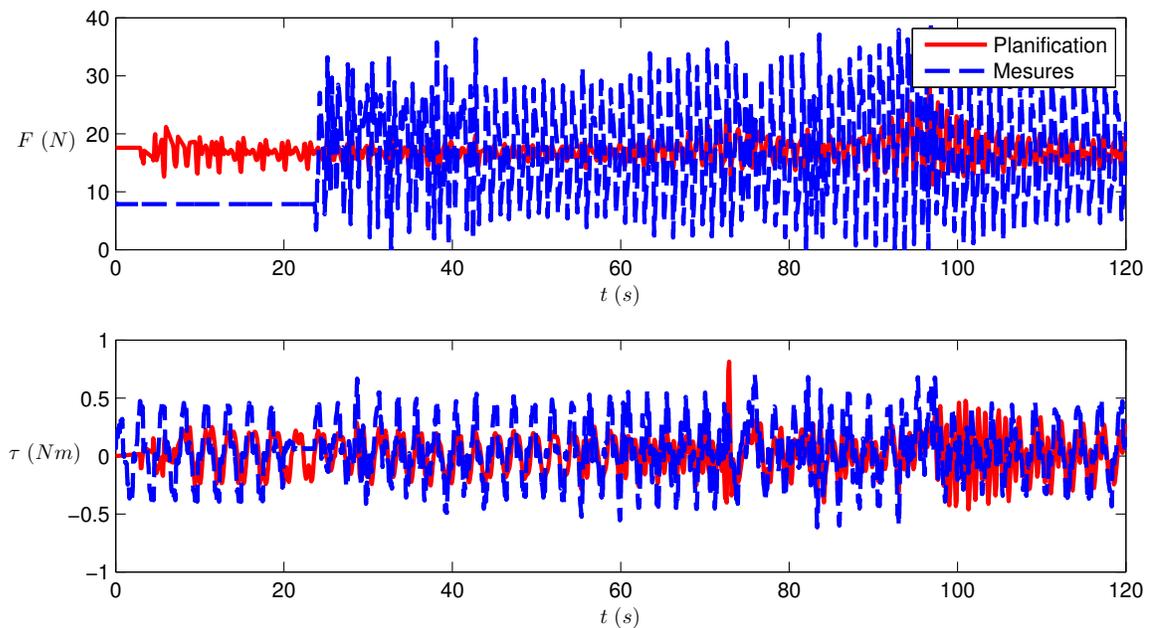


FIG. 4.13 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la première trajectoire complexe.

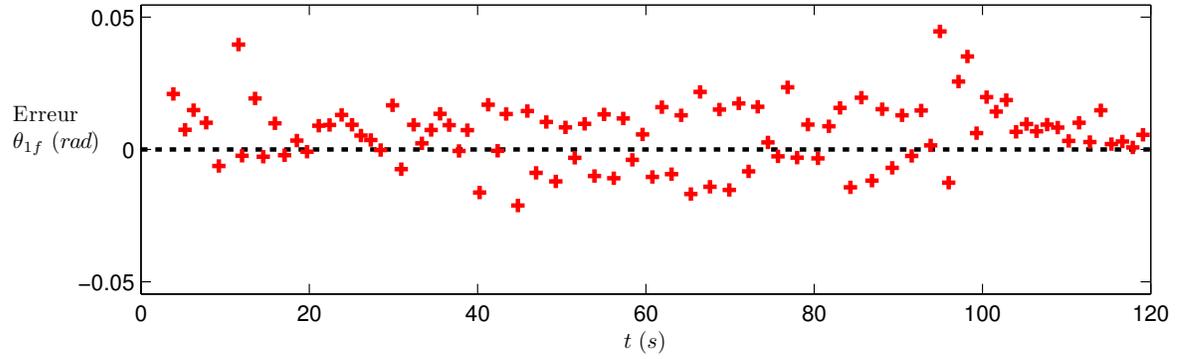
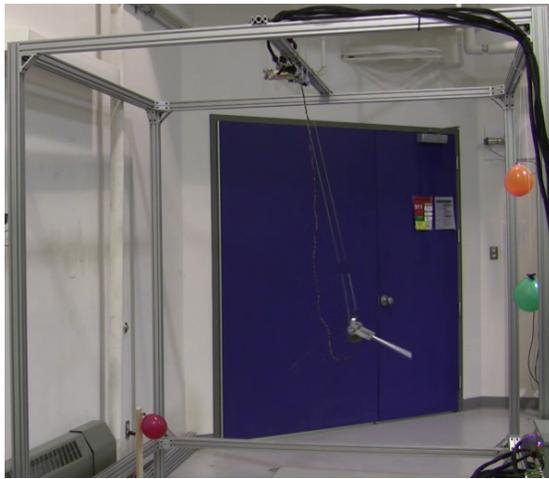
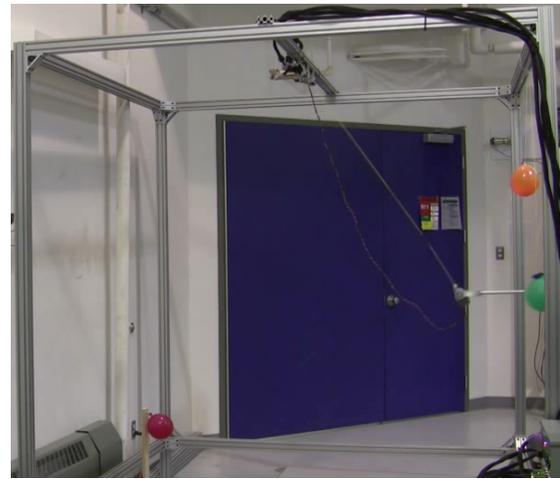


FIG. 4.14 – Évolution des erreurs de prédiction sur l'angle du câble  $\theta_1$  pour la planification locale de la première trajectoire complexe.



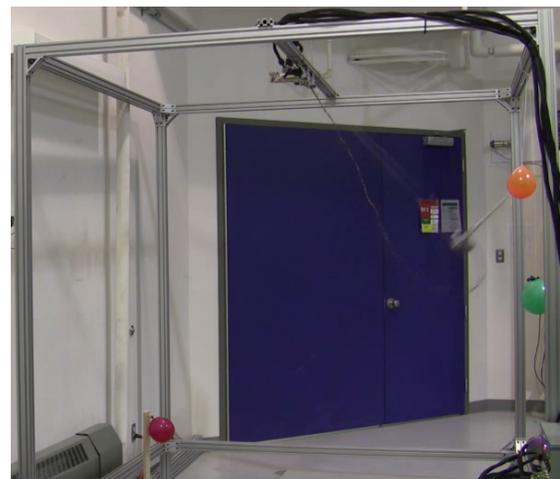
(a) Excitation du système ( $t = 37,8$  s)



(b) Atteinte du premier objectif ( $t = 75,7$  s)



(c) Atteinte du deuxième objectif ( $t = 84,3$  s).



(d) Atteinte du troisième objectif ( $t = 97,2$  s).

FIG. 4.15 – Réalisation de la première trajectoire complexe.

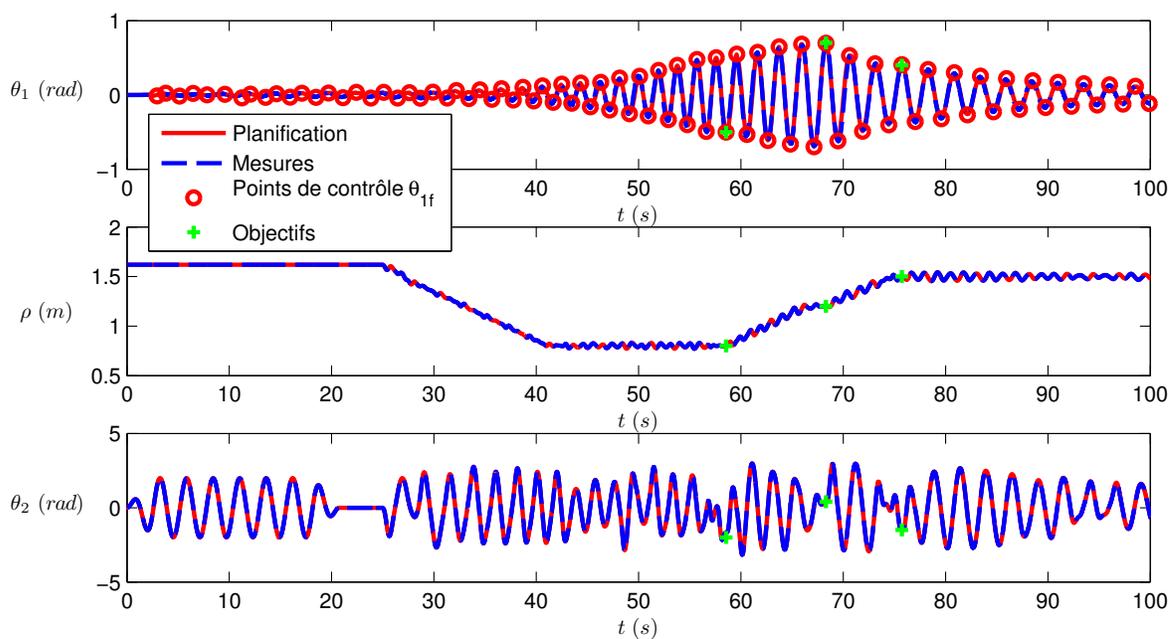


FIG. 4.16 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe.

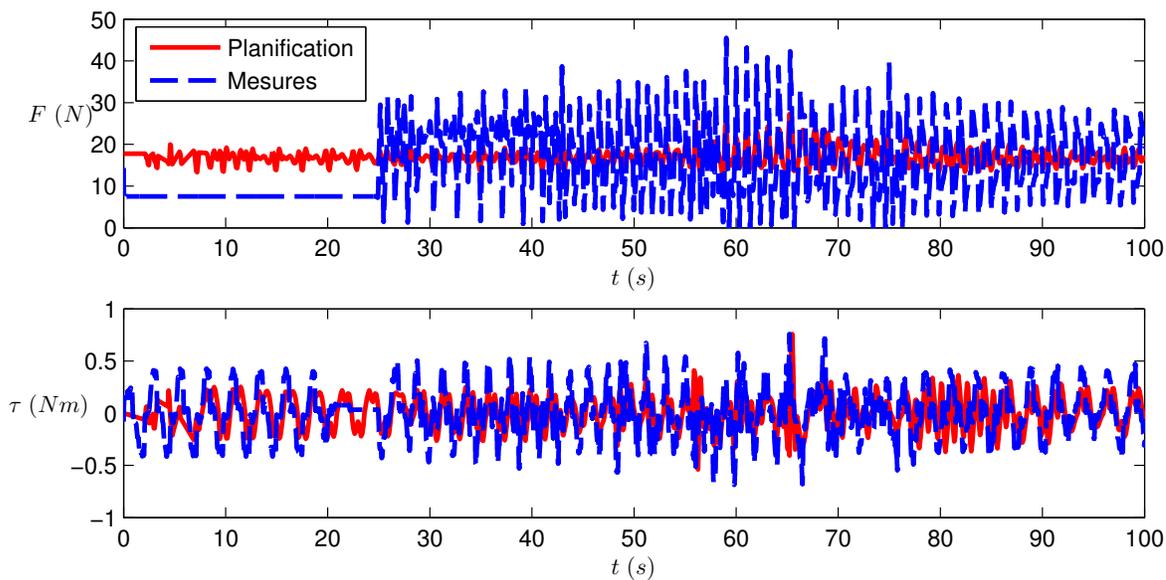


FIG. 4.17 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe.

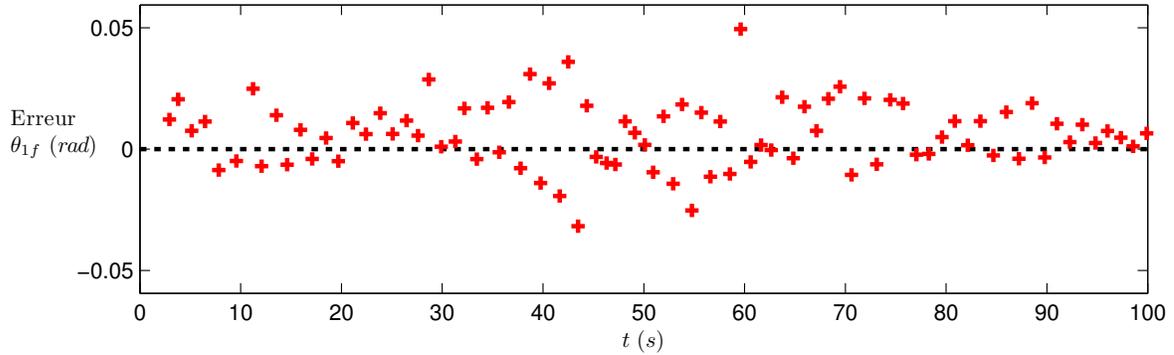


FIG. 4.18 – Évolution des erreurs de prédiction sur l’angle du câble  $\theta_1$  pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe.

En observant les résultats, il est clair que la planification locale est efficace tant au niveau de la stabilité que de la précision des résultats. En effet, pour les deux trajectoires, la différence entre les valeurs désirées et obtenues pour l’angle du câble  $\theta_1$  est toujours inférieure à 0,05 rad ( $2,9^\circ$ ) et ce, pour l’ensemble des points obtenus.

De plus, une fois l’énergie du système suffisante suite à l’excitation de celui-ci, l’atteinte des objectifs est très rapide, soit entre 5 s et 15 s par objectif. En revanche, le retour à l’équilibre après l’atteinte des objectifs est lent en comparaison, ce qui est évidemment analogue au temps d’excitation.

Tout comme précédemment, la prédiction des forces est approximative car les mesures ne sont effectuées qu’à partir des courants moteurs.

#### 4.3.4 Effets des perturbations et limitations physiques du mécanisme

Afin de démontrer la robustesse de la commande, des perturbations externes ont été introduites dans le système. Celles-ci ont été créées en percutant le mécanisme à l’aide d’un bâton dans le sens opposé au mouvement pendant la réalisation de la première trajectoire complexe. Les figures 4.19 et 4.20 montrent l’évolution des coordonnées et des efforts articulaires avec les valeurs prévues. De plus, la figure 4.21 présente les erreurs de prédiction pour l’angle du câble  $\theta_1$ . Enfin, les principaux résultats numériques sont disponibles à l’annexe D.

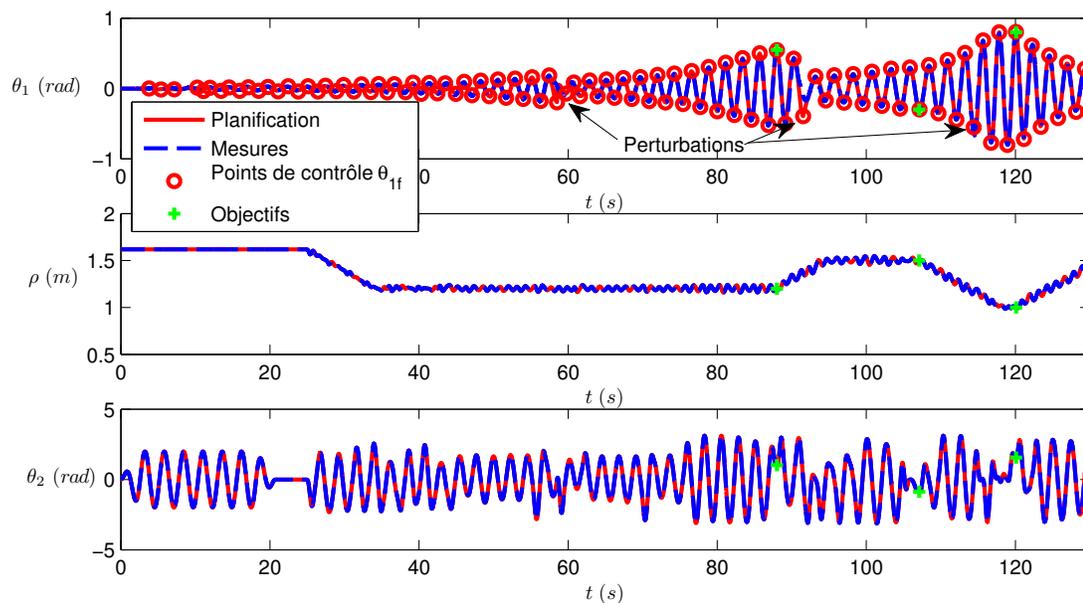


FIG. 4.19 – Évolution des coordonnées articulaires pour la planification locale de la première trajectoire en ajoutant des perturbations.

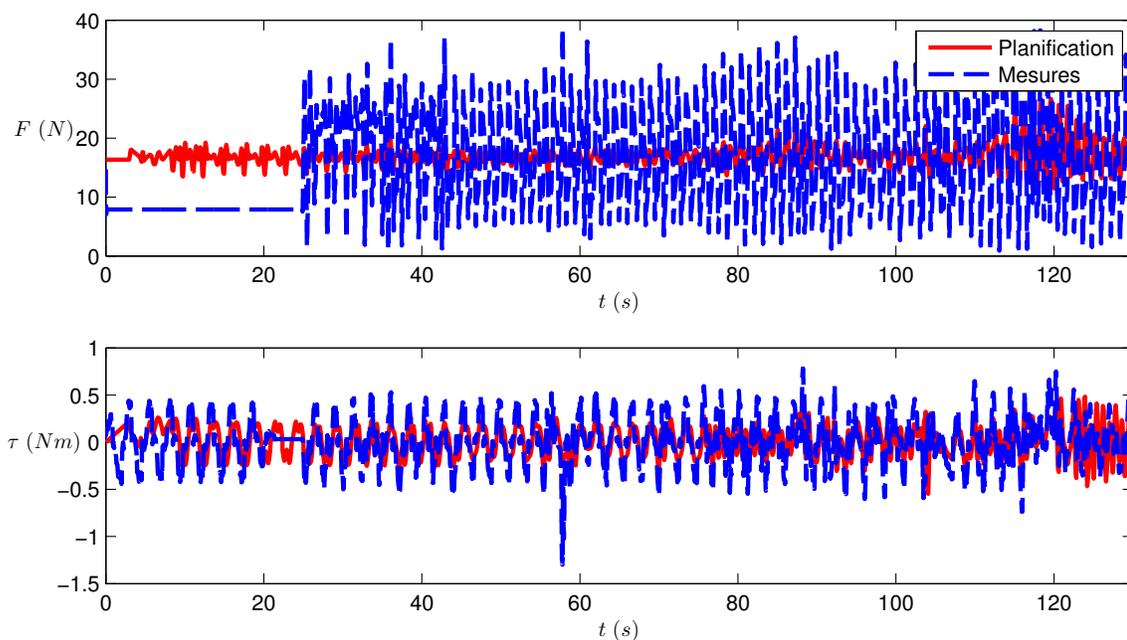


FIG. 4.20 – Évolution des efforts articulaires pour la planification locale de la première trajectoire en ajoutant des perturbations.

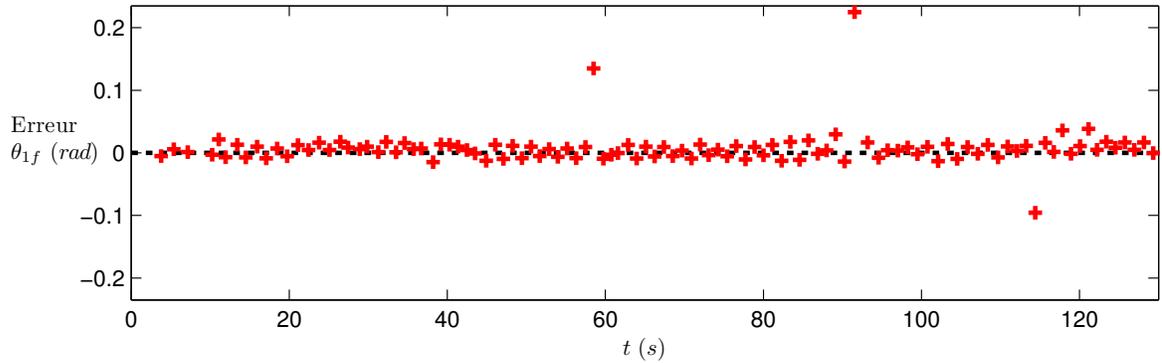


FIG. 4.21 – Évolution des erreurs de prédiction sur l’angle du câble  $\theta_1$  pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe en ajoutant des perturbations.

En observant les résultats, on note que la planification locale est très robuste face aux perturbations puisque qu’elle possède une rétroaction. En effet, à l’exception des points où les perturbations sont appliquées où les erreurs atteignent entre  $0,1$  rad ( $5,7^\circ$ ) et  $0,25$  rad ( $14,3^\circ$ ), les erreurs de prédiction sont tout à fait similaires à celles obtenues en l’absence de perturbations, soit moins de  $0,05$  rad ( $2,9^\circ$ ), ce qui démontre la capacité d’adaptation de la commande.

Finalement, bien qu’il eut été impossible de tester toutes les limitations physiques du mécanisme puisque l’espace de travail fonctionnel et sécuritaire était limité par la structure du cube, il a été établi que la limite de bon fonctionnement au niveau de l’angle du câble  $\theta_1$  se situait autour de  $3\pi/8$  rad ( $67,5^\circ$ ). En effet, au-delà de cette valeur, la tension dans le câble est réduite alors que les forces perpendiculaires à celui-ci augmentent fortement dû à la gravité. Ainsi, le câble tend à fléchir ce qui relâche la tension instantanément et brise le mouvement. Ce phénomène est similaire aux câbles qui se relâchent en fin de course lorsqu’un enfant se balance trop fort.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre a débuté par la conception du prototype permettant la validation expérimentale des algorithmes développés au troisième chapitre. La conception mécanique du prototype et les critères de design ayant influencé cette dernière ont été détaillés. L'architecture générale et chacune des principales composantes ont ensuite successivement été présentées. Puis, l'implantation des algorithmes dans le contrôleur et la prise de mesures aux fins de vérification ont été discutées.

La validation expérimentale présentée en fin de chapitre a ensuite permis de démontrer le bien-fondé de l'algorithme de planification locale. Des trajectoires simples et complexes ont ainsi été réalisées. L'introduction de perturbations externes a finalement permis de démontrer la robustesse de la commande et les limitations physiques du mécanisme ont été discutées.

# Conclusion

Ce mémoire étant l'un des premiers pas sur la route des mécanismes sous-actionnés entraînés par des câbles, l'objectif était de valider le concept de base à travers un mécanisme simple. Ainsi, un mécanisme combinant les avantages du sous-actionnement (peu d'actionneurs, simplicité, faible coût) et de l'utilisation des câbles (agilité, grand espace de travail, légèreté) afin de réduire les coûts d'opération des tâches de manipulation et manutention sur de grands espaces de travail a été présenté.

Au premier chapitre, l'élaboration des concepts de base et le choix du mécanisme ont d'abord été abordés. Puis, des analyses cinématique et dynamique ont été présentées et validées à l'aide de simulations numériques.

Le deuxième chapitre a enchaîné avec la présentation de la planification de trajectoires globales, soit la planification de l'ensemble d'une trajectoire. Les objectifs, la stratégie de planification ainsi que la motivation derrière celle-ci ont été d'abord présentés. Puis, différents types de trajectoire possibles ont été explorés et comparés à l'aide d'une évaluation théorique. Enfin, un robot virtuel a été construit pour caractériser les performances de l'algorithme lorsqu'implanté dans un contrôleur. Cette dernière étape a permis de mettre en évidence les forces et les faiblesses de la planification globale.

La planification de trajectoires locales, soit la solution retenue a ensuite été introduite au troisième chapitre. Celle-ci consiste à prévoir le comportement du mécanisme pour un horizon de prédiction donné, c'est-à-dire, une seule partie de la trajectoire globale. En combinant ces dernières, il est possible de réaliser l'ensemble de la trajectoire. L'horizon de prédiction a donc été établi afin de construire des trajectoires paramétriques pour chacune des articulations actionnées. Puis, une brève revue littéraire conduisant à la définition des trajectoires et le choix des conditions frontières ont été présentés pour chaque articulation. Le tout a été suivi par la description du problème d'optimisation, de son algorithme et de la gestion de la fréquence naturelle permettant de définir le comportement de l'articulation libre. Enfin, une évaluation à l'aide du robot virtuel a permis de démontrer les qualités de la planification locale lorsque implantée dans un contrôleur. Il a entre autres été possible de maintenir la différence entre les valeurs prévues et obtenues pour le joint libre à moins de  $0,04$  rad ( $2,3^\circ$ ) lors de la réalisation de trajectoire, soit une erreur presque dix fois inférieure à la planification globale.

Le quatrième chapitre a finalement abordé la validation expérimentale. Le prototype du mécanisme ainsi que les critères ayant influencé sa conception y sont d'abord détaillés. Puis, l'implantation des algorithmes dans le contrôleur et la prise de mesures aux fins de vérification ont été discutées. Une validation expérimentale a ensuite permis de démontrer le bien-fondé de l'algorithme de planification locale. Des trajectoires simples et complexes ont ainsi été réalisées. Enfin, l'introduction de perturbations externes a permis de démontrer la robustesse de la commande et les limitations physiques du mécanisme ont été discutées. Dans tout le cas, il a été possible de maintenir la différence entre les valeurs prévues et obtenues pour le joint libre à moins de  $0,05$  rad ( $2,9^\circ$ ) lors de la réalisation de trajectoires incluant jusqu'à trois objectifs à atteindre successivement.

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont ainsi permis d'établir les bases nécessaires à la commande de robots sous-actionnés entraînés à l'aide de câbles. Les critères principaux afin de réaliser des trajectoires de manipulation et manutention ont été établis. Puis, des algorithmes permettant la planification de trajectoire ont été présentés et validés à l'aide d'un robot virtuel et, enfin, d'un prototype. Au meilleur de nos connaissances, il s'agit des premiers travaux présentant la commande en temps réel d'un robot sous-actionné entraîné à l'aide de câbles.

## Pistes de travaux futurs

Puisque l'objectif de ce mémoire était de débiter l'étude des robots sous-actionnés entraînés à l'aide de câbles, de nombreuses avenues sont possibles pour les travaux futurs.

Du point de vue des mécanismes plans, la réalisation de tâches plus évoluées tel que le suivi de trajectoire permettrait d'augmenter la portée de ce genre de système. Par exemple, on pourrait penser à un robot suspendu peignant sur un mur ou à l'inspection rigoureuse de surfaces.

Toutefois, l'étude de mécanismes spatiaux évoluant hors du plan serait une avenue nettement plus intéressante. Des opérations hautement plus complexes pourraient alors être réalisées par l'agencement de quelques câbles seulement. D'ailleurs, dans ce mémoire, il a été démontré que le balancement de l'effecteur n'est pas indispensable à l'excitation du système outre la génération de conditions initiales. Or, par l'agencement des câbles, il deviendrait alors possible de générer ces conditions initiales, ce qui permettrait de retirer le degré de liberté à l'effecteur, simplifiant ainsi la conception du mécanisme. Au moment d'écrire ces lignes, ces travaux ont d'ailleurs déjà été entamés au Laboratoire de robotique de l'Université Laval.

# Bibliographie

- [1] Albus, J., Bostelman, R., et Dagalakis, N., 1993, “The NIST robocrane,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, no 5, pp. 709–724.
- [2] Angeles, J., Alivizatos, A., et Zsombor-Murray, P., 1988, “The synthesis of smooth trajectories for pick-and-place operations,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, no 1, pp. 173–178.
- [3] Arisumi, H., Yokoi, K., et Komoriya, K., 2000, “Casting manipulation (braking control for catching motion),” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1961–1968. San Francisco, CA, États-Unis, Avril 2000.
- [4] Blevins, R., 1979, *Formulas for natural frequency and mode shape*. Van Nostrand Reinhold New York.
- [5] Boone, G., 1997, “Minimum-time control of the acrobot,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3281–3287. Albuquerque, NM, États-Unis, Avril 1997.
- [6] Bosscher, P. et Ebert-Uphoff, I., 2004, “Wrench-based analysis of cable-driven robots,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4950–4955. New Orleans, LA, États-Unis, Avril 2004.
- [7] Bosscher, P., Williams II, R., et Tummino, M., 2005, “A concept for rapidly-deployable cable robot search and rescue systems,” *Proceedings of the ASME IDETC/CIE 29th Mechanisms and Robotics Conference*, pp. 1–10. Long Beach, CA, États-Unis, Septembre 2005.

- [8] Brown, S. et Passino, K., 1997, "Intelligent control for an acrobot," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 18, no 3, pp. 209–248.
- [9] Burns, J., 1970, "More on pumping a swing," *American Journal of Physics*, vol. 38, pp. 920–922.
- [10] Case, W., 1996, "The pumping of a swing from the standing position," *American Journal of Physics*, vol. 64, pp. 215–220.
- [11] Case, W. et Swanson, M., 1990, "The pumping of a swing from the seated position," *American Journal of Physics*, vol. 58, pp. 463–467.
- [12] Cone, L., 1985, "Skycam : An aerial robotic camera system," *Byte*, vol. 10, pp. 122–132.
- [13] Cunningham, D. et Asada, H., 2009, "The Winch-Bot : A Cable-Suspended, Under-Actuated Robot Utilizing Parametric Self-Excitation," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1844–1850. Kobe, Japon, Mai 2009.
- [14] Curry, S., 1976, "How children swing," *American Journal of Physics*, vol. 44, pp. 924–926.
- [15] Fantoni, I. et Lozano, R., 2001, *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Verlag.
- [16] Gore, B., 1971, "Starting a swing from rest," *American Journal of Physics*, vol. 39, p. 347.
- [17] Haddadin, S., Albu-Schaffer, A., Frommberger, M., et Hirzinger, G., 2008, "The role of the robot mass and velocity in physical human-robot interaction-Part II : Constrained blunt impacts," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1339–1345. Pasadena, CA, États-Unis, Mai 2008.
- [18] Kawamura, S., Choe, W., Tanaka, S., et Pandian, S., 1995, "Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drivesystem," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 215–220. Nagoya, Japon, Mai 1995.
- [19] Lagarias, J., Reeds, J., Wright, M., et Wright, P., 1999, "Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no 1, pp. 112–147.
- [20] Nakanishi, J., Fukuda, T., et Koditschek, D., 2000, "A brachiating robot controller," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, no 2, pp. 109–123.

- [21] Piccoli, B. et Kulkarni, J., 2005, "Pumping a swing by standing and squatting : do children pump time optimally?," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 25, no 4, pp. 48–56.
- [22] Pinsky, M. et Zevin, A., 1999, "Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing," *International Journal of Non Linear Mechanics*, vol. 34, no 1, pp. 105–110.
- [23] Scheid, F., 1989, *Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis*. Schaum's Outline Series.
- [24] Selesnick, I. et Burrus, C., 1998, "Generalized digital Butterworth filter design," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no 6, pp. 1688–1694.
- [25] Spong, M., 1995, "The swing up control problem for the acrobot," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, no 1, pp. 49–55.
- [26] Stilling, D. et Szyszkowski, W., 2002, "Controlling angular oscillations through mass reconfiguration : a variable length pendulum case," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 37, no 1, pp. 89–99.
- [27] Szyszkowski, W. et Stilling, D., 2005, "On damping properties of a frictionless physical pendulum with a moving mass," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, no 5, pp. 669–681.
- [28] Taylor, B. *The international system of units (SI)*. United States Department of Commerce, Technology Administration. National Institute of Standards and Technology.
- [29] Tortopidis, I. et Papadopoulos, E., 2007, "On point-to-point motion planning for underactuated space manipulator systems," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, no 2, pp. 122–131.

# Annexe A

## Résultats issus de la validation des modèles cinématique et dynamique

Cette annexe présente le détail des résultats issus de la validation des modèles cinématique et dynamique réalisée au chapitre 1. Les modèles sont validés en comparant les résultats provenant de simulations numériques aux résultats obtenus à l'aide des équations du mouvement.

## A.1 Validation du modèle cinématique

La validation du modèle cinématique a été réalisée de deux manières différentes afin de vérifier tant les solutions aux problèmes géométriques direct et inverse que les équations de vitesse obtenues analytiquement, soit :

1. En imposant une trajectoire articulaire et en calculant la pose (position et orientation) et la vitesse de l'effecteur.
2. En imposant une trajectoire cartésienne à l'effecteur et en mesurant les positions et vitesses articulaires.

### A.1.1 Trajectoire articulaire imposée

Le modèle cinématique est d'abord validé en obtenant la pose et la vitesse de l'effecteur à partir d'une trajectoire articulaire imposée. Puisque les positions articulaires sont définies en fonction du temps, les vitesses articulaires sont obtenues en dérivant directement ces dernières. Puis, à partir de ces données, la pose de l'effecteur est obtenue de la solution au PGD (1.3) et sa vitesse de l'équation (1.15). Pour ce premier cas, la trajectoire articulaire choisie pour la validation est :

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \rho(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{1}{5}t \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) + \frac{1}{20}t + 1 \\ \frac{3}{5}t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

pour  $0 \leq t \leq 10$  s.

La figure A.1 montre les coordonnées et vitesses cartésiennes obtenues à l'aide du modèle cinématique en comparaison avec celles obtenues numériquement. En observant cette dernière, on note que les résultats concordent très bien, ce qui témoigne de l'exactitude du modèle.

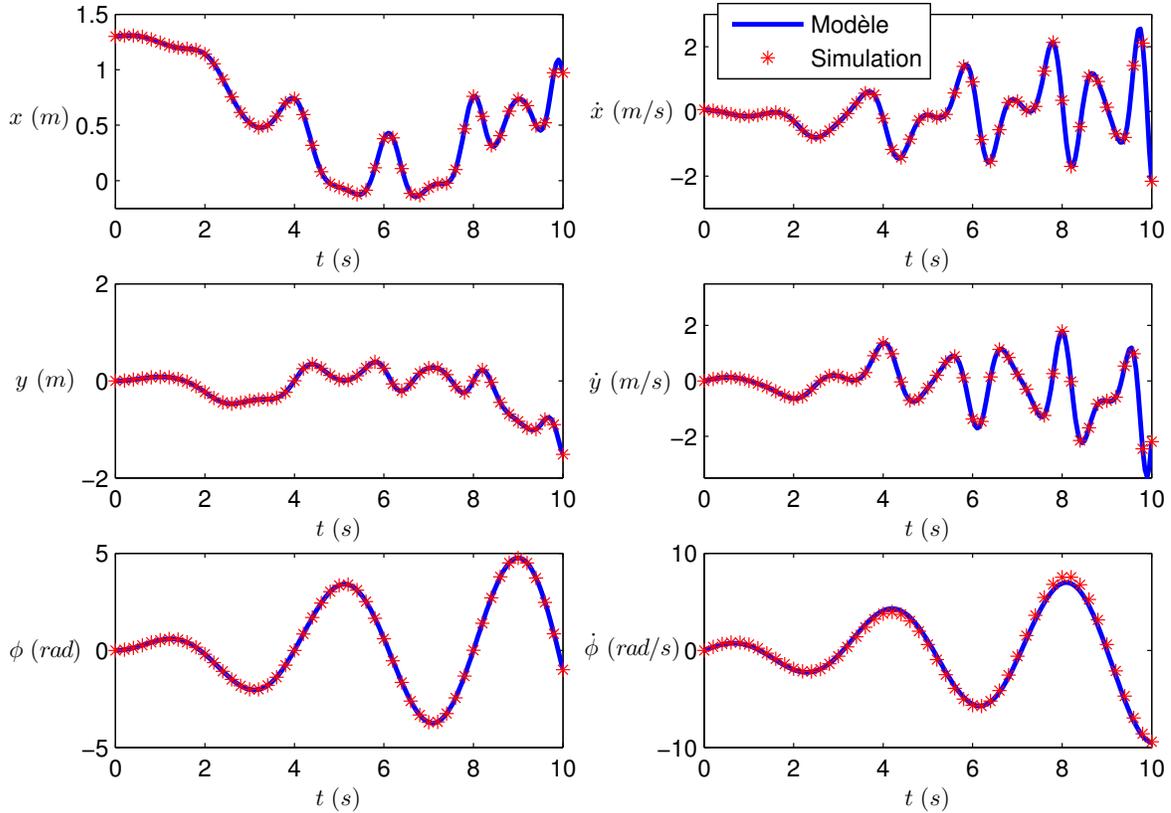


FIG. A.1 – Coordonnées et vitesses cartésiennes obtenues du modèle cinématique et de la simulation numérique.

### A.1.2 Trajectoire cartésienne imposée

Le modèle cinématique est ensuite validé en obtenant les coordonnées et vitesses articulaires à partir d'une trajectoire cartésienne imposée à l'effecteur. Comme précédemment, les vitesses cartésiennes sont obtenues en dérivant la trajectoire par rapport au temps. Puis, à partir de ces données, les coordonnées articulaires sont obtenues de la solution au PGI (1.13) et les vitesses articulaires en inversant la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  de l'équation (1.15). La trajectoire cartésienne choisie pour la validation est :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{20}t + \frac{13}{10} \\ \frac{1}{10}t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{1}{2}t \cos t \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

pour  $0 \leq t \leq 10$  s.

La figure A.2 montre les positions et vitesses articulaires obtenues à l'aide du modèle cinématique en comparaison avec celles obtenues numériquement. Puisque, tout comme pour la validation précédente, les résultats concordent, le modèle cinématique est considéré juste.

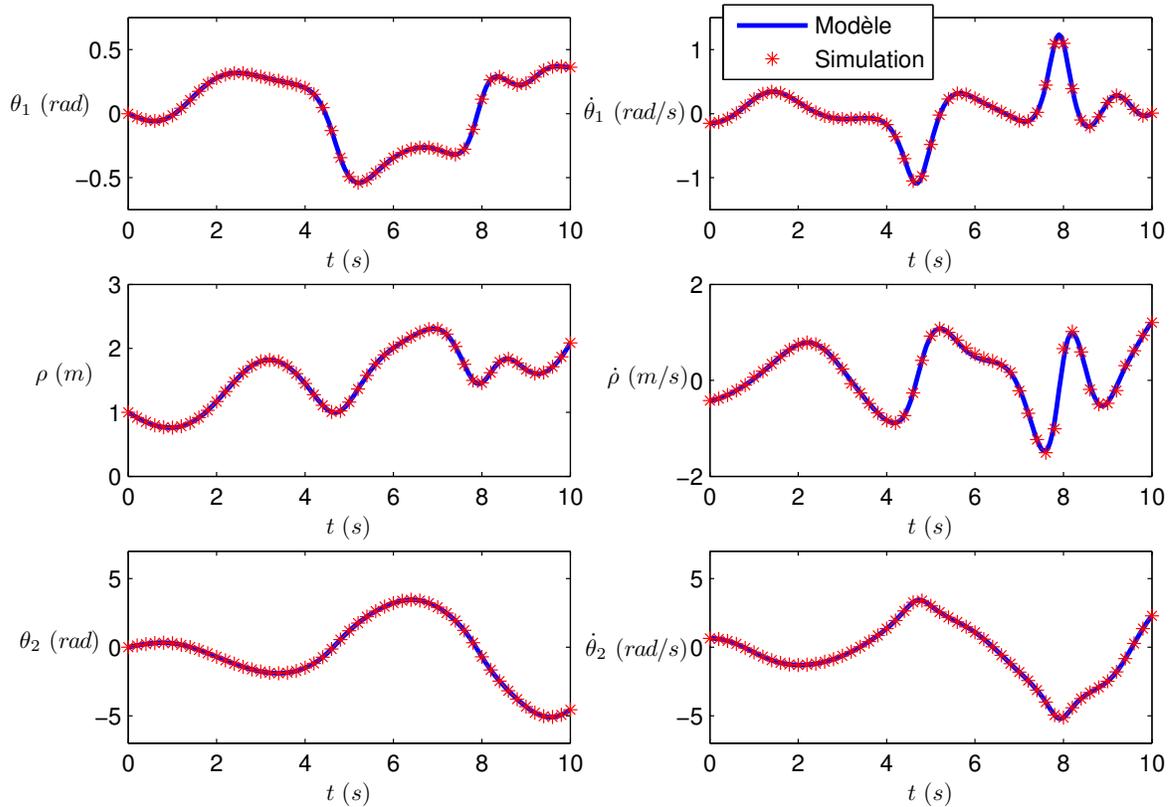


FIG. A.2 – Coordonnées et vitesses articulaires obtenues du modèle cinématique et de la simulation numérique.

## A.2 Validation du modèle dynamique

La validation du modèle dynamique a quant à elle été réalisée de trois manières différentes. Ceci a permis de valider systématiquement le modèle en complexifiant l'implantation étape par étape. La validation a donc été réalisée :

1. En imposant une trajectoire articulaire et en calculant les efforts associés.
2. En imposant des efforts articulaires et en calculant la trajectoire associée.
3. En imposant une trajectoire aux variables actionnées seulement et en calculant les efforts articulaires ainsi que les coordonnées de la variable libre.

Il est à noter que, dans le premier cas, puisqu'une trajectoire est imposée aux trois variables articulaires, la condition imposant un couple nul à la première articulation de l'équation (1.41) n'est pas respectée. Néanmoins, ce couple sera calculé et comparé entre le modèle et la simulation.

### A.2.1 Trajectoire articulaire imposée

Le modèle dynamique est d'abord validé en mesurant les effort articulaires pour une trajectoire articulaire imposée car ce calcul est direct. En effet, puisque les positions articulaires sont définies en fonction du temps, leurs dérivées (vitesse et accélération) sont calculées directement. Les efforts articulaires sont alors obtenus des équations (1.41), (1.42) et (1.43). Pour ce premier cas, la trajectoire articulaire pour la validation est :

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \rho(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}t \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{1}{5}t \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) + \frac{1}{20}t + 1 \\ \frac{3}{5}t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

pour  $0 \leq t \leq 10$  s.

La figure A.3 montre les efforts articulaires obtenus à l'aide du modèle dynamique en comparaison avec ceux obtenus numériquement. Tout comme pour la validation précédente, les résultats concordent parfaitement, ce qui témoigne de l'exactitude du modèle.

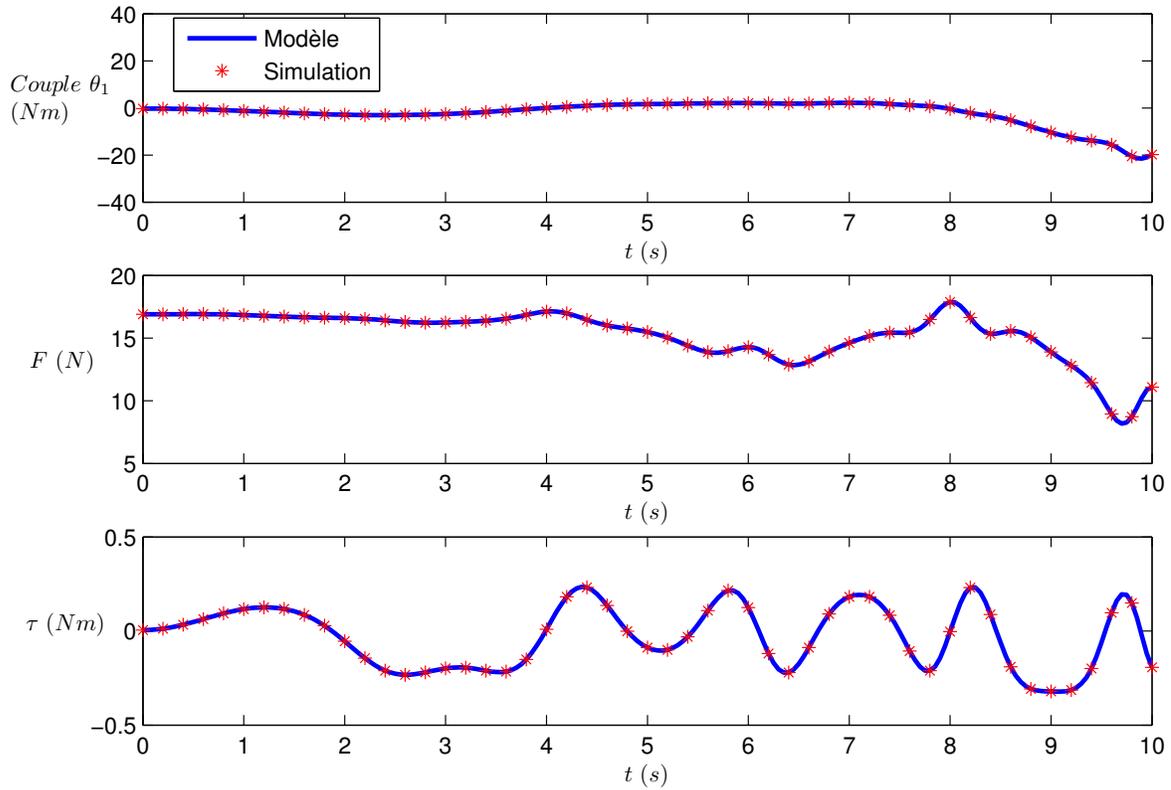


FIG. A.3 – Efforts articulaires obtenus du modèle dynamique et de la simulation numérique.

## A.2.2 Efforts articulaires imposés

Le modèle dynamique a ensuite été validé de façon plus naturelle en imposant les efforts aux articulations pour ensuite mesurer la trajectoire du mécanisme. Dans ce cas, un couple nul a été imposé à la première articulation  $\theta_1$ , puisque celle-ci n'est pas actionnée. Le résolveur *ode45* de MATLAB®<sup>1</sup> a été utilisé pour intégrer les équations différentielles du système. Cette procédure sert d'ailleurs de base pour simuler la commande du mécanisme à l'aide d'un robot virtuel aux chapitres 2 et 3. Ici, les efforts articulaires choisis pour la validation sont :

$$\begin{bmatrix} F(t) \\ \tau(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)g + \frac{1}{5} \cos(t) \\ \frac{1}{50}t \sin(\pi t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

pour  $0 \leq t \leq 10$  s.

<sup>1</sup>Le site web de Mathworks MATLAB® est <http://www.mathworks.com>

La figure A.4 montre la trajectoire articulaire obtenue à l'aide du modèle dynamique en comparaison avec celle qui a été obtenue numériquement. En observant cette dernière, on note que les résultats concordent parfaitement, ce qui témoigne de l'exactitude du modèle.

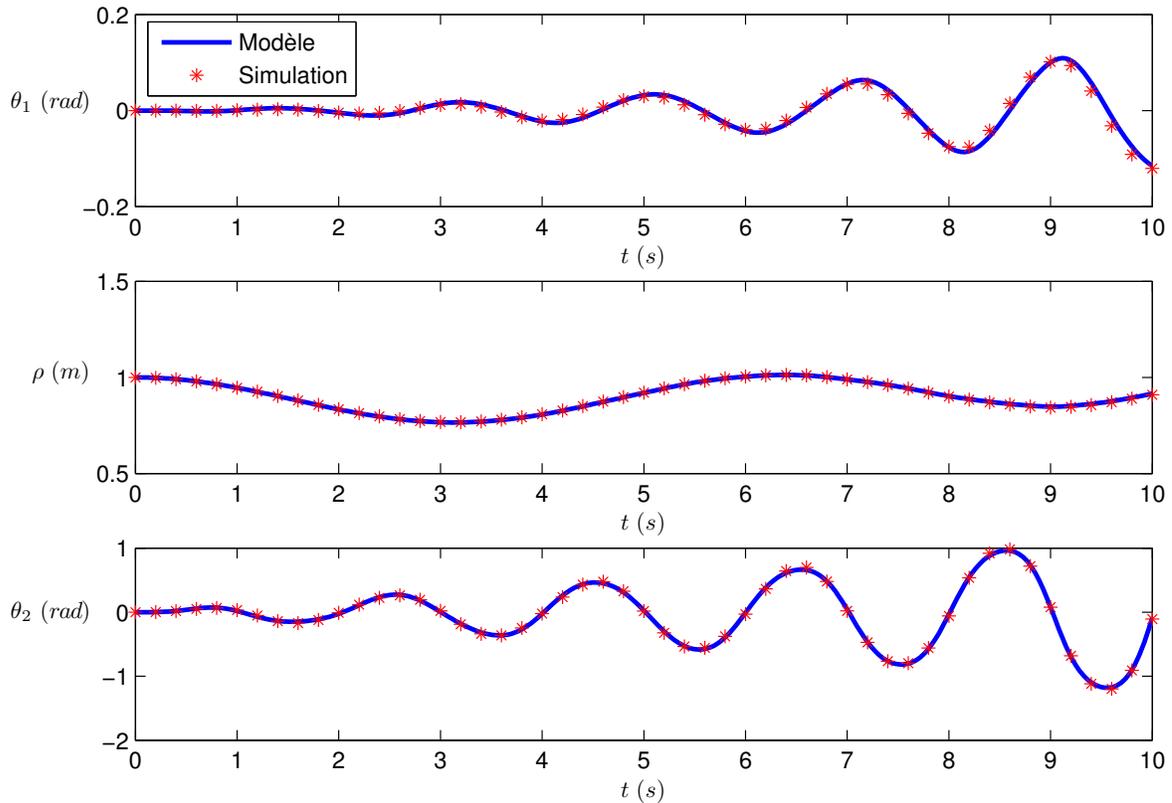


FIG. A.4 – Trajectoire articulaire obtenue du modèle dynamique et de la simulation numérique.

### A.2.3 Trajectoire articulaire imposée aux variables actionnées seulement

Finalement, le modèle dynamique a été validé en imposant une trajectoire aux variables actionnées seulement. Bien que moins intuitive que les vérifications précédentes, celle-ci permet d'obtenir à la fois les efforts aux articulations et les coordonnées articulaires de la variable non-actionnée  $\theta_1$ . C'est d'ailleurs sur cette technique que sont basées les planifications de trajectoire présentées aux chapitres 2 et 3. La trajectoire

articulaire des variables actionnées choisie pour la validation est :

$$\begin{bmatrix} \rho(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}t \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) + \frac{1}{20}t + 1 \\ \frac{3}{5}t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

pour  $0 \leq t \leq 10$  s.

La figure A.5 montre la trajectoire de la variable libre  $\theta_1$  et les efforts articulaires obtenus à l'aide du modèle dynamique en comparaison avec ceux obtenus numériquement. Finalement, puisque les résultats concordent toujours dans ce cas, le modèle dynamique est considéré exact.

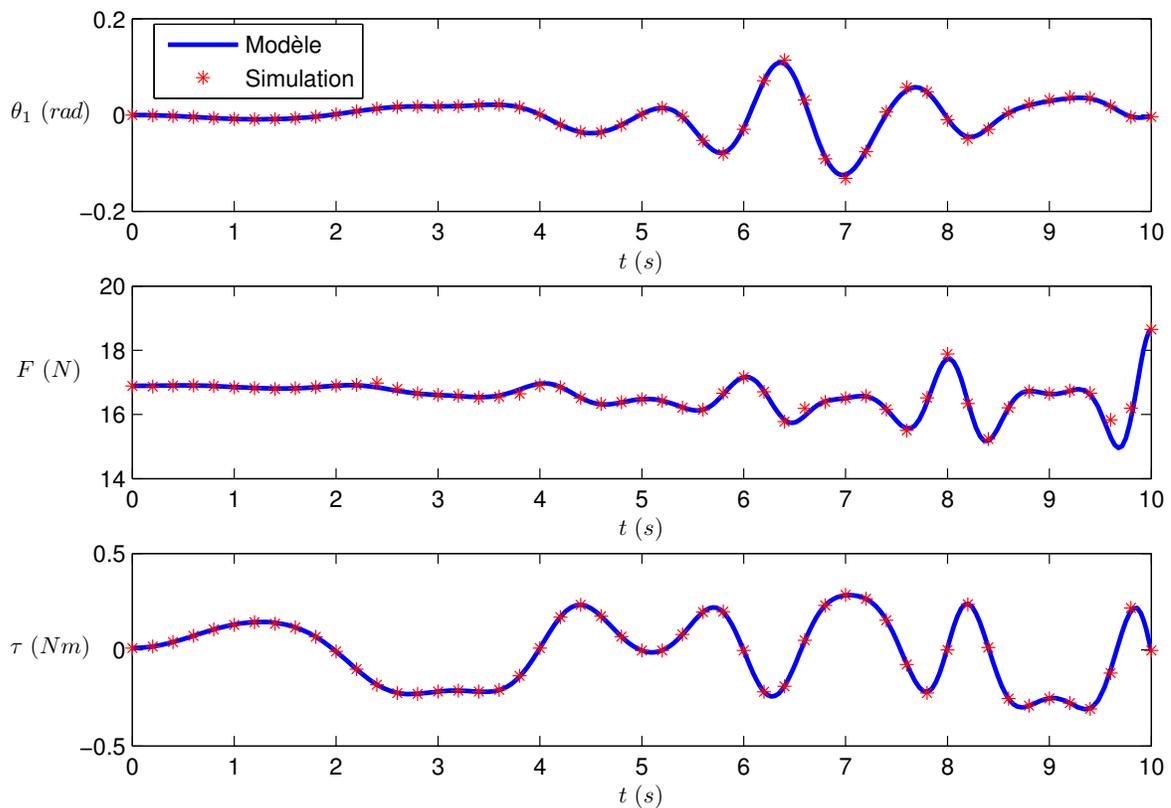


FIG. A.5 – Trajectoire de la variable libre et efforts articulaires obtenus du modèle dynamique et de la simulation numérique.

# Annexe B

## Résultats issus des évaluations théoriques de la planification globale

Cette annexe présente le détail des résultats issus des évaluations théoriques de la planification de trajectoires globales réalisée au chapitre 2. Pour chaque type de trajectoire, les coefficients obtenus de l'optimisation ainsi que les résultats lors de l'atteinte de l'objectif de validation sont présentés.

## B.1 Trajectoires polynomiales

Les tableaux B.1 et B.2 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour l'évaluation des trajectoires polynomiales sans pénalité présentée à la section 2.4.3. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 2.1 et 2.2.

TAB. B.1 – Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales sans pénalité.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	-26,88	24,63	6,43	5,66	-1,78	0,78	-8,65
$B_i$	0,00	0,00	0,00	-109,44	134,67	4,80	-1,39	-3,13	-15,85	-8,59

TAB. B.2 – Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales sans pénalité.

### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,481	0,019
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,070	0,000
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	-1,137	1,137
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	-34,70	34,70
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	53,00	13,00
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,675	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	-1,256	1,456
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

Les tableaux B.3 et B.4 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour l'évaluation des trajectoires polynomiales avec pénalités présentée à la section 2.4.3. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 2.3 et 2.4.

TAB. B.3 – Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales avec pénalités.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	-10,37	14,18	-1,54	-0,75	0,79	-0,08	-2,04
$B_i$	0,00	0,00	0,00	-191,40	234,56	2,54	-2,53	-2,68	-12,02	-27,41

TAB. B.4 – Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales avec pénalités.

#### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	-0,012	0,512
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,070	0,000
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

#### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	16,62	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	16,73	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,246	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	0,239	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

## B.2 Trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées

Les tableaux B.5 et B.6 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour l'évaluation des trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité présentée à la section 2.5.3. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 2.5 et 2.6.

TAB. B.5 – Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	-66,48	80,58	6,90	-4,82	-7,42	-0,48	-8,07
$B_i$	0,00	0,00	0,00	10,05	14,61	-12,90	-7,34	3,65	-0,70	—

TAB. B.6 – Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées sans pénalité.

### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,482	0,018
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1 tour + 1,087	0,017
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,500	0,500
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	-39,02	39,02
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	42,96	2,962
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,427	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	-3,186	3,386
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

Les tableaux B.7 et B.8 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour l'évaluation des trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités présentée à la section 2.5.3. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 2.7 et 2.8.

TAB. B.7 – Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	-10,92	14,70	-2,43	-10,09	11,97	9,85	-12,88
$B_i$	0,00	0,00	0,00	238,14	11,02	-3,52	-33,61	-19,31	-50,51	—

TAB. B.8 – Performances théoriques pour les trajectoires polynomiales avec conditions finales modifiées et pénalités.

#### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,328	0,172
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	22 tours + 3,983	2,913
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	-0,002	0,002
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

#### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	0,092	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	36,41	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,472	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	0,013	0,187
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

### B.3 Trajectoires poly-sinusoidales

Les tableaux B.9 et B.10 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour l'évaluation des trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité présentée à la section 2.6.3. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 2.10 et 2.11.

TAB. B.9 – Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	-9,61	9,77	1,96	3,20	-2,06	-2,68	-0,38
$B_i$	0,00	0,00	49,55	-64,79	6,00	1,60	0,84	4,73	3,14	—

TAB. B.10 – Performances théoriques pour les trajectoires poly-sinusoidales sans pénalité.

#### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,469	0,031
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,070	0,000
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,002	0,002
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

#### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	-54,12	54,12
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	117,7	77,70
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	4,420	2,920
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	0,176	0,024
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

Les tableaux B.11 et B.12 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour l'évaluation des trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités présentée à la section 2.6.3. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 2.12 et 2.13.

TAB. B.11 – Coefficients obtenus par optimisation pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	1,77	-3,92	0,90	1,00	2,02	0,12	-1,70
$B_i$	0,00	0,00	48,08	-58,17	1,28	-3,00	5,77	3,28	3,83	—

TAB. B.12 – Performances théoriques pour les trajectoires poly-sinusoidales avec pénalités.

#### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,500	0,000
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,070	0,000
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	-0,001	0,001
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

#### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	10,91	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	23,45	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,562	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	0,800	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

# Annexe C

## Résultats issus des évaluations à l'aide du robot virtuel

Cette annexe présente le détail des résultats issus des évaluations réalisées à l'aide des robots virtuels pour la planification globale au chapitre 2 et pour la planification locale au chapitre 3. Les coefficients obtenus de l'optimisation ainsi que les résultats lors de l'atteinte de l'objectif sont présentés pour les robots virtuel et virtuel perturbé. Pour la planification locale, l'évolution de la fréquence du système est aussi montrée.

## C.1 Planification de trajectoires globales

Le tableau C.1 présente les coefficients obtenus par optimisation pour l'évaluation de la planification globale implantée dans les robots virtuels présentée à la section 2.7.1. Puis, les tableaux C.2 et C.3 présentent les résultats numériques pour l'évaluation à l'aide des robots virtuel et virtuel perturbé. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et efforts articulaires présentée aux figures 2.15 et 2.16 pour le robot virtuel et aux figures 2.18 et 2.19 pour le robot virtuel perturbé.

TAB. C.1 – Coefficients obtenus par optimisation pour la planification globale par poly-sinusoidales implantée dans les robots virtuels.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	1,77	-3,92	0,90	1,00	2,02	0,12	-1,70
$B_i$	0,00	0,00	48,08	-58,17	1,28	-3,00	5,77	3,28	3,83	—

TAB. C.2 – Performances de la planification globale par poly-sinusoidales implantée dans le robot virtuel.

### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,555	0,055
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	0,999	0,001
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,071	0,001
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,233	0,233
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	-0,001	0,001
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,014	0,014

### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	9,72	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	24,35	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,570	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	0,800	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

TAB. C.3 – Performances de la planification globale par poly-sinusoidales implantées dans le robot virtuel perturbé.

Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,248	0,252
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,071	0,001
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	1,173	1,173
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	-0,003	0,003
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,022	0,022

Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	9,27	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	24,83	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,575	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 2$	0,800	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,000	0,000

## C.2 Planification de trajectoires locales

Les figures C.1 et C.3 montrent l'évolution des paramètres libres pour la planification locale implantée dans les robots virtuel et virtuel perturbé présentée à la section 3.5 alors que les figures C.2 et C.4 montrent l'évolution de la fréquence du système. Puis, les tableaux C.4 et C.5 présentent les résultats numériques pour les évaluations à l'aide des robots respectifs. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et efforts articulaires présentée aux figures 3.15 et 3.16 pour le robot virtuel et présentée aux figures 3.18 et 3.19 pour le cas perturbé.

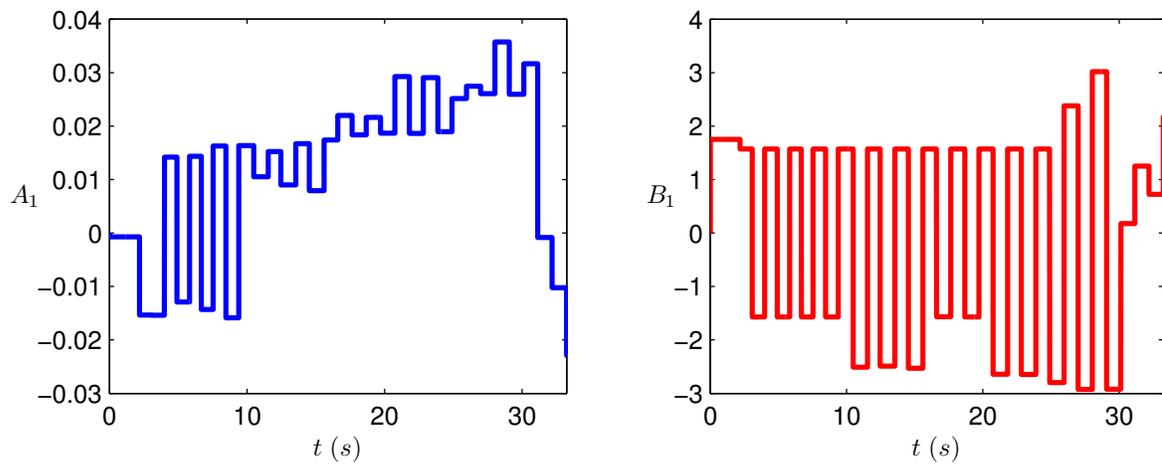


FIG. C.1 – Évolution des paramètres libres pour la planification locale implantée dans le robot virtuel.

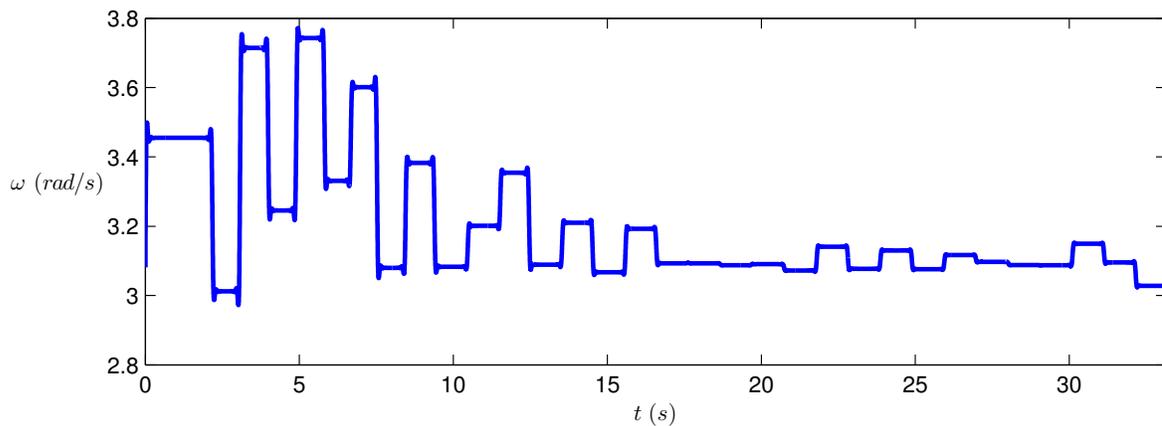


FIG. C.2 – Évolution de la fréquence du système pour la planification locale implantée dans le robot virtuel.

TAB. C.4 – Performances de la planification locale implantée dans le robot virtuel.

## Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,493	0,007
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	0,997	0,003
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,076	0,006
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,014	0,014
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	-0,001	0,001
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	-0,243	0,243

## Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	10,70	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	25,10	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,953	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,799	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,039	0,000
Angle maximal de l'effecteur	$\theta_{2max}$ (rad)	$< \pi$	3,118	0,000
Vitesse maximale du câble	$\dot{\rho}_{max}$ (m/s)	$< 0, 25$	0,267	0,017

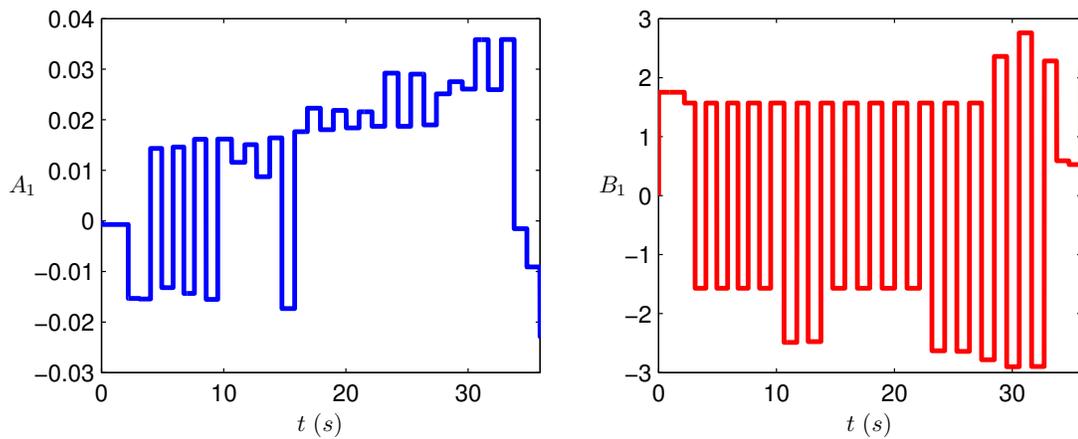


FIG. C.3 – Évolution des paramètres libres pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé.

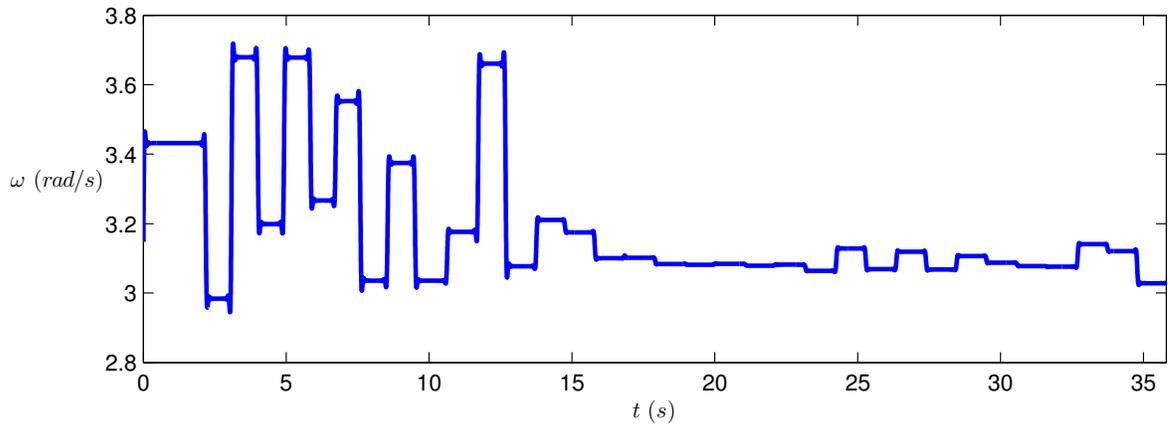


FIG. C.4 – Évolution de la fréquence du système pour la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé.

TAB. C.5 – Performances de la planification locale implantée dans le robot virtuel perturbé.

#### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,493	0,007
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	0,997	0,003
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,073	0,003
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,053	0,053
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,003	0,003
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	-0,108	0,108

#### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	10,60	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	25,11	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,975	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,799	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,041	0,000
Angle maximal de l'effecteur	$\theta_{2max}$ (rad)	$< \pi$	3,010	0,000
Vitesse maximale du câble	$\dot{\rho}_{max}$ (m/s)	$< 0, 25$	0,283	0,033

# Annexe D

## Résultats issus de la validation expérimentale

Cette annexe présente le détail des résultats issus de la validation expérimentale réalisée à l'aide du prototype au chapitre 4. Les résultats obtenus pour les planifications globale et locale lors de la réalisation d'une trajectoire simple sont d'abord montrés. Puis, les résultats obtenus pour la planification locale de trajectoires complexes et lors de l'introduction de perturbations sont présentés.

## D.1 Trajectoires simples

Les tableaux D.1 et D.2 montrent les coefficients obtenus par optimisation et les résultats numériques pour la planification globale de la trajectoire simple présentée à la section 4.3.2. Les performances sont tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 4.6 et 4.7.

TAB. D.1 – Coefficients des trajectoires poly-sinusoidales obtenus par optimisation pour la planification globale de la trajectoire simple.

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$A_i$	0,80	0,00	0,00	0,35	-0,34	-1,00	-1,95	5,40	0,46	-2,72
$B_i$	0,00	0,00	-54,83	68,26	-0,25	-3,11	-3,06	-4,45	-3,64	—

TAB. D.2 – Performances des trajectoires poly-sinusoidales pour la planification globale de la trajectoire simple.

### Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,285	0,215
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,001	0,001
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,050	0,020
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,001	0,001
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,001	0,001

### Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	8,10	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	49,78	9,782
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	1,322	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,795	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,001	0,000



TAB. D.3 – Performances pour la planification locale de la trajectoire simple.

## Atteinte de l'objectif

Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,500	0,500	0,000
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,070	1,063	0,007
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

## Contraintes

Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	2,886	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	38,769	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,644	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,801	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,047	0,000
Angle maximal de l'effecteur	$\theta_{2max}$ (rad)	$< \pi$	3,045	0,000
Vitesse maximale du câble	$\dot{\rho}_{max}$ (m/s)	$< 0, 25$	0,247	0,000

## D.2 Trajectoires complexes

Les figures D.3 et D.4 montrent respectivement l'évolution des paramètres libres et de la fréquence du système pour la planification locale de la première trajectoire complexe présentée à la section 4.3.3. Puis, le tableau D.4 résume les performances tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 4.12 et 4.13.

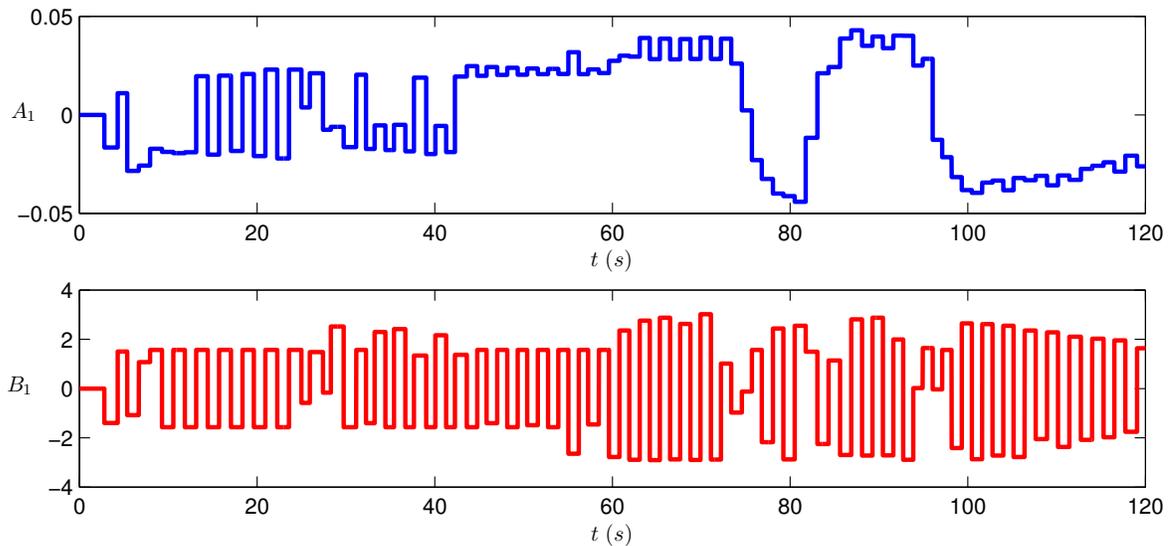


FIG. D.3 – Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la première trajectoire complexe.

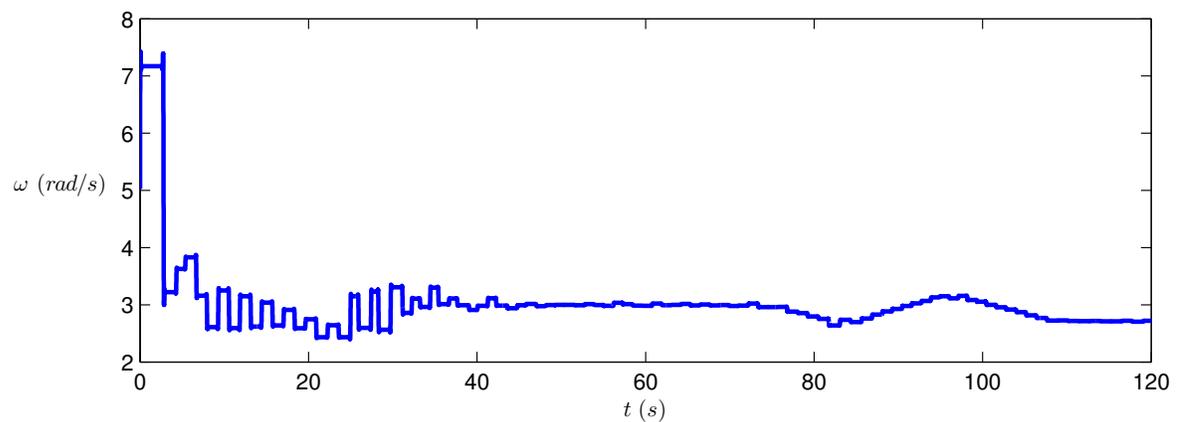


FIG. D.4 – Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la première trajectoire complexe.

TAB. D.4 – Performances pour la planification locale de la première trajectoire complexe.

Atteinte de l'objectif 1				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,550	0,549	0,001
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,200	1,201	0,001
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,020	0,996	0,024
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

Atteinte de l'objectif 2				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	-0,300	-0,311	0,011
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,500	1,500	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	-0,870	-0,859	0,011
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,004	0,004

Atteinte de l'objectif 3				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,800	0,795	0,005
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,560	1,558	0,002
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	-0,001	0,001
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,037	0,037

Contraintes				
Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	0,788	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	39,370	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,701	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,974	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,620	0,000
Angle maximal de l'effecteur	$\theta_{2max}$ (rad)	$< \pi$	3,296	0,154
Vitesse maximale du câble	$\dot{\rho}_{max}$ (m/s)	$< 0, 25$	0,247	0,000

Les figures D.5 et D.6 montrent respectivement l'évolution des paramètres libres et de la fréquence du système pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe présentée à la section 4.3.3. Puis, le tableau D.5 résume les performances tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 4.16 et 4.17.

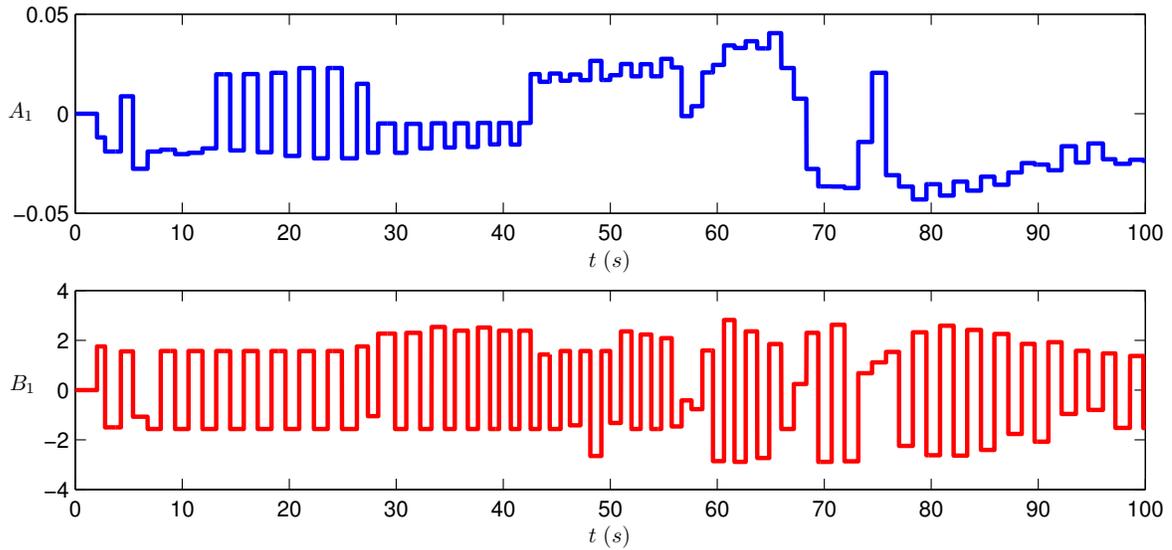


FIG. D.5 – Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe.

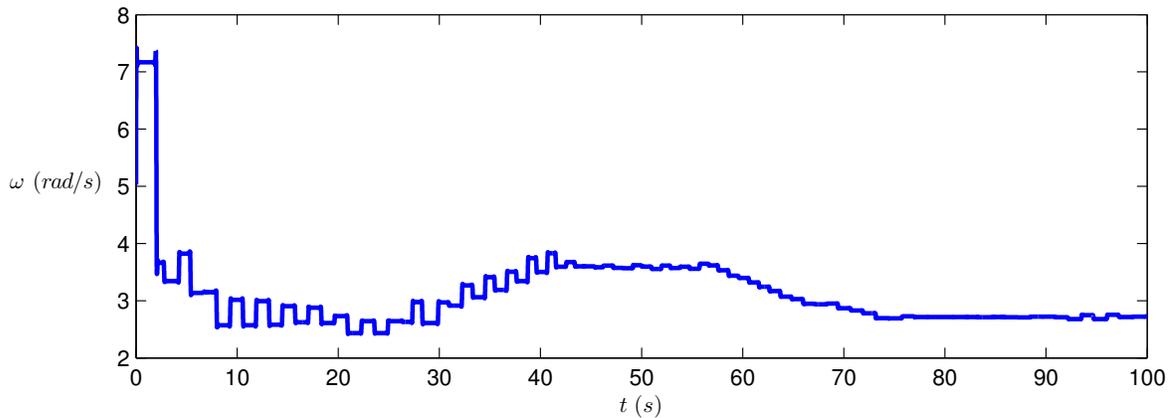


FIG. D.6 – Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe.

TAB. D.5 – Performances pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe.

Atteinte de l'objectif 1				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	-0,500	-0,514	0,014
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	0,800	0,800	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	-2,000	-1,692	0,308
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,014	0,014

Atteinte de l'objectif 2				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,700	0,673	0,027
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,200	1,200	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	0,400	0,390	0,010
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000

Atteinte de l'objectif 3				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,400	0,388	0,012
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,500	1,500	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	-1,500	-1,477	0,023
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	-0,003	0,003

Contraintes				
Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	0,840	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	45,54	0,543
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	0,755	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,771	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,620	0,000
Angle maximal de l'effecteur	$\theta_{2max}$ (rad)	$< \pi$	3,183	0,041
Vitesse maximale du câble	$\dot{\rho}_{max}$ (m/s)	$< 0, 25$	0,242	0,000

## D.3 Trajectoires complexes avec perturbations

Les figures D.7 et D.8 montrent respectivement l'évolution des paramètres libres et de la fréquence du système pour la planification locale de la deuxième trajectoire complexe présentée à la section 4.3.4. Puis, le tableau D.6 résume les performances tirées de l'évolution des coordonnées et des efforts articulaires présentée aux figures 4.19 et 4.20.

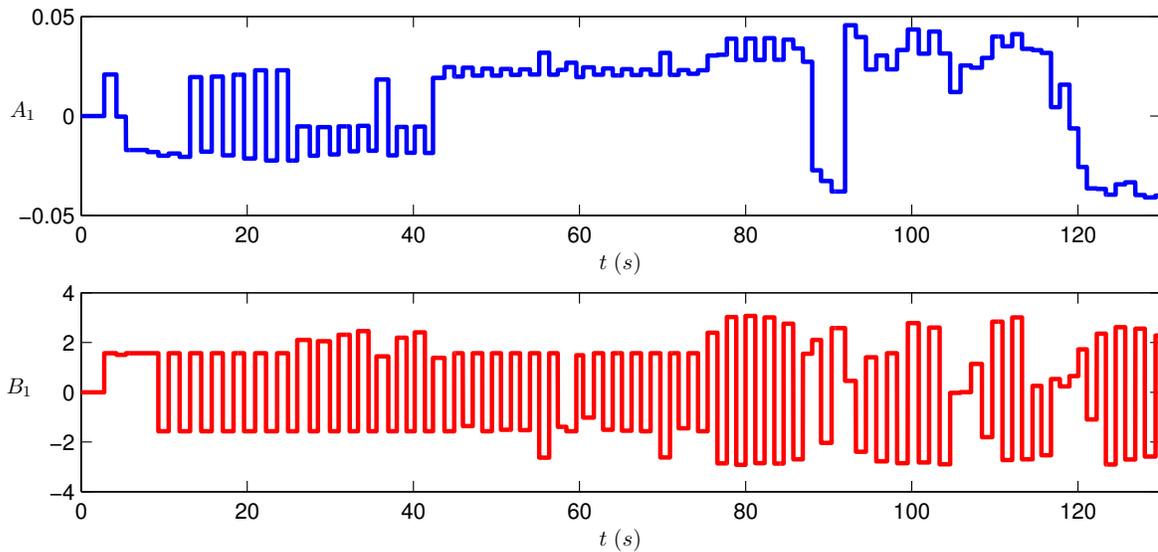


FIG. D.7 – Évolution des paramètres libres pour la planification locale de la première trajectoire complexe en ajoutant des perturbations.

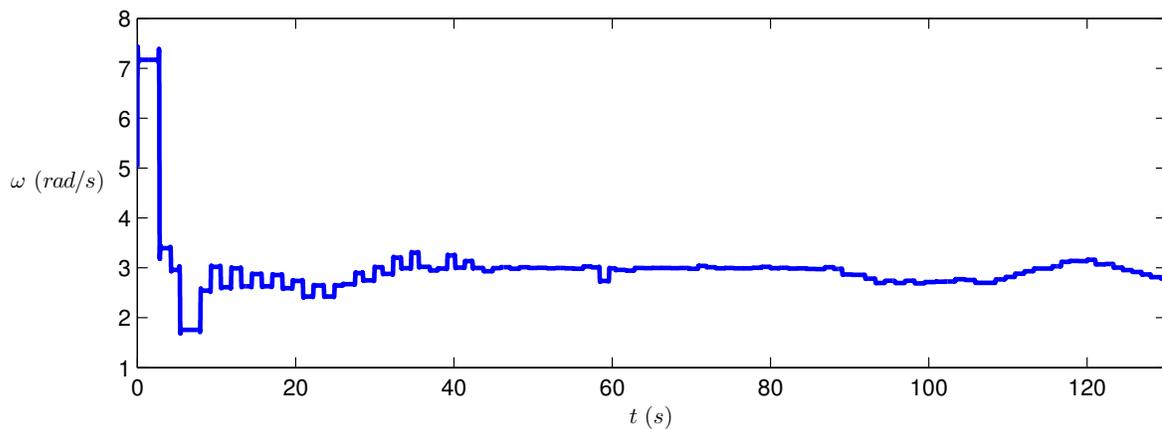


FIG. D.8 – Évolution de la fréquence du système pour la planification locale de la deuxième première trajectoire complexe en ajoutant des perturbations.

TAB. D.6 – Performances pour la planification locale de la première trajectoire complexe en ajoutant des perturbations.

Atteinte de l'objectif 1				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,550	0,529	0,021
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,200	1,200	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,020	1,030	0,010
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	-0,015	0,015
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,946	0,946

Atteinte de l'objectif 2				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	-0,300	-0,299	0,001
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,500	1,500	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	-0,870	-0,847	0,023
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	0,002	0,002
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	-0,004	0,004

Atteinte de l'objectif 3				
Description		Cible	Résultat	Écart
Angle du câble	$\theta_{1f}$ (rad)	0,800	0,793	0,007
Longueur du câble	$\rho_f$ (m)	1,000	1,000	0,000
Angle de l'effecteur	$\theta_{2f}$ (rad)	1,560	1,557	0,003
Vitesse angulaire du câble	$\dot{\theta}_{1f}$ (rad/s)	0,000	0,000	0,000
Vitesse du câble	$\dot{\rho}_f$ (m/s)	0,000	-0,004	0,004
Vitesse angulaire de l'effecteur	$\dot{\theta}_{2f}$ (rad/s)	0,000	0,163	0,163

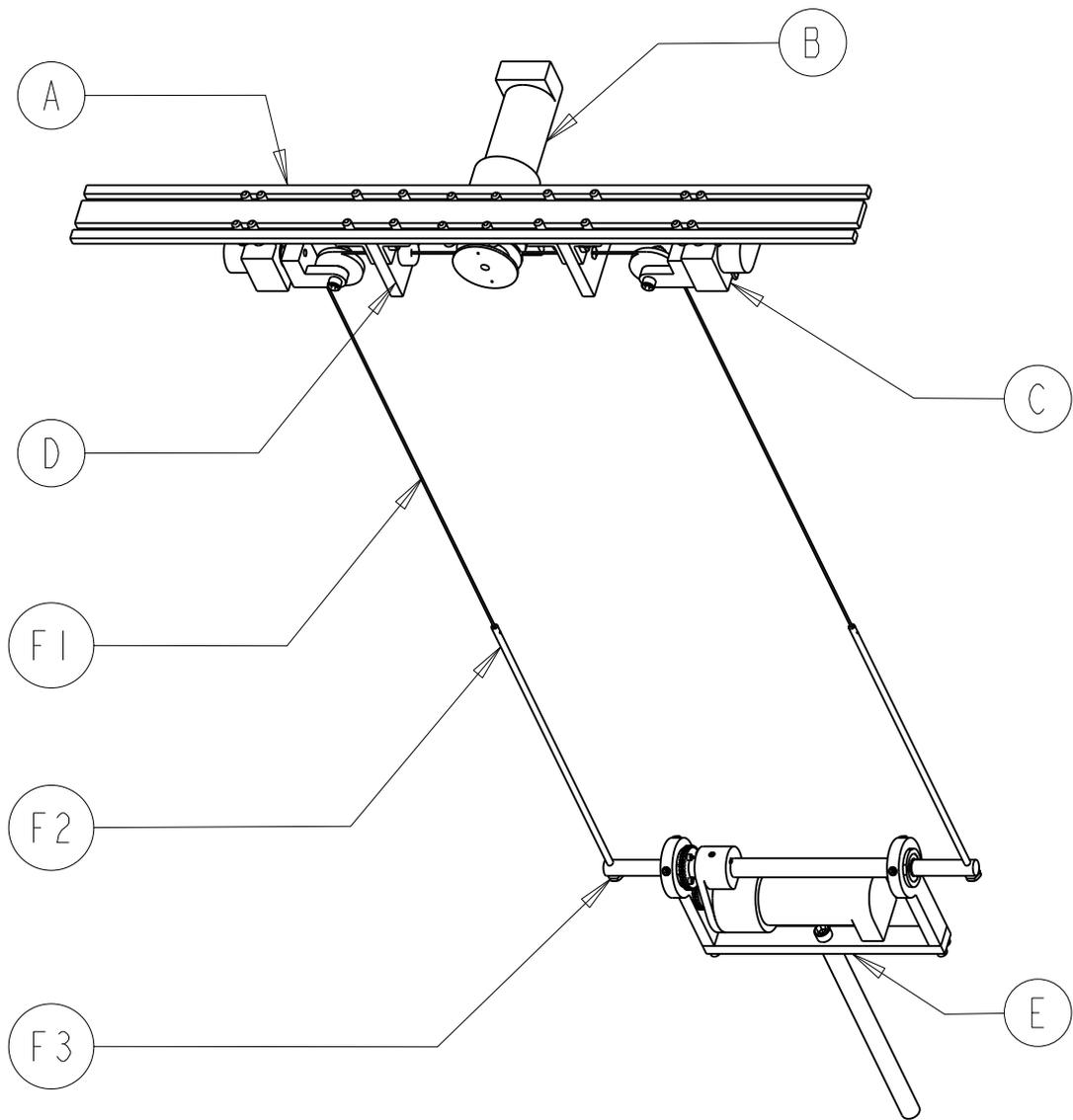
  

Contraintes				
Description		Cible	Résultat	Écart
Tension minimale du câble	$F_{min}$ (N)	$> 0, 0$	0,900	0,000
Tension maximale du câble	$F_{max}$ (N)	$< 40$	38,67	0,000
Couple maximal à l'effecteur	$\tau_{max}$ (N·m)	$< 1, 5$	1,300	0,000
Longueur minimale du câble	$\rho_{min}$ (m)	$> 0, 3$	0,985	0,000
Longueur maximale du câble	$\rho_{max}$ (m)	$< 1, 7$	1,620	0,000
Angle maximal de l'effecteur	$\theta_{2max}$ (rad)	$< \pi$	3,134	0,000
Vitesse maximale du câble	$\dot{\rho}_{max}$ (m/s)	$< 0, 25$	0,251	0,001

# Annexe E

## Plans de fabrication et d'assemblage du prototype

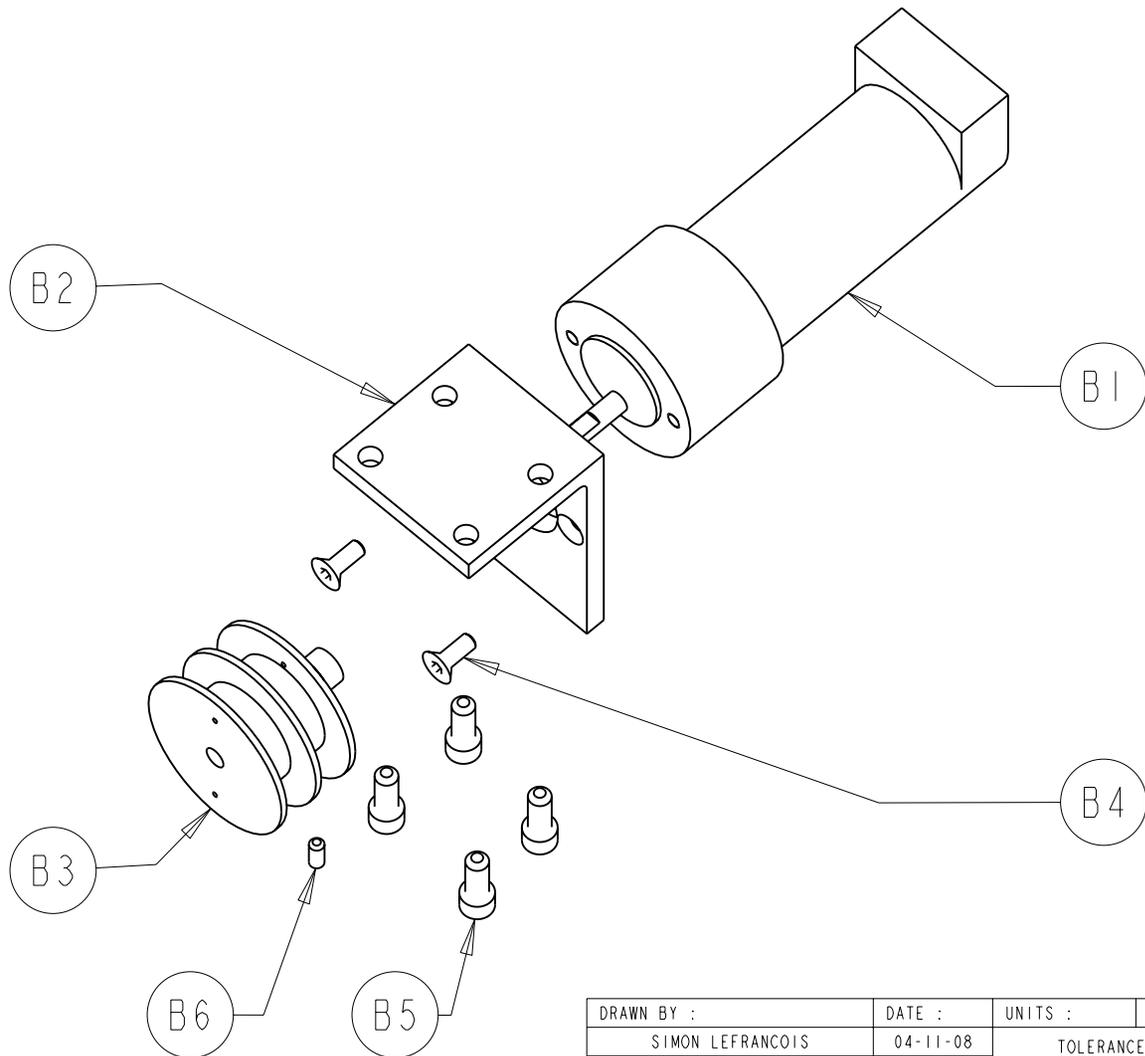
Cette annexe présente l'ensemble des plans nécessaires à la fabrication et à l'assemblage du prototype. Ceux-ci sont présentés dans leur version finale suite aux différentes corrections apportées en cours de projet.



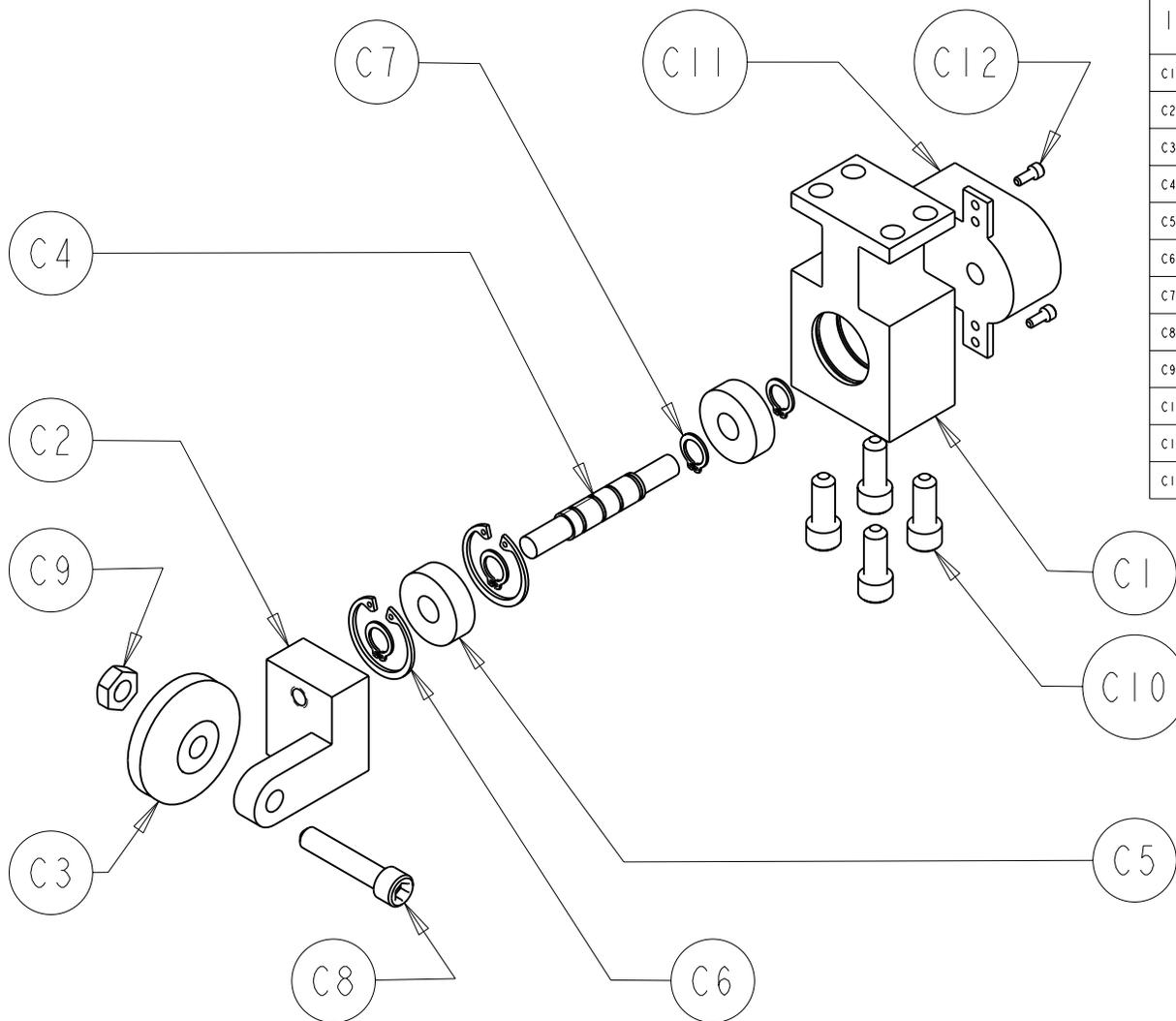
INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
A	1	STRUCTURE DE SUPPORT	LAB. ROBOTIQUE
B	1	SOUS-ASSEMBLAGE MOTEUR EXTENSION	RCSA-S-ASM-B
C	2	SOUS-ASSEMBLAGE SUPPORT POULIE	RCSA-S-ASM-C
D	2	SOUS-ASSEMBLAGE GUIDE	RCSA-S-ASM-D
E	1	SOUS-ASSEMBLAGE BASE/EFFECTEUR	RCSA-S-ASM-E
F1	2	CABLE Ø1/32" x 1.90m	PASSE-TEMPS 3000
F2	2	SECTION RIGIDE CABLE	RCSA-PRT-F2
F3	2	ECROU UNF 10-32	ATELIER

DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 0.180	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	09-07-09			MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		GENERAL LINEAR TOLERANCE :		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.X ±0.1		PART NAME : ASSEMBLAGE GENERAL		
		X.XX ±0.01				
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-ASM		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
B1	1	MOTEUR PITTMAN GM9236S021	PITTMAN EXPRESS
B2	1	SUPPORT MOTEUR EXTENSION	RCSA-PRT-B2
B3	1	ENROULEUR	RCSA-PRT-B3
B4	2	VIS TETE FRAISEE UNF 10-32 x 1/2"	ATELIER
B5	4	VIS SIX PANS CREUX UNC 1/4-20 x 5/8"	ATELIER
B6	1	VIS PRESSION UNF 8-36 x 3/8"	ATELIER



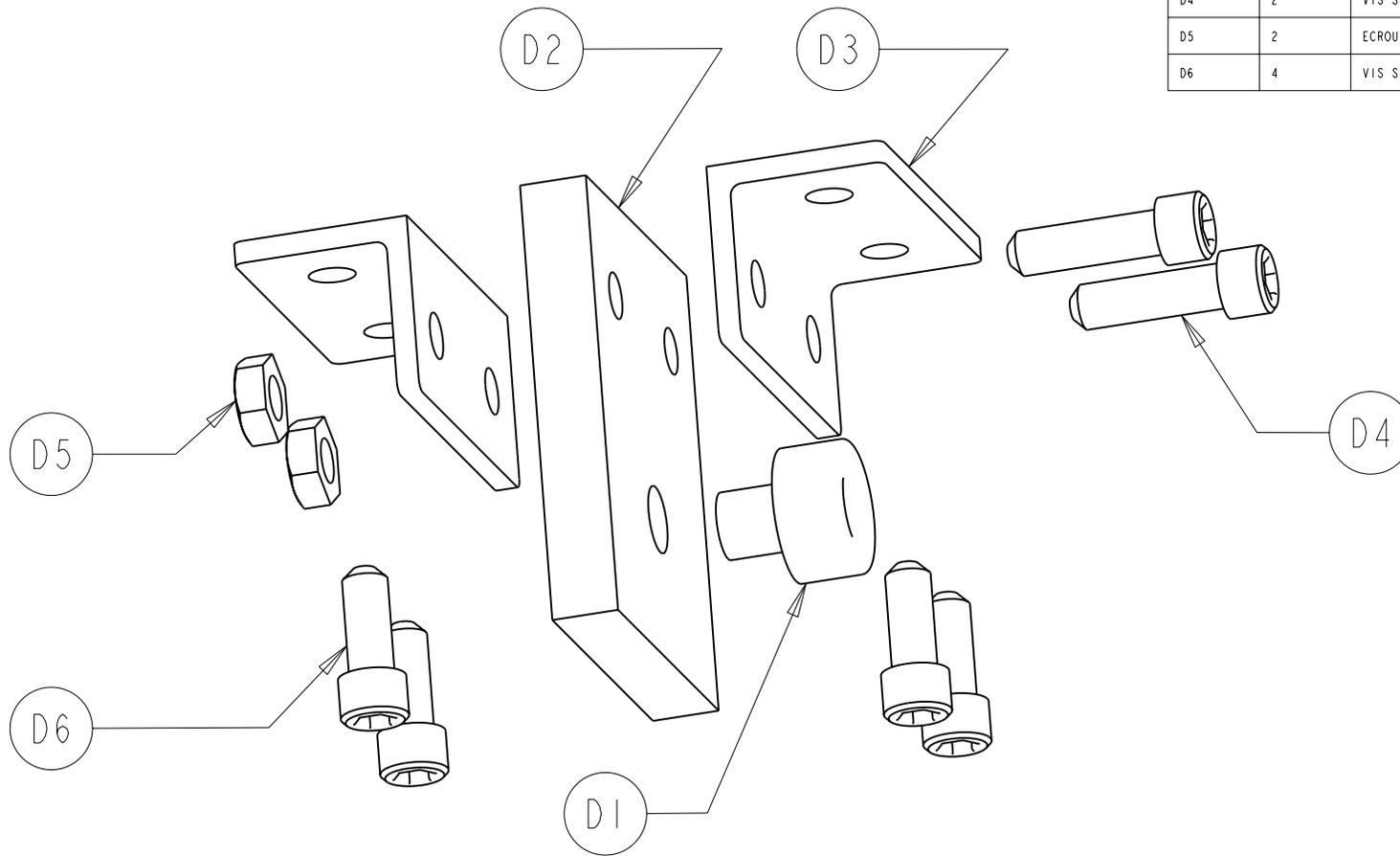
DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 0.500	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01				
		X.XXX ±0.001		PART NAME : SOUS-ASSEMBLAGE MOTEUR EXTENSION		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-S-ASM-B		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
C1	1	SUPPORT POULIE	RCSA-PRT-C1
C2	1	PORTE-POULIE	RCSA-PRT-C2
C3	1	POULIE	RCSA-PRT-C3
C4	1	ARBRE PORTE-POULIE	RCSA-PRT-C4
C5	2	ROULEMENT DROIT $\varnothing 8 \times \varnothing 22 \times 7$ mm	MCMMASTER-CARR
C6	2	ANNEAU ELASTIQUE INT. 7/8"	MCMMASTER-CARR
C7	4	ANNEAU ELASTIQUE EXT. 8mm	MCMMASTER-CARR
C8	1	VIS SIX PANS CREUX UNC 1/4-20 x 1.5"	ATELIER
C9	1	ECROU UNC 1/4-20	ATELIER
C10	4	VIS SIX PANS CREUX UNC 1/4-20 x 5/8"	ATELIER
C11	1	ENCODEUR HEDS-5640 A06	HEWLETT-PACKARD
C12	2	VIS SIX PANS CREUX UNC 3-48 x 1/4"	ATELIER

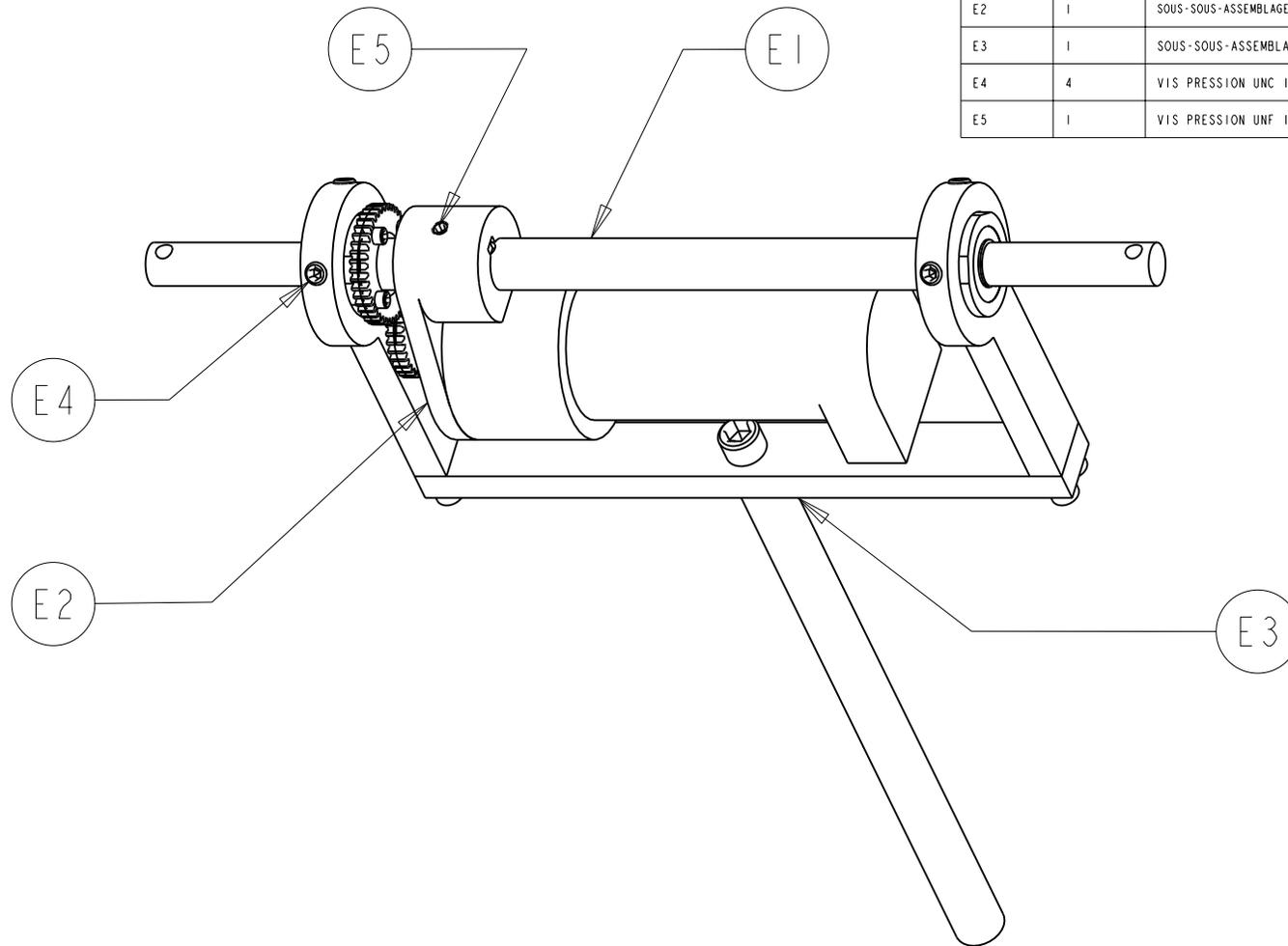
DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 0.500	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	09-07-09			MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		NOTE : LE SOUS-ASSEMBLAGE GAUCHE EST SIMILAIRE EN REMPLACANT LE PORTE-POULIE PAR LE PORTE-POULIE GAUCHE		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA				GENERAL LINEAR TOLERANCE :		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE
				X.X $\pm 0.1$		PART NAME : SOUS-ASSEMBLAGE SUPPORT POULIE
				X.XX $\pm 0.01$		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X $\pm 0.5^\circ$				
		X.X $\pm 0.2^\circ$		DRAWING NUMBER : RCSA-S-ASM-C		

INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
D1	1	OEILLET	RCSA-PRT-D1
D2	1	SUPPORT OEILLET	RCSA-PRT-D2
D3	2	COIN FIXATION	LAB. ROBOTIQUE
D4	2	VIS SIX PANS CREUX UNC 1/4-20 x 7/8"	ATELIER
D5	2	ECROU UNC 1/4-20	ATELIER
D6	4	VIS SIX PANS CREUX UNC 1/4-20 x 5/8"	ATELIER



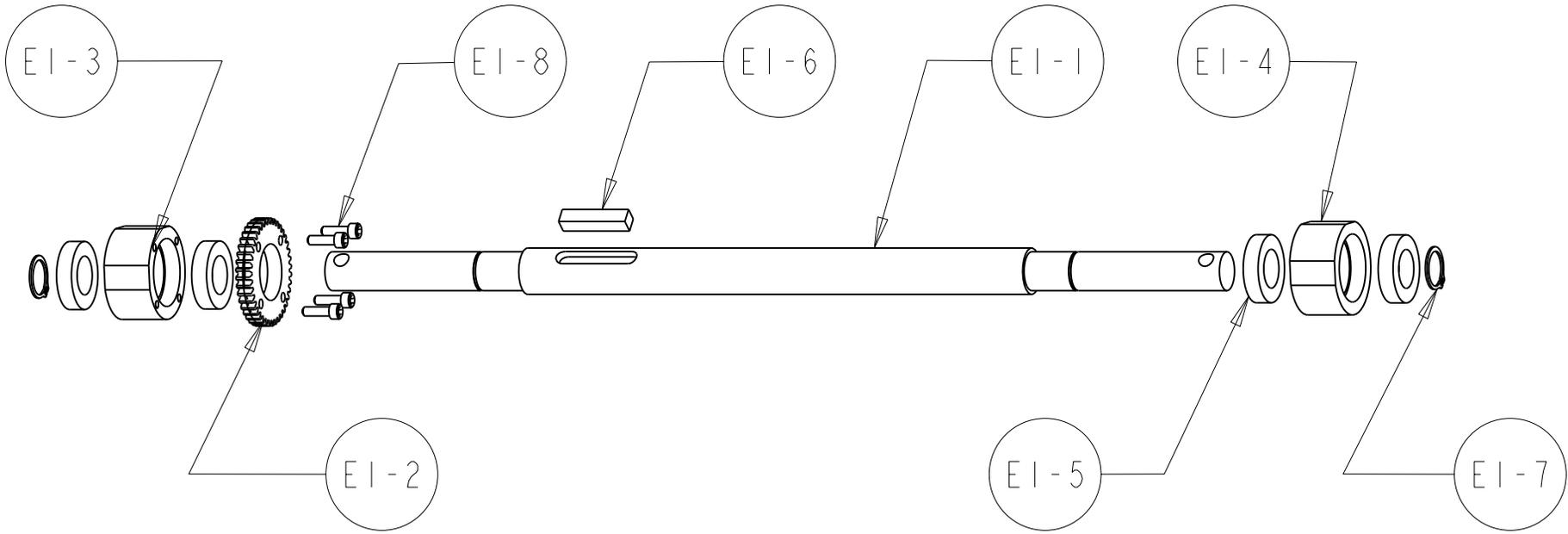
DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 1.000	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	09-07-09	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SOUS-ASSEMBLAGE GUIDE		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-S-ASM-D		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
E1	1	SOUS-SOUS-ASSEMBLAGE ARBRE BASE	RCSA-SS-ASM-E1
E2	1	SOUS-SOUS-ASSEMBLAGE MOTEUR EFFECTEUR	RCSA-SS-ASM-E2
E3	1	SOUS-SOUS-ASSEMBLAGE EFFECTEUR	RCSA-SS-ASM-E3
E4	4	VIS PRESSION UNC 1/4-20 x 3/8"	ATELIER
E5	1	VIS PRESSION UNF 10-32 x 1/4"	ATELIER



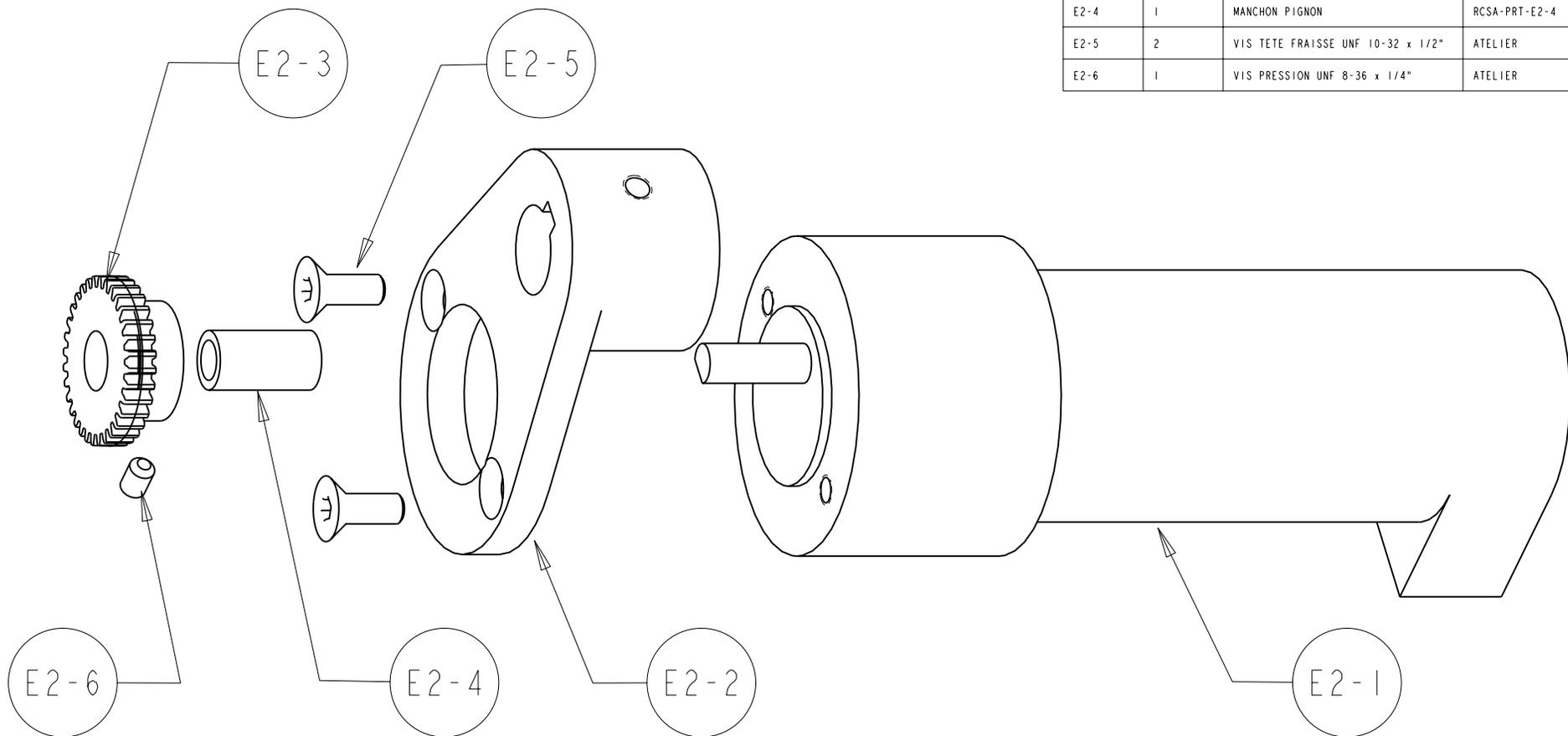
DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 0.500	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SOUS-ASSEMBLAGE BASE/EFFECTEUR		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-S-ASM-E		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
E1-1	1	ARBRE BASE	RCSA-PRT-E1-1
E1-2	1	ROUE MODIFIEE	RCSA-PRT-E1-2
E1-3	1	PORTE-ROULEMENT GAUCHE	RCSA-PRT-E1-3
E1-4	1	PORTE-ROULEMENT DROIT	RCSA-PRT-E1-3
E1-5	4	ROULEMENT $\varnothing 12 \times \varnothing 21 \times 5$ mm	MCMASTER-CARR
E1-6	1	CLAVETTE CARREE 3/16" x 7/8"	ATELIER
E1-7	2	ANNEAU ELASTIQUE EXT. 12mm	MCMASTER-CARR
E1-8	4	VIS SIX PANS CREUX UNC 4-40 x 3/8"	ATELIER



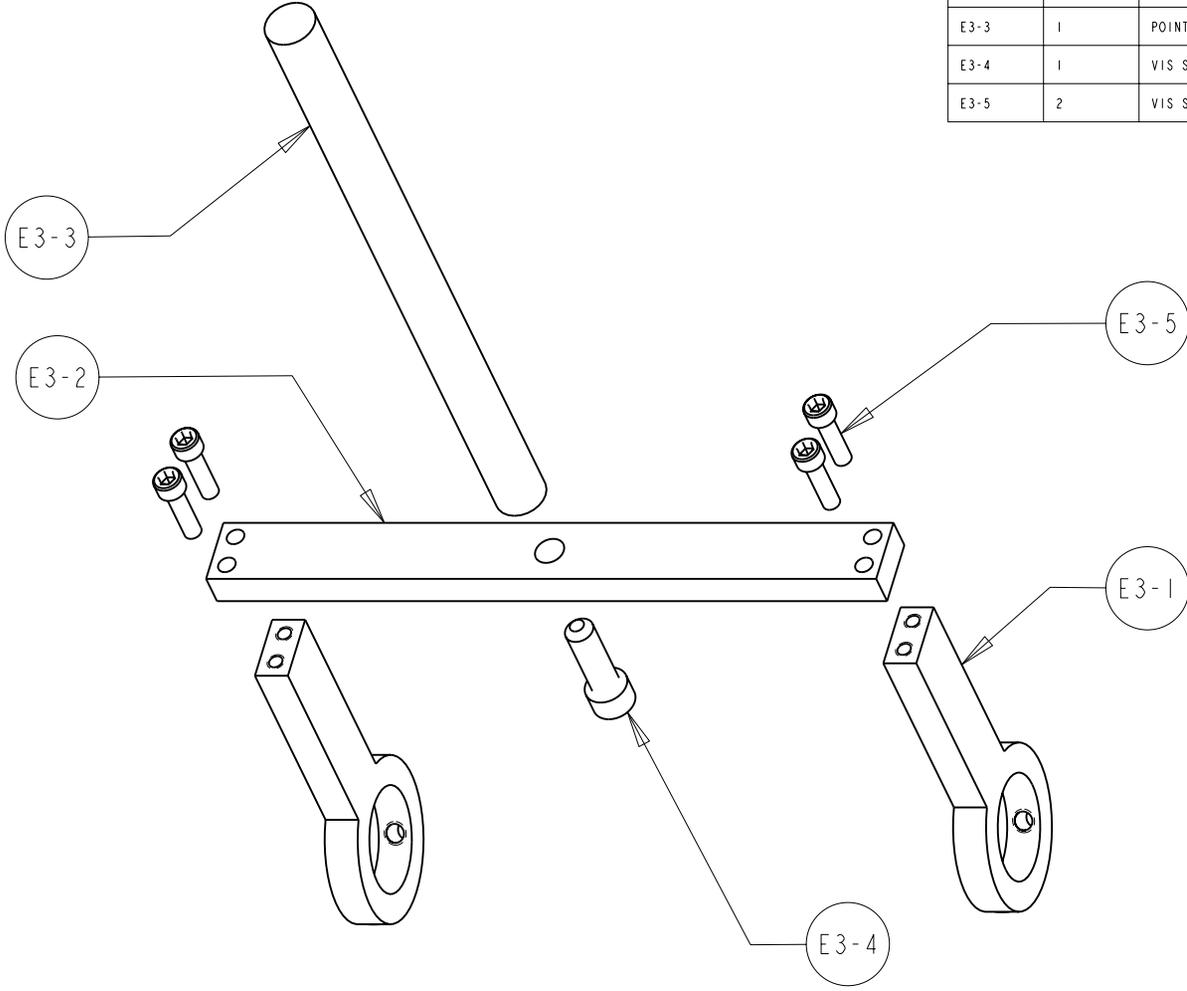
DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 0.500	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	03-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SOUS-SOUS-ASSEMBLAGE ARBRE BASE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-SS-ASM-E1		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
E2-1	1	MOTEUR PITTMAN GM9236S021	PITTMAN EXPRESS
E2-2	1	SUPPORT MOTEUR BASE	RCSA-PRT-E2-2
E2-3	1	PIGNON MODIFIE	RCSA-PRT-E2-3
E2-4	1	MANCHON PIGNON	RCSA-PRT-E2-4
E2-5	2	VIS TETE FRAISSE UNF 10-32 x 1/2"	ATELIER
E2-6	1	VIS PRESSION UNF 8-36 x 1/4"	ATELIER

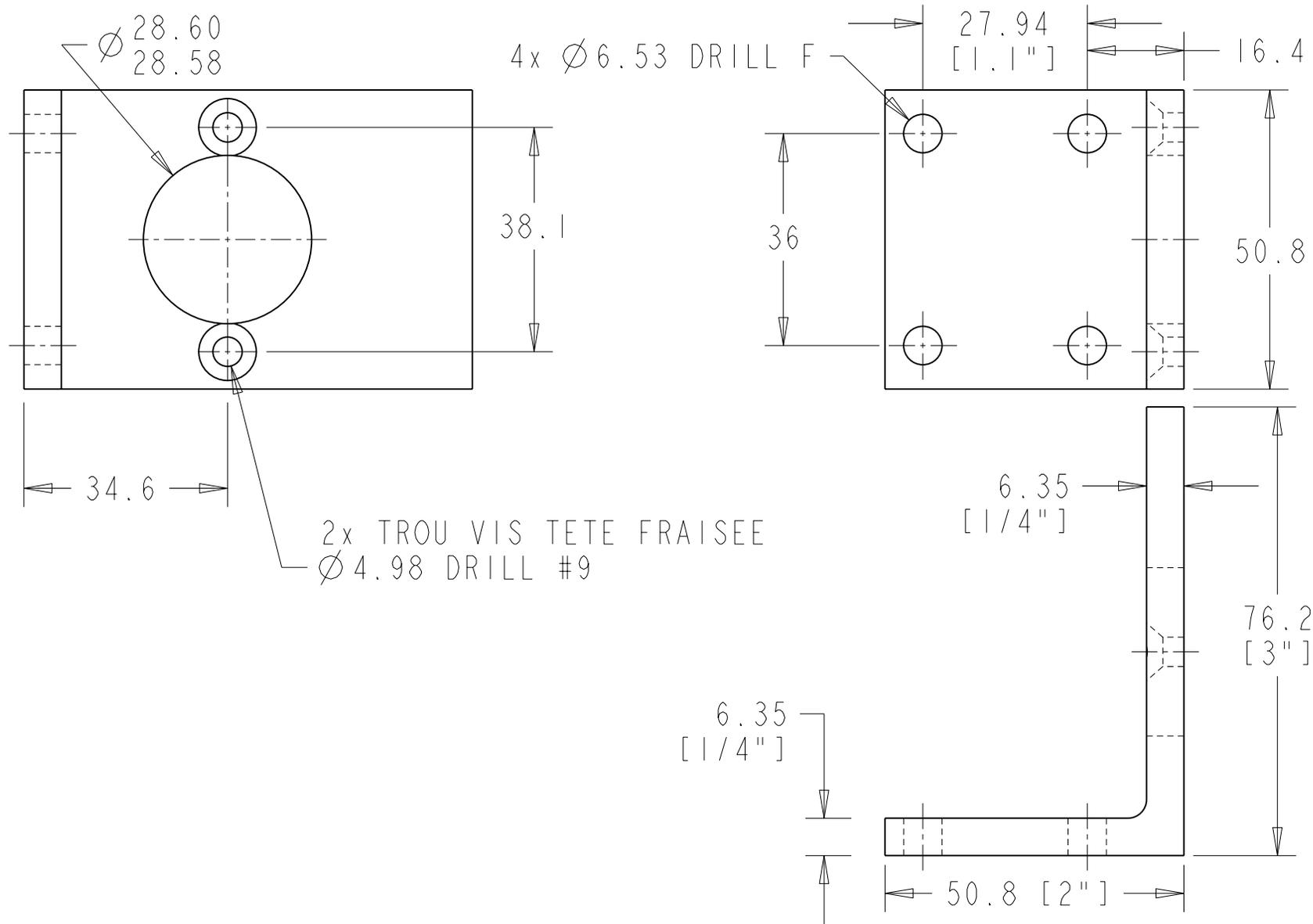


DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 1.000	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY :
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08					
CHECKED BY :	DATE :	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL :		
		GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SOUS-SOUS-ASSEMBLAGE MOTEUR EFFECTEUR		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-SS-ASM-E2		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

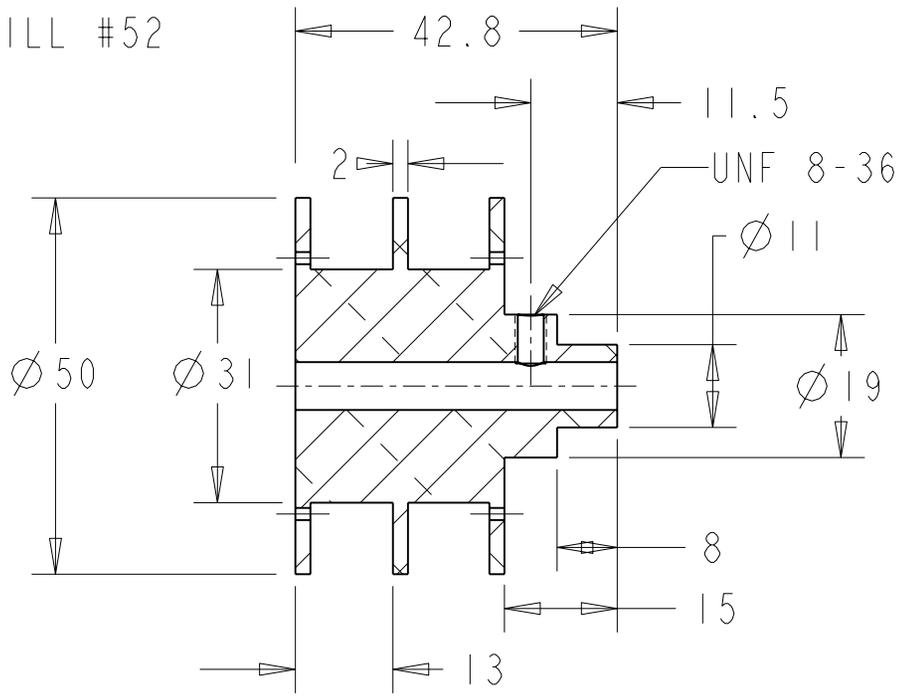
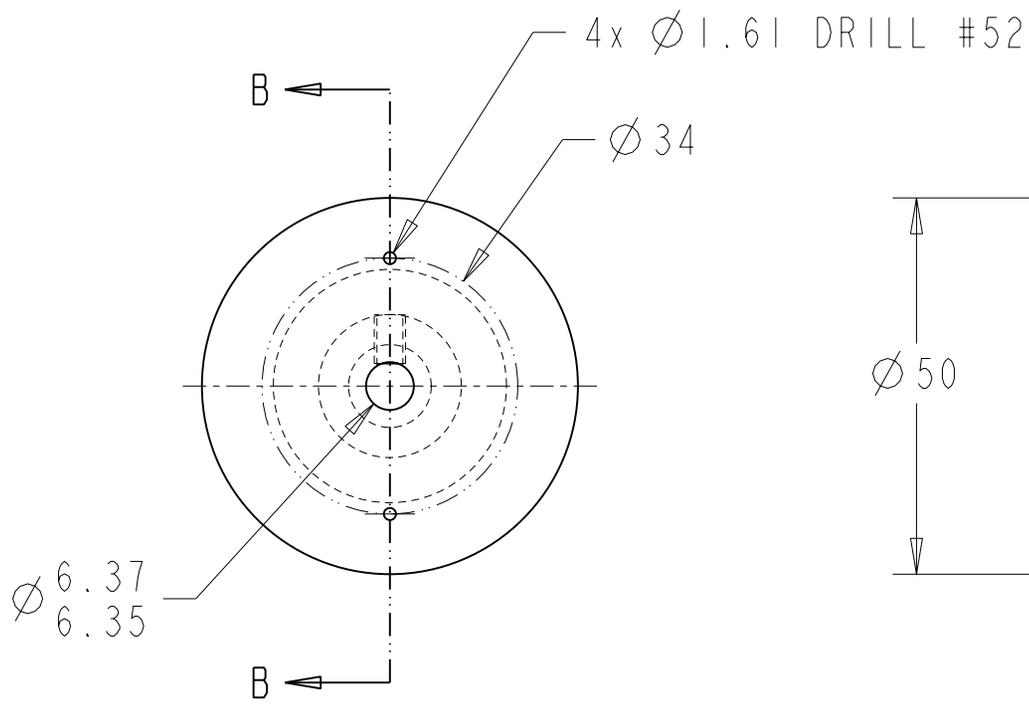
INDEX	QTY	PART	SUPPLIER
E3-1	2	BASE EFFECTEUR	RCSA-PRT-E3-1
E3-2	1	SUPPORT LATERAL EFFECTEUR	RCSA-PRT-E3-2
E3-3	1	POINTEUR EFFECTEUR	RCSA-PRT-E3-3
E3-4	1	VIS SIX PANS CREUX UNC 10-24 x 3/4"	ATELIER
E3-5	2	VIS SIX PANS CREUX UNC 5/16-18 x 1"	ATELIER



DRAWN BY :	DATE :	UNITS :	SCALE : 0.500	PART NUMBER :	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	20-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL :		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SOUS-SOUS-ASSEMBLAGE EFFECTEUR		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-SS-ASM-E3		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

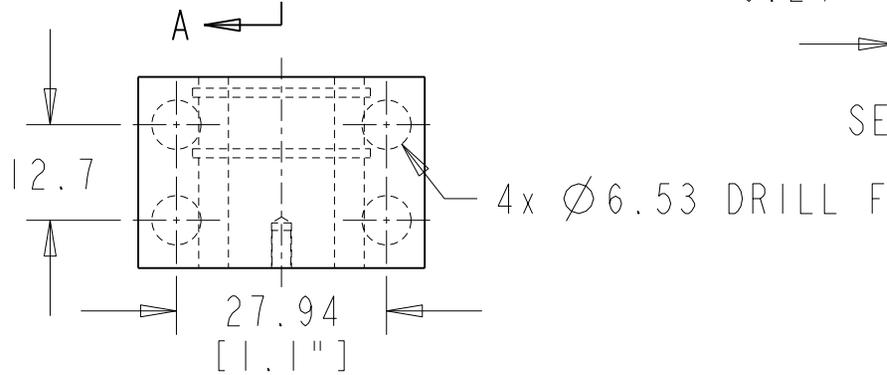
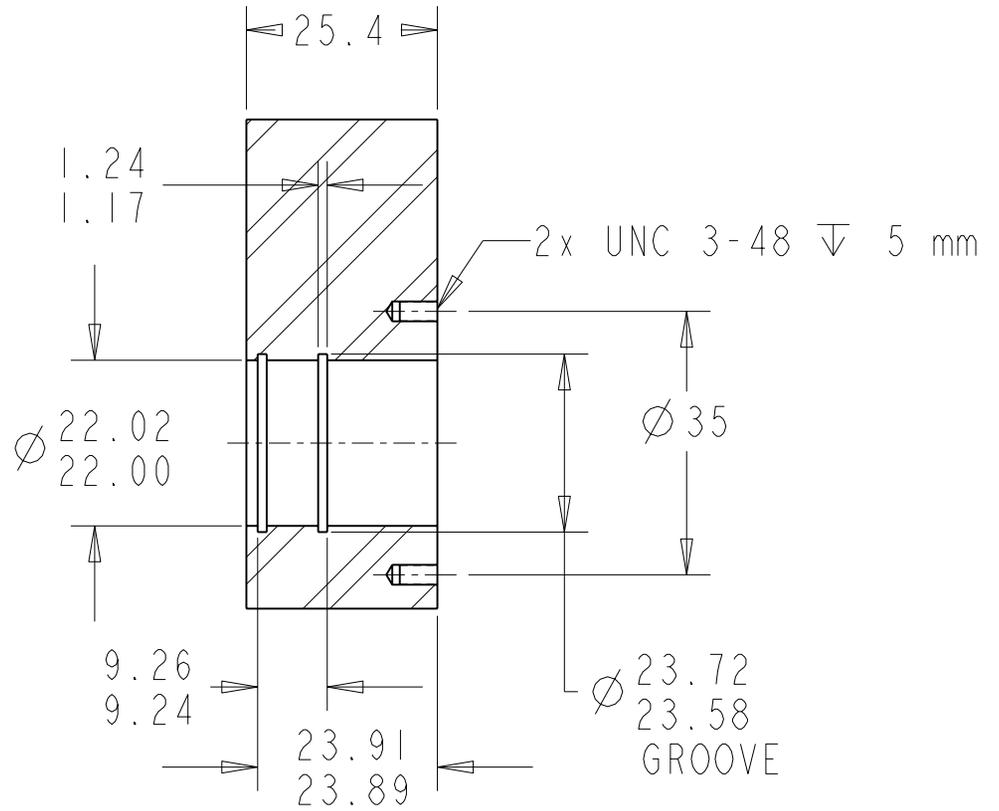
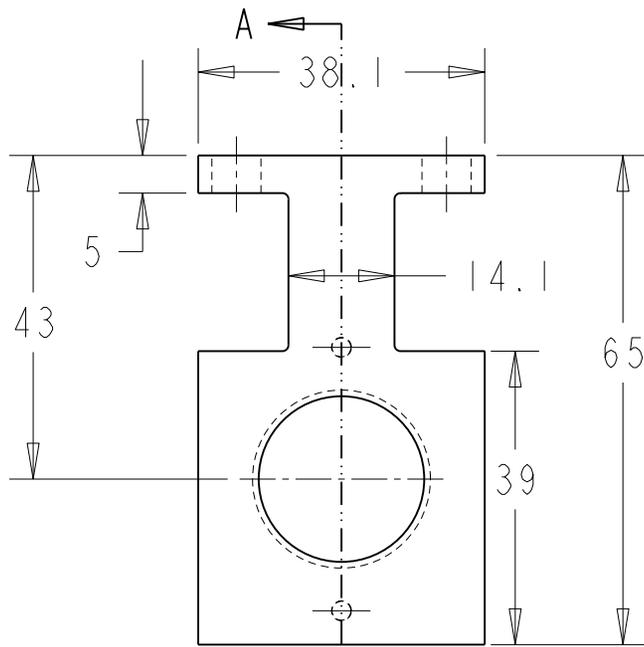


DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : B2	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE : USINER A PARTIR D'UN PROFILE EN "L" 3.0" x 2.0" x 1/4"		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SUPPORT MOTEUR EXTENSION		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-B2		
		X.X ±0.2°				



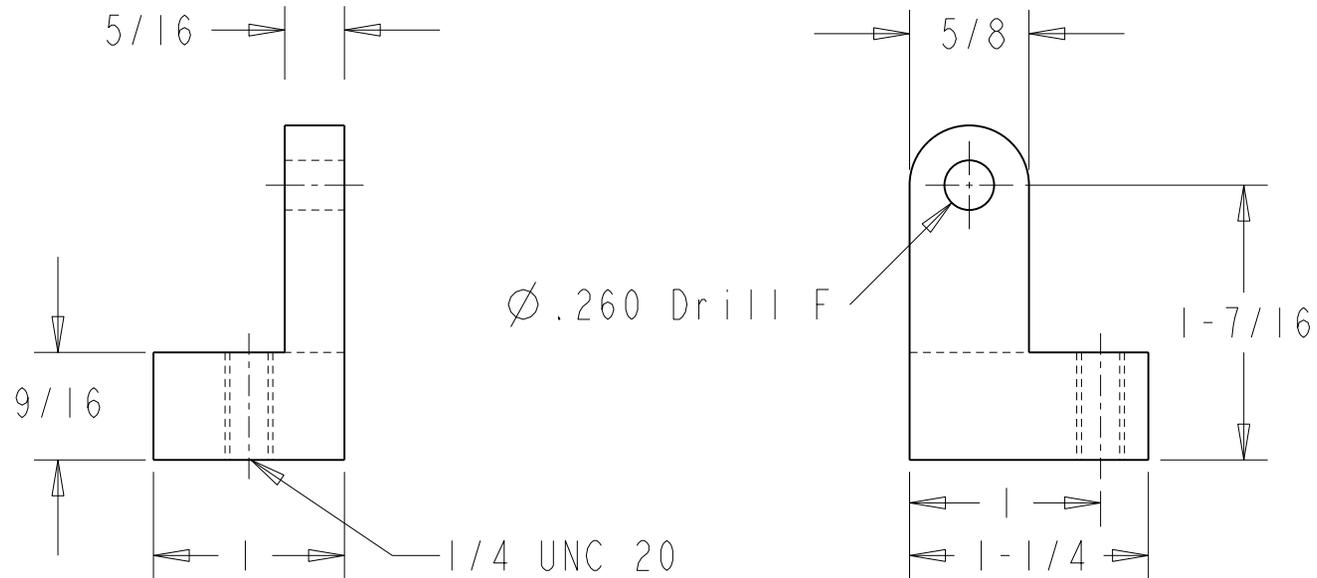
SECTION B-B

DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : B3	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	03-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : ENROULEUR		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-B3		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				

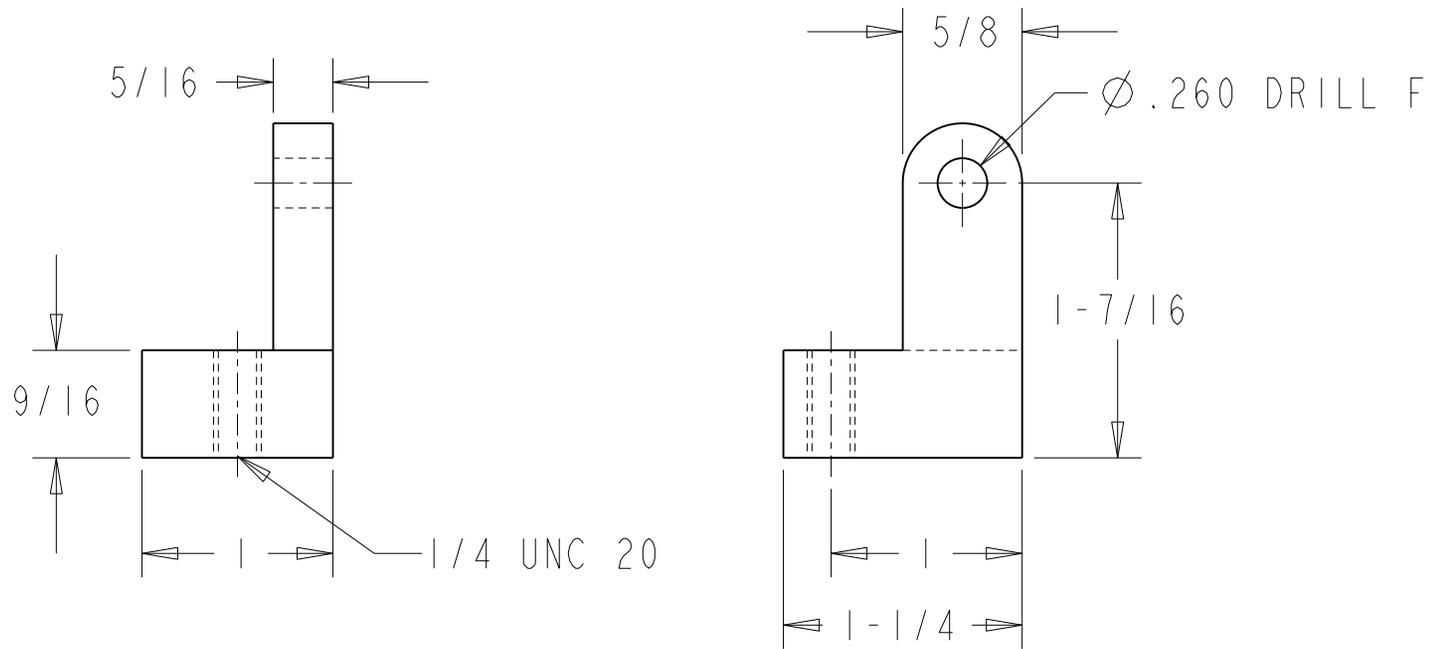


SECTION A-A

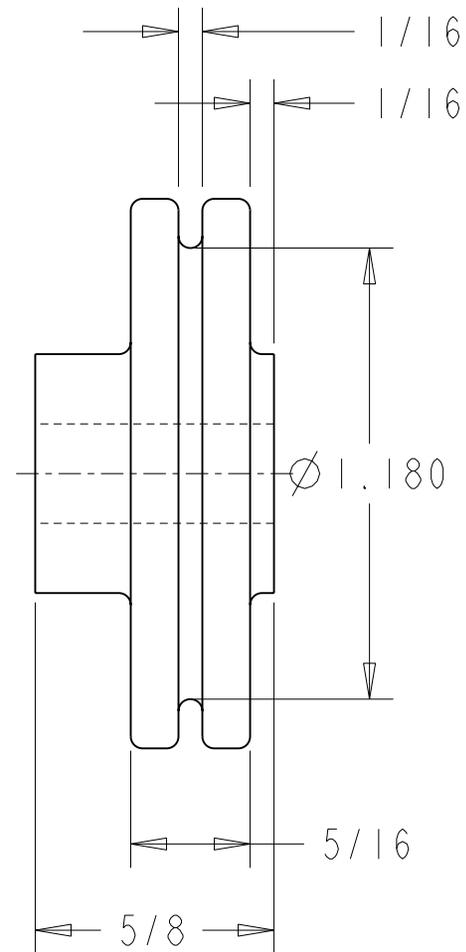
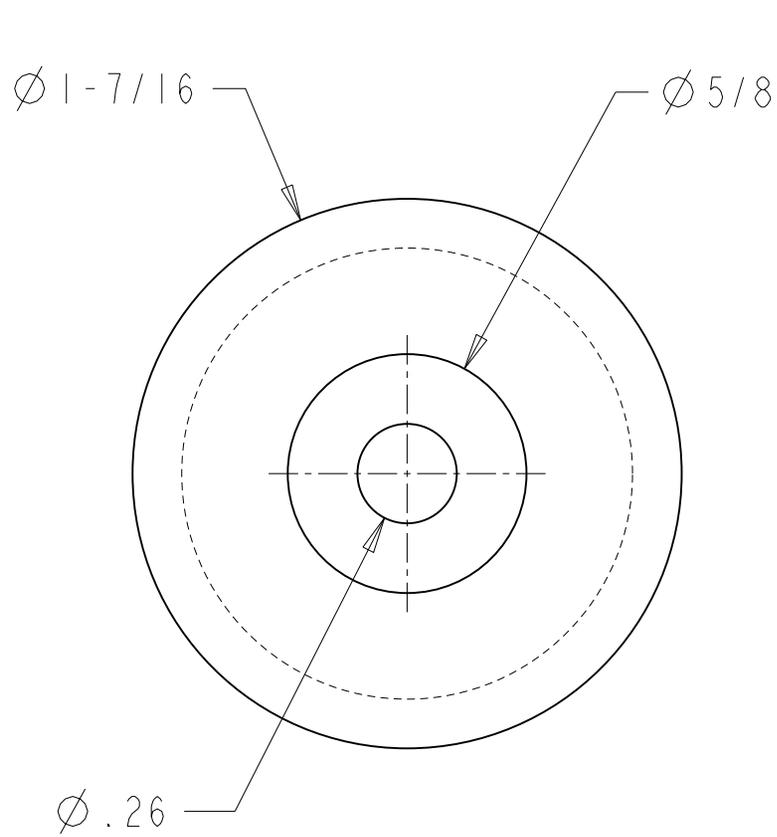
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : C1	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SUPPORT POULIE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-C1		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



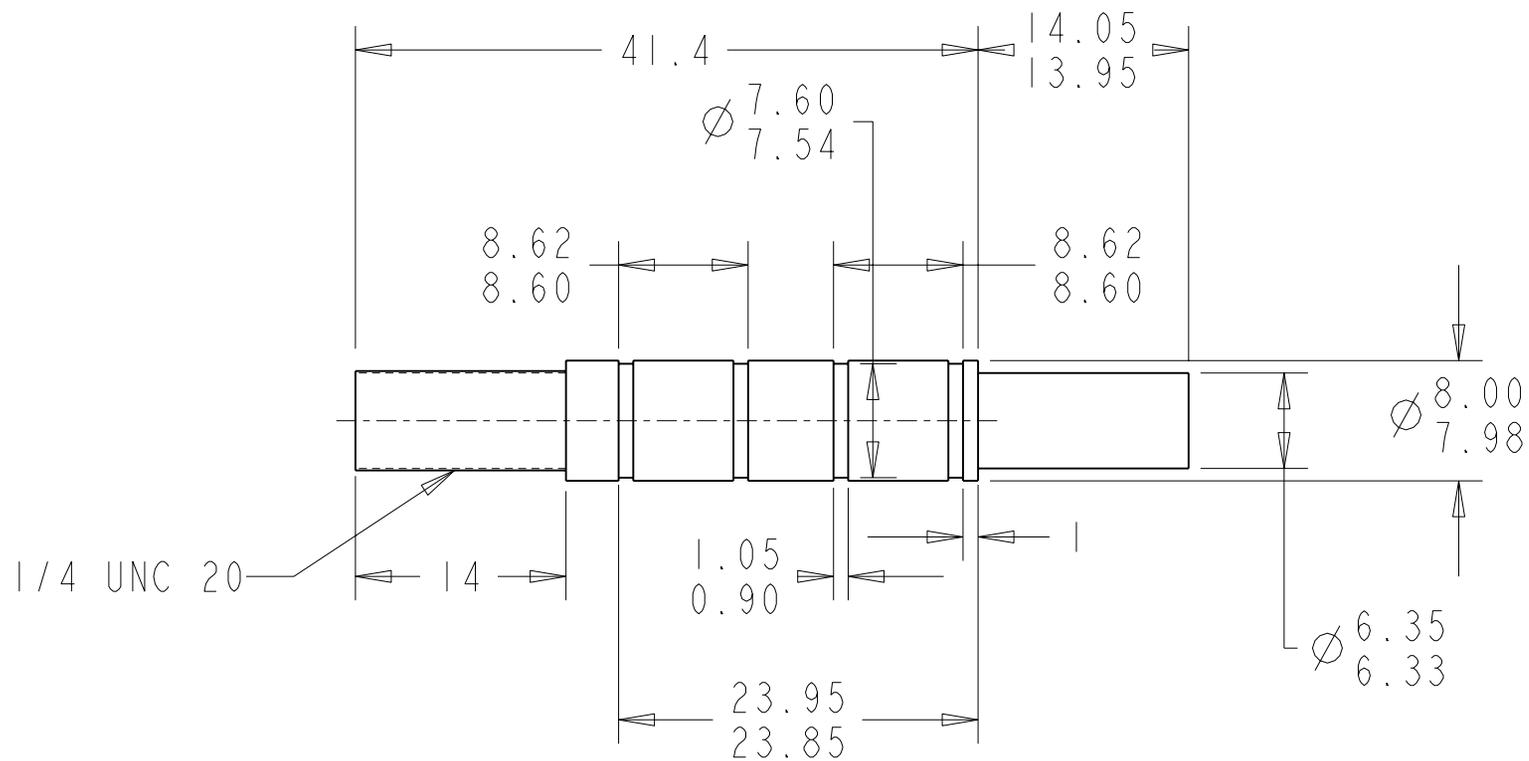
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 1.000	PART NUMBER : C2	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	29-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : PORTE-POULIE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-C2		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



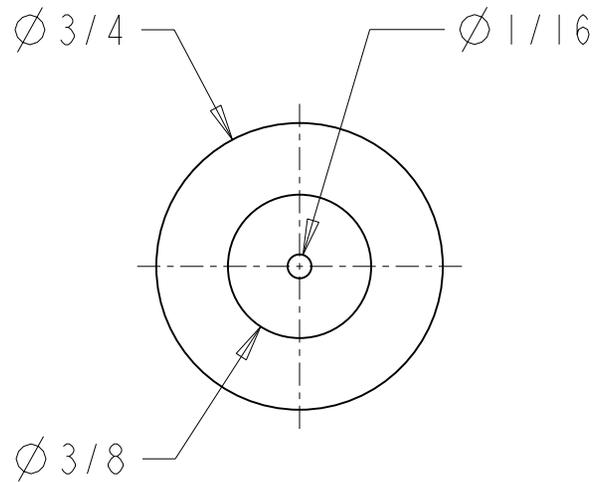
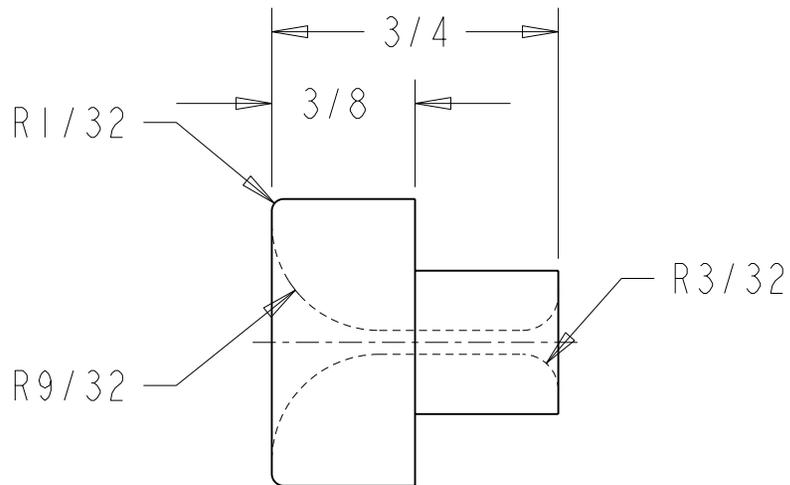
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 1.000	PART NUMBER : C2-G	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	29-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : PORTE-POULIE GAUCHE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-C2-G		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



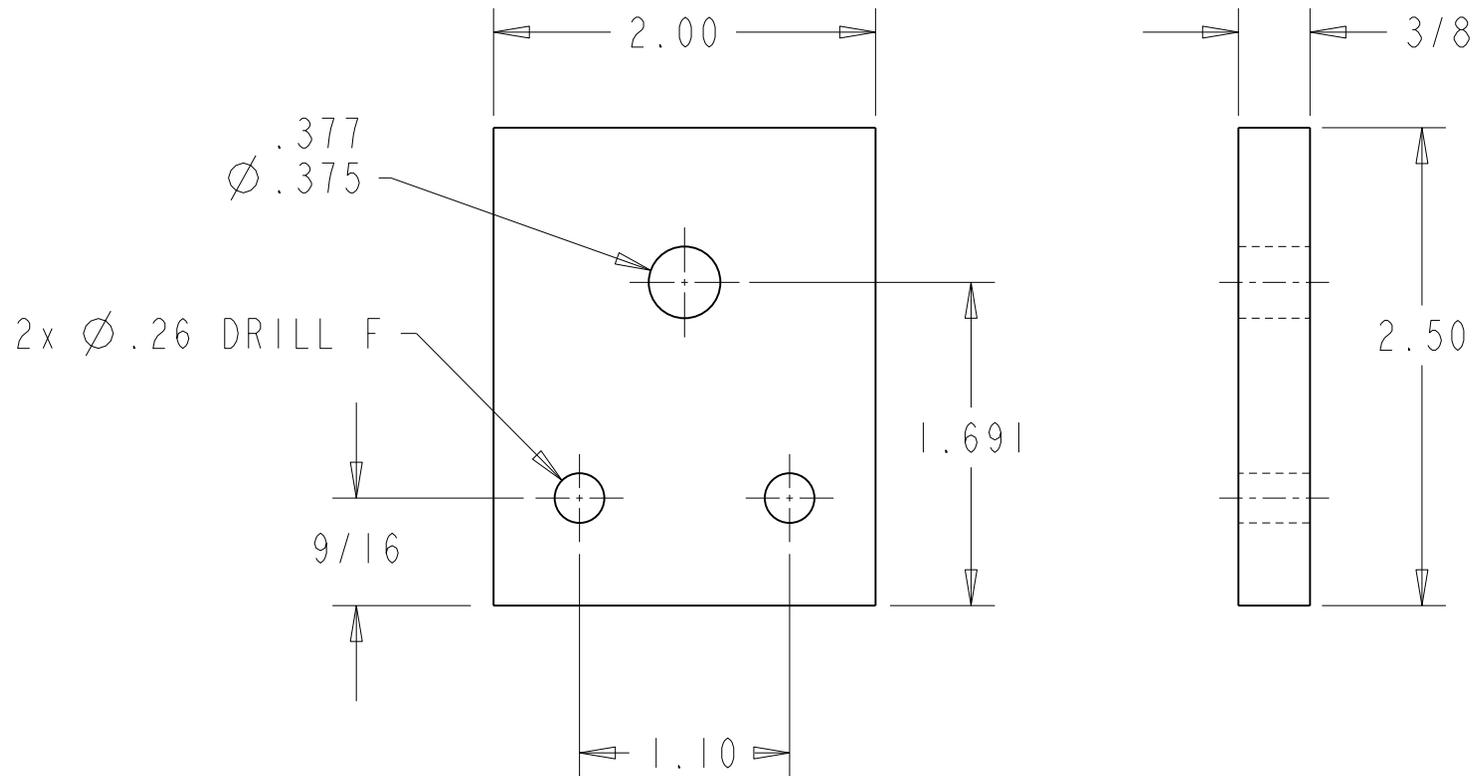
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 2.000	PART NUMBER : C3	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	09-07-09	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : PROTOTYPAGE RAPIDE		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE : TOUS LES RAYONS SONT 1/32"		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : POULIE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-C3		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



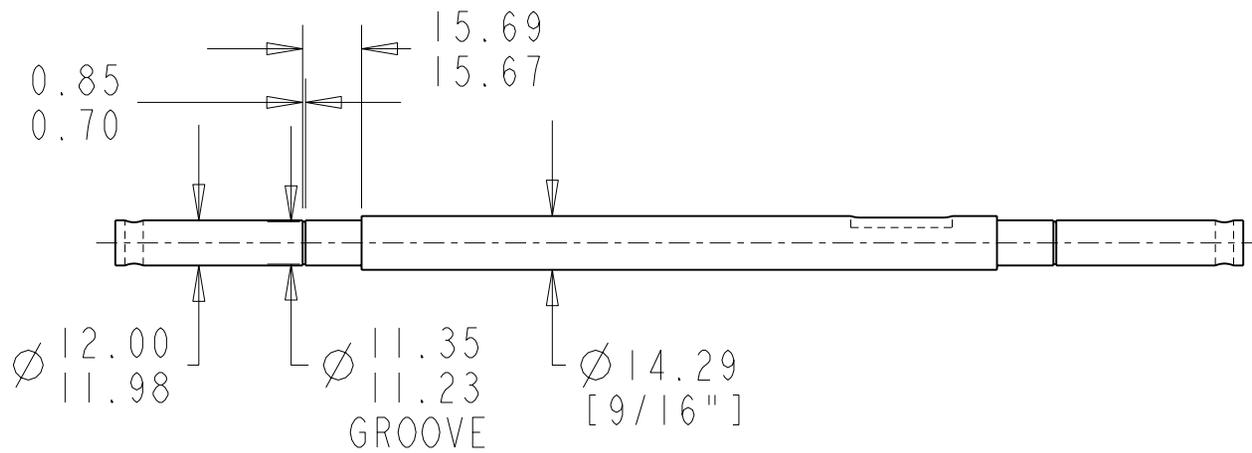
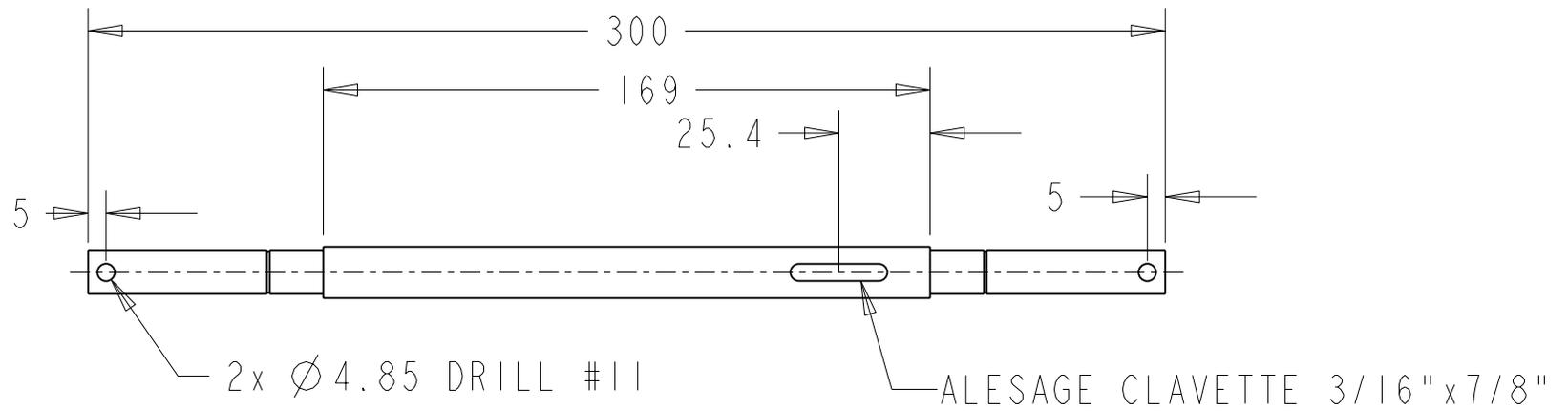
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 2.000	PART NUMBER : C4	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X $\pm 0.1$		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX $\pm 0.01$		PART NAME : ARBRE PORTE-POULIE		
		X.XXX $\pm 0.001$		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-C4		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X $\pm 0.5^\circ$				
		X.X $\pm 0.2^\circ$				



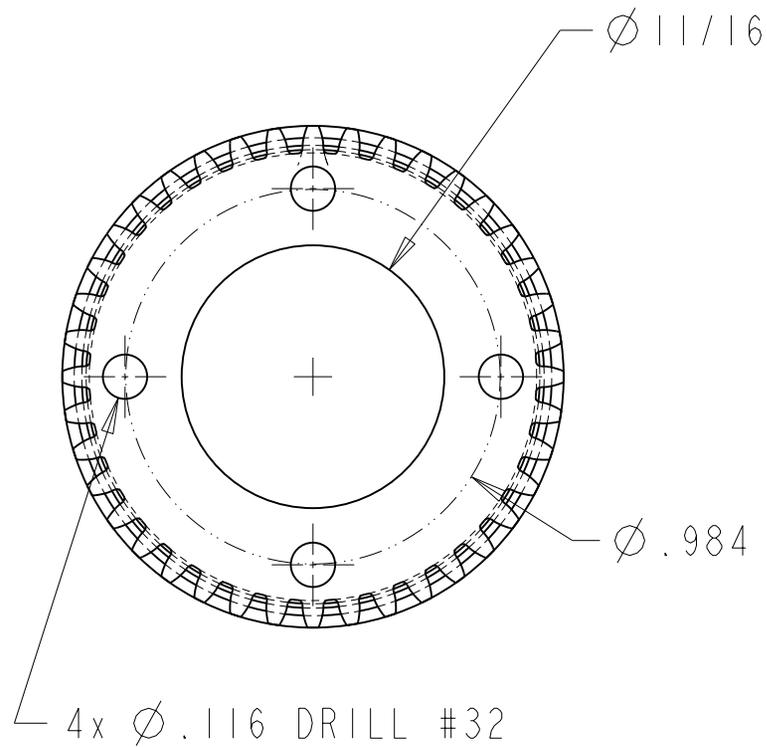
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 2.000	PART NUMBER : D1	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	09-07-09	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : PROTOTYPAGE RAPIDE		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : OEILLET		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-D1		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



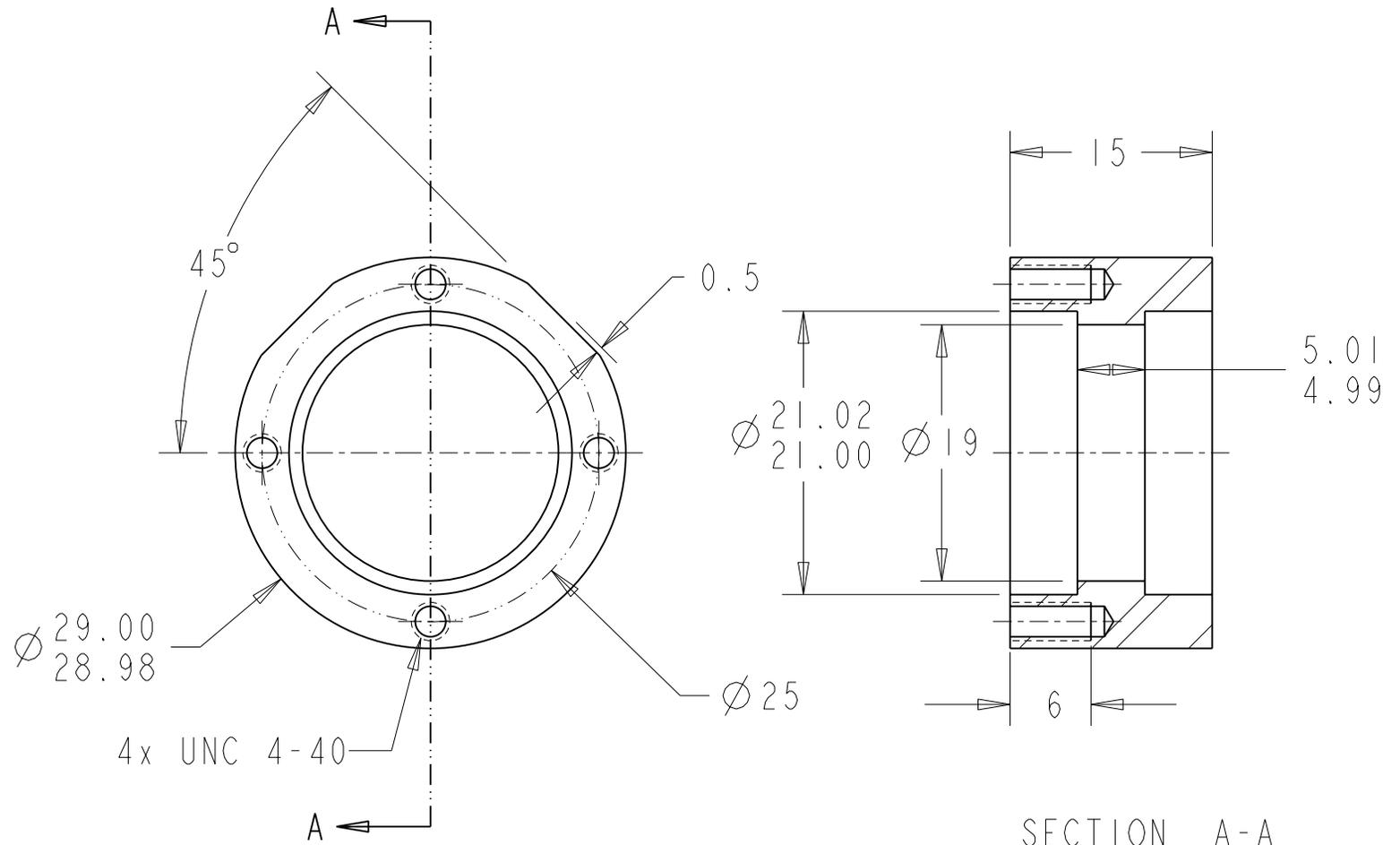
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 1.000	PART NUMBER : D2	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	09-07-09	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SUPPORT OEILLET		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-D2		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



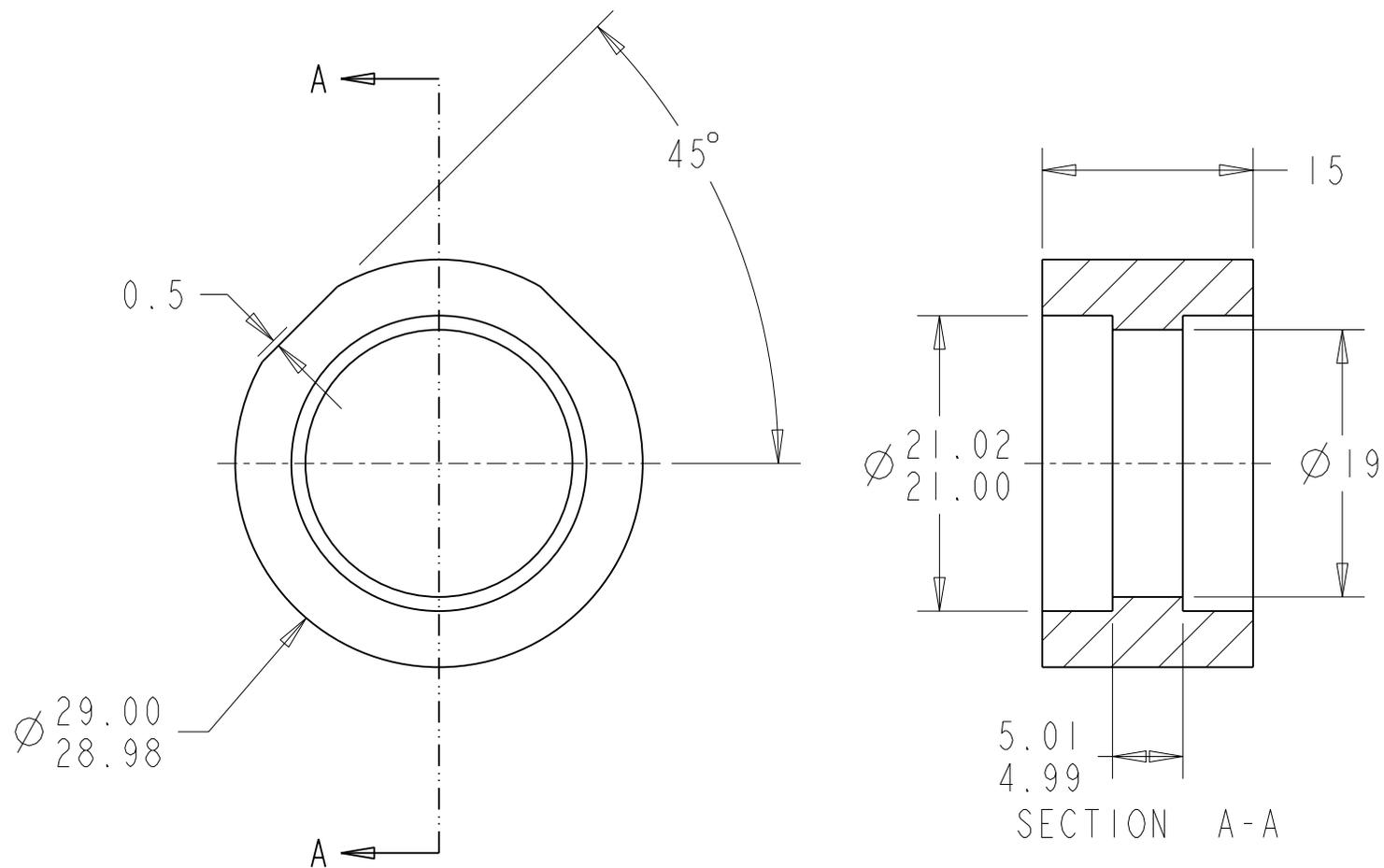
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 0.500	PART NUMBER : E1-1	REVISION : B	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	05-05-09	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : ARBRE BASE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E1-1		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



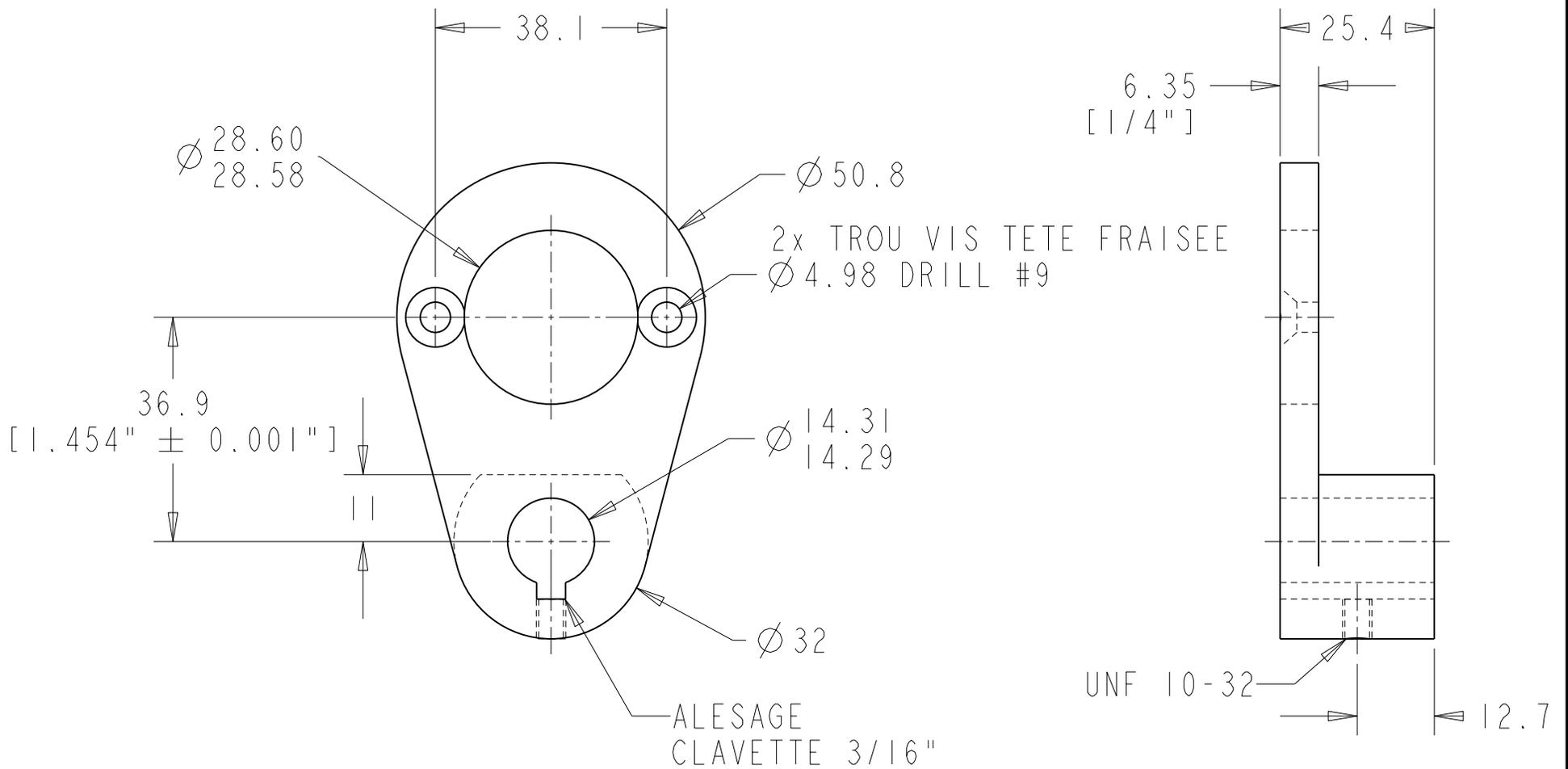
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 2.000	PART NUMBER : E1-2	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	29-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE : MODIFICATIONS FAITES A LA PIECE A-1C-1-N32040 DE SDP-SI		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : ROUE MODIFIEE		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E1-2		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



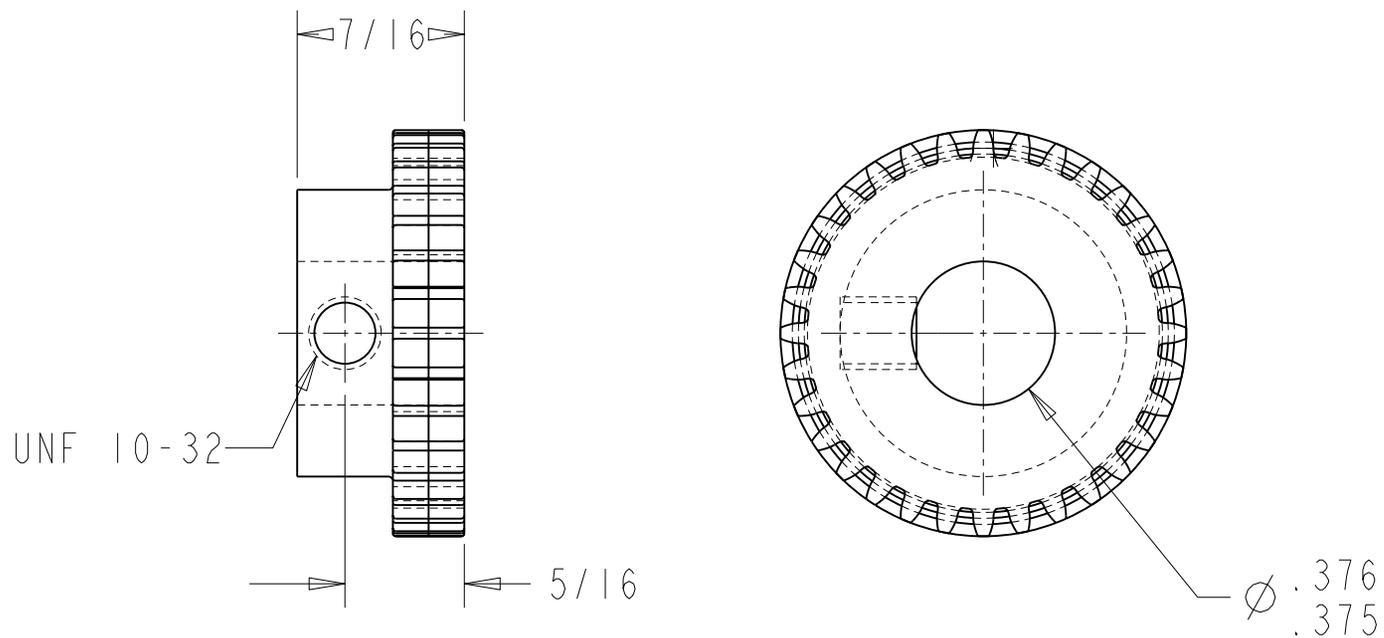
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 2.000	PART NUMBER : E1-3	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	29-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : PORTE-ROULEMENT GAUCHE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E1-3		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



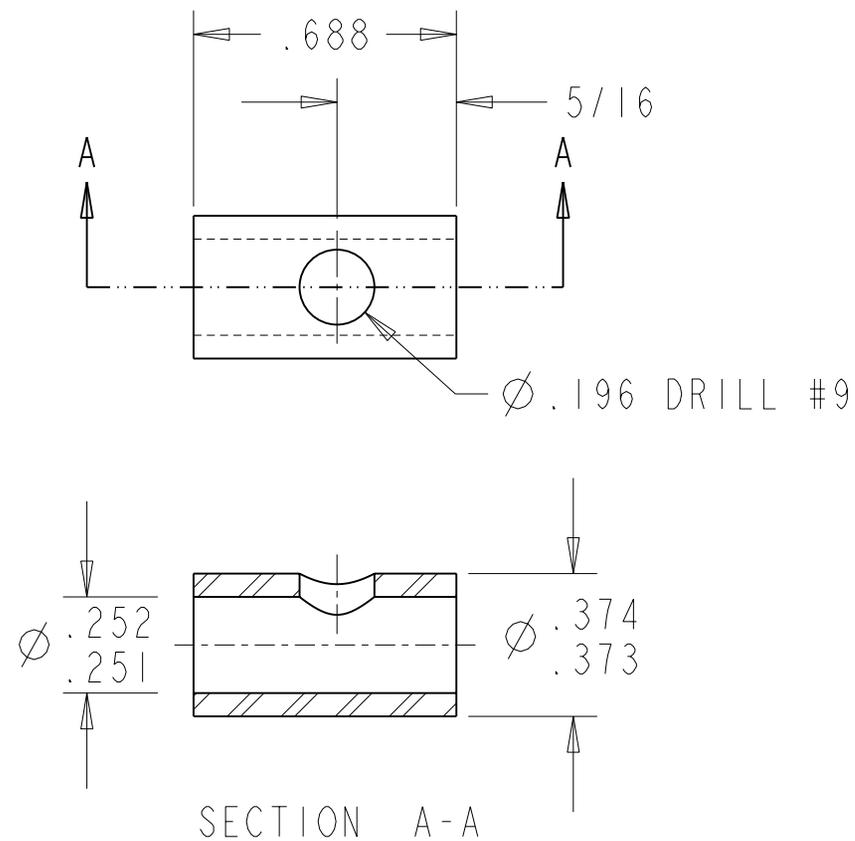
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 2.000	PART NUMBER : E1-4	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	29-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X $\pm 0.1$		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX $\pm 0.01$		PART NAME : PORTE-ROULEMENT DROIT		
		X.XXX $\pm 0.001$		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E1-4		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X $\pm 0.5^\circ$				
		X.X $\pm 0.2^\circ$				



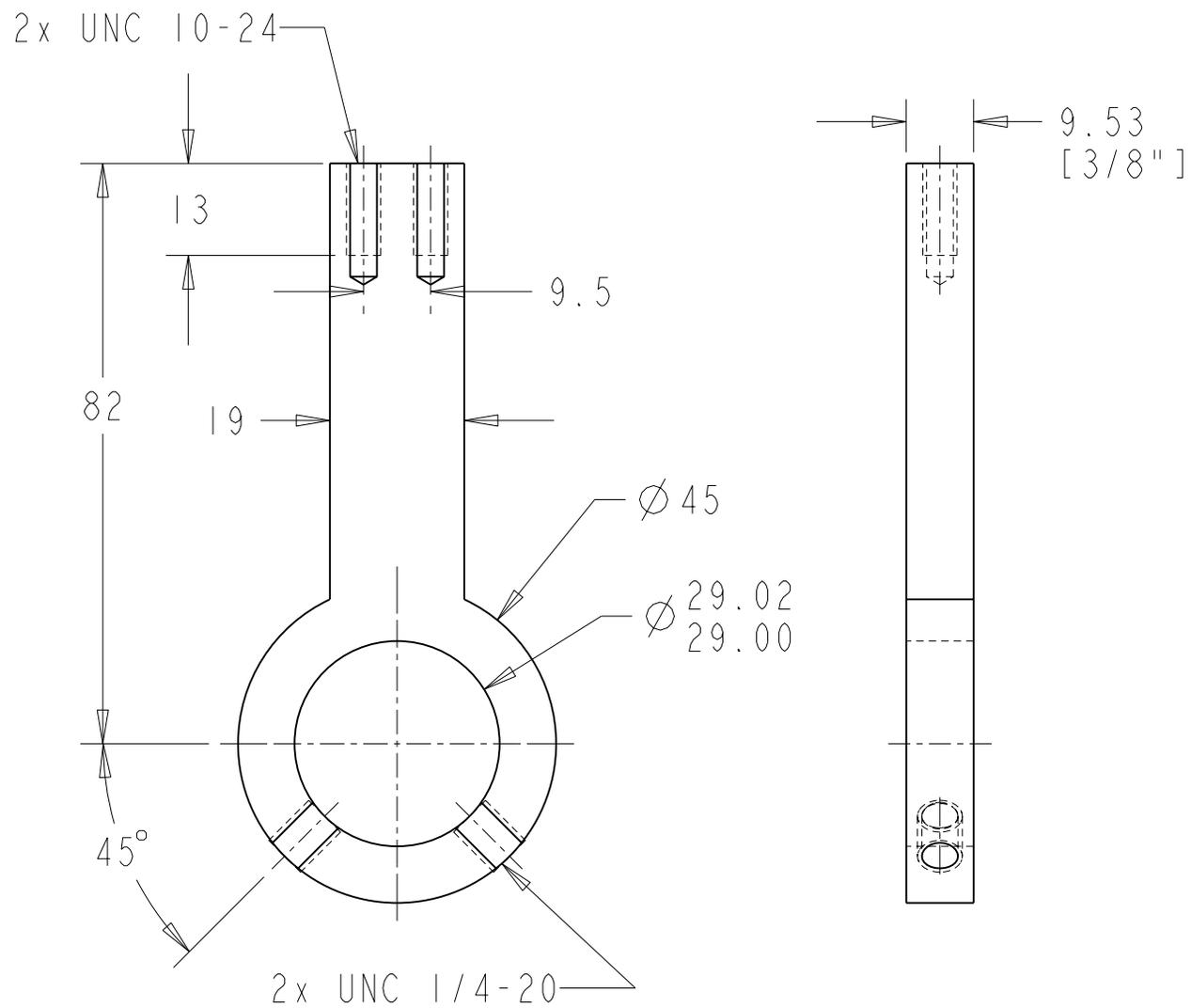
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : E2-2	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	03-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :			NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		GENERAL LINEAR TOLERANCE :		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.X $\pm 0.1$		PART NAME : SUPPORT MOTEUR BASE		
		X.XX $\pm 0.01$				
		X.XXX $\pm 0.001$				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E2-2		
		X $\pm 0.5^\circ$				
		X.X $\pm 0.2^\circ$				



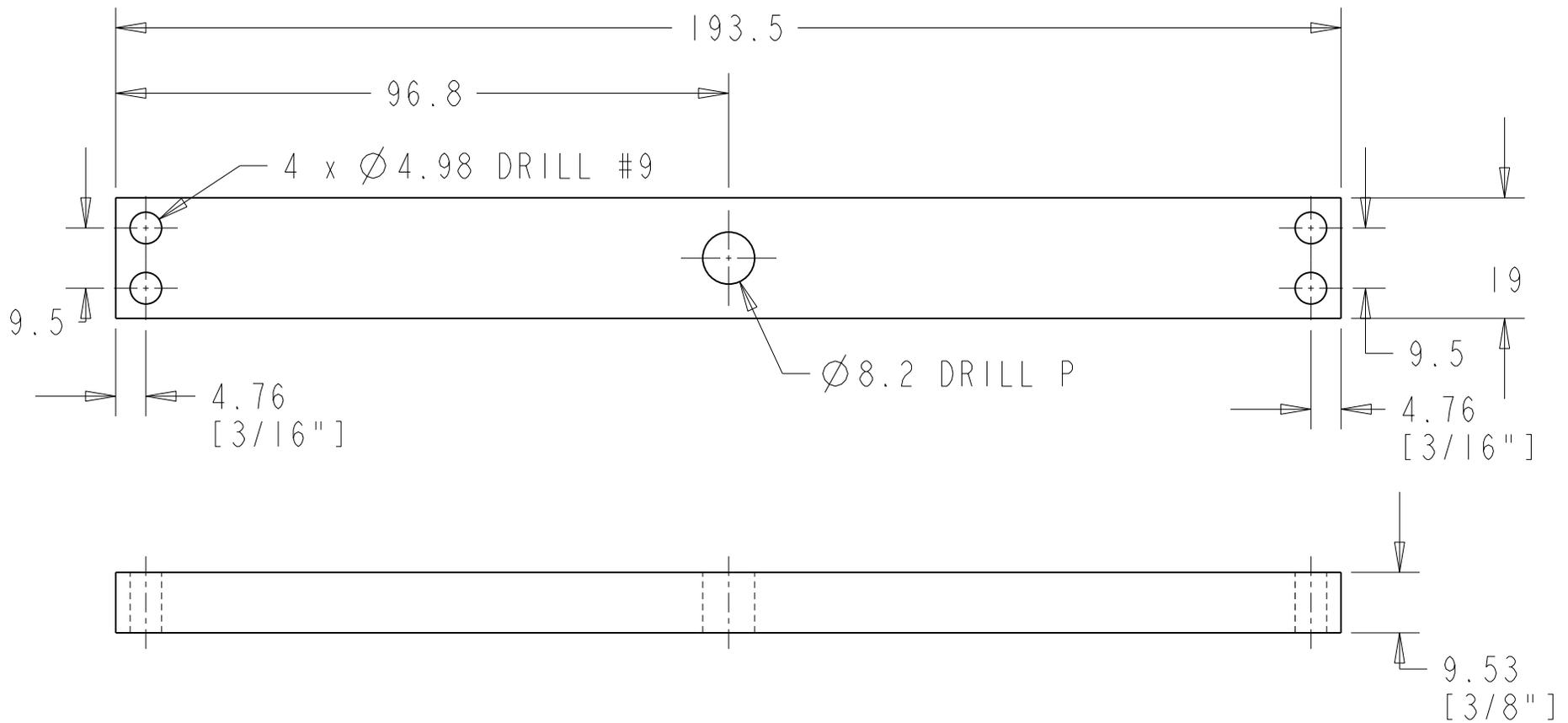
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 2.000	PART NUMBER : E2-3	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	04-11-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE : MODIFICATIONS FAITES A LA PIECE A-1C-2-N32032 DE SDP-SI		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : PIGNON MODIFIE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E2-3		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



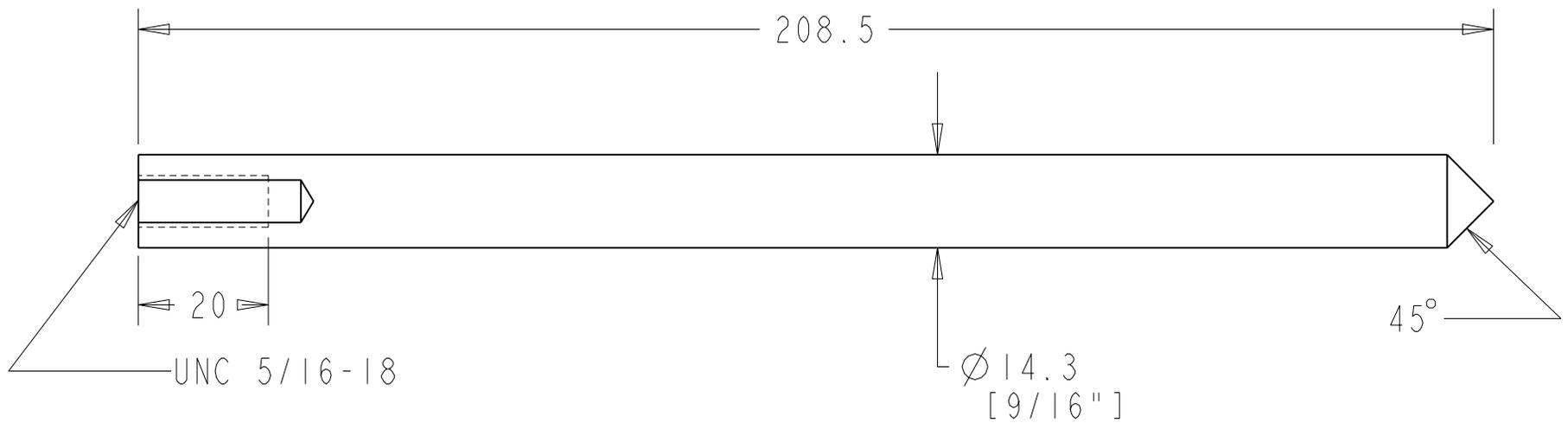
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : INCH	SCALE : 2.000	PART NUMBER : E2-4	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	29-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ACIER		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : MANCHON PIGNON		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E2-4		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



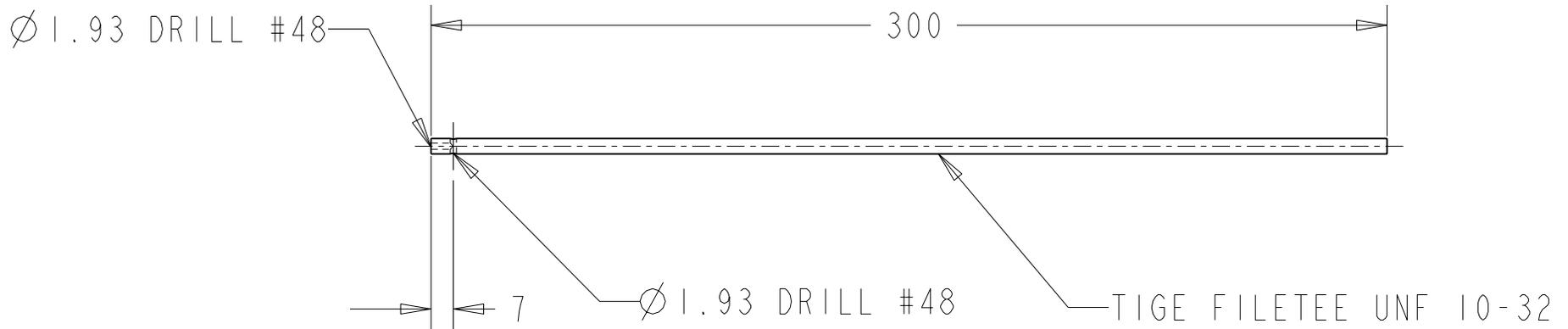
DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : E3-1	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	20-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : BASE EFFECTEUR		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E3-1		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : E3-2	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	20-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SUPPORT LATERAL EFFECTEUR		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E3-2		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 1.000	PART NUMBER : E3-3	REVISION : A	QUANTITY : 1
SIMON LEFRANCOIS	20-10-08	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : ALUMINIUM		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : POINTEUR EFFECTEUR		
		X.XXX ±0.001				
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-E3-3		
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				



DRAWN BY :	DATE :	UNITS : mm	SCALE : 0.500	PART NUMBER : F2	REVISION : A	QUANTITY : 2
SIMON LEFRANCOIS	05-05-09	TOLERANCES UNLESS OTHERWISE SPECIFIED :		MATERIAL : TIGE FILETEE UNC 10-32		
CHECKED BY :	DATE :	GENERAL LINEAR TOLERANCE :		NOTE :		
ROBOTICS LABORATORY DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING LAVAL UNIVERSITY QUEBEC CITY, CANADA		X.X ±0.1		PROJECT : ROBOT A CABLES SOUS-ACTIONNE		
		X.XX ±0.01		PART NAME : SECTION RIGIDE CABLE		
		X.XXX ±0.001		DRAWING NUMBER : RCSA-PRT-F2		
		GENERAL ANGULAR TOLERANCE :				
		X ±0.5°				
		X.X ±0.2°				