



# **Optimisation de trajectoire pour l'augmentation des capacités des manipulateurs robotiques**

**Thèse**

**André Gallant**

**Doctorat en génie mécanique**  
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

# **Optimisation de trajectoire pour l'augmentation des capacités des manipulateurs robotiques**

**Thèse**

**André Gallant**

Sous la direction de:

Clément Gosselin, directeur de recherche

# Résumé

Aujourd'hui, les manipulateurs robotiques sont appelés à effectuer une gamme de plus en plus large de tâches allant au-delà des applications traditionnelles. Un tel type d'application est l'interaction physique humain-robot. Pour que ces systèmes soient sécuritaires, il peut être souhaitable de réduire leur poids et leur force en réduisant la taille de leurs actionneurs. En effet, réduire la taille des actionneurs augmente la sécurité de deux manières, l'inertie du manipulateur diminue et les couples générés par les moteurs sont fortement réduits.

Cependant, le principal inconvénient de ces manipulateurs est la réduction de leur capacité de charge utile. C'est pourquoi une meilleure utilisation des capacités articulaires est nécessaire pour leur permettre d'accomplir des tâches qu'elles ne pourraient normalement pas accomplir. Ainsi, cette thèse présente une étude de deux types principaux de tâches pour lesquelles une stratégie d'optimisation de trajectoire efficace peut être particulièrement utile.

La première tâche consiste à soulever des objets lourds, c'est-à-dire, qui dépassent la capacité de charge utile d'un manipulateur. L'étude de cette tâche pourrait mener à la conception de manipulateurs plus légers et plus capables. Ce travail se concentre sur l'étude des méthodes de génération de trajectoires permettant aux manipulateurs ayant des actionneurs relativement faibles de soulever des charges lourdes en exploitant pleinement leur dynamique.

La deuxième tâche étudiée dans cette thèse est la tâche de lancer des objets. Plus précisément, la portée des manipulateurs est étudiée, c'est-à-dire, la distance maximale à laquelle un objet peut être lancé avec un manipulateur donné est recherchée. Cette tâche est étudiée à trois niveaux de complexité : la recherche de la distance maximale possible avec des contraintes de vitesse, la recherche de la capacité maximale de lancement en considérant une trajectoire complète avec des contraintes cinématiques et la recherche de la capacité maximale de lancement en considérant une trajectoire complète avec des contraintes dynamiques.

Enfin, des critères de performance sont établis à partir de ces deux types de tâches afin d'aider au processus de conception d'un nouveau manipulateur. Ainsi, une simulation d'optimisation de la conception est effectuée à titre de preuve de concept.

# Abstract

Today, robotic manipulators are being called upon to perform an increasingly wide range of tasks that extend beyond the conventional ones required in traditional applications. One such type of application is physical human-robot interaction. In order for such systems to be safe, it can be desirable to decrease their weight and strength by reducing the size of their actuators. Indeed, reducing the size of the actuators increases safety in two manners, the inertia of the manipulator decreases and the torques generated by the motors are greatly reduced.

However, the main drawback of such manipulators is the reduction of their payload capacity. Therefore, better usage of the limited joint efforts is required to enable them to perform tasks that they would normally not be able to accomplish. Thus, this thesis presents a study of two main types of tasks where an effective trajectory optimisation strategy can be particularly valuable.

The first task is that of lifting heavy objects, *i.e.*, objects that exceed the conservative estimate of the payload capacity of a manipulator. Studying this task could lead to the design of lighter, more capable manipulators. This work focuses on studying trajectory generation methods to enable manipulators with relatively weak actuators to lift heavy payloads by fully utilizing their dynamics.

The second task studied in this thesis is the task of throwing objects. Specifically, the distance throwing capabilities of manipulators is studied where the maximum distance that an object can be thrown with a given manipulator is sought. This task is studied at three levels of complexity: finding the maximum possible throwing capacity of manipulators with velocity constraints, finding the maximum throwing capacity considering a full trajectory with kinematic constraints, and finding the maximum throwing capacity considering a full trajectory with dynamic constraints.

Finally, performance criteria are established from these two types of tasks in order help in the process of designing a new manipulator. Thus, a simple design optimisation simulation is performed as a proof of concept.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des vidéos</b>	<b>xii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Description du contexte</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Soulever une charge lourde . . . . .	5
1.3 Lancer des objets . . . . .	9
1.3.1 Différents problèmes d’optimisation . . . . .	11
1.4 Conception des manipulateurs . . . . .	12
1.4.1 La capacité de soulever des charges lourdes comme critère de conception	12
1.4.2 La portée comme critère de conception . . . . .	13
1.5 Manipulateurs étudiées . . . . .	14
1.5.1 Manipulateur 2R plan . . . . .	14
1.5.2 Manipulateur 3R spatial . . . . .	17
1.5.3 Manipulateur 6R spatial . . . . .	18
<b>2 Génération de trajectoire</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.1.1 Concepts clés . . . . .	23
2.2 Génération de trajectoire cinématique . . . . .	24
2.2.1 Spline cubique (SP) . . . . .	24
2.2.2 Fonctions polynomiales . . . . .	27
2.2.3 Série de Fourier . . . . .	34
2.3 Méthodes employant la dynamique directe . . . . .	37
2.3.1 Bang-bang . . . . .	37
2.4 Comparaison des types de méthodes de génération de trajectoire . . . . .	38

2.4.1	Avantages des méthodes employant la dynamique directe . . . . .	38
2.4.2	Avantages des méthodes de génération de trajectoire cinématique . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Soulever des charges lourdes</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	42
3.1.1	Définition d'une tâche . . . . .	42
3.1.2	Tâches considérées . . . . .	42
3.1.3	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	43
3.2	Méthode d'optimisation . . . . .	45
3.2.1	Aperçu . . . . .	45
3.2.2	Génération de trajectoire . . . . .	45
3.2.3	Méthode d'optimisation SQP . . . . .	48
3.3	Analyse 1 : évaluation des stratégies d'optimisation . . . . .	49
3.3.1	Méthodologie . . . . .	49
3.3.2	Résultats . . . . .	52
3.4	Analyse 2 : détermination de la charge maximale . . . . .	53
3.4.1	Méthodologie . . . . .	53
3.4.2	Résultats . . . . .	56
3.5	Validation expérimentale - robot 2R plan . . . . .	59
3.5.1	Présentation du manipulateur prototype . . . . .	59
3.5.2	Commande du prototype . . . . .	61
3.5.3	Validation des méthodes sans charge additionnelle . . . . .	62
3.5.4	Validation de l'augmentation de la masse soulevée . . . . .	65
3.5.5	Caractéristiques des trajectoires . . . . .	66
3.5.6	Vidéo explicative . . . . .	67
3.6	Conclusion : soulever des charges lourdes . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Lancer un objet</b>	<b>70</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Calcul de la portée . . . . .	71
4.2.1	Modèles balistiques . . . . .	71
4.2.2	Cinématique du lancer à l'aide de manipulateurs robotiques . . . . .	73
4.3	Optimisation de l'état au moment du relâchement . . . . .	73
4.3.1	Solutions triviales . . . . .	74
4.3.2	Fonction objectif et contraintes . . . . .	75
4.3.3	Estimé initial . . . . .	77
4.3.4	Méthodologie de l'analyse . . . . .	77
4.3.5	Résultats . . . . .	78
4.4	Optimisation de la trajectoire avec contraintes cinématiques (PTC) . . . . .	80
4.4.1	Méthodologie de l'analyse . . . . .	81
4.4.2	Résultats . . . . .	82
4.5	Optimisation de la trajectoire avec contraintes dynamiques (PTD) . . . . .	82
4.5.1	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	83
4.5.2	Méthodologie de l'analyse . . . . .	84
4.5.3	Résultats . . . . .	85
4.5.4	Vidéo explicative . . . . .	88
4.6	Conclusion : lancer un objet . . . . .	88

<b>5</b>	<b>Conception des manipulateurs</b>	<b>91</b>
5.1	Introduction . . . . .	92
5.2	Conception avec contraintes cinématiques . . . . .	92
5.2.1	Indices de performance . . . . .	92
5.2.2	Méthodologie de l'analyse . . . . .	94
5.2.3	Résultats de la conception cinématique des manipulateurs . . . . .	96
5.3	Conception avec contraintes dynamiques . . . . .	100
5.3.1	Indices de performance . . . . .	100
5.3.2	Méthodologie de l'analyse . . . . .	102
5.3.3	Résultats de la conception des manipulateurs avec contraintes dynamiques . . . . .	104
5.4	Conclusion : conception des manipulateurs . . . . .	107
	<b>Conclusion</b>	<b>110</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>

# Liste des tableaux

1.1	Les propriétés géométriques et dynamiques du prototype 2R. . . . .	16
1.2	Les propriétés géométriques et dynamiques du prototype 2R. . . . .	17
1.3	Les propriétés géométriques et dynamiques du manipulateur 3R. . . . .	17
1.4	Les propriétés cinématiques et dynamiques du manipulateur 6R. . . . .	18
3.1	Les dix tâches à effectuer par les manipulateurs lors des expérimentations numériques. . . . .	43
3.2	Liste des types de trajectoires évalués pour l'application de soulever une charge lourde. . . . .	47
3.3	Liste des types de trajectoires évalués pour l'application de soulever une charge lourde. . . . .	47
3.4	Résumé des évaluations effectuées pour l'analyse 1. . . . .	51
3.5	Propriétés des moteurs du manipulateur prototype 2R. . . . .	60
3.6	Possibilités de masse à ajouter à l'organe terminal du prototype. . . . .	60
3.7	Propriétés des membrures du manipulateur prototype 2R. . . . .	61
4.1	Configurations d'optimisation pour l'étude de l'optimisation de l'état cinématique. . . . .	77
4.2	Critères de l'évaluation pour le PÉR. . . . .	78
4.3	Résultats des expérimentation numériques pour le PÉR. . . . .	78
4.4	Critères additionnels de l'évaluation pour le PTC. . . . .	82
4.5	Résultats de l'analyse du PTC utilisant les paramètres d'optimisation Opt5 . . . . .	83
4.6	Paramètres de la génération de trajectoire pour l'analyse. . . . .	85
4.7	Meilleures valeurs de $n$ pour chaque type de trajectoire. . . . .	86
4.8	Résultats de l'analyse dynamique en fonction du type de trajectoire pour chaque manipulateur . . . . .	88
5.1	Paramètres de la génération de trajectoire pour l'analyse. . . . .	102
5.2	Résultats de la conception dynamique du manipulateur 6R. . . . .	107



# Liste des figures

1.1	Le manipulateur UR5 à 6 DDLs d'Universal Robots. . . . .	15
1.2	Dimensions et paramètres inertiels du manipulateur 2R. . . . .	15
1.3	Le prototype du manipulateur 2R construit dans le cadre de cette recherche. . .	16
1.4	Dimensions et paramètres inertiels du manipulateur 3R. . . . .	17
1.5	Dimensions et paramètres inertiels du manipulateur 6R. . . . .	19
2.1	L'optimisation de trajectoire est composée de deux étapes fondamentales : la génération de trajectoire et l'évaluation de celle-ci. . . . .	22
2.2	Un exemple de spline cubique à quatre segments. . . . .	25
2.3	La trajectoire polynomiale générée change en fonction de la durée de la trajec- toire $T$ . . . . .	29
2.4	Une trajectoire polynomiale de degré six avec trois noeuds. . . . .	29
2.5	Le trajet de la trajectoire polynomiale de degré six avec trois noeuds ne change pas en fonction du temps total. . . . .	30
2.6	Une trajectoire de type courbe de Bézier avec six points de contrôle. . . . .	34
3.1	Les dix tâches à accomplir avec le manipulateur 2R. La flèche indique le sens du mouvement de la position de départ vers la position de fin. . . . .	43
3.2	Aperçu de la méthode d'optimisation employée. . . . .	46
3.3	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population. . .	52
3.4	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	52
3.5	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajec- toire. . . . .	54
3.6	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajec- toire avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	54
3.7	Algorithme employé pour déterminer la charge maximale possible pour une tâche. . .	55
3.8	Diagrammes en boîte des résultats de l'analyse 2 en fonction de la taille de la population. . . . .	57
3.9	Diagrammes en boîte des résultats de l'analyse 2 en fonction de la taille de la population avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	57
3.10	Diagrammes en boîte des résultats de l'analyse 2 en fonction du type de trajectoire. . .	58
3.11	Diagrammes en boîte des résultats de l'analyse 2 en fonction du type de trajec- toire avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	58
3.12	Diagrammes en boîte des résultats de l'analyse 2 en fonction du manipulateur. . . . .	59
3.13	Diagrammes en boîte des résultats de l'analyse 2 en fonction du manipulateur avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	59
3.14	Le manipulateur 2R prototype utilisé pour effectuer la validation expérimentale. . . . .	60

3.15	Schéma de commande du prototype. . . . .	61
3.16	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le manipulateur 2R prototype lors de l'exécution de la tâche 1 avec une courbe de Bézier de degré 11. . . . .	62
3.17	La tâche prescrite est réussie malgré la saturation du couple articulaire, mais avec une augmentation de l'erreur de suivi. . . . .	63
3.18	La meilleure saturation du couple en fonction de la valeur de $n$ . . . . .	64
3.19	Meilleure saturation du couple en fonction de la tâche. . . . .	65
3.20	Masses que le manipulateur prototype est théoriquement capable de soulever. . . . .	65
3.21	Trajectoire effectuant la tâche 1 avec une charge de 150 grammes. . . . .	66
3.22	Trajectoires effectuant la tâche 1 avec une charge de 150 grammes avec limitation du couple articulaire. . . . .	67
3.23	Trajectoires avec de plus en plus de masse. . . . .	67
4.1	Les deux modèles balistiques étudiés. . . . .	72
4.2	La solution au PÉR n'est pas toujours simple, même pour un simple manipulateur 2R plan. (Il est à noter que les dimensions de ce manipulateur ne sont pas les mêmes que celles du manipulateur 2R présenté à la section 1.5.1) . . . . .	75
4.3	La fonction objectif d'un pendule simple pour montrer qu'il y a des parties plates et des discontinuités. . . . .	76
4.4	Posture représentant la solution optimale pour chaque manipulateur. La première articulation ( $\theta_0$ ) et le poignet ( $\theta_3$ , $\theta_4$ et $\theta_5$ ) ont un impact significatif sur la portée maximale des manipulateurs. . . . .	79
4.5	Le déplacement requis pour la phase d'accélération et la phase de décélération est le même. . . . .	80
4.6	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population. . . . .	86
4.7	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	86
4.8	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajectoire. . . . .	87
4.9	Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajectoire avec la meilleure valeur de $n$ . . . . .	87
5.1	Courbe de la fonction objectif en fonction de la longueur de la première membre du manipulateur 2R pour différentes valeurs de $A_{cin}$ . . . . .	97
5.2	Les manipulateurs 2R optimaux en fonction de la valeur de $A_{cin}$ pour la conception avec contraintes cinématiques. . . . .	97
5.3	Résultats de l'analyse de la conception avec contraintes cinématiques du manipulateur 3R. . . . .	98
5.4	Les manipulateurs 3R optimaux en fonction de la valeur de $A_{cin}$ pour la conception avec contraintes cinématiques. . . . .	98
5.5	Résultats de l'analyse de la conception avec contraintes cinématiques du manipulateur 6R. . . . .	99
5.6	Le manipulateur 6R optimal pour la conception avec contraintes cinématiques. . . . .	100
5.7	Résultats de l'analyse de la conception dynamique du manipulateur 2R. . . . .	104
5.8	Le manipulateur 2R optimal pour la conception avec contraintes dynamiques. . . . .	105
5.9	Résultats de l'analyse de la conception dynamique du manipulateur 3R. . . . .	106
5.10	Le manipulateur 3R optimal pour la conception avec contraintes dynamiques. . . . .	107

5.11 Un exemple de manipulateur 6R optimal pour la conception avec contraintes dynamiques. . . . .	108
----------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

# Liste des vidéos

Les vidéos associées à cette thèse peuvent être trouvées à l'adresse suivante :

<http://robot.gmc.ulaval.ca/publications/these-de-doctorat/>

à la section André Gallant.

chapitre3.mp4 . . . . .	67
chapitre4.mp4 . . . . .	88

*À mon épouse et à notre fils,*

*Keep an open mind, but not so  
open that your brains fall out*

---

Walter Kotschnig

# Remerciements

*"On ne peut rien apprendre aux gens. On peut seulement les aider à découvrir qu'ils possèdent déjà en eux tout ce qui est à apprendre."*

— Galilée

Je remercie d'abord très sincèrement le professeur Clément Gosselin pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils inépuisables. Sa capacité à orienter ses étudiants tout en leur donnant la liberté d'exploration, sa confiance et sa flexibilité font de lui un directeur de recherche idéal. Cela a également l'effet de créer un environnement au laboratoire qui favorise la collaboration, l'amitié les échanges fructueux plutôt que la compétition entre les nombreux membres du laboratoire.

Je remercie également Thierry et Simon qui, par leur vastes connaissances et leur précieux conseils, assurent une continuité remarquable au sein du laboratoire.

Merci aussi aux nombreux membres, actuels et anciens, du laboratoire de Robotique que j'ai eu la chance de connaître pendant ces dernières années. Leur amitié, partage et encouragements ont rendu ce séjour au sein du laboratoire des plus agréables.

Enfin, je tiens à remercier mon épouse pour son soutien infailible tout au long de ce projet et mon fils pour sa contribution à la quantité de joie dans ma vie.

# Introduction

*"Live as if you were to die tomorrow. Learn as if you were to live forever."*

— Gandhi

Dans le domaine de la robotique, les capacités d'un manipulateur sont souvent considérées comme étant homogènes, c'est-à-dire, constantes peu importe la position, la vitesse et l'accélération des ses articulations. Dans le cas des robots industriels, pour lesquels les rapports de réduction sont généralement élevés, cette hypothèse peut être justifiée. Cependant, cela a tendance à conduire à des robots très massifs avec une capacité de charge utile faible relativement à la masse totale du robot. Dans ces manipulateurs, une grande partie de l'effort fourni par ses actionneurs est utilisée simplement pour entraîner la masse importante de ses actionneurs et de ses membrures.

Encore dans le cadre de la robotique industrielle, un des critères de performance les plus importants est la répétabilité. La valeur de répétabilité donnée par un fabricant de robots industriels est généralement celle qui peut être garantie sur tout l'espace de travail<sup>1</sup> du manipulateur. La norme internationale ISO 9283 (Comité technique ISO/TC 184, 1998), par exemple, définit la répétabilité d'un manipulateur comme étant celle mesurée avec la charge maximale à la vitesse maximale sur l'ensemble de l'espace de travail. Cela peut mener à des valeurs pessimistes de la répétabilité pour une tâche donnée.

Tout comme une personne ne peut pas soulever la même masse à bout de bras que plus près de son corps, la capacité de charge utile réelle d'un robot dépend de la configuration. De plus, la véritable capacité de charge utile est influencée par l'ensemble de la dynamique, y compris la vitesse et l'accélération, en particulier pour les manipulateurs à faible rapports de réduction aux articulations.

Or, dans certaines applications comme la coopération humain-robot, la robotique mobile (robots humanoïdes, marcheurs et autres) et d'autres applications, des actionneurs avec de faibles taux de réduction peuvent offrir de nombreux avantages. Par exemple, certaines applications nécessitent un degré élevé de transparence de l'effort<sup>2</sup>. Cela peut augmenter la sécurité d'un robot ainsi que permettre une interaction plus intuitive avec celui-ci. De telles applications ne

---

1. L'espace de travail dans le contexte de la performance est l'espace des poses de l'effecteur d'un manipulateur dans lequel la mesure de la performance est pertinente.

2. La transparence de l'effort, parfois nommée « backdrivability », mesure la capacité d'un système à être actionné en sens inverse, par exemple en exerçant une force sur une membrure d'un manipulateur.



sont pas bien adaptées aux articulations avec de grands rapports de réduction. L'inconvénient principal de ces faibles rapports de réduction est qu'ils entraînent une réduction de l'effort qui peut être généré aux articulations. Cela peut sévèrement limiter la capacité de soulever des charges utiles.

En outre, les manipulateurs robotiques sont de plus en plus appelés à effectuer un large éventail de tâches qui vont au-delà des tâches classiques des applications traditionnelles. Un tel type de tâche est le lancement d'objets, en particulier, la tâche de lancement de distance maximale, où un objet est lancé le plus loin possible. Ce type de mouvement est également très adapté aux manipulateurs avec de faibles rapports de réduction aux articulations pour augmenter la vitesse maximale que peut atteindre l'organe terminal, et donc la vitesse de l'objet à lancer.

Puisque la capacité de lancement est unique pour un manipulateur donné, cette capacité peut être considérée comme étant un indice de la performance d'un manipulateur. De même, la capacité de soulever des charges lourdes pour une variété de tâches peut être considérée comme un indice de performance. Par conséquent, ce travail étudie également de simples processus de conception des manipulateurs qui maximisent la performance selon des métriques différentes comme la capacité de soulever des charges lourdes et la capacité de lancement.

## Objectifs

Dans une procédure d'optimisation, il y a deux étapes : la modélisation du problème et la solution du problème tel que modélisé (Nocedal et Wright, 2006). Ce travail est davantage axé sur la partie de la modélisation du problème d'optimisation, c'est-à-dire, la définition de la fonction objectif et des contraintes qui caractérisent ce problème d'optimisation. Par la suite, des méthodes établies de résolution de problèmes d'optimisation sont utilisées.

Ce travail a pour premier objectif d'explorer les gains possibles en employant des méthodes d'optimisation disponibles.

Le second objectif de ce travail est de déterminer quels types de trajectoires permettent les meilleurs gains de performance pour un manipulateur donné et à déterminer si ces gains sont généralisables à plusieurs architectures de manipulateurs.

Enfin, ce travail vise à déterminer s'il est possible de bonifier le processus de conception des manipulateurs avec des indices de performance basés sur les méthodes étudiées dans cette thèse.

## Structure de la thèse

La présente thèse est structurée en cinq chapitres principaux. Au chapitre 1, le contexte dans lequel ce travail se situe est présenté en détail. Les trois applications étudiées sont présentées

accompagnées d'une revue de la littérature pertinente pour chacune de ces applications. Trois architectures de manipulateur sériel sont utilisées tout au long de cette thèse et celles-ci sont également présentées dans ce chapitre.

Toutes les méthodes utilisées dans cette thèse reposent sur la génération de trajectoires paramétriques. Par conséquent, le chapitre 2 présente toutes les méthodes de génération de trajectoire employées dans ce travail. Celles-ci seront utilisées dans les trois chapitres subséquents pour résoudre les problèmes d'optimisation de trajectoire associés aux applications étudiées.

Chacun des trois derniers chapitres se concentre sur une application étudiée. Le chapitre 3 présente l'étude de l'augmentation de la capacité de soulever des charges lourdes à l'aide de l'optimisation de trajectoire. Ce chapitre présente la formulation du problème d'optimisation à résoudre et la méthode employée pour résoudre ce problème. Deux analyses numériques détaillées sont également présentées pour évaluer en profondeur la performance des méthodes ainsi que pour déterminer jusqu'à quel point la capacité des manipulateurs peut être augmentée. Enfin, les résultats obtenus sont validés expérimentalement à l'aide d'un prototype de manipulateur 2R plan.

Le chapitre 4 est consacré à l'application du lancer de distance à l'aide des manipulateurs. En premier lieu, les modèles employés pour calculer la portée d'un lancer ainsi que les équations cinématiques pertinentes au lancer sont présentés. Ensuite, le problème du lancer est divisé en trois niveaux, soit l'état du manipulateur au moment du lancer, la trajectoire en ne considérant que des contraintes cinématiques et la trajectoire en considérant toutes les contraintes dynamiques. Une section est dédiée à chacun des niveaux d'analyse où le problème d'optimisation est présenté, la méthode pour le résoudre est élaborée et une analyse détaillée est effectuée pour évaluer l'efficacité de la méthode employée.

Le chapitre 5 présente l'application où les travaux des chapitres précédents sont employés pour aider à la conception des manipulateurs. En effet, la capacité de soulever des charges lourdes et la capacité de lancer des objets peuvent être considérées comme des caractéristiques à maximiser lors de la conception d'un nouveau manipulateur. Ce chapitre présente alors deux procédures de conception visant à maximiser des indices de performance cinématiques et dynamiques. Premièrement, la conception des manipulateurs en considérant le lancer de distance avec des contraintes cinématiques ainsi que l'espace de travail total<sup>3</sup> est étudiée. Secondement, la conception des manipulateurs en considérant le lancer de distance avec des contraintes dynamiques ainsi que la capacité de soulever des charges lourdes est étudiée.

---

3. L'espace de travail total est l'ensemble des points dont le manipulateur peut atteindre.

# Chapitre 1

## Description du contexte

*"The most incomprehensible thing about the universe is that it is  
comprehensible."*

— Albert Einstein

### Résumé

Ce premier chapitre présente le contexte de l'étude proposée dans cette thèse. Ainsi, un survol de la littérature pertinente aux applications étudiées est présenté tout en expliquant brièvement les problèmes spécifiquement visés dans cette thèse, à savoir soulever des charges lourdes et lancer des objets. Les trois architectures de manipulateurs qui sont utilisées pour valider les méthodes de cette thèse sont également présentées dans ce chapitre.

## 1.1 Introduction

Les robots sont de plus en plus sollicités pour effectuer un large éventail de tâches qui s'étendent au-delà des tâches classiques trouvées dans les applications industrielles. En effet, même dans le domaine de la robotique industrielle, la coopération humain-robot est en plein essor et entraîne un changement de paradigme. Par exemple, pour des raisons de sécurité et de performance, certaines caractéristiques comme l'augmentation de la transparence de la commande et la réduction de la masse des manipulateurs, sont davantage convoitées par ces nouvelles applications. Ces caractéristiques ajoutent des contraintes sur la taille et le rapport de réduction des actionneurs. La réduction de ces deux derniers mène à la réduction de l'effort que peuvent fournir de tels manipulateurs.

Cette thèse porte alors sur l'étude de trois problèmes principaux qui sont grandement influencés par ces caractéristiques : deux problèmes d'optimisation de trajectoire pour effectuer une tâche donnée et un problème qui se sert de ces méthodes pour faire une optimisation simple des manipulateurs étudiés.

La première application étudiée est de soulever une charge lourde et est introduite à la section 1.2. La deuxième application est de lancer un objet le plus loin possible et est introduite à la section 1.3. Enfin, le troisième problème étudié est d'utiliser la capacité de soulever des charges lourdes et de lancement comme critères de conception. Cette dernière application est introduite à la section 1.4. Dans ce chapitre, pour chacun de ces trois problèmes, une revue de la littérature est effectuée pour fournir le contexte de l'étude et certains détails spécifiques à cette thèse sont présentés.

Enfin, afin de mesurer la performance des méthodes étudiées dans ce travail, trois architectures de manipulateur sont employées. Celles-ci sont présentées à la section 1.5 où leurs paramètres cinématiques et dynamiques sont exposés.

## 1.2 Soulever une charge lourde

La capacité de charge utile est généralement définie comme étant la masse maximale que peut porter le manipulateur sans perte de performance, particulièrement de répétabilité (Wang et Ravani, 1988). Celle-ci est souvent estimée constante dans tout leur espace de travail. Cela correspond à l'une de deux hypothèses : que la capacité de charge utile ne change pas de façon conséquente en fonction de la posture du manipulateur ou que la capacité de charge utile dans la pire configuration est suffisante pour l'application visée.

En effet, ce problème est tellement important que de nombreux logiciels ont été développés afin de permettre l'estimation de la faisabilité d'une certaine tâche avec un robot. Prenons par exemple le logiciel *Kuka.Load*<sup>1</sup>. Ce logiciel permet de déterminer si un manipulateur donné

---

1. Celui-ci peut être trouvé dans le centre de téléchargement du site officiel de Kuka.

est capable de réaliser une trajectoire donnée avec une charge donnée. De la même façon qu’une personne ne peut pas porter la même charge à bout de bras que plus près de son corps, la charge maximale d’un manipulateur varie en fonction de sa posture. Ce logiciel peut également proposer des recommandations de manipulateurs qui peuvent effectuer la tâche. Par contre, ce logiciel ne propose pas de trajectoires différentes pour effectuer la même tâche afin de respecter les contraintes articulaires du manipulateur. Cela mène possiblement à un sur-dimensionnement des manipulateurs.

L’objectif de cette thèse vis-à-vis la capacité de charge utile des manipulateurs est d’explorer les gains qui peuvent être obtenus grâce à l’optimisation de trajectoire. Un autre objectif est d’étudier l’influence du type de trajectoire sur la charge maximale pour une variété de tâches. Plusieurs types de trajectoires seront étudiés dans ce travail comme il sera présenté au chapitre 2.

Le problème d’optimisation de trajectoire peut être divisé en deux catégories : le suivi de trajet prescrit et la planification de trajectoire sans trajet prescrit (Hwang et Ahuja, 1992). Le trajet est la séquence des points ordonnée par lesquels le manipulateur passe alors que la trajectoire inclut également le temps auquel chaque point est atteint. La trajectoire définit alors la position, la vitesse et l’accélération du manipulateur en fonction du temps.

Le suivi de trajet a été étudié par de nombreux chercheurs avec une approche de calcul variationnel. Le calcul variationnel appliqué au mouvement des manipulateurs robotiques est généralement nommé le contrôle optimal (Trélat, 2008) et utilise souvent le principe maximal de *Pontryagin* (Pontryagin et collab., 1962). Les solutions au problème de contrôle optimal, en particulier le problème du temps optimal<sup>2</sup>, pour le mouvement des manipulateurs robotiques suivant un chemin prescrit ont été développées principalement au milieu des années 1980 (Bobrow et collab., 1983; Shin et McKay, 1985; Bobrow et collab., 1985). Une excellente revue de ces méthodes est présentée dans (Choset et collab., 2005).

Ces méthodes sont capables de prendre en compte les équations de mouvement couplées et nonlinéaires pour générer une trajectoire de suivi de trajet optimale. Cependant, il a été montré qu’à chaque point d’une trajectoire optimale dans le temps, au moins une des articulations est à sa limite (Chen et Desrochers, 1989). Il en résulte des trajectoires difficiles à suivre en pratique car celles-ci passent instantanément de l’accélération maximale à la décélération maximale (souvent en plusieurs points d’une même trajectoire). Cela peut entraîner une usure importante des articulations du manipulateur.

Afin de résoudre certains des problèmes pratiques liés aux méthodes de contrôle optimales, de nombreux chercheurs ont abordé le problème de suivi de trajet sous un autre angle. En particulier, en veillant à ce que le planificateur de trajectoire produise des trajectoires lisses en utilisant des courbes paramétrées (Thompson et Patel, 1987; Costantinescu et Croft, 2000;

---

2. Le problème du temps optimal vise à minimiser le temps total du mouvement.

Gasparetto et Zanotto, 2007). Ces méthodes sont nécessairement sous-optimales mais produisent des trajectoires lisses.

Les méthodes de suivi de trajet peuvent inclure des contraintes dynamiques et peuvent entraîner de grandes performances du manipulateur, mais le problème de trouver un trajet est très difficile. Pour certaines tâches telles que le soudage à l'arc et l'usinage, un trajet est naturellement imposé (ou au moins contraint) par la tâche. Toutefois, dans le cas où l'augmentation de la capacité de charge utile est souhaitée, il est probable que de nombreux trajets seraient impossibles à suivre même avec les meilleures méthodes d'optimisation. Il est donc clair que pour réussir à augmenter de manière significative la capacité de charge utile d'un manipulateur utilisant ses capacités dynamiques, il est nécessaire de pouvoir modifier toute la trajectoire, incluant son trajet, ce qui constitue la deuxième catégorie de problèmes d'optimisation de mouvement.

Comme pour le suivi de trajet, de nombreux chercheurs se sont penchés sur le problème d'optimisation de la trajectoire complète du point de vue du contrôle optimal en invoquant le *principe maximal de Pontryagin* (PMP). Quelques méthodes hybrides ont été développées (Rajan, 1985; Shin et McKay, 1986b) qui reposent sur la résolution du trajet à la suite du problème du contrôle optimal. Ces méthodes commencent par définir un trajet à l'aide d'une courbe paramétrée, puis à rechercher le contrôle optimal pour suivre ce trajet. Les méthodes modifient ensuite le trajet et itèrent jusqu'à ce qu'un trajet et une trajectoire appropriés soient trouvés. Ces méthodes produisent des trajectoires optimales avec des trajets sous-optimaux. En outre, elles produisent nécessairement le même type de trajectoires, difficiles à suivre en pratique, que les méthodes de suivi de trajet avec le contrôle optimal.

Une autre approche consiste à appliquer le PMP directement, et non sur un trajet spécifique. Des méthodes de ce type ont été appliquées à de nombreux types de systèmes de contrôle non-linéaires, tels que le contrôle des avions de combat (Kaya et Noakes, 1996). En fait, tout système d'équations différentielles non-linéaires variant dans le temps, telles que les équations de Van der Pol, peut être étudié de cette façon (Kaya et Noakes, 1996). L'extension de ces méthodes aux systèmes d'équations différentielles non-linéaires à entrées multiples n'est pas simple, mais peut être réalisée (Lucas et Kaya, 2001).

Selon le PMP, les solutions au problème de contrôle optimal du temps de systèmes tels que les manipulateurs robotiques sont du type bang-bang (Kirk, 1970). En effet, de nombreux chercheurs ont développé des méthodes qui forcent ou convergent vers des trajectoires bang-bang (Weinreb et Bryson, 1985; Sahar et Hollerbach, 1986; Geering et collab., 1986; Meier et Ryson, 1990). Là encore, des problèmes liés à l'usure prématurée des articulations robotisées peuvent survenir en raison de la nature exceptionnelle de ces solutions. Certains ont essayé de lisser les trajectoires en imposant des contraintes sur la saccade<sup>3</sup> ou sur la dérivée des entrées

---

3. La saccade est la dérivée de l'accélération par rapport au temps.

de contrôle (Bertrand et Epenoy, 2002).

Le fait que les trajectoires optimales dans le temps soient du type bang-bang est une condition *nécessaire* mais pas *suffisante*, c'est-à-dire, toutes les trajectoires bang-bang ne sont pas nécessairement optimales. Ainsi, trouver une trajectoire optimale bang-bang n'est pas trivial et nécessite, dans le cas de la plupart des manipulateurs robotiques, de calculer l'intégration numérique des équations du mouvement à plusieurs reprises, ce qui est très exigeant en calcul.

Des méthodes d'optimisation combinatoire basées sur une grille ont également été appliquées au problème d'optimisation de mouvement (Shin et McKay, 1986a; Sahar et Hollerbach, 1986; Kaltsoukalas et collab., 2015), mais ces méthodes ont été définies comme étant exigeantes en calculs pour produire des trajectoires non optimales.

Une approche intéressante consiste à garantir une trajectoire lisse en générant des trajectoires articulaires paramétriques naturellement lisses. Les contraintes cinématiques et dynamiques qui assurent la faisabilité d'une trajectoire résultante peuvent être imposées dans le processus d'optimisation. De nombreuses méthodes ont été développées qui ne prennent en compte que des contraintes cinématiques telles que la vitesse maximale, l'accélération et la saccade (Lin et collab., 1983; Perumaal et Jawahar, 2013). Pour de nombreux manipulateurs industriels, on peut raisonnablement supposer que l'accélération maximale change peu en fonction de la configuration du manipulateur ou que l'accélération maximale minimale<sup>4</sup> est suffisante pour la tâche donnée. Par contre, lorsqu'une augmentation de la capacité de charge utile est souhaitée, ces hypothèses peuvent être trop restrictives.

En raison de la nature couplée et non-linéaire des équations de mouvement de la plupart des manipulateurs robotiques, il est plus difficile d'imposer des contraintes d'effort (force ou couple) lors de la génération de trajectoires que d'imposer des contraintes cinématiques. Une méthode de descente de gradient pour optimiser le mouvement des manipulateurs robotiques a été développée par (Chen, 1991), où des B-splines cubiques ont été utilisées pour définir la trajectoire de chaque articulation. Des contraintes dynamiques sont ensuite imposées sur un nombre fini de points le long de cette trajectoire. Cette méthodologie est similaire à celle utilisée dans cette thèse. D'autres ont étendu cette méthode en prenant en compte les contraintes sur la charge utile (Saramago et Ceccarelli, 2002). Ces contraintes de charge utile ont été définies au niveau du préhenseur, c'est-à-dire les contraintes imposées pour que l'objet manipulé ne glisse pas hors de la prise du préhenseur. Dans cette thèse, il est présumé que l'objet manipulé est saisi de manière à ne pas glisser.

D'autres chercheurs ont étudié les contre-poids et des ressorts pour augmenter la capacité de charge des manipulateurs, mais ces méthodes sont difficiles à appliquer aux manipulateurs à 6 DDL et augmentent l'inertie des membrures (Lim et collab., 1990).

---

4. L'accélération maximale minimale est la plus grande accélération qui peut être générée dans toutes les configurations du manipulateur.

L'objectif du présent travail, en ce qui concerne la capacité de soulever des charges lourdes, est d'explorer jusqu'à quel point ces méthodes peuvent améliorer la capacité de charge utile des manipulateurs robotiques. Dans la plupart des autres problèmes de génération de trajectoires, trouver une trajectoire optimale signifie trouver la meilleure fonction objective. Or, pour ce problème et cette thèse, le simple fait de trouver une trajectoire réalisable est considéré un succès. Ainsi, l'optimisation de la fonction est considérée comme étant secondaire à la satisfaction des contraintes, c'est-à-dire, trouver *une* trajectoire réalisable. Une analyse approfondie est réalisée en évaluant le taux auquel la méthode trouve des solutions réalisables avec un estimé initial aléatoire en plus de la valeur objective associée aux trajectoires résultantes. La méthodologie et les résultats de nombreuses expérimentations numériques et expérimentales sont présentés au chapitre 3.

### 1.3 Lancer des objets

La tâche de lancer des objets le plus loin possible est une tâche caractéristique des paramètres de conception du manipulateur, tels que la longueur des membrures et les capacités des actionneurs. Donc, pour un manipulateur donné, l'optimisation de la portée maximale ne doit être résolue qu'une seule fois. Bien entendu, le but de la plupart des manipulateurs n'est pas simplement de lancer des objets, mais d'accomplir diverses tâches. Les machines à lancer spécialement conçues pour cette tâche, comme des lance-balles automatiques pour le tennis, offrent les meilleures performances de lancement. Cependant, en combinaison avec d'autres critères, les capacités de lancement d'un manipulateur peuvent être un atout.

Lancer des objets avec des manipulateurs robotiques n'est pas une nouvelle idée. En effet, de nombreux chercheurs ont étudié le problème sous plusieurs angles. Du point de vue de l'apprentissage machine, Aboaf et collab. (1988) a étudié la possibilité d'apprendre à lancer en ajustant la cible lorsqu'une erreur est détectée au lieu de modifier le modèle du manipulateur. Ceci est similaire à l'approche humaine, si un lancer est trop bas par rapport à la cible, le prochain lancer sera visé plus haut. De nombreux autres chercheurs ont également étudié le problème du point de vue de l'apprentissage (Kolahdouz et Mahjoob, 2010; Kober et collab., 2011; Kim et Doncieux, 2017). Bien que ces méthodes offrent d'excellentes performances, le processus d'apprentissage implique nécessairement des essais et des erreurs. Lorsque la tâche change, un nouveau processus d'apprentissage doit être entrepris.

Une autre approche consiste à appliquer la théorie du contrôle pour exécuter des mouvements de lancement. Par exemple, Kato et collab. (1996) ont mis au point un contrôleur prédictif qui tente activement de prédire les erreurs de lancement et relâche l'objet plus tôt ou plus tard pendant la trajectoire pour compenser. Bien que la performance de telles approches soit intéressante, elles sont difficiles à généraliser aux manipulateurs disposant de plusieurs degrés de liberté.



De nombreux chercheurs ont également étudié les tâches étroitement liées telles que la tâche de jongler avec des objets : (Buehler et Koditschek, 1987; Aboaf et collab., 1989; Buehler et collab., 1990; Sakaguchi et collab., 1991; Rizzi et Koditschek, 1992; Buehler et collab., 1994; Sanfelice et collab., 2007; Nguyen et Olaru, 2013) et la tâche d’attraper des objets au vol (Buttazzo et collab., 1994; Nagendran et collab., 2011). D’autres ont étudié la façon dont les humains lancent des objets (Mochizuki et collab., 2000; Kim, 2011).

Des robots intéressants ont été spécialement conçus pour la tâche de lancer. Par exemple, des robots à un degré de liberté (DDL) ont été développés, capables de contrôler plus d’une propriété cinématique du lancer, tels que la vitesse, la direction et la vitesse angulaire, en faisant rouler l’objet sur l’effecteur (Lynch et Mason, 1996; Miyashita et collab., 2009; Mori et collab., 2009, 2010). Les manipulateurs sous-actionnés de type double pendule avec des ressorts non-linéaires ont été conçus pour lancer des objets (Mettin et collab., 2010; Shoji et collab., 2010; Mettin et Shiriaev, 2011; Yedeg et Wadbro, 2013). La tâche du lancer a également été utilisée pour démontrer les capacités des manipulateurs plans à 2 degrés de liberté avec des articulations à viscoélasticité variable (Tomori et collab., 2017). Cependant, toutes ces études restent dans le plan et ne se généralisent pas facilement aux manipulateurs généraux en trois dimensions.

De nombreuses techniques de génération du mouvement ont été explorées pour optimiser la tâche de lancer un objet avec précision. Des splines cubiques dans l’espace cartésien ont été utilisées et implémentées sur un manipulateur à 6 DDLs (Lombai et Szederkényi, 2009). Des modèles de lancement d’objets non sphériques ont été explorés par Frank et collab. (2009) qui fournissent une analyse approfondie des effets balistiques tels que la traînée, l’effet Magnus et la stabilisation de l’orientation du cylindre en appliquant une rotation dans l’axe principal (comme le lancer d’un ballon de football américain). L’optimisation des mouvements avec un modèle de robot humanoïde complet tout en maintenant l’équilibre à l’aide du « Zero Moment Point » (ZMP) a été explorée pour faire le lancer d’ouverture lors d’un match de la Ligue Majeure de Baseball (Lofaro et collab., 2012b). En utilisant le fait que certaines contraintes sont beaucoup plus faciles à tester que d’autres, la procédure d’optimisation de mouvement peut être grandement accélérée en ne vérifiant que les contraintes faciles d’abord. Par la suite, si les contraintes rapides à calculer sont respectées, les contraintes complètes sont calculées. Cette approche est démontrée sur la tâche de lancer de précision avec un manipulateur industriel à 6 DDLs avec divers obstacles (Zhang et collab., 2012). Le principe de la sensibilité dynamique a aussi été utilisé pour augmenter la robustesse des lancers de précision face aux incertitudes des modèles et aux erreurs d’étalonnage d’un robot (Okada et collab., 2015, 2018).

D’autres fonctions objectives ont également été explorées, telles que la réduction de l’énergie consommée (Sato et collab., 2007) et la vitesse dans une direction donnée (Senoo et collab., 2008). Récemment, des études ont été menées avec un manipulateur plan à 2 DDLs pour lancer et attraper un objet en forme de disque (Erumalla et collab., 2018). L’organe terminal

de ce manipulateur est également en forme de disque et l'objet est donc lancé et attrapé sans préhension.

### 1.3.1 Différents problèmes d'optimisation

Lorsque la portée est étudiée, il est possible de considérer trois problèmes d'optimisation : l'optimisation de l'état du manipulateur au moment du lancer, l'optimisation de la trajectoire avec contraintes cinématiques et l'optimisation de la trajectoire avec contraintes dynamiques.

Le premier problème d'optimisation en lien avec la portée est le plus simple à formuler et à résoudre. Il s'agit de déterminer l'état cinématique<sup>5</sup> du manipulateur au moment du lancer qui correspond au lancer dont la portée est maximale. Dans ce problème d'optimisation, la trajectoire du manipulateur avant et après le lancement n'est pas considérée. Seules la position et la vitesse des articulations au moment du lancer sont alors contraintes.

Le deuxième problème d'optimisation en lien avec la portée est l'optimisation de la trajectoire avec des contraintes cinématiques. Dans ce problème, la trajectoire du manipulateur avant et après le moment du lancer est également considérée. En plus des contraintes de position et de vitesse articulaire, des contraintes sur l'accélération et la saccade articulaire peuvent également être imposées. En effet, la solution du problème de l'optimisation de l'état cinématique au moment du lancer représente la portée maximale théorique d'un manipulateur, mais celle-ci n'est pas nécessairement atteignable lorsque ces contraintes cinématiques sont ajoutées. Une caractéristique additionnelle de ce problème par rapport au problème précédent est que le temps auquel l'objet est relâché pendant la trajectoire doit aussi être considéré.

Enfin, le dernier problème d'optimisation en lien avec la portée est l'optimisation de la trajectoire avec des contraintes dynamiques. Ce problème est semblable au précédent avec la distinction que les contraintes en accélération et en saccade sont remplacées par des contraintes sur l'effort articulaire. Comme il a été expliqué à la section 1.2, les contraintes cinématiques ne sont pas adaptées à tous les manipulateurs. En effet, pour de nombreux manipulateurs, l'accélération admissible varie grandement en fonction de l'état cinématique du manipulateur. Dans ce cas, une contrainte d'accélération peut être plus contraignante que nécessaire. Afin de déterminer la portée maximale de ce type de manipulateur, il est nécessaire de ne pas contraindre artificiellement l'accélération, mais plutôt d'imposer des contraintes sur l'effort articulaire.

Le chapitre 4 présente la méthodologie et les résultats de nombreuses expérimentations numériques qui concernent la maximisation de la portée maximale des manipulateurs.

---

5. L'état cinématique comprend la position et la vitesse de chaque articulation du manipulateur.

## 1.4 Conception des manipulateurs

Enfin, la dernière partie principale de cette thèse porte sur la conception des manipulateurs. Spécifiquement, les méthodes développées aux chapitres 3 et 4 peuvent être utilisées pour évaluer les capacités d'un manipulateur. Ces critères peuvent par la suite aider au dimensionnement du manipulateur.

Relativement peu de recherche a été effectuée sur la conception des manipulateurs généraux en considérant les composantes dynamiques des manipulateurs. Certains ont optimisé la conception d'un manipulateur pour maximiser l'accélération maximale minimale, cela en considérant la dynamique du manipulateur pour une charge donnée (Khatib et Burdick, 1987). Ils ont ensuite amélioré la performance en terme de robustesse et de temps de calcul dans Khatib et Bowling (1996). Enfin, ils ont élaboré une formulation élégante de la performance d'un manipulateur mesurant l'accélération et la force maximales qui peuvent être générées par un manipulateur pour un état cinématique donné (Khatib et collab., 2009).

La conception cinématique et dynamique des manipulateurs a été explorée du point de vue de la trajectoire spécifique que le manipulateur sera appelé à accomplir avec une charge donnée (Patel et Sobh, 2015). En ce qui concerne le lancer, la conception d'un manipulateur plan pour maximiser la portée a été réalisée (Miyazaki et Sanada, 2017). Bien que les résultats n'aient été obtenus que pour les manipulateurs plans, cette étude a non seulement pris en compte les dimensions du manipulateur, mais également le nombre de degrés de liberté. Il a été constaté que, dans le plan et avec les contraintes imposées, un manipulateur à 5 DDLs offrait la capacité optimale de lancement.

D'autres ont effectué une optimisation de la longueur des membrures et de la taille des moteurs pour minimiser le temps de trajectoire pour le suivi d'un trajet cartésien spécifique (Shiller et Sundar, 1991). L'optimisation prends en compte la dynamique du manipulateur et l'approche est appliquée sur un manipulateur plan à deux degrés de liberté. Ils ont ensuite étendu leur approche à un manipulateur à cinq degrés de liberté et pour une tâche de point à point où le trajet n'est pas prédéterminé (Shiller et Sundar, 1993).

### 1.4.1 La capacité de soulever des charges lourdes comme critère de conception

Lors de la sélection d'un manipulateur robotique dans un contexte industriel, les détails de la tâche tels que la charge à soulever et le déplacement de celle-ci sont habituellement connus. Cependant, pour certaines applications, la masse de l'objet à manipuler et le déplacement à effectuer n'est pas toujours connu à l'avance. De plus, un manipulateur peut être appelé à effectuer plusieurs tâches différentes. Par exemple, pour les robot humanoïdes, l'environnement dans lequel ils évoluent n'est pas habituellement prédéterminé. En outre, la masse du manipulateur lui-même (par exemple les bras d'un robot humanoïde) est un facteur très important,

car le reste du robot doit aussi être en mesure de le soulever.

Dans le cadre de ce type d'application, il pourrait être intéressant d'élaborer un critère donnant une mesure de la charge utile d'un manipulateur. Ce critère devrait avoir les caractéristiques suivantes :

- donner une mesure de la charge utile sur un éventail de tâches diverses,
- être moins pessimiste que les mesures en milieux industriels et
- être adapté aux manipulateurs à moteurs faibles.

Afin d'élaborer un tel critère, il est d'abord nécessaire d'être en mesure de déterminer la charge maximale d'un manipulateur pour une tâche donnée. Au chapitre 3, des méthodes sont développées pour déterminer, non seulement une trajectoire pour effectuer une tâche, mais également pour déterminer la charge maximale qu'un manipulateur est capable soulever en effectuant cette tâche. Ces méthodes seront mises en œuvre au chapitre 5.

Certains chercheurs se sont penchés sur la question de la détermination de la charge maximale qu'un manipulateur est capable de soulever. Par exemple, Korayem et collab. (2009) présentent une étude de la charge maximale d'un manipulateur monté sur un robot mobile pour effectuer une tâche spécifique. Par contre, cette méthode est basée sur le contrôle optimal. Donc, elle est difficile à mettre en œuvre et elle produit des trajectoires optimales, mais difficiles à suivre en pratique à cause des coups produits par la trajectoire bang-bang.

À présent, aucune étude n'a pu être trouvée qui porte sur la conception des manipulateurs avec la capacité de soulever des charges lourdes comme critère d'optimisation.

#### **1.4.2 La portée comme critère de conception**

La portée maximale d'un manipulateur peut aussi être considérée comme un critère de performance d'un manipulateur. Dans ce travail, la portée du point de vue de la conception est étudiée dans deux cas. Le premier est la conception cinématique des manipulateurs étudiés avec des contraintes cinématiques en conjonction avec l'espace de travail des manipulateurs. Ces deux critères sont un peu antagonistes, donc l'étude est intéressante pour la conception des manipulateurs. Cette étude est présentée à la section 5.2.

Le deuxième cas où la portée est utilisé comme critère de conception est celui où des contraintes dynamiques sont considérées. Pour ce problème de conception, la capacité de soulever des charges lourdes est également considérée. Ces deux indices de performance sont également antagonistes et mènent à une étude intéressante pour la conception des manipulateurs. Cette étude est présentée à la section 5.3.

Aucune étude n'a pu être repérée qui traite des capacités de lancement d'un manipulateur en tant que facteur de conception en conjonction avec d'autres objectifs de conception. Comme il a été mentionné à la section 1.3, plusieurs chercheurs ont étudié la conception de mécanismes

spécifiquement conçus pour le lancer, mais pas pour des manipulateurs généraux à plusieurs degrés de liberté et qui évoluent dans un espace tri-dimensionnel. En effet, la plupart des travaux qui étudient la tâche de lancement ne prennent en compte que les manipulateurs plans.

Il est important de noter ici que les problèmes de conception étudiés dans ce travail ne sont que des exemples relativement simples et servent à démontrer que les indices de performance basés sur les méthodes de cette thèse peuvent être utilisés comme des critères de conception. Les résultats présentés ne sont que les résultats d'expérimentations préliminaires et peuvent servir d'aperçu de travaux futurs potentiels. Naturellement, lors de la conception d'un manipulateur, plusieurs autres facteurs sont généralement pris en compte.

## 1.5 Manipulateurs étudiées

Afin de tester l'efficacité des différentes méthodes d'optimisation pour les applications étudiées dans ce travail, trois architectures de manipulateurs sont employées, soient un manipulateur 2R<sup>6</sup> plan, un manipulateur 3R spatial et un manipulateur 6R général. Dans un premier temps, le manipulateur 2R plan est étudié en raison de sa simplicité et opère dans le plan  $x$ - $z$ . Ensuite, le manipulateur 3R spatial est étudié et ajoute une articulation rotoïde verticale, ce qui permet un mouvement dans la seconde dimension horizontale  $y$ . Enfin, le manipulateur 6R est étudié. Le manipulateur 6R étudié dans ce travail est le manipulateur UR5 d'Universal Robots et permet le positionnement et l'orientation de son organe terminal en trois dimensions. Ces trois manipulateurs sont présentés de façon détaillée dans cette section. Il est à noter que toutes les architectures de manipulateurs sont basées sur le manipulateur UR5 montré à la figure 1.1 avec des articulations bloquées pour réduire le nombre de degrés de liberté, le cas échéant.

### 1.5.1 Manipulateur 2R plan

Le premier manipulateur étudié est le manipulateur 2R plan montré à la figure 1.2. La figure 1.2a montre les paramètres cinématiques du manipulateur où  $L_1$  et  $L_2$  sont la longueur des membrures et  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont la référence de la rotation des articulations. La figure 1.2b montre les paramètres inertiels pertinents à la modélisation dynamique du manipulateur où  $m_1$  et  $m_2$  sont les masses totales des membrures,  $I_1$  et  $I_2$  sont les moments d'inertie des membrures autour de la direction  $y$  et  $a_1$  et  $a_2$  sont les positions des centres de masse de chacune des membrures.

À partir de la figure 1.2, il peut être constaté que ce manipulateur est composé de deux articulations rotoïdes d'axes parallèles (dans la direction  $y$ ) et de deux membrures rigides. Il est à noter que ce manipulateur évolue dans le plan  $x$ - $z$ , donc la gravité est présente dans les

---

6. La notation  $nR$  dans ce travail correspond à un manipulateur sériel à  $n$  articulations rotoïdes.

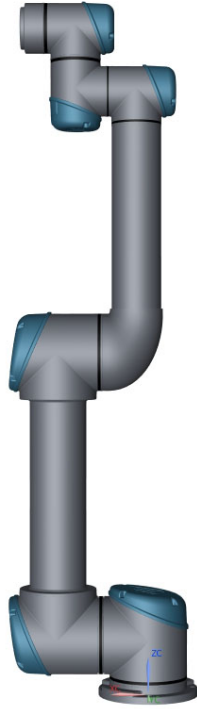
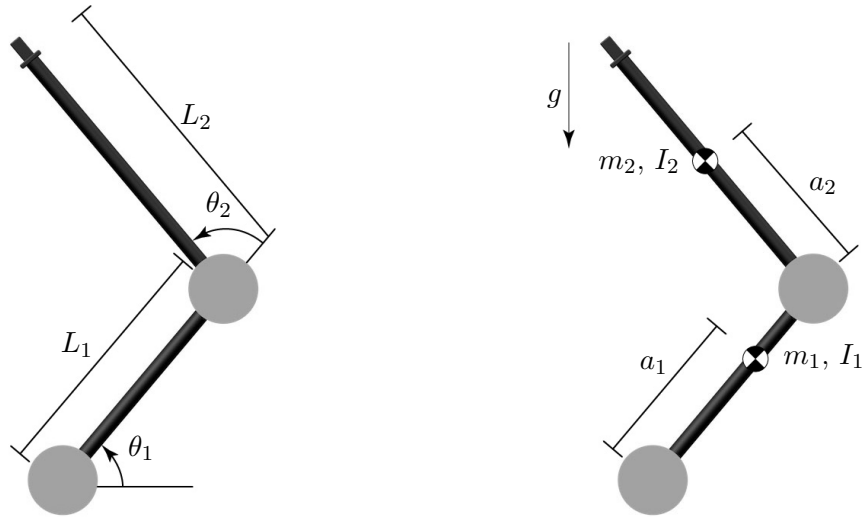


FIGURE 1.1 – Le manipulateur UR5 à 6 DDLs d’Universal Robots.



(a) Paramètres géométriques du manipulateur 2R. (b) Paramètres inertiels du manipulateur 2R.

FIGURE 1.2 – Dimensions et paramètres inertiels du manipulateur 2R.

équations du mouvement tel qu’indiqué à la figure 1.2b. Les paramètres de ce manipulateur utilisés pour les expérimentations numériques sont présentés au tableau 1.1.

Dans ce tableau,  $\theta_{i,\max}$  est la position maximale de l’articulation  $i = 1, 2$ ,  $\dot{\theta}_{i,\max}$  est la vitesse maximale de l’articulation  $i$  et  $\tau_{i,\max}$  est le couple maximal de l’articulation  $i$ . Il est à noter

TABLE 1.1 – Les propriétés géométriques et dynamiques du prototype 2R.

Arti.	$L_i$	$a_i$	$m_i$	$I_i$	$\theta_{i,\max}$	$\dot{\theta}_{i,\max}$	$\tau_{i,\max}$
1	0,425m	0,2125m	8,393kg	0,253kg m <sup>2</sup>	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 150\text{Nm}$
2	0,497m	0,3418m	4,956kg	0,121kg m <sup>2</sup>	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 150\text{Nm}$

que les dimensions et propriétés inertielles choisies pour ce manipulateur (pour les expérimentations numériques) sont celles du robot UR5 de la compagnie Universal Robots. Toutes ces propriétés ont été obtenues à partir de leur site web officiel<sup>7</sup>.

### Dispositif expérimental

Afin de valider certains des résultats qui seront présentés aux chapitres subséquents, un dispositif expérimental à été monté. Le dispositif en question est le manipulateur 2R plan montré à la figure 1.3.

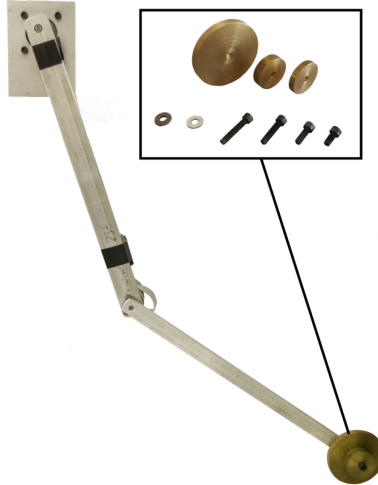


FIGURE 1.3 – Le prototype du manipulateur 2R construit dans le cadre de cette recherche.

D'après la figure 1.3, il peut être observé que trois masses en laiton ont été fabriquées pour permettre une variation de la charge soulevée. Les propriétés cinématiques et dynamiques de ce prototype sont résumées dans le tableau 1.2. Les deux moteurs utilisés dans ce prototype ont chacun un rapport de réduction très faible qui les rendent potentiellement rapides, mais le couple qu'ils peuvent générer est relativement faibles. Cette limite en couple crée un prototype idéal pour tester les méthodes étudiées dans ce travail.

Il est à noter que, pour des raisons de sécurité, ce prototype est plus petit et plus léger que le manipulateur utilisé pour les expérimentations numériques qui est basé sur le robot UR5 montré à la figure 1.1.

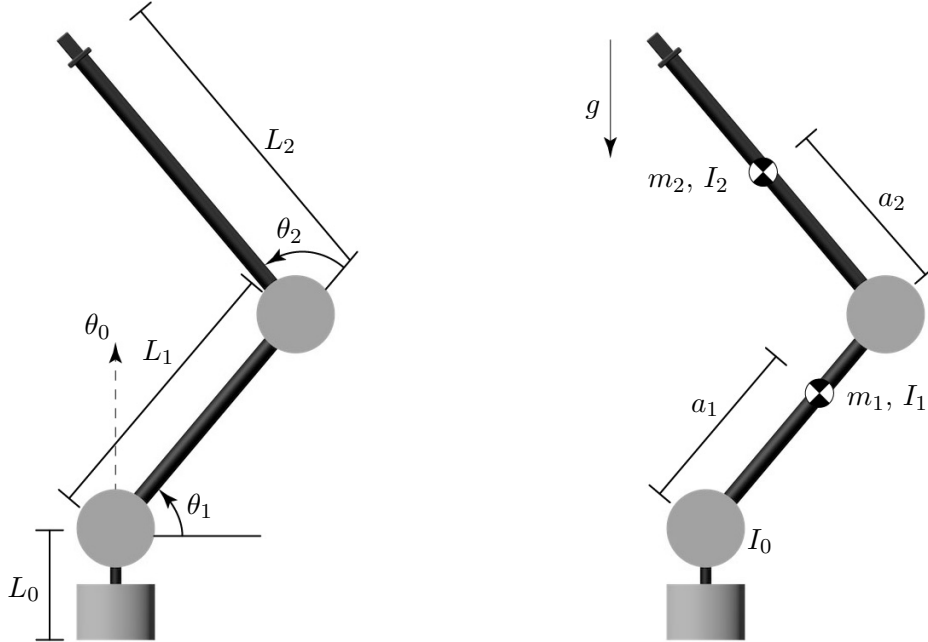
<sup>7</sup> [www.universal-robots.com/how-to-s-and-faqs/faq/ur-faq/parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics-45257/](http://www.universal-robots.com/how-to-s-and-faqs/faq/ur-faq/parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics-45257/) (consulté le 25 mars 2020).

TABLE 1.2 – Les propriétés géométriques et dynamiques du prototype 2R.

Arti.	$L_i$	$a_i$	$m_i$	$I_i$	$\theta_{i,\max}$	$\dot{\theta}_{i,\max}$	$\tau_{i,\max}$
1	0,250m	0,198m	0,193kg	1,15e-3kg m <sup>2</sup>	$\pm\infty$	$\pm 30\ 000^{\circ}/s$	$\pm 0,55\text{Nm}$
2	0,234m	0,143m	0,115kg	4,99e-4kg m <sup>2</sup>	$\pm\infty$	$\pm 5\ 555^{\circ}/s$	$\pm 0,20\text{Nm}$

### 1.5.2 Manipulateur 3R spatial

La deuxième architecture étudiée dans ce travail est de type 3R spatial comme il est montré à la figure 1.4. Comme pour le manipulateur 2R, la figure 1.4a montre les paramètres géométriques du manipulateur où  $L_0$  est la hauteur de la deuxième articulation par rapport à l'origine et la flèche de  $\theta_0$  indique l'axe de rotation de la première articulation. La figure 1.4b montre les paramètres inertiels du manipulateur.



(a) Paramètres géométriques du manipulateur 3R. (b) Paramètres inertiels du manipulateur 3R.

FIGURE 1.4 – Dimensions et paramètres inertiels du manipulateur 3R.

Encore une fois, les propriétés cinématiques et inertielles sont tirées du site web officiel de Universal Robots et sont présentées au tableau 1.3.

TABLE 1.3 – Les propriétés géométriques et dynamiques du manipulateur 3R.

Arti.	$L_i$	$a_i$	$m_i$	$I_i$	$\theta_{i,\max}$	$\dot{\theta}_{i,\max}$	$\tau_{i,\max}$
0	0,089m	s.o.	3,700kg	0,007kg m <sup>2</sup>	$\pm 360^{\circ}$	$\pm 180^{\circ}/s$	$\pm 150\text{Nm}$
1	0,425m	0,2125m	8,393kg	0,253kg m <sup>2</sup>	$\pm 360^{\circ}$	$\pm 180^{\circ}/s$	$\pm 150\text{Nm}$
2	0,497m	0,3418m	4,956kg	0,121kg m <sup>2</sup>	$\pm 360^{\circ}$	$\pm 180^{\circ}/s$	$\pm 150\text{Nm}$



## Relation au manipulateur 2R

Le manipulateur 3R est semblable au manipulateur 2R présenté à la section 1.5.1. En effet, l'axe des articulations de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont parallèles et les membrures de longueur  $L_1$  et  $L_2$  sont dans le même plan. En outre, si les valeurs de  $L_1, L_2, a_1, a_2, m_1, m_2, I_1, I_2$  et la hauteur de l'articulation 1 sont les mêmes pour les deux manipulateurs, le manipulateur 3R peut être transformé en le manipulateur 2R en bloquant la première articulation verticale. Cela est très intéressant pour l'étude de l'effet de la première articulation sur les résultats obtenus pour les différentes applications étudiées dans ce travail.

### 1.5.3 Manipulateur 6R spatial

La troisième architecture étudiée dans ce travail est le manipulateur 6R montré à la figure 1.5. Celui-ci est le manipulateur UR5 d'Universal Robots. Alors que les manipulateurs 2R et 3R bloquent certaines articulations, ce manipulateur 6R représente le manipulateur UR5 entier. Encore une fois, la figure 1.5a présente les paramètres géométriques du manipulateur où les axes pointent dans la direction positive des rotations  $\theta_i$  ( $i = 0, \dots, 5$ ). La figure 1.5b montre les paramètres inertiels du manipulateur où  $\mathbf{s}_i$  est le vecteur constant de la position du centre de masse de chaque membrure dans le repère indiqué.

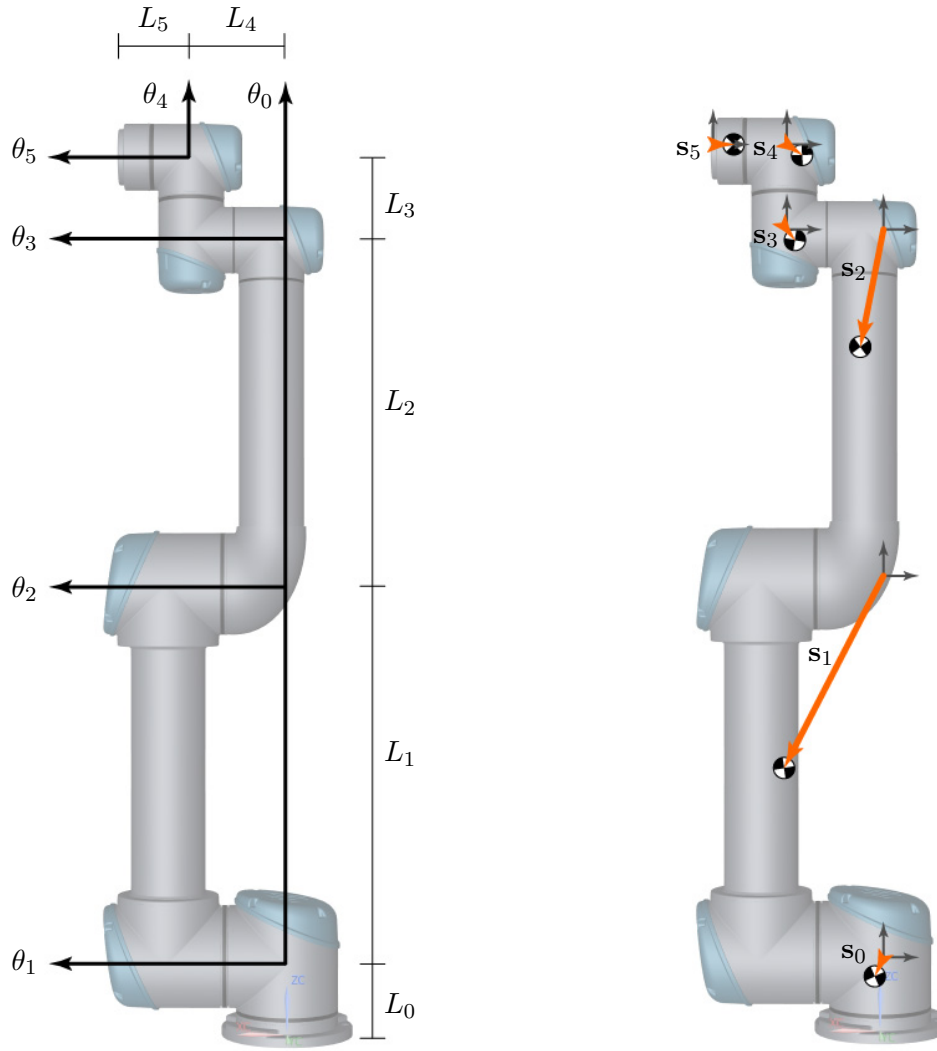
Le tableau 1.4 présente les propriétés de ce manipulateur. Puisque la position du centre de masse de chaque membrure est un vecteur, et que le moment d'inertie est une matrice, ceux-ci ne sont pas inclus dans ce tableau et sont présentés à part.

TABLE 1.4 – Les propriétés cinématiques et dynamiques du manipulateur 6R.

Arti.	$L_i$	$m_i$	$\theta_{i,\max}$	$\dot{\theta}_{i,\max}$	$\tau_{i,\max}$
0	0,089m	3,700kg	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 150\text{Nm}$
1	0,425m	8,393kg	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 150\text{Nm}$
2	0,392m	2,330kg	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 150\text{Nm}$
3	0,095m	1,219kg	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 28\text{Nm}$
4	0,109m	1,219kg	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 28\text{Nm}$
5	0,082m	0,188kg	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	$\pm 28\text{Nm}$

La position du centre de masse, telle que montrée à la figure 1.5b est définie pour chaque membrure par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_0 &= \begin{bmatrix} -0,02561 \\ -0,00193 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{s}_1 &= \begin{bmatrix} -0,11336 \\ -0,2125 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{s}_2 &= \begin{bmatrix} -0,0265 \\ -0,150 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{s}_3 &= \begin{bmatrix} 0,0018 \\ -0,01634 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{s}_4 &= \begin{bmatrix} 0,01634 \\ -0,0018 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{s}_5 &= \begin{bmatrix} 0,00116 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$



(a) Paramètres géométriques du manipulateur 6R. (b) Paramètres inertiels du manipulateur 6R.

FIGURE 1.5 – Dimensions et paramètres inertiels du manipulateur 6R.

et la matrice d'inertie au centre de masse dans le même repère est définie pour chaque membre par

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \begin{bmatrix} 0,007 & 0 & 0 \\ 0 & 0,007 & 0 \\ 0 & 0 & 0,007 \end{bmatrix}, & I_1 &= \begin{bmatrix} 0,253 & 0 & 0 \\ 0 & 0,015 & 0 \\ 0 & 0 & 0,235 \end{bmatrix}, \\
 I_2 &= \begin{bmatrix} 0,060 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0033 & 0 \\ 0 & 0 & 0,060 \end{bmatrix}, & I_3 &= \begin{bmatrix} 0,015 & 0 & 0 \\ 0 & 0,015 & 0 \\ 0 & 0 & 0,015 \end{bmatrix}, \\
 I_4 &= \begin{bmatrix} 0,015 & 0 & 0 \\ 0 & 0,015 & 0 \\ 0 & 0 & 0,015 \end{bmatrix}, & I_5 &= \begin{bmatrix} 0,00008 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00008 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00008 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

### **Relation aux manipulateurs 2R et 3R**

Encore une fois, une correspondance peut être faite entre le manipulateur 6R et les manipulateurs 2R et 3R puisque les manipulateurs 2R et 3R sont aussi basés sur le manipulateur UR5. En effet, le manipulateur 6R peut être transformé en un manipulateur 3R très semblable au manipulateur 3R étudié en bloquant les articulations du poignet dans la configuration montrée à la figure 1.5. En outre, celui-ci peut être transformé en un manipulateur 2R en bloquant additionally la première articulation.

Cette possibilité de faire la correspondance entre les trois manipulateurs permettra l'analyse de l'effet de la première articulation ainsi que du poignet sur la performance de ces manipulateurs dans les différentes applications étudiées.

## Chapitre 2

# Génération de trajectoire

*"Les ingénieurs, toujours en quête des valeurs optimales pour les grandeurs qui les intéressent, voient dans les mathématiciens les dépositaires d'un trésor de formules qu'ils doivent leur fournir sur demande."*

— Jean Dieudonné

### Résumé

Le chapitre actuel présente la génération du mouvement d'un manipulateur robotique, c'est-à-dire, la génération de la trajectoire de chacune de ses articulations. Dans un premier temps, le rôle de la génération de trajectoire dans la procédure d'optimisation est présenté. Ensuite, les différentes méthodes de génération de trajectoire cinématique, à savoir les trajectoires simples, les fonctions polynomiales et les fonctions périodiques sont présentées. Ensuite, les trajectoires employant la dynamique directe sont présentées. Enfin, ce chapitre se termine avec une comparaison des méthodes et une discussion.

## 2.1 Introduction

L'optimisation de trajectoire est fondamentalement composée de deux étapes : la génération de trajectoire et l'évaluation de celle-ci comme il est montré à la figure 2.1. Bien entendu, il existe plusieurs méthodes de génération de trajectoire, plusieurs méthodes d'évaluation et plusieurs processus de rétroaction. Néanmoins, ces deux étapes apparaissent sous une forme ou une autre dans tout processus d'optimisation de trajectoire.

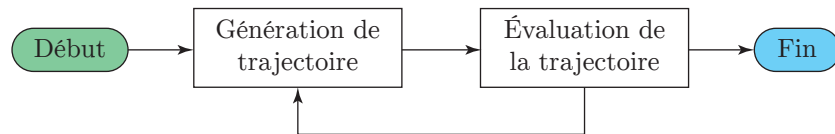


FIGURE 2.1 – L'optimisation de trajectoire est composée de deux étapes fondamentales : la génération de trajectoire et l'évaluation de celle-ci.

L'évaluation de la trajectoire sera adressée aux prochains chapitres et dépend de l'application visée. La génération de trajectoire fait l'objet de ce chapitre. Le rôle de la génération de trajectoire est de fournir à l'évaluation de la trajectoire tous les paramètres dont elle a besoin. Ces paramètres peuvent inclure la position, la vitesse, l'accélération et l'effort articulaire<sup>1</sup> en fonction du temps.

Ce travail regroupe les méthodes de génération de trajectoire en deux grandes catégories : la génération de trajectoire cinématique et la génération de l'effort articulaire. La génération de trajectoire cinématique génère le mouvement du manipulateur directement, c'est-à-dire, la fonction temporelle de la position de chaque articulation. À partir de cette trajectoire, il est possible de calculer la vitesse, l'accélération et le saccade par différentiation. Il est également possible de calculer l'effort articulaire en employant la dynamique inverse.

Pour sa part, la génération de l'effort articulaire génère la fonction temporelle de l'effort articulaire de chaque articulation. La dynamique directe est alors employée pour déterminer les paramètres cinématiques en fonction du temps. Il est à noter que la dynamique directe nécessite généralement une intégration numérique tout au long de la trajectoire, alors que la dynamique inverse peut être effectuée aux valeurs de temps requis par l'évaluation de la trajectoire. Le calcul de la dynamique directe est alors généralement plus coûteux que la dynamique inverse en pratique. Bien que les méthodes de génération de trajectoire cinématique soient utilisées dans ce travail, les deux types de méthodes sont présentés dans ce chapitre.

---

1. L'effort fourni par une articulation est un couple pour une articulation rotoïde et une force pour une articulation prismatique.

### 2.1.1 Concepts clés

Avant de passer à la définition des méthodes de génération de trajectoire, il est d'abord important de définir certains des concepts de base utilisés dans ce travail.

#### Trajet et trajectoire

Comme il a été expliqué précédemment, un trajet est un ensemble de points ordonné par lesquels un manipulateur passe. Par contre, le temps auquel chaque point est atteint n'est pas défini. Un trajet peut alors être exécuté d'une infinité de façon (en modifiant la vitesse). Pour sa part, une trajectoire inclut le temps auquel chaque point du trajet est atteint. Puisque le calcul de la dynamique inverse nécessite aussi la vitesse et l'accélération, les méthodes présentées dans ce chapitre génèrent des trajectoires et non seulement des trajets.

#### Dynamique directe et dynamique inverse

Le calcul de la dynamique directe est effectué lorsque l'effort articulaire d'un manipulateur est défini et que la trajectoire cinématique (position, vitesse, accélération articulaire en fonction du temps) résultante est désirée. La dynamique directe nécessite l'intégration des équations du mouvement en fonction du temps afin de calculer l'état cinématique du manipulateur. Puisque les équations du mouvement des manipulateurs sont généralement non-linéaires et couplées, il est souvent nécessaire de faire cette intégration numériquement. Il est alors impossible de calculer l'état du manipulateur pour une valeur de temps donnée sans calculer tous les états précédents. En outre, toute erreur d'approximation est accumulée sur le domaine de l'intégration.

Le calcul de la dynamique inverse est effectué lorsque la position, la vitesse et l'accélération désirées des articulations sont connues et que l'effort requis est désiré. Ce calcul ne dépend pas directement du temps et peut être effectué à n'importe quel point de la trajectoire directement sans perte de précision. Pour cette raison, le calcul de la dynamique inverse est généralement beaucoup plus rapide que celui de la dynamique directe.

#### Suivi de trajet et génération de trajectoire

Certaines applications nécessitent que le manipulateur, particulièrement l'organe terminal de celui-ci, suive un trajet prédéfini. Des exemples types de cette catégorie de tâches sont la soudure à l'arc et le coupage au laser où l'outil doit suivre une séquence de points prédéfinis (Dahl et Nielsen, 1990). Dans ce type de tâches, la séquence des points à atteindre est prédéfinie, mais le temps d'exécution de ce trajet peut être optimisé pour définir une trajectoire performante.

Certaines autres applications ne contiennent aucune telle contrainte directe sur le trajet que l'outil ou les articulations doivent suivre pour effectuer la tâche. Pour de telles tâches, seuls l'état cinématique au début et à la fin de la trajectoire sont imposés. Les applications visées

dans ce travail sont celles où les tâches n'imposent pas le trajet pendant le mouvement. Pour cette raison, le trajet doit aussi être généré lors de la génération de trajectoire. Ce type de tâche est souvent nommé « *pick and place* ».

## 2.2 Génération de trajectoire cinématique

Le premier type de méthodes de génération de trajectoire étudié dans ce travail est la génération de trajectoire cinématique. Ce type de méthode détermine directement le mouvement de chaque articulation du manipulateur en fonction du temps et emploie la dynamique inverse pour déterminer l'effort articulaire s'il est requis par l'application visée.

Puisque la trajectoire de chaque articulation d'un manipulateur est continue en fonction du temps, l'espace des trajectoires possibles est trop vaste pour être exploré exhaustivement. Pour cette raison, ce travail emploie le principe de la paramétrisation pour réduire l'espace en imposant une structure aux trajectoires sous la forme de courbes paramétrées. Ce principe permet de calculer une fonction continue à partir d'un nombre fini de paramètres. Ces paramètres feront alors l'objet d'optimisation afin de déterminer une trajectoire qui répond aux besoins de l'application de façon optimale pour la courbe paramétrée sélectionnée.

Bien entendu, il existe plusieurs types de courbes paramétrées. Ce travail en explore six types : la spline cubique, trois types de polynômes et deux types de séries de Fourier. Dans chaque cas, les courbes décrivent la position articulaire du manipulateur en fonction du temps et sont des fonctions continues. La vitesse, l'accélération et la saccade peuvent alors être obtenus en dérivant par rapport au temps.

### 2.2.1 Spline cubique (SP)

Le premier type de courbes paramétrées est la spline cubique. Une spline est une série de segments polynomiaux, reliant une série de *noeuds*<sup>2</sup>. La spline cubique est une spline uniforme de degré trois, c'est-à-dire que tous les segments reliant les noeuds sont des polynômes de degré trois.

Pour mieux expliquer la définition et les caractéristiques de la spline, un exemple de spline cubique avec quatre segments est montré à la figure 2.2. Il peut être observé que, pour une spline composée de  $n$  segments, le nombre de noeuds nécessaire pour définir la spline est de  $n + 1$ .

Dans ce travail, tous les segments ont la même durée. Le temps entre chaque noeud est alors défini par

$$\Delta t = \frac{T}{n} \tag{2.1}$$

---

2. Un noeud est un point par lequel la trajectoire doit passer à un temps donné. Un segment est alors la trajectoire comprise entre deux noeuds.

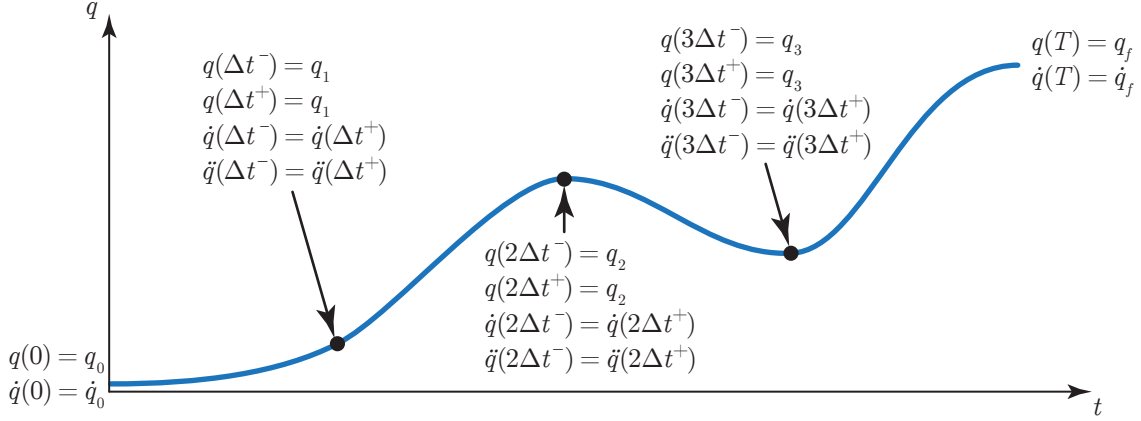


FIGURE 2.2 – Un exemple de spline cubique à quatre segments.

où  $T$  est le temps total de la trajectoire.

Puisque les segments de la spline sont de degré trois, l'accélération est une fonction affine par morceaux. De plus, la trajectoire est raccordée en vitesse et en accélération aux noeuds, c'est-à-dire identique juste avant et juste après un noeud. Par conséquent, la position et la vitesse sont continues et dérivables tout au long de la trajectoire et l'accélération continue, mais n'est pas généralement dérivable aux noeuds.

Il peut être observé que les contraintes associées aux deux noeuds extrémaux (au début et à la fin de la trajectoire) sont légèrement différentes des autres noeuds. En effet, l'accélération n'est pas raccordée, mais la position et la vitesse peuvent être contrôlées par l'algorithme, alors que seule la position peut être imposée aux autres noeuds.

Afin de pleinement définir la trajectoire et de calculer les coefficients des polynômes de chaque segment,  $4n$  équations de contrainte sont nécessaires. Pour simplifier le calcul des coefficients des polynômes, les polynômes sont définis de sorte que le temps redémarre à zéro au début de chaque segment. Autrement dit, le temps utilisé pour chaque segment est

$$t_i \in [0, \Delta t] \quad (2.2)$$

où  $i = 1..n$  est l'indice du segment.

Dans l'exemple de la figure 2.2, où quatre segments composent la trajectoire de l'articulation, seize équations de contraintes sont requises. Deux contraintes sont imposées au premier et au dernier noeud et quatre contraintes sont imposées à chacun des trois autres noeuds.

Puisque chaque segment est défini par un polynôme de degré trois, la position, la vitesse et





est alors

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} q_0 & \dot{q}_0 & q_1 & \dots & q_n & q_f & \dot{q}_f \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Une contrainte raisonnable pouvant également être ajoutée à la génération de trajectoire est que la trajectoire de chaque articulation aie la même durée. Dans ce cas, le vecteur permettant la définition complète d'une trajectoire articulaire utilisant la spline comme paramétrisation est de la forme

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_N & T \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

où  $N$  est le nombre d'articulations.

### 2.2.2 Fonctions polynomiales

Le deuxième type de courbes paramétrées étudié dans ce travail est la fonction polynomiale. Alors que la spline est composée de plusieurs fonctions polynomiales cubiques, une trajectoire polynomiale est composée d'une seule fonction polynomiale de degré supérieur. Il existe plusieurs méthodes pour définir une fonction polynomiale et ce travail en explore trois : la forme canonique où les coefficients du polynôme sont fixés directement, la fonction d'interpolation où la trajectoire passe par un certain nombre de noeuds et la courbe de Bézier qui emploie les polynômes de Bernstein où la trajectoire est attirée par un certain nombre de points de contrôle.

Il est à noter que toutes ces représentations du polynôme sont équivalentes, c'est-à-dire toute fonction polynomiale pouvant être générée par une représentation peut également être représentée sous une des autres formes. Cependant, le comportement numérique d'une optimisation peut être très différent en employant une différente représentation. Cette section définit ces représentations de fonctions polynomiales telles qu'elles sont utilisées dans ce travail.

#### Polynôme avec variation des coefficients (PC)

La forme canonique de la fonction polynomiale décrivant la trajectoire d'une articulation est

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

où  $n$  est le degré du polynôme (à ne pas confondre avec le nombre de segments de la spline cubique). Cette définition s'écrit également sous forme synthétique

$$q(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i. \quad (2.10)$$

La première et la seconde dérivée de cette fonction sont facilement calculées avec

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^n i a_i t^{i-1} \quad (2.11)$$

et

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=2}^n i(i-1)a_i t^{i-2}. \quad (2.12)$$

Afin de pleinement définir la trajectoire d'une articulation, tous les  $n + 1$  coefficients doivent être déterminés. Les premiers coefficients peuvent être calculés directement avec la valeur de la position, de la vitesse au début de la trajectoire avec

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 \\ a_1 &= \dot{q}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

où  $q_0$  et  $\dot{q}_0$  sont, respectivement, la position et la vitesse au début de la trajectoire et sont généralement données par la définition du problème d'optimisation à résoudre. Il peut être observé qu'il est possible d'imposer des conditions additionnelles comme l'accélération et la saccade, ce qui n'est pas possible avec la spline cubique définie à la section 2.2.1. Afin de permettre une meilleure comparaison entre les différentes paramétrisations, seules la position et la vitesse sont imposées au début et à la fin de la trajectoire.

Afin de respecter la position et la vitesse à la fin de la trajectoire de l'articulation, les deux équations de contrainte à respecter sont représentés par le système linéaire

$$\begin{bmatrix} T^{n-1} & T^n \\ (n-1)T^{n-2} & nT^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_f - \sum_{i=0}^{n-2} a_i T^i \\ \dot{q}_f - \sum_{i=1}^{n-2} i a_i T^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où  $q_f$  et  $\dot{q}_f$  sont, respectivement, la position et la vitesse à la fin de la trajectoire. Il peut être observé que, dans ce travail, ce sont les deux derniers coefficients qui sont déterminés par la solution de ce système. Les autres coefficients, de  $a_2$  à  $a_{n-2}$ , sont donc libres et font l'objet de l'optimisation. Le vecteur des paramètres nécessaire pour définir la trajectoire d'une articulation est alors

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} q_0 & \dot{q}_0 & a_2 & \dots & a_{n-2} & q_f & \dot{q}_f \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Encore une fois, le temps total de la trajectoire doit être le même pour chaque articulation. Le vecteur nécessaire pour pleinement définir la trajectoire articulaire d'un manipulateur complet avec cette paramétrisation est

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_N & T \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

### Trajectoire polynomiale passant par des noeuds (PN)

La façon précédente de déterminer les coefficients des fonctions polynomiales présente un inconvénient potentiel, le temps total de la trajectoire altère le trajet obtenu. Pour illustrer ce phénomène, la figure 2.3 montre deux trajectoires obtenues avec un polynôme de degré quatre. La seule différence entre les deux cas est le temps total de la trajectoire.

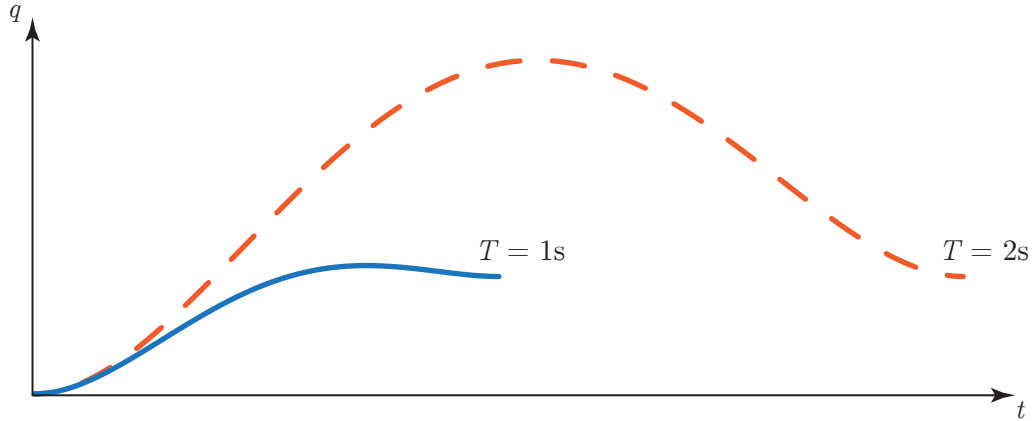


FIGURE 2.3 – La trajectoire polynomiale générée change en fonction de la durée de la trajectoire  $T$ .

Il peut être observé que lorsque la durée totale de la trajectoire change de  $T = 1s$  à  $T = 2s$ , non seulement la trajectoire est-elle différente, mais le trajet est aussi altéré significativement. Cependant, il est possible de faire en sorte que le trajet ne change pas en fonction de  $T$ .

Comme pour la méthode précédente,  $n + 1$  coefficients doivent être déterminés pour définir une trajectoire polynomiale de degré  $n$ . Pour ce faire,  $n + 1$  équations de contrainte sont encore nécessaires. Puisque quatre équations sont imposées par la tâche (la position et la vitesse au début et à la fin de la trajectoire),  $n - 3$  équations supplémentaires sont nécessaires. Il est possible de faire en sorte que la trajectoire passe par  $n - 3$  points pour fournir ces contraintes. Afin d'illustrer ce processus, la figure 2.4 montre un polynôme de degré six passant par trois noeuds.

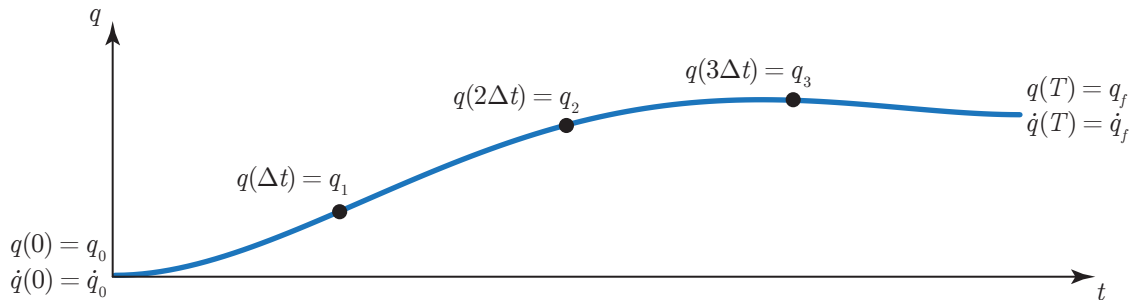


FIGURE 2.4 – Une trajectoire polynomiale de degré six avec trois noeuds.

À partir de la figure 2.4, il peut être observé que chaque noeud impose une équation de contrainte de la forme

$$q(i\Delta t) = q_i, \quad i = 1..n - 3 \quad (2.17)$$

où  $q_i$  est la position de l'articulation au  $i^e$  noeud et  $\Delta t$  est le temps entre chaque noeud.

Comme pour les splines cubiques, le temps entre chaque noeud est égal et est déterminé par

$$\Delta t = \frac{T}{n-2}. \quad (2.18)$$

Les deux premiers coefficients sont encore une fois déterminés directement avec  $a_0 = q_0$  et  $a_1 = \dot{q}_0$  et les autres coefficients sont calculés en solutionnant le système

$$\begin{bmatrix} \Delta t^2 & \dots & \Delta t^n \\ \vdots & & \vdots \\ [(n-3)\Delta t]^2 & \dots & [(n-3)\Delta t]^n \\ T^2 & \dots & T^n \\ 2T & \dots & nT^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - q_0 - \dot{q}_0 \Delta t \\ \vdots \\ q_{n-3} - q_0 - \dot{q}_0 (n-3)\Delta t \\ q_f - q_0 - \dot{q}_0 T \\ \dot{q}_f - \dot{q}_0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

où les deux dernières rangées correspondent à la position et la vitesse à la fin de la trajectoire.

À titre d'exemple, ce système pour la trajectoire polynomiale de degré six montré à la figure 2.4 serait

$$\begin{bmatrix} \Delta t^2 & \Delta t^3 & \Delta t^4 & \Delta t^5 & \Delta t^6 \\ (2\Delta t)^2 & (2\Delta t)^3 & (2\Delta t)^4 & (2\Delta t)^5 & (2\Delta t)^6 \\ (3\Delta t)^2 & (3\Delta t)^3 & (3\Delta t)^4 & (3\Delta t)^5 & (3\Delta t)^6 \\ T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & T^6 \\ 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & 6T^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - q_0 - \dot{q}_0 \Delta t \\ q_2 - q_0 - \dot{q}_0 (2\Delta t) \\ q_3 - q_0 - \dot{q}_0 (3\Delta t) \\ q_f - q_0 - \dot{q}_0 T \\ \dot{q}_f - \dot{q}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

En utilisant cette paramétrisation, le trajet devient indépendant du temps total  $T$  comme il est montré à la figure 2.5.

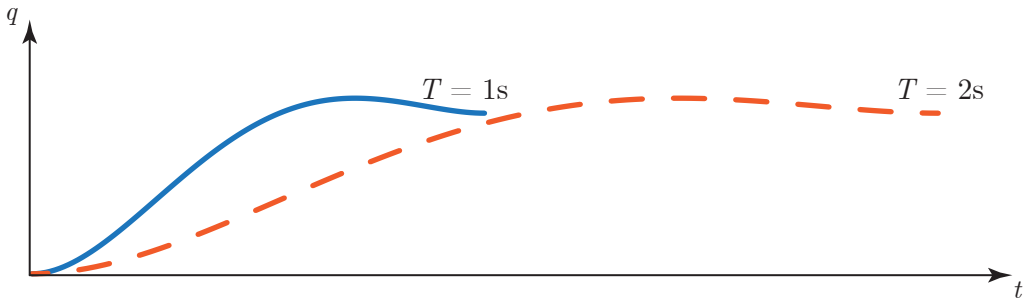


FIGURE 2.5 – Le trajet de la trajectoire polynomiale de degré six avec trois noeuds ne change pas en fonction du temps total.

Le vecteur qui, avec le temps total de la trajectoire, permet la définition de la trajectoire d'une articulation avec cette paramétrisation est très semblable à celui pour la spline cubique de la section 2.2.1, soit

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} q_0 & \dot{q}_0 & q_1 & \dots & q_{n-3} & q_f & \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

et le vecteur nécessaire pour pleinement définir la trajectoire articulaire d'un manipulateur complet avec cette paramétrisation est

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_N & T \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Cette façon de déterminer les coefficients permet de découpler le trajet du temps total de la trajectoire. L'hypothèse est alors faite que cette paramétrisation pourrait être plus stable numériquement que la trajectoire polynomiale avec variation des coefficients. Cette hypothèse sera vérifiée dans les prochains chapitres de cette thèse. Cependant, celle-ci peut quand même souffrir d'une instabilité numérique car elle peut être sensible au changement de la valeur aux noeuds. Autrement dit, il est possible que changer la position d'un seul noeud change complètement l'allure de la trajectoire.

### Courbe de Bézier (BE)

La spline et la définition précédente de la fonction polynomiale peuvent être considérées comme des méthodes d'interpolation puisque la trajectoire doit passer par tous les noeuds. Il existe aussi des méthodes de génération de trajectoires polynomiales qui utilisent des points de contrôle au lieu des noeuds. La courbe de Bézier en est un exemple où il y a des points qui définissent des contraintes pour la trajectoire, mais la trajectoire ne passe pas nécessairement par tous ces points. En effet, la courbe ne passe en général que par le premier et le dernier point de contrôle.

La courbe de Bézier peut être écrite sous la forme

$$q(s) = \sum_{i=0}^n B_i^n(s) P_i \quad (2.23)$$

où  $n$  est le degré du polynôme,  $s \in [0, 1]$  est le temps normalisé de la trajectoire,  $B_i^n$  est le polynôme de Bernstein  $i$  de degré  $n$  et  $P_i$  est le point de contrôle  $i$ . Puisque le paramètre  $s$  varie toujours entre 0 et 1, le temps peut être calculé avec

$$t = sT. \quad (2.24)$$

Cependant, ce changement de variable sera effectué à la fin de cette section car le calcul des dérivées est plus facile en fonction de  $s$ .

Il existe aussi d'autres façons de définir ces courbes. Par exemple, l'algorithme dérivé par Pierre Bézier et l'algorithme de De Casteljau-Pascal (Farouki et Rajan, 1988) sont parfois utilisés, mais ceux-ci ne seront pas discutés dans ce travail. La définition de la courbe de Bézier montrée à l'équation (2.23) est la forme de Bernstein de la courbe de Bézier puisque chaque point de contrôle est multiplié par un polynôme de Bernstein. Pour une valeur donnée de  $s$ , il existe  $n + 1$  polynômes de Bernstein de degré  $n$  et ceux-ci sont définis par

$$B_i^n(s) = C_n^i s^i (1 - s)^{n-i} \quad (2.25)$$

où  $C_n^i$  est le coefficient binomial de la combinaison de  $i$  parmi  $n$  définie par

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (2.26)$$

Les coefficients binomiaux pour  $n = 3$ , par exemple, sont  $\{1; 3; 3; 1\}$ . Il est à noter que les coefficients binomiaux correspondent à la rangée  $n$  du triangle de Pascal (Farouki et Rajan, 1988). Ces coefficients sont constants et peuvent être pré-calculés pour réduire le temps de calcul.

Afin de pleinement définir la trajectoire, il est nécessaire de calculer la vitesse et l'accélération de la courbe. Pour ce faire, l'équation (2.23) doit être dérivée par rapport à  $s$ . Premièrement, les polynômes de Bernstein peuvent être dérivés avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} B_i^n(s) &= C_n^i i s^{i-1} (1-s)^{n-i} - C_n^i s^i (n-i) (1-s)^{n-i-1} \\ &= \frac{n!i}{i!(n-i)!} t^{s-1} (1-s)^{n-i} - \frac{n!(n-i)}{i!(n-i)!} s^i (1-s)^{n-i-1} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{s-1} (1-s)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} s^i (1-s)^{(n-1)-i} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Puisque  $n! = n(n-1)!$  et que  $n-i = (n-1) - (i-1)$ , il est possible d'obtenir

$$\frac{d}{ds} B_i^n(s) = n \left[ \frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!} t^{s-1} (1-s)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} s^i (1-s)^{(n-1)-i} \right]$$

où des polynômes de Bernstein peuvent être extraits, donc

$$\frac{d}{ds} B_i^n(s) = n [B_{i-1}^{n-1}(s) - B_i^{n-1}(s)]. \quad (2.28)$$

La dérivée de la courbe de Bézier par rapport à  $s$  est alors

$$\frac{d}{ds} q(s) = n \left[ \sum_{i=1}^n B_{i-1}^{n-1}(s) P_i - \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(s) P_i \right]$$

qui est équivalent à

$$\frac{d}{ds} q(s) = n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(s) P_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(s) P_i \right]$$

pouvant enfin être simplifié à

$$\frac{d}{ds} q(s) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(s) (P_{i+1} - P_i). \quad (2.29)$$

Comme il aurait pu être prévu, la dérivée d'une courbe de Bézier de degré  $n$  est une courbe de Bézier de degré  $n-1$ . En dérivant l'équation (2.28), la dérivée seconde du polynôme de Bernstein est obtenue

$$\frac{d^2}{ds^2} B_i^n(s) = n(n-1) [B_{i-2}^{n-2}(s) - 2B_{i-1}^{n-2}(s) + B_i^{n-2}(s)]. \quad (2.30)$$

La seconde dérivée de la courbe de Bézier est alors

$$\frac{d^2}{ds^2}q(s) = n(n-1) \left[ \sum_{i=2}^n B_{i-2}^{n-2}(s)P_i - 2 \sum_{i=1}^{n-1} B_{i-1}^{n-2}(s)P_i + \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(s)P_i \right]$$

ou simplement

$$\frac{d^2}{ds^2}q(s) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(s)(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) \quad (2.31)$$

qui aurait pu aussi être obtenu en dérivant l'équation (2.29).

Puisque  $s$  est défini entre 0 et 1, il est possible de déterminer la valeur de  $s$ ,  $ds$  et  $ds^2$  en fonction de  $t$ ,  $dt$  et  $dt^2$  avec

$$s = \frac{t}{T}, \quad ds = \frac{dt}{T}, \quad ds^2 = \frac{dt^2}{T^2}. \quad (2.32)$$

À partir des équations (2.23), (2.29) et (2.31), il est alors possible d'obtenir la position, la vitesse et l'accélération de la trajectoire en fonction de  $t \in [0, T]$  avec

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_{i=0}^n B_i^n\left(\frac{t}{T}\right)P_i \\ \dot{q}(t) &= \frac{n}{T} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}\left(\frac{t}{T}\right)(P_{i+1} - P_i) \\ \ddot{q}(t) &= \frac{n(n-1)}{T^2} \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}\left(\frac{t}{T}\right)(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Une propriété intéressante de ce type de courbe est qu'il est facile d'imposer des conditions au début et à la fin de la trajectoire. En effet, à partir de l'équation (2.25) il est possible d'observer que, lorsque  $s = 0$ , tous les polynômes de Bernstein sont nuls sauf celui où  $i = 0$  qui vaut 1, alors

$$q(0) = P_0 \quad \text{et} \quad \dot{q}(0) = \frac{n}{T}(P_1 - P_0). \quad (2.34)$$

Lorsque  $s = 1$ , tous les polynômes de Bernstein sont nuls sauf celui où  $i = n$  qui vaut 1, alors

$$q(T) = P_n \quad \text{et} \quad \dot{q}(T) = \frac{n}{T}(P_n - P_{n-1}). \quad (2.35)$$

Bien que les points de contrôle ne soient que des valeurs scalaires et n'ont pas de composante de temps, il est possible de les représenter graphiquement en fonction du temps. La figure 2.6 montre l'exemple d'une courbe à six points de contrôle.

À partir de la figure 2.6, il peut être observé que la trajectoire passe par le premier point de contrôle et que la pente de la trajectoire au début (la vitesse initiale) est la pente de la droite rejoignant les deux premiers points de contrôle (montrés par des  $\times$  rouges). En



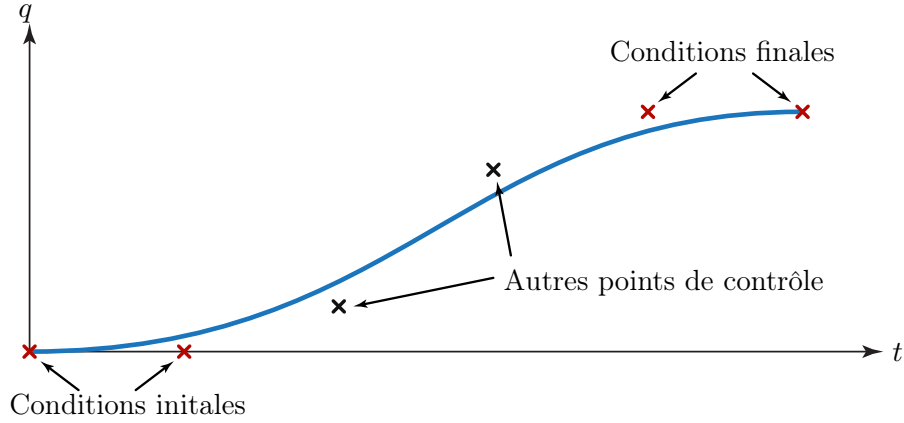


FIGURE 2.6 – Une trajectoire de type courbe de Bézier avec six points de contrôle.

effet, cela correspond aux équations des conditions initiales (2.34). En outre, la trajectoire termine au dernier point de contrôle et la pente de la droite rejoignant les deux derniers points (encore deux  $\times$  rouges) détermine la vitesse finale. Dans ce cas, les deux premiers points de contrôle sont déterminés par les conditions initiales en position et en vitesse, les deux derniers sont déterminés par les conditions finales et les deux autres sont libres. Il peut également être observé que la courbe ne passe que par le premier et le dernier point de contrôle, contrairement aux courbes avec des noeuds.

Le vecteur des paramètres qui, avec le temps total de la trajectoire, permet le calcul de la trajectoire d'une articulation est alors

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} q_0 & \dot{q}_0 & P_2 & \dots & P_{n-2} & q_f & \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

et le vecteur nécessaire pour pleinement définir la trajectoire articulaire d'un manipulateur complet avec cette paramétrisation est

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_N & T \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Série de Fourier

Il est possible que, pour certaines applications, des mouvements périodiques puissent augmenter la performance du manipulateur. Par exemple, lorsque la charge à soulever est très lourde, plusieurs oscillations pourraient permettre au manipulateur d'effectuer une tâche qui ne serait pas autrement possible.

Dans ce travail, la courbe périodique utilisée est la série de Fourier. Celle-ci peut être définie par

$$q(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n [a_i \cos(i\omega_0 t) + b_i \sin(i\omega_0 t)] \quad (2.38)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des coefficients,  $n$  est le degré de la série et  $\omega_0$  est la fréquence de la première harmonique de la fonction. La vitesse et l'accélération peuvent également être obtenues avec

$$\dot{q}(t) = \omega_0 \sum_{i=1}^n i [-a_i \sin(i\omega_0 t) + b_i \cos(i\omega_0 t)] \quad (2.39)$$

et

$$\ddot{q}(t) = -\omega_0^2 \sum_{i=1}^n i^2 [a_i \cos(i\omega_0 t) + b_i \sin(i\omega_0 t)]. \quad (2.40)$$

Afin de définir la trajectoire d'une articulation à l'aide de cette fonction,  $2n + 1$  coefficients doivent être déterminés. Le vecteur de ces coefficients est

$$\mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad b_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_n]^T. \quad (2.41)$$

Comme pour les autres courbes, la première étape est d'imposer les conditions aux limites. Pour cela, il est nécessaire de résoudre le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & \dots & 0 & n\omega_0 \\ 1 & c(\omega_0 T) & s(\omega_0 T) & \dots & c(n\omega_0 T) & s(n\omega_0 T) \\ 0 & -\omega_0 s(\omega_0 T) & \omega_0 c(\omega_0 T) & \dots & -n\omega_0 s(n\omega_0 T) & n\omega_0 c(n\omega_0 T) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

où  $c(\cdot) \rightarrow \cos(\cdot)$  et  $s(\cdot) \rightarrow \sin(\cdot)$ . Puisque ce système est généralement sous déterminé, des équations additionnelles sont requises. Ce travail explore deux façons d'établir une trajectoire articulaire à partir de séries de Fourier : imposer les coefficients directement et faire passer la trajectoire par un certain nombre de noeuds.

### Série de Fourier avec variation des coefficients (FC)

La façon la plus facile de déterminer les coefficients manquants est de les fixer directement. Similairement aux polynômes avec variation des coefficients, pour les séries de Fourier, les coefficients du centre peuvent être fixés directement alors que les deux premiers et les deux derniers sont déterminés à partir des conditions initiales et finales définies par la tâche.

Dans ce cas, le système de l'équation (2.42) est réduit à

$$A_{\text{coeff}} \mathbf{x}_{\text{coeff}} = \mathbf{b}_{\text{coeff}} \quad (2.43)$$

où

$$A_{\text{coeff}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n\omega_0 \\ 1 & c(\omega_0 T) & c(n\omega_0 T) & s(n\omega_0 T) \\ 0 & -\omega_0 s(\omega_0 T) & -n\omega_0 s(n\omega_0 T) & n\omega_0 c(n\omega_0 T) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{x}_{\text{coeff}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

et

$$\mathbf{b}_{\text{coeff}} = \begin{bmatrix} q_0 - \sum_{i=2}^{n-1} a_i \\ \dot{q}_0 - \sum_{i=1}^{n-1} i\omega_0 b_i \\ q_f - b_1 s(\omega_0 T) - \sum_{i=2}^{n-1} [a_i c(i\omega_0 T) + b_i s(i\omega_0 T)] \\ \dot{q}_f - \omega_0 b_1 c(\omega_0 T) - \sum_{i=2}^{n-1} i\omega_0 [-a_i s(i\omega_0 T) + b_i c(i\omega_0 T)] \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

En utilisant cette paramétrisation, les valeurs nécessaires pour définir la trajectoire d'une articulation sont

$$\mathbf{z}_j = [q_0 \quad \dot{q}_0 \quad b_1 \quad a_2 \quad \dots \quad b_{n-1} \quad q_f \quad \dot{q}_f] \quad (2.47)$$

et les valeurs nécessaires pour définir la trajectoire de toutes les articulations sont

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_N \quad \omega_0 \quad T]. \quad (2.48)$$

Il est à remarquer que contrairement à la spline et aux fonctions polynomiales, la valeur de  $\omega_0$  est nécessaire en plus de la valeur du temps total  $T$  pour la série de Fourier.

### Série de Fourier avec noeuds (FN)

Comme pour les fonctions polynomiales, il est également possible de faire passer la série de Fourier par des noeuds. Pour ce faire, le système de l'équation (2.42) est repris et des équations de contrainte supplémentaires sont ajoutées. En effet, afin de déterminer les  $2n + 1$  coefficients le système à résoudre pour définir une trajectoire est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & \dots & 0 & n\omega_0 \\ 1 & c(\omega_0 \Delta T) & s(\omega_0 \Delta T) & \dots & c(n\omega_0 \Delta T) & s(n\omega_0 \Delta T) \\ & & & \vdots & & \\ 1 & c(\omega_0 N \Delta T) & s(\omega_0 N \Delta T) & \dots & c(n\omega_0 N \Delta T) & s(n\omega_0 N \Delta T) \\ 1 & c(\omega_0 T) & s(\omega_0 T) & \dots & c(n\omega_0 T) & s(n\omega_0 T) \\ 0 & -\omega_0 s(\omega_0 T) & \omega_0 c(\omega_0 T) & \dots & -n\omega_0 s(n\omega_0 T) & n\omega_0 c(n\omega_0 T) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

où  $N = 2n - 3$  est le nombre de noeuds nécessaires pour pleinement contraindre la trajectoire d'une articulation,  $q_i$  avec  $i = 1, \dots, N$  est la position de l'articulation au noeud  $i$  et  $\Delta T = \frac{T}{N+1}$

est le temps entre chaque noeud. Les valeurs nécessaires pour définir la trajectoire d'une articulation sont alors

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} q_0 & \dot{q}_0 & q_1 & \dots & q_N & q_f & \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

et les valeurs nécessaires pour définir la trajectoire de toutes les articulations sont

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \dots & \mathbf{z}_N & \omega_0 & T \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

## 2.3 Méthodes employant la dynamique directe

Jusqu'à présent, la trajectoire articulaire en fonction du temps à été générée directement. À partir de cette trajectoire, la fonction de l'effort articulaire nécessaire pour l'exécuter peut être calculée en employant la dynamique inverse aux temps désirés. Cependant, il est également possible de générer la fonction de l'effort articulaire en fonction du temps et de calculer la trajectoire en employant la dynamique directe. Bien que ces méthodes ne soient pas utilisées dans ce travail, la présente section en explique les principes de base.

Comme il a été expliqué au chapitre 1, les méthodes de génération de trajectoire employant la dynamique directe sont utilisées dans les problèmes d'optimisation de contrôle optimal. La formulation du problème de la commande optimale est une généralisation des équations d'Hamilton du calcul des variations et s'applique aux problèmes d'optimisation qui, pour les applications étudiées dans ce travail, prennent la forme (Kirk, 1998)

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\tau}(t)} \quad & h(\mathbf{x}(T), T) + \int_0^T g(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t), t) dt \\ \text{s.t.} \quad & \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau}(t) \succeq \boldsymbol{\tau}_{\min} \\ \boldsymbol{\tau}(t) \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max} \end{array} \right\} \forall t \in [0, T] \\ & \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \end{aligned} \quad (2.52)$$

où  $\mathbf{x}(t)$  est l'état cinématique du manipulateur en fonction du temps,  $\mathbf{x}_T$  est l'état cinématique requis à la fin de la trajectoire,  $h$  est une fonction scalaire des critères sur l'état final du manipulateur et  $g$  est une fonction scalaire qui varie en fonction du temps.

### 2.3.1 Bang-bang

Pour l'application de soulever une charge lourde présentée à la section 1.2, le problème de commande optimale, avec le temps total de la trajectoire comme fonction objectif, prend la forme de

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\tau}(t)} \quad & \int_0^T dt \\ \text{s.t.} \quad & \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau}(t) \succeq \boldsymbol{\tau}_{\min} \\ \boldsymbol{\tau}(t) \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max} \end{array} \right\} \forall t \in [0, T] \cdot \\ & \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \end{aligned} \quad (2.53)$$

Respecter les deux premières contraintes sur l'effort articulaire est relativement facile. Par contre, la dernière contrainte requiert la solution d'un problème aux limites multidimensionnelles pour un système de  $2d$  équations différentielles non-linéaires couplées où  $d$  est le nombre de degrés de liberté du manipulateur. Ces équations différentielles correspondent à la dynamique directe du manipulateur. Ce problème aux limites est généralement très difficile à résoudre, même numériquement.

Cependant, il peut être démontré par le biais du principe du maximum de Pontryagin que la commande optimale du problème du temps minimal doit être de la forme Bang-bang (Kirk, 1998). Une commande de type Bang-bang pour les trajectoires où aucun trajet n'est prédéfini est une commande où toutes les articulations fournissent un effort maximal ou minimal en tout temps<sup>3</sup>.

La forme de la fonction de la commande peut alors être contrainte à être de la forme Bang-bang. Le problème aux limites nécessaire pour satisfaire à la dernière contrainte de l'optimisation (2.53) peut alors être réduit à trouver les temps auxquels la commande change d'une limite à l'autre pour chaque articulation.

Il est important de noter que le principe du maximum de Pontryagin fournit une condition nécessaire mais non suffisante d'optimalité. Si une commande de type Bang-bang qui répond aux contraintes est trouvée, celle-ci n'est pas nécessairement globalement optimale pour le problème du temps minimal.

## 2.4 Comparaison des types de méthodes de génération de trajectoire

Les deux types de méthodes de génération de trajectoire présentés dans ce chapitre ont chacun des avantages et des inconvénients. Pour certains problèmes d'optimisation, l'effort articulaire n'est pas contraint. Par exemple, la détermination d'une trajectoire avec contraintes cinématiques pour maximiser la portée d'un objet lancé (section 1.3) n'impose que des contraintes cinématiques. Pour ce type de problème, il n'est pas question d'utiliser les méthodes de génération de trajectoire employant la dynamique directe. Pour les autres applications, les deux types de méthodes peuvent être employés. La présente section explique les avantages de chacun des types de méthodes.

### 2.4.1 Avantages des méthodes employant la dynamique directe

Bien que celles-ci ne soient pas utilisées dans ce travail, les méthodes employant la dynamique directe pour effectuer la génération de trajectoire présentent plusieurs avantages importants.

---

3. Si le trajet était prédéterminé, une commande Bang-bang aurait au moins une des articulations dont l'effort est maximal en tout temps.

Premièrement, avec ce type de méthode, il est plus facile d'imposer des contraintes sur l'effort articulaire à fournir par le manipulateur. En effet, puisque les efforts articulaires sont générés directement, il est relativement simple de générer des commandes qui respectent ces contraintes.

En outre, les méthodes de commande optimale, comme la méthode Bang-bang présentée à la section 2.3.1, ne génèrent que des fonctions de l'effort articulaire de la même forme que la solution globale. Ces méthodes ont donc le potentiel de générer des trajectoires optimales, ce qui n'est généralement pas le cas avec les méthodes de génération de trajectoire cinématiques. Il est à noter que, malgré cela, une solution trouvée avec ces méthodes n'est pas nécessairement la solution globale et n'est pas nécessairement meilleure qu'une solution obtenue avec les méthodes de cinématiques de la section 2.2.

#### **2.4.2 Avantages des méthodes de génération de trajectoire cinématique**

Les méthodes de génération de trajectoires cinématiques présentées à la section 2.2 présentent également de nombreux avantages. Premièrement, par le fait que la trajectoire cinématique est générée directement, il est généralement plus facile d'imposer des conditions cinématiques aux extrêmes de la trajectoire. En effet, à la section 2.2, il est expliqué comment imposer des conditions au début et à la fin de la trajectoire pour toutes les méthodes de génération de trajectoire cinématique étudiées dans ce travail.

Deuxièmement, puisque cette méthode se fie sur la dynamique inverse pour le calcul des efforts articulaires, celle-ci ne requiert aucune intégration numérique. En effet, pour des systèmes non-linéaires comme des manipulateurs robotiques, une intégration numérique serait généralement nécessaire pour effectuer la dynamique directe. Cette intégration numérique est généralement très coûteuse en terme de temps de calcul par rapport à la dynamique inverse.

Troisièmement, les méthodes présentées à la section 2.2 sont continues en position, en vitesse et en accélération. Cela a pour effet de produire des trajectoires lisses qui sont potentiellement plus adaptées à être reproduites par des manipulateurs réels.

Enfin, les méthodes de génération de trajectoire cinématique présentées dans ce travail n'ont besoin d'aucune information a priori sur la forme de la fonction objectif et les contraintes imposées (hormis les conditions au début et à la fin de la trajectoire). Il est alors facile d'adapter ces méthodes à plusieurs types de problèmes. Dans le cas des méthodes de contrôles optimal, la fonction objectif et les contraintes sont une partie intégrante de la méthode. Par exemple, la trajectoire de type Bang-bang est seulement adaptée au problème du temps minimal. Un changement de la fonction objectif ou des contraintes nécessite alors une différente forme de commande et il est alors nécessaire de redériver la forme de la commande nécessaire pour résoudre le problème d'optimisation.

Ce travail explore les méthodes de génération de trajectoire cinématique et écarte les méthodes de contrôle optimale pour ces raisons.

## Chapitre 3

# Soulever des charges lourdes

*"The saddest aspect of life right now is that science gathers knowledge faster than society gathers wisdom."*

— Isaac Asimov

### Résumé

Le chapitre actuel porte sur l'application de soulever une charge lourde. Ce chapitre débute avec une introduction de la tâche et une explication du problème d'optimisation à résoudre pour effectuer cette tâche à la section 3.1. La méthode utilisée pour résoudre le problème d'optimisation est présentée à la section 3.2. Deux analyses de la performance de cette méthode sont ensuite présentées aux sections 3.3 et 3.4. Par la suite, les résultats numériques sont validés expérimentalement à la section 3.5 à l'aide d'un prototype de manipulateur plan 2R. Enfin, ce chapitre se termine avec une courte discussion des résultats.



## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Définition d'une tâche

Dans le contexte de l'application de soulever une charge lourde, la tâche à effectuer peut être définie par un certain nombre de conditions aux limites du mouvement. Les conditions aux limites sont des contraintes d'égalité sur l'état cinématique<sup>1</sup> du manipulateur au début et à la fin de la trajectoire. Dans ce travail, les tâches à effectuer sont définies par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_i \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(T) &= \mathbf{q}_f \\ \dot{\mathbf{q}}(T) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $\mathbf{q}(t)$  et  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  sont, respectivement, la position et la vitesse articulaire en fonction du temps,  $T$  est le temps total de la trajectoire,  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_f$  sont, respectivement, la position articulaire du manipulateur au début et à la fin de la trajectoire (définis par la tâche) et  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul.

### 3.1.2 Tâches considérées

Afin d'avoir une évaluation représentative des capacités des trois manipulateurs étudiés, les deux ensembles d'expérimentations numériques sont effectués avec dix tâches prédéfinies pour chacun des trois manipulateurs. Comme il a été expliqué à la section 3.1.1, les tâches explorées dans le cadre de cette application sont définies par la configuration au début et à la fin du mouvement. Dans toutes les tâches, le mouvement débute et termine au repos.

Afin d'assurer une comparaison convenable des manipulateurs, les dix tâches sont les mêmes pour les trois manipulateurs. L'unique différence est que la première articulation est libre de bouger pendant la trajectoire pour les manipulateurs 3R et 6R, alors que celle-ci est figée pour le manipulateur 2R. Cela est également le cas du poignet qui n'est libre que pour le manipulateur 6R. Cependant les configurations initiale et finale des six articulations sont identiques pour les trois manipulateurs. Cela permet d'évaluer l'effet de la première articulation et du poignet de façon contrôlée.

Le tableau 3.1 résume les tâches étudiées. Dans ce tableau, la position initiale et la position finale de la deuxième et de la troisième articulation sont listées. Les autres articulations démarrent et terminent le mouvement à zéro et la vitesse initiale et finale de toutes les articulations est nulle. Le fait d'imposer la position de départ et de fin des articulations de la base et du poignet peut limiter les gains que ces articulations pourraient apporter à la capacité de soulever des charges lourdes. Par contre, ce choix est fait pour permettre une comparaison entre les trois manipulateurs la plus équitable possible. Si la position n'était pas imposée pour ces articulations, la nature de la tâche serait partiellement altérée et donc potentiellement plus

---

1. L'état cinématique d'un manipulateur inclut la position articulaire et la vitesse articulaire.

facile dans certains cas. Cela est particulièrement le cas pour les articulations du poignet, car celles-ci peuvent influencer la composante  $z$  de la position de l'organe terminal.

TABLE 3.1 – Les dix tâches à effectuer par les manipulateurs lors des expérimentations numériques.

Tâche	$\mathbf{q}_i$	$\mathbf{q}_f$
(T1)	$[-90^\circ, 0^\circ]^T$	$[35^\circ, -30^\circ]^T$
(T2)	$[-90^\circ, 0^\circ]^T$	$[70^\circ, 30^\circ]^T$
(T3)	$[-70^\circ, 0^\circ]^T$	$[-215^\circ, 30^\circ]^T$
(T4)	$[-70^\circ, 0^\circ]^T$	$[35^\circ, -30^\circ]^T$
(T5)	$[-70^\circ, 0^\circ]^T$	$[-250^\circ, -30^\circ]^T$
(T6)	$[-70^\circ, 0^\circ]^T$	$[70^\circ, 30^\circ]^T$
(T7)	$[-40^\circ, -70^\circ]^T$	$[-215^\circ, 30^\circ]^T$
(T8)	$[-40^\circ, -70^\circ]^T$	$[35^\circ, -30^\circ]^T$
(T9)	$[-40^\circ, -70^\circ]^T$	$[-250^\circ, -30^\circ]^T$
(T10)	$[-40^\circ, -70^\circ]^T$	$[70^\circ, 30^\circ]^T$

La figure 3.1 montre une illustration simplifiée des dix tâches.

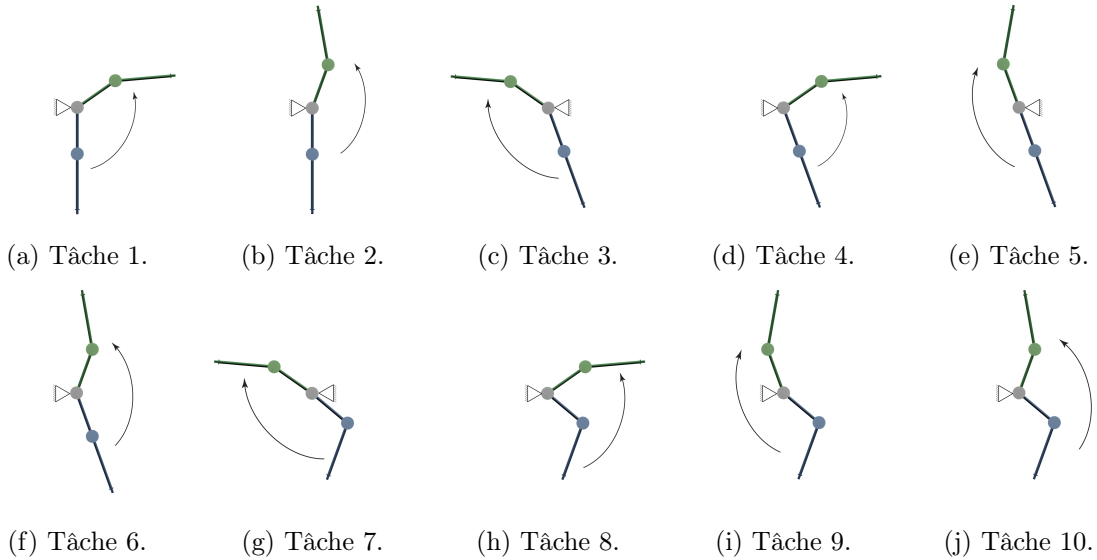


FIGURE 3.1 – Les dix tâches à accomplir avec le manipulateur 2R. La flèche indique le sens du mouvement de la position de départ vers la position de fin.

### 3.1.3 Formulation du problème d'optimisation

Comme il a été expliqué à la section 1.2, certains manipulateurs sont munis d'actionneurs relativement faibles. Pour ces manipulateurs, effectuer une tâche avec une charge lourde peut s'avérer difficile.

Dans ce cas, trouver une trajectoire qui permet au manipulateur d'effectuer la tâche est l'objectif principal et peut être représenté par un problème de satisfaction de contraintes. L'op-

timisation d'une fonction objectif peut alors être considérée comme une tâche secondaire. Le problème d'optimisation peut alors être écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{q}(t)} T \\
& \text{s.c.} \quad \mathbf{q}_{\min} \preceq \mathbf{q}(t) \preceq \mathbf{q}_{\max}, \quad \forall t \in [0, T] \\
& \quad \dot{\mathbf{q}}_{\min} \preceq \dot{\mathbf{q}}(t) \preceq \dot{\mathbf{q}}_{\max}, \quad \forall t \in [0, T] \\
& \quad \boldsymbol{\tau}_{\min} \preceq \boldsymbol{\tau}(t) \preceq \boldsymbol{\tau}_{\max}, \quad \forall t \in [0, T] \\
& \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_i \\
& \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \\
& \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_f \\
& \quad \dot{\mathbf{q}}(T) = \mathbf{0} \\
& \quad T > 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où le symbole  $\preceq$  indique une inégalité s'appliquant sur chaque élément des deux vecteurs,  $\boldsymbol{\tau}(t)$  est l'effort articulaire en fonction du temps,  $\mathbf{q}_{\min}$  et  $\mathbf{q}_{\max}$  sont les limites inférieures et supérieures de la position articulaire,  $\dot{\mathbf{q}}_{\min}$  et  $\dot{\mathbf{q}}_{\max}$  sont les limites inférieures et supérieures de la vitesse articulaire et  $\boldsymbol{\tau}_{\min}$  et  $\boldsymbol{\tau}_{\max}$  sont les limites inférieures et supérieures de l'effort articulaire.

Les trois premières contraintes de l'équation (3.2) représentent les contraintes à respecter tout au long de la trajectoire, les quatre prochaines sont les conditions aux limites de la trajectoire selon la définition de la tâche et la dernière contrainte empêche les voyages dans le temps.

Puisque l'objectif principal de cette thèse est d'augmenter les capacités des manipulateurs, l'optimisation de la fonction objectif peut être considérée moins importante que le respect des contraintes. Pour cette raison, le choix de la fonction objectif à optimiser est moins important. Une fonction objectif souvent employée est le temps total de la trajectoire. Effectivement, dans les applications industrielles, le temps d'exécution d'une tâche a un impact important sur la productivité. Pour les raisons mentionnées, le temps d'exécution de la tâche  $T$  est utilisé comme fonction objectif dans ce chapitre. Cependant, il est à noter que les méthodes étudiées dans ce travail peuvent accommoder plusieurs types de fonction objectif.

Puisque les équations du mouvement des manipulateurs sont généralement non-linéaires et fortement couplées, satisfaire la troisième contrainte du problème de l'équation (3.2) dans le domaine continu est impossible en pratique, sauf pour des mécanismes triviaux. Par contre, pour une valeur de temps donnée, celle-ci est relativement facile à vérifier. Ainsi, la trajectoire et les trois premières contraintes peuvent être discrétisées en  $N$  points. Enfin, afin que toutes les contraintes d'inégalité aient le même poids, il est possible de les normaliser et d'obtenir des

contraintes adimensionnelles. Le problème d'optimisation peut alors être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{q}(t_i)} t_N \\
& \text{s.c.} \quad \frac{q_{j,\min} - q_j(t_i)}{|q_{j,\min}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{q_j(t_i) - q_{j,\max}}{|q_{j,\max}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\dot{q}_{j,\min} - \dot{q}_j(t_i)}{|\dot{q}_{j,\min}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\dot{q}_j(t_i) - \dot{q}_{j,\max}}{|\dot{q}_{j,\max}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\tau_{j,\min} - \tau_j(t_i)}{|\tau_{j,\min}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\tau_j(t_i) - \tau_{j,\max}}{|\tau_{j,\max}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_i \\
& \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \\
& \mathbf{q}(t_N) = \mathbf{q}_f \\
& \dot{\mathbf{q}}(t_N) = \mathbf{0} \\
& t_N > 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où  $q_j$ ,  $\dot{q}_j$  et  $\tau_j$  sont, respectivement, la position, la vitesse et l'effort de la  $j^e$  articulation,  $t_i$  est le temps au  $i^e$  point de la trajectoire et  $d$  est le nombre de degrés de liberté du manipulateur.

Cette modification du problème d'optimisation permet une interprétation plus facile des contraintes. La valeur du côté gauche des six premières contraintes indique la proportion du dépassement de la limite. Par exemple, une valeur de 0,25 pour une contrainte d'effort indique que la trajectoire exige un effort qui dépasse les capacités de l'articulation de 25% au point testé. Inversement, une valeur de -0,25 indique que l'effort requis est de 25% en dessous de la limite articulaire.

## 3.2 Méthode d'optimisation

### 3.2.1 Aperçu

Un aperçu de la méthode employée pour résoudre le problème d'optimisation de l'équation (3.3) est montré à la figure 3.2. Les deux premières étapes : la génération de l'estimé initial et le calcul de la trajectoire sont expliquées à la section 3.2.2 et les autres étapes sont expliquées brièvement à la section 3.2.3.

### 3.2.2 Génération de trajectoire

L'espace de recherche pour l'optimisation est prescrit par la méthode de génération de trajectoire utilisée. Les méthodes utilisées dans ce travail sont les méthodes de génération de

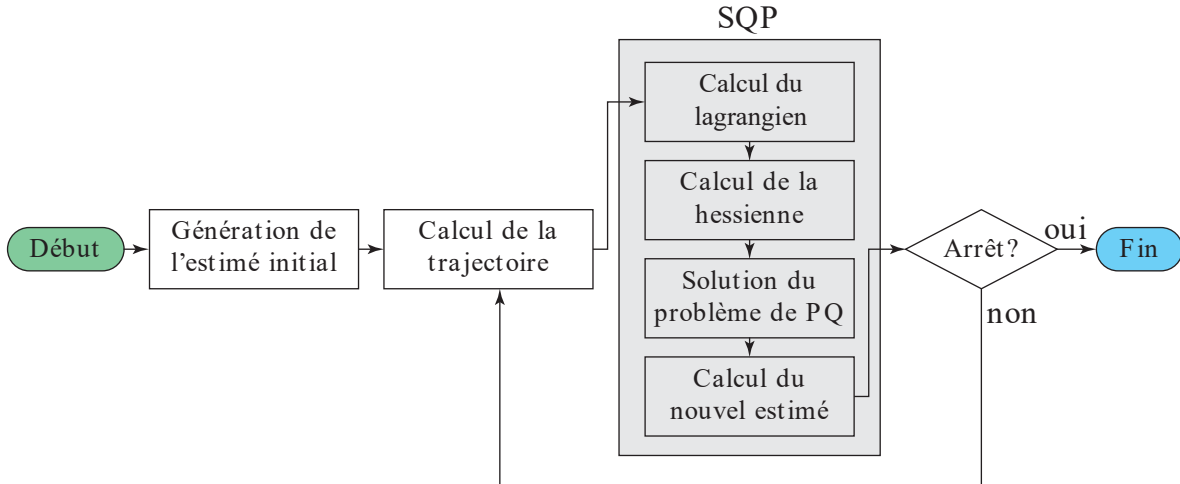


FIGURE 3.2 – Aperçu de la méthode d’optimisation employée.

trajectoire cinématique définies à la section 2.2. Les six méthodes de génération de trajectoire cinématiques sont utilisées dans ce chapitre : les splines cubiques (SP), les polynômes avec variation des coefficients (PC), les polynômes avec noeuds (PN), les courbes de Bézier (BE), les séries de Fourier avec variation des coefficients (FC) et les séries de Fourier avec noeuds (FN).

Chacune de ces méthodes est paramétrée par le degré de la courbe générée  $n$ . Comme il a été expliqué à la section 2.2, la signification de  $n$  diffère en fonction de la méthode utilisée. Pour la méthode SP,  $n$  est le nombre de segments. Pour les méthodes PC, PN et BE,  $n$  est le degré du polynôme. Enfin, pour les méthodes FP et FC,  $n$  est le degré de la série de Fourier. La valeur de  $n$  détermine le nombre de paramètres libres sur lesquels l’optimisation peut jouer, mais le nombre de paramètres libres pour une valeur de  $n$  donnée est différent pour chaque méthode de génération de trajectoire. Par exemple, une trajectoire SP avec deux segments ( $n = 2$ ) a  $d + 1$  paramètres libres (encore,  $d$  est le nombre de degrés de liberté du manipulateur). Pour les fonctions polynomiales, des polynômes de degré quatre ( $n = 4$ ) sont nécessaires pour obtenir le même nombre de paramètres libres. Le tableau 3.2 présente les méthodes de génération de trajectoire, la formule qui détermine le nombre de paramètres libres et les valeurs de  $n$  utilisées dans ce travail. Les valeurs de  $n$  sont choisies pour que le nombre de paramètres libres soit à peu près le même pour chaque méthode de génération de trajectoire afin de permettre une comparaison juste.

Afin d’effectuer l’optimisation, un point de départ, nommé l’estimé initial, doit être généré. Dans ce travail, deux méthodes de génération de l’estimé initial sont étudiées : la méthode aléatoire et la méthode de l’élite.

La méthode aléatoire est caractérisée par le fait que tous les éléments du vecteur d’optimisation

TABLE 3.2 – Liste des types de trajectoires évalués pour l’application de soulever une charge lourde.

Code	Trajectoire	Paramètres	Valeurs de $n$	Paramètres totaux
SP	Spline cubique	$d(n - 1) + 1$	2 à 10	$(d + 1)$ à $(9d + 1)$
PC	Polynôme (coefficients)	$d(n - 3) + 1$	4 à 12	$(d + 1)$ à $(9d + 1)$
PN	Polynôme (noeuds)	$d(n - 3) + 1$	4 à 12	$(d + 1)$ à $(9d + 1)$
BE	Bézier	$d(n - 3) + 1$	4 à 12	$(d + 1)$ à $(9d + 1)$
FC	Fourier (coefficients)	$d(2n - 3) + 2$	2 à 6	$(d + 2)$ à $(9d + 2)$
FN	Fourier (noeuds)	$d(2n - 3) + 2$	2 à 6	$(d + 2)$ à $(9d + 2)$

pour l’estimé initial sont générés aléatoirement. Afin de restreindre les valeurs possibles, des limites inférieures et supérieures sont imposées. Pour les méthodes de génération de trajectoire avec noeuds ou points de contrôle (SP, PN, BE, FN), la position à chaque noeud ou point de contrôle est générée aléatoirement entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Pour les fonctions polynomiales avec variation des coefficients (PC), chaque coefficient est généré entre  $-100$  et  $100$ . Enfin, pour la série de Fourier avec variation des coefficients (FC), chaque coefficient est généré entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Dans tous les cas, le temps total de la trajectoire  $T$  utilisé dans l’estimé initial est généré entre 0, 1 et 1s. Pour les séries de Fourier (FC et FN), la valeur de  $\omega_0$  est générée entre 0, 1 et 1. Il est à noter que ces contraintes s’appliquent à la génération aléatoire de l’estimé initial et ne sont pas imposées pendant l’optimisation.

Pour sa part, la méthode de l’élite génère une population initiale avec la méthode aléatoire. Cependant, au lieu de lancer l’optimisation directement avec chaque individu, la méthode de l’élite évalue les individus de la population et démarre l’optimisation à partir du meilleur. Pour évaluer la qualité d’un individu, il ne suffit pas de prendre la fonction objectif. En effet, la fonction objectif, en l’absence des contraintes, ne donne que très peu d’information sur la faisabilité d’une trajectoire. Dans ce travail, le fait que les contraintes d’inégalités du problème d’optimisation de l’équation (3.3) soit normalisées est exploité pour faciliter l’évaluation des trajectoires dans la détermination de l’élite. Le maximum des valeurs du côté gauche des inégalités (six premières contraintes de l’équation (3.3)) est utilisé comme critère d’évaluation de la qualité de la trajectoire générée. Ce critère correspond à la faisabilité globale de la trajectoire par rapport aux contraintes imposées.

Enfin, le tableau 3.3 résume toutes les méthodes de génération de la trajectoire utilisées dans ce travail.

TABLE 3.3 – Liste des types de trajectoires évalués pour l’application de soulever une charge lourde.

Élément	Valeurs étudiées
Type de trajectoire	SP, PC, PN, BE, FC, FN
$n$	Variable (voir tableau 3.2)
Taille de population	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100

### 3.2.3 Méthode d'optimisation SQP

Les étapes contenues dans le rectangle gris de la figure 3.2 constituent les grandes lignes de la méthode d'optimisation quadratique successive ou « *Sequential Quadratic Programming* » (SQP) comme elle est implantée dans la bibliothèque libre « *nlopt* » de Johnson (2010). La méthode SQP est caractérisée par une approximation quadratique locale d'une fonction lagrangienne combinant la fonction objectif et les contraintes non-linéaires.

Bien que les détails de la méthode SQP ne soient pas l'objet de cette thèse, les principes généraux sont présentés ici. La méthode SQP utilisée dans cette bibliothèque est basée sur les travaux de Dieter Kraft : Kraft (1988) et Kraft (1994). Une explication plus complète est décrite dans le chapitre 18 du livre de Nocedal et Wright (2006). Ce livre représente d'ailleurs une excellente référence pour diverses méthodes d'optimisation numérique.

En premier lieu, le lagrangien de la fonction objectif et des contraintes non-linéaires est établi avec la forme

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur d'optimisation tel que défini par les méthodes de génération de trajectoire de la section 2.2,  $\boldsymbol{\lambda}$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  positifs,  $f(\mathbf{x})$  est la fonction objectif du problème d'optimisation et  $c_i(\mathbf{x})$  est la valeur du côté gauche de la  $i^{\text{e}}$  contrainte non-linéaire. Il est à noter que seules les six premières contraintes du problème d'optimisation de l'équation (3.3) sont incluses ici ; les contraintes d'égalités sont automatiquement respectées lors de la génération de la trajectoire et la contrainte sur le temps total de la trajectoire est imposée comme limite inférieure dans les paramètres de l'optimisation. Il y a alors  $m = 6dN$  contraintes non-linéaires où  $d$  est le nombre de degrés de liberté du manipulateur et  $N$  est le nombre de points de discrétisation de la trajectoire.

Cette fonction lagrangienne transforme alors le problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte. Au point optimal, la valeur du lagrangien est égale à la valeur de la fonction objectif, car toutes les contraintes sont respectées. Puisque les contraintes sont des contraintes d'inégalité, celles-ci ne sont pas toutes actives. Un multiplicateur de Lagrange nul est alors attribué aux contraintes qui ne sont pas actives et les autres contraintes sont dites actives et donc traitées comme des contraintes d'égalité.

Chaque itération de la méthode SQP est caractérisée par la solution d'un problème de programmation quadratique pour déterminer la direction de recherche de la prochaine itération. Ce problème d'optimisation prend la forme

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{r}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{r}^T H_k \mathbf{r} + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{r} \\ \text{s.c.} \quad & \nabla c_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{r} + c_i(\mathbf{x}_k) \leq 0, \quad i = 1..m \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur de la direction de recherche pour la prochaine itération,  $k$  est l'indice de

l'itération,  $H_k$  est la matrice hessienne du lagrangien par rapport au vecteur d'optimisation,  $\nabla f(\mathbf{x}_k)$  est le gradient par différence finie de la fonction objectif évalué au point actuel,  $\mathbf{x}_k$  est le point de recherche de l'itération actuelle,  $\nabla c_i(\mathbf{x}_k)$  est le gradient par différence finie des contraintes évalué au point actuel et  $c_i(\mathbf{x}_k)$  est la valeur des contraintes évaluées au point actuel.

La première étape de la méthode SQP est alors de calculer une approximation locale de la matrice hessienne du lagrangien. Cela peut être effectué à l'aide de n'importe quelle méthode quasi-Newton, mais la méthode utilisée est la méthode BFGS (Broyden, 1970; Fletcher, 1970; Goldfarb, 1970; Shanno, 1970).

La deuxième étape est ensuite de résoudre le problème quadratique de l'équation (3.5) pour déterminer la direction de la recherche pour la prochaine itération. Ce problème est résolu par une méthode dite « *active set* » où les contraintes non satisfaites sont successivement activées (transformées en contraintes d'égalité) jusqu'à ce que toutes les contraintes soient satisfaites. Ensuite ces méthodes convergent vers la solution au problème (3.5) à l'intérieur de ces contraintes actives. La méthode utilisée est basée sur les travaux de Tone (1983) et de Spellucci (1998).

Enfin, la solution du problème d'optimisation quadratique (3.5) est un vecteur  $\mathbf{r}_k$  qui représente la direction de recherche pour la prochaine itération de la méthode SQP. Spécifiquement, le vecteur d'optimisation pour la prochaine itération est

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{r}_k \quad (3.6)$$

où  $\alpha$  est un scalaire déterminant la grandeur du pas dans la direction  $\mathbf{r}_k$  et est déterminé de sorte à réduire la fonction objectif et de se rapprocher de la faisabilité par rapport aux contraintes, le cas échéant. La méthode utilisée est basée sur les travaux de Han (1977) et de Powell (1978).

### 3.3 Analyse 1 : évaluation des stratégies d'optimisation

#### 3.3.1 Méthodologie

Afin d'évaluer la capacité de résoudre le problème d'optimisation de l'équation (3.3), deux ensembles d'expérimentations numériques sont effectués. Le premier ensemble, étudié dans la présente section, vise à évaluer et à comparer tous les types de trajectoires exposées à la section 3.2.2. Le deuxième ensemble d'expérimentations numériques est de déterminer la charge maximale avec laquelle les manipulateurs sont capables d'effectuer les dix tâches de la section 3.1.2. Cette analyse sera présentée à la section 3.4.



## Indice de performance

Afin de comparer les différentes méthodes du tableau 3.3, il est utile d'établir un indice de performance général qui évalue la capacité d'une méthode à trouver une solution adéquate pour une tâche donnée. L'indice de performance proposé dans ce travail est une fonction de trois facteurs indiquant la performance selon différents critères de la forme

$$I = W_1 F_{\text{temps}} + W_2 F_{\text{moyen}} + W_3 F_{\text{meilleur}} \quad (3.7)$$

où  $W_i$  sont des poids,  $F_{\text{temps}}$  est le facteur indiquant la performance par rapport au temps de calcul nécessaire pour obtenir chaque succès,  $F_{\text{moyen}}$  est le facteur qui mesure la performance par rapport à la qualité moyenne de la solution et  $F_{\text{meilleur}}$  est le facteur qui mesure la performance par rapport à la meilleure solution obtenue.

Dans ce travail, les trois facteurs de performance  $F_{\text{temps}}$ ,  $F_{\text{moyen}}$  et  $F_{\text{meilleur}}$  sont normalisés façon à obtenir une valeur entre 0 et 1. Cette normalisation est faite pour assurer une cohérence entre les trois facteurs pour augmenter la pertinence de la somme pondérée de l'équation (3.7). Cette normalisation se fait avec la valeur de la performance ultime, c'est-à-dire la meilleure obtenue avec toutes les méthodes étudiées. Spécifiquement,

$$F_{\text{temps}} = \frac{\hat{T}_{\text{succes}}}{T_{\text{succes}}} \quad (3.8)$$

où  $T_{\text{succes}}$  est le temps moyen nécessaire pour obtenir une trajectoire faisable, c'est-à-dire une trajectoire qui respecte toutes les contraintes et  $\hat{T}_{\text{succes}}$  est la meilleure valeur de  $T_{\text{succes}}$  obtenue parmi toutes les méthodes. Ces deux derniers ne font pas référence à la fonction objectif, ce sont les temps nécessaires pour trouver trajectoire faisable et non une trajectoire optimale. Puisque, par définition,  $\hat{T}_{\text{succes}} > 0$ ,  $T_{\text{succes}} > 0$  et que  $\hat{T}_{\text{succes}} \leq T_{\text{succes}}$ , le facteur  $F_{\text{temps}}$  est nécessairement compris entre 0 et 1.

Similairement, les deux autres facteurs sont obtenus avec

$$F_{\text{moyen}} = \frac{\hat{f}}{f_{\text{moyen}}} \quad (3.9)$$

et

$$F_{\text{meilleur}} = \frac{\hat{f}}{f_{\text{meilleur}}} \quad (3.10)$$

où  $\hat{f}$  est la valeur objective de la meilleure trajectoire trouvée à l'aide de toutes les méthodes étudiées,  $f_{\text{moyen}}$  est la moyenne de la valeur objective obtenue avec la présente méthode et  $f_{\text{meilleur}}$  est la valeur objective de la meilleure trajectoire trouvée par la présente méthode. Il est à noter que seules les trajectoires qui satisfont aux contraintes sont considérées dans le calcul des valeurs de  $\hat{f}$ ,  $f_{\text{moyen}}$  et  $f_{\text{meilleur}}$ . Encore une fois, puisque  $\hat{f} \leq f_{\text{moyen}}$  et  $\hat{f} \leq f_{\text{meilleur}}$ , les facteurs  $F_{\text{moyen}}$  et  $F_{\text{meilleur}}$  sont également compris entre 0 et 1.

Ainsi, si les poids sont bien choisis, spécifiquement si

$$\sum_{i=1}^3 W_i = 1, \quad (3.11)$$

alors l'indice de performance est compris entre 0 et 1. Cette propriété de l'indice de performance rend son interprétation très facile. En effet, une valeur de 1 indique une méthode parfaite (comparativement aux autres méthodes testées) et une valeur de 0 indique une méthode incapable de trouver une trajectoire pour effectuer la tâche donnée.

Il est intéressant de noter qu'il est théoriquement possible, mais très improbable, qu'une méthode obtienne un indice de performance global de 1. Cela est improbable pour deux raisons. Premièrement, les méthodes qui fournissent les meilleurs trajectoires par rapport à la fonction objectif requièrent souvent plus de temps de calcul. Généralement, une seule méthode obtiendra une valeur de  $F_{\text{temps}} = 1$  et une seule méthode obtiendra une valeur de  $F_{\text{meilleur}} = 1$ . Il est rare qu'une méthode obtienne à la fois  $F_{\text{temps}} = 1$  et  $F_{\text{meilleur}} = 1$ . De plus, une valeur de  $F_{\text{moyen}} = 1$  est presque impossible, car cela nécessiterait que la méthode converge vers la meilleure solution possible à chaque fois.

### Procédure de l'analyse

Afin de calculer l'indice de performance de l'équation (3.7), il est nécessaire d'exécuter l'optimisation plusieurs fois. Dans ce travail, chacune des méthodes listées dans le tableau 3.3 est testée 100 fois. Les paramètres de tous les essais effectués dans cette analyse sont donnés au tableau 3.4. Cela correspond à un total de 322 000 optimisations pour chacun des trois manipulateurs ou 966 000 optimisations au total.

Trajectoire	$n$	$pop$	Tâches	Essais
SP	2 à 10	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	1 à 10	100
PC	4 à 12	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	1 à 10	100
PN	4 à 12	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	1 à 10	100
BE	4 à 12	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	1 à 10	100
FC	2 à 6	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	1 à 10	100
FN	2 à 6	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	1 à 10	100

TABLE 3.4 – Résumé des évaluations effectuées pour l'analyse 1.

Dans tous les tests de cette section, la masse ajoutée à l'organe terminal est de 15 kg. Cela représente trois fois la spécification de la charge utile de 5 kg du manipulateur UR5. Bien sûr, ce n'est pas une bonne comparaison puisque la charge utile que donne un fabricant est beaucoup plus conservatrice que ce qui est étudié ici. Cependant, cela donne une idée de l'importance de la masse utilisée dans cette analyse.

### 3.3.2 Résultats

Comme il a été résumé au tableau 3.4, il y a plusieurs dimensions de résultats à analyser en même temps. Afin de permettre l'exposition des résultats, ceux-ci sont présentés en deux parties. Premièrement, l'effet de la population utilisée pour déterminer l'estimé initial est évalué. Ensuite, les différentes méthodes de génération de trajectoire sont évaluées.

#### Évaluation de l'effet de la population

Afin d'évaluer l'effet de la population sur la performance de l'optimisation, la valeur de l'indice de performance  $I$  ainsi que les sous-facteurs,  $F_{\text{temps}}$ ,  $F_{\text{meilleur}}$  et  $F_{\text{moyen}}$ , sont présentés en fonction de la taille de la population à la figure 3.3. Cette figure montre les résultats sous la forme de diagrammes en boîte (Tukey, 1977) où 1380 résultats sont montrés pour chaque taille de population. Cela représente les six types de trajectoire, les neuf valeurs de  $n$  (ou cinq pour les séries de Fourier), les trois manipulateurs et les dix tâches.

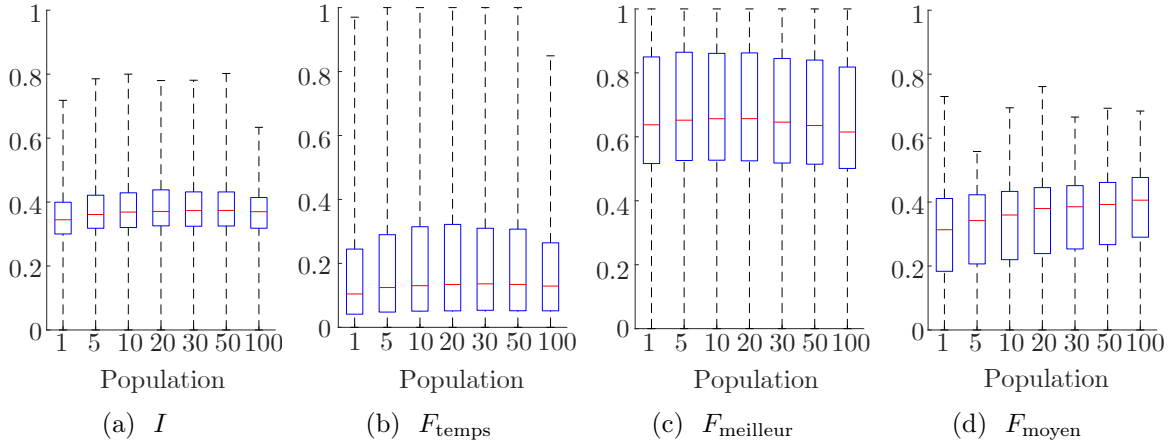


FIGURE 3.3 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population.

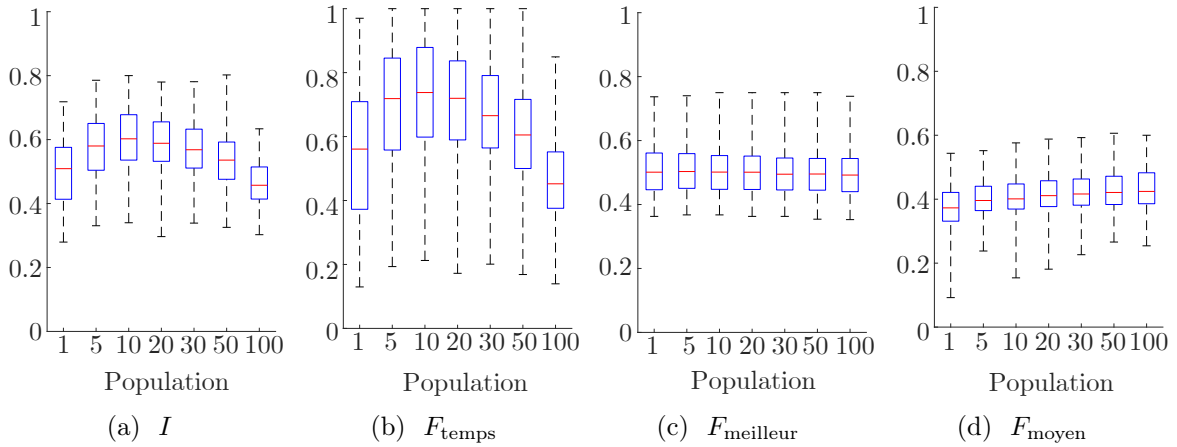


FIGURE 3.4 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population avec la meilleure valeur de  $n$ .

Puisque les données présentées sont très hétérogènes, les diagrammes présentés à la figure 3.3 sont peu concluants. Cependant, il est possible de filtrer les résultats pour permettre l'observation de l'effet de la taille de la population. Par exemple, la figure 3.4 montre une sélection des résultats où la meilleure valeur de  $n$  pour chaque type de trajectoire est choisie et les autres sont éliminées. Pour ce faire, pour une population et un type de trajectoire donnés, la moyenne de la valeur de  $I$  est calculée pour chacune des valeurs de  $n$ . La valeur de  $n$  qui produit la meilleure moyenne est sélectionnée pour cette taille de population. Chaque barre des diagrammes de cette figure contient 180 données. Cela représente les six types de trajectoire, les trois manipulateurs et les dix tâches.

Les résultats de la figure 3.4 montrent qu'une taille de population de dix essais semble produire les meilleurs résultats, particulièrement en ce qui concerne le temps de calcul. Pour cette raison, cette taille de population sera utilisée dans la prochaine section pour déterminer la performance de chaque type de trajectoire.

### Évaluation de l'effet du type de trajectoire

Comme il a été mentionné à la section précédente, seuls les résultats utilisant une population de dix individus sont considérés pour déterminer la performance de chaque type de trajectoire. Encore une fois, la valeur de l'indice de performance  $I$  ainsi que les sous-facteurs,  $F_{\text{temps}}$ ,  $F_{\text{meilleur}}$  et  $F_{\text{moyen}}$ , sont présentés à la figure 3.5, mais cette fois en fonction du type de trajectoire. Cette figure montre les résultats sous la forme de diagrammes en boîte où 270 ou 150 résultats sont montrés pour chaque type de trajectoire. Cela représente les neuf valeurs de  $n$  (ou cinq pour les séries de Fourier), les trois manipulateurs et les dix tâches.

Encore une fois, plusieurs dimensions de données sont présentées et les résultats sont peu concluants. La meilleure valeur de  $n$  pour chaque type de trajectoire est alors choisie et les autres sont éliminées. La figure 3.6 montre ces résultats filtrés. Chaque barre des diagrammes de cette figure contient 30 données. Cela représente les trois manipulateurs et les dix tâches.

Selon les résultats montrés dans cette figure, il est difficile de différencier les méthodes. Les méthodes BE et PC semblent être légèrement plus performantes que les autres pour la charge de 15kg soulevée lors de cette analyse, particulièrement par rapport au temps de calcul par succès.

## 3.4 Analyse 2 : détermination de la charge maximale

### 3.4.1 Méthodologie

Le second ensemble d'expérimentations numériques vise à déterminer dans quelle mesure il est possible d'augmenter la charge pour chacun des trois manipulateurs étudiés. Pour cette

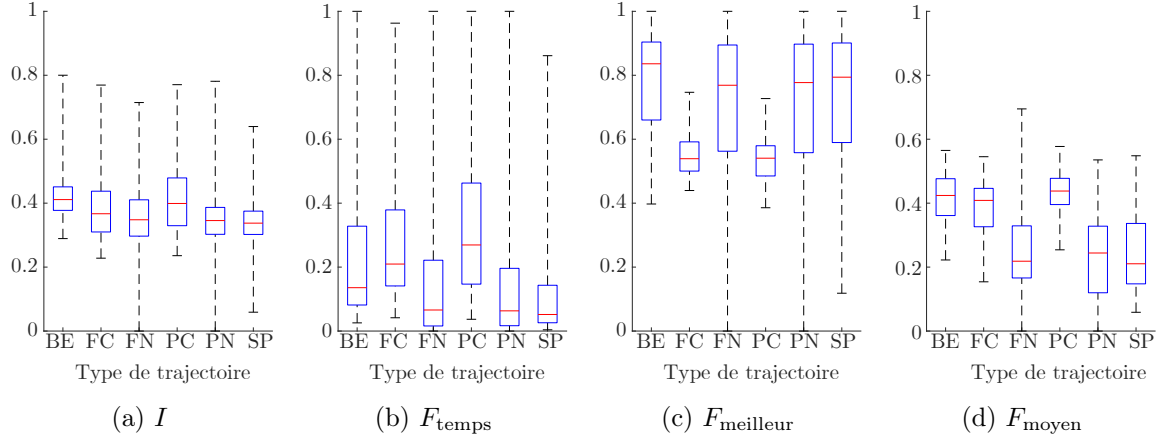


FIGURE 3.5 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajectoire.

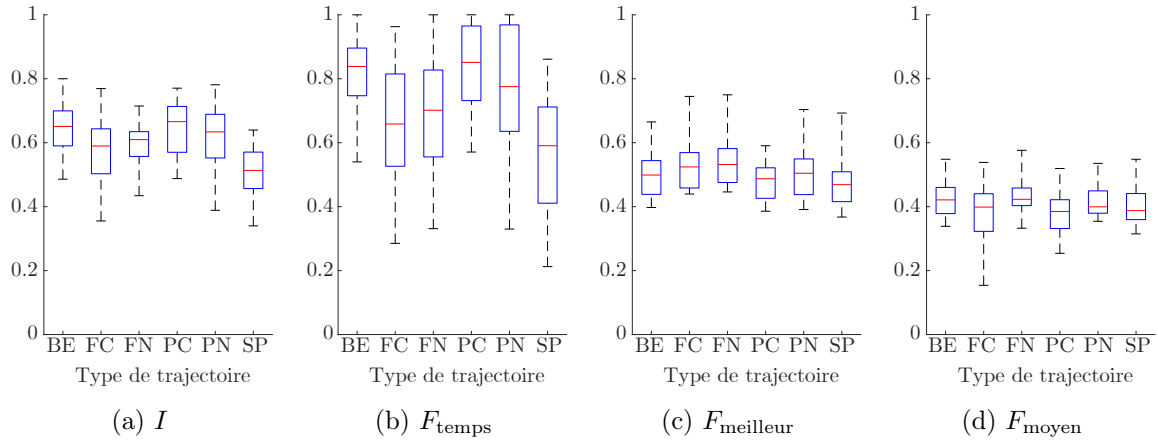


FIGURE 3.6 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajectoire avec la meilleure valeur de  $n$ .

analyse, déterminer l'indice de performance de la méthode n'est pas pertinent. Celui-ci et les facteurs  $F_{\text{temps}}$ ,  $F_{\text{meilleur}}$  et  $F_{\text{moyen}}$  ne sont alors pas calculés lors de cette analyse.

La procédure employée pour effectuer l'évaluation de la charge maximale est illustrée à la figure 3.7.

Il peut être remarqué à partir de la figure 3.7 que la procédure employée utilise la méthode de la bisection pour trouver la charge maximale pour une méthode et une tâche donnée. Puisque l'intervalle de recherche  $[M_{\min}, M_{\max}]$  est divisée par deux à chaque itération, la boucle principale (ligne 1) est exécutée

$$\log_2 \left( \frac{M_{\max, \text{init}} - M_{\min, \text{init}}}{\varepsilon} \right)$$

```

 $M_{\min} \leftarrow M_{\min,init};$ 
 $M_{\max} \leftarrow M_{\max,init};$ 
1 tant que  $M_{\max} - M_{\min} > \varepsilon$ , faire
     $M \leftarrow \frac{1}{2}(M_{\max} + M_{\min});$ 
2 pour  $k = 1..20$  faire
    exécuter l'optimisation avec  $M$ ;
    si l'optimisation est une réussite alors
         $M_{\min} \leftarrow M;$ 
        sortir de la boucle 2;
    sinon si  $k == 20$  alors
         $M_{\max} \leftarrow M;$ 
    la charge maximale pour la tâche actuelle est  $M_{\min};$ 

```

FIGURE 3.7 – Algorithme employé pour déterminer la charge maximale possible pour une tâche.

fois. Dans ce travail, les valeurs suivantes sont utilisées

$$\begin{aligned}
 M_{\min,init} &= 0 \\
 M_{\max,init} &= 100 \text{ kg} \\
 \varepsilon &= 0,1 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

alors la boucle principale de la ligne 1 est exécutée 10 fois pour obtenir une précision de  $\pm 50$  g.

La boucle interne de la ligne 2 est, pour sa part, exécutée entre 1 et 20 fois. Dans le pire des cas (si le manipulateur ne peut pas effectuer la tâche, même sans charge), un total de 200 optimisations sont nécessaires pour compléter l'algorithme. Cependant, en pratique, près de 134 optimisations sont nécessaires en moyenne, car la boucle interne de l'algorithme de la figure 3.7 est exécutée bien moins de 20 fois lorsqu'une trajectoire satisfaisante est trouvée. L'algorithme est alors répété pour chaque tâche, pour chaque manipulateur, pour chaque type de trajectoire, pour chaque valeur de  $n$  et pour chaque taille de population. L'algorithme est alors effectué 9660 fois qui correspond à près de 1 300 000 optimisations.

L'utilisation d'une méthode de recherche comme la méthode de la bisection est seulement valide si l'hypothèse suivante est vraie : s'il est impossible d'effectuer une tâche avec une charge de masse  $M$ , il n'existe aucune charge de masse supérieure avec laquelle il est possible d'effectuer la tâche. Cette hypothèse serait difficile à prouver formellement, mais il est raisonnable de conjecturer qu'elle est vraie.

Enfin, la masse  $M$  utilisée dans chacun de ces tests est considérée comme une masse ponctuelle, donc le tenseur d'inertie est nul.

### 3.4.2 Résultats

Similairement aux résultats de l'analyse 1, beaucoup de résultats doivent être analysés en même temps. Pour permettre la compréhension de ces résultats, ceux-ci sont présentés en trois parties. Premièrement, l'effet de la taille de la population est évalué. Ensuite, les différentes méthodes de génération de trajectoire sont évaluées. Enfin, la performance avec chaque manipulateur est comparée pour déterminer si la charge maximale est différente pour les trois manipulateurs.

#### Évaluation de l'effet de la population

La charge maximale obtenue et le temps nécessaire pour la trouver sont exposés en fonction de la taille de la population. Comme à la section 3.3.2, ces résultats sont présentés sous la forme de diagrammes en boîte à la figure 3.8. Dans cette figure, 1380 résultats sont montrés pour chaque taille de population. Cela représente les six types de trajectoire, les neuf valeurs de  $n$  (ou cinq pour les séries de Fourier), les trois manipulateurs et les dix tâches.

Comme à la section 3.3, la meilleure valeur de  $n$  pour chaque type de trajectoire est choisie et les autres sont éliminées. Dans ce cas, la valeur de  $n$  qui produit la meilleure masse moyenne est sélectionnée pour chaque type de trajectoire. La figure 3.9 montre ces résultats filtrés où 180 résultats sont présentés pour chaque taille de population. Cela correspond aux six types de trajectoire, aux trois manipulateurs et aux dix tâches.

Selon les résultats montrés à la figure 3.9, il est possible de voir que, malgré le filtrage, il y a peu de différence de performance parmi les différentes tailles de population. Cela peut être attendu, car la charge maximale ne devrait pas changer en fonction de l'estimé initial puisque 20 essais sont permis à chaque itération. Il est à noter qu'une taille de population inférieure à 10 semble performer légèrement moins bien en moyenne.

#### Évaluation de l'effet du type de trajectoire

L'évaluation de la masse maximale en fonction du type de trajectoire peut être plus intéressante, car chaque type de trajectoire permet une différente liberté de mouvement. Or, la figure 3.10 montre la masse maximale et le temps de calcul en fonction du type de trajectoire sous forme de diagramme en boîte. Puisque la taille de la population ne semble pas avoir d'effet majeur, une taille de 10 est utilisée, car celle-ci est utilisée lors l'analyse 1 de la section 3.3.2.

À partir de la figure 3.10, il peut être observé que les courbes de Bézier semblent permettre de soulever une charge plus grande que les autres types de trajectoire. Pour vérifier ce résultat, la figure 3.11 montre les résultats avec la meilleure valeur de  $n$  pour chaque type de trajectoire. Encore une fois, la meilleure valeur de  $n$  est celle qui fournit la meilleure médiane de la charge maximale. La supériorité des courbes de Bézier est ainsi confirmée pour cette analyse.

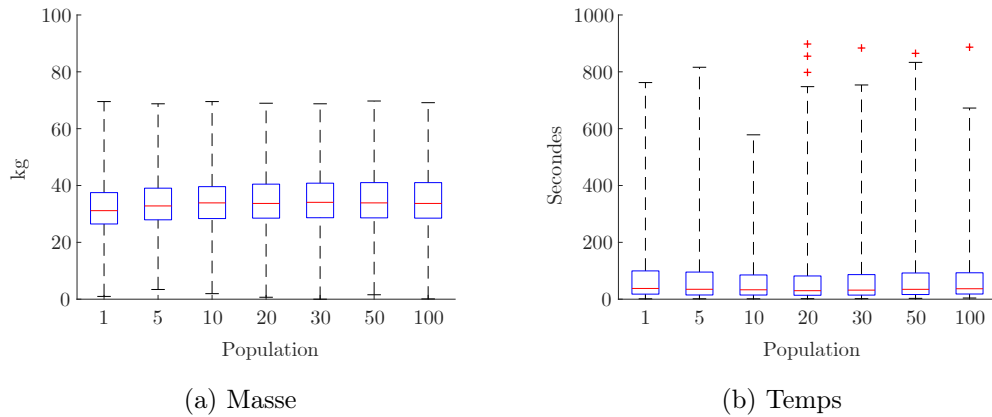


FIGURE 3.8 – Diagrammes en boîte des résultats de l’analyse 2 en fonction de la taille de la population.

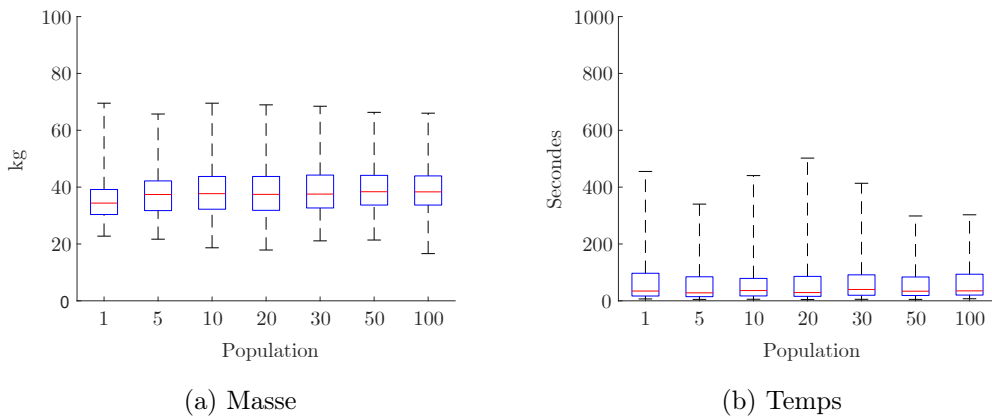


FIGURE 3.9 – Diagrammes en boîte des résultats de l’analyse 2 en fonction de la taille de la population avec la meilleure valeur de  $n$ .

Cependant, il est à noter que le temps de calcul est également plus long pour les courbes de Bézier que pour les autres types de trajectoire.

### Évaluation des trois manipulateurs

Une autre information potentiellement intéressante est de connaître la différence de performance obtenue entre les trois manipulateurs. À cet effet, comme pour les autres résultats de ce chapitre, la figure 3.12 montre le diagramme en boîte de la masse et du temps de calcul en fonction du manipulateur et la figure 3.13 montre les résultats filtrés en ne considérant que la meilleure valeur de  $n$  pour chaque type de trajectoire.

Dans la figure 3.12, 460 résultats sont présentés pour chaque manipulateur qui correspond aux dix tâches, aux six types de trajectoire et aux neuf valeurs  $n$  (ou cinq pour les séries de Fourier). Dans la figure 3.13, 60 résultats sont présentés pour chaque manipulateur, ce qui correspond aux dix tâches et aux six types de trajectoire. Ces deux figures montrent que



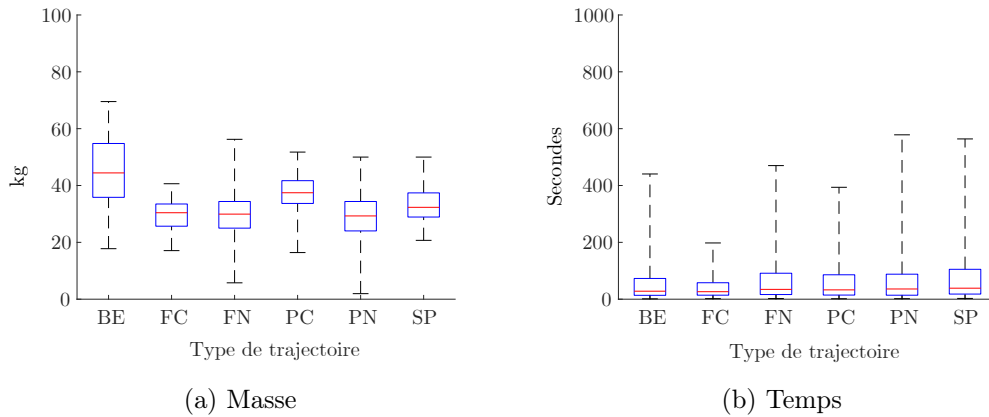


FIGURE 3.10 – Diagrammes en boîte des résultats de l’analyse 2 en fonction du type de trajectoire.

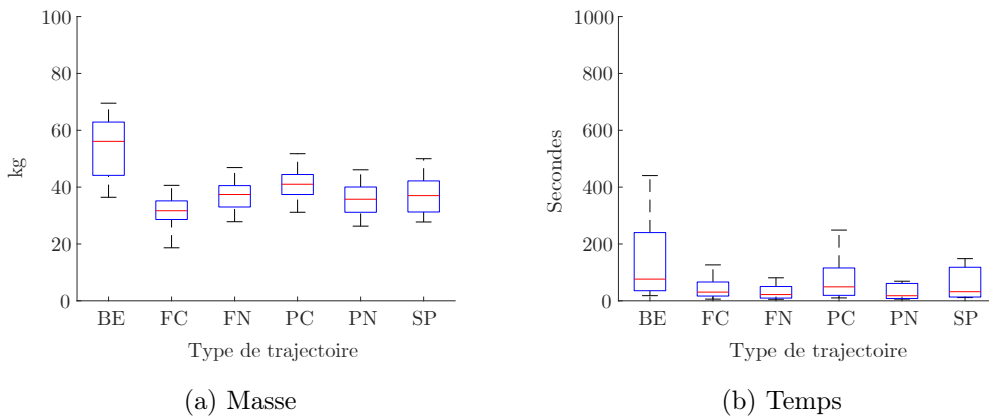


FIGURE 3.11 – Diagrammes en boîte des résultats de l’analyse 2 en fonction du type de trajectoire avec la meilleure valeur de  $n$ .

le type de manipulateur ne semble pas influencer la capacité à soulever des charges lourdes. Cependant, le temps nécessaire pour effectuer les optimisations croît avec le nombre de  $ddl$ . Cela est attendu, puisque la taille du vecteur d’optimisation, et donc la dimensionnalité de l’espace de recherche, croît linéairement avec le nombre de  $ddl$ .

Il est à noter que le fait qu’il y ait peu de différence entre les manipulateurs indique que la première articulation n’augmente pas la capacité de soulever des charges lourdes en pratique, malgré sa capacité à injecter de l’énergie dans le système. Il est également intéressant de noter que le poignet, lui non plus, n’augmente pas la charge utile du manipulateur, mais ne lui nuit pas non plus.

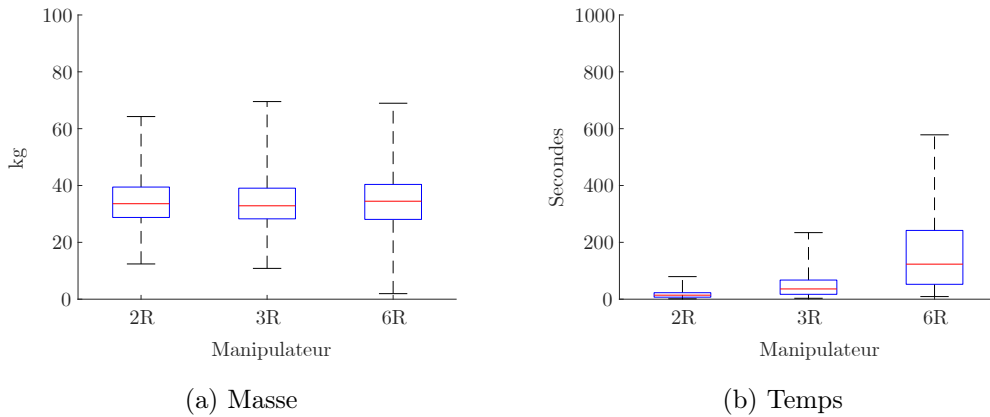


FIGURE 3.12 – Diagrammes en boîte des résultats de l’analyse 2 en fonction du manipulateur.

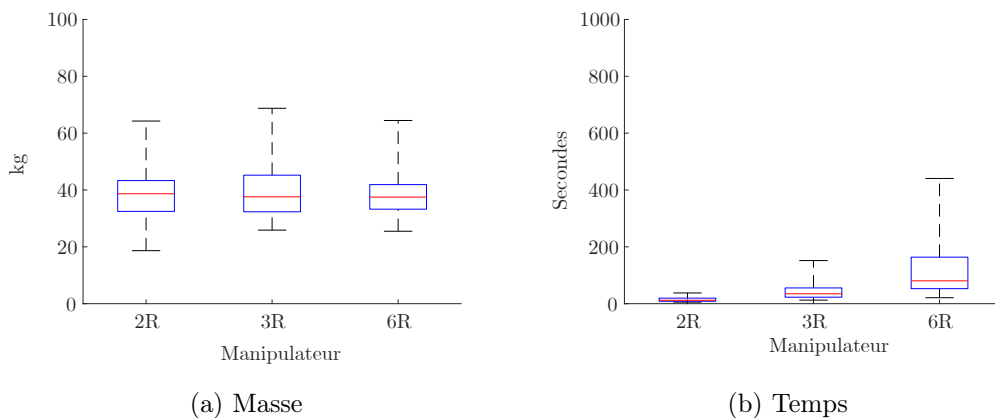


FIGURE 3.13 – Diagrammes en boîte des résultats de l’analyse 2 en fonction du manipulateur avec la meilleure valeur de  $n$ .

## 3.5 Validation expérimentale - robot 2R plan

### 3.5.1 Présentation du manipulateur prototype

Afin de valider les résultats numériques présentés dans ce chapitre, un dispositif expérimental à été conçu. Il s’agit du manipulateur 2R plan montré à la figure 3.14.

Ce manipulateur prototype est muni de deux moteurs dont les propriétés sont résumées au tableau 3.5. Dans ce tableau, le couple maximal de chaque manipulateur est indiqué et la limite imposée dans les méthodes d’optimisation de trajectoire exposées dans ce chapitre est aussi indiquée. Les limites imposées sont inférieures aux couples maximaux des moteurs afin de pouvoir vérifier le dépassement du couple lors des tests de validation.

Les moteurs choisis pour ce prototype sont capables de fournir des couples relativement faibles et ont été choisis délibérément afin de tester les méthodes de ce chapitre. Il est précisé que les couples maximaux de ces moteurs sont tels que le manipulateur ne peut pas maintenir son propre poids dans une posture horizontale. Le manipulateur peut donc être considéré comme

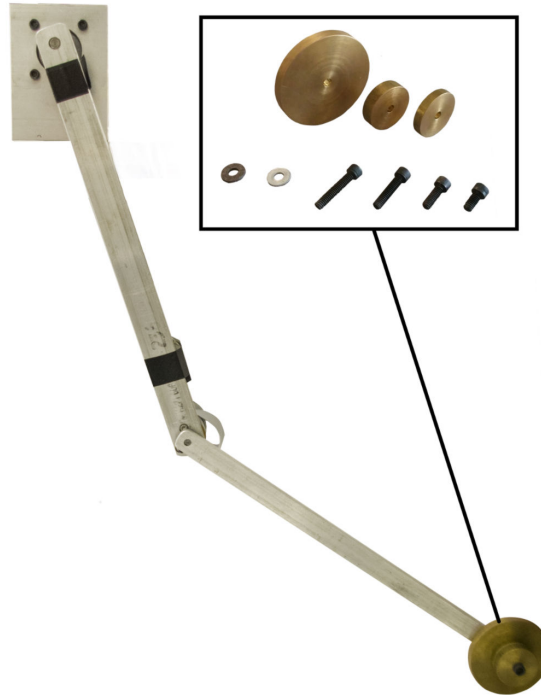


FIGURE 3.14 – Le manipulateur 2R prototype utilisé pour effectuer la validation expérimentale.

Moteur	Vitesse maximale	Couple maximal	Limite imposée (couple)
Moteur 1	523 rad/s	0,54 Nm	0,36 Nm
Moteur 2	95 rad/s	0,20 Nm	0,095 Nm

TABLE 3.5 – Propriétés des moteurs du manipulateur prototype 2R.

ayant une charge maximale négative. Ainsi, les méthodes étudiées pourront être validées.

Également montré à la figure 3.14, trois masses en laiton permettant d'ajouter de la masse à l'organe terminal du prototype. Les différentes combinaisons de celles-ci peuvent fournir les masses et les moments d'inertie présentés au tableau 3.6.

Masse	Moment d'inertie
21,2 g	$1,71 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
31,2 g	$2,52 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
51,8 g	$4,18 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
100,6 g	$32,5 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
121,9 g	$34,4 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
130,7 g	$35,3 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
150,5 g	$37,0 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$

TABLE 3.6 – Possibilités de masse à ajouter à l'organe terminal du prototype.

Enfin, les membrures du manipulateur prototype ont les propriétés cinématiques et inertielles

présentées au tableau 3.7. Dans ce tableau, la longueur, la masse, la position du centre de masse par rapport à l'articulation et le moment d'inertie par rapport au centre de masse sont présentés. Il est à noter que la masse, le centre de masse et le moment d'inertie de la membrure proximale incluent le deuxième moteur puisque celui-ci est fixé au bout de la première membrure. Il est également à noter que lorsqu'une masse du tableau 3.6 est ajoutée, les paramètres inertiels de la membrure distale doivent être modifiés. Enfin, il est précisé que la position du centre de masse dans ce tableau est mesurée par rapport au centre de l'axe du moteur qui entraîne la membrure.

Membrure	Longueur	Masse	Centre de masse	Moment d'inertie
Proximale	0,235 m	0,200 kg	0,184 m	$1,11 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Distale	0,258 m	0,0547 kg	0,121 m	$0,289 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$

TABLE 3.7 – Propriétés des membrures du manipulateur prototype 2R.

### 3.5.2 Commande du prototype

Bien que la commande du prototype ne soit pas le point central de la thèse, il peut être intéressant d'en exposer certaines caractéristiques. Le schéma de la commande employée pour exécuter les trajectoires présentées dans ce travail est montré à la figure 3.15. Dans cette figure, la trajectoire désirée est dénotée par  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  et  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , l'erreur de position par rapport à la trajectoire désirée est dénotée par  $\mathbf{q}_e$  sur lequel un correcteur PD est appliqué pour produire une accélération de correction  $\ddot{\mathbf{q}}_c$ . Le modèle dynamique du manipulateur est enfin employé pour produire la commande de couple  $\boldsymbol{\tau}$  à envoyer aux moteurs.

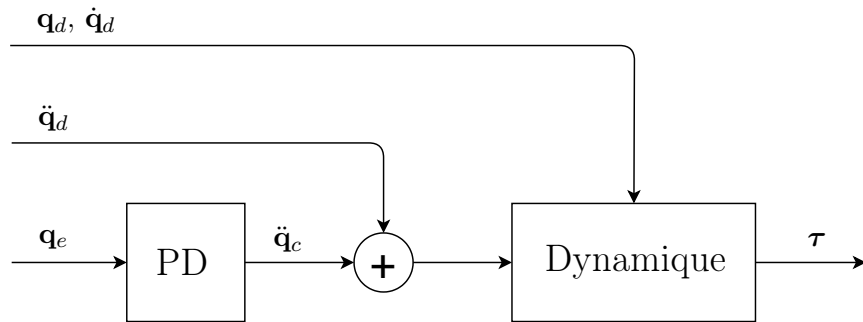


FIGURE 3.15 – Schéma de commande du prototype.

Ce type de commande est un peu différent d'un correcteur ordinaire, surtout le fait que la sortie du correcteur PD est une accélération de correction et non directement un couple de correction. Cette approche permet au système de moduler la correction en fonction de la position articulaire du manipulateur puisque celle-ci passe par le modèle dynamique. Cela a pour effet potentiel d'améliorer le suivi de la trajectoire désirée. Cependant, cette commande n'a pas été comparée à une commande classique dans ce travail.

### 3.5.3 Validation des méthodes sans charge additionnelle

La validation des méthodes étudiées dans ce chapitre est effectuée en deux étapes. Premièrement, le comportement du prototype lors de l'exécution d'une trajectoire sans masse additionnelle est étudié. Une étude de la capacité du prototype à soulever des charges lourdes est présentée à la prochaine section.

Puisque le manipulateur prototype 2R de la figure 3.14 n'a pas les mêmes paramètres cinématiques et dynamiques que le manipulateur 2R utilisé dans les sections précédentes, les résultats présentés ne peuvent pas être utilisés directement. Cependant, les mêmes tâches que celles présentées au tableau 3.1 et à la figure 3.1 sont utilisées.

Afin d'alléger le texte, les analyses des sections 3.3 et 3.4 appliquées au manipulateur prototype ne sont pas présentées entièrement dans cette section. Cependant, une analyse semblable à l'analyse 1 de la section 3.3 a été faite avec les courbes de Bézier et les splines cubiques. Les autres types de courbes n'ont pas fait l'objet d'une validation expérimentale dans ce travail.

Plusieurs trajectoires ont été testées sur le dispositif expérimental, dont une trajectoire optimisée effectuant la première tâche avec une courbe de Bézier de degré 11. Celle-ci a été choisie au hasard, mais elle est représentative des résultats obtenus avec d'autres trajectoires. Le couple nécessaire pour effectuer cette trajectoire et l'erreur de suivi sont montrés à la figure 3.16. La figure 3.16a montre le couple réel fourni par chaque actionneur superposé au couple théoriquement nécessaire (déterminé par le modèle utilisé par l'optimisation) et la figure 3.16b montre l'erreur de suivi de la trajectoire pour chaque articulation.

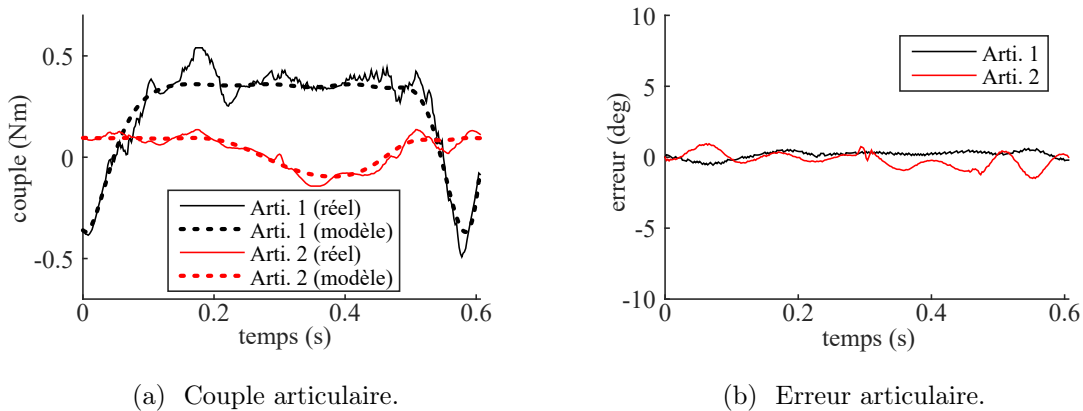


FIGURE 3.16 – Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le manipulateur 2R prototype lors de l'exécution de la tâche 1 avec une courbe de Bézier de degré 11.

Malgré que la trajectoire soit très rapide (0,6 seconde), la figure 3.16b montre que celle-ci est bien suivie par le manipulateur prototype. Il peut, cependant, être constaté que le couple utilisé pour suivre la trajectoire dépasse les limites imposées lors de l'optimisation de la trajectoire. En effet, un dépassement du couple allant jusqu'à 50% est constaté lorsque le couple n'est pas

borné dans le contrôleur<sup>2</sup>.

Il est possible d'ajouter une borne sur le couple dans le contrôleur afin de réduire le dépassement, mais une augmentation de l'erreur de suivi devrait alors être attendue. Alors, la même trajectoire que celle montrée à la figure 3.16 a été exécutée avec des limites additionnelles imposées dans le contrôleur. Ces résultats ainsi que l'erreur de suivi correspondante sont montrés à la figure 3.17. Il est à noter que pour améliorer la clarté des résultats, seulement le couple et l'erreur de la première articulation sont montrés dans cette figure. Une performance semblable est constatée avec la seconde articulation.

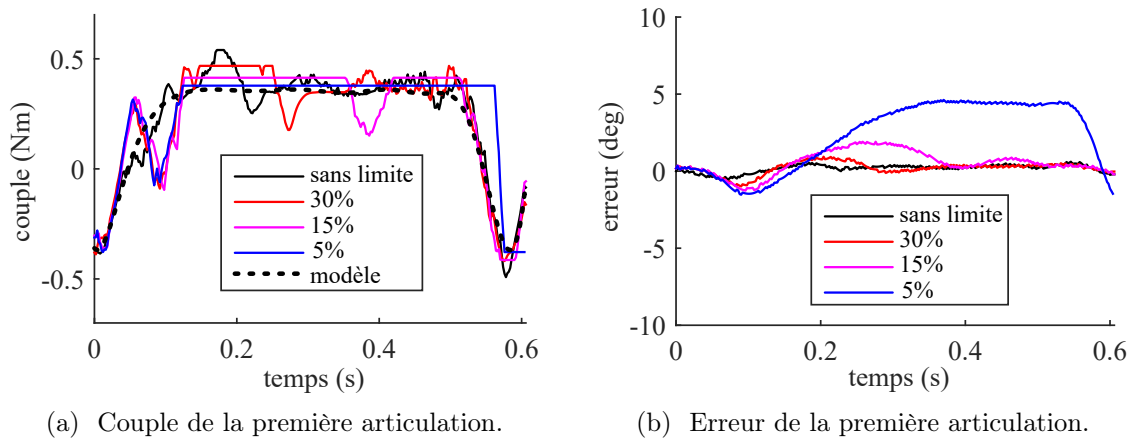


FIGURE 3.17 – La tâche prescrite est réussie malgré la saturation du couple articulaire, mais avec une augmentation de l'erreur de suivi.

Il peut être constaté que, en effet, l'erreur de suivi augmente lorsque le couple est saturé. Il est, cependant, intéressant de noter que l'erreur semble être relativement faible vers la fin de la trajectoire, lorsque le manipulateur termine sa décélération. Ce phénomène a été observé avec de nombreuses trajectoires. En outre, il est intéressant de noter que le couple peut être maintenu à moins de 5% de dépassement, tout en suivant la trajectoire avec moins de 5 degrés d'erreur. Néanmoins, il est constaté qu'un compromis doit être fait entre le dépassement du couple permis et l'erreur de la position articulaire pendant la trajectoire.

Les figures 3.16 et 3.17 montrent les résultats obtenus avec une seule trajectoire. Pour généraliser ces résultats, la même procédure est répétée avec plusieurs trajectoires. Ainsi, la meilleure trajectoire de 100 optimisations est sélectionnée, et ce, pour les 10 tâches et les 8 valeurs de  $n$  (5 – 12 pour les courbes de Bézier et 3 – 10 pour les splines cubiques). L'objectif visé est de déterminer, pour chacune de ces trajectoires, jusqu'à quel point le dépassement en couple peut être limité tout en maintenant l'erreur à moins de 10 degrés tout au long de la trajectoire. Au total, plus de 1 000 essais expérimentaux ont été effectués pour cette analyse.

2. En réalité, les limites des moteurs indiquées au tableau 3.5 sont imposées pour protéger les moteurs. Cela résulte en une très légère saturation du couple de la première articulation juste avant 0.2s. Cette saturation est très courte et n'affecte pas significativement la trajectoire.

Les résultats de cette analyse sont montrés à la figure 3.18 sous la forme d'un diagramme en boîte. Le pourcentage indiqué représente la saturation imposée en terme de pourcentage de dépassement par rapport au couple maximal théorique imposé lors de l'optimisation. Cette figure montre les résultats en fonction de la valeur de  $n$ . La figure 3.18a montre les résultats avec les courbes de Bézier et la figure 3.18b montre les résultats avec les splines.

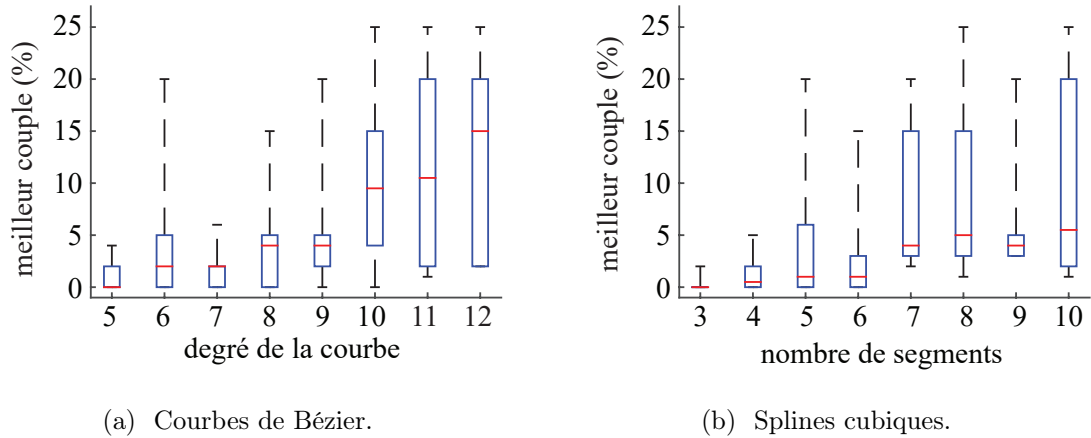


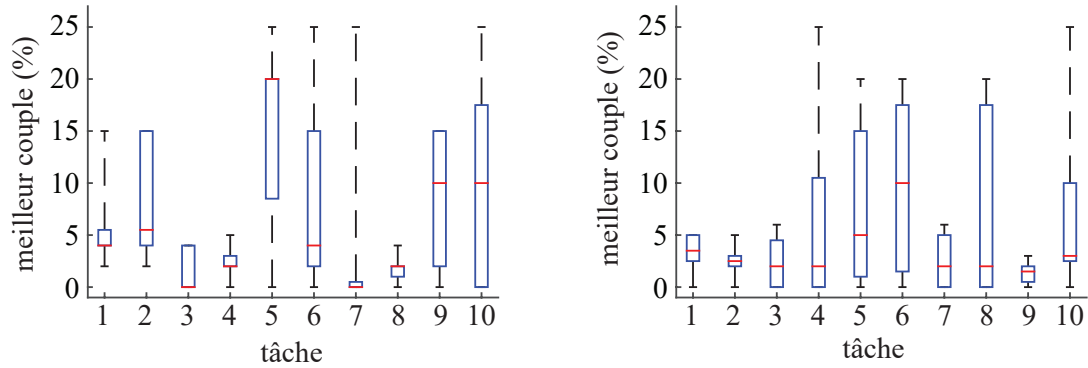
FIGURE 3.18 – La meilleure saturation du couple en fonction de la valeur de  $n$ .

Il peut être observé que les trajectoires avec les valeurs de  $n$  plus faibles semblent être plus faciles à suivre par le manipulateur. Cela peut être dû au fait que ces trajectoires sont généralement plus longues (moins optimales). Conséquemment, celles-ci demeurent moins près des limites articulaires, ce qui permet une marge de manoeuvre au contrôleur tout en restant à l'intérieur des limites imposées.

Il peut aussi être observé qu'il existe une disparité marquée d'une tâche à une autre, même pour une valeur de  $n$  égale. Autrement dit, certaines tâches sont plus difficiles à exécuter. La figure 3.19 montre les mêmes résultats que la figure 3.18, mais en fonction de la tâche à effectuer.

La figure 3.19 montre qu'il est difficile d'identifier des tâches plus faciles à suivre que d'autres. La tâche 3 semble relativement facile à suivre, mais d'autres, comme les tâches 4 et 8 semblent bien réussies par les courbes de Bézier, mais sont parmi les pires avec les splines cubiques. Inversement, la tâche 9 est bien exécutée avec les splines et non avec les courbes de Bézier.

Il est à noter que dans tous les cas, il a été possible d'effectuer toutes les tâches avec moins de 25% de dépassement du couple. Étant donné que les actionneurs du manipulateur sont trop faibles pour soutenir son propre poids, ce constat indique que la charge utile des manipulateurs peut en effet être augmentée pour la plupart des tâches.



(a) Courbes de Bézier.

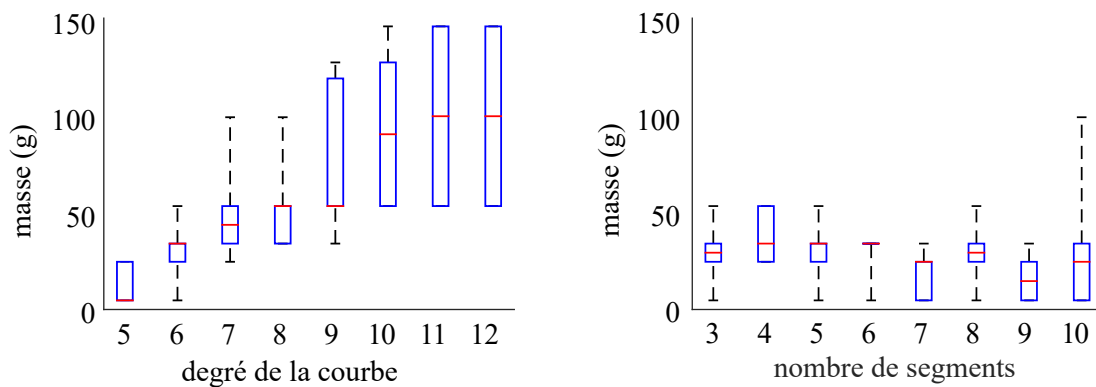
(b) Splines cubiques.

FIGURE 3.19 – Meilleur saturation du couple en fonction de la tâche.

### 3.5.4 Validation de l'augmentation de la masse soulevée

Afin de valider la capacité des méthodes à augmenter la charge utile, une analyse numérique semblable à l'analyse 2 de la section 3.4 est d'abord effectuée. Cependant, afin de permettre la validation expérimentale, les masses présentées au tableau 3.6 sont utilisées. La procédure employée est de commencer par la masse de 20g et de passer à la prochaine masse si une trajectoire qui satisfait aux contraintes est obtenue. La procédure est poursuivie jusqu'à ce qu'aucune trajectoire théoriquement réalisable ne puisse être trouvée.

La figure 3.20a montre la plus grande masse, parmi les masses du tableau 3.6, que le manipulateur est théoriquement capable de soulever en fonction de la valeur de  $n$ . La figure 3.20b montre les résultats avec les courbes de Bézier et la figure 3.20c montre les résultats avec les splines cubiques.



(a) Courbes de Bézier.

(b) Splines cubiques.

FIGURE 3.20 – Masses que le manipulateur prototype est théoriquement capable de soulever.

Il peut être observé que les courbes de Bézier de degré plus élevé permettent une augmentation plus importante de la charge soulevée. Il peut aussi être constaté que les splines ne semblent pas



augmenter la capacité de soulever des charges lourdes autant que les courbes de Bézier pour ce manipulateur. Cela est dû au degré du polynôme de ces deux types de courbes. Les courbes de Bézier, ayant un degré de polynôme plus élevé, est plus capable de changer d'accélération en tout temps. Les splines, caractérisées par des polynômes de degré 3, ne permettent qu'une accélération linéaire.

Afin de valider ces résultats, plusieurs trajectoires ont été exécutées sur le manipulateur prototype. À titre d'exemple, la figure 3.21 montre une trajectoire qui effectue la tâche 1 avec une masse de 150 grammes. La figure 3.21a montre le couple articulaire et la figure 3.21b montre l'erreur de suivi de la trajectoire. Cette trajectoire est le résultat d'une optimisation avec des courbes de Bézier de degré 10.

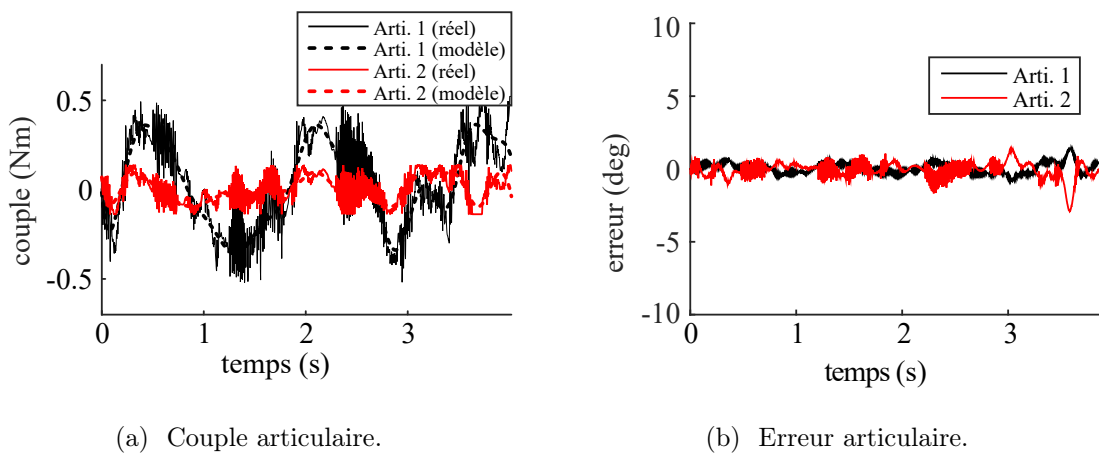


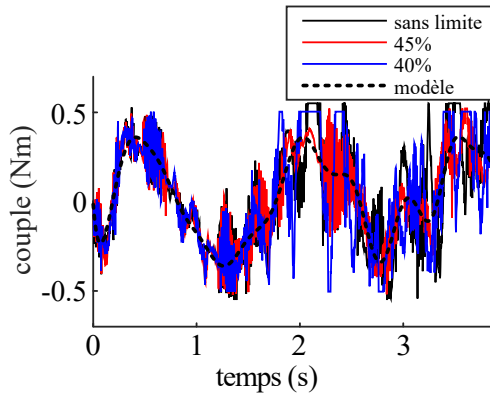
FIGURE 3.21 – Trajectoire effectuant la tâche 1 avec une charge de 150 grammes.

Enfin, la trajectoire de la figure 3.21 est exécutée avec des saturations du couple dans le contrôleur. Les résultats de ces expérimentations sont montrés à la figure 3.22 où, encore une fois, seule la première articulation est montrée. La figure 3.22a montre le couple de la première articulation et la figure 3.22b montre l'erreur de suivi de la première articulation.

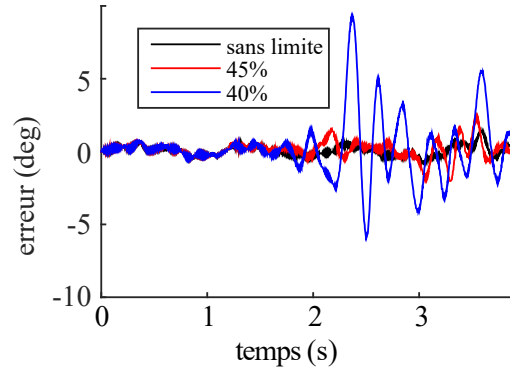
Ces résultats montrent que la capacité à saturer le couple est significativement réduite lorsqu'une charge importante est ajoutée à l'effecteur. Néanmoins, 150 grammes représente environ 60% de la masse totale du manipulateur incluant le moteur de la seconde articulation. Puisque le manipulateur n'est même pas capable de soutenir son propre poids, ajouter une charge de 60% de la masse du manipulateur à l'organe terminal indique une très grande augmentation de la capacité de soulever des charges lourdes. Cependant, il est à noter que cette charge ne peut pas être soulevée pour toutes les tâches.

### 3.5.5 Caractéristiques des trajectoires

Afin de percevoir les stratégies qui sont possibles lorsque la trajectoire est optimisée, les différences entre les solutions trouvées pour différentes masses sont observées. La figure 3.23



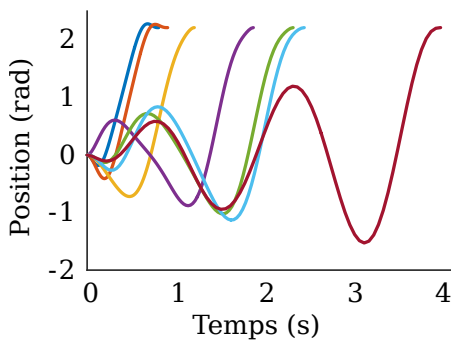
(a) Couple de la première articulation.



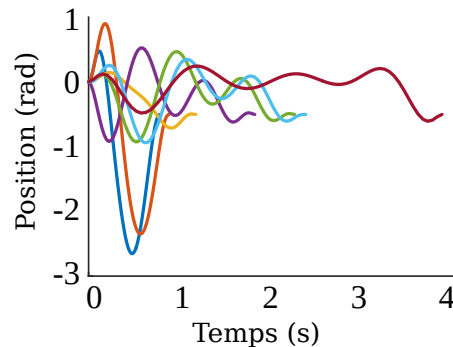
(b) Erreur de la première articulation.

FIGURE 3.22 – Trajectoires effectuant la tâche 1 avec une charge de 150 grammes avec limitation du couple articulaire.

montre la trajectoire articulaire du manipulateur pour effectuer la tâche 1 avec de plus en plus de masse. La figure 3.23a montre les trajectoires de la première articulation et la figure 3.23b montre les trajectoires de la seconde articulation.



(a) Trajectoire de la première articulation.



(b) Trajectoire de la seconde articulation.

FIGURE 3.23 – Trajectoires avec de plus en plus de masse.

À partir de la figure 3.23, il peut être observé que lorsque la masse est très grande, le manipulateur exécute plus d'oscillations pour se permettre d'effectuer la tâche prescrite. Ce phénomène est particulièrement visible avec la première articulation.

### 3.5.6 Vidéo explicative

Dans le cadre d'un article publié contenant les analyses et les résultats de ce chapitre, une vidéo (avec une narration en anglais) a été créée pour fournir un aperçu des travaux et des résultats. Cette thèse est accompagnée de cette vidéo ([chapitre3.mp4](#)), car celle-ci fournit une explication supplémentaire des principaux résultats, particulièrement ceux obtenus expérimentalement.

### 3.6 Conclusion : soulever des charges lourdes

Le chapitre actuel a étudié les gains de capacité de soulever des charges lourdes que peuvent réaliser les manipulateurs robotiques lorsque le mouvement est optimisé de sorte à exploiter au maximum les capacités dynamiques des actionneurs. Cela indique qu'une optimisation de la trajectoire permet d'accroître considérablement la charge maximale d'un manipulateur.

La méthode présentée dans ce travail et dans ce chapitre est simple à comprendre et à mettre en oeuvre. On peut garantir que les trajectoires générées par les méthodes de génération de trajectoire sont lisses et donc possiblement réalisables par des manipulateurs en pratique. En outre, bien que ce soit le temps total de la trajectoire qui ait été choisi comme fonction objectif, n'importe quelle fonction objectif pourrait être utilisée. Bien sûr, la performance de la méthode d'optimisation varie en fonction du choix de la fonction, mais la mise en oeuvre est triviale dès lors que la fonction objectif est créée. Similairement, la méthode étudiée est agnostique par rapport aux contraintes non-linéaires imposées. Il faut toutefois noter que ces méthodes ne fournissent pas la solution optimale, mais se concentrent plutôt sur l'obtention de trajectoires pouvant être facilement exécutées par des manipulateurs réels.

Une étude expérimentale, présentée à la section 3.5, a démontré que ces gains de capacité sont réalisables en pratique. Même un manipulateur muni d'actionneurs trop faibles pour soulever son propre poids est capable de soulever des charges très lourdes, relativement à sa masse totale. Par exemple, le manipulateur 2R prototype de la section 3.5 est capable de soulever une masse de 150 grammes. Pour un manipulateur de 250 grammes, cette masse représente 60% de masse additionnelle. Ces résultats ont alors été validés expérimentalement avec le manipulateur prototype présenté. En outre, la validation expérimentale appuie le fait que les trajectoires générées par les méthodes étudiées dans ce travail sont réalisables en pratique.

Il devrait également être noté que, bien que les méthodes aient été validées expérimentalement sur un manipulateur 2R plan, il est attendu que les résultats s'étendent aux manipulateurs 3R et 6R. Le choix du manipulateur 2R plan est basé sur le fait que la deuxième et la troisième membrures de la plupart des manipulateurs 3R et 6R (comme ceux étudiés dans ce travail) forment essentiellement un manipulateur 2R plan (l'axe de ces deux articulations sont parallèles et perpendiculaires au champ gravitationnel). Comme il a été présenté à la section 3.4.2, les manipulateurs 3R et 6R ne peuvent pas nécessairement soulever plus que le manipulateur 2R.

Enfin, le degré auquel la capacité de charge utile d'un manipulateur peut être augmentée pour une tâche donnée varie également en fonction du rapport de réduction présent aux articulations du manipulateur. L'inertie des liaisons du manipulateur, telle que perçue par les actionneurs, est réduite du carré du rapport de réduction tandis que l'inertie du rotor de l'actionneur reste constante. Cela signifie que pour les manipulateurs ayant un rapport de réduction important, les effets d'une trajectoire dynamique sont quelque peu limités. Cepen-

dant, comme indiqué dans l'introduction, les manipulateurs à grand rapports de réduction ne sont pas nécessairement les types de manipulateurs visés par ce travail.

## Chapitre 4

# Lancer un objet

*"Dans la vie, rien n'est à craindre, tout est à comprendre."*

— Marie Curie

### Résumé

Le chapitre actuel présente une étude de la tâche qui consiste à lancer un objet du point de vue de l'optimisation de la trajectoire. Cette tâche est étudiée sur le plan cinématique ainsi que sur le plan dynamique. D'abord, une description de la tâche et des équations gouvernant le lancer est présentée. Ensuite, trois différents problèmes d'optimisation dans le cadre de la tâche du lancer sont définis. Enfin, une synthèse des principaux résultats et des conclusions est présentée.

## 4.1 Introduction

La deuxième application étudiée dans ce travail est le lancer d'objets à l'aide de manipulateurs robotiques. Particulièrement, la maximisation de la portée, où l'objet est lancé le plus loin possible, est explorée. Le lancer d'objets à l'aide de manipulateurs robotiques est une tâche complexe et intéressante qui reste relativement peu étudiée aujourd'hui. Pourtant, celle-ci peut s'avérer très utile dans certaines applications. Par exemple, il est estimé que le désastre nucléaire à Fukushima pourrait prendre plus de 80 ans à nettoyer en partie parce que la technologie robotique n'est pas encore suffisamment avancée (Brumfiel, 2011). Dans des cas comme celui-ci, des manipulateurs montés sur des robots mobiles pour faire l'inspection des lieux pourraient aider à écarter des débris. Il peut être imaginé que le lancer pourrait également être utile dans plusieurs autres applications comme la robotique humanoïde (Mettin et Shiriaev, 2011; Lofaro et collab., 2012a,c).

La tâche de soulever des charges lourdes est intrinsèquement dynamique étant donné que la masse du manipulateur et de la charge manipulée n'interviennent pas dans l'analyse cinématique de la trajectoire. Par conséquent, l'analyse dynamique est la seule qui a du sens pour cette application. En revanche, la tâche du lancer d'objets peut être analysée à plusieurs niveaux. Comme il a été expliqué à la section 1.3, la maximisation de la portée est explorée progressivement en commençant par l'étude de l'état cinématique qui correspond au lancer optimal. Ensuite, des trajectoires contraintes par des limites cinématiques sur l'accélération et la saccade sont ajoutées en s'appuyant sur les résultats de l'étude de l'état cinématique optimal. Enfin, l'étude de la trajectoire entière avec des contraintes dynamiques est effectuée.

## 4.2 Calcul de la portée

### 4.2.1 Modèles balistiques

Afin d'étudier le lancer d'objets avec des manipulateurs robotiques, il est d'abord nécessaire d'avoir un modèle du comportement de l'objet en vol. La trajectoire balistique d'un objet en vol pourrait faire l'objet d'une recherche en soit. Cependant, il est possible de faire plusieurs simplifications raisonnables. Cette thèse omet toutes les forces et les effets sur la trajectoire balistique sauf la force gravitationnelle. La trajectoire de l'objet, une fois lancé, est alors une parabole déterminée par la vitesse de l'objet au moment du lancer.

Même en ne considérant que la trajectoire est une parabole, deux modèles, montrés à la figure 4.1, peuvent être utilisés. Le premier modèle, le modèle simple montré à la figure 4.1a, considère que la position initiale de l'objet au moment du lancer est à l'origine. Le deuxième modèle, le modèle complet montré à la figure 4.1b, prend en compte la position initiale de l'objet au moment du lancer.

Si la vitesse est très grande, il pourrait être raisonnable de présumer que la différence entre ces

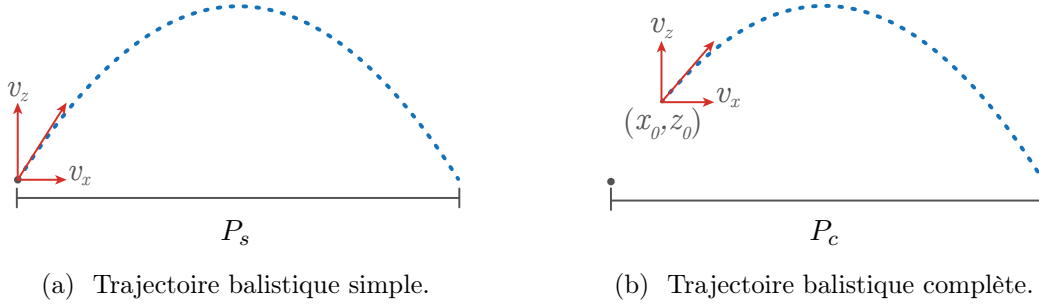


FIGURE 4.1 – Les deux modèles balistiques étudiés.

deux modèles est négligeable. Dans le cas où le modèle simple de la figure 4.1a est employé, la position de l'objet en fonction du temps est simplement

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t \\ y(t) &= v_y t \\ z(t) &= v_z t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  sont les composantes de la vitesse de l'objet dans la direction  $x$ ,  $y$  et  $z$  au moment du lancer, respectivement. À partir de ces équations, il peut être démontré que la portée est

$$P_s = \frac{2v_z}{g} \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (4.2)$$

Cette équation de la portée n'est valide que si  $v_z \geq 0$ . En effet, si la composante verticale de la vitesse initiale est négative, aucun lancer n'est effectué.

Dans le cas où le modèle plus complet de la figure 4.1b est utilisé, la position de l'objet en fonction du temps est

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ y(t) &= y_0 + v_y t \\ z(t) &= z_0 + v_z t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  sont les coordonnées de l'objet au moment du lancer. Avec ces équations, la position de l'objet à l'atterrissage peut être calculée avec

$$\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} x_0 + \frac{v_x}{g} \left( v_z + \sqrt{v_z^2 + 2gz_0} \right) \\ y_0 + \frac{v_y}{g} \left( v_z + \sqrt{v_z^2 + 2gz_0} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

La portée est alors

$$P_c = \sqrt{\mathbf{p}_c^T \mathbf{p}_c}. \quad (4.5)$$

Il est à noter que lorsque le modèle complet est utilisé, l'équation du point d'atterrissage (4.4) n'est valide que si  $v_z^2 + 2gz_0 \geq 0$ . En effet, lorsque cette condition n'est pas satisfaite, l'objet

lancé n'atteint jamais le plancher. La portée est alors considérée nulle. Par ailleurs, lorsque la hauteur initiale  $z_0$  et la vitesse verticale initiale  $v_z$  sont toutes les deux négatives, l'objet lancé n'atteint jamais le plancher et la portée est encore une fois considérée nulle.

### 4.2.2 Cinématique du lancer à l'aide de manipulateurs robotiques

Les équations présentées jusqu'ici présument que la position initiale et la vitesse initiale de l'objet sont connues. Or, celles-ci doivent être calculées à partir de la cinématique du manipulateur. Pour un état cinématique donné  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , la position de l'objet par rapport à l'origine  $(x_0, y_0, z_0)$  peut être calculée à l'aide de la solution du problème géométrique direct. La vitesse initiale de l'objet  $(v_x, v_y, v_z)$  peut être calculée à l'aide de la matrice jacobienne du manipulateur, notamment

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'organe terminal<sup>1</sup>,  $\boldsymbol{\omega}$  en est sa vitesse angulaire,  $\mathbf{J}_v$  est la partie vitesse de la matrice jacobienne,  $\mathbf{J}_\omega$  en est la partie vitesse angulaire et  $\dot{\mathbf{q}}$  la vitesse articulaire du manipulateur.

Pour la tâche du lancer, seule le centre de masse de l'objet. On a alors

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.7)$$

Il est à noter que la direction du lancer dans le cas des manipulateurs spatiaux peut facilement être déterminée à l'aide des composantes  $x$ - $y$  de la vitesse de l'objet au moment du lancer. Bien que la direction du lancer n'est pas contrainte dans ce travail, celle-ci pourrait relativement facilement l'être puisque la première articulation des manipulateurs spatiaux étudiés est verticale.

## 4.3 Optimisation de l'état au moment du relâchement

Le premier problème étudié en lien avec la maximisation de la portée est le problème de l'état au moment du relâchement de l'objet (PÉR). Dans ce problème, la trajectoire du manipulateur avant et après le relâchement de l'objet n'est pas considérée. La solution à ce problème fournit une valeur théorique de la portée maximale d'un manipulateur étant donné des contraintes de position et de vitesse articulaire.

Bien que ce problème ne soit pas directement utile pour la plupart des applications, son étude peut fournir des informations précieuses. Par exemple, sa solution donne la limite supérieure

---

1. Dans ce travail, le centre de masse de l'objet lancé est considéré comme étant la position de l'organe terminal.



de la portée qui permet d'évaluer des solutions obtenues aux autres problèmes d'optimisation. Par ailleurs, la solution de ce problème peut, dans certains cas, être utilisée comme point de départ pour faciliter la solution des autres problèmes étudiés dans ce travail.

Formellement, le problème de l'optimisation de l'état cinématique au moment où l'objet est relâché peut être exprimé sous la forme

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R} \quad & P(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{q}_{\min} \preceq \mathbf{q}_R \preceq \mathbf{q}_{\max} \\ & |\dot{\mathbf{q}}_R| \preceq \dot{\mathbf{q}}_{\max} \end{aligned} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{q}_R$  et  $\dot{\mathbf{q}}_R$  sont les vecteurs de la position articulaire et de la vitesse articulaire au moment où l'objet est relâché,  $\mathbf{q}_{\min}$  et  $\mathbf{q}_{\max}$  sont les vecteurs des limites inférieure et supérieure de la position articulaire du manipulateur et  $\dot{\mathbf{q}}_{\max}$  est le vecteur de la limite de la vitesse articulaire. Dans ce travail, la limite de la vitesse articulaire est considérée symétrique, c'est-à-dire identique dans le sens positif et négatif. Il est rappelé que le symbole  $\preceq$  représente une inégalité s'appliquant sur chacun des éléments des vecteurs. La fonction objectif  $P(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R)$  est la portée et peut être calculée en utilisant le modèle simple de l'équation (4.2) ou le modèle complet de l'équation (4.5).

### 4.3.1 Solutions triviales

À première vue, ce problème d'optimisation peut sembler trivial. En effet, il est bien connu que, pour une vitesse de lancer donnée, l'angle de lancer qui fournit la portée maximale est de  $45^\circ$ . Cependant, cela présume que la position à laquelle l'objet est lancé est fixe. Or, dans le cas où le modèle complet de l'équation (4.5) est utilisé, l'effet sur la portée de la position initiale de l'objet au moment du lancer n'est pas nécessairement négligeable par rapport à celui de la vitesse du lancer.

Afin d'illustrer que l'effet de la position initiale du manipulateur n'est pas négligeable, un simple manipulateur 2R avec les paramètres suivants est considéré :

$$L = \begin{bmatrix} 1, 0 \text{ m} \\ 0, 2 \text{ m} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_{\max} = \begin{bmatrix} 2 \text{ rad/s} \\ 10 \text{ rad/s} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

où  $L$  est le vecteur contenant les deux longueurs des membrures et  $\dot{\mathbf{q}}_{\max}$  est le vecteur des vitesses maximales des articulations.

La figure 4.2 montre la différence entre la solution optimale (en bleu) et deux solutions triviales où l'angle du lancer est de  $45^\circ$  (en rouge).

On peut constater que la solution simple du lancer par dessus ne lance pas aussi loin que la solution optimale et que la solution simple du lancer par dessous n'atteint même pas le sol. Pour cette raison, le modèle complet de l'équation (4.5) est utilisé pour le reste de ce travail.

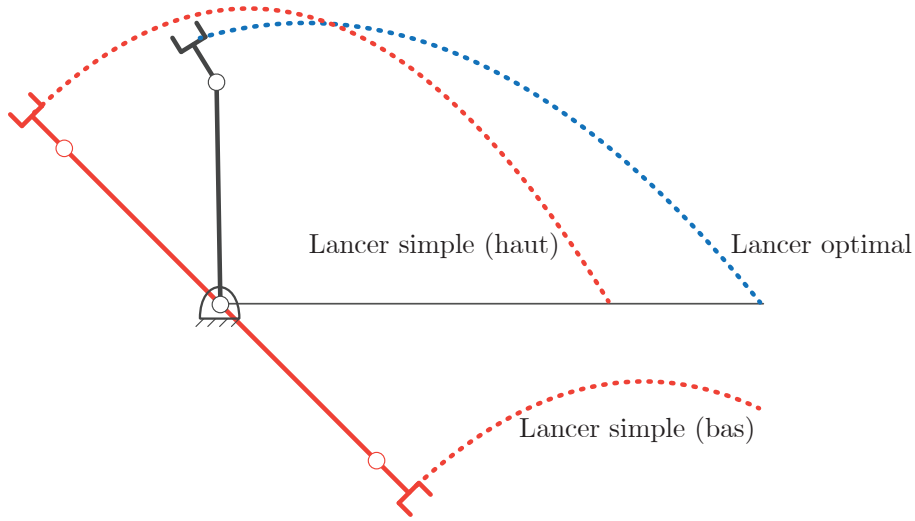


FIGURE 4.2 – La solution au PÉR n’est pas toujours simple, même pour un simple manipulateur 2R plan. (Il est à noter que les dimensions de ce manipulateur ne sont pas les mêmes que celles du manipulateur 2R présenté à la section 1.5.1)

Ce robot peut sembler irréaliste, mais la membrure distale de ce manipulateur peut être considéré comme un poignet. Il est assez courant que le poignet d’un manipulateur ait des membrures plus courtes et des limites de vitesse plus élevées que les autres. En effet, cela est certainement vrai pour le bras humain.

### 4.3.2 Fonction objectif et contraintes

Comme il a été démontré à la section 4.3.1, certains lancers n’atteignent pas le sol. Cela se produit lorsque la racine carrée  $\sqrt{v_z^2 + 2gz_0}$  est imaginaire. Par conséquent, la fonction objectif est imaginaire pour un sous-ensemble de l’espace d’états du manipulateur. Un remède naturel consiste à considérer que la portée est nulle lorsque celle-ci est imaginaire, comme

$$P(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R) = \begin{cases} 0, & \text{si } v_z^2 + 2gz_0 < 0 \\ \sqrt{\mathbf{p}_c^T \mathbf{p}_c}, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Par contre, cela pose un problème pour l’optimisation numérique car, si la valeur objective pour un état donné est nulle et qu’elle est également nulle pour tous ses voisins proches, le gradient et la matrice hessienne utilisés dans l’algorithme SQP sont également nuls. Par conséquent, l’optimisation échouera car elle ne peut pas déterminer une direction de recherche viable.

Afin d’atténuer cet effet, deux approches peuvent être utilisées : la fonction objectif peut être modifiée ou une contrainte peut être ajoutée pour éviter les états problématiques. Première-

ment, la fonction objectif modifiée utilisée dans ce travail est

$$P(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R) = \begin{cases} z_0 + \frac{v_z^2}{2g}, & \text{si } v_z^2 + 2gz_0 < 0 \\ \sqrt{\mathbf{p}_c^T \mathbf{p}_c}, & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $z_0 + \frac{v_z^2}{2g}$  correspond à la distance entre le sommet de la trajectoire balistique et le sol. Cette valeur est négative lorsque  $v_z^2 + 2gz_0 < 0$  et constitue une mesure directe de la validité du lancer. Cela guide alors l'optimisation vers un lancer valide.

Pour illustrer cette modification de la fonction objectif, le pendule simple illustré à la figure 4.3a est considéré. Pour simplifier davantage, la vitesse de l'articulation est supposée constante (maximum dans le sens positif). La fonction objectif n'a alors qu'une variable et est, par conséquent, plus facile à visualiser. La figure 4.3b montre la valeur objective en fonction de l'angle de l'articulation  $\theta \in [0, 360^\circ]$  au moment où l'objet est relâché.

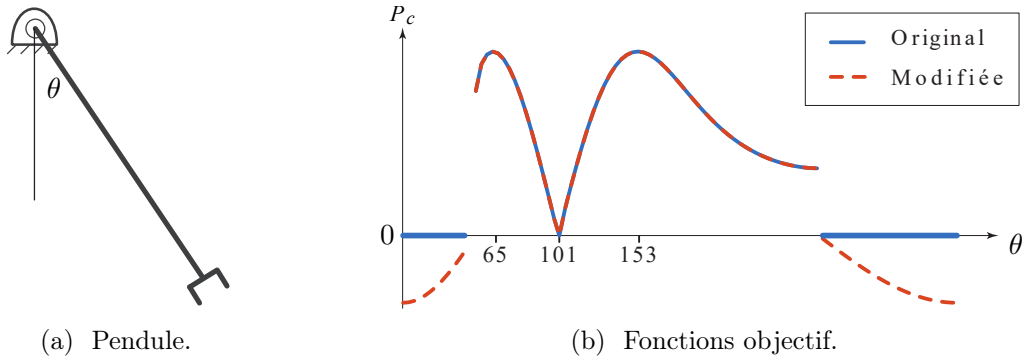


FIGURE 4.3 – La fonction objectif d'un pendule simple pour montrer qu'il y a des parties plates et des discontinuités.

Il peut être observé que la fonction objectif avant la modification (équation (4.10)) comporte de grandes parties plates où l'objet n'atteint pas le sol, et donc où le gradient est nul. La fonction objectif modifiée (équation (4.11)) guide l'optimisation vers une solution valide. Ce phénomène s'observe non seulement avec le pendule simple, il s'applique également aux trois manipulateurs étudiés. De plus, lorsque l'objet atteint le sol, les fonctions modifiées et non modifiées sont identiques. Les deux pics de cette fonction sont à  $\theta = 65^\circ$  et  $\theta = 153^\circ$ , qui correspondent à la distance de lancer maximale dans la direction positive et négative de  $x$ , respectivement. Le fond de la vallée à  $\theta = 101^\circ$  correspond à l'objet qui atterrit à l'origine (l'objet a une position initiale en  $x$  positive, mais une vitesse en  $x$  négative).

L'autre méthode permettant d'atténuer le problème posé par la fonction objectif plate consiste à ajouter une contrainte non linéaire de la forme

$$v_z^2 + 2gz_0 \geq 0. \quad (4.12)$$

Dans ce travail, une combinaison des deux fonctions objectif (équations (4.10) et (4.11)), avec et sans cette contrainte (équation (4.12)) sont étudiées.

### 4.3.3 Estimé initial

D'après la figure 4.3b, il peut être constaté que, même pour le simple pendule de la figure 4.3a, la fonction objectif est discontinue et non convexe. Par conséquent, l'estimé initial peut avoir un impact important sur la convergence de l'optimisation. La qualité de l'estimé initial peut être améliorée de la même façon que pour l'application de soulever une charge lourde présentée au chapitre 3.

Cette méthode consiste à pré-évaluer une population de candidats, générés aléatoirement, et à utiliser l'élite comme estimé initial pour l'optimisation. La taille de la population est, bien sûr, un facteur important à prendre en compte et ce travail évaluera plusieurs tailles de population. L'hypothèse est faite que le nombre d'évaluations nécessaires pour déterminer un estimé initial est négligeable par rapport au nombre d'évaluations effectuées pendant l'optimisation.

### 4.3.4 Méthodologie de l'analyse

Afin d'étudier le comportement de l'optimisation et d'évaluer la mise en œuvre des différentes idées abordées aux sections 4.3.2 et 4.3.3, des expériences numériques ont été menées. Le tableau 4.1 résume les procédures d'optimisation étudiées. Les optimisations Opt1-Opt4 implémentent les idées de la section 4.3.2 et les optimisations Opt5-Opt9 implémentent la méthode de la section 4.3.3 avec des tailles de population différentes.

TABLE 4.1 – Configurations d'optimisation pour l'étude de l'optimisation de l'état cinématique.

Code	Objectif / Contrainte	Estimé initial
Opt1	Équation (4.10)	Aléatoire
Opt2	Équation (4.11)	Aléatoire
Opt3	Équations (4.10) et (4.12)	Aléatoire
Opt4	Équations (4.11) et (4.12)	Aléatoire
Opt5	Équation (4.11)	Élite d'une population aléatoire de 10
Opt6	Équation (4.11)	Élite d'une population aléatoire de 50
Opt7	Équation (4.11)	Élite d'une population aléatoire de 100
Opt8	Équation (4.11)	Élite d'une population aléatoire de 300
Opt9	Équation (4.11)	Élite d'une population aléatoire de 1000

Afin d'évaluer les procédures d'optimisation énoncées dans le tableau 4.1, chacune est exécutée 1 000 fois. Les critères d'évaluation des optimisations mesurés dans chaque test sont présentés au tableau 4.2.

Chaque critère de ce tableau est évalué pour chacune des stratégies énoncées au tableau 4.1. Le code « Meilleur » représente la portée maximale obtenue et le code « Moyenne » représente la moyenne de la portée obtenue. Le code « Estimé moyen » représente la moyenne de la valeur objective évaluée à chaque estimé initial. Cette valeur mesure alors la qualité de l'estimé initial fournit par chaque stratégie d'optimisation. Le code « Succès » représente le pourcentage des

TABLE 4.2 – Critères de l'évaluation pour le PÉR.

Code	Description
Meilleur (m)	Meilleure valeur objective après l'optimisation
Moyenne (m)	Valeur objective moyenne après l'optimisation
Estimé moyen (m)	Valeur objective moyenne avant l'optimisation
Succès (%)	Taux de convergence (5% de la meilleure solution)
Temps (ms)	Temps de calcul moyen de l'optimisation
$F_{\text{temps}}$	Facteur normalisé du temps de calcul pour obtenir un succès

essais qui convergent vers la meilleure solution. Un essai est considéré un succès s'il est moins de 5% en dessous de la meilleure solution et la meilleure solution est simplement la meilleure valeur objective trouvée à partir de tous les essais pour toutes les stratégies. Le code « Temps » est le temps moyen pour effectuer une optimisation. Enfin, le code «  $F_{\text{temps}}$  » est le facteur normalisé du temps de calcul et est défini de la même façon qu'au chapitre précédent.

### 4.3.5 Résultats

Les résultats des expérimentations numériques sont présentés dans le tableau 4.3. Ce tableau présente les résultats avec les 9 configurations d'optimisation du tableau 4.1 et indique les critères du tableau 4.2.

TABLE 4.3 – Résultats des expérimentation numériques pour le PÉR.

Optimisation	Opt1	Opt2	Opt3	Opt4	Opt5	Opt6	Opt7	Opt8	Opt9
<b>Manipulateur 2R</b>									
Meilleur (m)	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>	<b>2,27</b>
Moyenne (m)	1,19	1,50	1,76	1,82	1,91	2,20	2,24	2,25	<b>2,26</b>
Estimé moyen (m)	0,29	0,42	0,29	0,42	0,96	1,23	1,37	1,57	<b>1,77</b>
Succès (%)	45,0	44,6	63,3	64,9	70,5	92,6	97,0	98,8	<b>99,5</b>
Temps (ms)	<b>0,04</b>	0,04	0,11	0,11	0,06	0,07	0,08	0,18	0,57
$F_{\text{temps}}$	0,83	0,79	0,45	0,44	0,97	<b>1,00</b>	0,93	0,42	0,13
<b>Manipulateur 3R</b>									
Meilleur (m)	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>
Moyenne (m)	1,99	2,30	2,74	2,80	3,29	3,54	3,56	3,58	<b>3,59</b>
Estimé moyen (m)	0,49	0,61	0,48	0,61	1,19	1,59	1,78	2,11	<b>2,40</b>
Succès (%)	45,0	46,1	57,7	58,7	74,0	86,6	87,5	90,7	<b>94,2</b>
Temps (ms)	<b>0,29</b>	0,31	0,92	0,99	0,34	0,41	0,56	1,26	3,92
$F_{\text{temps}}$	0,71	0,68	0,28	0,27	<b>1,00</b>	0,95	0,71	0,32	0,11
<b>Manipulateur 6R</b>									
Meilleur (m)	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>	<b>4,24</b>
Moyenne (m)	2,06	2,42	3,08	3,07	3,29	3,66	3,76	3,80	<b>3,82</b>
Estimé moyen (m)	0,30	0,43	0,30	0,45	0,94	1,26	1,42	1,67	<b>1,93</b>
Succès (%)	8,5	9,6	13,8	13,9	16,7	19,6	21,6	23,2	<b>23,5</b>
Temps (ms)	<b>0,51</b>	0,61	1,14	1,36	0,73	0,83	0,79	1,17	2,61
$F_{\text{temps}}$	0,61	0,57	0,44	0,38	0,83	0,87	<b>1,00</b>	0,73	0,33

A partir des résultats présentés au tableau 4.3, plusieurs observations peuvent être faites. La première est que la première articulation des manipulateurs 3R et 6R ainsi que le poignet

du manipulateur 6R augmentent considérablement les capacités de lancer des manipulateurs. Cela, malgré le fait que la première articulation ne contribue pas à la position verticale initiale de l'organe terminal ni à la vitesse verticale. Cela est également malgré le fait que les membrures du poignet sont relativement petites et que la longueur totale des trois manipulateurs est égale. La figure 4.4 montre la posture optimale de chaque manipulateur et la distance de lancer pour illustrer l'effet de la première articulation et du poignet.

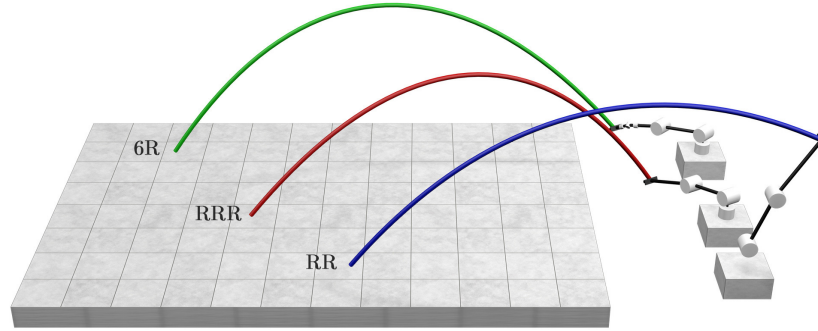


FIGURE 4.4 – Posture représentant la solution optimale pour chaque manipulateur. La première articulation ( $\theta_0$ ) et le poignet ( $\theta_3$ ,  $\theta_4$  et  $\theta_5$ ) ont un impact significatif sur la portée maximale des manipulateurs.

Une autre observation est que toutes les configurations d'optimisation peuvent éventuellement converger vers la meilleure solution<sup>2</sup> si l'on effectue suffisamment d'essais. Par ailleurs, il peut être noté qu'un facteur important pour la convergence de l'optimisation est l'absence de parties plates dans la fonction objectif, c'est-à-dire, l'équation (4.11). Cependant, dans l'ensemble, la meilleure optimisation semble être de choisir l'élite d'une population de 50 (Opt6). Celle-ci fournit une bonne performance pour les trois manipulateurs étudiés. Au delà d'une population de 100, le temps requis pour évaluer l'ensemble de la population initiale augmente sans que le taux de succès n'augmente significativement. Par contre, il est intéressant de noter que la stratégie qui fournit le meilleur taux de succès est toujours celle qui fournit le meilleur estimé initial, même si le temps de calcul est plus long. Cela ouvre alors une piste de recherche supplémentaire.

Il peut également être noté que, bien que l'ajout de la contrainte non linéaire de l'équation (4.12) augmente le taux de convergence, il en résulte un coût beaucoup plus élevé en termes du temps de calcul. Enfin, il est remarqué que lorsque cette contrainte a été ajoutée aux optimisations avec une population (Opt5 à Opt9), le temps de calcul a augmenté, mais la performance ne s'est pas améliorée. La population pour déterminer l'estimé initial peut alors être considérée comme une meilleure alternative à la contrainte non-linéaire de

2. Puisque la méthode d'optimisation utilisée dans ce travail (SQP) est une méthode de descente du gradient, l'optimum global ne peut pas être garanti. Cependant, étant donné le nombre élevé d'optimisations effectuées dans les analyses (9 000 pour chaque manipulateur), il est raisonnable de conclure que la meilleure solution trouvée est l'optimum global.

l'équation (4.12).

## 4.4 Optimisation de la trajectoire avec contraintes cinématiques (PTC)

La solution au problème d'optimisation précédent (PÉR) fournit la limite supérieure des capacités de lancer d'un manipulateur en fonction des limites de position et de vitesse des articulations. Cependant, les manipulateurs ont généralement d'autres contraintes cinématiques comme des limites d'accélération et de saccade. Or, il est possible que la solution au PÉR ne soit pas réalisable en pratique. Cette section explore le problème de la trajectoire cinématique (PTC), c'est-à-dire le problème où la trajectoire avant et après le relâchement de l'objet est sujette à des contraintes cinématiques.

Comme la trajectoire d'un manipulateur est continue, l'espace de recherche du PTC est potentiellement de dimension infinie. Cependant, puisque les contraintes imposées sont des contraintes cinématiques, l'espace de recherche peut être réduit au même que celui du PÉR. En effet, pour le cas où des limites de position, de vitesse et d'accélération sont imposées, le déplacement minimal requis d'une articulation pour accélérer à une vitesse donnée (par exemple  $\dot{q}_{R,i}$ ) peut facilement être calculé avec

$$\Delta q_i = \frac{\dot{q}_{R,i}^2}{2\ddot{q}_{\max,i}} \quad (4.13)$$

où  $\ddot{q}_{\max,i}$  est l'accélération maximale de l'articulation  $i$  et  $\dot{q}_{R,i}$  est la vitesse de l'articulation  $i$  au moment où l'objet est relâché.

Ce déplacement est symétrique, c'est-à-dire, le déplacement requis pour accélérer est le même que le déplacement requis pour décélérer. De plus, ce déplacement s'applique même à une vitesse négative comme il est montré à la figure 4.5.

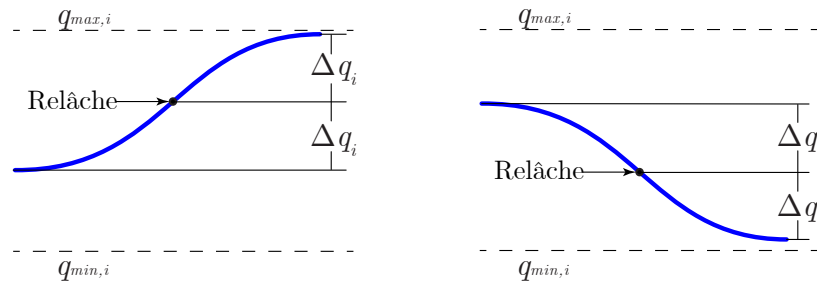


FIGURE 4.5 – Le déplacement requis pour la phase d'accélération et la phase de décélération est le même.

Modifier brusquement l'accélération d'une valeur à une autre peut être problématique pour les articulations mécaniques, particulièrement si elle change de signe. Pour cela, des limites

de saccade peuvent également être imposées. Le déplacement minimum  $\Delta q_i$  pour atteindre une vitesse donnée  $\dot{q}_{L,i}$  étant donné une accélération maximale  $\ddot{q}_{\max,i}$  et une saccade maximal  $\ddot{\ddot{q}}_{\max,i}$  peut toujours être calculé explicitement avec

$$\Delta q_i = \frac{1}{2\ddot{q}_{\max,i}} \left( \dot{q}_{L,i} - \frac{\ddot{q}_{\max,i}^2}{\ddot{\ddot{q}}_{\max,i}} \right)^2 + \frac{\ddot{q}_{\max,i}}{2\ddot{\ddot{q}}_{\max,i}} \left( \dot{q}_{L,i} - \frac{\ddot{q}_{\max,i}^2}{\ddot{\ddot{q}}_{\max,i}} \right) \quad (4.14)$$

qui est obtenu en intégrant la position en considérant que l'accélération suit un profil trapézoïdal (par exemple, saccade constante suivi d'accélération constante et ensuite de saccade négative constante, pour la phase d'accélération). Encore une fois, ce déplacement est symétrique en phase d'accélération et en phase de décélération.

Enfin, le problème d'optimisation de la trajectoire avec contraintes cinématiques peut formellement être exprimé sous la forme

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R} \quad & P(\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R) \\ \text{s.c.} \quad & |\dot{\mathbf{q}}_R| \preceq \dot{\mathbf{q}}_{\max} \\ & \mathbf{q}_{\min} \preceq \mathbf{q}_R - \Delta \mathbf{q} \\ & \mathbf{q}_R + \Delta \mathbf{q} \preceq \mathbf{q}_{\max} \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $\Delta \mathbf{q}$  est le vecteur contenant  $\Delta q_i$  pour chaque articulation calculé en utilisant soit l'équation (4.13) ou l'équation (4.14). Une trajectoire cinématique complète peut ensuite facilement être calculée à partir de la solution de ce problème. En outre, l'espace de recherche est le même que celui du PÉR. La solution à ce dernier problème peut potentiellement être utilisée pour résoudre le PTC.

#### 4.4.1 Méthodologie de l'analyse

Dans ce travail, l'équation utilisée pour calculer les éléments de  $\Delta \mathbf{q}$  est l'équation (4.13). Il doit toutefois être noté que, pour la plupart des manipulateurs, la limite de la saccade est grande. Par conséquent,  $\Delta \mathbf{q}$  calculé avec l'équation (4.13) et l'équation (4.14) sont souvent très proches.

Pour permettre l'évaluation de l'effet des limites d'accélération sur la capacité de lancer des manipulateurs, une analyse est effectuée avec une variété de limites d'accélération. Dans une procédure similaire à celle utilisée pour le PÉR présentée à la section 4.3.4, 1 000 optimisations sont effectuées pour chaque manipulateur avec sept limites d'accélération variant de 10 rad/s<sup>2</sup> à 0,5 rad/s<sup>2</sup>. Lorsque l'accélération maximale diminue, on peut s'attendre à ce que la distance maximale de lancer diminue également.

Les paramètres d'optimisation choisis pour cette analyse sont ceux de Opt5 présenté au tableau 4.1, c'est-à-dire l'équation (4.11) avec une population initiale de 50. Comme il a été



expliqué à la section 4.3.5, les meilleurs résultats pour les trois manipulateurs ont été obtenus avec ces paramètres.

Enfin, les critères présentés au tableau 4.4 sont calculés. Une solution valide dans ce cas est une solution où les contraintes sont respectées. La différence entre le taux de succès et le taux de convergence valide indiquera alors la difficulté à trouver la solution optimale par rapport à trouver une trajectoire valide. Puisque l'accélération maximale change d'une analyse à l'autre, calculer le facteur du temps pour obtenir un succès n'est pas pertinent pour ce problème.

TABLE 4.4 – Critères additionnels de l'évaluation pour le PTC.

Code	Description
Meilleur (m)	Meilleure valeur objective après l'optimisation
Moyenne (m)	Valeur objective moyenne après l'optimisation
Estimé moyen (m)	Valeur objective moyenne avant l'optimisation
Succès (%)	Taux de convergence (5% de la meilleure solution)
Valide (%)	Taux de convergence vers une solution valide
Temps (ms)	Temps de calcul moyen de l'optimisation

#### 4.4.2 Résultats

Les résultats de l'analyse sont présentés dans le tableau 4.5.

Quelques observations clés peuvent être notées dans ces résultats. La première est que le taux de succès de l'optimisation du PTC est nettement inférieur à celui du PÉR, particulièrement lorsque les limites d'accélération sont très restrictives. Cependant, la fréquence à laquelle l'optimisation converge vers une trajectoire valide, c'est-à-dire qui satisfait les contraintes cinématiques, est presque toujours 100%. Cela signifie que le PTC est un problème beaucoup plus difficile à résoudre que le PÉR.

Il peut également être noté que, lorsque les limites d'accélération deviennent plus restrictives, la capacité du lancer est en effet réduite en conséquence. De plus, des limites d'accélération plus faibles entraînent une diminution considérable du taux de réussite. Cela peut s'expliquer par le fait que l'espace des solutions qui respectent les contraintes cinématiques est considérablement réduit.

### 4.5 Optimisation de la trajectoire avec contraintes dynamiques (PTD)

Le dernier problème d'optimisation en lien avec le lancer étudié dans ce travail est celui de l'optimisation de la trajectoire pour maximiser la portée avec contraintes dynamiques (PTD). Ce problème impose alors des contraintes d'effort articulaire au lieu des contraintes d'accélération et de saccade étudiées à la section 4.4.

TABLE 4.5 – Résultats de l’analyse du PTC utilisant les paramètres d’optimisation Opt5

<b>Accel. (rad/s<sup>2</sup>)</b>	<b>10,0</b>	<b>5,00</b>	<b>2,50</b>	<b>1,50</b>	<b>1,00</b>	<b>0,75</b>	<b>0,50</b>
<b>Manipulateur 2R</b>							
Meilleur (m)	2,27	2,27	2,27	2,27	2,27	2,14	1,63
Moyenne (m)	1,82	1,80	1,75	1,66	1,59	1,45	1,18
Estimé moyen (m)	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	1,24	1,24
Succès (%)	63,3	62,3	59,2	50,4	40,0	36,3	33,3
Valide (%)	100	100	100	100	100	100	99,7
Temps (ms)	0,42	0,44	0,38	0,42	0,38	0,36	0,28
<b>Manipulateur 3R</b>							
Meilleur (m)	3,64	3,64	3,64	3,64	3,64	3,32	2,39
Moyenne (m)	3,17	3,20	3,12	2,95	2,79	2,47	1,73
Estimé moyen (m)	1,63	1,61	1,58	1,58	1,60	1,60	1,60
Succès (%)	73,2	73,1	69,3	59,2	44,1	40,1	31,5
Valide (%)	100	100	100	99,9	99,9	99,9	99,9
Temps (ms)	1,58	1,46	1,52	1,18	1,29	1,31	1,40
<b>Manipulateur 6R</b>							
Meilleur (m)	4,24	4,24	4,24	4,24	4,12	3,64	2,56
Moyenne (m)	3,03	2,98	2,89	2,71	2,50	2,16	1,55
Estimé moyen (m)	1,27	1,25	1,25	1,28	1,28	1,28	1,28
Succès (%)	4,00	4,80	3,20	2,90	7,80	7,30	4,60
Valide (%)	99,8	100	99,9	99,5	99,6	99,6	99,0
Temps (ms)	13,7	14,5	13,8	13,8	12,8	12,6	11,1

#### 4.5.1 Formulation du problème d’optimisation

Lorsque des contraintes dynamiques sont imposées, le déplacement nécessaire pour accélérer et décélérer ne peut pas être calculé facilement comme c’était le cas pour les équations (4.13) et (4.14) de la section 4.4. Par conséquent, le problème d’optimisation ne peut pas être exprimé sous une forme semblable à celui des équations (4.8) et (4.15). Dans ce cas, une trajectoire doit être générée et des contraintes cinématiques et dynamiques doivent être imposées tout au long de cette trajectoire. Le problème d’optimisation ressemble plus à celui

de l'équation (3.3) du chapitre 3. En effet celui-ci peut être exprimé sous la forme

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{q}(t_i)} P(\mathbf{q}(t_R), \dot{\mathbf{q}}(t_R)) \\
& \text{s.c.} \quad \frac{q_{j,\min} - q_j(t_i)}{|q_{j,\min}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{q_j(t_i) - q_{j,\max}}{|q_{j,\max}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\dot{q}_{j,\min} - \dot{q}_j(t_i)}{|\dot{q}_{j,\min}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\dot{q}_j(t_i) - \dot{q}_{j,\max}}{|\dot{q}_{j,\max}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\tau_{j,\min} - \tau_j(t_i)}{|\tau_{j,\min}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \frac{\tau_j(t_i) - \tau_{j,\max}}{|\tau_{j,\max}|} \leq 0, \quad t_i = 0, t_2, \dots, t_N, \quad j = 1, \dots, d \\
& \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \\
& \quad \dot{\mathbf{q}}(t_N) = \mathbf{0} \\
& \quad t_N > 0 \\
& \quad t_R < t_N
\end{aligned} \tag{4.16}$$

où  $t_R$  est le temps auquel l'objet est relâché. Puisque l'objet doit être relâché avant la fin de la trajectoire, la dernière contrainte est ajoutée. Enfin, deux des contraintes qui imposent le respect de la tâche dans l'équation (3.3) sont retirées : celles qui imposent la position articulaire initiale et finale. Pour cette application, la position initiale et finale ne sont pas imposées, la seule contrainte est que la trajectoire débute et termine au repos.

Le vecteur d'optimisation est défini similairement au vecteur utilisé dans le chapitre 3, c'est-à-dire, les paramètres nécessaires pour calculer la trajectoire de chaque articulation sont inclus séquentiellement et le temps total de la trajectoire est inclus après. Pour cette application, le temps auquel l'objet est relâché est ajouté à la fin. Celui-ci est nécessaire pour calculer l'état cinématique du manipulateur au moment où l'objet est relâché. Cet état est nécessaire pour calculer la distance du lancer.

Enfin, il est à noter que la fonction objectif de ce problème peut être calculée à l'aide de l'équation (4.10) ou à l'aide de l'équation (4.11). Dans ce travail, la fonction objectif modifiée de l'équation (4.11) est employée.

#### 4.5.2 Méthodologie de l'analyse

La procédure de l'analyse de ce problème est un mélange de l'analyse 1 du chapitre 3 et des analyses des sections 4.3 et 4.4. Spécifiquement, le tableau 4.6 résume les paramètres des essais effectués lors de cet analyse.

Pour cette application, il n'y a pas les dix tâches comme au chapitre 3, car déterminer la portée maximale du manipulateur est une tâche unique pour un manipulateur. Le nombre

Trajectoire	$n$	$pop$	Essais
SP	2 à 10	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	100
PC	4 à 12	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	100
PN	4 à 12	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	100
BE	4 à 12	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	100
FC	2 à 6	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	100
FN	2 à 6	1, 5, 10, 20, 30, 50, 100	100

TABLE 4.6 – Paramètres de la génération de trajectoire pour l’analyse.

d’optimisations effectuées lors de cette analyse est alors de 32 200 optimisations pour chacun des manipulateurs, soit 96 600 optimisations au total.

Dans tous les tests de cette section, la masse ajoutée à l’organe terminal est de 5 kg. Puisque soulever des charges lourdes n’est pas l’objectif de ce chapitre, une masse de 5 kg est considérée considérable, mais pas excessive.

### 4.5.3 Résultats

Similairement au chapitre 3, les résultats de l’analyse sont présentés en trois parties. Premièrement, l’effet de la population utilisée pour déterminer l’estimé initial est évalué. Ensuite, les différents types de trajectoires sont évalués. Enfin, des résultats semblables à ceux présentés aux tableaux 4.3 et 4.5 sont présentés pour chaque manipulateur et pour chaque type de trajectoire en considérant la meilleure combinaison de valeur de  $n$  et de population.

### Évaluation de l’effet de la population

L’indice de performance du chapitre 3 est rappelé ici pour évaluer la performance d’une méthode donnée. Celui-ci est de la forme

$$I = W_1 F_{\text{temps}} + W_2 F_{\text{moyen}} + W_3 F_{\text{meilleur}} \quad (4.17)$$

où  $\sum_{i=1}^3 W_i = 1$ ,  $F_{\text{temps}} = \hat{T}_{\text{succes}}/T_{\text{succes}}$ ,  $F_{\text{moyen}} = \hat{f}/f_{\text{moyen}}$  et  $F_{\text{meilleur}} = \hat{f}/f_{\text{meilleur}}$ .

Les résultats de l’analyse sont présentés en fonction de la taille de la population à la figure 4.6. Cette figure montre les résultats sous la forme de diagrammes en boîte où 129 résultats sont montrés pour chaque taille de population. Cela représente les six types de trajectoire, les neuf valeurs de  $n$  (ou cinq pour les séries de Fourier) et les trois manipulateurs étudiés.

Comme il a été fait au chapitre 3, la meilleure valeur de  $n$  pour chaque type de trajectoire peut être déterminée pour filtrer les résultats. La figure 4.7 montre les résultats filtrés où la meilleure valeur de  $n$  est celle qui produit la meilleure médiane du facteur de performance. Chaque barre des diagrammes de cette figure contient 18 données pour les six types de trajectoires et les trois manipulateurs étudiés. Les valeurs de  $n$  qui produisent les meilleurs résultats sont présentées au tableau 4.7. Il peut être observé que la meilleure valeur de  $n$  est la plus petite dans tous les

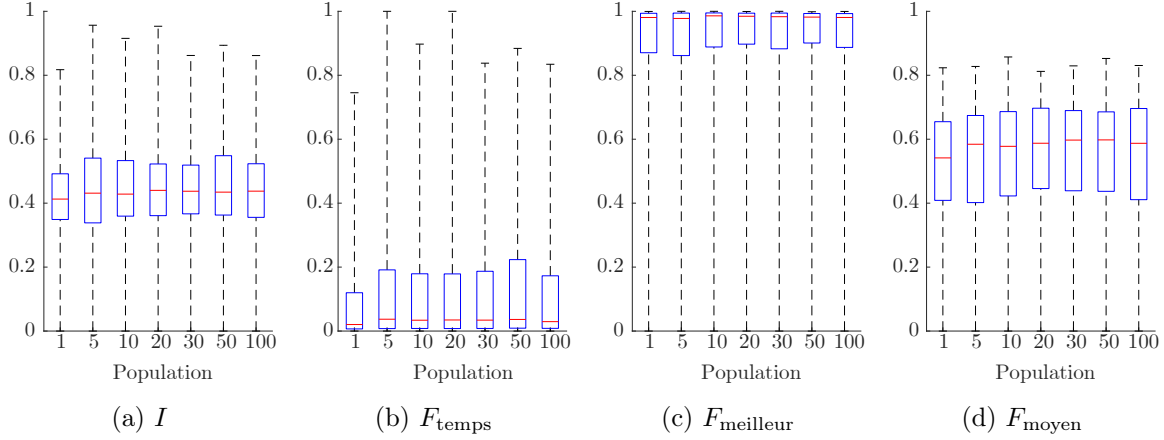


FIGURE 4.6 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population.

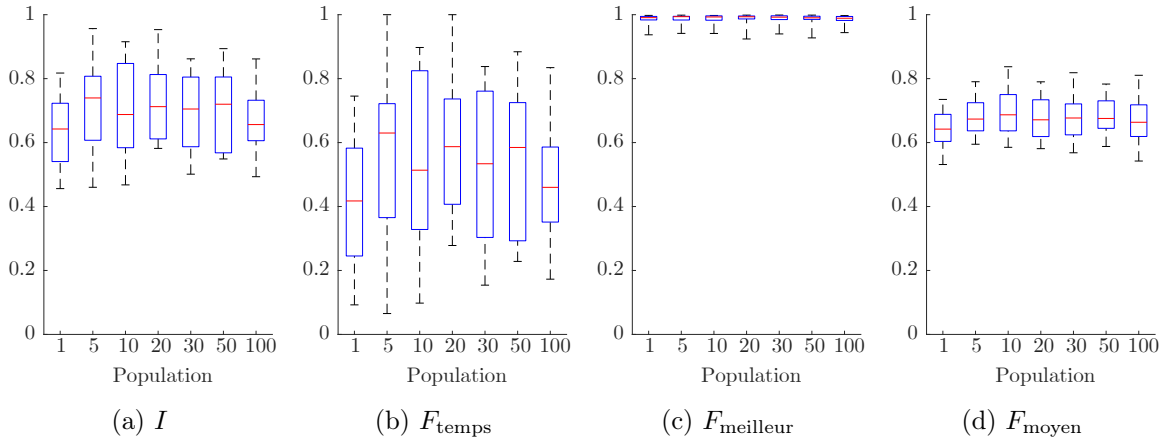


FIGURE 4.7 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction de la population avec la meilleure valeur de  $n$ .

cas sauf les trajectoires BE où c'est la deuxième valeur la plus petite qui produit les meilleurs résultats.

TABLE 4.7 – Meilleures valeurs de  $n$  pour chaque type de trajectoire.

trajectoire	n	trajectoire	n
BE	5	PC	4
FC	2	PN	4
FN	2	SP	2

Les résultats de ces deux figures, particulièrement la figure 4.7 montrent qu'il est relativement difficile de déterminer la meilleure taille de population. Une population de 20 est celle qui produit la meilleure médiane du facteur de performance  $I$  par une très petite marge, mais celle-ci n'est pas la meilleure pour tous les types de trajectoires.

## Évaluation de l'effet du type de trajectoire

Pour évaluer l'effet du type de trajectoire sur la performance de l'optimisation, les mêmes résultats que la figure 4.6 sont présentés à la figure 4.8, mais en fonction du type de trajectoire. Dans chaque barre de cette figure, 189 résultats sont présentés (ou 105 pour les séries de Fourier). Cela représente les sept tailles de population, les neuf (ou cinq) valeurs de  $n$  et les trois manipulateurs.

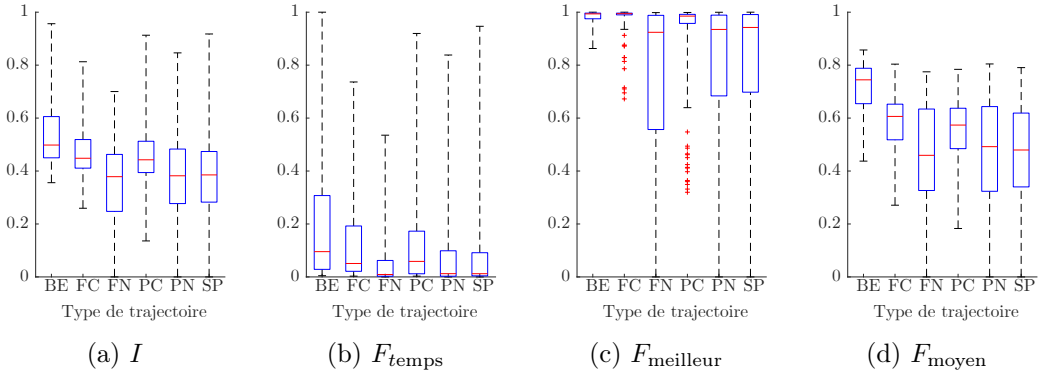


FIGURE 4.8 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajectoire.

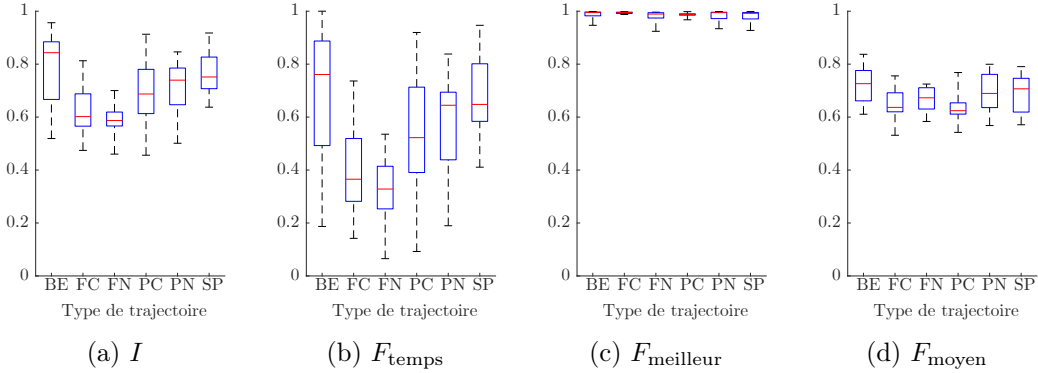


FIGURE 4.9 – Diagrammes en boîte des facteurs de performance en fonction du type de trajectoire avec la meilleure valeur de  $n$ .

Encore une fois, les résultats sont filtrés avec la meilleure valeur de  $n$  et présentés à la figure 4.9. Chaque barre de cette figure contient alors 21 résultats, ce qui correspond aux sept tailles de population et aux trois manipulateurs. Comme cela était le cas dans l'analyse de la capacité à soulever des charges lourdes au chapitre 3, ce sont les trajectoires BE qui produisent les meilleurs résultats pour le lancer dynamique.

## Évaluation de la performance de chaque manipulateur

Enfin, la performance de chaque manipulateur est évaluée. Dans ce cas, les résultats sont présentés sous forme de tableau comme les tableaux 4.3 et 4.5 afin de permettre une meilleure

comparaison. Le tableau 4.8 présente la meilleure distance trouvée, la moyenne, le taux de succès, le temps et le facteur  $F_{\text{temps}}$  pour chaque manipulateur et pour chaque type de trajectoire. Chaque résultat est sélectionné en fonction de la meilleure combinaison de valeur de  $n$  et taille de population. Ces deux valeurs sont également inscrites dans ce tableau.

TABLE 4.8 – Résultats de l’analyse dynamique en fonction du type de trajectoire pour chaque manipulateur

trajectoire	BE	FC	FN	PC	PN	SP
$n$	5	2	2	4	4	2
population	100	20	5	5	20	20
<b>Manipulateur 2R</b>						
Meilleur (m)	<b>2,26</b>	2,25	2,25	<b>2,26</b>	<b>2,26</b>	2,25
Moyenne (m)	<b>1,72</b>	1,34	1,53	1,41	1,59	1,67
Succès (%)	23	13	12	11	19	<b>25</b>
Valide (%)	81	71	62	<b>88</b>	76	82
Temps (ms)	20,3	15,1	17,0	<b>9,0</b>	14,0	11,4
$F_{\text{temps}}$	0.49	0.37	0.30	0.53	0.59	<b>0.95</b>
<b>Manipulateur 3R</b>						
Meilleur (m)	3,63	<b>3,64</b>	3,63	<b>3,64</b>	<b>3,64</b>	3,63
Moyenne (m)	<b>3,03</b>	2,65	2,64	2,80	2,88	2,84
Succès (%)	31	<b>32</b>	28	31	27	<b>32</b>
Valide (%)	74	66	62	<b>80</b>	75	78
Temps (ms)	71,2	45,3	56,8	<b>35,1</b>	43,6	40,4
$F_{\text{temps}}$	0.45	0.74	0.51	<b>0.92</b>	0.64	0.83
<b>Manipulateur 6R</b>						
Meilleur (m)	4,11	4,22	4,17	4,14	4,10	4,13
Moyenne (m)	2,77	2,57	<b>2,81</b>	2,74	2,73	2,62
Succès (%)	<b>16</b>	4	1	4	5	6
Valide (%)	<b>87</b>	66	56	77	74	72
Temps (ms)	781	370	458	349	337	<b>304</b>
$F_{\text{temps}}$	<b>0.61</b>	0.32	0.07	0.34	0.44	0.59

#### 4.5.4 Vidéo explicative

Comme c’était le cas pour le chapitre 3, une vidéo a été créée pour fournir un aperçu des travaux et des résultats de ce chapitre ([chapitre4.mp4](#)).

## 4.6 Conclusion : lancer un objet

Dans ce chapitre, l’application qui consiste à lancer des objets à l’aide de manipulateurs robotiques a été étudiée. Cette étude s’est faite à l’aide des trois manipulateurs présentés à la section 1.5.

Cette application a été étudiée à trois niveaux. Premièrement, le problème de déterminer l’état cinématique d’un manipulateur au moment où l’objet est relâché (PÉR) a été analysé.

Ensuite, ce chapitre a analysé le problème où la trajectoire avant et après que l'objet soit relâché est considérée. Celle-ci est contrainte par des limites cinématiques articulaires (PTC). Enfin, ce chapitre a analysé le problème où des contraintes dynamiques sont imposées (PTD). En effectuant ces analyses, plusieurs observations intéressantes ont été relevées.

Premièrement, il a été démontré que résoudre le problème de maximisation de la portée n'était pas aussi trivial que l'on pourrait le penser au départ, même pour le simple manipulateur 2R plan. Le lancement à un angle de  $45^\circ$  est considérablement moins performant que les résultats obtenus à l'aide d'une optimisation. Cela signifie que la position de l'organe terminal au moment du lancer n'est pas négligeable par rapport à la vitesse du lancer.

D'autre part, lors de la résolution des problèmes d'optimisation, il a été noté que l'amélioration de la qualité de l'estimé initial augmentait considérablement le taux de convergence, particulièrement pour les problèmes PÉR et PTC. Une méthode très efficace pour y parvenir consiste à générer une population d'estimés initiaux et de démarrer l'optimisation à partir du meilleur. Cette approche offre un bon compromis entre la convergence et le temps de calcul. D'autres méthodes d'optimisation plus globales pourraient également être étudiées dans l'avenir pour améliorer davantage les performances de l'optimisation.

Il a aussi été démontré que la première articulation verticale des manipulateurs 3R et 6R contribuait à une augmentation significative des capacités de lancer. Cela est en dépit du fait que la première articulation, étant verticale, ne contribue pas à la vitesse verticale de l'organe terminal. Une amélioration de la portée maximale a aussi été remarquée avec l'ajout du poignet pour le manipulateur 6R. Cela est malgré le fait que les membrures du poignet du manipulateur 6R sont relativement courtes et que la longueur totale du manipulateur est identique.

Lors de l'analyse du problème PTC, il a été observé que les limites doivent être réduites considérablement avant qu'une diminution de la portée maximale ne soit engendrée. En effet, la limite de l'accélération peut être réduite jusqu'à entre 1,5 et 1,0  $\text{rad/s}^2$  et une trajectoire cinématique optimale peut être trouvée. De plus, lorsque les limites d'accélération étaient raisonnables, il a été possible de trouver une trajectoire cinématique qui effectue le lancer optimal obtenu au problème PÉR.

En outre, il a été observé qu'il est également possible de résoudre le problème PTD, avec les contraintes dynamiques. En effet, avec les méthodes des chapitres 2 et 3, il est possible de trouver des trajectoires qui satisfont les contraintes dynamiques et cinématiques des manipulateurs. En outre, même avec une charge de 5 kg, il est possible de trouver des trajectoires effectuant un lancer avec la même portée que pour les contraintes cinématiques. Cela valide encore une fois que les méthodes d'optimisation de trajectoire explorées dans ce travail sont intéressantes pour diverses applications.



Enfin, un des résultats les plus intéressants de ce chapitre est que la portée maximale obtenue lors de la résolution des trois problèmes (PÉR, PTC et PTD) est presque la même. Autrement dit, la portée obtenue dans le problème PÉR n'est pas seulement la limite théorique, mais elle est également réalisable tout en respectant les contraintes cinématiques et dynamiques des manipulateurs.

## Chapitre 5

# Conception des manipulateurs

*"Those who can imagine anything, can create the impossible."*

— Alan Turing

### Résumé

Le chapitre actuel porte sur l'incorporation des méthodes étudiées aux chapitres précédents dans le processus de conception des manipulateurs. Ce chapitre débute avec une introduction du problème de conception étudié et les contraintes appliquées sur celui-ci. Ensuite, la majeure partie de ce chapitre est présentée en deux sections principales. Premièrement, un problème de conception dans lequel seules des contraintes sur la cinématique sont imposées est présenté. Secondement, un problème de conception dans lequel les méthodes impliquant des contraintes dynamiques sont utilisées est présenté. Ce chapitre est enfin clos par une brève discussion.

## 5.1 Introduction

Il a été vu aux précédents chapitres qu'il est possible d'augmenter les capacités des manipulateurs pour des tâches spécifiques en effectuant une optimisation de la trajectoire. Il est alors concevable que la capacité de soulever des charges lourdes et la capacité de lancer des objets soient utilisées comme critère d'évaluation d'un manipulateur.

Bien entendu, un grand nombre de facteurs sont généralement pris en compte lors de la conception d'un nouveau manipulateur robotique. Ce chapitre présente deux exemples d'optimisation de la conception des manipulateurs qui utilisent les méthodes explorées dans cette thèse. Le premier exemple est la conception de la longueur des membrures des manipulateurs pour maximiser leur portée maximale avec contraintes cinématiques et leur espace de travail. Ces deux critères impliquent seulement des contraintes cinématiques et négligent les capacités dynamiques des manipulateurs. Ce problème de conception est présenté à la section 5.2.

Le second exemple est également la conception de la longueur des membrures, mais cette fois pour maximiser à la fois la portée maximale de lancer avec des contraintes dynamiques ainsi que la charge maximale que le manipulateur est capable de soulever. Ce problème utilise les méthodes présentées au chapitre 3 et à la section 4.5. Celui-ci est présenté à la section 5.3.

Il est important de noter que l'objectif des travaux présentés dans ce chapitre n'est pas de faire une simulation réaliste de la conception d'un manipulateur. L'intention de ce chapitre est plutôt d'explorer la possibilité d'incorporer les travaux présentés aux chapitres précédents dans le processus de conception d'un manipulateur.

## 5.2 Conception avec contraintes cinématiques

Comme il a été indiqué précédemment, la portée maximale d'un manipulateur est une propriété du manipulateur et non d'une tâche donnée. Par conséquent, celle-ci peut être considérée comme une caractéristique de la capacité d'un manipulateur et donc utile comme paramètre dans la conception cinématique d'un manipulateur. Cette section présente un exemple de conception des manipulateurs en prenant en compte leur capacité de lancer des objets avec des contraintes cinématiques.

Cette section présente d'abord les indices de performance cinématiques utilisés pour évaluer un manipulateur. Ensuite, la méthodologie de l'analyse effectuée est détaillée. Enfin, les résultats de l'analyse sont présentés.

### 5.2.1 Indices de performance

Dans ce premier problème de conception des manipulateurs, deux critères d'évaluation de la capacité d'un manipulateur sont étudiés. Spécifiquement, la capacité de lancer des objets avec

des contraintes cinématiques et l'espace de travail du manipulateur.

### Capacité de lancer avec des contraintes cinématiques

En premier lieu, un indice de la performance en terme de la capacité de lancer des objets avec des contraintes cinématiques peut être défini de la forme

$$I_{\text{PTC}} = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{ultime}}} \quad (5.1)$$

où  $P_{\text{max}}$  est la portée maximale pour le présent manipulateur et  $P_{\text{ultime}}$  est la portée maximale considérée suffisante pour une application visée. Cette dernière est importante, car elle permet de normaliser et de borner l'indice de performance. Il est également à noter que, dans ce travail,  $I_{\text{PTC}} = 1$  lorsque  $P_{\text{max}} > P_{\text{ultime}}$ .

La portée maximale est déterminée à l'aide la méthode présentée à la section 4.4.1. La meilleure valeur obtenue après 100 optimisations est choisie comme la portée maximale.

### Espace de travail

Le second critère de performance est l'espace de travail total des manipulateurs. Cet espace est une surface pour le manipulateur 2R et est un volume pour les autres. L'indice de performance utilisé est alors de la forme

$$I_{\text{espace}} = \frac{E}{E_{\text{ultime}}} \quad (5.2)$$

où  $E$  est l'espace de travail du manipulateur et  $E_{\text{ultime}}$  est la valeur considérée suffisante de l'espace de travail.

Pour le manipulateur 2R, l'espace de travail est

$$E_{2\text{R}} = \pi [(L_1 + L_2)^2 - (L_1 - L_2)^2] . \quad (5.3)$$

Pour le manipulateur 3R, l'espace de travail est

$$E_{3\text{R}} = \frac{4}{3}\pi [(L_2 + L_3)^3 - |(L_2 - L_3)^3|] . \quad (5.4)$$

Enfin, l'espace de travail pour le manipulateur 6R dépend de la longueur de la membrure la plus longue et de la somme des deux autres. Pour les raisons expliquées à la prochaine section, l'espace de travail n'est pas considéré comme un indice de performance pour ce manipulateur. La portée maximale seule est utilisée.

### Indice de performance global

Puisque deux indices de performance ont été présentés dans cette section, un indice plus global peut être élaboré de la forme

$$I_{\text{cin}} = A_{\text{cin}}I_{\text{PTC}} + (1 - A_{\text{cin}})I_{\text{espace}} \quad (5.5)$$

où  $A_{\text{cin}}$  est la constante qui détermine l'importance du lancer par rapport à l'espace de travail. La valeur de  $A_{\text{cin}}$  est entre 0 et 1 et, puisque les deux autres indices sont normalisés, la valeur de  $I_{\text{cin}}$  est également entre 0 et 1.

Les deux indices de performance  $I_{\text{PTC}}$  et  $I_{\text{espace}}$  sont partiellement complémentaires. Il peut être attendu que l'indice  $I_{\text{PTC}}$  bénéficie de membrures distales plus longues, car la vitesse angulaire des membrures distales peut être plus grande. En contre partie, l'indice  $I_{\text{espace}}$  bénéficie de membrures de longueurs égales, car l'espace de travail près de la base du manipulateur en dépend. Par contre, les deux indices bénéficient de membrures plus longues de façon générale. Pour cette raison, une contrainte additionnelle est ajoutée sur la longueur de la somme des deux membrures. Ces contraintes sont définies à la section suivante.

### 5.2.2 Méthodologie de l'analyse

Le problème d'optimisation pour la conception des manipulateurs en tenant en compte leur capacités cinématiques est de la forme

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{L}} \quad & I_{\text{cin}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{c}(\mathbf{L}) \preceq \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{L}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.6}$$

où  $\mathbf{L}$  contient la longueur de chaque membrure à optimiser pour chaque manipulateur,  $\mathbf{c}(\mathbf{L})$  contient les contraintes d'inégalité et  $\mathbf{g}(\mathbf{L})$  contient les contraintes d'égalité du problème d'optimisation. Ces contraintes sont différentes pour chaque manipulateur, donc celles-ci sont présentées séparément.

#### Manipulateur 2R

Le problème étudié pour le manipulateur 2R est celui où la longueur des membrures  $L_1$  et  $L_2$  est variable et l'indice de performance de l'équation (5.5) est à maximiser. Comme il a été mentionné, cet indice n'est pas borné si la longueur totale des deux membrures n'est pas bornée. Pour cette raison, les contraintes suivantes sont imposées lors de l'analyse de ce problème de conception :

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= 2 \\ L_1 &\geq 0,2 \\ L_2 &\geq 0,2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

La combinaison de ces contraintes produit un problème d'optimisation à une seule variable, car la longueur de la seconde membrure peut être déterminée avec

$$L_2 = 2 - L_1.$$

Cela facilite la résolution du problème et facilitera également la présentation des résultats.

Par ailleurs, les valeurs  $P_{\text{ultime}}$  et  $E_{\text{ultime}}$  utilisées pour ce manipulateur sont

$$\begin{aligned} P_{\text{ultime}} &= 14,62\text{m} \\ E_{\text{ultime}} &= 12,57\text{m}^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ces valeurs sont calculées en optimisant le mécanisme en ne considérant qu'un seul critère à la fois. Autrement dit, la valeur de  $P_{\text{ultime}}$  est la distance de lancer maximale possible et la valeur de  $E_{\text{ultime}}$  est l'espace de travail le plus grand possible. En pratique, les valeurs de  $P_{\text{ultime}}$  et de  $E_{\text{ultime}}$  seraient déterminées par le concepteur en fonction des besoins de l'application.

Enfin, l'analyse est complétée avec cinq valeurs de  $A_{\text{cin}}$ , soit 0, 0,25, 0,5, 0,75 et 1. Cela permettra d'étudier son effet sur le manipulateur qui est considéré optimal.

### Manipulateur 3R

Pour le manipulateur 3R, la même procédure que celle décrite ci-haut pour le manipulateur 2R est utilisée. La différence principale est que les valeurs ultimes utilisées pour calculer les indices de performance changent. Les valeurs  $P_{\text{ultime}}$  et  $E_{\text{ultime}}$  utilisées pour ce manipulateur sont

$$\begin{aligned} P_{\text{ultime}} &= 19,43\text{m} \\ E_{\text{ultime}} &= 33,51\text{m}^3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Encore une fois, ces valeurs correspondent aux limites théoriques de ces deux facteurs pour les contraintes données.

Tout comme pour le robot 2R, l'analyse est effectuée avec cinq valeurs de  $A_{\text{cin}}$ , soit 0, 0,25, 0,5, 0,75 et 1.

### Manipulateur 6R

Enfin, le problème de conception du manipulateur 6R est semblable, mais légèrement différent de celui des manipulateurs 2R et 3R. Premièrement, le manipulateur a plus de membrures. Le nombre de variables est alors plus grand. Cependant, dans ce travail, seules trois longueurs sont considérées pertinentes pour le lancer, soient  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ . Les longueurs  $L_0$ ,  $L_4$  et  $L_5$  sont considérées fixes. Les membrures sélectionnées sont les membrures qui sont principalement responsables de la vitesse dans le plan du lancer puisque leurs axes sont parallèles et perpendiculaires au champ gravitationnel.

En outre, l'espace de travail de cette architecture de manipulateur est une sphère ou une coque sphérique dont le rayon extérieur est la somme des longueurs des membrures ( $L_1 + L_2 + L_3$ ). Le rayon intérieur dépend de la membrure la plus longue et de la somme des longueurs des autres. Si aucune des longueurs n'est supérieure à la somme des deux autres, il n'y a pas de limite interne et l'espace de travail est une sphère complète. Cela fait de l'espace de travail une fonction constante pour une grande partie de l'espace de conception si la longueur totale

$(L_1 + L_2 + L_3)$  est constante. Par conséquent, cet objectif d'optimisation est sans intérêt. La conception cinématique du manipulateur 6R étudié dans ce travail n'optimisera donc que la distance maximale du lancer. Les contraintes imposées pour ce problème sont alors

$$\begin{aligned}
L_1 + L_2 + L_3 &= 2 \\
L_1 &\geq 0,2 \\
L_2 &\geq 0,2 \\
L_3 &\geq 0,2 \\
L_1 &\leq L_2 + L_3 \\
L_2 &\leq L_1 + L_3 \\
L_3 &\leq L_1 + L_2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Les trois dernières contraintes assurent qu'aucune longueur n'est plus grande que la somme des deux autres. Cela assure à son tour que l'espace de travail est constant et maximal. Il est à noter que ces contraintes produisent un problème d'optimisation à deux variables. En effet, la valeur de  $L_3$  peut être calculée avec

$$L_3 = 2 - L_1 - L_2.$$

Enfin, puisqu'il n'y a plus qu'un facteur de performance, l'indice de performance de l'équation (5.5) n'est plus nécessaire. La portée maximale du manipulateur est alors directement utilisée comme fonction objectif.

### 5.2.3 Résultats de la conception cinématique des manipulateurs

#### Manipulateur 2R

La figure 5.1 montre les résultats de l'analyse pour le manipulateur 2R. Dans cette figure, les courbes représentent la valeur objective en fonction de la longueur de la membrure proximale  $L_1$  pour les différentes valeurs de  $A_{\text{cin}}$ . Les croix bleues représentent la valeur optimale de chaque courbe.

Il peut être observé à partir de la figure 5.1 que la solution optimale dépend de la valeur de  $A_{\text{cin}}$ . En effet, pour effectuer un lancer optimal ( $A_{\text{cin}} = 1$ ), la longueur de la membrure distale doit être maximisée, car celle-ci peut avoir une vitesse angulaire et une accélération angulaire plus grandes. En revanche, les deux membrures doivent avoir la même longueur pour maximiser l'espace de travail ( $A_{\text{cin}} = 0$ ).

Afin d'avoir un meilleur aperçu de ces résultats, les manipulateurs optimaux pour chaque valeur de  $A_{\text{cin}}$  sont illustrés à la figure 5.2.

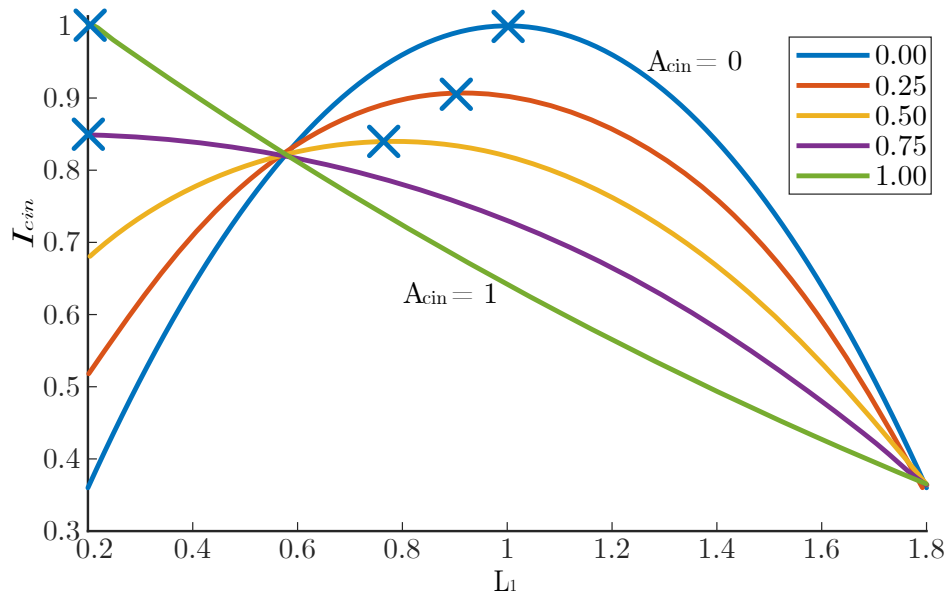


FIGURE 5.1 – Courbe de la fonction objectif en fonction de la longueur de la première membrure du manipulateur 2R pour différentes valeurs de  $A_{cin}$ .

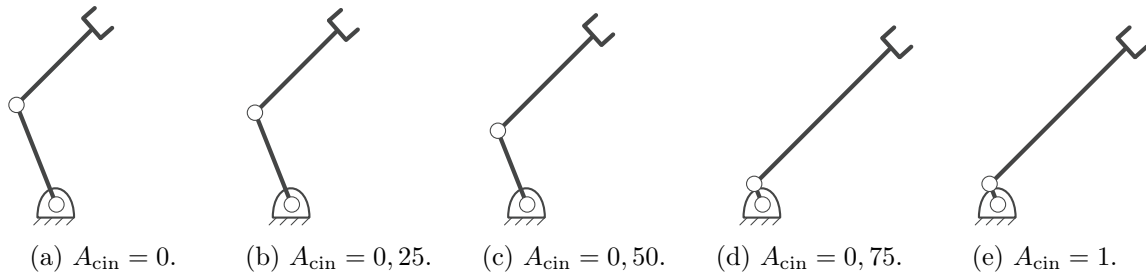


FIGURE 5.2 – Les manipulateurs 2R optimaux en fonction de la valeur de  $A_{cin}$  pour la conception avec contraintes cinématiques.

### Manipulateur 3R

La figure 5.3 montre les résultats de l'analyse pour le manipulateur 3R. Cette figure est semblable à la figure 5.1 : chacune des courbes représente la valeur objective en fonction de la longueur de la membrure proximale  $L_1$  et les croix bleues représentent la valeur optimale pour chaque valeur de  $A_{cin}$ .

Il peut être observé à partir de la figure 5.3 que la solution optimale dépend de la valeur de  $A_{cin}$  de la même façon que pour le manipulateur 2R. En effet, pour effectuer un lancer optimal ( $A_{cin} = 1$ ), la longueur de la membrure distale  $L_2$  doit être maximisée, car celle-ci peut avoir une vitesse angulaire et une accélération angulaire plus grandes. En revanche, les deux membrures doivent avoir la même longueur pour maximiser l'espace de travail ( $A_{cin} = 0$ ).



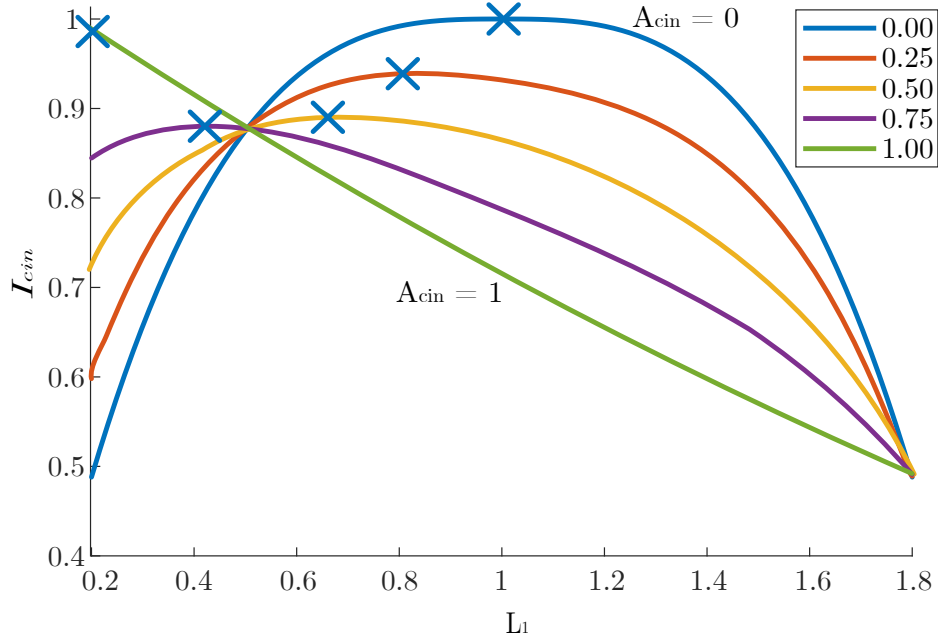


FIGURE 5.3 – Résultats de l’analyse de la conception avec contraintes cinématiques du manipulateur 3R.

La courbe de l’espace de travail est légèrement différente parce que l’espace de travail est un volume et donc cubique au lieu de quadratique comme c’était le cas pour le manipulateur 2R. Cependant, les résultats sont très semblables : plus l’espace de travail est important pour la conception, plus les membrures doivent être proches de la même longueur et plus la portée est importante pour la conception, plus la membrure distale doit être longue.

Comme pour le manipulateur 2R, les manipulateurs optimaux pour chaque valeur de  $A_{cin}$  sont illustrés à la figure 5.4 afin de donner un meilleur aperçu des résultats.

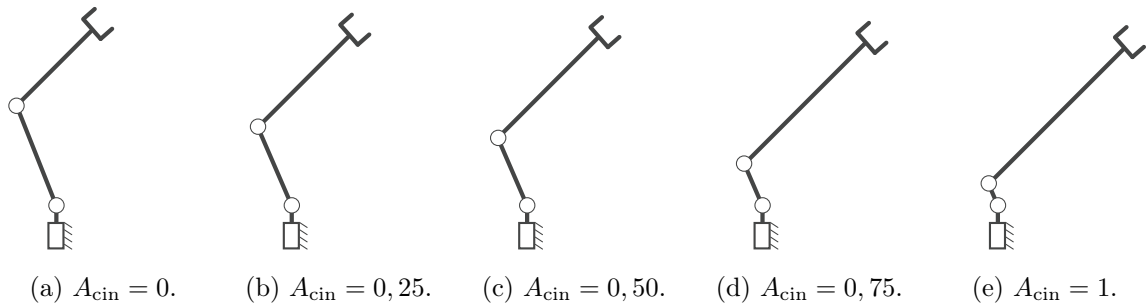


FIGURE 5.4 – Les manipulateurs 3R optimaux en fonction de la valeur de  $A_{cin}$  pour la conception avec contraintes cinématiques.

## Manipulateur 6R

La figure 5.5 montre les résultats de l'analyse pour le manipulateur 6R. Cette fois, il n'y a pas de valeur de  $A_{cin}$ , car la capacité de lancer est le seul critère d'évaluation. Cette figure montre alors les courbes de niveau (Hughes-Hallett et collab., 2017) de la fonction objectif en fonction des longueurs  $L_1$  et  $L_2$ . Les nombres dans cette figure indiquent la valeur objective et les courbes de niveau indiquent là où la valeur objective est constante. Les contraintes de l'équation (5.10) sont également illustrées dans cette figure. Il est à noter que puisque ces contraintes sont linéaires, le problème d'optimisation est convexe et facilement résolu avec des méthodes comme l'algorithme du simplexe (Dantzig et collab., 1955; Boyd et Vandenberghe, 2004).

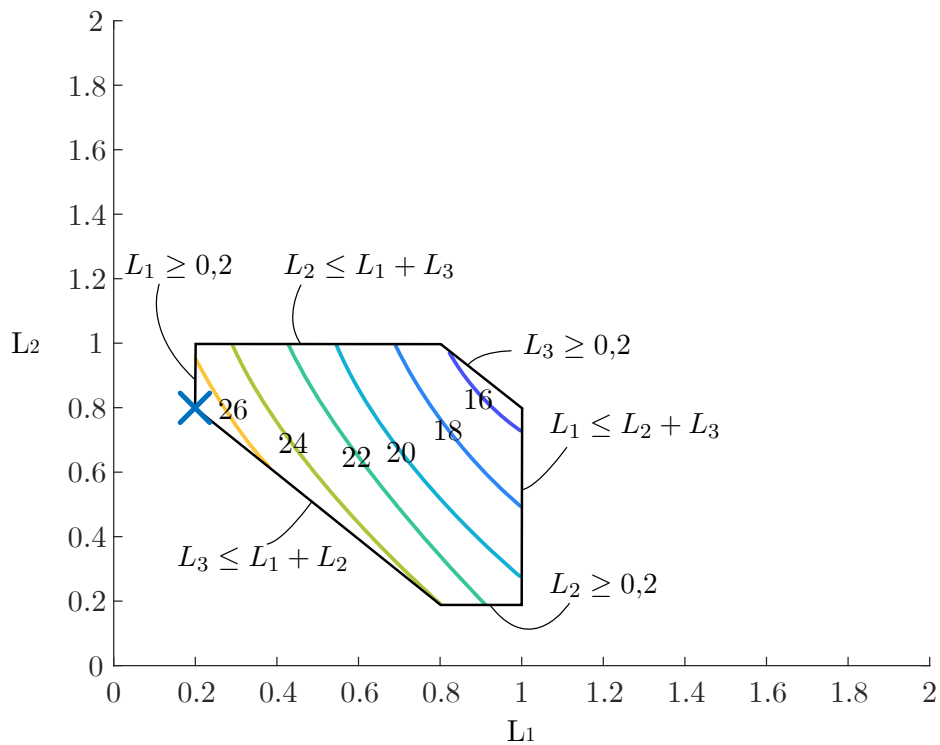


FIGURE 5.5 – Résultats de l'analyse de la conception avec contraintes cinématiques du manipulateur 6R.

Il peut être observé que la capacité de lancer des objets est maximale lorsque la longueur  $L_3$  est maximale (1 m) et que la longueur  $L_1$  est courte (0,2 m). La longueur  $L_2$  est alors maximale dans ce qui reste (0,8 m). Le point optimal est représenté par une croix bleue sur le graphe. Ce manipulateur est illustré à la figure 5.6. Cela concorde avec les résultats pour les manipulateurs 2R et 3R où la portée est maximisée lorsque les membrures distales sont longues.

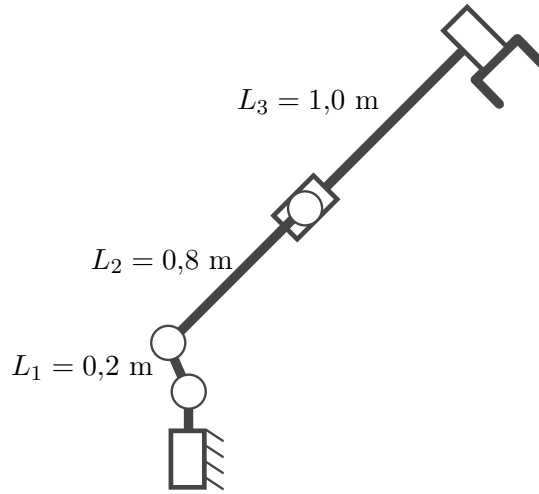


FIGURE 5.6 – Le manipulateur 6R optimal pour la conception avec contraintes cinématiques.

### 5.3 Conception avec contraintes dynamiques

Le second problème de conception étudié dans ce travail est l’optimisation des longueurs des membrures, mais pour des tâches qui requièrent des trajectoires dynamiques. Spécifiquement, la tâche de soulever des charges lourdes et le lancer avec des contraintes dynamiques. Cette section présente d’abord les indices de performance utilisés pour évaluer un manipulateur. Ensuite, la méthodologie de l’analyse effectuée est détaillée. Enfin, les résultats de l’analyse sont présentés.

#### 5.3.1 Indices de performance

Pour ce problème, deux indices de performance sont étudiés. Le premier est la capacité de lancer des objets en tenant en compte les contraintes dynamiques. Le second est la capacité de soulever des charges lourdes avec les dix tâches utilisées au chapitre 3. Ces deux indices sont complémentaires dans le sens qu’ils ne demandent pas nécessairement les mêmes caractéristiques du manipulateur.

#### Capacité de lancer avec contraintes dynamiques

Comme c’était le cas à la section 4.5, une masse de 5 kg est choisie pour déterminer la portée maximale du manipulateur. En premier lieu, un indice de performance peut être élaboré de la forme

$$I_{\text{PTD}} = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{ultime}}} \quad (5.11)$$

où  $P_{\text{max}}$  est la portée maximale pour le présent manipulateur et  $P_{\text{ultime}}$  est la portée maximale considérée suffisante pour une application visée. Cette dernière est importante pour deux

raisons. Premièrement, elle permet de rendre l'indice de performance adimensionnel et donc potentiellement compatible avec le second indice de performance. En outre, la présence d'une limite  $P_{\text{ultime}}$  permet de borner la valeur de performance pour ne pas dominer l'autre indice. Cela sera particulièrement important pour le second indice.

Dans ce cas, la portée maximale est déterminée avec la méthode présentée à la section 4.5.2. Cependant, l'objectif ici n'est pas d'évaluer les méthodes d'optimisation. Par conséquent, la méthode BE-5-100 est utilisée pour la détermination de la capacité de lancer des objets avec des contraintes dynamiques, car celle-ci donnait les résultats les plus cohérents pour les trois manipulateurs.

Il est à noter que si la valeur de  $P_{\text{max}}$  est supérieure à  $P_{\text{ultime}}$ , l'indice de performance  $I_{\text{PTD}}$  est fixé à 1. L'indice de performance  $I_{\text{PTD}}$  est alors compris entre 0 et 1.

Il est enfin noté que cet indice de performance n'est pas le seul possible. Par exemple, il pourrait être désirable de déterminer la masse maximale que le manipulateur est capable de lancer au lieu de fixer la masse à 5 kg. Ce choix est fait dans ce travail parce que celui-ci et le prochain indice qui concerne la charge maximale d'un manipulateur sont complémentaires. Le problème de conception qui en résulte est alors intéressant.

### Capacité de soulever des objets lourds

La procédure pour obtenir la capacité de soulever des charges lourdes est la même que celle utilisée à la section 3.4.1. Cette procédure est exécutée pour toutes les 10 tâches. Encore une fois, puisque l'objectif n'est pas d'évaluer toutes les méthodes d'optimisation, la méthode BE-5-100 est utilisée pour déterminer la charge maximale d'un manipulateur.

Pour la portée maximale présentée à la section précédente, un seul indice de performance était présent. Pour le calcul de la capacité de soulever des charges lourdes, la performance peut être évaluée de quelques points de vue. En effet, puisque plusieurs tâches sont étudiées, trois critères apparaissent immédiatement. Notamment, la médiane (ou la moyenne) de la charge maximale pour toutes les tâches, la charge maximale avec laquelle le manipulateur peut effectuer toutes les tâches et la charge maximale avec laquelle le manipulateur peut effectuer au moins une tâche. Ce dernier critère n'est pas très intéressant, car il informe peu sur la capacité générale d'un manipulateur. Dans ce travail, l'indice de performance utilisé est

$$I_{\text{masse}} = \frac{A_m M_{\text{min}} + (1 - A_m) M_{\text{med}}}{M_{\text{ultime}}} \quad (5.12)$$

où  $M_{\text{min}}$  est la masse avec laquelle toutes les tâches peuvent être effectuées,  $M_{\text{med}}$  est la masse avec laquelle au moins la moitié des tâches peuvent être effectuées et  $A_m$  est le poids gouvernant l'importance de  $M_{\text{min}}$  par rapport à  $M_{\text{med}}$  et est compris entre 0 et 1. Enfin,  $M_{\text{ultime}}$  est une masse considérée suffisante pour l'application visée et utilisée pour la méthode

de la bissection de la section 3.4.1. L'indice de performance  $I_{\text{masse}}$  est donc également compris entre 0 et 1.

### Indice de performance dynamique

Puisque deux indices de performance ont été présentés dans cette section, un indice plus global peut être élaboré de la forme

$$I_{\text{dyn}} = A_{\text{dyn}}I_{\text{PTD}} + (1 - A_{\text{dyn}})I_{\text{masse}} \quad (5.13)$$

où  $A_{\text{dyn}}$  représente le poids sur l'indice de performance lié au lancer par rapport à l'indice en lien avec la capacité de soulever des charges lourdes. Encore une fois, cette valeur est entre 0 et 1 et donc l'indice de performance  $I_{\text{dyn}}$  est entre 0 et 1.

Comme il a été mentionné précédemment, les deux indices de performance  $I_{\text{PTD}}$  et  $I_{\text{masse}}$  sont complémentaires. Il peut être attendu que l'indice  $I_{\text{PTD}}$  bénéficie de membrures plus longues et que l'indice  $I_{\text{masse}}$  bénéficie de membrures plus courtes.

### 5.3.2 Méthodologie de l'analyse

Comme c'était le cas pour la conception cinématique présentée à la section 5.2, le problème de conception des manipulateurs en tenant en compte leur capacité dynamique est un problème d'optimisation de la forme

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{L}} \quad & I_{\text{dyn}} \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{c}(\mathbf{L}) \preceq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $\mathbf{L}$  contient les longueurs des membrures,  $\mathbf{c}(\mathbf{L})$  contient les contraintes d'inégalités. Pour ce problème d'optimisation, il n'y a pas de contraintes d'égalité. Comme c'était le cas pour la conception avec contraintes cinématiques, les contraintes sont différentes pour chaque manipulateur et seront exposées séparément.

Par contre, les paramètres nécessaires pour calculer la fonction objectif  $I_{\text{dyn}}$  sont les mêmes pour tous les manipulateurs et sont résumés au tableau 5.1.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$P_{\text{ultime}}$	10 m	$A_m$	0,5
$M_{\text{ultime}}$	40 kg	$A_{\text{dyn}}$	0,5

TABLE 5.1 – Paramètres de la génération de trajectoire pour l'analyse.

### Manipulateur 2R

Pour le manipulateur 2R, les paramètres à optimiser sont la longueur des deux membrures, c'est-à-dire

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2]^T.$$

Contrairement aux problèmes de conception avec contraintes cinématiques, les deux sous-indices de performance sont vraiment complémentaires. Par conséquent, moins de contraintes sont nécessaires pour rendre de problème borné. Le problème d'optimisation pour la conception du manipulateur 2R avec contraintes dynamiques demeure alors à deux variables. Pour analyser ce problème, l'approche employée est très simple, l'espace de conception est discrétisé et la fonction objectif est évaluée à chaque point. L'espace de conception est borné par

$$\begin{aligned} 0,2 &\leq L_1 \leq 3 \\ 0,2 &\leq L_2 \leq 3 \end{aligned} \tag{5.15}$$

et chaque dimension est discrétisée en 25 points. Les résultats de cette analyse sont présentés à la section 5.3.3

### Manipulateur 3R

Pour le manipulateur 3R, les paramètres à optimiser sont la longueur des deux membrures distales, c'est-à-dire

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2]^T.$$

Comme pour le manipulateur 2R, le problème d'optimisation pour la conception du manipulateur 3R avec contraintes dynamiques demeure également à deux variables. Comme pour le manipulateur 2R, l'espace de conception est discrétisé et la fonction objectif est évaluée à chaque point. L'espace de conception est borné par

$$\begin{aligned} 0,2 &\leq L_1 \leq 3 \\ 0,2 &\leq L_2 \leq 3 \end{aligned} \tag{5.16}$$

et chaque dimension est discrétisée en 25 points. Les résultats de cette analyse sont présentés à la section 5.3.3

### Manipulateur 6R

Enfin, pour le manipulateur 6R, il y a plus de variables de conception car il y a plus d'articulations. Comme pour l'analyse cinématique du manipulateur 6R de la section 5.2.3, les variables de conception sont  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  avec les contraintes

$$\begin{aligned} L_1 &\geq 0,2 \\ L_2 &\geq 0,2 \\ L_3 &\geq 0,2 \end{aligned} \tag{5.17}$$

La conception du manipulateur 6R avec contraintes dynamiques contient donc 3 variables. Il n'est alors pas possible d'effectuer la même analyse que pour les manipulateurs 2R et 3R, car le temps de calcul serait trop important et les résultats seraient difficiles à visualiser. Par contre, comme il sera vu avec les résultats des manipulateurs 2R et 3R, il ne devrait pas

y avoir beaucoup d'optimums locaux. Par conséquent, un algorithme basé sur l'algorithme DIRECT (Jones et collab., 1993) est utilisé. Cette méthode est un algorithme de recherche déterministe basé sur la division systématique du domaine de recherche en hyperrectangles de plus en plus petits. Spécifiquement, une version localement biaisée (Gablonsky et Kelley, 2001) tel que fourni par la librairie NLOPT (Johnson, 2010) est employée.

### 5.3.3 Résultats de la conception des manipulateurs avec contraintes dynamiques

#### Manipulateur 2R

La figure 5.7 montre les résultats de la fonction objectif en fonction des longueurs des membrures  $L_1$  et  $L_2$ . Les résultats dans cette figure sont présentés sous la forme de courbes de niveau. Dans cette figure, le  $\times$  bleu indique le sommet et donc la valeur optimale de l'indice de performance.

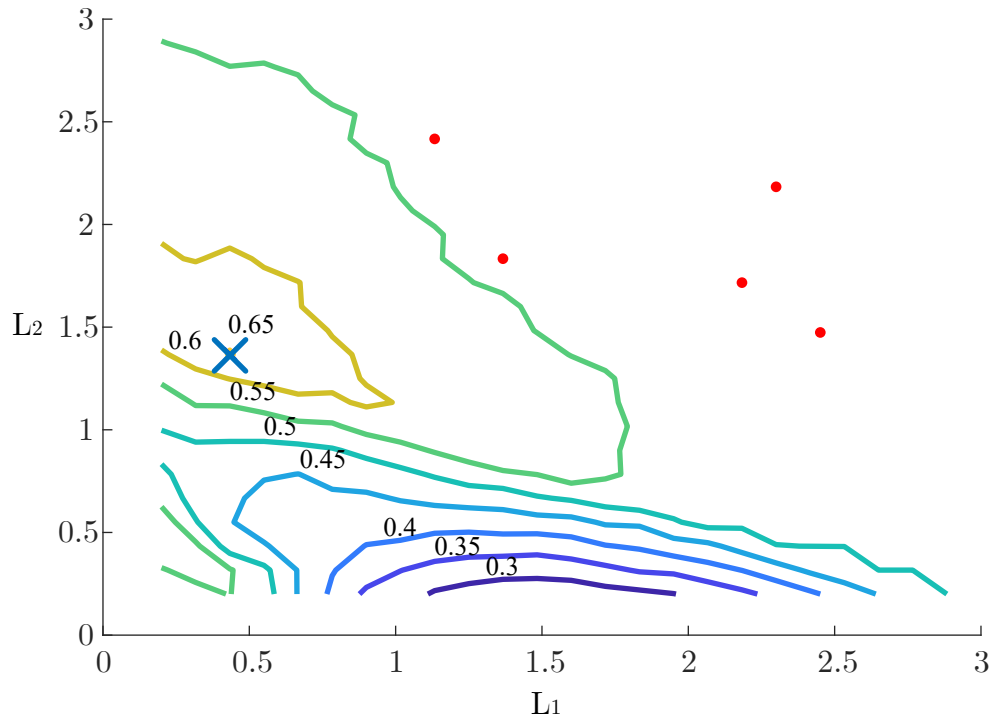


FIGURE 5.7 – Résultats de l'analyse de la conception dynamique du manipulateur 2R.

Les points rouges représentent des valeurs aberrantes, c'est-à-dire des points où la méthode employée pour trouver l'indice de performance n'a pas convergé vers la bonne solution. Ces points sont identifiés en regardant la différence entre chaque point et la moyenne de tous ses voisins. Si un point est significativement plus petit que les points voisins, celui-ci est marqué comme étant aberrant. Seulement 5 points sur les 625 (moins de 1%) ont été identifiés. Spécifiquement, dans chacun des cas, c'est l'indice de la portée maximale ( $I_{PTD}$ ) qui n'a pas

convergé. Cela peut être expliqué par le fait que pour le lancer, la position articulaire de la trajectoire n'est pas contrainte. Lorsque les membrures sont longues, les seules trajectoires qui peuvent lancer l'objet sans violer les contraintes sont des trajectoires qui débutent avec les membrures du manipulateur déjà hautes. Il s'agit alors du hasard si la méthode tombe sur une telle trajectoire comme estimé initial.

Une autre observation importante de la figure 5.7 est qu'une grande partie de l'espace de conception représente une valeur objective de près de 0,5 où les membrures sont relativement longues. Cette région correspond au scénario où le manipulateur est capable de lancer l'objet à une distance d'au moins  $P_{\text{ultime}}$ , mais n'est capable de soulever presque rien pour les tâches prédéfinies. Encore, cela est dû au fait que la posture initiale n'est pas imposée pour le lancer, alors que pour les tâches prédéfinies, la position articulaire est imposée au début et à la fin du mouvement.

Enfin, il est observé que la conception optimale du manipulateur 2R pour l'indice choisi a les dimensions

$$\begin{aligned} L_1 &= 0,43 \\ L_2 &= 1,43 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ce manipulateur est illustré à la figure 5.8.

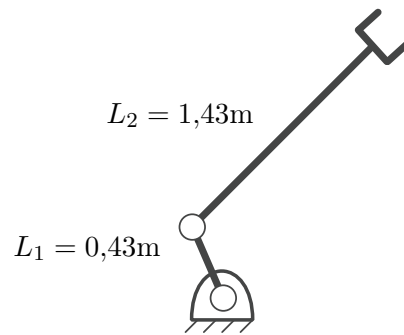


FIGURE 5.8 – Le manipulateur 2R optimal pour la conception avec contraintes dynamiques.

### Manipulateur 3R

La figure 5.9 montre les résultats de la fonction objectif en fonction des longueurs des membrures  $L_2$  et  $L_3$ . Comme pour le manipulateur 2R, les résultats sont présentés sous la forme de courbes de niveau et le  $\times$  bleu indique le sommet et donc la valeur optimale de l'indice de performance.

Il peut être observé à partir des figures 5.7 et 5.9 que les résultats sont très semblables pour les manipulateurs 2R et 3R. Cela est attendu puisque l'axe de la première articulation du



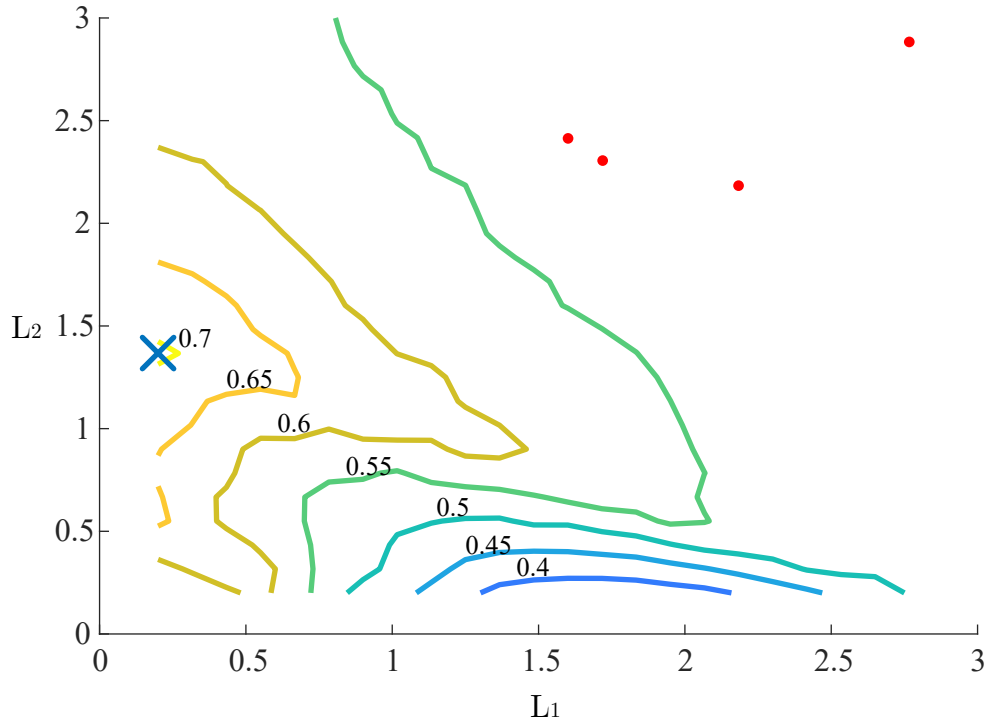


FIGURE 5.9 – Résultats de l’analyse de la conception dynamique du manipulateur 3R.

manipulateur 3R est verticale. Cependant, il est à noter que l’ajout de cette articulation aide un peu. En effet, la valeur objective optimale est un peu plus haute pour le manipulateur 3R que pour le manipulateur 2R (0,7136 et 0,6520, respectivement).

En outre, les longueurs optimales du manipulateur 3R pour le critère choisi sont un peu différentes de celles du manipulateur 2R. En effet, la longueur  $L_2$  est la plus petite possible et la longueur  $L_3$  est la même que pour le manipulateur 2R :

$$\begin{aligned} L_2 &= 0,2 \\ L_3 &= 1,43 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Cela peut être expliqué par le fait que la présence de la première articulation aide davantage pour le lancer plutôt que pour soulever des charges lourdes. Par conséquent, puisque qu’il est possible de lancer des objets avec des membrures plus courtes, les membrures peuvent être davantage optimisées pour soulever des charges tout en maintenant la capacité de lancer maximale.

Ce manipulateur est illustré à la figure 5.10.

### Manipulateur 6R

Comme il a été expliqué à la section 5.3.2, une méthode d’optimisation déterministe est utilisée pour optimiser le manipulateur 6R. Afin d’évaluer cette méthode, celle-ci est lancée 10 fois et les résultats sont présentés au tableau 5.2.

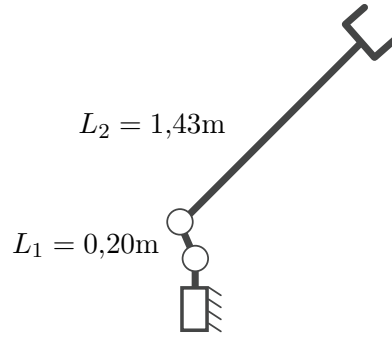


FIGURE 5.10 – Le manipulateur 3R optimal pour la conception avec contraintes dynamiques.

TABLE 5.2 – Résultats de la conception dynamique du manipulateur 6R.

$I_{\text{dyn}}$	$I_{\text{PTD}}$	$I_{\text{masse}}$	$L_2$	$L_3$	$L_5$	Temps de calcul
0,844	1,00	0,688	0,217	0,359	0,667	m 23h 02min
0,823	1,00	0,646	0,252	0,321	0,667	m 06h 33min
0,833	1,00	0,666	0,252	0,321	0,668	m 11h 39min
0,836	1,00	0,672	0,217	0,390	0,632	m 13h 01min
0,817	1,00	0,634	0,252	0,356	0,563	m 05h 39min
0,831	1,00	0,662	0,252	0,356	0,632	m 06h 32min
0,835	1,00	0,670	0,252	0,356	0,628	m 10h 11min
0,841	1,00	0,682	0,252	0,356	0,655	m 07h 40min
0,828	1,00	0,656	0,229	0,356	0,667	m 09h 03min
0,822	1,00	0,644	0,217	0,356	0,667	m 06h 53min

Les résultats montrés au tableau 5.2 montrent que la méthode d'évaluation de la fonction objectif ne converge pas toujours vers l'optimum. L'algorithme DIRECT est déterministe, donc si l'évaluation de la fonction objectif était déterministe, les 10 essais auraient convergé vers la même solution. Toutefois, la méthode a convergé vers des solutions semblables pour chaque essai. La figure 5.11 montre le manipulateur qui correspond au premier résultat du tableau 5.2. Celui-ci est choisi parce qu'il correspond à la valeur objective la plus grande.

## 5.4 Conclusion : conception des manipulateurs

Ce chapitre a présenté l'étude de la possibilité d'utiliser les méthodes de ce travail afin de guider le processus de conception des manipulateurs. Pour ce faire, deux problèmes fictifs de conception ont été posés. Dans les deux cas, la longueur des membrures est optimisée. Pour le premier problème de conception, l'espace de travail et la capacité de lancer avec des contraintes cinématiques (méthodes de la section 4.2) ont été optimisés. Pour le second problème, la capacité de soulever des charges lourdes (méthodes du chapitre 3) et la capacité de lancer avec des contraintes dynamiques (méthodes de la section 4.5) ont été optimisées.

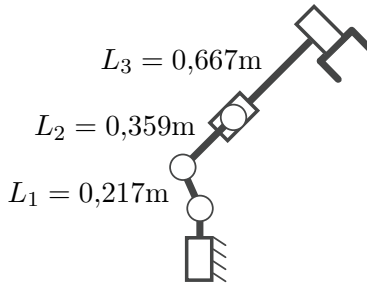


FIGURE 5.11 – Un exemple de manipulateur 6R optimal pour la conception avec contraintes dynamiques.

Lors de l'étude du premier problème de conception (avec les contraintes cinématiques), il a été constaté qu'il est possible d'intégrer le lancer de distance dans le processus de conception des manipulateurs. En effet, pour les trois architectures de manipulateur, il a été vu que la portée maximale est largement affectée par la conception du manipulateur. Il a également été vu que, pour les manipulateurs 2R et 3R, l'espace de travail et la capacité de lancer sont antagonistes et produisent des manipulateurs optimaux différents.

Lors de l'étude du second problème de conception (avec les contraintes dynamiques), il a été constaté qu'il n'est pas toujours possible d'évaluer la capacité de lancer dynamique et la capacité de soulever des charges lourdes de façon exacte. En effet, les méthodes peuvent parfois échouer, particulièrement lorsque les membrures sont longues. Une piste de travaux futurs est alors d'augmenter la robustesse de la méthode d'optimisation de trajectoire pour des manipulateurs de dimensions variées. Malgré cela, il a été démontré qu'il est possible d'effectuer une optimisation efficace des dimensions des trois architectures de manipulateur.

Ce chapitre a aussi visé à étudier la généralisabilité des méthodes d'optimisation de trajectoire étudiés aux chapitres précédents. Dans ce chapitre, il a été vu que les méthodes fonctionnent relativement bien pour les trois architectures étudiées, non seulement pour les dimensions fixes utilisées aux chapitres 3 et 1.3, mais également pour une grande gamme de dimensions.

Cependant, l'identification des quelques points aberrants dans les résultats de la section 5.3.3 pour les manipulateurs 2R et 3R ainsi que la variabilité des résultats pour le manipulateur 6R indiquent que les méthodes ont parfois de la difficulté à converger vers la solution optimale. Comme il a été mentionné à la section 5.3.3, la définition actuelle de la tâche pour la détermination de la capacité de lancer est problématique. En effet, puisque la position initiale n'est pas contrainte, même si la méthode réussit à trouver une trajectoire qui lance très loin, il est peu probable que le manipulateur soit capable d'atteindre la posture initiale nécessaire. Afin d'utiliser les méthodes de ce travail dans une conception réaliste, un concepteur devrait

choisir un critère plus approprié, particulièrement pour la capacité de lancer dynamique.

Enfin, il est important de noter que les résultats de ce chapitre ne représentent pas une simulation de conception réaliste en pratique. L'objectif de ce chapitre est simplement de démontrer la possibilité d'intégrer les méthodes présentées aux chapitres précédents dans une procédure de conception d'un manipulateur.

# Conclusion

*"Apprendre n'épuise jamais l'esprit."*

— Léonard de Vinci

Les travaux présentés dans cette thèse représentent une contribution au sujet de l'optimisation de trajectoire afin de déterminer et de maximiser les capacités des manipulateurs robotiques.

Le chapitre 1 présente le contexte dans lequel les travaux ont été effectués ainsi que les objectifs de la thèse. Ce chapitre présente les trois applications qui sont étudiées, soient soulever des charges lourdes, lancer des objets et aider à la conception d'un manipulateur. Les manipulateurs étudiés afin d'effectuer des validations numériques ainsi que des validations expérimentales sont également présentés. Dans ce travail, les manipulateurs étudiés sont de types sériels, mais les méthodes étudiées peuvent fonctionner avec n'importe quel manipulateur. En effet, tant que la cinématique et la dynamique puissent être calculées à partir d'une trajectoire articulaire, les méthodes de ce travail peuvent être appliquées directement.

Le chapitre 2 présente les différents types de courbes paramétrées utilisées dans ce travail pour décrire la trajectoire d'un manipulateur. Spécifiquement, une explication de comment les différentes courbes paramétrées peuvent être utilisées dans le contexte d'une trajectoire en fonction du temps est fournie. Toutes les méthodes de génération de trajectoire utilisées définissent la trajectoire articulaire en fonction du temps et les forces et les couples nécessaires pour effectuer cette trajectoire sont calculées par la suite. Cela est en contraste avec les méthodes employant la dynamique directe où la fonction de l'effort articulaire est générée et la trajectoire articulaire est calculée en intégrant ces efforts. Dans ce chapitre, il est aussi expliqué que l'utilisation de la génération de trajectoire cinématique comporte plusieurs avantages comme la rapidité du calcul, la production de trajectoires plus lisses et la flexibilité de changer la fonction objectif. Par contre, il est à noter que les méthodes dans ce travail ne produisent pas des trajectoires optimales, mais que celles-ci sont lisses.

L'application de soulever des charges lourdes a été explorée en profondeur dans le chapitre 3. Un des résultats les plus intéressants de ce chapitre est que la capacité de soulever des charges lourdes peut, en effet, être significativement augmentée à l'aide de l'optimisation de la trajectoire. La fonction objectif étudiée dans cette thèse est le temps total de la trajectoire, mais la méthode étudiée peut accommoder n'importe quelle fonction objectif. Cela est en contraste avec les méthodes basées sur le principe du maximum de Pontriagin où la méthode

de résolution du problème d'optimisation doit être dérivée pour chaque variante de fonction objectif. Par contre, la convergence n'est pas garantie pour toutes les fonctions objectif et le temps de calcul peut également grandement varier. Afin de vérifier la viabilité de la méthode employée, une étude expérimentale a été effectuée et a démontré que les gains potentiels se transcrivent à la réalité pour le manipulateur 2R. En effet, ce manipulateur expérimental avait essentiellement une capacité de charge utile négative, mais a été capable de soulever une masse additionnelle de jusqu'à 60% de sa masse à l'effecteur pour certaines tâches. Puisque les deux articulations du manipulateur 2R sont celles qui portent la majorité du poids de la charge, il est conjecturé que ces résultats peuvent se généraliser aux manipulateurs 3R et 6R. Il est à noter que l'optimisation doit être effectuée pour chaque tâche et que la masse dont le manipulateur est capable de soulever varie d'une tâche à une autre.

La deuxième application explorée dans cette thèse est le lancer d'objets et est présentée en détail dans le chapitre 4. Ce travail a étudié le problème du lancer à trois niveaux de plus en plus complet et complexe. Premièrement, la limite supérieure de la portée en fonction de la vitesse maximale des manipulateurs est déterminée. Ensuite il a été vu qu'il est possible de générer une trajectoire cinématique qui effectue ce lancer optimal avec une limite d'accélération raisonnable. Enfin, la trajectoire dynamique prenant en compte les limites de couple des actionneurs a été étudiée. Il a été trouvé que, même avec une charge de 5 kg, il est possible d'effectuer un lancer optimal, c'est-à-dire, avec la portée maximale trouvée lors de la résolution des problèmes cinématiques. Il est alors intéressant de noter que la limite supérieure de la portée n'est pas seulement théorique, mais il est possible de générer des trajectoires qui respectent les contraintes cinématiques et dynamiques du manipulateur qui atteignent cette portée maximale.

Enfin, le dernier chapitre, le chapitre 5, présente une étude de la capacité d'intégrer la capacité de soulever des charges lourdes et la capacité de lancer des objets dans le processus de conception d'un manipulateur. Pour faire cette étude, deux exemples de processus de conception simples ont été étudiés. Dans les deux cas, seule la longueur des membrures est optimisée et les propriétés des moteurs et la masse des membrures restent constants. Il est à noter que cette thèse ne prétend pas faire une analyse complète de la conception des manipulateurs, mais seulement une première exploration de la possibilité d'intégrer les méthodes étudiées dans cette thèse dans un tel processus. Le premier exemple exploré optimise l'espace de travail et la capacité de lancer cinématique et le second exemple optimise la capacité de soulever des charges lourdes et la capacité de lancer dynamique. Le résultat principal de ce chapitre est que les méthodes de cette thèse peuvent en effet être incorporées dans le processus de conception des manipulateurs. Cependant, l'étude effectuée dans ce chapitre a soulevé une limite des méthodes. En effet, puisque la conception d'un manipulateur implique l'évaluation de plusieurs manipulateurs, il a été constaté qu'il est parfois difficile de converger vers une solution adéquate, même quand il en existe une. Particulièrement, le lancer avec des contraintes

dynamiques, lorsque les membrures sont très longues entraîne une difficulté pour les méthodes.

## Travaux futurs

Comme il a été soulevé ci-haut, il existe quelques limites des méthodes étudiées. Premièrement, il a été noté que les expérimentations n'ont été effectuées qu'à partir d'un prototype de type 2R. Bien qu'il est raisonnable de conjecturer que l'expérimentation sur le prototype 2R est représentative, les résultats obtenus pour les manipulateurs 3R et 6R pourraient également faire l'objet de validation expérimentale. Puisque les expérimentations numériques ont été effectuées avec un modèle du robot UR5, la validation expérimentale serait grandement simplifiée.

En outre, il a été soulevé que les méthodes ne convergent pas toujours facilement vers la solution optimale. En effet, dans certains cas, aucune solution valide n'est trouvée. Par exemple, il a été constaté que la convergence de l'optimisation est grandement influencée par la qualité de l'estimé initial. Par conséquent, deux avenues de recherche sont très intéressantes.

Premièrement, une étude sur des méthodes pouvant améliorer la qualité de l'estimé initial pourrait grandement améliorer la performance des méthodes étudiées dans cette thèse. Il existe plusieurs méthodes d'heuristique, comme les filtres particulières, visant cette proposition, et d'autres pourraient certainement être inventées spécifiquement pour cette application.

Secondement, il existe plusieurs méthodes d'optimisation globale, comme les méthodes par essaim particulières qui cherchent non seulement un optimum, mais l'optimum global. Il n'est pas clair si les problèmes d'optimisation explorés dans cette thèse sont adaptés à de telles méthodes (la présence des nombreuses contraintes non-linéaires et fortement couplées peut être particulièrement problématique). Cependant, cette étude pourrait être très intéressante.

Comme il a été expliqué dans l'introduction de cette thèse, l'objectif principal de ce travail était d'explorer la partie modélisation de l'optimisation et non la partie de l'optimisation elle-même. Cependant, cette problématique de vouloir augmenter les capacités des manipulateurs à l'aide de l'optimisation de trajectoire est riche et possibilités de recherche sont abondante.

# Bibliographie

- Aboaf, E. W., C. G. Atkeson et D. J. Reinkensmeyer. 1988, «Task-level robot learning», dans *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1309–1310.
- Aboaf, E. W., S. M. Drucker et C. G. Atkeson. 1989, «Task-level robot learning : Juggling a tennis ball more accurately», dans *Robotics and Automation, 1989 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1290–1295.
- Bertrand, R. et R. Epenoy. 2002, «New smoothing techniques for solving bang–bang optimal control problems—numerical results and statistical interpretation», *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 23, n° 4, p. 171–197.
- Bobrow, J., S. Dubowsky et J. Gibson. 1983, «On the optimal control of robotic manipulators with actuator constraints», dans *American Control Conference, 1983*, IEEE, p. 782–787.
- Bobrow, J. E., S. Dubowsky et J. Gibson. 1985, «Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 4, n° 3, p. 3–17.
- Boyd, S. et L. Vandenberghe. 2004, *Convex optimization*, Cambridge University Press.
- Broyden, C. G. 1970, «The convergence of a class of double-rank minimization algorithms : general considerations», *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 6, n° 1, p. 76–90.
- Brumfiel, G. 2011, «Fukushima set for epic clean-up», .
- Buehler, M. et D. E. Koditschek. 1987, «Robotics in an intermittent dynamical environment : A prelude to juggling», dans *Decision and Control, 26th IEEE Conference on*, IEEE, p. 1–14.
- Buehler, M., D. E. Koditschek et P. Kindlmann. 1990, «Planning and control of robotic juggling tasks», dans *International Symposium of Robotic Research*, p. 321.
- Buehler, M., D. E. Koditschek et P. J. Kindlmann. 1994, «Planning and control of robotic juggling and catching tasks», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13, n° 2, p. 101–118.



- Buttazzo, G. C., B. Allotta et F. P. Fanizza. 1994, «Mousebuster : A robot for real-time catching», *IEEE Control Systems*, vol. 14, n° 1, p. 49–56.
- Chen, Y. et A. A. Desrochers. 1989, «Structure of minimum-time control law for robotic manipulators with constrained paths», dans *Robotics and Automation, 1989. Proceedings., 1989 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 971–976.
- Chen, Y.-C. 1991, «Solving robot trajectory planning problems with uniform cubic b-splines», *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 12, n° 4, p. 247–262.
- Choset, H., K. M. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard, L. E. Kavraki et S. Thrun. 2005, *Principles of Robot Motion : Theory, Algorithms, and Implementations*, MIT Press.
- Comité technique ISO/TC 184. 1998, «Robots manipulateurs industriels — Critères de performance et méthodes d’essai correspondantes», ISO 9283, International Organization for Standardization. URL <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:9283:ed-2:v1:fr>.
- Costantinescu, D. et E. Croft. 2000, «Smooth and time-optimal trajectory planning for industrial manipulators along specified paths», *Journal of Robotic Systems*, vol. 17, n° 5, p. 233–249.
- Dahl, O. et L. Nielsen. 1990, «Torque-limited path following by online trajectory time scaling», *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, n° 5, p. 554–561.
- Dantzig, G. B., A. Orden, P. Wolfe et collab.. 1955, «The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints», *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 5, n° 2, p. 183–195.
- Erumalla, S. R., S. Pasupuleti et J.-C. Ryu. 2018, «Throwing, catching, and balancing of a disk with a disk-shaped end effector on a two-link manipulator», *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 10, n° 5, p. 054501.
- Farouki, R. T. et V. Rajan. 1988, «Algorithms for polynomials in bernstein form», *Computer Aided Geometric Design*, vol. 5, n° 1, p. 1–26.
- Fletcher, R. 1970, «A new approach to variable metric algorithms», *The Computer Journal*, vol. 13, n° 3, p. 317–322.
- Frank, H., A. Mittnacht et J. Scheiermann. 2009, «Throwing of cylinder-shaped objects», dans *Advanced Intelligent Mechatronics, 2009. AIM 2009. IEEE/ASME International Conference on*, IEEE, p. 59–64.
- Gablonsky, J. M. et C. T. Kelley. 2001, «A locally-biased form of the direct algorithm», *Journal of Global Optimization*, vol. 21, n° 1, p. 27–37.

- Gasparetto, A. et V. Zanotto. 2007, «A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, n° 4, p. 455–471.
- Geering, H., L. Guzzella, S. Hepner et C. Onder. 1986, «Time-optimal motions of robots in assembly tasks», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, n° 6, p. 512–518.
- Goldfarb, D. 1970, «A family of variable-metric methods derived by variational means», *Mathematics of Computation*, vol. 24, n° 109, p. 23–26.
- Han, S.-P. 1977, «A globally convergent method for nonlinear programming», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 22, n° 3, p. 297–309.
- Hughes-Hallett, D., W. G. McCallum et A. Gleason. 2017, *Calculus : Single and Multivariable*, 7<sup>e</sup> éd., John Wiley.
- Hwang, Y. K. et N. Ahuja. 1992, «Gross motion planning — a survey», *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 24, n° 3, p. 219–291.
- Johnson, S. G. 2010, «The nlopt nonlinear-optimization package», <https://github.com/stevengj/nlopt>.
- Jones, D. R., C. D. Perttunen et B. E. Stuckman. 1993, «Lipschitzian optimization without the lipschitz constant», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 79, n° 1, p. 157–181.
- Kaltsoukalas, K., S. Makris et G. Chryssolouris. 2015, «On generating the motion of industrial robot manipulators», *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 32, p. 65–71.
- Kato, N., K. Matsuda et T. Nakamura. 1996, «Adaptive control for a throwing motion of a 2 dof robot», dans *Advanced Motion Control, 1996. AMC'96-MIE. Proceedings., 1996 4th International Workshop on*, vol. 1, IEEE, p. 203–207.
- Kaya, C. Y. et J. L. Noakes. 1996, «Computations and time-optimal controls», *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 17, n° 3, p. 171–185.
- Khatib, O. et A. Bowling. 1996, «Optimization of the inertial and acceleration characteristics of manipulators», dans *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, IEEE, p. 2883–2889.
- Khatib, O. et J. Burdick. 1987, «Optimization of dynamics in manipulator design : The operational space formulation.», *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 2, n° 2, p. 90–98.
- Khatib, O., E. Demircan, V. De Sapio, L. Sentis, T. Besier et S. Delp. 2009, «Robotics-based synthesis of human motion», *Journal of Physiology-Paris*, vol. 103, n° 3-5, p. 211–219.

- Kim, J. H. 2011, «Optimization of throwing motion planning for whole-body humanoid mechanism : Sidearm and maximum distance», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, n° 4, p. 438–453.
- Kim, S. et S. Doncieux. 2017, «Learning highly diverse robot throwing movements through quality diversity search», dans *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion*, ACM, p. 1177–1178.
- Kirk, D. E. 1970, *Optimal control theory : an introduction*, Prentice-Hall.
- Kirk, D. E. 1998, *Optimal control theory : an introduction*, Dover.
- Kober, J., E. Öztop et J. Peters. 2011, «Reinforcement learning to adjust robot movements to new situations», dans *IJCAI Proceedings-International Joint Conference on Artificial Intelligence*, vol. 22, p. 2650.
- Kolahdouz, M.-R. et M. J. Mahjoob. 2010, «A reinforcement learning approach to dynamic object manipulation in noisy environment», *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 6, n° 4, p. 1615–1622.
- Korayem, M. H., A. Nikoobin et V. Azimirad. 2009, «Maximum load carrying capacity of mobile manipulators : optimal control approach», *Robotica*, vol. 27, n° 1, p. 147–159.
- Kraft, D. 1988, «A software package for sequential quadratic programming», cahier de recherche DFVLR-FB 88-28, Institut für Dynamik der Flugsysteme.
- Kraft, D. 1994, «Algorithm 733 : TOMP–fortran modules for optimal control calculations», *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 20, n° 3, p. 262–281.
- Lim, T., H. S. Cho et W. Chung. 1990, «Payload capacity of balanced robotic manipulators», *Robotica*, vol. 8, n° 2, p. 117–123.
- Lin, C., P. Chang et J. Luh. 1983, «Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, n° 12, p. 1066–1074.
- Lofaro, D. M., R. Ellenberg, P. Oh et J.-H. Oh. 2012a, «Humanoid throwing : Design of collision-free trajectories with sparse reachable maps», dans *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, p. 1519–1524.
- Lofaro, D. M., C. Sun et P. Oh. 2012b, «Humanoid pitching at a major league baseball game : Challenges, approach, implementation and lessons learned», dans *Humanoid Robots (Humanoids), 2012 12th IEEE-RAS International Conference on*, IEEE, p. 423–428.

- Lofaro, D. M., C. Sun et P. Oh. 2012c, «Humanoid pitching at a major league baseball game : Challenges, approach, implementation and lessons learned», dans *2012 12th IEEE/RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, IEEE, p. 423–428.
- Lombai, F. et G. Szederkényi. 2009, «Throwing motion generation using nonlinear optimization on a 6-degree-of-freedom robot manipulator», dans *Mechatronics, 2009. ICM 2009. IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1–6.
- Lucas, S. K. et C. Y. Kaya. 2001, «Switching-time computation for bang-bang control laws», dans *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, vol. 1, IEEE, p. 176–181.
- Lynch, K. M. et M. T. Mason. 1996, «Dynamic underactuated nonprehensile manipulation», dans *Intelligent Robots and Systems' 96, IROS 96, Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on*, vol. 2, IEEE, p. 889–896.
- Meier, E.-B. et A. E. Ryson. 1990, «Efficient algorithm for time-optimal control of a two-link manipulator», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 13, n° 5, p. 859–866.
- Mettin, U. et A. S. Shiriaev. 2011, «Ball-pitching challenge with an underactuated two-link robot arm», *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, n° 1, p. 11 399–11 404.
- Mettin, U., A. S. Shiriaev, L. B. Freidovich et M. Sampei. 2010, «Optimal ball pitching with an underactuated model of a human arm», dans *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 5009–5014.
- Miyashita, H., T. Yamawaki et M. Yashima. 2009, «Control for throwing manipulation by one joint robot», dans *Robotics and Automation, 2009. ICRA '09. IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1273–1278.
- Miyazaki, T. et K. Sanada. 2017, «Experimental validation of an optimum design method for a ball throwing robot considering degrees of freedom, link parameters, and motion pattern», *JSME Mechanical Engineering Journal*, vol. 4, n° 5, p. 17–00 147.
- Mochizuki, Y., S. Inokuchi et K. Omura. 2000, «Generating artificially mastered motions for an upper limb in baseball pitching from several objective functions», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 30, n° 3, p. 373–382.
- Mori, W., J. Ueda et T. Ogasawara. 2009, «1-dof dynamic pitching robot that independently controls velocity, angular velocity, and direction of a ball : Contact models and motion planning», dans *Robotics and Automation, 2009. ICRA '09. IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1655–1661.
- Mori, W., J. Ueda et T. Ogasawara. 2010, «A 1-dof dynamic pitching robot that independently controls velocity, angular velocity and direction of a ball», *Advanced Robotics*, vol. 24, n° 5-6, p. 921–942.

- Nagendran, A., W. Crowther et R. Richardson. 2011, «Dynamic capture of free-moving objects», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 225, n° 8, p. 1054–1067.
- Nguyen, H. N. et S. Olaru. 2013, «Hybrid modelling and constrained control of juggling systems», *International Journal of Systems Science*, vol. 44, n° 2, p. 306–320.
- Nocedal, J. et S. J. Wright. 2006, *Numerical Optimization*, Springer.
- Okada, M., S. Oniwa et W. Hijikata. 2018, «Robust throwing design based on dynamic sensitivity analysis», *Mechanical Engineering Journal*, vol. 5, n° 1, p. 17–00442.
- Okada, M., A. Pekarovskiy et M. Buss. 2015, «Robust trajectory design for object throwing based on sensitivity for model uncertainties», dans *Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 3089–3094.
- Patel, S. et T. Sobh. 2015, «Task based synthesis of serial manipulators», *Journal of Advanced Research*, vol. 6, n° 3, p. 479–492.
- Perumaal, S. S. et N. Jawahar. 2013, «Automated trajectory planner of industrial robot for pick-and-place task», *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 10, n° 2, p. 100.
- Pontryagin, L., V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze et E. Mishchenko. 1962, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience.
- Powell, M. J. 1978, «A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations», dans *Numerical Analysis*, Springer, p. 144–157.
- Rajan, V. 1985, «Minimum time trajectory planning», dans *Robotics and Automation. Proceedings. 1985 IEEE International Conference on*, vol. 2, IEEE, p. 759–764.
- Rizzi, A. A. et D. E. Koditschek. 1992, «Progress in spatial robot juggling», dans *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 775–780.
- Sahar, G. et J. M. Hollerbach. 1986, «Planning of minimum-time trajectories for robot arms», *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, n° 3, p. 90–100.
- Sakaguchi, T., Y. Masutani et F. Miyazaki. 1991, «A study on juggling tasks», dans *Intelligent Robots and Systems' 91. Intelligence for Mechanical Systems, Proceedings IROS'91. IEEE/RSJ International Workshop on*, IEEE, p. 1418–1423.
- Sanfelice, R. G., A. R. Teel et R. Sepulchre. 2007, «A hybrid systems approach to trajectory tracking control for juggling systems», dans *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, IEEE, p. 5282–5287.

- Saramago, S. F. et M. Ceccarelli. 2002, «An optimum robot path planning with payload constraints», *Robotica*, vol. 20, n° 4, p. 395.
- Sato, A., O. Sato, N. Takahashi et M. Kono. 2007, «Trajectory for saving energy of a direct-drive manipulator in throwing motion», *Artificial Life and Robotics*, vol. 11, n° 1, p. 61–66.
- Senoo, T., A. Namiki et M. Ishikawa. 2008, «High-speed throwing motion based on kinetic chain approach», dans *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, IEEE, p. 3206–3211.
- Shanno, D. F. 1970, «Conditioning of quasi-newton methods for function minimization», *Mathematics of Computation*, vol. 24, n° 111, p. 647–656.
- Shiller, Z. et S. Sundar. 1991, «Design of robotic manipulators for optimal dynamic performance», dans *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, p. 334–339.
- Shiller, Z. et S. Sundar. 1993, «Design of multi-degree-of-freedom mechanisms for optimal dynamic performance», *Journal of Mechanical Design*, vol. 115, n° 2, p. 199–206.
- Shin, K. et N. McKay. 1985, «Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, n° 6, p. 531–541.
- Shin, K. et N. McKay. 1986a, «A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, n° 6, p. 491–500.
- Shin, K. et N. McKay. 1986b, «Selection of near-minimum time geometric paths for robotic manipulators», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, n° 6, p. 501–511.
- Shoji, T., S. Nakaura et M. Sampei. 2010, «Throwing motion control of the springed pendubot via unstable zero dynamics», dans *Control Applications (CCA), 2010 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 1602–1607.
- Spellucci, P. 1998, «A new technique for inconsistent QP problems in the SQP method», *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 47, n° 3, p. 355–400.
- Thompson, S. E. et R. V. Patel. 1987, «Formulation of joint trajectories for industrial robots using b-splines», *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. IE-34, n° 2, p. 192–199.
- Tomori, H., T. Majima, H. Ishihara et T. Nakamura. 2017, «Throwing motion with instantaneous force using a variable viscoelastic joint manipulator», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 28, n° 8, p. 999–1009.
- Tone, K. 1983, «Revisions of constraint approximations in the successive QP method for nonlinear programming problems», *Mathematical Programming*, vol. 26, n° 2, p. 144–152.

- Trélat, E. 2008, *Contrôle optimal : théorie et applications*, vol. 865, Vuibert Paris, France.
- Tukey, J. W. 1977, *Exploratory data analysis*, Addison-Wesley Series in Behavioral Science, Addison-Wesley Pub. Co, Reading, Mass.
- Wang, L.-T. et B. Ravani. 1988, «Dynamic load carrying capacity of mechanical manipulators—part i : Problem formulation», *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 110, n° 1, p. 46–52.
- Weinreb, A. et A. Bryson. 1985, «Optimal control of systems with hard control bounds», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, n° 11, p. 1135–1138.
- Yedeg, E. L. et E. Wadbro. 2013, «State constrained optimal control of a ball pitching robot», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 69, p. 337–349.
- Zhang, Y., J. Luo et K. Hauser. 2012, «Sampling-based motion planning with dynamic intermediate state objectives : Application to throwing», dans *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, IEEE, p. 2551–2556.