

CYRIL QUENNOUELLE

**MODÉLISATION GÉOMÉTRICO-STATIQUE DES
MÉCANISMES PARALLÈLES COMPLIANTS**

Thèse présentée

à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en génie mécanique
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2009

Résumé

L'utilisation d'articulations compliantes permet de réduire le jeu mécanique dans les manipulateurs robotiques. Cependant les particularités de leur comportement qui diffère de celui des articulations conventionnelles ne peuvent pas être prises en compte dans les modèles actuels, ce qui a pour effet de diminuer le gain de précision espéré. Dans cette thèse, une modélisation qui respecte à la fois des contraintes géométriques et des contraintes statiques entre les variables articulaires est proposée. Elle permet de décrire avec précision le comportement de ces mécanismes compliantes, notamment en pouvant considérer plusieurs degrés de liberté par articulation compliant.

Les coordonnées généralisées, qui correspondent à un ensemble minimal de variables articulaires nécessaires pour décrire complètement la configuration du mécanisme, sont utilisées pour calculer la pose de l'effecteur à partir du modèle géométrique. Ces coordonnées ne sont pas directement fixées par l'utilisateur, mais elles s'ajustent de manière à ce que l'équilibre statique du mécanisme soit respecté. Elles sont donc fonction d'un certain nombre de paramètres extérieurs que le modèle géométrico-statique proposé peut prendre en compte : la position des actionneurs, les efforts extérieurs appliqués sur le mécanisme et le poids de ses membrures.

Du fait de la complexité de certaines équations de ce modèle géométrico-statique, un modèle quasi-statique a également été développé. Ce dernier donne les relations linéaires qui existent entre les variations des paramètres extérieurs et celles de la configuration du mécanisme. Pour obtenir ces relations, la matrice de raideur des mécanismes parallèles compliantes a été calculée de façon générale. La formulation de ce modèle quasi-statique est très simple et repose sur deux nouvelles matrices : la matrice de compliance carté-

sienne et la matrice jacobienne quasi-statique. Cette dernière matrice intègre les effets des déformations du mécanisme sur son comportement cinématique grâce à une matrice des ratios de transmission du mouvement des actionneurs.

Enfin, trois exemples d'applications ont été traités afin de montrer les apports de ces modèles, non seulement leur gain de précision, mais aussi les nouvelles possibilités qu'ils offrent. Désormais les mécanismes parallèles compliants, mais également mécanismes bistables, les mécanismes compliants sous-actionnés et même les mécanismes conventionnels peuvent être modélisés avec les mêmes équations.

Abstract

The use of compliant joints reduces the mechanical clearance in robotic manipulators. However, the particularities of their behaviour, which differs from that of conventional joints, cannot be taken into account in existing models, which mitigates the expected gain in accuracy. In this thesis, a model satisfying both the kinematic constraints and the static constraints between the joint variables is proposed. It enables to precisely describe the behaviour of a compliant mechanism, notably by allowing the consideration of several degrees of freedom for a single compliant joint.

The generalized coordinates, which correspond to a minimal set of joint variables required to completely describe the configuration of the mechanism, are used to calculate the pose of the end-effector in the geometric model. These coordinates are not directly set by the user but adjust themselves such that the static equilibrium of the mechanism is satisfied. Therefore, they are function of some external parameters taken into account in the proposed kinemato-static model : the position of the actuators, the external efforts applied on the mechanism and the weight of its rigid links.

Because of the complexity of some equations of this kinemato-static model, a quasi-static model was also developed. The latter gives linear relationships between the variations of the external parameters and the variations of the configuration of the mechanism. To obtain these relationships, the stiffness matrix of compliant parallel mechanisms was derived in a general form. The formulation of this quasi-static model is very simple and uses two new matrices : the Cartesian compliance matrix and the quasi-static Jacobian matrix. The latter matrix integrates the effects of the deformations of the mechanisms in its kinematic behaviour using a matrix of the transmission

ratios of the motion of the actuators.

Finally, three examples of applications are given in order to illustrate the contributions of these models, not only regarding the gain in precision, but also the novel possibilities they offer. From then on, compliant parallel mechanisms, but also bistable mechanisms, under-actuated compliant mechanisms and even conventional mechanisms can be modeled with the same equations.

Resumen

El uso de articulaciones flexibles puede reducir la holgura mecánica en manipuladores robóticos. Sin embargo, las particularidades de su comportamiento que difiere de aquel de las articulaciones convencionales no pueden ser tomadas en cuenta en los modelos ya existentes, esto se traduce en una disminución de la esperada ganancia de precisión. En esta tesis, se propone un modelo que respete tanto las restricciones geométricas como las restricciones estáticas entre las variables articulares. Este modelo permite describir con precisión el comportamiento de los mecanismos flexibles, incluyendo la posibilidad de considerar varios grados de libertad por cada articulación flexible.

Las coordenadas generalizadas, que corresponden a un conjunto mínimo de variables articulares necesarias para describir completamente la configuración del mecanismo, se utilizan para calcular la postura del efector en el modelo geométrico. Estas coordenadas no están directamente determinadas por el usuario, pero se ajustan de manera tal que el mecanismo respeta el equilibrio estático. Por lo tanto, éstas son función de parámetros externos que el modelo geométrico-estático propuesto podrá tomar en cuenta : la posición de los actuadores, los esfuerzos externos aplicados sobre el mecanismo y el peso de sus cuerpos.

Debido a la complejidad de algunas ecuaciones de este modelo geométrico-estático, un modelo cuasi-estático también fué desarrollado. Esto da relaciones lineales entre las variaciones de los parámetros externos y las variaciones de la configuración del mecanismo. Para obtener estas relaciones, la matriz de rigidez de los mecanismos paralelos flexibles se calculó en una forma general. La formulación de este modelo cuasi-estático

es muy simple y se basa en dos matrices nuevas : la matriz de flexibilidad cartesiana y la matriz jacobiana cuasi-estática. Esta última matriz incluye los efectos de las deformaciones del mecanismo en su comportamiento cinemático a través de una matriz de transmisión del movimiento de los actuadores.

Por último, tres ejemplos de aplicaciones se dan para ilustrar las contribuciones de estos modelos no sólo en relación con la ganancia en precisión, sino también con las nuevas posibilidades que ofrecen. De ahora en adelante, no sólo los mecanismos paralelos flexibles, sino que también los mecanismos biestables, los mecanismos flexibles subaccionados e inclusive los mecanismos convencionales pueden ser modelados con las mismas ecuaciones.

Avant-propos

Lecteur, avant d'aller te promener dans ces cent cinquante pages qui présentent et résument le fruit de quatre années de travail et de réflexion, sache que ce doctorat fût pour moi une magnifique aventure.

Une thèse est un travail individuel, mais je n'ai vraiment pas été seul durant ce voyage. Au Laboratoire de Robotique de l'Université Laval, on est en effet bien entouré. J'ai particulièrement apprécié et admiré l'encadrement de mon directeur de thèse Clément Gosselin ; ce subtil mélange de grande autonomie et de conseils avisés et éclairants a toujours été très motivant. Je remercie Clément pour sa disponibilité et sa confiance. Je remercie également le reste des membres du laboratoire, notamment Boris et Thierry, de vrais *pros*, pour leur aide et leurs conseils en tous genres. Je remercie aussi mes principaux compagnons de bavardage. S'il y en a eu, ce sont eux les responsables de mes baisses de productivité : Mehdi, Éric, Fred, Simon, Nicolas et plein d'autres.

Une thèse est un défi intellectuel, mais les études que j'ai eues la chance de faire auparavant ne m'avaient pas laissé sans arme pour y répondre. Je dois remercier la longue lignée de professeurs, notamment de mathématiques, de physique et de robotique, qui se sont succédés pour faire de moi ~~un~~geek un scientifique. Je dois aussi signifier ma gratitude à mes examinateurs, Philippe Cardou, Juan Carretero et Marco Carricato qui m'ont expliqué et permis de comprendre pas mal de choses afin d'améliorer cette thèse.

La robotique est a priori une science de l'artificiel, une étude de constructions humaines. Pourtant, ce sont bien les lois de la Nature que le fonctionnement de ces bestioles doit respecter ; les mécanismes parallèles compliants, pas moins que les autres. En fait, ce doctorat n'aura été qu'une contemplation de la Nature ; un véritable ouvrage de moine chartreux. Merci à Celui qui l'a créée si belle et élégante.

Tout au long de ce travail, le Rasoir d'Occam et ma Paresse ont toujours été en accord avec mes objectifs : trouver des relations *simples* —le plus simple possible mais pas plus—, et cependant *générales*. J'ai voulu éviter au maximum les hypothèses simplificatrices pouvant limiter l'application de ces modèles, puisque celles-ci pourraient m'obliger à retravailler pour chaque mécanisme présentant une caractéristique particulière. J'ai bossé et cogité fort pour comprendre le fonctionnement de ces mécanismes parallèles compliants et établir ces modèles, mais désormais, les appliquer à n'importe quel manipulateur ne pose plus de difficulté majeure. Pour illustrer cela, j'ai réalisé dans les derniers mois de mon doctorat la modélisation du Triptéron compliant —le prototype qui a posé les questions à l'origine de cette thèse. Cette application, présentée sommairement à la fin de ce thèse, n'a effectivement nécessité aucune adaptation particulière des modèles développés.

Ce doctorat fût également une belle expérience culturelle. Je remercie encore Clément de m'avoir proposé de venir étudier au Québec. J'ai découvert un pays magnifique et une culture très riche. Ses habitants sont formidablement accueillants et ouverts ; tellement, que j'ai voulu moi aussi avoir un Québécois dans ma famille. Malgré ses interminables Hivers, le congélateur nommé Québec est indiscutablement un endroit où il fait bon vivre. Enfin et surtout, c'est là que j'ai rencontré l'Amour ; Carolina, la Femme de ma vie. Définitivement, ce doctorat fût une expérience heureuse.

Pour terminer, je voudrais remercier mes parents. Je leur dois ce doctorat, et bien plus encore. Ce sont leur éducation et les études qu'ils m'ont permis de faire qui ont produit cette thèse. Elle est une des preuves de leur réussite en tant que parents. Ils sont pour pour moi de vrais *modèles*.

*Spéciale kassédi à tous les roboticiens et autres « paresseux ».
Ceux qui ont compris qu'en travaillant fort aujourd'hui,
on avait une chance de travailler moins demain.*

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Resúmen	v
Avant-propos	vii
Table des matières	x
Liste des figures	xvi
Liste des symboles	xviii
Introduction	1
1 Les articulations compliantes : présentation et modélisation	6
1.1 Propriétés des articulations compliantes	7
1.1.1 Concept	7
1.1.2 Avantages des articulations compliantes	7
1.1.3 Limitations des articulations compliantes	8
1.1.4 Différents types d'articulations compliantes existants	9
1.1.5 Défis posés par l'utilisation de ces articulations	10
1.2 Modèles d'articulations compliantes	10
1.2.1 Modèles simples	11
1.2.2 Modèle linéaire à plusieurs degrés de liberté découplés	11
1.2.3 Modèle général	13

1.2.4	Exemple de modélisation d'articulations compliantes	14
1.2.4.1	Articulation à axe cruciforme	14
1.2.4.2	Articulation à entaille droite	16
1.3	Autres compliances dans le mécanisme	19
1.3.1	Compliance des actionneurs	19
1.3.2	Compliance des liens rigides	20
1.4	Bilan des particularités de la modélisation des articulations compliantes	20
2	Modèles géométrique et cinématique	22
2.1	Modélisation d'un mécanisme parallèle compliant	23
2.2	Modélisation géométrique	24
2.2.1	Nombre de mobilités et de contraintes géométriques	24
2.2.2	Contraintes géométriques	25
2.2.2.1	Mécanisme plan	26
2.2.2.2	Mécanisme spatial	27
2.2.3	Coordonnées généralisées et géométriquement contraintes	29
2.2.4	Pose de l'effecteur	31
2.2.5	Modèle géométrique direct	32
2.2.6	Modèle géométrique complet	33
2.2.7	Modèle géométrique inverse	33
2.2.8	Limites du modèle géométrique	34
2.3	Modèle cinématique d'un MPC	35
2.3.1	Contraintes cinématiques	35
2.3.2	Détermination de la matrice \mathbf{G}	36
2.3.3	Modèle cinématique	39
2.3.3.1	Mécanisme plan	39
2.3.3.2	Mécanisme spatial	39
2.3.3.3	Variation cartésienne infinitésimale	40
2.3.3.4	Matrice \mathbf{J}_θ	40
2.3.3.5	Matrice \mathbf{J}	41
2.3.3.6	Modèle cinématique direct	41
2.3.3.7	Modèle cinématique inverse	42
2.3.4	Limites du modèle cinématique	43
3	Modèles statique et géométrico-statique	44
3.1	Modélisation statique	45
3.1.1	Principe de la modélisation statique	45

3.1.1.1	Paramètres extérieurs	45
3.1.1.2	Contraintes statiques	45
3.1.1.3	Minimisation de l'énergie potentielle	46
3.1.1.4	Équations de Lagrange	46
3.1.2	Détermination de l'équilibre statique	47
3.1.2.1	Énergies potentielles	47
3.1.2.2	Dérivation par rapport à $\vec{\psi}$	50
3.1.2.3	Position des actionneurs compliants	50
3.1.3	Modèle statique	51
3.1.3.1	Contraintes statiques	51
3.1.3.2	Modèle statique direct	51
3.1.3.3	Conditions pour la résolution	51
3.1.3.4	Choix de la solution	52
3.1.3.5	Modèle statique inverse	55
3.2	Modèle géométrico-statique	56
3.2.1	MGS direct	56
3.2.2	Résolution numérique	56
3.2.3	MGS inverse	57
3.2.4	Critique du MGS	58
4	Matrice de raideur	60
4.1	Définition d'une matrice de raideur	61
4.1.1	Concept : matrice de raideur	61
4.1.2	La matrice de raideur en robotique	61
4.1.3	Définition mathématique	62
4.1.4	Matrices de raideurs utilisées	62
4.2	Calcul de la matrice de raideur	63
4.2.1	Dérivation de l'équilibre statique	64
4.2.1.1	Dérivation de $\vec{\tau}_\psi$	64
4.2.1.2	Dérivation de $\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda$	64
4.2.1.3	Dérivation de $-\mathbf{J}^T \vec{f}$	65
4.2.1.4	Dérivation de $-\sum \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j$	67
4.2.2	Matrice de raideur généralisée	67
4.2.3	Matrices de raideur et de compliance complètes	68
4.2.4	Matrices de raideur et de compliance cartésiennes	69
4.3	Propriétés de la matrice de raideur	73
4.3.1	Contribution de chacune des matrices	73

4.3.2	Généralisation des matrices de raideur existantes	74
4.3.3	Conservativité et symétrie	79
4.3.4	Critère de positivité de la matrice	80
4.3.4.1	Utilité de cette propriété	80
4.3.4.2	Exemple	80
4.3.5	Formulation alternative de la matrice de raideur	83
4.3.5.1	Formulation systématique de \mathbf{K}_M	83
4.3.5.2	Calcul de la matrice \mathbf{K}_S	85
4.3.6	Conclusion	86
5	Modèle quasi-statique	87
5.1	Concept et appellation	88
5.2	Calcul du modèle quasi-statique	89
5.2.1	Définition mathématique	89
5.2.2	Dérivation du modèle géométrique	89
5.2.3	Dérivation du modèle statique	89
5.2.3.1	Matrice $\partial\vec{\mathcal{S}}/\partial\vec{\psi}$	90
5.2.3.2	Matrice $\partial\vec{\mathcal{S}}/\partial\vec{\phi}$	90
5.2.3.3	Matrice $\partial\vec{\mathcal{S}}/\partial\vec{f}$	91
5.2.3.4	Matrices \mathbf{T} et \mathbf{T}_f	91
5.2.4	Modèle quasi-statique cartésien	92
5.3	Propriétés du modèle	93
5.3.1	Modèle cinémato-statique	93
5.3.2	Matrice de compliance cartésienne	93
5.3.3	Matrice jacobienne quasi-statique	94
5.3.4	Matrice de transmission quasi-statique	94
5.3.4.1	Influence de la matrice	94
5.3.4.2	Concept de la matrice	94
5.3.4.3	Distribution des déplacements	95
5.3.4.4	Valeurs des ratios de transmission	95
5.3.5	Contrôle en force	96
5.3.6	Modèle quasi-statique complet	97
5.3.7	Modèle quasi-statique inverse	97
5.4	Conclusion	98
6	Exemples d'applications	100
6.1	Mécanisme plan à 1ddl	102

6.1.1	Modèle géométrico-statique	103
6.1.1.1	Analyse de la mobilité	103
6.1.1.2	Contraintes géométriques et coordonnées généralisées .	103
6.1.1.3	Pose de l'effecteur	104
6.1.1.4	Matrices G et J	104
6.1.1.5	Force et moment aux articulations	105
6.1.1.6	Équilibre statique	105
6.1.1.7	Modèle géométrico-statique	106
6.1.2	Modèle quasi-statique	106
6.1.2.1	Pose de l'effecteur	106
6.1.2.2	Matrice de raideur	106
6.1.2.3	Modèle quasi-statique cartésien	107
6.1.3	Étude du ratio de transmission T	107
6.1.3.1	Sans ressort ρ	108
6.1.3.2	Ressort avec une raideur faible	108
6.1.3.3	Ressort avec une raideur élevée	109
6.1.4	Contribution de cette application	111
6.2	Mécanisme plan 3- <u>R</u> RR compliant	111
6.2.1	Le mécanisme plan 3- <u>R</u> RR	111
6.2.2	Modèle géométrico-statique	113
6.2.2.1	Contraintes géométriques	113
6.2.2.2	Contraintes cinématiques	113
6.2.2.3	Contraintes statiques	114
6.2.3	Modèle géométrico-statique	115
6.2.3.1	Validation du modèle	115
6.2.3.2	Utilisation du MGS	115
6.2.3.3	Modèle géométrique inverse	116
6.2.3.4	Modèle géométrique direct	116
6.2.3.5	Raideur du mécanisme	117
6.2.4	Conclusion	118
6.3	Triptéron compliant	118
6.3.1	Présentation du Triptéron compliant	118
6.3.1.1	Le Triptéron conventionnel	118
6.3.1.2	Le Triptéron compliant	119
6.3.1.3	Structure cinématique équivalente	119
6.3.2	Contraintes à respecter dans les modèles	120

6.3.2.1	Contraintes géométriques	120
6.3.2.2	Contraintes cinématiques	125
6.3.2.3	Contraintes statiques	128
6.3.2.4	Matrice de raideur	128
6.3.3	Modèle géométrico-statique	132
6.3.4	Modèle quasi-statique	132
6.3.4.1	Résultats	133
Conclusion		137
Bibliographie		143

Liste des figures

1	Triptéron non actionné, construit avec des articulations compliantes. . .	3
1.1	Articulation à entaille droite.	9
1.2	Articulation à entaille arrondie.	9
1.3	Articulation à lamelles séparées.	10
1.4	Articulation à axe cruciforme.	10
1.5	Modèle cinématique simple.	11
1.6	Modélisation comme ressort 1 ddl.	11
1.7	Modèle à 3 ddl.	12
1.8	Analyse E.F. avec ABAQUS-CAE.	15
1.9	Analyse E.F. avec ProMechanica.	15
1.10	Modélisation d'une poutre.	16
1.11	Modélisation RRR d'une poutre.	18
1.12	Modèle d'un actionneur rotoïde.	20
1.13	Modèle d'un actionneur prismatique.	20
2.1	Schéma d'une boucle cinématique dans le plan.	26
2.2	Problème du choix des coordonnées généralisées pour le 2-RP.	30
3.1	Mécanisme plan à la configuration indéterminée.	52
3.2	Mécanismes avec plusieurs configurations d'équilibre.	53
4.1	Mécanisme à 5 ddl avec une patte contraignante.	77
4.2	Mécanisme parallèle à 2 ddl en équilibre statique.	81
6.1	Mécanisme parallèle compliant plan à 1 ddl.	102

6.2	Évolution de \mathbf{T} .	108
6.3	Évolution de \mathbf{T} .	109
6.4	Mécanisme dans une configuration proche de \clubsuit .	110
6.5	Mécanisme dans la configuration \blacklozenge .	110
6.6	Évolution du MGS.	110
6.7	Mécanisme 3-RRR.	111
6.8	Schéma équivalent d'une patte.	112
6.9	Coordonnée de l'actionneur ϕ^a .	116
6.10	Position en x de l'effecteur.	117
6.11	Variation de la position en x .	117
6.12	Structure cinématique du Triptéron.	118
6.13	Triptéron compliant non actionné.	119
6.14	Structure cinématique équivalente d'une patte.	120
6.15	Schéma d'une articulation sphérique.	121
6.16	Repères et paramètres DH.	121
6.17	Coordonnée x de l'effecteur.	135
6.18	Mécanisme 3-RRR compliant.	140
6.19	Préhenseur compliant sous-actionné.	141
6.20	Capteur d'effort compliant à 6 axes.	141

Liste des symboles

Les symboles χ et ν sont utilisés pour remplacer n'importe quelle variable (scalaire, vecteur ou matrice).

Opérateur	Description
χ_0	Valeur non déformée (valeur libre)
χ^*	Valeur désirée
$\Delta\chi, \delta\chi$	Différence entre la variable χ et la variable χ_0
$d\chi$	Variation infinitésimale
$\dot{\chi}$	Variation instantanée
$\frac{d\chi}{d\nu}$	Dérivée ou matrice jacobienne de χ par rapport à ν
χ^\dagger	Matrice pseudo-inverse
χ^i	Variable χ pour la $i^{\text{ème}}$ patte
χ_j	$j^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur χ
$\overline{\chi^i}$	Moyenne des variables χ^i
$\vec{0}_\chi$	Vecteur de zéros de dimension χ
$\mathbf{0}_\chi$	Matrice carrée de zéros de dimension χ
$\mathbf{1}_\chi$	Matrice identité de dimension χ

Dimension	Description	Page
\mathfrak{A}	Nombre d'actionneurs, degré d'actionnement	25
c	Nombre de total contraintes géométriques	25
\mathfrak{C}	Nombre de contraintes géométriques indépendantes	25
d	Dimension de l'espace considéré	24
d_l	Dimension de l'espace considéré en position	31
d_Ω	Dimension de l'espace considéré en orientation	31
d_ϑ	Nombre de ddl de l'articulation compliant ϑ	24
\mathfrak{F}	Degré de liberté à l'effecteur	25
g	Nombre d'articulations à d_ϑ ddl	24
\mathfrak{L}	Dimension complémentaire égale à $\mathfrak{M} - \mathfrak{F}$	33
m	Nombre d'articulations à un ddl dans le mécanisme	25
\mathfrak{M}	Degré de mobilité d'un mécanisme	24
n	Nombre de corps rigides dans le mécanisme	24
n_p	Nombre de pattes dans le mécanisme	27
n_x	Nombre de paramètres utilisés pour représenter la pose	31
n_Ω	Nombre de paramètres utilisés pour représenter l'orientation	31
\mathfrak{N}	Dimension complémentaire, égale à $\mathfrak{M} - \mathfrak{A}$	xix

Vecteur	Description	Dim.	Page
$\vec{\beta}$	Paramètres extérieurs	\mathfrak{M}	45
$\vec{\vartheta}$	Coordonnées d'une articulation à d_ϑ ddl	ϑ	12
$\vec{\theta}$	Toutes les coordonnées articulaires du mécanisme	m	25
$\vec{\lambda}$	Coordonnées géométriquement contraintes	\mathfrak{C}	29
$\vec{\tau}_\chi$	Effort appliqué sur la(les) articulation(s) χ	\sim	12
$\vec{\phi}$	Positions commandées des actionneurs	\mathfrak{A}	45
$\vec{\psi}$	Coordonnées généralisées	\mathfrak{M}	29
\vec{f}	Effort externe appliqué sur l'effecteur	\mathfrak{F}	45
\vec{u}	Configuration du mécanisme dans l'espace cartésien	$n_x + \mathfrak{L}$	33
$d\vec{u}_{\mathfrak{M}}$	Variation inf. de \vec{u} écrite avec des coord. indép.	\mathfrak{M}	40
\vec{x}	Pose de l'effecteur	n_x	31
$d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$	Variation inf. de la pose écrite en \mathfrak{F} coord. indép.	\mathfrak{F}	40
\vec{y}	Coord. complétant la conf ^o dans l'espace cartésien	\mathfrak{L}	33

Matrice	Description	Dim.	Page
A	Matrice de sélection des ψ_j actionnées	$\mathfrak{M} \times \mathfrak{A}$	73
B	Matrice de sélection des ψ_j non actionnées	$\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$	73
C_{χ}	Matrice de compliance	$\sim \times \sim$	70
G	Matrice jacobienne de $\vec{\lambda}$	$\mathfrak{C} \times \mathfrak{M}$	35
H	Matrice jacobienne de $d\vec{u}_{\mathfrak{M}}$	$\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$	42
I_{χ}	Matrice jacobienne de \vec{y}	$\mathfrak{L} \times \sim$	42
J_{χ}	Matrice jacobienne de $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$	$\mathfrak{F} \times \sim$	40
K_{χ}	Matrice de raideur	$\sim \times \sim$	48
L'	Matrice reliant $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ avec $d\vec{x}$	$\mathfrak{F} \times n_x$	39
M	Matrice de transmission complète	$\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$	97
P_{j}	Matrice jacobienne du point \vec{c}_j	$d_l \times \mathfrak{M}$	49
Q	Matrice d'orientation de l'effecteur	3×3	27
R	Matrice jacobienne de $\vec{\theta}$ par rapport à $\vec{\psi}$	$m \times \mathfrak{M}$	36
S_{χ}	Matrice jacobienne de $\vec{\mathcal{K}}$ par rapport à $\vec{\chi}$	$\mathfrak{C} \times \sim$	37
T	Matrice de transmission	$\mathfrak{M} \times \mathfrak{A}$	89
X	Complément de Schur de la matrice \mathbf{H}^{-1}	$\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$	42
Y	Complément de Schur de la matrice \mathbf{H}^{-1}	$\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$	42
χ^θ	Matrice χ calculée par rapport à $\vec{\theta}$	$\sim \times m$	84

Fonction	Description	Dim.	Page
$\vec{\mathcal{A}}$	Modèle de l'articulation compliant ϑ	d_ϑ	13
$\vec{\mathcal{B}}$	Modèle géométrique cartésien en fonction de $\vec{\theta}$	n_x	32
$\vec{\mathcal{C}}$	Fonction donnant les coordonnées $\vec{\lambda}$ à partir de $\vec{\psi}$	\mathfrak{C}	29
$\vec{\mathcal{F}}$	Modèle statique direct	\mathfrak{M}	51
$\vec{\mathcal{G}}$	Modèle géométrique interne	m	31
$\vec{\mathcal{K}}$	Contraintes géométriques dans un mécanisme	\mathfrak{C}	25
$\vec{\mathcal{M}}_\chi$	Modèle géométrico-statique direct donnant χ	\sim	56
$\vec{\mathcal{P}}$	Modèle géométrique cartésien	n_x	33
$\vec{\mathcal{S}}$	Contraintes statiques dans le mécanisme	\mathfrak{M}	46
$\vec{\mathcal{U}}$	Modèle géométrique complet	$n_x + \mathfrak{L}$	33

Introduction

« Puisque la montagne ne vient pas à nous, allons à la montagne. »

—Mahomet

Un robot manipulateur est un mécanisme conçu pour déplacer des objets dans l'espace ou dans un plan. Une grande précision dans la position et l'orientation de son organe terminal et une bonne répétabilité de mouvement sont par conséquent des propriétés généralement recherchées pour un manipulateur robotique. Les mécanismes parallèles, qui sont composés de plusieurs chaînes cinématiques reliant une base fixe à une plate-forme mobile, offrent quelques avantages en tant que manipulateurs. Dans ce type d'architecture, le nombre d'articulations est supérieur au nombre de degrés de liberté du mécanisme, ce qui permet d'actionner certaines articulations pendant que les autres sont laissées passives, leur mouvement étant déterminé par celui des articulations actionnées. En général, les articulations que l'on choisit d'actionner sont proches de la base fixe afin que la masse des parties mobiles du mécanisme soit minimale. L'inertie relativement faible des parties mobiles par rapport à la puissance des actionneurs est un avantage important des mécanismes parallèles comparés aux mécanismes sériels en terme d'agilité dynamique. Par contre, la présence d'articulations passives augmente le coût de fabrication et le jeu mécanique. Pour contourner ces inconvénients, on cherche désormais à remplacer ces articulations conventionnelles par des articulations compliantes, c'est-à-dire des pièces qui permettent par leur déformation, le mouvement

relatif de deux solides qu'elles relient. Les mécanismes qui possèdent des articulations compliantes sont appelés *mécanismes compliants*.

De nombreux mécanismes compliants ont été proposés dans la littérature. Certains n'utilisent pas la compliancance dans le but de gagner en précision mais dans celui de simplifier et diminuer le coût de leur fabrication (coupe-oncgle [1], cuillère à glace [5], pantographe [68], etc.), d'autres utilisent la capacité d'emmagasinage de l'énergie élastique des articulations compliantes (mécanismes bistables [69]), ou encore les deux avantages combinés (agrafeuse à impulsion [49]). Certains mécanismes profitent de la compacité et de couplage cinématique/statique qu'offrent ce type d'articulations (pince millimétrique [9], doigt sous-actionné [59], etc.). Dans ce premier groupe de mécanismes, la précision n'est pas une caractéristique importante. La seconde famille de mécanismes compliants est celle des mécanismes de précision. C'est-à-dire les mécanismes qui exploitent les avantages des articulations compliantes suivants : absence de jeu mécanique, de frottements sec et d'usure, et possibilité d'avoir un déplacement lisse même à une échelle nanométrique (machine EDM nanométrique [3, 4], nanomanipulateur [25], etc.). Malgré l'utilisation d'articulations compliantes, la conception des mécanismes de cette seconde catégorie reste encore marquée par la logique de conception des mécanismes conventionnels. Le principe est de conserver les caractéristiques du mécanisme conventionnel équivalent en utilisant des articulations compliantes dont le comportement se rapproche le plus possible de celui des articulations classiques. Ainsi, le développement d'une modélisation spécifique aux mécanismes compliants a pendant longtemps été négligé au profit de l'étude d'articulations compliantes dont le comportement se rapprocherait de celui des articulations rotoïdes ou prismatiques classiques à un degré de liberté.

La conception d'articulations flexibles au comportement « simple » occupe une place centrale dans la littérature sur les mécanismes compliants [63]. Parmi toutes les articulations compliantes proposées, une de celles qui reproduit le plus fidèlement l'articulation rotoïde est l'articulation à axe cruciforme [66, 67]. C'est donc celle-ci qui a été choisie au laboratoire de robotique de l'Université Laval pour réaliser en 2004 un prototype de mécanisme translationnel spatial : le *Triptéron compliant* [86]. La figure 1 est une photographie de ce mécanisme. Lors de ce travail, la limite du principe qui consiste à « adapter la réalité physique à nos modèles mathématiques » est apparue. Le Triptéron compliant ne présentant en effet plus les mêmes propriétés cinématiques que le Triptéron conventionnel [53], l'hypothèse simplificatrice qui veut que l'on puisse utiliser le

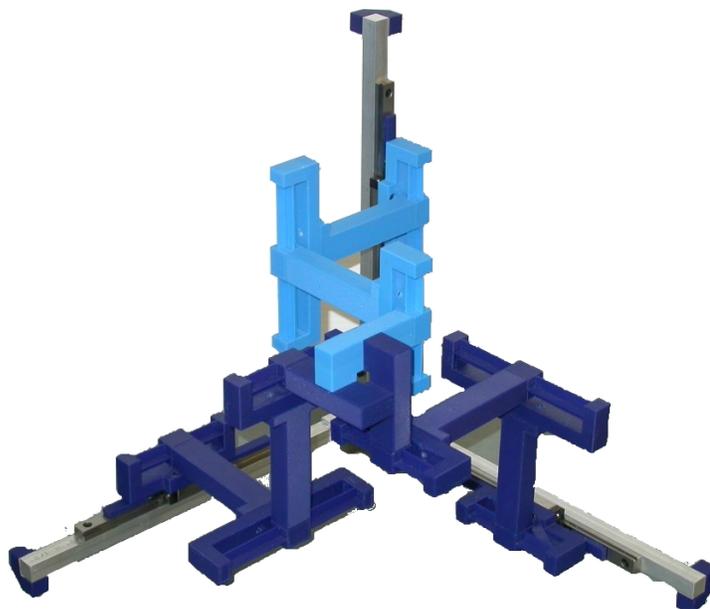


FIG. 1 – Triptéron non actionné, construit avec des articulations compliantes.

modèle cinématique conventionnel pour des mécanismes compliantes n'est plus tenable. Si on le regarde avec une certaine précision, le Triptéron compliant n'est effectivement pas un mécanisme à trois degrés de liberté, il n'est pas découplé et le rapport entre le déplacement des actionneurs et celui de la plate-forme n'est pas de un pour un. Il n'est donc plus le mécanisme translationnel, surcontraint et isotrope qu'est le Triptéron.

L'objectif de cette thèse est donc de remettre les choses dans l'ordre en « adaptant les équations mathématiques à la réalité physique ». On cherchera donc à développer un modèle pour les mécanismes compliantes qui tienne compte de leurs caractéristiques particulières afin d'éviter une perte de précision nuisible lors de leur utilisation en tant que manipulateurs. En somme, cette amélioration de la modélisation permettra de diminuer *le coût de la précision*.

La modélisation d'une articulation compliant prise isolément est l'objet de nombreuses études et publications, par exemple [36,39,62]. Cette modélisation est la brique élémentaire qui permet de construire une modélisation des mécanismes compliantes. La compliance étant définie comme la relation d'un effort appliqué avec la déformation qu'il provoque, modéliser un mécanisme construit avec de telles articulations doit nécessairement considérer la géométrie et la statique simultanément. La modélisation présentée dans cette thèse est donc qualifiée de *géométrico-statique*, puisqu'elle tient compte des déformations dues aux efforts externes appliqués sur le mécanisme, aux efforts internes

liés aux contraintes géométriques et à la gravité. Le problème étudié pose des défis proches de ceux rencontrés dans les domaines suivants : les préhenseurs [18, 50], les mécanismes à actionneurs redondants [21, 52], les mécanismes sous-actionnés [7], la dynamique et même l'analyse des modes de défaillances des manipulateurs [11, 13, 90]. Dans le domaine des mécanismes compliant, de très nombreux travaux ont été réalisés. Principalement des « analyses cinéostatiques » qui correspondent à des études de raideur et de compliance, c'est-à-dire à l'analyse de l'effet des efforts extérieurs sur la position et l'orientation de l'effecteur du mécanisme [21, 33, 85, 89, 94]. La grande majorité de ces travaux ne considèrent pas d'autre compliance que celle des actionneurs et négligent la raideur des articulations passives. Aucun d'entre eux ne prend en compte le fait qu'une articulation compliant ne peut pas rigoureusement être considérée comme ne possédant qu'un seul degré de liberté. Ainsi, aucune publication ne formule de modèle de compliance qui soit général et valable pour tous les mécanismes parallèles compliant. De plus, aucune recherche n'a été publiée sur l'impact des coordonnées des articulations actionnées et de leur déplacement sur un mécanisme déjà soumis à des efforts internes et extérieurs.

L'organisation de cette thèse suit la démarche qui permet de construire le modèle géométrico-statique des mécanismes compliant.

Le chapitre 1 est consacré à l'élément de base des mécanismes compliant : les articulations compliant. Il présente leurs différentes modélisations de la plus simple à la plus complexe, qui doivent être choisies selon la précision désirée. Une formulation systématique et générale de ces modèles est également introduite. Cette formulation permet l'utilisation de n'importe quel modèle d'articulation compliant —déjà existant ou à venir— dans les modèles de mécanismes compliant entiers, présentés dans la suite de cette thèse.

Le chapitre 2 présente le modèle géométrique des mécanismes parallèles compliant et sa variation instantanée : le modèle cinématique. Dans ce chapitre, est montré comment la pose du mécanisme et la configuration des articulations passives sont fonction d'un certain nombre de paramètres, les coordonnées généralisées, qui dans le cas des mécanismes compliant, ne correspondent pas aux actionneurs. Grâce au concept de modèle complet, les modèles inverses peuvent également être déterminés. Ces derniers mettent en évidence le fait qu'une modélisation uniquement géométrique est insuffisante pour décrire les mécanismes compliant.

Consacré aux modèles statique et géométrico-statique, le chapitre 3 montre que les coordonnées généralisées d'un mécanisme parallèle compliant ne sont pas des paramètres indépendants que l'on peut fixer arbitrairement. Elles sont fonction d'un certain nombre de paramètres extérieurs qui définissent la configuration du mécanisme au travers de contraintes statiques. Ces dernières sont présentées sous la forme d'une équation générale de l'équilibre statique d'un mécanisme parallèle compliant.

Le chapitre 4 présente la formulation générale de la matrice de raideur d'un mécanisme parallèle compliant. La matrice présentée est une généralisation de toutes les matrices de raideur proposées dans la littérature, notamment parce qu'elle permet de prendre en compte l'effet des efforts extérieurs et de la gravité, et qu'elle tient compte de la raideur des articulations passives et des compliances supplémentaires dans le mécanisme : celles des articulations compliantes à plusieurs degrés de liberté, celles des membrures et celles des actionneurs. Une attention particulière est portée à la définition de la matrice de raideur cartésienne à l'effecteur qui est très importante dans un contexte de manipulation.

À partir du modèle géométrico-statique et de la matrice de raideur, le modèle quasi-statique est introduit au chapitre 5. Ce modèle utilise la *matrice de compliance cartésienne* et une nouvelle matrice, la *matrice jacobienne quasi-statique* qui permet de décrire l'effet d'une variation des actionneurs sur la configuration du mécanisme compliant, quel que soit le nombre de degrés de mobilité de ce mécanisme et l'amplitude des efforts auxquels il est soumis.

Enfin, trois exemples d'applications sont traités dans le chapitre 6 : deux exemples simples qui illustrent la validité et les possibilités offertes par ces modèles et un troisième qui clôt cette thèse en montrant que les modèles présentés permettent de décrire le comportement d'un mécanisme compliant particulier : le Triptéron compliant.

Chapitre 1

Les articulations compliantes : présentation et modélisation

Dans ce chapitre, une présentation générale du concept d'articulation compliant et notamment des articulations à entaille et à lamelle est faite. Puis, leurs différentes modélisations possibles sont passées en revue : les modèles à un degré de liberté ; le modèle simple à plusieurs degrés de liberté découplés et à raideur constante et le modèle général représenté par une fonction $\vec{\tau}_\vartheta = \vec{\mathcal{A}}(\vartheta)$. Dans ce dernier modèle, la matrice de raideur est définie par $\mathbf{K}_\vartheta = d\vec{\mathcal{A}}/d\vartheta$. Enfin, sont étudiés plus en détail les modèles spécifiques de l'articulation à axe cruciforme, de l'articulation à entaille droite et des actionneurs.

1.1 Propriétés des articulations compliantes

1.1.1 Concept

Une *articulation compliante* est une pièce monobloc qui relie deux corps rigides tout en permettant le déplacement relatif de l'un par rapport à l'autre. Ce mouvement est rendu possible par la déformation de l'articulation compliante sous l'effet des efforts appliqués sur les corps. Généralement, on cherche à concentrer cette déformation dans une petite zone afin que le comportement de l'articulation compliante soit le plus proche possible de celui d'une articulation conventionnelle (faite d'un assemblage de plusieurs pièces mobiles).

La *compliance* est définie par l'Office de la langue française comme « la capacité du système mécanique du robot, ou d'une de ses parties, de s'ajuster aux contraintes et aux forces qui s'exercent sur lui et de corriger ainsi les erreurs de positionnement et d'orientation dont témoignent ces contraintes et ces forces ». Le terme *compliance* est équivalent à celui de *complaisance* et est quasi-synonyme avec celui de *souplesse*.

1.1.2 Avantages des articulations compliantes

Dans la littérature [3,36,39,62,63,66], les principaux avantages attribués aux articulations compliantes par rapport aux articulations conventionnelles, pour la réalisation de mécanismes sont les suivants :

- *Absence de jeu mécanique.* Le jeu mécanique est un phénomène d'hystérésis qui existe entre deux pièces en mouvement l'une par rapport à l'autre dans une liaison classique.

Le jeu mécanique étant difficilement modélisable [29, 46, 70], sa présence induit nécessairement une limite dans la précision maximale d'un système. De plus, l'absence de jeu mécanique permet d'augmenter considérablement la *répétabilité* du mouvement du mécanisme.

- *Absence de friction.* L'absence de friction dans les articulations offre plusieurs avantages pour le mécanisme. Cela diminue l'*usure* de celui-ci et supprime la nécessité de *lubrifier* ses articulations. Les articulations compliantes sont également

insensibles à la contamination par des poussières. De plus, en ce qui concerne la précision du mouvement, l'absence de frottement sec permet d'avoir un *mouvement parfaitement lisse*, même à une échelle nanométrique.

- *Pas d'assemblage.* Grâce à la structure monobloc de l'articulation. Le mécanisme peut théoriquement être construit en une seule pièce. Si cela n'est parfois pas possible en pratique, l'assemblage du mécanisme peut être réalisé uniquement avec quelques liaisons fixes (encastrement) entre plusieurs pièces. L'emplacement de ces liaisons fixes pouvant être arbitrairement choisi lors de la conception. De plus, le nombre de pièces dans le mécanisme étant réduit, son coût d'assemblage est diminué.

1.1.3 Limitations des articulations compliantes

Les articulations compliantes ont cependant quelques inconvénients qui vont restreindre leur utilisation pour certaines applications.

- *Faible débattement.* C'est le principal inconvénient des articulations compliantes. Il est lié au deuxième inconvénient qui est consubstantiel au concept d'articulation compliant.
 - *Concentration des contraintes.* Déformer une pièce pour en faire une articulation revient à concentrer les contraintes mécaniques dans celle-ci. Si l'on veut que l'articulation puisse être utilisée plusieurs fois, les déformations doivent rester dans le *domaine élastique*. Ainsi le débattement d'une articulation compliant est limité. De plus, si l'on veut allonger la durée de vie de l'articulation et éviter les phénomènes de *fatigue*, il faut restreindre davantage la déformation maximale et donc le débattement de l'articulation.
 - *Mouvement complexe de l'articulation.* Le mouvement décrit par une articulation compliant diffère généralement d'une simple translation (articulation prismatique) ou d'une simple rotation (articulation rotoïde) (notamment à cause du déplacement de l'axe de rotation au cours de la déformation pour une articulation compliant censée être «*rotoïde*», phénomène appelé «*dérive*» de l'articulation). Ce mouvement *complexe* nécessite d'utiliser une modélisation plus lourde avec plusieurs paramètres, ou à défaut, d'accepter une limitation de la précision du modèle [10, 48, 65, 96].

1.1.4 Différents types d'articulations compliantes existants

Les différents avantages et inconvénients des articulations compliantes sont plus ou moins marqués selon le type utilisé. Il existe plusieurs catégories d'articulations compliantes, les deux principales, les articulations à entaille et les articulations à lamelle sont brièvement présentées ci-dessous.

Articulations à entaille : La section de la pièce est réduite le long d'un ou plusieurs axes afin de faciliter la déformation de la pièce. L'entaille peut être faite selon plusieurs géométries, par exemple la figure 1.1 montre une articulation à entaille droite et la figure 1.2, une articulation à entaille arrondie. Ce type d'articulation compliante (*notch-type joint* en anglais) est le plus répandu. Ses principaux avantages sont sa compacité et sa simplicité de fabrication. Par contre, le débattement de ce type d'articulation est très faible et la dérive de l'axe de rotation est importante au cours de la déformation.

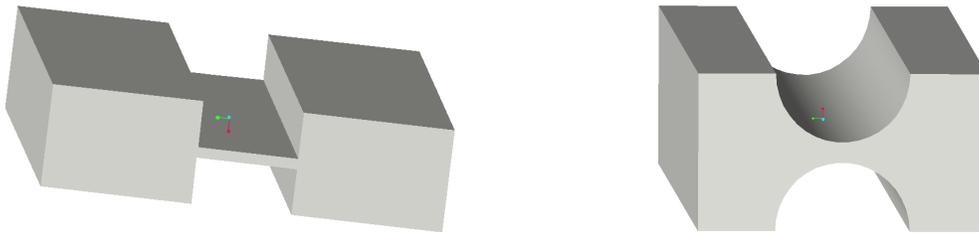


FIG. 1.1 – Articulation à entaille droite. FIG. 1.2 – Articulation à entaille arrondie.
(Tirés de [9])

Articulations à lamelles : Dans ce type d'articulation, on cherche à répartir la déformation sur une certaine longueur afin de limiter la concentration des contraintes. Par exemple, la figure 1.3 montre l'articulation proposée en 1965 par Weinstein [87] où la flexion des lamelles permet le déplacement relatif des corps reliés par l'articulation dans le plan qui leur est communément perpendiculaire. L'avantage de ce type d'articulation est que le débattement est plus grand, par contre ces articulations sont moins compactes et leur fabrication plus compliquée que les articulations à entaille.

Un modèle particulièrement intéressant d'articulation à lamelle a été présenté par

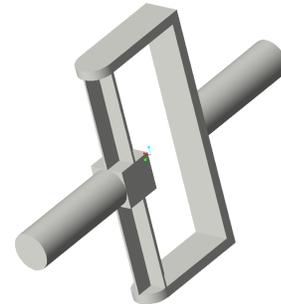
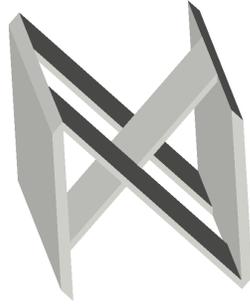


FIG. 1.3 – Articulation à lamelles séparées. FIG. 1.4 – Articulation à axe cruciforme.
(Tirés de [9])

Moon *et al.* [66, 67] : les articulations compliantes à axe cruciforme (Fig.1.4) dont le mouvement dans le plan est très proche d'une rotation à axe constant et dont la raideur en torsion selon cet axe est beaucoup plus faible que celles mesurées selon aucun autre axe.

1.1.5 Défis posés par l'utilisation de ces articulations

Les avantages des articulations compliantes rendent ce type d'articulations très intéressantes pour la fabrication de mécanismes de précision avec une bonne répétabilité de mouvement. De plus, l'absence de jeu mécanique et de friction rendent théoriquement possible une modélisation quasi-exacte de leur comportement, renforçant ainsi la précision atteignable avec ce type d'articulation. Cependant, à cause du lien entre déformation et contrainte dans ces articulations, une bonne modélisation des mécanismes qui en sont constitués, devra être à la fois cinématique et statique.

1.2 Modèles d'articulations compliantes

En fonction de la précision requise pour la modélisation du mécanisme, ses articulations compliantes peuvent être modélisées comme suit.

1.2.1 Modèles simples

Articulation conventionnelle équivalente : L'articulation est considérée comme une articulation rotoïde ou prismatique à un degré de liberté (ddl). Seul l'aspect cinématique est pris en compte. La figure 1.5 représente ce modèle pour une articulation

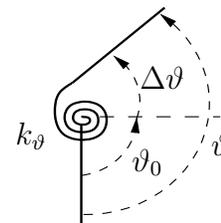
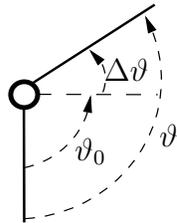


FIG. 1.5 – Modèle cinématique simple. FIG. 1.6 – Modélisation comme ressort 1 ddl.

rotoïde dans le plan. On note ϑ_0 la configuration de l'articulation au repos, c'est-à-dire lorsqu'aucun effort n'est appliqué sur celle-ci et on note $\Delta\vartheta$ la déformation résultant de ces efforts. L'angle réel entre les deux corps reliés par l'articulation est noté ϑ .

Ressort à un ddl équivalent : La raideur de l'articulation est considérée constante et son déplacement est simple et limité à un degré de liberté. La relation entre l'effort appliqué τ_ϑ et la déformation $\Delta\vartheta$ de l'articulation s'écrit

$$\tau_\vartheta = k_\vartheta \Delta\vartheta \quad (1.1)$$

où k_ϑ est la raideur du ressort en torsion ou du ressort linéaire équivalent. k_ϑ peut être déterminée en fonction de la géométrie de l'articulation. La déformation $\Delta\vartheta$ est définie comme la différence entre la position chargée ϑ et la position au repos ϑ_0 de l'articulation. Les valeurs ϑ et ϑ_0 sont des angles pour un ressort en torsion et des longueurs pour un ressort linéaire. La figure 1.6 représente ce modèle pour une articulation rotoïde dans le plan.

1.2.2 Modèle linéaire à plusieurs degrés de liberté découplés

Afin de rapprocher encore le modèle de la réalité, on peut décider de considérer une articulation compliant comme étant équivalente à un ensemble de ressorts orientés

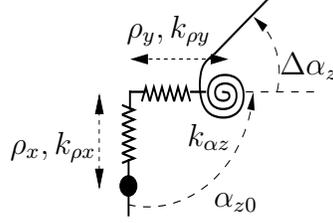


FIG. 1.7 – Modèle d’articulation compliant à trois ddl dans le plan.

selon plusieurs axes. La relation entre les déformations et les efforts appliqués s’écrit alors

$$\vec{\tau}_{\vartheta} = \mathbf{K}_{\vartheta} \Delta \vec{\vartheta}. \quad (1.2)$$

Le nombre de degrés de liberté, noté d_{ϑ} , à prendre en compte dépend du ratio des raideurs et de la précision désirée. Au maximum, pour l’étude d’un mécanisme spatial, on aura six paramètres ($d_{\vartheta} = 6$). Dans ce cas, les variables de l’équation (1.2) sont le vecteur $\vec{\tau}_{\vartheta} = [f_x; f_y; f_z; m_x; m_y; m_z]^T$ représentant les forces et les couples appliqués sur l’articulation selon les trois axes, le vecteur $\Delta \vec{\vartheta} = \vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0$, écrit $[\Delta \rho_x; \Delta \rho_y; \Delta \rho_z; \Delta \alpha_x; \Delta \alpha_y; \Delta \alpha_z]^T$ et représentant les déformations linéaires et angulaires de l’articulation dans toutes les directions. Enfin, la matrice \mathbf{K}_{ϑ} est une matrice composée par les coefficients de raideur correspondants. Les raideurs étant considérées découplées, c’est-à-dire qu’un effort selon un axe donné déforme l’articulation uniquement selon cet axe, la matrice \mathbf{K}_{ϑ} est diagonale.

Ce modèle où les raideurs sont considérées constantes et découplées représente un bon compromis entre complexité et précision du modèle. Cependant, il nécessite de connaître les valeurs des coefficients associés aux raideurs. Ces valeurs peuvent être calculées théoriquement en fonction de la géométrie de la pièce pour certains types d’articulations ou bien, elles peuvent être mesurées. La figure 1.7 représente ce modèle pour une articulation rotoïde dans le plan. Les deux coefficients raideurs linéaires sont $k_{\rho x}$ et $k_{\rho y}$ et le coefficient de raideur en torsion est $k_{\alpha z}$. Pour cette articulation, l’équation (1.2) s’écrit

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\rho x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\rho y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\alpha z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \rho_x \\ \Delta \rho_y \\ \Delta \alpha_z \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

1.2.3 Modèle général

Relation entre la déformation et l'effort appliqué : En réalité, la déformation d'une articulation selon un axe n'est ni rigoureusement proportionnelle à l'effort qu'on lui applique selon cet axe, ni totalement indépendante des efforts appliqués selon les autres axes. Ainsi le modèle exact d'une articulation compliant s'écrit sous la forme d'une fonction non linéaire $\vec{\mathcal{A}}$ qui associe un vecteur $\vec{\tau}_\vartheta$ à un ensemble de d_ϑ coordonnées articulaires représentant les déformations, assemblées dans un vecteur $\vec{\vartheta}$. Cela s'écrit

$$\vec{\tau}_\vartheta = \vec{\mathcal{A}}(\vec{\vartheta}). \quad (1.4)$$

Matrice de raideur : La matrice de raideur d'une articulation se définit comme la matrice jacobienne de la fonction $\vec{\mathcal{A}}$:

$$\mathbf{K}_\vartheta(\vec{\vartheta}) = \frac{d\vec{\mathcal{A}}(\vec{\vartheta})}{d\vec{\vartheta}} = \frac{d\vec{\tau}_\vartheta}{d\vec{\vartheta}}. \quad (1.5)$$

On voit ainsi que dans le cas général lorsque les approximations habituelles ne sont pas faites, la matrice de raideur d'une articulation n'est pas diagonale et dépend de la configuration de l'articulation (\mathbf{K}_ϑ n'est pas constante). Le modèle à six ddl d'une articulation nous donne donc la matrice de raideur de dimension 6×6 suivante :

$$\mathbf{K}_\vartheta(\vec{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial \rho_x} & \frac{\partial f_x}{\partial \rho_y} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial \alpha_z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial \rho_x} & \frac{\partial f_y}{\partial \rho_y} & \dots & \frac{\partial f_y}{\partial \alpha_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial m_z}{\partial \rho_x} & \frac{\partial m_z}{\partial \rho_y} & \dots & \frac{\partial m_z}{\partial \alpha_z} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Ainsi, on obtient la relation linéaire suivante entre la variation de la déformation et la variation de l'effort appliqué :

$$d\vec{\tau}_\vartheta = \mathbf{K}_\vartheta(\vec{\vartheta})d\vec{\vartheta}. \quad (1.7)$$

Ratio des raideurs dans une articulation : Le coefficient de raideur le plus faible parmi ceux situés sur la diagonale de la matrice \mathbf{K}_ϑ correspond à la déformation la plus importante de l'articulation. On qualifie cette raideur de *raideur principale*. Dans

une articulation passive conventionnelle, cette raideur principale est nulle. Lorsqu'on modélise l'articulation comme un ressort à un ddl, c'est cette valeur de raideur que l'on utilise. Les autres raideurs situées sur la diagonale de la matrice \mathbf{K}_ϑ sont qualifiées de *secondaires*. Elles correspondent aux compliances de l'articulation selon les autres directions. Un ratio ϱ entre la raideur principale et la plus faible des raideurs secondaires permet de déterminer si l'articulation se déforme ou non selon une direction privilégiée et donc permet d'évaluer l'intérêt de prendre un modèle à plusieurs degrés de liberté pour l'articulation complianté étudiée.

$$\varrho = \frac{k_{\text{secondaire minimale}}}{k_{\text{principale}}} \quad (1.8)$$

En pratique, on calcule ce ratio avec la raideur secondaire la plus faible¹. Dans une articulation conventionnelle (non complianté) à un degré de liberté, ce ratio est infini. Dans les articulations présentées par Moon *et al.* ce ratio peut aller de 25 à 500 selon la géométrie de la pièce. Enfin, les coefficients de raideur qui ne sont pas situés sur la diagonale de la matrice correspondent aux couplages entre un effort selon une direction donnée et un déplacement selon une autre direction. On qualifie ces raideurs de *raideurs tertiaires*. Dans le cas du modèle à plusieurs degrés de liberté découplés (Sec.1.2.2), ces raideurs tertiaires sont nulles et la matrice \mathbf{K}_ϑ est diagonale. Cela signifie par exemple qu'une déformation selon l'axe (Ox) ne produit aucune force selon (Oy) et (Oz) et aucune couple.

1.2.4 Exemple de modélisation d'articulations compliantes

1.2.4.1 Articulation à axe cruciforme

Dans l'article [67] où sont présentées les articulations à axe cruciforme, Moon *et al.* montrent que l'on peut considérer, tout en maintenant une bonne précision, que ce type d'articulation offre des raideurs constantes et non couplées. Leur matrice de raideur \mathbf{K}_\otimes

¹Lorsque la raideur principale et la raideur secondaire n'ont pas les mêmes unités (raideur en torsion ou en tension/compression), on doit considérer la longueur du bras de levier. Voir [67].

est donc constante et diagonale. Elle s'écrit

$$\mathbf{K}_{\otimes} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}, k_{55}, k_{66}), \text{ avec } \begin{cases} k_{11} = 8EI/L \\ k_{22} = 8EI/L \\ k_{33} = 2AE/L \\ k_{44} = 24EI/L \\ k_{55} = 24EI/L \\ k_{66} = \frac{4}{3}(w/t - 0.373)Gt^4/L \end{cases} \quad (1.9)$$

où w , t , L , I sont des paramètres géométriques décrivant l'axe cruciforme. G et E sont les caractéristiques du matériau dans lequel l'articulation est fabriquée.

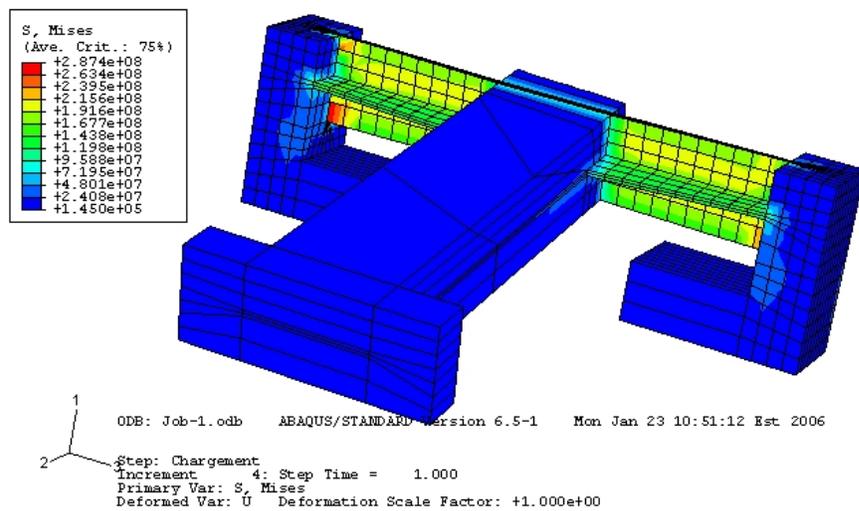


FIG. 1.8 – Analyse E.F. de l'articulation à axe cruciforme avec ABAQUS-CAE.

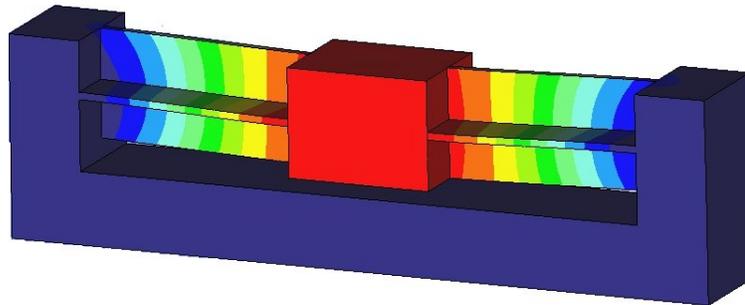


FIG. 1.9 – Analyse E.F. de l'articulation à axe cruciforme avec ProMechanica.

La validité de l'hypothèse des raideurs constantes et découplées a été vérifiée pour la zone de déformation nominale en réalisant une analyse par éléments finis sommaire avec les logiciels ABAQUS-CAE (Fig.1.8) et ProMechanica (Fig.1.9).

1.2.4.2 Articulation à entaille droite

Ce type d'articulation consiste à réduire la section qui relie deux corps rigides afin que la flexion de cette zone permette leur mouvement relatif.

Modèle exact : Modéliser cette entaille est équivalent à modéliser une poutre. On considère que cette poutre est encastrée dans le corps solide 1 et que le corps 2 est celui qui se déplace et applique un effort sur l'articulation. Enfin, seul le mouvement dans le plan est pris en compte, donc le modèle s'écrit sous la forme d'une fonction $\vec{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

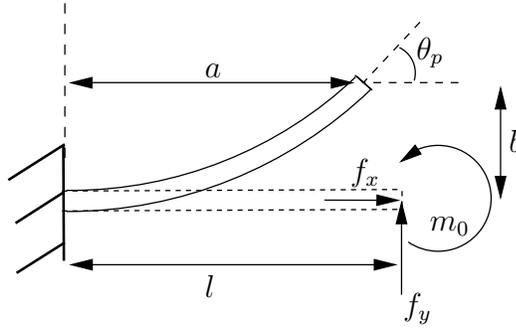


FIG. 1.10 – Modélisation d'une poutre.

Dans leur article [82], Saxena et Kramer notent a la coordonnée de l'extrémité de la poutre selon l'axe (Ox) , b selon (Oy) et θ_p sa rotation par rapport à l'axe (Oz) . Les efforts selon les mêmes axes respectifs sont notés f_x , f_y et m_0 . En utilisant les équations d'Euler-Bernoulli pour les grandes déformations des poutres, on obtient les trois relations suivantes qui relient les trois déformations et les trois efforts appliqués sur la poutre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta_p} \frac{d\theta}{\sqrt{\eta \cos(\phi - \theta_p) - \eta \sin(\phi - \theta) + \kappa}} \\ \frac{a}{l} = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \int_0^{\theta_p} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\eta \cos(\phi - \theta_p) - \eta \sin(\phi - \theta) + \kappa}} \\ \frac{b}{l} = \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \int_0^{\theta_p} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\eta \cos(\phi - \theta_p) - \eta \sin(\phi - \theta) + \kappa}} \end{array} \right. , \quad (1.10)$$

avec α , ϕ , κ and η qui sont fonction des paramètres géométriques de la poutre, des caractéristiques du matériau et de f_x , f_y et m_0 , les efforts appliqués à la poutre. On

observe que l'on est capable en calculant la différence entre les deux termes de chaque équation, d'obtenir une fonction non linéaire $\mathcal{G}_{\rightsquigarrow}$ de la forme

$$\mathcal{G}_{\rightsquigarrow}(a, b, \theta_p, f_x, f_y, m_0) = \mathcal{G}_{\rightsquigarrow}(\vec{\vartheta}, \vec{\tau}_{\vartheta}) = \vec{0}_3, \quad (1.11)$$

où $\vec{\vartheta} = [a; b; \theta_p]^T$ et $\vec{\tau}_{\vartheta} = [f_x; f_y; m_0]^T$. Pourtant, à cause de l'intégrant

$$(1/\sqrt{\eta \cos(\phi - \theta_p) - \eta \sin(\phi - \theta) + \kappa})$$

dont la primitive est encore inconnue, on ne sait pas isoler θ_p . On ne peut donc obtenir ni la fonction $\vec{\mathcal{A}}_{\rightsquigarrow}(\vec{\vartheta}) = \vec{\tau}_{\vartheta}$, ni sa fonction réciproque $\vec{\mathcal{A}}_{\rightsquigarrow}^{-1}(\vec{\tau}_{\vartheta}) = \vec{\vartheta}$ sous formes symboliques explicites. Devant cette impossibilité d'obtenir des expressions symboliques de $\vec{\mathcal{A}}_{\rightsquigarrow}(\vec{\vartheta})$ et $\vec{\mathcal{A}}_{\rightsquigarrow}^{-1}(\vec{\tau}_{\vartheta})$ à partir du modèle d'Euler-Bernoulli, des modèles simplifiés ont été recherchés.

Modèles à un (ou deux) ddl : Dans un premier temps, ce type d'articulation compliant a été modélisée comme un ensemble de deux corps rigides de longueurs γL et $(1 - \gamma)L$, reliés par un ressort en torsion [40–43, 82]. La longueur L est celle de la poutre équivalente et le nombre $\gamma \in [0, 1]$ est fonction du type de chargement. Ces modèles présupposent de connaître le type de chargement auquel est soumise l'articulation (couple ou force). On ne peut donc pas considérer ces modèles comme des modèles à un ddl. De plus, la connaissance prérequis du chargement rend leur utilisation peu commode.

Modèle à trois ddl : Lorsque que l'on veut augmenter la précision et le domaine de validité d'un modèle, il faut comme dans la réalité d'une articulation à entaille droite dans le plan, considérer les trois degrés de liberté ($d_{\vartheta} = 3$). Le meilleur modèle à ce jour a été présenté récemment en 2008 par Su [83], il est valide pour tout type d'effort appliqué à la poutre et possède trois degrés de liberté. La poutre y est modélisée comme un ensemble de quatre corps pseudo-rigides reliés par trois articulations rotoïdes (Fig.1.11).

Les angles et les raideurs des ressorts en torsion sont respectivement notés φ_1, φ_2 et φ_3 et k_1, k_2 et k_3 . Les longueurs des corps pseudo-rigides sont notées l_0, l_1, l_2 et l_3 , elles respectent la contrainte suivante

$$l_0 + l_1 + l_2 + l_3 = l. \quad (1.12)$$

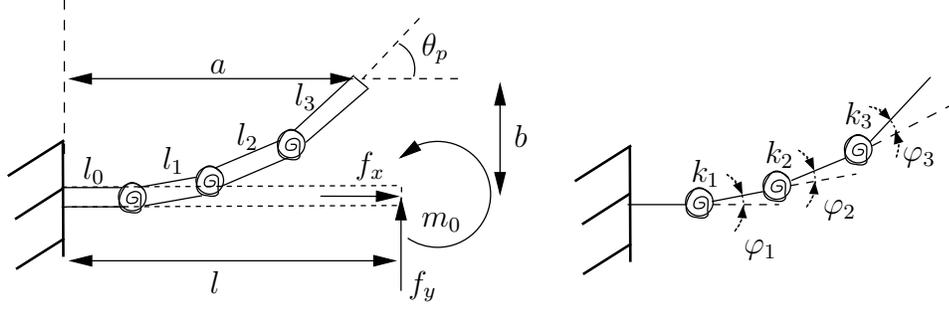


FIG. 1.11 – Modélisation RRR d'une poutre.

La relation entre l'effort appliqué $\vec{\tau}_\vartheta = [f_x; f_y; m_0]^T$ (défini dans le repère cartésien), l'effort ressenti par les articulations $\vec{\tau}_\varphi = [\tau_{\varphi_1}; \tau_{\varphi_2}; \tau_{\varphi_3}]^T$ et la déformation $\vec{\varphi} = [\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3]^T$ (définis dans le repère articulaire) s'écrit

$$\mathbf{J}_\vartheta^T \vec{\tau}_\vartheta = \vec{\tau}_\varphi = \mathbf{K}_\varphi \vec{\varphi}, \quad (1.13)$$

où $\mathbf{J}_\vartheta = d\vec{\vartheta}/d\vec{\varphi}$ est la matrice jacobienne du mécanisme RRR, \mathbf{K}_φ est la matrice diagonale composée par les coefficients de raideur k_1 , k_2 et k_3 . De plus, la relation non linéaire $\vec{\varphi} = \vec{\mathcal{G}}(\vec{\vartheta})$ est connue et s'écrit

$$\begin{aligned} p_x &= a - l_3 \cos \theta_p - l_0 \\ p_y &= b - l_3 \sin \theta_p \\ \varphi_2 &= \pm \arccos \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) \\ \cos \varphi_1 &= \frac{p_x(l_1 + l_2 \cos \varphi_2) + p_y l_2 \sin \varphi_2}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_2} \\ \sin \varphi_1 &= \frac{p_x(l_1 + l_2 \cos \varphi_2) - p_y l_2 \sin \varphi_2}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_2} \\ \varphi_1 &= \arctan(\sin \varphi_1, \cos \varphi_1) \\ \varphi_3 &= \theta_p - \varphi_1 - \varphi_2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Avec les équations (1.13) et (1.14), le modèle RRR peut s'écrire sous la forme d'une fonction non-linéaire définie dans le repère cartésien

$$\vec{\tau}_\vartheta = \vec{\mathcal{A}}_\vartheta(\vec{\vartheta}) = \mathbf{J}_\vartheta^{-T} \mathbf{K}_\varphi \mathcal{G}(\vec{\vartheta}). \quad (1.15)$$

Et la matrice de raideur s'écrit

$$\mathbf{K}_\vartheta = \frac{d\vec{\tau}_\vartheta}{d\vec{\vartheta}} = \mathbf{J}_\vartheta^{-T} \mathbf{K}_\varphi \mathbf{J}_\vartheta^{-1} + \left(\frac{d\mathbf{J}_\vartheta^{-T}}{d\vec{\vartheta}} \mathbf{K}_\varphi \mathcal{G}(\vec{\vartheta}) \right). \quad (1.16)$$

La notation $d\mathbf{J}_\vartheta^{-T}/d\vec{\vartheta}$ représente le tenseur du troisième ordre obtenu en dérivant la matrice $\mathbf{J}_\vartheta^{-T}$ par les coordonnées du vecteur $\vec{\vartheta}$. Le produit de ce tenseur par le vecteur $\mathbf{K}_\varphi\mathcal{G}(\vec{\vartheta})$, c'est-à-dire le second terme de l'équation (1.16), se calcule de la manière suivante :

$$\frac{d\mathbf{J}_\vartheta^{-T}}{d\vec{\vartheta}}\mathbf{K}_\varphi\mathcal{G}(\vec{\vartheta}) = \left[\frac{\partial\mathbf{J}_\vartheta^{-T}}{\partial a}\mathbf{K}_\varphi\mathcal{G}(\vec{\vartheta}); \frac{\partial\mathbf{J}_\vartheta^{-T}}{\partial b}\mathbf{K}_\varphi\mathcal{G}(\vec{\vartheta}); \frac{\partial\mathbf{J}_\vartheta^{-T}}{\partial\theta_p}\mathbf{K}_\varphi\mathcal{G}(\vec{\vartheta}) \right]. \quad (1.17)$$

On observe que la matrice de raideur d'une poutre calculée avec ce modèle RRR n'est ni constante, ni découplée (diagonale). Ceci est en accord avec la réalité d'une poutre en déformation.

1.3 Autres compliances dans le mécanisme

Lorsqu'on modélise un mécanisme, en fonction de la précision requise et du degré de complexité acceptable pour le modèle, on peut prendre en compte d'autres compliances au sein de ce mécanisme, notamment la complianc des actionneurs et celles des liens censés être rigides.

1.3.1 Compliance des actionneurs

Dans certains cas, la position réelle d'un actionneur peut différer de la position souhaitée à cause des efforts appliqués sur ce dernier (contrôle en boucle ouverte, contrôleur proportionnel, puissance insuffisante, etc.). Pour tenir compte de cette complianc, on modélise l'actionneur j comme un assemblage en série d'un actionneur idéal ϕ_j complètement rigide et d'un ressort $\Delta\psi_j$ de coefficient de raideur k_{ϕ_j} [21], la longueur libre de ce dernier étant nulle. La position réelle de l'actionneur est notée ψ_j . D'une façon équivalente, un actionneur compliant peut être modélisé comme un ressort de longueur libre variable ϕ_j correspondant à sa position désirée, la déformation étant alors égale à $\Delta\psi_j$. Les figures 1.12 et 1.13 illustrent cette modélisation.

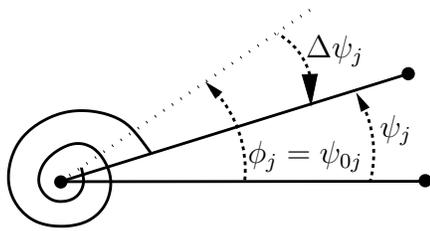


FIG. 1.12 – Modèle d'un actionneur rotoïde.

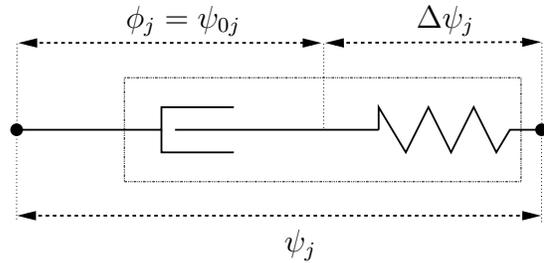


FIG. 1.13 – Modèle d'un actionneur prismatique.

1.3.2 Compliance des liens rigides

Les déformations des liens rigides peuvent et doivent aussi être prises en compte lorsque leur impact sur le positionnement du mécanisme n'est pas négligeable. La modélisation de ces déformations se fait en ajoutant des ressorts virtuels. Ainsi la modélisation de la compliance des liens ne présente pas de défi particulier hormis l'estimation de la valeur du coefficient de raideur et la position du ressort équivalent.

1.4 Bilan des particularités de la modélisation des articulations compliantes

Le principe de fonctionnement d'une articulation compliantes rend son analyse cinématique dépendante de son analyse statique. On modélise donc souvent ce type d'articulation par des ressorts dont la raideur peut ne pas être constante et dépendre de la déformation de l'articulation. De plus, le nombre de degrés de liberté que l'on attribue à une articulation compliantes, noté d_ϑ , est choisi en fonction de son comportement et de la précision désirée pour le modèle du mécanisme.

Les modèles présentés pour les articulations compliantes viennent de la littérature. La principale contribution de ce chapitre en vue de la construction du modèle d'un mécanisme compliant entier est de ramener tous ces modèles à une fonction $\vec{\mathcal{A}}$ et de calculer la raideur de l'articulation comme la jacobienne $d\vec{\mathcal{A}}/d\vec{\vartheta}$. L'utilisation de cette formulation générale permet ainsi d'anticiper les découvertes à venir dans le domaine de la modélisation des articulations compliantes. Puisque leur modélisation reste encore un

sujet ouvert, notamment pour l'articulation la plus utilisée —l'articulation à entaille—, lorsque des modèles plus précis auront été développés, ils pourront facilement être intégrés au modèle proposé dans cette thèse.

Chapitre 2

Modèles géométrique et cinématique d'un mécanisme parallèle compliant

Grâce à une analyse de mobilité, on détermine le nombre de contraintes géométriques que les variables articulaires doivent respecter dans un mécanisme parallèle compliant. À partir de ces contraintes, les coordonnées géométriquement contraintes et la pose cartésienne de l'effecteur peuvent être calculées en fonction des coordonnées généralisées. Un modèle géométrique complet qui définit complètement la configuration d'un mécanisme dans le repère cartésien est introduit et permet de calculer le modèle géométrique inverse. Le modèle cinématique est ensuite étudié. Il utilise des matrices cartésiennes pour calculer la variation de la valeur des coordonnées géométriquement contraintes et de la pose cartésienne de l'effecteur.

2.1 Modélisation d'un mécanisme parallèle compliant

Après une brève introduction sur le choix du modèle qui doit être adopté en fonction de l'utilisation du mécanisme étudié, les modélisations géométrique et cinématique d'un mécanisme parallèle compliant sont présentées dans ce chapitre. Les modèles suivants sont valables pour tous les mécanismes parallèles. En effet, dans le chapitre 1, il a été vu qu'une articulation conventionnelle peut être modélisée comme une articulation compliant dont les raideurs primaire et tertiaires sont nulles et les raideurs secondaires infinies. De la même façon, les actionneurs —compliance ou idéaux—, peuvent être pris en compte dans les modèles ci-dessous.

Choix des modèles des articulations et du mécanisme

Selon l'utilisation du mécanisme, on peut modéliser les articulations compliantes avec plus ou moins d'exactitude et de complexité.

- Lorsqu'il y a peu d'efforts en jeu —c'est-à-dire que les efforts externes appliqués à l'effecteur, le poids des membrures et/ou les efforts internes sont négligeables par rapport à la raideur du mécanisme— et si la précision requise n'est pas élevée, on peut utiliser les modèles classiques, c'est-à-dire les modèles uniquement géométrique ou cinématique qui considèrent les articulations compliantes équivalentes à des articulations conventionnelles à un ddl et donc les mécanismes compliantes équivalents à des mécanismes conventionnels.
- Lorsque l'effet des efforts appliqués à l'effecteur, du poids des membrures ou encore des déformations des articulations ne sont pas négligeables, mais que cependant le ratio ρ de l'articulation est élevé, on peut considérer qu'une articulation compliant est équivalente à un ressort à un ddl.
- Dans tous les autres cas, et surtout lorsqu'on désire le maximum de précision possible pour le modèle et le contrôle du mécanisme, il convient de considérer toutes les compliances significatives et donc d'utiliser un modèle à plusieurs ddl pour les articulations compliantes. Dans ce cas, les modèles uniquement géométrique ou cinématique du mécanisme ne sont pas suffisants : il faut y ajouter une analyse statique. On utilise alors le *modèle géométrico-statique* présenté plus en détail au chapitre 3.

2.2 Modélisation géométrique

Cette section présente le modèle géométrique général d'un MPC. Une étude de la mobilité d'un MPC y est d'abord réalisée, puisqu'elle permet de déterminer le nombre de contraintes géométriques que doivent respecter les variables articulaires pour représenter la structure fermée du mécanisme parallèle. Ensuite, ces contraintes sont discutées, les coordonnées généralisées et géométriquement contraintes sont introduites. Enfin, la pose de l'effecteur, élément primordial lorsqu'un mécanisme est utilisé en tant que manipulateur, ajoute \mathfrak{F} contraintes géométriques et permet de définir le modèle géométrique d'un MPC.

Les modèles présentés ne sont pas des contributions originales de cette thèse, mais un effort a été fait pour qu'ils soient formulés de manière générale. Il faut cependant remarquer que dans ces modèles, les coordonnées généralisées ne correspondent pas aux coordonnées des actionneurs et le calcul des coordonnées des articulations passives revêt une importance particulière. De plus, des modèles *complets* ont été introduits pour prendre en compte les articulations supplémentaires que nécessite la modélisation précise d'un MPC.

2.2.1 Nombre de mobilités et de contraintes géométriques dans un MPC

Pour beaucoup de mécanismes parallèles, la formule de Chebychev-Grübler-Kutzbach peut être utilisée afin de calculer la mobilité \mathfrak{M} d'un mécanisme [45]. Cette formule s'écrit

$$\mathfrak{M} = d(n - g - 1) + \sum_{j=1}^g d_{\vartheta_j}, \quad (2.1)$$

où d est la dimension de l'espace considéré (jusque trois si le mécanisme est plan, jusque six si le mécanisme est spatial), n est le nombre de corps rigides, g est le nombre d'articulations et d_{ϑ_j} est le nombre de degrés de liberté de l'articulation compliant ϑ_j . Il a été vu dans le chapitre précédent que d_{ϑ_j} est déterminé en fonction de la précision désirée et peut varier de 1 à d [72, 89]. Dans le reste de cette thèse, afin de simplifier les notations, chaque articulation compliant à d_{ϑ_j} degrés de liberté sera considérée comme d_{ϑ_j} articulations/ressorts virtuels à un seul degré de liberté supplémentaires [94].

Ainsi, le nombre total d'articulations dans le mécanisme devient $m = \sum d_{\theta_j}$, $j \in \{1, \dots, g\}$. Le vecteur contenant les m coordonnées articulaires θ_i du mécanisme est noté $\vec{\theta}$. Le nombre de contraintes géométriques à respecter dans un mécanisme, noté c peut être déterminé comme suit :

$$c = d(g + 1 - n). \quad (2.2)$$

On remarque d'après cette formule que le nombre de contraintes géométriques à respecter est égal à d fois le nombre de boucles cinématiques existant dans le mécanisme. Cependant, la formule de Chebychev-Grübler-Kutzbach n'est pas toujours valable pour calculer la mobilité puisque les c contraintes géométriques ne sont pas nécessairement indépendantes [26, 30, 54, 79]. On parle alors de mécanismes surcontraints. En notant \mathfrak{C} le nombre de contraintes géométriques indépendantes dans un mécanisme, B.Paul [71] donne la relation suivante pour déterminer le degré de mobilité \mathfrak{M} d'un mécanisme en fonction du nombre de paramètres articulaires et de \mathfrak{C} :

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{C} + m. \quad (2.3)$$

On remarque que cette dernière relation est équivalente à la formule de Chebychev-Grübler-Kutzbach (éq.(2.1)) lorsque $c = \mathfrak{C}$.

En général, dans un mécanisme conventionnel, le degré de mobilité et le nombre d'actionneurs sont égaux à la dimension de l'espace de travail définie par la tâche que doit effectuer le robot. Ils peuvent cependant être différents et on appelle donc *degré de liberté* \mathfrak{F} , le degré de mobilité au niveau de l'effecteur et *degré d'actionnement* \mathfrak{A} le nombre d'actionneurs.

2.2.2 Contraintes géométriques

Les \mathfrak{C} contraintes géométriques qui doivent être satisfaites par les m variables articulaires du mécanisme afin de respecter la fermeture des boucles cinématiques s'écrivent comme un système de \mathfrak{C} équations non-linéaires :

$$\vec{\mathcal{K}}(\vec{\theta}) = \vec{0}_{\mathfrak{C}} \quad (2.4)$$

où $\vec{0}_{\mathfrak{C}}$ représente le vecteur zéro de dimension \mathfrak{C} .

2.2.2.1 Mécanisme plan

La figure 2.1 représente une boucle cinématique d'un mécanisme plan. La fermeture de chacune de ces boucles introduit $d = 3$ contraintes géométriques.

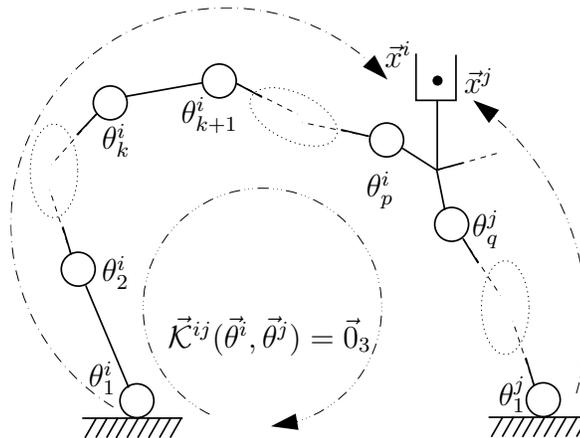


FIG. 2.1 – Schéma d'une boucle cinématique dans le plan.

En pratique, déterminer ces contraintes dans un mécanisme plan ne pose pas de difficulté particulière :

- L'équation vectorielle de la fermeture d'une boucle cinématique donne deux équations pour chaque boucle et la somme nulle des valeurs angulaires des articulations rotoïdes donne une troisième équation.
- De manière équivalente, la différence entre la pose \bar{x}^i de l'effecteur calculée comme une fonction des paramètres articulaires $\bar{\theta}^i$ de la $i^{\text{ème}}$ patte et la pose \bar{x}^j de l'effecteur calculée comme une fonction des paramètres articulaires $\bar{\theta}^j$ de la $j^{\text{ème}}$ patte doit être nulle [72].
- On peut également utiliser d'autres contraintes. Par exemple dans [75], la rigidité de la plate-forme (distance constante entre les dernières articulations de chaque patte) remplace l'égalité des orientations.

On obtient ainsi trois contraintes géométriques regroupées dans une fonction $\bar{\mathcal{K}}^{ij}(\bar{\theta}^i, \bar{\theta}^j)$ pour chaque boucle cinématique. Et en étudiant toutes les boucles, on détermine les \mathfrak{C}

contraintes géométriques à respecter dans le modèle :

$$\vec{\mathcal{K}}(\vec{\theta}) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{K}}^{ab}(\vec{\theta}^a, \vec{\theta}^b) \\ \vec{\mathcal{K}}^{ac}(\vec{\theta}^a, \vec{\theta}^c) \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{K}}^{an_p}(\vec{\theta}^a, \vec{\theta}^{n_p}) \end{array} \right\} = \vec{0}_{\mathbf{e}}, \quad (2.5)$$

avec n_p le nombre de pattes dans le mécanisme.

2.2.2.2 Mécanisme spatial

Dans le cas général, il faut être capable de déterminer six relations entre les variables articulaires d'une même boucle cinématique afin de déterminer toutes les contraintes géométriques du mécanisme spatial ($d = 6$). En pratique, deux types de problèmes peuvent se poser :

- La détermination des six contraintes au sein d'une boucle.
- L'indépendance des contraintes d'une boucle à l'autre.

Fermeture d'une boucle cinématique pour un mécanisme spatial Dans l'espace, la fermeture d'une boucle cinématique impose six contraintes aux variables articulaires. Il est généralement assez simple d'écrire les trois équations en position, c'est-à-dire l'équation

$$\vec{p}^i - \vec{p}^j = \vec{0}_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^i - x^j = 0 \\ y^i - y^j = 0 \\ z^i - z^j = 0 \end{array} \right. , \quad (2.6)$$

où $\vec{p}^i = [x^i; y^i; z^i]^T$ représente la position de l'effecteur écrite comme une fonction des coordonnées $\vec{\theta}^i$ de la $i^{\text{ème}}$ patte (respectivement j). Il est en revanche moins évident de définir les trois autres contraintes. On peut choisir d'égaliser les orientations de l'effecteur, mais se pose le problème de la représentation d'une orientation. L'utilisation des paramètres de Rodrigues est a priori une bonne solution, malgré le fait qu'ils ne soient pas définis pour des orientations à 180° de l'attitude de référence [80]. Cet inconvénient est en pratique peu gênant pour les mécanismes compliants du fait de leur espace atteignable restreint. Ces équations s'écrivent

$$\vec{r}^i - \vec{r}^j = \vec{0}_3, \quad (2.7)$$

où $\vec{r}^i = \vec{e}^i \tan \frac{\phi^i}{2}$ représente le vecteur des paramètres de Rodrigues, \vec{e}^i et ϕ^i étant les invariants naturels de l'orientation \mathbf{Q}^i de l'effecteur écrits comme une fonction des

coordonnées $\vec{\theta}^i$ de la $i^{\text{ème}}$ patte (respectivement j) [2,28]. On peut également choisir trois autres contraintes à la place de ces contraintes d'orientation en fonction du mécanisme étudié (par exemple des contraintes de rigidité de la plate-forme) pour peu que ces trois contraintes forment avec l'équation (2.6) un ensemble de six équations indépendantes.

Enfin, il est possible d'utiliser plus que six contraintes géométriques par boucle cinématique. La seule condition à remplir étant que, parmi elles, six soient indépendantes des autres. Ces équations sont alors redondantes. À la place de l'équation (2.7), on peut, par exemple, utiliser l'égalité entre tous les éléments des matrices d'orientation \mathbf{Q}^i et \mathbf{Q}^j .

$$\mathbf{Q}^i - \mathbf{Q}^j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{11}^i - Q_{11}^j = 0 \\ Q_{12}^i - Q_{12}^j = 0 \\ \vdots \\ Q_{23}^i - Q_{23}^j = 0 \\ Q_{33}^i - Q_{33}^j = 0 \end{cases} . \quad (2.8)$$

Indépendance des contraintes géométriques L'ensemble de toutes les contraintes géométriques établies dans les boucles cinématiques doit contenir \mathfrak{C} équations indépendantes. Certaines contraintes peuvent donc être redondantes au sein d'une boucle (exemple de l'équation (2.8)) ou d'une boucle à l'autre (exemple du Triptéron, où deux boucles de six contraintes géométriques ne donnent qu'un ensemble de neuf contraintes indépendantes. Le Triptéron est ainsi un mécanisme spatial à trois degrés de liberté alors qu'il ne possède que douze articulations). L'inconvénient d'utiliser un nombre non minimal de contraintes géométriques apparaît lorsque l'on veut résoudre les équations et déterminer les coordonnées des articulations géométriquement contraintes en fonction des coordonnées généralisées.

- Lorsqu'une résolution symbolique est possible, les premières étapes de la résolution consistant de toute façon à simplifier les équations redondantes, le problème de la redondance disparaît tout seul.
- Lors d'une résolution numérique, la redondance des équations —qui devrait normalement apporter une robustesse au système—, pose en pratique un problème pour l'utilisation de fonctions déjà programmées comme *fsolve* sous Matlab. En effet, le logiciel de mathématiques à qui l'on fournit plus d'équations que d'inconnues recherche alors une solution aux moindres carrés et peut arrêter la résolution avant d'avoir trouvé la solution exacte.

En pratique, il est donc préférable de connaître les \mathfrak{C} contraintes géométriques indépendantes.

2.2.3 Coordonnées généralisées et coordonnées géométriquement contraintes

La position de toutes les articulations du mécanisme est représentée par m variables articulaires θ_i et la structure parallèle du mécanisme est représentée par \mathfrak{C} contraintes géométriques. Parmi les m composantes de $\vec{\theta}$, \mathfrak{C} correspondent à des coordonnées géométriquement contraintes et les \mathfrak{M} autres correspondent à des coordonnées géométriquement libres. Ces dernières sont appelées coordonnées généralisées et sont notées ψ_j , le vecteur $\vec{\psi}$ est appelé vecteur des coordonnées généralisées du mécanisme. Les coordonnées géométriquement contraintes sont notées λ_j et sont regroupées dans un vecteur $\vec{\lambda}$. Le choix des coordonnées λ_j pour la modélisation d'un mécanisme est arbitraire. Les coordonnées généralisées étant géométriquement libres, les valeurs des coordonnées λ_j sont solutions du système d'équations suivant

$$\vec{\mathcal{K}}(\vec{\theta}) = \vec{\mathcal{K}}(\vec{\lambda}, \vec{\psi}) = \vec{0}_{\mathfrak{C}}. \quad (2.9)$$

Il convient donc de choisir les variables contraintes λ_j de manière à ce que la résolution de l'équation (2.9) soit la plus simple possible. La solution de cette équation s'écrit comme une fonction $\vec{\mathcal{C}}$ des coordonnées généralisées :

$$\vec{\lambda} = \vec{\mathcal{C}}(\vec{\psi}). \quad (2.10)$$

Le choix des coordonnées géométriquement contraintes est cependant limité par le fait qu'elles ne doivent pas correspondre à des articulations actionnées, puisque les valeurs de ces dernières sont contrôlables. La seconde limitation provient du choix des coordonnées généralisées, choix complémentaire au choix des λ_j . Il faut, si possible, que l'ensemble des coordonnées généralisées définisse une base de l'espace de travail dans le domaine articulaire. Si cette seconde contrainte n'est pas respectée, des singularités de représentation sont introduites dans le modèle. Pour illustrer cet aspect, la figure 2.2 montre un mécanisme parallèle à deux degrés de liberté, le 2-RP. Le couple (θ_1^a, θ_2^a) définit une base de l'espace de travail dans le domaine articulaire alors que (θ_2^a, θ_2^b) non. Ainsi, la configuration en pointillés est singulière si θ_2^a et θ_2^b sont choisies comme coordonnées généralisées (ce qui doit être le cas lorsque ces deux articulations prismatiques

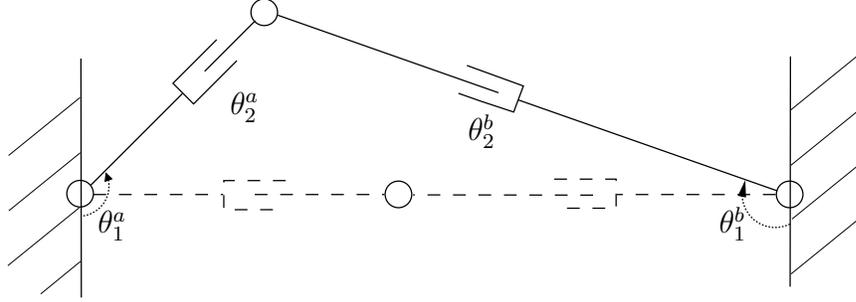


FIG. 2.2 – Problème du choix des coordonnées généralisées pour le 2-RP.

sont les deux actionneurs du mécanisme) et elle n'est pas singulière si θ_1^a et θ_2^a peuvent être choisis.

La résolution des contraintes géométriques est simplifiée lorsque les coordonnées contraintes par une boucle cinématique peuvent être choisies au sein d'une seule des pattes formant cette boucle (sur la figure 2.2, $\vec{\lambda} = [\theta_1^b, \theta_2^b]^T$ si θ_2^b n'est pas actionnée). Cela implique qu'il y ait au moins d articulations non actionnées dans cette patte. Ce choix des coordonnées contraintes sur une seule patte permet de découpler les contraintes cinématiques et de séparer le système de \mathfrak{C} équations à \mathfrak{C} inconnues en plusieurs systèmes indépendants de d équations à d inconnues comme le montre l'équation (2.11). L'ajout d'articulations virtuelles supplémentaires représentant les diverses compliances permet généralement de se rapprocher de cette situation idéale pour les MPC.

$$\vec{\mathcal{K}}(\vec{\lambda}, \vec{\psi}) = \vec{0}_{\mathfrak{C}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{K}}^{ab}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^b) = \vec{0}_{\mathfrak{F}} \\ \vec{\mathcal{K}}^{ac}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^c) = \vec{0}_{\mathfrak{F}} \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{K}}^{an_p}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^{n_p}) = \vec{0}_{\mathfrak{F}} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Enfin, pour alléger les notations, il est intéressant d'ordonner les composantes du vecteur $\vec{\theta}$ de manière à ce que les coordonnées généralisées soient côte-à-côte et que les coordonnées géométriquement contraintes, si possible ordonnées par patte, le soient aussi. Cela s'écrit

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\lambda}^b \\ \vdots \\ \vec{\lambda}^{n_p} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Le vecteur $\vec{\theta}$ contient toutes les valeurs articulaires du mécanismes qui sont chacune fonction des \mathfrak{M} coordonnées généralisées ψ_j . La définition de cette fonction, notée \mathcal{G} ,

est obtenue à partir de l'équation précédente et de l'équation (2.10), elle représente le *modèle géométrique interne* du mécanisme. Elle s'écrit

$$\vec{\theta} = \vec{\mathcal{G}}(\vec{\psi}) = \begin{bmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\mathcal{C}}(\vec{\psi}) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

2.2.4 Pose de l'effecteur

Lorsqu'on modélise un mécanisme comme manipulateur, la détermination de la pose de son effecteur est un élément indispensable.

Définition de la pose On appelle pose d'un effecteur le vecteur regroupant la position et l'orientation de cet effecteur. Elle est notée \vec{x} .

- Dans un mécanisme plan, deux variables suffisent pour définir la position et une seule est nécessaire pour définir l'orientation ($d_l = 2$ et $d_\Omega = 1$). La pose d'un effecteur comporte donc trois composantes dans le plan. Dans un repère cartésien, la pose cartésienne est composée des coordonnées x et y qui définissent la position, et de l'angle α_z définissant l'orientation par rapport à l'axe (Oz) :

$$\vec{x} = [x; y; \alpha_z]^T. \quad (2.14)$$

- Dans un mécanisme spatial, la position est représentée par un vecteur \vec{p} qui est composé de trois coordonnées ($d_l = 3$). Dans un repère cartésien, ces coordonnées sont x , y et z . L'espace des orientations est aussi de dimension $d_\Omega = 3$. Mais à cause des difficultés de représentation, cette orientation est représentée par un vecteur \vec{q} qui peut avoir $n_\Omega = 3$ composantes (paramètres de Rodrigues, angles d'Euler, etc.), $n_\Omega = 4$ composantes (invariants linéaires, paramètres d'Euler, etc.) ou plus, selon la représentation choisie. La pose cartésienne de l'effecteur dans l'espace s'écrit

$$\vec{x} = [\vec{p}^T; \vec{q}^T]^T, \text{ avec } \begin{cases} \vec{p} = [x; y; z]^T \\ \vec{q} \text{ représente l'orientation.} \end{cases} \quad (2.15)$$

La pose de l'effecteur se définit donc dans un espace à $d = d_l + d_\Omega$ dimensions, mais est représentée par $n_x = d_l + n_\Omega$ paramètres. De plus, il est possible que le degré de liberté \mathfrak{F} de l'effecteur d'un mécanisme soit inférieur à d . Dans ce cas, parmi les n_x composantes de \vec{x} , seules \mathfrak{F} sont indépendantes.

Fonction des variables articulaires La pose de l'effecteur est fonction des paramètres articulaires du mécanisme. Elle s'écrit

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\theta}). \quad (2.16)$$

Dans un mécanisme parallèle, la pose de l'effecteur est égale à la pose de la dernière membrure de chacune des pattes considérée comme un mécanisme sériel indépendant. Ainsi il est possible d'écrire la pose \vec{x} comme une fonction de certaines variables articulaires seulement :

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{B}}^i(\vec{\theta}^i), \quad i \in \{a, \dots, n_p\}, \quad (2.17)$$

où $\vec{\mathcal{B}}^i(\vec{\theta}^i)$ est la pose de la $i^{\text{ème}}$ patte et $\vec{\theta}^i$ est le vecteur des coordonnées articulaires de cette $i^{\text{ème}}$ patte. Sans considérer les contraintes cinématiques, on peut cependant écrire la pose comme une fonction d'un maximum de variables articulaires en définissant la pose de l'effecteur comme la moyenne des poses de chaque patte considérée comme un mécanisme sériel indépendant :

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\theta}) = \overline{\vec{\mathcal{B}}^i(\vec{\theta}^i)}, \quad i \in \{a, \dots, n_p\}. \quad (2.18)$$

Cette moyenne n'est pas systématiquement calculée comme une moyenne arithmétique. Par exemple, cette dernière peut être utilisée pour déterminer les coordonnées du vecteur de position ou encore, l'angle représentant l'orientation d'un mécanisme plan ; mais par contre, pour un mécanisme spatial, les paramètres décrivant l'orientation doivent être moyennés différemment selon qu'on utilise les paramètres de Rodriguez, les paramètres d'Euler, etc.

Contrôle de la pose Lorsqu'une pose désirée \vec{x}^* doit être atteinte par l'effecteur du mécanisme, des contraintes géométriques supplémentaires sont ajoutées dans le modèle géométrique. Celles-ci s'écrivent

$$\vec{x}^* - \vec{\mathcal{B}}(\vec{\theta}) = \vec{0}_{n_x}. \quad (2.19)$$

Ces systèmes d'équations précédents (éqs.(2.16) à (2.19)) sont composés de n_x équations, mais seulement \mathfrak{F} d'elles sont indépendantes.

2.2.5 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique d'un mécanisme regroupe les contraintes géométriques qui doivent être respectées par les variables articulaires θ_i afin d'établir la relation entre

la configuration du mécanisme définie dans l'espace des coordonnées généralisées et la configuration du mécanisme décrite dans le repère cartésien. Pour un mécanisme parallèle compliant dont on veut connaître la pose cartésienne, le système d'équations suivant permet de déterminer le modèle géométrique cartésien :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{K}}(\vec{\theta}) = \vec{0}_{\mathfrak{e}}, \\ \vec{x} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\theta}). \end{cases} \quad (2.20)$$

Lorsque la solution des contraintes géométriques internes $\vec{\mathcal{K}}$ est connue, le vecteur $\vec{\theta}$ peut être écrit comme une fonction des coordonnées généralisées (éq.(2.13)) et les λ_j peuvent être simplifiées. La pose cartésienne est donc une fonction des coordonnées généralisées. Le modèle géométrique cartésien d'un mécanisme s'écrit

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{G}}(\vec{\psi})) = \vec{\mathcal{P}}(\vec{\psi}). \quad (2.21)$$

Cette dernière équation représente le modèle géométrique direct, il sert à déterminer la pose lorsque les coordonnées généralisées sont connues.

2.2.6 Modèle géométrique complet

Dans le cas général d'un MPC où $\mathfrak{M} > \mathfrak{F}$, le nombre de coordonnées comprises dans la pose est inférieur au nombre de coordonnées généralisées, en conséquence de quoi la pose cartésienne seule ne suffit pas à décrire complètement la configuration du mécanisme. Pour éviter cette perte d'information, $\mathfrak{M} - \mathfrak{F} (= \mathfrak{L})$ coordonnées cartésiennes supplémentaires \vec{y} peuvent être choisies sur le mécanisme afin que le vecteur $\vec{u}^T = [\vec{x}^T; \vec{y}^T]$ compte \mathfrak{M} coordonnées indépendantes et permette ainsi une description complète de la configuration du mécanisme dans l'espace cartésien. Le modèle géométrique direct complet s'écrit alors sous la forme d'une fonction \mathcal{U} :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{U}}(\vec{\psi}). \quad (2.22)$$

2.2.7 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse (MGI) sert à déterminer les valeurs des coordonnées généralisées permettant d'atteindre une pose désirée, notée \vec{x}^* . Dans le cas où $\mathfrak{F} < d$,

toutes les poses \vec{x}^* ne sont pas forcément atteignables. On suppose cependant ici que la pose désirée est atteignable.

Dans le cas général où $\mathfrak{M} > \mathfrak{F}$, plusieurs configurations $\vec{\psi}$ peuvent réaliser la pose \vec{x}^* . Lorsque les coordonnées \vec{y} ne sont pas connues, le problème inverse est alors sous-déterminé et seules \mathfrak{F} coordonnées généralisées parmi les \mathfrak{M} peuvent être déterminées (comme une fonction des \mathfrak{L} autres). On décompose alors le vecteur $\vec{\psi}$ en deux sous-vecteurs $\vec{\psi}_{\mathfrak{F}}$ et $\vec{\psi}_{\mathfrak{L}}$ de dimensions respectives \mathfrak{F} et \mathfrak{L} . Le premier correspondant aux solutions du MGI et le second aux coordonnées non contraintes. La solution $\vec{\psi}_{\mathfrak{F}}$ s'écrit sous la forme d'une fonction non-linéaire \mathcal{P}^\dagger calculée en résolvant les contraintes géométriques (éq.(2.20)) :

$$\vec{\psi}_{\mathfrak{F}} = \vec{\mathcal{P}}^\dagger(\vec{x}^*, \vec{\psi}_{\mathfrak{L}}). \quad (2.23)$$

Lorsque les coordonnées \vec{y}^* sont connues, on peut déterminer toutes les coordonnées généralisées en résolvant le modèle géométrique inverse. Celui-ci s'écrit simplement

$$\vec{\psi} = \vec{\mathcal{U}}^{-1}(\vec{u}^*), \text{ avec } \vec{u}^* = \begin{bmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{y}^* \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

En règle générale, les valeurs \vec{y} —tout comme les valeurs $\vec{\psi}_{\mathfrak{F}}$ — ne sont pas commandables et ne sont pas connues. Leur valeur n'est cependant pas indéfinie puisqu'elle est fixée par les contraintes statiques (voir chapitre 3).

Lorsque le nombre de degrés de mobilité \mathfrak{M} du mécanisme est égal au nombre de degrés de liberté \mathfrak{F} de l'effecteur, le MGI possède alors un nombre fini de solutions. Toutes les coordonnées généralisées sont fonction de la pose ($\vec{\psi}_{\mathfrak{F}} = \vec{\psi}$) et $\vec{\psi}_{\mathfrak{L}}$ n'existe pas. De plus si le degré de liberté de l'effecteur est égal à la dimension de l'espace de travail, le MGI correspond à la fonction réciproque du modèle direct et il s'écrit

$$\begin{cases} \vec{\psi} = \vec{\mathcal{P}}^\dagger(\vec{x}^*), & \text{si } \mathfrak{F} = \mathfrak{M}, \\ \vec{\psi} = \vec{\mathcal{P}}^\dagger(\vec{x}^*) = \vec{\mathcal{P}}^{-1}(\vec{x}^*), & \text{si } \mathfrak{F} = d = \mathfrak{M}. \end{cases} \quad (2.25)$$

2.2.8 Limites du modèle géométrique

Dans un mécanisme compliant, certaines coordonnées généralisées ne sont pas commandables et leur valeur n'est pas fixée arbitrairement. De plus, à cause de leur abondance, il est possible que certaines coordonnées généralisées —en particulier celles correspondant aux actionneurs— n'apparaissent pas dans le modèle géométrique. D'après

celui-ci, la pose \vec{x} peut ainsi ne pas être fonction de la position des actionneurs. Cela n'est pas le cas dans la réalité.

Par ailleurs, dans le modèle inverse, la définition d'une pose seule ne suffit pas toujours pour déterminer complètement la configuration du mécanisme. Il est donc nécessaire de fixer un critère qui permet de choisir parmi les configurations respectant la pose désirée, celle qui correspond à la réalité physique du mécanisme compliant. Ce critère n'est pas géométrique. Le modèle uniquement géométrique se révèle donc incomplet et insuffisant pour décrire les mécanismes compliants.

2.3 Modèle cinématique d'un MPC

Le modèle cinématique d'un MPC correspond à la variation instantanée du modèle géométrique. Les défis posés par ces deux modélisations sont donc similaires, à ceci près que, dans le modèle cinématique, les relations obtenues entre les différentes variations instantanées des paramètres sont linéaires et donc plus simples à utiliser.

2.3.1 Contraintes cinématiques

Les variables articulaires λ_j qui sont géométriquement contraintes, c'est-à-dire dont la position dépend de la position des coordonnées généralisées, sont évidemment également cinématiquement contraintes, c'est-à-dire que leur variation instantanée dépend de la variation instantanée des coordonnées généralisées. Ces contraintes cinématiques sont liées aux contraintes géométriques (éq.(2.10)) puisqu'elles correspondent à leurs dérivées temporelles. Elles s'écrivent

$$\dot{\lambda} = \frac{d\vec{\mathcal{C}}(\vec{\psi})}{d\vec{\psi}} \dot{\psi}. \quad (2.26)$$

On appelle \mathbf{G} la matrice jacobienne des contraintes cinématiques. Lorsque la fonction $\vec{\mathcal{C}}$ est connue —c'est-à-dire, quand on sait résoudre symboliquement les contraintes géométriques $\vec{\mathcal{K}}$ —, \mathbf{G} est déterminée par

$$\mathbf{G} = \frac{d\vec{\mathcal{C}}(\vec{\psi})}{d\vec{\psi}} = \frac{d\vec{\lambda}}{d\vec{\psi}}. \quad (2.27)$$

La relation (2.26) s'écrit alors

$$\dot{\vec{\lambda}} = \mathbf{G}\dot{\vec{\psi}}. \quad (2.28)$$

Le cas fréquent où les contraintes géométriques ne sont pas résolues symboliquement et où la fonction $\vec{\mathcal{C}}$ n'est pas connue est détaillé à la section 2.3.2.

De la même manière, les variations instantanées de toutes les variables articulaires sont calculées en fonction de $\dot{\vec{\psi}}$, grâce à une matrice notée \mathbf{R} et définie comme

$$\mathbf{R} = \frac{d\vec{\theta}}{d\vec{\psi}} = \begin{bmatrix} \frac{d\vec{\psi}}{d\vec{\psi}} \\ \frac{d\vec{\lambda}}{d\vec{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathfrak{M}} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

où $\mathbf{1}_{\mathfrak{M}}$ représente la matrice identité de dimension \mathfrak{M} . Ainsi le modèle cinématique interne du mécanisme s'écrit

$$\dot{\vec{\theta}} = \mathbf{R}\dot{\vec{\psi}}. \quad (2.30)$$

2.3.2 Détermination de la matrice \mathbf{G}

Lorsque l'expression symbolique de la fonction $\vec{\mathcal{C}}$ n'est pas connue, on ne peut pas calculer directement sa dérivée. Dans cette section est présentée une méthode générale qui permet de calculer la matrice jacobienne \mathbf{G} à partir des contraintes cinématiques $\vec{\mathcal{K}}$ (éq.(2.11)). Elle s'appuie sur le fait qu'il est toujours facile de dériver les contraintes géométriques par rapport aux variables articulaires $\vec{\theta}$. La dérivation temporelle de ces contraintes géométriques, grâce aux dérivées par rapport aux variables articulaires, peut s'écrire

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial \vec{\psi}} \dot{\vec{\psi}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}} \dot{\vec{\lambda}} = \vec{0}_{\mathfrak{C}}. \quad (2.31)$$

Une relation linéaire entre $\dot{\vec{\psi}}$ et $\dot{\vec{\lambda}}$ peut donc être obtenue [21]. De plus, comme les \mathfrak{C} composantes du vecteur $\vec{\lambda}$ sont les solutions des \mathfrak{C} contraintes géométriques, la matrice jacobienne $\partial \vec{\mathcal{K}} / \partial \vec{\lambda}$ est une matrice de rang plein, toujours inversible. Donc $\dot{\vec{\lambda}}$ peut être calculée comme suit

$$\dot{\vec{\lambda}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial \vec{\lambda}}^{-1} \frac{\partial \vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial \vec{\psi}} \dot{\vec{\psi}}. \quad (2.32)$$

On obtient donc la relation suivante nous permettant de calculer la matrice \mathbf{G}

$$\frac{d\vec{\lambda}}{d\vec{\psi}} = -\frac{\partial\vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})^{-1}}{\partial\vec{\lambda}} \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial\vec{\psi}} = \mathbf{G}. \quad (2.33)$$

Afin d'alléger les équations suivantes, les matrices jacobiennes \mathbf{S}_λ et \mathbf{S}_ψ sont introduites. Elles correspondent respectivement à la dérivation des contraintes géométriques par les coordonnées géométriquement contraintes et par les coordonnées généralisées.

$$\begin{cases} \mathbf{S}_\lambda = \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial\vec{\lambda}} \\ \mathbf{S}_\psi = \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}(\vec{\psi}, \vec{\lambda})}{\partial\vec{\psi}} \end{cases} \quad (2.34)$$

Les matrices \mathbf{G} et \mathbf{R} s'écrivent alors

$$\begin{cases} \mathbf{G} = -\mathbf{S}_\lambda^{-1}\mathbf{S}_\psi \\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_e \\ -\mathbf{S}_\lambda^{-1}\mathbf{S}_\psi \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.35)$$

Découplage possible Par ailleurs, dans le cas présenté à l'équation (2.11) où les coordonnées géométriquement contraintes sont choisies de manière à découpler les contraintes géométriques, la matrice \mathbf{S}_λ s'écrit

$$\mathbf{S}_\lambda = \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}}{\partial\vec{\lambda}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ab}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^b)}{\partial\vec{\lambda}^b} & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ab}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^b)}{\partial\vec{\lambda}^c} & \dots & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ab}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^b)}{\partial\vec{\lambda}^k} \\ \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ac}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^c)}{\partial\vec{\lambda}^b} & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ac}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^c)}{\partial\vec{\lambda}^c} & \dots & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ac}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^c)}{\partial\vec{\lambda}^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ak}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^k)}{\partial\vec{\lambda}^b} & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ak}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^k)}{\partial\vec{\lambda}^c} & \dots & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ak}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^k)}{\partial\vec{\lambda}^k} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Dans cette matrice, on a $\partial\vec{\mathcal{K}}^{ai}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^i)/\partial\vec{\lambda}^j = \mathbf{0}_{d \times d}$, $\forall i \neq j$. Donc, la matrice \mathbf{S}_λ présente la structure suivante

$$\mathbf{S}_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ab}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^b)}{\partial\vec{\lambda}^b} & \mathbf{0}_{d \times d} & \dots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ac}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^c)}{\partial\vec{\lambda}^c} & \dots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \mathbf{0}_{d \times d} & \dots & \frac{\partial\vec{\mathcal{K}}^{ak}(\vec{\psi}, \vec{\lambda}^k)}{\partial\vec{\lambda}^k} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

que l'on peut écrire, en notant \mathbf{S}_λ^{ai} la matrice correspondant à la dérivée des contraintes $\vec{\mathcal{K}}^{ai}$ par les coordonnées $\vec{\lambda}^i$:

$$\mathbf{S}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\lambda^{ab} & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \mathbf{S}_\lambda^{ac} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{S}_\lambda^{ak} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Grâce à la structure en blocs de la matrice \mathbf{S}_λ , le calcul de la matrice \mathbf{G} est beaucoup plus léger. Au lieu d'inverser une matrice de dimension $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$, on doit inverser k matrices de dimension $d \times d$.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{ab} \\ \vdots \\ \mathbf{G}^{ak} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{S}_\lambda^{ab})^{-1} \mathbf{S}_\psi^{ab} \\ \vdots \\ -(\mathbf{S}_\lambda^{ak})^{-1} \mathbf{S}_\psi^{ak} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

où chaque matrice $\mathbf{G}^{ai} = d\vec{\mathcal{C}}^{ai}/d\vec{\psi}$ et $\mathbf{S}_\psi^{ai} = d\vec{\mathcal{K}}^{ai}/d\vec{\psi}$.

Cas des contraintes géométriques non indépendantes Même dans le cas où il n'est pas possible d'obtenir \mathfrak{C} contraintes géométriques indépendantes, il est assez simple d'écrire les \mathfrak{C} contraintes cinématiques à partir d'un nombre c non minimal de contraintes géométriques. L'équation (2.35) peut en effet être appliquée en utilisant la pseudo-inverse de la matrice \mathbf{S}_λ définie à l'équation (2.34). Dans ce cas, \mathbf{S}_λ est de dimension $c \times \mathfrak{C}$ et sa pseudo-inverse $\mathbf{S}_\lambda^\dagger$ s'écrit

$$\mathbf{S}_\lambda^\dagger = (\mathbf{S}_\lambda^T \mathbf{S}_\lambda)^{-1} \mathbf{S}_\lambda^T. \quad (2.40)$$

Cette formulation de la pseudo-inverse correspond à celle d'un système surdéterminé. Dans ces systèmes surdéterminés, une solution exacte n'existe pas toujours et une solution aux moindres carrés est recherchée et obtenue par cette matrice pseudo-inverse. Cependant dans le cas présent, les c contraintes géométriques sont cohérentes et le système d'équations qu'elles forment n'est pas réellement surdéterminé. Il existe donc une solution exacte. La solution aux moindres carrés est égale à la solution exacte et la formulation suivante pour la matrice \mathbf{G} est correcte

$$\mathbf{G} = -\mathbf{S}_\lambda^\dagger \mathbf{S}_\psi = -(\mathbf{S}_\lambda^T \mathbf{S}_\lambda)^{-1} \mathbf{S}_\lambda^T \mathbf{S}_\psi. \quad (2.41)$$

2.3.3 Modèle cinématique

La vitesse cartésienne de l'effecteur est notée \vec{t} . Elle est composée du vecteur vitesse d'un point choisi \vec{v} et du vecteur de vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Le vecteur \vec{t} a donc $d = d_l + d_\Omega$ coordonnées.

2.3.3.1 Mécanisme plan

Le vecteur de la vitesse cartésienne a trois coordonnées et est égal à la variation instantanée de la pose \vec{x} donnée à l'équation (2.14). Il s'écrit

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

2.3.3.2 Mécanisme spatial

Le vecteur de la vitesse cartésienne d'un mécanisme spatial est composé de six coordonnées. À cause de la représentation de l'orientation en n_Ω paramètres ($n_\Omega = 3$, $n_\Omega = 4$ ou plus selon la représentation choisie, voir section 2.2.4), \vec{t} n'est pas directement égal à la variation instantanée de la pose \vec{x} donnée à l'équation (2.15). Il s'écrit

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = [v_x; v_y; v_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z]^T \quad (2.43)$$

Le lien entre la variation de l'orientation \vec{q} de dimension n_Ω et la vitesse angulaire cartésienne de dimension trois, se fait en utilisant une matrice $3 \times n_\Omega$, notée $\mathbf{\Lambda}$, qui dépend du choix du n_Ω -tuplet \vec{q} utilisé pour représenter l'orientation [2, 32] :

$$\vec{\omega} = \mathbf{\Lambda} \dot{\vec{q}}. \quad (2.44)$$

En définissant la matrice \mathbf{L} comme

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

on obtient la relation suivante entre la vitesse cartésienne et la variation instantanée de la pose cartésienne du mécanisme :

$$\vec{t} = \mathbf{L} \dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}} \\ \mathbf{\Lambda} \dot{\vec{q}} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

2.3.3.3 Variation cartésienne infinitésimale

Malgré la difficulté de représentation d'une pose et notamment de son orientation dans l'espace, il est possible de décrire une variation infinitésimale de cette pose avec un nombre minimal de coordonnées. On peut donc définir $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ comme un vecteur de \mathfrak{F} coordonnées indépendantes représentant une variation infinitésimale de la pose cartésienne d'un mécanisme. Dans le cas fréquent où $\mathfrak{F} = d$, on a l'équation suivante :

$$d\vec{x}_{\mathfrak{F}} = \vec{t}dt = \mathbf{L}d\vec{x}, \text{ quand } \mathfrak{F} = d, \quad (2.47)$$

où dt représente une période infinitésimale de temps. Lorsque $n_x \neq \mathfrak{F}$, on a donc $d\vec{x} \neq d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$. On définit de la même manière des vecteurs $d\vec{\mathcal{B}}_{\mathfrak{F}}$ et $d\vec{\mathcal{P}}_{\mathfrak{F}}$. Ceux-ci sont égaux à $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ et sont donc différents de $d\vec{\mathcal{B}}$ et $d\vec{\mathcal{P}}$. Le lien entre ces différentes variations infinitésimales se fait avec une matrice \mathbf{L}' de dimension $\mathfrak{F} \times n_x$. Cela s'écrit

$$\begin{cases} d\vec{x}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{L}'d\vec{x}, \\ d\vec{\mathcal{B}}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{L}'d\vec{\mathcal{B}}, \\ d\vec{\mathcal{P}}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{L}'d\vec{\mathcal{P}}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Il est cependant intéressant de noter que dans la plupart des MPC et notamment dans celui d'un mécanisme plan à trois degrés de liberté, on a $\mathfrak{F} = d$, d'où $d\vec{x}_{\mathfrak{F}} = d\vec{x}$; donc $\mathbf{L}' = \mathbf{1}_d$. Enfin, le vecteur $d\vec{u}_{\mathfrak{M}}$ représentant la variation infinitésimale du vecteur complet \vec{u} avec \mathfrak{M} paramètres indépendants, est défini par la relation suivante :

$$d\vec{u}_{\mathfrak{M}} = \left[d\vec{x}_{\mathfrak{F}}^T; d\vec{y}^T \right]^T. \quad (2.49)$$

2.3.3.4 Matrice \mathbf{J}_{θ}

La matrice jacobienne \mathbf{J}_{θ} d'un mécanisme parallèle dans laquelle toutes les variables articulaires —même cinématiquement contraintes (passives)— sont prises en compte, est écrite grâce aux équations (2.18) et (2.48) comme suit

$$\mathbf{J}_{\theta} = \frac{d\vec{x}_{\mathfrak{F}}}{d\vec{\theta}} = \overline{\left(\frac{d\vec{x}_{\mathfrak{F}}^i}{d\vec{\theta}} \right)} = \frac{1}{n_p} \sum_{i=a}^{n_p} \frac{d\vec{x}_{\mathfrak{F}}^i}{d\vec{\theta}}. \quad (2.50)$$

La somme des éléments décrivant la variation cartésienne de la pose donnant des éléments décrivant une variation cartésienne d'une pose, la moyenne arithmétique peut ici être utilisée sans problème. La matrice \mathbf{J}_{θ} est composée par les colonnes des matrices \mathbf{J}_{θ}^a à $\mathbf{J}_{\theta}^{n_p}$, les matrices jacobiennes de chaque patte considérée comme un mécanisme sériel

indépendant. Lorsque les coordonnées articulaires sont ordonnées dans le vecteur $\vec{\theta}$ — les coordonnées généralisées d’abord et les coordonnées cinématiquement contraintes ensuite —, la matrice \mathbf{J}_θ peut se décomposer en deux sous-matrices \mathbf{J}_ψ et \mathbf{J}_λ

$$\mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{x}_\mathfrak{F}}{\partial \vec{\psi}} & \frac{\partial \vec{x}_\mathfrak{F}}{\partial \vec{\lambda}} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_\psi \ \mathbf{J}_\lambda]. \quad (2.51)$$

Il est important de noter que la matrice \mathbf{J}_ψ correspond à la dérivée partielle de la pose par les coordonnées généralisées. Dans cette dérivation partielle, les variables articulaires λ sont considérées indépendantes des variables articulaires ψ , c’est-à-dire qu’on a $\partial \lambda_j / \partial \psi_j = 0$. La matrice \mathbf{J}_ψ n’est donc pas égale à la matrice \mathbf{J} détaillée dans la section (2.3.3.5).

2.3.3.5 Matrice \mathbf{J}

Dans cette matrice jacobienne, seules les coordonnées généralisées sont prises en compte puisque les variables articulaires passives sont généralement inutiles pour définir le modèle cinématique cartésien d’un mécanisme (ce sont des variables internes). Cette matrice pourrait être notée \mathbf{J}_M , mais puisqu’elle est la matrice jacobienne couramment utilisée dans la littérature, on la note \mathbf{J} . Elle est de dimension $\mathfrak{F} \times \mathfrak{M}$ et est définie comme suit

$$\mathbf{J} = \frac{d\vec{x}_\mathfrak{F}}{d\vec{\psi}}. \quad (2.52)$$

En utilisant l’équation (2.21) et la définition de la matrice \mathbf{R} à l’équation (2.29), on peut calculer \mathbf{J} de la manière suivante

$$\mathbf{J} = \frac{d\vec{x}_\mathfrak{F}}{d\vec{\psi}} = \frac{d\vec{x}_\mathfrak{F}}{d\vec{\theta}} \frac{d\vec{\theta}}{d\vec{\psi}} = \mathbf{J}_\theta \mathbf{R}. \quad (2.53)$$

Cette formulation est intéressante car elle est systématique. Les matrices \mathbf{J}_θ et \mathbf{R} sont très simples à obtenir numériquement, même si l’expression symbolique de \mathbf{R} peut être lourde à cause de l’inversion de la matrice \mathbf{S}_λ .

2.3.3.6 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct permet de déterminer la vitesse cartésienne de l’effecteur en fonction de la variation des coordonnées généralisées. Lorsque $\mathfrak{F} = d$, celui-ci s’écrit donc de la façon suivante

$$\vec{t} = \mathbf{J}_\theta \dot{\vec{\theta}} = \mathbf{J}_\theta \mathbf{R} \dot{\vec{\psi}} = \mathbf{J} \dot{\vec{\psi}}, \text{ quand } \mathfrak{F} = d. \quad (2.54)$$

La relation entre les variations infinitésimales s'écrit

$$d\vec{x}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{J}_{\theta} d\vec{\theta} = \mathbf{J}_{\theta} \mathbf{R} d\vec{\psi} = \mathbf{J} d\vec{\psi}. \quad (2.55)$$

Ce modèle direct possède une « entrée » de dimension \mathfrak{M} et une « sortie » de dimension \mathfrak{F} . Lorsque $\mathfrak{F} < \mathfrak{M}$, il y a donc une perte d'information. Pour éviter cela, il est souhaitable de garder une « sortie » de dimension \mathfrak{M} en ajoutant les variables \vec{y} (voir section 2.2.7) dans le vecteur de sortie. La décomposition du vecteur $\vec{\psi}$ en deux vecteurs $\vec{\psi}_{\mathfrak{F}}$ et $\vec{\psi}_{\mathfrak{L}}$, permet d'écrire la matrice \mathbf{J} sous la forme d'une concaténation de deux matrices définies par $\mathbf{J}_{\mathfrak{F}} = \partial\vec{x}_{\mathfrak{F}}/\partial\vec{\psi}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathbf{J}_{\mathfrak{L}} = \partial\vec{x}_{\mathfrak{F}}/\partial\vec{\psi}_{\mathfrak{L}}$. Pour compléter le modèle cinématique, les matrices $\mathbf{I}_{\mathfrak{F}} = \partial\vec{y}/\partial\vec{\psi}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathbf{I}_{\mathfrak{L}} = \partial\vec{y}/\partial\vec{\psi}_{\mathfrak{L}}$ sont également définies. Enfin, la matrice jacobienne complète s'écrit $\mathbf{H} = \partial\vec{u}_{\mathfrak{M}}/\partial\vec{\psi}$ de telle sorte qu'avec l'équation (2.54), le modèle cinématique direct (MCD) *complet* d'un MPC peut s'écrire comme

$$d\vec{u}_{\mathfrak{M}} = \begin{bmatrix} d\vec{x}_{\mathfrak{F}} \\ d\vec{y} \end{bmatrix} = \mathbf{H} d\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} d\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathfrak{F}} & \mathbf{J}_{\mathfrak{L}} \\ \mathbf{I}_{\mathfrak{F}} & \mathbf{I}_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\vec{\psi}_{\mathfrak{F}} \\ d\vec{\psi}_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

2.3.3.7 Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse (MCI) sert à déterminer la variation de la configuration $d\vec{\psi}$ correspondant à une variation de pose désirée $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$. Mais, de la même façon que pour le modèle géométrique inverse, la connaissance des seules \mathfrak{F} coordonnées indépendantes de la pose n'est pas toujours suffisante. Lorsque les coordonnées \vec{y} et leur variations sont connues, le modèle cinématique inverse s'écrit

$$d\vec{\psi} = \begin{bmatrix} d\vec{\psi}_{\mathfrak{F}} \\ d\vec{\psi}_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1} d\vec{u}_{\mathfrak{M}} = \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} d\vec{x}_{\mathfrak{F}} \\ d\vec{y} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

où, en utilisant la formule d'inversion d'une matrice par bloc, la matrice \mathbf{H}^{-1} s'écrit

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{J}_{\mathfrak{L}}\mathbf{I}_{\mathfrak{L}}^{-1} \\ -\mathbf{I}_{\mathfrak{L}}^{-1}\mathbf{I}_{\mathfrak{F}}\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{Y}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{X} = (\mathbf{J}_{\mathfrak{F}} - \mathbf{J}_{\mathfrak{L}}\mathbf{I}_{\mathfrak{L}}^{-1}\mathbf{I}_{\mathfrak{F}}) \\ \mathbf{Y} = (\mathbf{I}_{\mathfrak{L}} - \mathbf{I}_{\mathfrak{F}}\mathbf{J}_{\mathfrak{F}}^{-1}\mathbf{J}_{\mathfrak{L}}) \end{cases} \quad (2.58)$$

où les matrices \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont les compléments de Schur. Les blocs composant la matrice \mathbf{H}^{-1} sont notés \mathbf{J}^{\dagger} et \mathbf{I}^{\dagger} .

$$\mathbf{J}^{\dagger} = \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial\vec{x}_{\mathfrak{F}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \\ -\mathbf{I}_{\mathfrak{L}}^{-1}\mathbf{I}_{\mathfrak{F}}\mathbf{X}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{t.q.} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{\dagger} & \mathbf{I}^{\dagger} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Le modèle cinématique inverse permet également de déterminer les variations de toutes les variables articulaires du mécanisme :

$$\begin{cases} d\vec{\lambda} = \mathbf{GH}^{-1}d\vec{u}_{\mathfrak{M}}, \\ d\vec{\theta} = \mathbf{RH}^{-1}d\vec{u}_{\mathfrak{M}}. \end{cases} \quad (2.60)$$

Enfin, lorsque le nombre de degrés de mobilité \mathfrak{M} du mécanisme est égal à \mathfrak{F} , le nombre de degrés de liberté de l'effecteur, on a $\mathbf{J}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{J} = \mathbf{H}$ et $\mathbf{J}^{\dagger} = \mathbf{J}^{-1}$, la matrice $\mathbf{J}_{\mathcal{L}}$ n'existant pas. Le modèle cinématique inverse s'écrit alors

$$d\vec{\psi} = \mathbf{J}^{-1}d\vec{x}_{\mathfrak{F}}, \quad \text{si } \mathfrak{F} = \mathfrak{M}. \quad (2.61)$$

Dans ce cas, on peut alors déterminer les variations de chaque variable articulaire comme suit

$$\begin{cases} d\vec{\lambda} = \mathbf{GJ}^{-1}d\vec{x}_{\mathfrak{F}}, \\ d\vec{\theta} = \mathbf{RJ}^{-1}d\vec{x}_{\mathfrak{F}}, \end{cases} \quad \text{si } \mathfrak{F} = \mathfrak{M}. \quad (2.62)$$

2.3.4 Limites du modèle cinématique

Dans ce chapitre, qui présente de façon complète et générale les modèles géométrique et cinématiques, apparaît le fait que ces modèles ne sont pas adaptés et suffisants pour décrire les mécanismes compliant. Les coordonnées généralisées $\vec{\psi}$ ou cartésiennes \vec{u} (et en particulier \vec{y}) qu'ils utilisent ne sont en effet pas des valeurs directement commandables et ces coordonnées sont dépendantes de paramètres extérieurs qui n'apparaissent pas dans les deux modèles. Il est donc nécessaire, pour modéliser les mécanismes parallèles compliant, de réaliser une analyse statique en plus de cette analyse géométrique.

Chapitre 3

Modèles statique et géométrico-statique d'un mécanisme parallèle compliant

Le modèle statique permet de déterminer la valeur des coordonnées généralisées en fonction de la valeur des paramètres extérieurs, grâce à la résolution de contraintes statiques. Ces contraintes, qui correspondent aux équations de l'équilibre statique, sont obtenues en dérivant les différentes énergies potentielles du mécanisme. La résolution de ces contraintes est ensuite discutée et le modèle statique inverse défini. Enfin, le *modèle géométrico-statique*, qui consiste à résoudre simultanément les contraintes géométriques et les contraintes statiques, est défini. Un modèle géométrico-statique complet ainsi que les modèles inverses sont ensuite présentés.

3.1 Modélisation statique d'un MPC

3.1.1 Principe de la modélisation statique

La raideur des articulations compliantes lie leurs déplacements aux efforts qui s'appliquent sur elles. Ainsi, lorsque l'on veut complètement définir la configuration d'un MPC, la prise en compte des contraintes statiques est complémentaire à sa modélisation géométrique ou cinématique.

3.1.1.1 Paramètres extérieurs

La modélisation statique permet d'intégrer certains paramètres qui n'apparaissent pas dans le modèle géométrique alors que leur influence sur la configuration et la pose du mécanisme sont évidentes : les efforts appliqués sur le mécanisme — à l'effecteur ou à n'importe quel autre endroit — et le poids des membrures. De plus, selon la façon de définir les contraintes géométriques, la position des actionneurs peut ne pas apparaître dans le modèle géométrique. L'influence des actionneurs se fait alors au travers des contraintes statiques. Les paramètres extérieurs considérés sont notés comme suit :

- Effort appliqué à l'effecteur (force et moment) : \vec{f} ;
- Efforts¹ appliqués aux coordonnées \vec{y} du mécanisme : \vec{f}_y ;
- Poids de la $j^{\text{ème}}$ membrure : \vec{w}_j avec $j \in \{1, \dots, n\}$, n étant le nombre de membrure composant le mécanisme ;
- Vecteur des positions des actionneurs $\vec{\phi}$.

Dans cette thèse, afin de simplifier les notations, le vecteur $\vec{\beta}$ sera parfois utilisé. Il représente un ensemble de \mathfrak{M} paramètres extérieurs indépendants qui ont une influence sur le mécanisme. Par exemple, on peut avoir $\vec{\beta} = [\vec{\phi}^T; \vec{f}^T; \vec{f}_y^T]^T$.

3.1.1.2 Contraintes statiques

Les contraintes statiques du mécanisme sont fonction de tous ces paramètres extérieurs et de la configuration du mécanisme. Elles s'écrivent donc

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{\theta}, \vec{\phi}, \vec{f}, \vec{f}_y, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = \vec{\mathcal{S}}(\vec{\theta}, \vec{\beta}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = \vec{0}. \quad (3.1)$$

¹Ces efforts sont en réalité $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} - \mathfrak{F}$ composantes de force et/ou de moment en fonction des coordonnées \vec{y} choisies.

Sachant que le poids des membrures \vec{w}_j est uniquement fonction de la configuration $\vec{\theta}$ du mécanisme et de la gravité \vec{g} qui est constante (voir section (3.1.2.1)), et que toutes les variables articulaires $\vec{\theta}$ sont fonction des coordonnées généralisées $\vec{\psi}$, la fonction $\vec{\mathcal{S}}$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{\beta}) = \vec{0}. \quad (3.2)$$

Lorsque les efforts appliqués ailleurs que sur l'effecteur sont considérés nuls ($\vec{f}_y = \vec{0}$), on a

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{\phi}, \vec{f}) = \vec{0}. \quad (3.3)$$

3.1.1.3 Minimisation de l'énergie potentielle

Dans la nature, tout système tend systématiquement à se mettre dans un état d'énergie minimale. Tant que le MPC considéré n'est pas en équilibre, sa configuration $\vec{\psi}$ évolue pour faire diminuer l'énergie potentielle \mathcal{E}_M jusqu'à ce qu'elle atteigne un minimum local. Celui-ci est défini par l'équation suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{d\vec{\psi}} = \vec{0}_{\mathfrak{M}}. \quad (3.4)$$

De plus, la dérivation par rapport à un vecteur dont les coordonnées sont indépendantes nous renseigne sur la dimension de l'équilibre statique : \mathfrak{M} . Ainsi, le respect de cet équilibre statique correspond aux \mathfrak{M} contraintes statiques recherchées pour définir le modèle statique.

3.1.1.4 Équations de Lagrange

Une autre approche équivalente mais plus générale, est de considérer que l'étude quasi-statique d'un mécanisme n'est qu'un cas particulier de son étude dynamique. Il est donc possible d'utiliser les équations de Lagrange [57]. Celles-ci s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{\psi}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\psi}} = \vec{f}_{nc}, \quad (3.5)$$

où \mathcal{L} représente le Lagrangien du mécanisme et \vec{f}_{nc} les efforts non-conservatifs. Les conditions particulières de notre étude quasi-statique permettent de simplifier grandement les équations et d'obtenir une équation équivalente à l'équation (3.4). Ces conditions sont :

- le mécanisme est dans une position fixe, c'est-à-dire que $\dot{\vec{\psi}} = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$. Donc, l'énergie cinétique \mathcal{T} est nulle et il n'y a pas d'effet dynamique. Le Lagrangien est égal à l'opposé de l'énergie potentielle : $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{E}_M = -\mathcal{E}_M$,
- il n'y a pas de friction. Tous les efforts considérés sont conservatifs : $\vec{f}_{nc} = \vec{0}_{\mathfrak{M}}$.

Si, pour aller au delà de cette thèse, on désirait modéliser la dynamique des MPC ou des systèmes non-conservatifs, les équations de Lagrange seraient un bon point de départ.

3.1.2 Détermination de l'équilibre statique

3.1.2.1 Énergies potentielles

L'équilibre statique d'un MPC soumis uniquement à des efforts conservatifs s'obtient à partir de l'équation (3.4). Mise à part cette hypothèse sur la conservation de l'énergie, pour que le modèle reste général, les énergies potentielles à considérer sont :

- l'énergie potentielle élastique \mathcal{E}_θ stockée dans les articulations compliantes,
- l'énergie potentielle \mathcal{E}_f associée à l'effort extérieur conservatif \vec{f} appliqué à l'effecteur,
- l'énergie potentielle de gravité \mathcal{E}_W de l'ensemble du mécanisme. Elle est égale à la somme des énergies potentielles de gravité \mathcal{E}_{W_j} associées à chaque membrure,
- l'énergie potentielle \mathcal{E}_{f_y} associée aux efforts extérieurs conservatifs \vec{f}_y appliqués aux coordonnées \vec{y} du mécanisme.

Énergie potentielle élastique Emmagasinée dans toutes les articulations du mécanisme, elle peut s'écrire comme la somme de l'énergie potentielle stockée dans les articulations $\vec{\psi}$ et dans les articulations géométriquement contraintes $\vec{\lambda}$:

$$\mathcal{E}_\theta = \int_{\vec{\theta}_0}^{\vec{\theta}} \vec{\tau}_\theta^T d\vec{\theta} = \int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \vec{\tau}_\psi^T d\vec{\psi} + \int_{\vec{\lambda}_0}^{\vec{\lambda}} \vec{\tau}_\lambda^T d\vec{\lambda}. \quad (3.6)$$

Lorsque le mécanisme est précontraint, les articulations compliantes ne peuvent pas toutes être non-déformées en même temps puisqu'en général le vecteur des longueurs libres $\vec{\theta}_0$ ne respecte pas les contraintes géométriques. L'énergie potentielle élastique n'est dans ce cas jamais nulle puisque $\vec{\lambda}_0$ ne correspond pas à la configuration $\vec{\psi}_0$ (c'est-à-dire $\vec{\lambda}_0 \neq \vec{C}(\vec{\psi}_0)$). On note alors \mathcal{E}_θ^0 l'énergie potentielle stockée dans le mécanisme quand il est dans la configuration $\vec{\psi}_0$. En utilisant, les équations (2.10) et (2.62), \mathcal{E}_θ

peut être exprimée uniquement en fonction des coordonnées généralisées.

$$\mathcal{E}_\theta = \int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \vec{\tau}_\psi^T d\vec{\psi} + \int_{\vec{\lambda}_0}^{\vec{\lambda}} \vec{\tau}_\lambda^T \mathbf{G} d\vec{\lambda} + \mathcal{E}_\theta^0 \quad (3.7)$$

Dans le cas commun où les raideurs des articulations sont considérées constantes, les efforts appliqués sur les articulations déformées s'écrivent

$$\vec{\tau}_\psi = \mathbf{K}_\psi \Delta \vec{\psi} \quad \text{et} \quad \vec{\tau}_\lambda = \mathbf{K}_\lambda \Delta \vec{\lambda} = \mathbf{K}_\lambda (\vec{\mathcal{C}}(\vec{\psi}) - \vec{\lambda}_0), \quad (3.8)$$

où $\Delta \vec{\psi} = \vec{\psi} - \vec{\psi}_0$ et $\Delta \vec{\lambda} = \vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0$. L'énergie potentielle élastique s'exprime alors comme

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{1}{2} \Delta \vec{\psi}^T \mathbf{K}_\psi \Delta \vec{\psi} + \frac{1}{2} \Delta \vec{\lambda}^T \mathbf{K}_\lambda \Delta \vec{\lambda}. \quad (3.9)$$

Énergie potentielle \mathcal{E}_f L'énergie potentielle associée à l'effort \vec{f} s'écrit pour un mécanisme plan, grâce l'équation (2.55) comme

$$\mathcal{E}_f = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{f}^T d\vec{x}_\mathfrak{F} = - \int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \vec{f}^T \mathbf{J} d\vec{\psi} + \mathcal{E}_f^0, \quad (3.10)$$

où \mathcal{E}_f^0 représente l'énergie \mathcal{E}_f lorsque $\vec{\psi} = \vec{\psi}_0$.

Dans le cas d'un mécanisme spatial, puisque la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et la variation infinitésimale de la pose $d\vec{x}_\mathfrak{F}$ ne sont pas intégrables, l'énergie potentielle associée à \vec{f} ne peut pas être écrite. Cependant, la puissance instantanée de cet effort \vec{f} de dimension six peut se définir comme

$$\dot{\mathcal{E}}_f = -\vec{f}_l^T \vec{v} - \vec{m}^T \vec{\omega} = -\vec{f}^T \vec{t} = -\vec{f}^T \mathbf{J} \dot{\vec{\psi}}, \quad (3.11)$$

où $\vec{f}^T = [\vec{f}_l^T; \vec{m}^T]$, \vec{f}_l représentant la force et \vec{m} le couple, ces deux vecteurs ayant trois composantes chacun. La variation infinitésimale de l'énergie \mathcal{E}_f s'écrit

$$d\mathcal{E}_f = -\vec{f}^T d\vec{x}_\mathfrak{F} = -\vec{f}^T \mathbf{J} d\vec{\psi}. \quad (3.12)$$

Énergie potentielle gravitationnelle L'énergie potentielle gravitationnelle du $j^{\text{ème}}$ corps rigide de masse m_j est notée \mathcal{E}_{Wj} . Elle est égale à

$$\mathcal{E}_{Wj} = -m_j \vec{g}^T \Delta \vec{c}_j = -m_j \vec{g}^T \int_{\vec{c}_0}^{\vec{c}_j} d\vec{c}_j, \quad (3.13)$$

où \vec{g} est le vecteur de l'accélération gravitationnelle, $\Delta \vec{c}_j = \vec{c}_j - \vec{c}_0$, \vec{c}_j étant la position du centre de masse du $j^{\text{ème}}$ corps dans le repère global et \vec{c}_0 la position du point de

gravité 0. L'énergie potentielle gravitationnelle pouvant être vue comme un potentiel associé à une force constante $\vec{w}_j = m_j \vec{g}$ et la position \vec{c}_j du centre de masse étant fonction de la configuration $\vec{\psi}$ du mécanisme, \mathcal{E}_{Wj} peut être écrite comme une fonction de $\vec{\psi}$:

$$\mathcal{E}_{Wj} = -\vec{w}_j^T \int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \mathbf{P}_j d\vec{\psi} + \mathcal{E}_{Wj}^0 \quad (3.14)$$

où $\mathbf{P}_j = d\vec{c}_j/d\vec{\psi}$ est la matrice jacobienne du vecteur position \vec{c}_j par rapport au vecteur $\vec{\psi}$, \mathcal{E}_{Wj}^0 est l'énergie potentielle gravitationnelle du $j^{\text{ème}}$ corps dans la configuration $\vec{\psi}_0$. L'énergie potentielle gravitationnelle du mécanisme entier s'écrit

$$\mathcal{E}_W = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{Wj} = - \sum_{j=1}^n \left(\vec{w}_j^T \int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \mathbf{P}_j d\vec{\psi} \right) + \mathcal{E}_W^0 \quad (3.15)$$

où n est le nombre de corps rigides composant le mécanisme et \mathcal{E}_W^0 est l'énergie potentielle du mécanisme entier dans la configuration $\vec{\psi}_0$.

Autres efforts extérieurs Si d'autres efforts extérieurs sont appliqués suivant les coordonnées \vec{y} du mécanisme, en notant $\vec{f}_u^T = [f^T; \vec{f}_y^T]$ l'ensemble des forces/moments appliqués aux \mathfrak{M} coordonnées cartésiennes $\vec{u}^T = [x^T; \vec{y}^T]$ du mécanisme, l'énergie potentielle associée s'écrit

$$\mathcal{E}_{f_u} = - \int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \vec{f}_u^T \mathbf{H} d\vec{\psi} + \mathcal{E}_{f_u}^0. \quad (3.16)$$

Puisque leur prise en compte ne présente aucune difficulté particulière, on ne considère pas ces efforts extérieurs \vec{f}_u dans la suite de ce chapitre. Ceci permet de ne pas alourdir les équations.

Énergie potentielle totale du mécanisme Notée \mathcal{E}_M , elle est égale à la somme des énergies potentielles prises en compte dans le système :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_f + \mathcal{E}_W = \mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_f + \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{Wj}. \quad (3.17)$$

Dans le cas des mécanismes spatiaux, cette dernière relation n'est pas toujours définie à cause de \mathcal{E}_f , mais on peut écrire sa variation infinitésimale $d\mathcal{E}_M$.

3.1.2.2 Dérivation par rapport à $\vec{\psi}$

La condition définie à l'équation (3.4) pour que le mécanisme soit en équilibre statique s'écrit

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{d\vec{\psi}} = \frac{d\mathcal{E}_\theta}{d\vec{\psi}} + \frac{d\mathcal{E}_f}{d\vec{\psi}} + \sum_{j=1}^n \frac{d\mathcal{E}_{W_j}}{d\vec{\psi}} = \vec{0}_\mathfrak{M}. \quad (3.18)$$

En utilisant les équations (3.7), (3.10), (3.15), la dérivation de \mathcal{E}_M s'écrit

$$\vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda - \mathbf{J}^T \vec{f} - \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j = \vec{0}_\mathfrak{M}. \quad (3.19)$$

Dans le cas où d'autres efforts extérieurs sont pris en compte, cette dérivation s'écrit

$$\vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda - \mathbf{H}^T \vec{f}_u - \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j = \vec{0}_\mathfrak{M}. \quad (3.20)$$

3.1.2.3 Position des actionneurs compliants

Lorsqu'un actionneur est compliant, la valeur commandée ϕ_i n'apparaît pas dans les équations géométriques et c'est par l'intermédiaire des contraintes statiques qu'elle est prise en compte dans le modèle. En effet, à la section (1.3.1), un actionneur compliant est modélisé comme une articulation compliant dont la longueur libre ψ_{0j} est variable et égale à la position commandée ϕ_j . De plus, d'après la définition de la raideur des articulations compliantes donnée dans la section (1.2.3) à l'équation (1.5), l'effort appliqué sur les articulations déformées correspondant aux coordonnées généralisées peut s'écrire :

$$\vec{\tau}_\psi = \int_{\vec{\psi}_0}^{\psi} \mathbf{K}_\psi d\vec{\psi}, \text{ où } \psi_{0j} = \phi_j \text{ si l'articulation } j \text{ est actionnée.} \quad (3.21)$$

Les valeurs ϕ_j apparaissent donc dans l'équilibre statique au travers des bornes inférieures de l'intégrale définissant $\vec{\tau}_\psi$.

3.1.3 Modèle statique d'un MPC

3.1.3.1 Contraintes statiques

Les \mathfrak{M} contraintes statiques que doit satisfaire un MPC sont donc fonction de sa configuration et des paramètres extérieurs (les poids \vec{w}_j étant constants) :

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{\phi}, \vec{f}) = \vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda - \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j - \mathbf{J}^T \vec{f} = \vec{0}_{\mathfrak{M}} \quad (3.22)$$

L'équilibre statique d'un MPC est composé de \mathfrak{M} équations, soit autant que de coordonnées généralisées. Cette formulation de l'équilibre statique est générale et valable pour tous les mécanismes. Lorsque ni le poids et ni les articulations passives ne sont pris en compte, on retrouve la relation statique bien connue : $\vec{\tau}_\psi = \mathbf{J}^T \vec{f}$.

3.1.3.2 Modèle statique direct

La configuration $\vec{\psi}$ peut donc être déterminée en fonction des paramètres extérieurs en résolvant les contraintes statiques. La forme générale du modèle statique s'écrit

$$\vec{\psi} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{\beta}), \quad (3.23)$$

où $\vec{\beta}$ représente \mathfrak{M} paramètres extérieurs indépendants qui ont une influence sur le mécanisme. Lorsque seuls la position des actionneurs et l'effort appliqué à l'effecteur sont pris en compte, le modèle statique direct s'écrit

$$\vec{\psi} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f}). \quad (3.24)$$

On peut ainsi dire que les coordonnées généralisées qui sont *géométriquement libres* sont par contre *statiquement contraintes*.

3.1.3.3 Conditions pour la résolution : équations indépendantes

Résoudre le système de \mathfrak{M} équations à \mathfrak{M} inconnues donné à l'équation (3.22) requiert que toutes les équations soient indépendantes. Puisque $\vec{\psi}$ est un vecteur de coordonnées indépendantes, $d\mathcal{E}_M/d\vec{\psi} = \vec{0}$ est un système d'équations non redondantes à moins que l'énergie potentielle ne soit pas dépendante de toutes les coordonnées généralisées et donc, que certaines coordonnées généralisées n'apparaissent pas dans les

équations de l'équilibre statique. Si \mathcal{E}_M est indépendante de la variable ψ_j alors la $i^{\text{ème}}$ composante $d\mathcal{E}_M/d\psi_j$ est nulle, ce qui implique que le rang de $d\mathcal{E}_M/d\vec{\psi}$ est inférieur à \mathfrak{M} .

Cette situation particulière ne peut se produire que dans des cas très spécifiques où les conditions suivantes sont remplies :

- les coordonnées géométriquement contraintes λ_j qui ont une raideur non nulle et le terme $\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda$ ne dépendent pas de cette coordonnée ψ_j ,
- la pose de l'effecteur \vec{x} et donc \mathbf{J} ne dépendent pas de cette coordonnée ψ_j ,
- les corps rigides dont la position dépend de ψ_j n'ont pas de masse ou bien la gravité n'a pas d'effet sur ces corps,
- l'effort $\vec{\tau}_{\psi_i}$ est constant et donc n'est pas fonction de ψ_j .

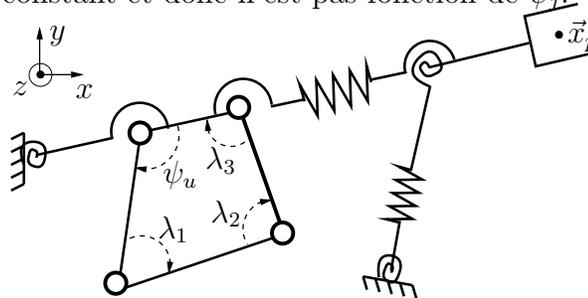


FIG. 3.1 – Mécanisme plan à la configuration indéterminée.

La figure 3.1 présente un exemple de mécanisme où la coordonnée généralisée ψ_u n'est pas déterminée par les contraintes statiques puisque les articulations ψ_u , λ_1 , λ_2 et λ_3 ont une raideur nulle (donc $\tau_{\psi_u} = \tau_{\lambda_1} = \tau_{\lambda_2} = \tau_{\lambda_3} = 0$), que la gravité agit selon l'axe (Oz) , qui est hors du plan du mécanisme, et que la pose \vec{x}_p ne dépend pas de ψ_u .

3.1.3.4 Choix de la solution

Nombre fini de solutions Lorsque les \mathfrak{M} contraintes statiques sont indépendantes, le modèle statique (éq.(3.24)) peut être déterminé. Cependant, à cause de la non-linéarité de ces contraintes, il y a généralement plusieurs branches de solutions possibles. Par exemple, pour le mécanisme apparemment simple de la figure 3.2(a), lorsque la longueur libre des ressorts est nulle, il y a six solutions réelles et lorsque les longueurs libres des ressorts ne sont pas nulles, il y a soixante-deux solutions réelles [24]!

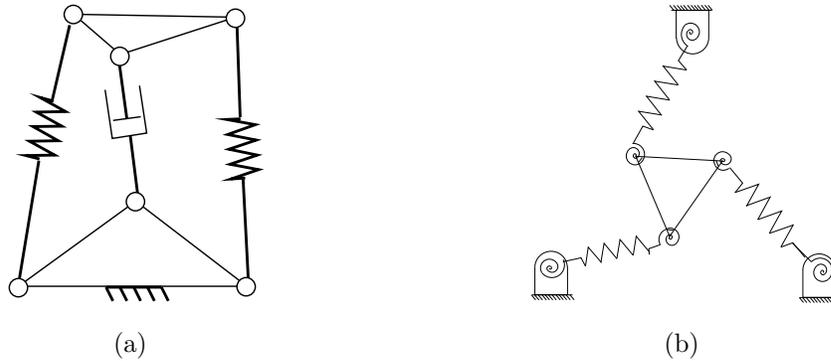


FIG. 3.2 – Mécanismes compliants avec plusieurs configurations d'équilibre.

Stabilité de l'équilibre statique Parmi les configurations statiquement équilibrées qui correspondent aux solutions réelles du modèle statique, il existe des configurations stables et des configurations instables. Il convient donc d'étudier la matrice hessienne de l'énergie potentielle pour vérifier la stabilité d'une configuration [84]. Dans un système conservatif, la matrice hessienne de l'énergie potentielle est par définition égale à la matrice de raideur notée \mathbf{K}_M . Cette dernière est présentée au chapitre 4 de cette thèse pour le cas des mécanismes parallèles compliants.

Lorsque \mathbf{K}_M est définie positive, l'équilibre statique du mécanisme est stable. Si elle n'est définie ni positive, ni semi-positive —c'est-à-dire qu'au moins une de ces valeurs propres est négative—, alors le mécanisme est dans une configuration $\vec{\psi}$ instable. Dans ce cas, la solution $\vec{\psi}$ du modèle statique ne correspond pas à la réalité physique. Ces solutions où la matrice de raideur a des valeurs propres négatives sont donc à éviter. La figure 3.2(b) présente un mécanisme avec une base et une plate-forme équilatérales étudié dans [84]. Lorsqu'aucun effort n'est appliqué à la plate-forme et que les ressorts en torsion ont une raideur nulle, il y a trente solutions réelles pour le modèle statique dont seulement dix-neuf ont des longueurs de ressort positives. Parmi ces dix-neuf solutions, quatorze sont instables et seulement cinq sont stables [84].

Débattement limité Un autre critère limitant le nombre de configurations en équilibre statique dans lesquelles un MPC peut s'établir est le respect du débattement de ces articulations. En effet, si les articulations conventionnelles peuvent avoir des débattements très grands, voire infinis pour beaucoup d'articulations rotoïdes, les articulations compliantes ont des débattements assez limités. Cependant, même avec cette limitation supplémentaire, il est possible qu'un mécanisme compliant puisse atteindre

plusieurs configurations stables pour un même ensemble $(\vec{\phi}, \vec{f})$ de paramètres extérieurs. La conception de mécanismes bistables tire ainsi profit de cette propriété pour créer des mécanismes qui peuvent avoir deux positions de repos au lieu d'une [39, 69].

Résolution numérique La résolution du modèle statique d'un MPC semble donc être un problème très complexe du fait de sa forte non-linéarité et de ses solutions multiples. Une résolution symbolique est généralement impossible dans l'état actuel de nos connaissances mathématiques et une résolution numérique complète, c'est-à-dire, qui fournit toutes les configurations stables possibles, est également difficile [84]. Cependant, en pratique lorsque l'on utilise le modèle statique d'un MPC, il n'est pas utile de connaître toutes les configurations possibles, mais uniquement celle qui est la plus proche d'une zone que l'on peut estimer à l'avance du fait des débattements limités des articulations. Cette configuration peut alors servir d'estimé initial de la solution, nécessaire pour une résolution numérique avec la méthode de Newton-Raphson. Dans le cas d'un mécanisme compliant qui n'est pas précontraint ($\vec{\lambda}_0 = \vec{\mathcal{C}}(\vec{\psi}_0)$), cet estimé initial est très simple à trouver, puisque l'équilibre statique est réalisé lorsque les actionneurs sont dans leurs positions de référence ($\vec{\phi} = \vec{\phi}_0$), qu'il n'y a pas d'effort extérieur ($\vec{f} = \vec{0}$), et que la gravité est négligée ($\vec{g} = \vec{0}$). La configuration « au repos » — $\vec{\psi} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi} = \vec{\phi}_0, \vec{f} = \vec{0})$ — qui tient compte de la gravité peut ensuite être déterminée en augmentant graduellement la valeur de \vec{g} et en résolvant à chaque fois le modèle statique avec pour estimé initial la valeur trouvée à l'itération précédente. De la même manière, on peut trouver la configuration « au repos » d'un mécanisme précontraint en partant du mécanisme non précontraint qui a les mêmes longueurs libres $\vec{\theta}_0$ mais avec les coefficients de raideurs des articulations $\vec{\lambda}$ considérés nuls ($\mathbf{K}_\lambda = \mathbf{0}$). Ensuite à chaque itération, on rapproche les valeurs k_{λ_j} de leurs vraies valeurs.

Autres méthodes Enfin, si on cherche à réaliser une analyse plus poussée et à connaître toutes les positions d'équilibre, stables comme instables, il est possible de trouver d'autres méthodes de résolution. Dans [84] par exemple, une méthode utilisant l'homotopie polynomiale est utilisée.

Connaissance du modèle géométrique Pour être résolu, le modèle statique présenté dans cette section doit uniquement être fonction des coordonnées généralisées. Il

doit être indépendant des valeurs $\vec{\lambda}$ qui ne doivent apparaître ni dans les matrices \mathbf{G} , \mathbf{P} et \mathbf{J} , ni dans le vecteur $\vec{\tau}_\lambda$. Cela signifie qu'il faut au préalable avoir résolu symboliquement le modèle géométrique (éq.(2.10)). Lorsque cette résolution symbolique n'est pas possible, les contraintes statiques doivent être résolues en même temps que les contraintes géométriques. On parle alors plutôt de modèle géométrico-statique (cf. section 3.2). Ce dernier nous permet en plus de déterminer la pose du manipulateur.

3.1.3.5 Modèle statique inverse

Le modèle statique inverse vise à déterminer les paramètres extérieurs qu'il faut appliquer au mécanisme afin qu'il se retrouve dans une configuration voulue. Selon le nombre de paramètres extérieurs, les situations suivantes peuvent être rencontrées :

- Le nombre de paramètres extérieurs indépendants est \mathfrak{M} (soit \mathfrak{A} actionneurs et $\mathfrak{M} - \mathfrak{A}$ efforts extérieurs), la résolution de ce problème statique inverse pose alors les mêmes défis que celle du modèle statique direct et s'écrit

$$\vec{\beta} = \vec{\mathcal{F}}^{-1}(\vec{\psi}), \quad (3.25)$$

où $\vec{\mathcal{F}}^{-1}$ représente la fonction réciproque de $\vec{\mathcal{F}}$.

- Si le nombre de paramètres extérieurs est supérieur à \mathfrak{M} , alors une infinité de combinaisons de paramètres extérieurs peut mettre le mécanisme dans la configuration $\vec{\phi}$.
- Le cas le plus probable est que le nombre de paramètres extérieurs pris en compte soit inférieur à \mathfrak{M} . En général, on considère \mathfrak{A} actionneurs et un effort extérieur de dimension \mathfrak{F} , donc $\mathfrak{A} + \mathfrak{F} < \mathfrak{M}$, le modèle statique inverse n'admet ainsi pas toujours de solutions réelles, c'est-à-dire que certaines configurations $\vec{\psi}$ ne peuvent pas être atteintes. C'est-à-dire,

$$(\vec{\phi}, \vec{f}) = \vec{\mathcal{F}}^{-1}(\vec{\psi}) \text{ n'existe pas toujours.} \quad (3.26)$$

De plus, il faut noter que l'effort extérieur \vec{f} n'est pas toujours une valeur contrôlable. Seules les \mathfrak{A} positions des actionneurs le sont. En pratique, cela réduit encore les possibilités de résolution du problème statique inverse.

3.2 Modèle géométrico-statique (MGS)

3.2.1 MGS direct

Le modèle géométrico-statique direct permet de déterminer la pose d'un MPC en fonction des paramètres extérieurs. Dans sa version complète, où aucune information n'est perdue, ce MGS s'écrit

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{M}}_U(\vec{\beta}). \quad (3.27)$$

Dans le cas où les seuls paramètres extérieurs considérés sont la position commandée des actionneurs $\vec{\phi}$ et les efforts appliqués sur le mécanisme \vec{f} , et que seule la pose de l'effecteur doit être déterminée, le MGS cartésien s'écrit comme une fonction non-linéaire $\vec{\mathcal{M}}_C$:

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{\phi}, \vec{f}). \quad (3.28)$$

Les contraintes géométriques $\vec{\mathcal{K}}$ et statiques $\vec{\mathcal{S}}$ permettent d'établir ce modèle. Si celles-ci peuvent être résolues symboliquement avec les équations (2.21) et (3.24), l'expression symbolique du MGS cartésien s'écrit

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{P}}(\vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})). \quad (3.29)$$

Le MGS interne direct, représenté par une fonction non linéaire $\vec{\mathcal{M}}_\theta$ et permettant de connaître la configuration $\vec{\theta}$ du mécanisme, s'écrit

$$\vec{\theta} = \vec{\mathcal{M}}_\theta(\vec{\phi}, \vec{f}) = \vec{\mathcal{G}}(\vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})). \quad (3.30)$$

3.2.2 Résolution numérique

Comme cela a été vu à la section 3.1.3.3, il est généralement impossible d'obtenir une solution symbolique du modèle statique et donc du MGS. En conséquence, le MGS d'un MPC doit être résolu numériquement.

La résolution numérique du MGS cartésien consiste à résoudre en même temps les $\mathfrak{C} + \mathfrak{F}$ contraintes géométriques indépendantes et les \mathfrak{M} contraintes statiques en

considérant \vec{f} et $\vec{\phi}$ comme des paramètres connus. La pose \vec{x} est l'inconnue dont on cherche à déterminer la valeur. Cependant, la résolution d'un nombre n_c de contraintes nécessitant d'avoir n_c inconnues indépendantes, la résolution du MGS cartésien doit se faire en utilisant aussi les m coordonnées θ_j comme inconnues supplémentaires. On cherche donc une solution $(\vec{x}, \vec{\theta})$. Les contraintes du MGS cartésien s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{K}}(\vec{\theta}) = \vec{0}_{\mathbf{c}}, \\ \vec{x} - \vec{\mathcal{B}}(\vec{\theta}) = \vec{0}_{n_x}, \\ \vec{\mathcal{S}}(\vec{\theta}, \vec{\phi}, \vec{f}) = \vec{0}_{\mathbf{m}}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Généralement, une expression symbolique de la pose est facile à déterminer. De plus, puisque la détermination de la configuration $\vec{\theta}$ est nécessairement réalisée et que cette configuration est utile pour pouvoir décrire entièrement et de façon unique la mécanique, la résolution numérique du MGS cartésien peut être allégée en résolvant numériquement le MGS interne pour déterminer $\vec{\theta}$ dans un premier temps, puis en calculant la fonction $\vec{x} = \vec{\mathcal{B}}(\vec{\theta})$ ensuite. Les contraintes à respecter pour le MGS interne sont

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{K}}(\vec{\theta}) = \vec{0}_{\mathbf{c}}, \\ \vec{\mathcal{S}}(\vec{\theta}, \vec{\phi}, \vec{f}) = \vec{0}_{\mathbf{m}}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Enfin, si les contraintes géométriques peuvent être résolues symboliquement et toutes les valeurs λ_j remplacées dans les contraintes statiques par la fonction $\mathcal{C}_j(\vec{\psi})$ correspondante, alors la résolution numérique du MGS est équivalente à la résolution du modèle statique (éq.(3.24)).

La résolution du MGS présente les mêmes défis que la résolution du modèle statique présenté à la section 3.1.3.4 (nombre de solutions, solutions dans l'espace de travail et stabilité de la configuration).

3.2.3 MGS inverse

D'après l'équation (3.27), le MGS inverse s'écrit simplement

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} \vec{\phi} \\ \vec{f} \\ \vec{f}_y \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{M}}_U^{-1} \left(\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \right). \quad (3.33)$$

Cependant, parmi les deux types de variables qui existent —variables cinématiques ($\vec{\psi}$, $\vec{\theta}$, \vec{x} , etc.) et variables statiques ($\vec{\phi}$, \vec{f} , \vec{f}_y , $\vec{\beta}$, etc.)—, toutes ne présentent pas le même intérêt. Dans un contexte de manipulation, généralement seules les \mathfrak{F} composantes indépendantes de \vec{x} ont une importance à l'inverse des \mathfrak{L} coordonnées de \vec{y} complétant la définition de la configuration du mécanisme. Dans les paramètres extérieurs, généralement seules les \mathfrak{A} positions des actionneurs sont commandables et il n'y a pas d'effort extérieur appliqué ailleurs qu'à l'effecteur ($\vec{f}_y = \vec{0}$).

Ainsi, au-delà des notions de modèle direct et de modèle inverse, la relation la plus utile en pratique pour un mécanisme pleinement actionné ($\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$) est celle qui permet de déterminer la position $\vec{\phi}$ des actionneurs plaçant l'effecteur dans une pose \vec{x} lorsqu'il est soumis à un effort \vec{f} . Ce modèle est appelé *modèle géométrico-statique de contrôle* et noté sous la forme d'une fonction non-linéaire $\vec{\mathcal{M}}_\phi$:

$$\begin{bmatrix} \vec{\phi} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{M}}_\phi \left(\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{f} \\ \vec{f}_y \end{bmatrix} \right). \quad (3.34)$$

Lorsque les forces \vec{f}_y sont nulles, ce modèle s'écrit

$$(\vec{\phi}, \vec{y}) = \vec{\mathcal{M}}_\phi(\vec{x}, \vec{f}). \quad (3.35)$$

Par ailleurs, à partir de la résolution des contraintes géométriques et des contraintes statiques, on peut imaginer résoudre tout type de MGS pour peu que les dimensions des paramètres choisis en entrée et en sortie soit cohérentes.

3.2.4 Critique du MGS

La modélisation géométrico-statique d'un mécanisme parallèle compliant, présentée dans ce chapitre sous la forme la plus générale possible, peut être utilisée pour tous les mécanismes compliant (et même pour les mécanismes conventionnels en prenant des valeurs nulles ou infinies pour les raideurs). Ce modèle qui met côte-à-côte des variables géométriques (\vec{x} , $\vec{\psi}$ et \vec{u}) et statiques ($\vec{\phi}$ et \vec{f}); et qui pose entre eux une relation systématique, n'a à notre connaissance, jamais été présenté d'une manière aussi claire et systématique dans la littérature.

Le MGS permet de déterminer avec une grande précision la pose d'un MPC puisqu'il peut prendre en compte de nombreux paramètres influents comme

- la géométrie du mécanisme,
- la position des actionneurs,
- l'effort appliqué à l'effecteur,
- la gravité et les masses des membrures,
- les efforts appliqués à d'autres endroits du mécanisme,
- la raideur des actionneurs,
- les différents modèles pour les articulations passives (nombre de ddl et raideur, constante ou variable),
- la compliance des membrures.

L'inconvénient majeur du MGS provient de la complexité des équations qui rendent généralement impossible une résolution symbolique. Et puisqu'une résolution numérique procède par itération, le temps de calcul du modèle n'est pas constant. Dans ce cas, l'utilisation du MGS n'est pas souhaitable pour le contrôle en temps réel d'un MPC. Ainsi, de la même manière qu'on utilise en pratique plus souvent le modèle cinématique d'un mécanisme que son modèle géométrique, l'utilisation du modèle géométrico-statique peut être moins intéressante que celle du *modèle quasi-statique*. Ce dernier est obtenu à partir de la variation instantanée du MGS et est présenté au chapitre 5.

Chapitre 4

Matrice de raideur d'un mécanisme parallèle compliant

*« La seule chose qui soit certaine à l'avenir,
c'est que la rigidité engendrera des catastrophes. »*

—Arno Penzias
(Prix Nobel de physique 1978)

À partir de leur définition mathématique, les différentes matrices de raideur d'un mécanisme parallèle compliant sont calculées dans ce chapitre : la *matrice de raideur généralisée* \mathbf{K}_M , la *matrice de raideur cartésienne complète* \mathbf{K}_U et la *matrice de raideur cartésienne* \mathbf{K}_C . On démontre alors que leur formulation est une généralisation de toutes les matrices de raideur déjà existantes dans la littérature. Leurs propriétés sont ensuite étudiées : conservativité, symétrie et positivité. Enfin, une formulation alternative et simple à calculer de la matrice de raideur généralisée est donnée.

4.1 Définition d'une matrice de raideur

4.1.1 Concept : matrice de raideur

La *raideur* est définie par l'Office québécois de la langue française comme le « rapport entre une variation de force (ou de couple) et la variation correspondante du déplacement en translation (ou en rotation) d'un élément élastique ». Le terme de *rigidité*, défini comme la « résistance à la déformation élastique en régime statique ou dynamique de machines, de sous-ensembles ou éléments sous l'effet des efforts ou moments définis » est synonyme.

L'objet mathématique le plus utilisé pour caractériser la raideur d'un mécanisme est la *matrice de raideur*. Dans [56], cela est exprimé comme : « *Broadly speaking, a stiffness matrix relates the applied loads with the displacements of the rigid bodies* »¹. Le coefficient ij de la matrice de raideur représente la variation d'une coordonnée selon une direction i , en fonction de la variation d'un effort appliqué selon une direction j .

4.1.2 La matrice de raideur en robotique

La matrice de raideur a été introduite pour la première fois pour une application robotique par Salisbury en 1980 [81]. Sa formulation originale a été par la suite améliorée afin de devenir de plus en plus générale. Ont successivement été pris en compte l'influence des efforts extérieurs [20, 34], celle de l'actionnement redondant [21], l'effet de la gravité [85] et celui des articulations passives compliantes [75, 89].

Les propriétés d'une matrice de raideur sont d'une grande importance pour l'étude du comportement cinémato-statique d'un mécanisme, elles sont donc l'objet de nombreuses recherches et débats au sein de la communauté scientifique. Lorsque toutes les forces prises en compte sont conservatives, la matrice de raideur définie selon des repères de référence compatibles est symétrique si elle est décrite dans une base de coordonnées (*coordinate basis*) [17, 38, 44, 56, 92]. Elle est non-symétrique lorsque décrite dans une base de non coordonnées (*non-coordinate basis*), c'est-à-dire une base dont

¹ « *En gros, la matrice de raideur relie les charges appliquées aux déplacements des corps rigides* ».

les éléments ne respectent pas le théorème de Schwarz [16, 22, 23, 37, 38, 85, 91, 92]. Par exemple, la matrice de raideur d'un mécanisme plan écrite avec les coordonnées polaires n'est pas symétrique [60]. De plus, comme la matrice hessienne d'un potentiel permet de déterminer la stabilité d'un équilibre [84], la matrice de raideur peut ainsi être définie positive dans un équilibre stable ou pas dans un équilibre statique instable [12, 13, 85].

4.1.3 Définition mathématique

Généralement, la matrice de raideur est mathématiquement définie comme la matrice hessienne d'un potentiel, c'est-à-dire la matrice carrée de ses dérivées partielles du second ordre. Par exemple, la *matrice de raideur cartésienne* d'un mécanisme plan est la matrice hessienne de l'énergie potentielle \mathcal{E}_f associée à l'effort extérieur \vec{f} , par rapport aux coordonnées cartésiennes. Elle s'écrit :

$$\mathbf{K}_C = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_f}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}^2}. \quad (4.1)$$

où $\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ est le vecteur représentant la pose cartésienne de l'effecteur du mécanisme plan. Cependant, lorsque l'énergie potentielle totale d'un mécanisme ne peut être écrite, cette définition ne peut être appliquée. Dans ce cas, la matrice de raideur est simplement définie comme la matrice jacobienne d'un effort. Par exemple, la matrice de raideur cartésienne s'écrit

$$\mathbf{K}_C = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}}. \quad (4.2)$$

On remarque que lorsque le potentiel est connu, sachant qu'une force conservative est égale au gradient de ce potentiel, ces deux définitions sont équivalentes. Lorsque des efforts non-conservatifs sont pris en compte dans la modélisation, il n'existe pas de potentiel associé à ces efforts. Ainsi, la première définition ne peut pas être utilisée. On utiliserait donc a priori systématiquement la seconde définition d'une matrice de raideur.

4.1.4 Matrices de raideur utilisées pour un MPC

Dans l'étude cinétostatique d'un mécanisme, on utilise deux matrices de raideur en particulier : la matrice de raideur cartésienne et la matrice de raideur généralisée.

Matrice de raideur cartésienne La matrice de raideur cartésienne \mathbf{K}_C permet de déterminer la variation de la pose $\vec{x}_{\mathfrak{g}}$ de l'effecteur lors d'une variation de l'effort extérieur \vec{f} qui y est appliqué. Cette matrice étant la plus utilisée en robotique pour contrôler un mécanisme, l'adjectif cartésien est souvent omis dans la littérature. Plusieurs expressions de cette matrice de raideur cartésienne ont été proposées dans la littérature, mais même si elles ont successivement été de plus en plus générales, aucune d'entre elles ne correspondait à la matrice de raideur conservative des mécanismes parallèles compliant. Cette matrice est définie mathématiquement à l'équation (4.1) et à l'équation (4.2).

Matrice de raideur généralisée La matrice de raideur généralisée \mathbf{K}_M est exprimée dans l'espace des coordonnées généralisées et permet de déterminer la variation de l'effort généralisé $\vec{\tau}_M$ associé aux coordonnées généralisées ψ_j , en fonction de la variation de la configuration $\vec{\psi}$ du mécanisme. Cet effort généralisé $\vec{\tau}_M$ considère non seulement l'effet de la déformation des articulations ψ_j , mais aussi celui des efforts extérieurs, du poids, des déformations des articulations λ_j . Lorsque le mécanisme est en équilibre statique, cet effort généralisé $\vec{\tau}_M$ est nul et égal à la fonction d'équilibre statique \mathcal{S} définie à l'équation (3.22). Mathématiquement, cette matrice de raideur généralisée peut être définie comme

$$\mathbf{K}_M = \frac{d^2 \mathcal{E}_M}{d\vec{\psi}^2}, \quad (4.3)$$

ou bien comme

$$\mathbf{K}_M = \frac{d\vec{\tau}_M}{d\vec{\psi}}, \quad \text{avec} \quad \vec{\tau}_M = \frac{d\mathcal{E}_M}{d\vec{\psi}} = \vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{f}, \vec{\phi}). \quad (4.4)$$

4.2 Calcul de la matrice de raideur d'un MPC

L'application de la définition de la matrice de raideur généralisée donnée à l'équation (4.4) donne

$$\mathbf{K}_M = \frac{d}{d\vec{\psi}} \left(\vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda - \mathbf{J}^T \vec{f} - \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j \right). \quad (4.5)$$

4.2.1 Dérivation de l'équilibre statique

La dérivation de l'équilibre statique (éq.(4.5)) par rapport aux coordonnées généralisées peut se calculer comme la somme de la dérivation de chacun de ses termes. Ces dérivations sont présentées dans les sections suivantes.

4.2.1.1 Dérivation de $\vec{\tau}_\psi$

Par définition du modèle géométrico-statique d'une articulation compliant (éq.(1.5)), la dérivation de tous les efforts appliqués sur les articulations compliantes $\vec{\psi}$ est égale à la matrice de raideur \mathbf{K}_ψ . Cette matrice est composée des sous-matrices de raideur de chaque articulation, placées sur la diagonale.

$$\frac{d\vec{\tau}_\psi}{d\vec{\psi}} = \mathbf{K}_\psi. \quad (4.6)$$

4.2.1.2 Dérivation de $\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda$

Puisque $\vec{\tau}_\lambda$ est fonction du vecteur $\vec{\lambda}$, qui est lui-même fonction de la configuration $\vec{\psi}$, le vecteur $\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda$ est un produit de deux éléments fonction de $\vec{\psi}$. Ainsi, sa dérivation est la somme de deux matrices jacobiennes

$$\frac{d}{d\vec{\psi}} (\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda) = \frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\psi}} \vec{\tau}_\lambda + \mathbf{G}^T \frac{d\vec{\tau}_\lambda}{d\vec{\psi}}. \quad (4.7)$$

En utilisant la règle de la dérivation en chaîne pour le dernier terme de l'équation, on peut écrire

$$\mathbf{G}^T \frac{d\vec{\tau}_\lambda}{d\vec{\psi}} = \mathbf{G}^T \frac{d\vec{\tau}_\lambda}{d\vec{\lambda}} \frac{d\vec{\lambda}}{d\vec{\psi}}. \quad (4.8)$$

D'après le modèle général d'une articulation compliant (éq.(1.5)), on a $d\vec{\tau}_\lambda/d\vec{\lambda} = \mathbf{K}_\lambda$ et d'après la définition des contraintes cinématiques (éq.(2.29)), on sait que $d\vec{\lambda}/d\vec{\psi} = \mathbf{G}$, donc l'équation précédente est équivalente à

$$\mathbf{G}^T \frac{d\vec{\tau}_\lambda}{d\vec{\psi}} = \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G}. \quad (4.9)$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation (4.7) est homogène à une matrice de raideur. On appelle celle-ci *matrice de raideur active interne*. Cette matrice $(d\mathbf{G}^T/d\vec{\psi}) \vec{\tau}_\lambda$

décrit l'effet d'un changement des contraintes cinématiques sur l'effort généralisé $\vec{\tau}_M$ et donc sur l'équilibre statique. Cette matrice est notée \mathbf{K}_{IG} .

$$\mathbf{K}_{IG} = \frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\psi}} \vec{\tau}_\lambda = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \psi_1} \vec{\tau}_\lambda \right) \cdots \left(\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \psi_{\mathfrak{M}}} \vec{\tau}_\lambda \right) \right], \quad (4.10)$$

où $(\partial \mathbf{G}^T / \partial \psi_j) \vec{\tau}_\lambda$ est un vecteur formant la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{K}_{IG} de dimension $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Grâce à la définition de la matrice \mathbf{G} à l'équation (2.29), la matrice \mathbf{K}_{IG} peut également être définie comme

$$\mathbf{K}_{IG} = \frac{d^2 \vec{\lambda}^T}{d\vec{\psi}^2} \vec{\tau}_\lambda. \quad (4.11)$$

La dérivation de $\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda$, vecteur qui représente la contribution des articulations géométriquement contraintes à la raideur du mécanisme, donne une matrice de raideur notée \mathbf{K}_I . Cette matrice est définie par

$$\mathbf{K}_I = \mathbf{K}_{IG} + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} = \frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\psi}} \vec{\tau}_\lambda + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G}. \quad (4.12)$$

4.2.1.3 Dérivation de $-\mathbf{J}^T \vec{f}$

• **Effort extérieur uniquement fonction de la configuration :** Lorsque la source de l'effort extérieur appliqué sur l'effecteur est le contact avec un objet ou un milieu de raideur non nulle, \vec{f} est fonction de la pose \vec{x} —et donc de la configuration $\vec{\psi}$ du mécanisme. La matrice de raideur de l'objet en contact est notée \mathbf{K}_x . Puisque le vecteur \vec{f} représente l'effort appliqué par l'objet sur l'effecteur, $-\vec{f}$ représente l'effort appliqué sur l'objet par l'effecteur. La matrice de raideur de l'objet est égale à $\mathbf{K}_x = -d\vec{f}/d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$. Le vecteur $-\mathbf{J}^T \vec{f}$ est alors un produit de deux éléments. Sa dérivation donne donc une somme de deux matrices jacobiennes

$$\frac{d}{d\vec{\psi}} (-\mathbf{J}^T \vec{f}) = -\frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\psi}} \vec{f} - \mathbf{J}^T \frac{d\vec{f}}{d\vec{\psi}}. \quad (4.13)$$

En utilisant la règle de la dérivation en chaîne pour le dernier terme de l'équation, on peut écrire

$$-\mathbf{J}^T \frac{d\vec{f}}{d\vec{\psi}} = -\mathbf{J}^T \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}_{\mathfrak{F}}} \frac{d\vec{x}_{\mathfrak{F}}}{d\vec{\psi}}. \quad (4.14)$$

Puisque $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}/d\vec{\psi} = \mathbf{J}$, l'équation (4.14) est équivalente à

$$-\mathbf{J}^T \frac{d\vec{f}}{d\vec{\psi}} = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_x \mathbf{J}. \quad (4.15)$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation (4.13) est homogène à une matrice de raideur et est parfois appelée *matrice de raideur active* dans la littérature. Pour faire la distinction avec la matrice \mathbf{K}_{IG} , on préférera la qualifier de *raideur active externe*. Elle est définie par

$$\mathbf{K}_{EJ} = -\frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\psi}}\vec{f} = -\left[\left(\frac{\partial\mathbf{J}^T}{\partial\psi_1}\vec{f}\right) \cdots \left(\frac{\partial\mathbf{J}^T}{\partial\psi_{\mathfrak{M}}}\vec{f}\right) \right], \quad (4.16)$$

où ψ_j est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée articulaire de $\vec{\psi}$ et $(\partial\mathbf{J}^T/\partial\psi_j)\vec{f}$ est un vecteur formant la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{K}_E de dimension $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. En utilisant la définition de la matrice jacobienne \mathbf{J} donnée à l'équation (2.52), \mathbf{K}_{EJ} peut s'écrire

$$\mathbf{K}_{EJ} = -\frac{d^2\vec{x}_{\mathfrak{S}}^T}{d\vec{\psi}^2}\vec{f}. \quad (4.17)$$

Ainsi lorsque l'effort extérieur est uniquement fonction de la pose, la dérivation de $-\mathbf{J}^T\vec{f}$ donne une matrice de raideur notée \mathbf{K}_E qui est définie par

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_{EJ} + \mathbf{J}^T\mathbf{K}_x\mathbf{J} = -\frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\psi}}\vec{f} + \mathbf{J}^T\mathbf{K}_x\mathbf{J}. \quad (4.18)$$

Enfin, dans le cas où d'autres efforts \vec{f}_y sont pris en compte, on aura

$$\mathbf{K}_E = -\frac{d\mathbf{H}^T}{d\vec{\psi}}\vec{f}_u + \mathbf{H}^T\mathbf{K}_u\mathbf{H}, \quad (4.19)$$

avec $\mathbf{K}_u = -d\vec{f}_u/d\vec{u}_{\mathfrak{M}}$ qui représente la matrice de raideur du milieu dans lequel évolue le mécanisme.

- **Effort extérieur partiellement fonction de la configuration :** Ce cas est le plus général. L'effort appliqué sur l'effecteur dépend en partie de la pose au travers de la raideur de l'objet en contact, mais il peut aussi dépendre d'autres éléments. Ce cas n'est pas étudié dans cette thèse.

- **Effort extérieur indépendant de la configuration :** Ce cas particulier est quasiment le seul à être abordé dans la littérature. Il correspond par exemple, à un effort extérieur dû au poids d'un objet que le manipulateur déplace. L'effort extérieur peut

varier, mais sa variation est indépendante de celle de la pose, on a $\mathbf{K}_x = -d\vec{f}/d\vec{x}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{0}$.
Donc la dérivation de $-\mathbf{J}^T \vec{f}$ donne

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_{EJ} = -\frac{d\mathbf{J}^T}{d\psi} \vec{f}. \quad (4.20)$$

Et lorsque d'autres efforts \vec{f}_u sont pris en compte, on a

$$\mathbf{K}_E = -\frac{d\mathbf{H}^T}{d\psi} \vec{f}_u. \quad (4.21)$$

4.2.1.4 Dérivation de $-\sum \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j$

De la même manière que pour le vecteur représentant l'effet de l'effort extérieur, la dérivation partielle de $-\sum \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j$ donne une matrice jacobienne homogène à une matrice de raideur. Tous les poids \vec{w}_j étant constants, la matrice \mathbf{K}_{Wj} représentant la *raideur active gravitationnelle* due au $j^{\text{ème}}$ corps s'écrit

$$\mathbf{K}_{Wj} = -\frac{d\mathbf{P}_j^T}{d\psi} \vec{w}_j = \left[-\left(\frac{\partial \mathbf{P}_j^T}{\partial \psi_1} \vec{w}_j\right) \cdots -\left(\frac{\partial \mathbf{P}_j^T}{\partial \psi_m} \vec{w}_j\right) \right]. \quad (4.22)$$

Donc la matrice de raideur due au poids de tous les corps rigides du mécanisme s'écrit

$$\mathbf{K}_W = -\sum_{j=1}^m \frac{d\mathbf{P}_j^T}{d\psi} \vec{w}_j. \quad (4.23)$$

Sachant que les matrices jacobienes \mathbf{P}_j sont égales à $d\vec{c}_j/d\psi$ (\vec{c}_j représentant la position du centre de gravité du $j^{\text{ème}}$ corps rigide), la matrice de raideur \mathbf{K}_W peut s'écrire

$$\mathbf{K}_W = -\sum_{j=1}^m \frac{d^2 \vec{c}_j^T}{d\psi^2} \vec{w}_j. \quad (4.24)$$

4.2.2 Matrice de raideur généralisée

En reprenant la dérivation de chacun des termes de l'équation (4.5), la matrice de raideur généralisée d'un MPC s'écrit de manière générale

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_W. \quad (4.25)$$

- **Cas où tous les éléments sont uniquement fonction de la configuration :** Sans utiliser les notations apportées dans ce chapitre, la matrice de raideur généralisée s'écrit

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_\psi + \frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\psi}} \vec{\tau}_\lambda + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} - \frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\psi}} \vec{f} + \mathbf{J}^T \mathbf{K}_x \mathbf{J} - \sum_{j=1}^m \frac{d\mathbf{P}_j^T}{d\vec{\psi}} \vec{w}_j. \quad (4.26)$$

Puisque $\vec{\tau}_M = \vec{0}$ lorsque le mécanisme est en équilibre statique et puisque tous les éléments dépendent uniquement de $\vec{\psi}$, on a toujours $d\vec{\tau}_M/d\vec{\psi} = \mathbf{0}$. C'est à dire que le mécanisme est toujours en équilibre statique et que la matrice de raideur généralisée est toujours nulle :

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

Ce cas est notamment celui des mécanismes statiquement équilibrés non actionnés (voir section 4.3.2).

- **Cas où l'effort n'est pas fonction de la configuration :** Sans utiliser les notations apportées dans ce chapitre, la matrice de raideur généralisée s'écrit :

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_\psi + \frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\psi}} \vec{\tau}_\lambda + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} - \frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\psi}} \vec{f} - \sum_{j=1}^m \frac{d\mathbf{P}_j^T}{d\vec{\psi}} \vec{w}_j. \quad (4.28)$$

Dans la suite de cette thèse, et en particulier dans la section suivante (sec. 4.2.3), on considère uniquement ce cas où les efforts externes ne dépendent pas de la configuration.

4.2.3 Matrices de raideur et de compliance complètes

Dans cette section, on cherche à caractériser la raideur du mécanisme dans l'espace des coordonnées cartésiennes lorsque l'effort extérieur est indépendant de la configuration ($\mathbf{K}_x = \mathbf{0}$ et $\mathbf{K}_u = \mathbf{0}$). Ces matrices de raideur et de compliance de dimension $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ peuvent être définies en utilisant les modèles cinématique et statique complets. Elles sont qualifiées de complètes et sont respectivement notées \mathbf{K}_U et \mathbf{C}_U .

Dans le repère lié à \vec{u} , l'équilibre statique (éq.(3.20)) s'écrit :

$$\vec{f}_u = \mathbf{H}^{-T} \left[\vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda - \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j \right] = \mathbf{H}^{-T} \vec{\sigma}, \quad (4.29)$$

où $\vec{\sigma} = \vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda - \sum \mathbf{P}_j^T \vec{w}_j$ et $\det(\mathbf{H}) \neq 0$, c'est-à-dire que la configuration du mécanisme n'est pas singulière. La matrice de raideur cartésienne complète du mécanisme est définie par

$$\mathbf{K}_U = \frac{d\vec{f}_u}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}}. \quad (4.30)$$

On peut donc la calculer en fonction des paramètres internes du mécanisme :

$$\mathbf{K}_U = \frac{d\mathbf{H}^{-T}}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}} \vec{\sigma} + \mathbf{H}^{-T} \frac{d\vec{\sigma}}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}}. \quad (4.31)$$

Sachant que $d\mathbf{H}^{-1}/d\vec{u}_{\mathfrak{M}} = -\mathbf{H}^{-1}(d\mathbf{H}/d\vec{u}_{\mathfrak{M}})\mathbf{H}^{-1}$, l'équation précédente est équivalente à

$$\mathbf{K}_U = \mathbf{H}^{-T} \left(-\frac{d\mathbf{H}^T}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}} \mathbf{H}^{-T} \vec{\sigma} + \frac{d\vec{\sigma}}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}} \right). \quad (4.32)$$

En utilisant l'équation (4.29) et la règle de la dérivation en chaîne, on a

$$\mathbf{K}_U = \mathbf{H}^{-T} \left(-\frac{d\mathbf{H}^T}{d\vec{\psi}} \vec{f}_u + \frac{d\vec{\sigma}}{d\vec{\psi}} \right) \frac{d\vec{\psi}}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}}. \quad (4.33)$$

Avec la définition de \mathbf{K}_E (éq.(4.21)), de $\vec{\sigma}$ (éq.(4.29)), de \mathbf{K}_ψ , de \mathbf{K}_I (éq.(4.12)), de \mathbf{K}_W (éq.(4.23)) et de \mathbf{H} (éq.(2.56)), cette dernière équation est équivalente à

$$\mathbf{K}_U = \mathbf{H}^{-T} (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_W) \mathbf{H}^{-1}. \quad (4.34)$$

C'est-à-dire qu'on a la relation suivante entre la matrice de raideur généralisée et la matrice de raideur cartésienne complète

$$\mathbf{K}_U = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{K}_M \mathbf{H}^{-1}. \quad (4.35)$$

De la même manière, puisque $\mathbf{K}_M = \mathbf{C}_M^{-1}$, la relation entre la matrice de compliance généralisée et la matrice de compliance complète s'écrit

$$\mathbf{C}_U = \mathbf{H} \mathbf{C}_M \mathbf{H}^T. \quad (4.36)$$

4.2.4 Matrices de raideur et de compliance cartésiennes

En pratique, lorsqu'on utilise un MPC dans un contexte de manipulation, on s'intéresse essentiellement à la pose \vec{x} de l'effecteur et à l'effort \vec{f} qui y est appliqué. La connaissance des coordonnées \vec{y} n'est généralement pas utile, le statut de ces données supplémentaires étant proche de celui de paramètre interne. Les efforts extérieurs \vec{f}_y sont quant à eux quasiment toujours nuls. Ainsi, en pratique, les seules caractéristiques cinétostatiques utiles sont la relation entre la variation de l'effort extérieur \vec{f} et la variation de la pose \vec{x} . C'est-à-dire la matrice de compliance cartésienne $\mathbf{C}_C = \partial \vec{f} / \partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}$ et son inverse.

Matrice de compliance cartésienne Sachant que $\mathbf{H}^T = [\mathbf{J}^T; \mathbf{I}^T]$, la matrice de compliance complète (éq. (4.36)) s'écrit

$$\mathbf{C}_U = \frac{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}}{d\vec{f}_u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}}{\partial \vec{f}} & \frac{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}}{\partial \vec{f}_y} \\ \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{f}} & \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{f}_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\mathbf{C}_M\mathbf{J}^T & \mathbf{J}\mathbf{C}_M\mathbf{I}^T \\ \mathbf{I}\mathbf{C}_M\mathbf{J}^T & \mathbf{I}\mathbf{C}_M\mathbf{I}^T \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Parmi les blocs qui composent \mathbf{C}_U , on retrouve une matrice qui semble correspondre à la matrice de compliance cartésienne, celle-ci est notée \mathbf{C}_C^* :

$$\mathbf{C}_C^* = \frac{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}}{\partial \vec{f}} = \mathbf{J}\mathbf{C}_M\mathbf{J}^T. \quad (4.38)$$

Dans cette équation (4.38), on constate que la matrice \mathbf{C}_C^* n'est fonction que de \mathbf{J} et de \mathbf{C}_M , elle ne dépend donc pas du choix de coordonnées \vec{y} puisque celles-ci n'apparaissent pas directement dans sa définition. De plus, le vecteur \vec{f} étant un sous-ensemble de coordonnées du vecteur $\vec{f}_u = [\vec{f}^T; \vec{f}_y^T]^T$, la dérivation partielle par rapport à $d\vec{f}$ se calcule en considérant $\partial \vec{f}_y = \vec{0}$. Ainsi, la matrice de compliance \mathbf{C}_C^* correspond à la relation recherchée dans un contexte de manipulation, c'est-à-dire celle qui donne le lien entre $d\vec{f}$ et $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ lorsque \vec{f}_y est constant :

$$\mathbf{C}_C^* = \mathbf{J}\mathbf{C}_M\mathbf{J}^T = \mathbf{C}_C. \quad (4.39)$$

Matrice de raideur cartésienne En utilisant l'inverse de la matrice jacobienne complète $\mathbf{H}^{-1} = [\mathbf{J}^\dagger; \mathbf{I}^\dagger]$ (éq. 2.58), la matrice de raideur complète s'écrit

$$\mathbf{K}_U = \frac{d\vec{f}_u}{d\vec{u}_{\mathfrak{M}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \\ \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}} & \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_U^{xx} & \mathbf{K}_U^{xy} \\ \mathbf{K}_U^{yx} & \mathbf{K}_U^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{\dagger T}\mathbf{K}_M\mathbf{J}^\dagger & \mathbf{J}^{\dagger T}\mathbf{K}_M\mathbf{I}^\dagger \\ \mathbf{I}^{\dagger T}\mathbf{K}_M\mathbf{J}^\dagger & \mathbf{I}^{\dagger T}\mathbf{K}_M\mathbf{I}^\dagger \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

On retrouve donc parmi les blocs qui la composent, une matrice qui semble correspondre à la définition de la matrice de raideur cartésienne, celle-ci est notée \mathbf{K}_C^* :

$$\mathbf{K}_C^* = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}} = \mathbf{J}^{\dagger T}\mathbf{K}_M\mathbf{J}^\dagger. \quad (4.41)$$

Cependant, puisque $\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}$ est un sous-ensemble des coordonnées du vecteur $d\vec{u}_{\mathfrak{M}} = [d\vec{x}_{\mathfrak{F}}^T; d\vec{y}^T]^T$, la matrice \mathbf{K}_C^* correspond à la variation de l'effort extérieur résultant d'une variation de pose lorsque les coordonnées \vec{y} ne varient pas. Cette situation est

difficilement imaginable pour un MPC, puisque les coordonnées \vec{u} —qui sont cinématiquement indépendantes les unes des autres—, sont en réalité statiquement dépendantes. Seuls les paramètres extérieurs \vec{f}_u et $\vec{\phi}$ sont contrôlables indépendamment les uns des autres. La matrice \mathbf{K}_C^* ne correspond donc pas à la matrice de raideur cartésienne recherchée.

Matrice de raideur cartésienne où $d\vec{y} \neq \vec{0}$: Il est possible calculer la matrice de raideur cartésienne qui détermine « en interne » les valeurs $d\vec{y}$ à partir de $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$. La valeur $d\vec{f}_y$ résultant d'un déplacement de l'effecteur $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ et qui agit sur les coordonnées \vec{y} peut être calculée grâce au troisième bloc de la matrice \mathbf{K}_U noté \mathbf{K}_U^{yx} :

$$d\vec{f}_y = \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}} d\vec{x}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{K}_U^{yx} d\vec{x}_{\mathfrak{F}}. \quad (4.42)$$

Cette variation $d\vec{f}_y$ appliquée sur les coordonnées \vec{y} produit un déplacement $-d\vec{y}$, déterminé grâce au quatrième bloc \mathbf{K}_U^{yy} par la relation suivante :

$$d\vec{y} = -\mathbf{K}_U^{yy-1} d\vec{f}_y = -\mathbf{K}_U^{yy-1} \mathbf{K}_U^{yx} d\vec{x}_{\mathfrak{F}}. \quad (4.43)$$

Et enfin, à partir des déplacements $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ et $d\vec{y}$ regroupés dans le vecteur $d\vec{u}_{\mathfrak{M}}$, on peut déterminer la variation de l'effort $d\vec{f}$ grâce aux deux premiers blocs de la matrice \mathbf{K}_U . Cela s'écrit

$$d\vec{f} = [\mathbf{K}_C^*; \mathbf{K}_U^{xy}] d\vec{u} = [\mathbf{K}_C^*; \mathbf{K}_U^{xy}] \begin{bmatrix} d\vec{x}_{\mathfrak{F}} \\ d\vec{y} \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Ainsi, en considérant que le déplacement des coordonnées \vec{y} est uniquement dû au déplacement de l'effecteur. On peut utiliser l'équation (4.43) et obtenir

$$d\vec{f} = \left[\mathbf{K}_C^* - \mathbf{K}_U^{xy} \mathbf{K}_U^{yy-1} \mathbf{K}_U^{yx} \right] d\vec{x}_{\mathfrak{F}}. \quad (4.45)$$

Cette matrice de raideur cartésienne est différente de la matrice \mathbf{K}_C^* . Elle correspond à celle que l'on doit utiliser dans un contexte de manipulation pour décrire la variation de l'effort extérieur résultant d'une variation de la pose —sans considérer en détail la configuration \vec{y} et en s'assurant que l'effort \vec{f}_y reste constant (a fortiori nul). Cette matrice est notée \mathbf{K}_C et s'écrit

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{K}_C^* - \mathbf{K}_U^{xy} \mathbf{K}_U^{yy-1} \mathbf{K}_U^{yx} \neq \mathbf{K}_C^*. \quad (4.46)$$

Puisque cette matrice correspond à une dérivation par rapport à $d\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ en considérant $d\vec{f}_y = \vec{0}$, on peut définir la matrice \mathbf{K}_C comme

$$\mathbf{K}_C = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}} \text{ avec } \partial \vec{x}_{\mathfrak{F}} \subset d\vec{\eta} = \left[\partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}^T; \partial \vec{f}_y^T \right]^T, \quad (4.47)$$

où le symbole \subset signifie que le vecteur $\partial\vec{x}_{\mathfrak{F}}$ est composé d'un sous-ensemble de coordonnées de $d\vec{\eta}$. $\vec{\eta}$ étant un vecteur de \mathfrak{M} paramètres géométriques et statiques indépendants qui permettent une description complète de la configuration du mécanisme.

Relation entre les matrices cartésiennes On remarque que la matrice \mathbf{K}_C (éq.(4.46)) —de dimension $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ — est égale au complément de Schur de la matrice \mathbf{K}_U . La matrice \mathbf{C}_U étant l'inverse de cette matrice \mathbf{K}_U , le bloc supérieur gauche de dimension $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ de cette matrice est égal à l'inverse de ce complément de Schur. On a donc la relation suivante :

$$\mathbf{K}_C = (\mathbf{C}_C^*)^{-1} = (\mathbf{J}\mathbf{C}_M\mathbf{J}^T)^{-1} = (\mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}. \quad (4.48)$$

On constate donc que la matrice de raideur cartésienne définie à l'équation (4.46) n'est pas dépendante du choix des coordonnées \vec{y} et correspond bien à la matrice recherchée. Enfin, lorsqu'aucun effort n'est appliqué sur les coordonnées \vec{y} , on a la relation suivante entre les matrices de raideur et de compliance cartésiennes :

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{C}_C^{-1} = (\mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1}, \quad \text{quand } \vec{f}_y = \vec{0}. \quad (4.49)$$

Cas où $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$: Dans les cas où il n'y a pas de mobilité interne au mécanisme, les coordonnées indépendantes \vec{y} n'existent pas. On considère donc que $\vec{y} = \emptyset$ et beaucoup de simplifications peuvent être effectuées. Pour les matrices jacobienes, on a $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{J}^\dagger = \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{J}_p^{-1} = \mathbf{J}^{-1}$, pour les matrices de compliance $\mathbf{C}_U = \mathbf{C}_C^* = \mathbf{C}_C$ et pour les matrices de raideur $\mathbf{K}_U = \mathbf{K}_C^* = \mathbf{K}_C$. Ainsi, lorsque $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, la matrice \mathbf{J} est carrée, et lorsqu'elle n'est pas singulière, la matrice de raideur d'un MPC peut s'écrire sous une forme bien connue dans la littérature :

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{K}_M\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_W)\mathbf{J}^{-1} \text{ ssi } \det \mathbf{J} \neq 0. \quad (4.50)$$

La matrice de compliance cartésienne étant définie par $\mathbf{J}\mathbf{C}_M\mathbf{J}^T$, on a la relation suivante avec la matrice de raideur

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{C}_C^{-1}. \quad (4.51)$$

4.3 Propriétés de la matrice de raideur

4.3.1 Contribution de chacune des matrices

Matrice \mathbf{K}_ψ : Elle représente la raideur due aux articulations géométriquement libres, qui incluent en particulier les articulations actionnées.

- Lorsque certains degrés de mobilité sont ajoutés dans le modèle pour le rendre plus conforme à la réalité, la matrice \mathbf{K}_ψ est composée des coefficients de raideur des actionneurs $\vec{\phi}$ et des raideurs des articulations passives géométriquement libres notées $\vec{\psi}$. On peut utiliser deux matrices de sélection \mathbf{A} et \mathbf{B} (composées de uns et de zéros) pour écrire \mathbf{K}_ψ en fonction des deux matrices de raideurs carrées \mathbf{K}_ϕ et \mathbf{K}_ψ composées par les coefficients de raideur des actionneurs $\vec{\phi}$ et des articulations libres et non actionnées $\vec{\psi}$. L'intérêt de cette formulation étant de faire apparaître \mathbf{K}_ϕ^* , la matrice de raideur due aux actionneurs dans l'espace des coordonnées généralisées. Cette dernière est de dimension $\mathfrak{M} \times \mathfrak{A}$.

$$\mathbf{K}_\psi = \mathbf{A}\mathbf{K}_\phi + \mathbf{B}\mathbf{K}_\psi = \mathbf{K}_\phi^* + \mathbf{K}_\psi^* \quad (4.52)$$

Cette formulation est utile lors de la modélisation quasi-statique d'un MPC développée au chapitre 5.

- Lorsque toutes les coordonnées généralisées sont actionnées, on a $\mathbf{K}_\psi = \mathbf{K}_\phi$, la matrice \mathbf{K}_ψ est alors une matrice de raideur diagonale composée des coefficients de raideur de chacun des actionneurs.

Matrice \mathbf{K}_I : Cette matrice représente l'effet de la raideur des articulations géométriquement contraintes et des efforts internes. L'apport de la matrice $\mathbf{G}^T\mathbf{K}_\lambda\mathbf{G}$ dans la matrice \mathbf{K}_M , c'est-à-dire la contribution de la raideur des articulations λ_j à la raideur globale du mécanisme est simple à comprendre et le fait que leur répartition se fasse par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{G} aussi. Par contre, la signification physique de la *raideur active interne* \mathbf{K}_{IG} est moins évidente. Elle permet de calculer l'effet d'une modification des contraintes géométriques sur la répartition des efforts internes et donc sur l'équilibre statique du mécanisme.

La matrice \mathbf{K}_I apparaît (c'est-à-dire est non nulle) uniquement si les raideurs des articulations géométriquement contraintes ne sont pas nulles ou considérées comme

telles. En effet, si $\mathbf{K}_\lambda = \mathbf{0}$, alors nécessairement $\mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} = \mathbf{0}$, et d'après l'équation (3.21), $\vec{\tau}_\lambda = \vec{0}$, donc $\mathbf{K}_{IG} = \mathbf{0}$. Les efforts internes ne peuvent évidemment exister dans un MPC en équilibre statique que lorsque les articulations λ ont des raideurs non nulles puisque lorsqu'une articulation compliant est chargée et donc déformée, c'est sa raideur qui produit en réaction, l'effort permettant l'équilibre. Une articulation avec une raideur nulle soumise à un effort subira une accélération, elle ne sera pas en équilibre statique.

Enfin, il est parfois intéressant de noter que le vecteur $\mathbf{G}^T \vec{\tau}_\lambda$ est la somme des vecteurs $\mathbf{G}_j^T \vec{\tau}_{\lambda_j}$ qui représentent chacun l'effet d'une articulation λ_j isolée sur l'équilibre statique. Ainsi, on peut aussi voir la matrice \mathbf{K}_I comme la somme des matrices associées à chacune des articulations géométriquement contraintes :

$$\mathbf{K}_I = \sum_{j=1}^c \mathbf{K}_{Ij}. \quad (4.53)$$

Matrice \mathbf{K}_E : Cette matrice représente l'effet de l'effort appliqué à l'effecteur sur l'équilibre statique du mécanisme. Lorsque l'effort extérieur est indépendant de la pose de l'effecteur, la matrice \mathbf{K}_E est égale à l'opposée de la matrice \mathbf{K}_G présentée dans [18]. C'est également la somme des matrices de raideur dues à chacun des composants de \vec{f} .

$$\mathbf{K}_E = \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \mathbf{K}_{Ej} = \sum_{j=1}^{\tilde{s}} \left(-\frac{\partial^2 x_{\tilde{s}j}}{\partial \psi^2} f_j \right) \text{ avec } \vec{f} = [f_1; \dots; f_{\tilde{s}}]^T. \quad (4.54)$$

Lorsque des efforts sont appliqués sur les coordonnées \vec{y} , on a

$$\mathbf{K}_E = \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}} \mathbf{K}_{Ej} = \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}} \left(-\frac{\partial^2 u_{\mathfrak{m}j}}{\partial \psi^2} f_{uj} \right) \text{ avec } \vec{f}_u = [f_1; \dots; f_{\mathfrak{m}}]^T. \quad (4.55)$$

Matrice \mathbf{K}_W : Tout comme \mathbf{K}_E pour \vec{f} et \mathbf{K}_{IG} pour $\vec{\tau}_\lambda$, cette matrice de raideur active permet de capturer l'effet d'une variation de configuration sur la contribution du poids des corps rigides à l'équilibre statique du mécanisme.

4.3.2 Généralisation des matrices de raideur existantes

La matrice de raideur des mécanismes parallèles compliant est une généralisation des matrices de raideur existantes dans la littérature.

Mécanisme sériel sans effort extérieur En 1980, dans [81], Salisbury a proposé la première formulation de la matrice de raideur cartésienne d'un mécanisme sériel. Celle-ci s'écrivait

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_\psi \mathbf{J}^{-1}. \quad (4.56)$$

Cette formulation a ensuite été étendue dans [31, 64] aux mécanismes parallèles dont seules les raideurs des actionneurs étaient prises en compte (pas de raideur dans les articulations passives). On le constate en comparant l'équation (4.56) à l'équation (4.35), la matrice proposée par Salisbury, qui se voulait générale, est en réalité un cas très particulier où :

- La matrice \mathbf{J} est carrée et inversible. C'est-à-dire qu'il n'y a pas de mobilité interne au mécanisme ($\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$) et que le mécanisme n'est pas dans une configuration cinématiquement singulière.
- La matrice \mathbf{K}_I est nulle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'articulations géométriquement contraintes (mécanismes sériels) ou que les raideurs de ces articulations sont toutes nulles (articulations passives non-compliantes).
- La matrice \mathbf{K}_W est nulle, c'est-à-dire que le poids des membrures n'est pas pris en compte.
- La matrice \mathbf{K}_E est nulle, c'est-à-dire que l'effort appliqué à l'effecteur n'est pas pris en compte.

C'est notamment ce dernier point qui pose problème puisque cela signifie que cette matrice n'est valable que pour une seule configuration : lorsque le mécanisme n'est pas chargé. Dès que la moindre force $d\vec{f}$ est appliquée au mécanisme, celui-ci se déforme d'un $d\vec{x}$ et la charge au niveau de l'effecteur devient $\vec{f} = \vec{0} + d\vec{f}$ et donc la formulation de Salisbury n'est plus correcte. Même si l'erreur est minime pour de faibles valeurs de \vec{f} , elle limite l'application de cette matrice.

Lorsqu'on regarde la démonstration de Salisbury, on comprend d'où vient cette approximation. Le calcul de la matrice de raideur cartésienne s'appuie sur les deux équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} \delta\vec{x} &= \mathbf{J}\delta\vec{\psi} \\ \vec{f} &= \mathbf{K}_C\delta\vec{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

où $\delta\vec{\psi}$ représente un petit déplacement des coordonnées généralisées et $\delta\vec{x}$ un petit déplacement de l'effecteur dans la première équation et un petit écart de pose dans la seconde équation. Lorsque les deux équations sont utilisées ensemble, un petit écart et un petit déplacement sont injustement considérés équivalents et donc, la seconde équation devient incohérente : alors qu'à gauche l'effort extérieur est constant, le membre

de droite indique que l'effecteur se déplace ! Il est intéressant d'avoir à l'esprit que cette erreur est très fréquente, elle peut notamment survenir lorsqu'on écrit la loi de Hooke $f = k\Delta x$ au lieu de $\Delta f = k\Delta x$. Ces deux équations étant équivalentes uniquement si $f_0 = 0$ lorsque $\Delta x = 0$. Enfin, il faut savoir que cette matrice $\mathbf{J}^{-T}\mathbf{K}_\psi\mathbf{J}^{-1}$ est encore très utilisée de nos jours. Pas seulement pour sa simplicité et le fait qu'elle soit relativement correcte pour de petits efforts, mais aussi parce que les corrections qui lui ont été apportées par la suite ne sont pas encore suffisamment diffusées.

Mécanisme soumis à un effort extérieur En 1993, Griffis et Duffy [34] proposent grâce à la théorie des visseurs une matrice de raideur cartésienne qui prend en compte l'effet des efforts extérieurs. En 2000, Chen et Kao [18,44,61] dérivent l'équilibre statique et corrigent à leur tour la matrice de Salisbury. Ils insistent sur l'apport de la matrice \mathbf{K}_E qui permet de rapporter l'effet de l'effort extérieur et de respecter la conservativité du système. Ces matrices de raideur cartésiennes s'écrivent

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{J}^{-T} \left(\mathbf{K}_\psi - \frac{d\mathbf{J}^T}{d\psi} \vec{f} \right) \mathbf{J}^T = \mathbf{J}^{-T} (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_E) \mathbf{J}^T. \quad (4.58)$$

Lorsque la gravité n'est pas prise en compte, cette matrice de raideur est correcte pour les mécanismes sériels quelle que soit la valeur de l'effort extérieur \vec{f} . Elle est également correcte pour les mécanismes parallèles, pourvu que les articulations passives aient une raideur nulle (c'est-à-dire que $\mathbf{K}_I = \mathbf{0}$). Elle n'est donc pas adaptée aux mécanismes parallèles compliant.

Mécanisme avec une patte contraignante Dans [94], Zhang propose un modèle *cinétostatique* des mécanismes parallèles avec une patte contraignante. Le terme cinétostatique correspondant simplement à une étude de la compliance globale de ces mécanismes composés de \mathbf{p} pattes identiques à six ddl et d'une patte à \mathbf{p} ddl contraignant le mouvement de la plate-forme. La figure 4.1 présente un de ces mécanismes à cinq pattes identiques à six ddl et une patte contraignante à cinq ddl. Dans ce travail, des articulations virtuelles et donc des mobilités additionnelles ont été utilisées pour représenter la compliance de la patte centrale dans les directions où elle contraint le mouvement. La matrice de raideur cartésienne proposée pour ces mécanismes dans [93–95] s'écrit

$$\mathbf{K}_C = (\mathbf{J}'_{n+1})^{-T} \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{J}'_{n+1})^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{K}_J \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}. \quad (4.59)$$

Dans cette équation, les matrices suivantes sont utilisées :

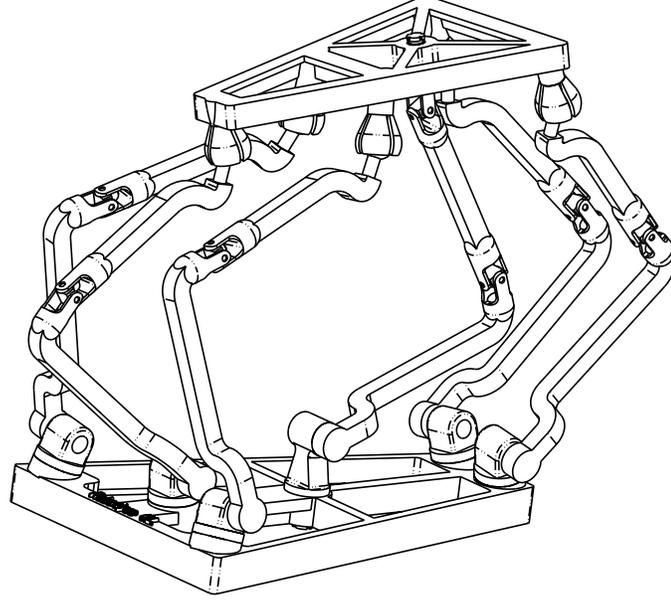


FIG. 4.1 – Mécanisme à 5 ddl avec une patte contraignante (Tiré de [94])

- \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices jacobiennes permettant de déterminer la matrice jacobienne du mécanisme par la relation suivante : $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.
- \mathbf{K}_J est la matrice de raideur des actionneurs. Elle correspond à \mathbf{K}_ψ .
- \mathbf{K}_{n+1} est la matrice de raideur de la patte passive. C'est une matrice diagonale avec \mathbf{p} coefficients de raideur nuls (les articulations réelles) et $6 - \mathbf{p}$ coefficients de raideur non nuls. Si les six articulations réelles et virtuelles de la patte passive sont regroupées dans un vecteur $\vec{\lambda}_p$, la matrice \mathbf{K}_{n+1} peut alors être renommée \mathbf{K}_{λ_p} .
- \mathbf{J}'_{n+1} est la matrice jacobienne de la patte passive considérée comme un mécanisme sériel à six ddl : \mathbf{p} articulations réelles et $6 - \mathbf{p}$ ressorts virtuels. Cette matrice jacobienne peut être calculée comme suit

$$\mathbf{J}'_{n+1} = \frac{d\vec{x}_{\mathcal{F}}}{d\vec{\lambda}_p} = \frac{d\vec{x}_{\mathcal{F}}}{d\vec{\psi}} \frac{d\vec{\psi}}{d\vec{\lambda}_p} = \mathbf{J}\mathbf{G}_p^{-1}, \quad (4.60)$$

où la matrice \mathbf{G}_p est inversible puisqu'elle est de rang plein 6×6 .

Ainsi en modifiant les notations, l'équation (4.59) peut s'écrire

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{J}^{-T} \left(\mathbf{G}_p^T \mathbf{K}_{\lambda_p} \mathbf{G}_p + \mathbf{K}_\psi \right) \mathbf{J}^{-1}. \quad (4.61)$$

Toutes les autres articulations passives du mécanisme formant le vecteur $\vec{\lambda}$ ayant une raideur nulle, il est évident que $\mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} = \mathbf{G}_p^T \mathbf{K}_{\lambda_p} \mathbf{G}_p$. Enfin, comme la matrice de Salisbury en 1980, la matrice proposée par Zhang ne prend pas en compte l'effort extérieur. Elle ne prend également pas en compte l'effet des efforts internes (matrice \mathbf{K}_{IG}).

L'absence de ces deux matrices de raideur active limite donc le champ d'application de ce travail. On constate bien, cependant, que la matrice proposée par Zhang est encore un cas particulier de la matrice de raideur cartésienne des MPC présentée dans cette thèse.

Mécanisme statiquement équilibré Dans [58], Laliberté et Gosselin utilisent des ressorts et/ou des contrepoids pour équilibrer statiquement des mécanismes parallèles. La matrice de raideur de ces mécanismes n'y est pas explicitement formulée. Cependant, leur approche étant de rendre constante l'énergie potentielle afin que l'équilibre statique soit toujours vérifié, d'intéressantes relations apparaissent entre les matrices composant \mathbf{K}_M . Lorsque des contrepoids sont utilisés, la somme des effets des poids des membrures et des contrepoids est constante. On a donc

$$\mathbf{K}_W = \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

Lorsque des ressorts sont utilisés, la somme de l'énergie élastique emmagasinée dans les ressorts et de l'énergie potentielle de gravité due au poids des membrures est constante. La déformation de ces ressorts étant fonction de la configuration du mécanisme, leurs longueurs et angles peuvent être regroupés dans un vecteur $\vec{\lambda}_S$. La somme des matrices de raideur correspondantes est alors toujours nulle

$$\mathbf{K}_{IS} + \mathbf{K}_W = \mathbf{0}, \quad (4.63)$$

où \mathbf{K}_{IS} est la matrice de raideur due aux raideurs des ressorts d'équilibrage.

Mécanisme conventionnel Lorsqu'on utilise un mécanisme conventionnel, on attend de celui-ci que sa position ne varie pas en fonction des efforts extérieurs ou de son poids. La raideur due à ces efforts doit être négligeable devant la puissance des actionneurs. Si ce mécanisme est parallèle, la raideur des articulations passives doit également être négligeable devant celle des actionneurs. Les hypothèses sur les importances négligeables du poids, des efforts extérieurs et de la raideur des articulation passives sont équivalentes à dire que la plus petite raideur propre linéaire et la plus petite raideur propre en torsion de la matrice de raideur due aux actionneurs sont toujours beaucoup plus élevées que les plus grandes raideurs propres linéaire et en torsion de la matrice

de raideur dues à tous les autres éléments. Cela s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\text{lin max}}(\mathbf{K}_W + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_I) \lll \gamma_{\text{lin min}}(\mathbf{K}_\psi) \\ \text{et} \\ \gamma_{\text{tor max}}(\mathbf{K}_W + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_I) \lll \gamma_{\text{tor min}}(\mathbf{K}_\psi) \end{array} \right. \quad (4.64)$$

où $\gamma_{\text{lin min}}$ et $\gamma_{\text{tor min}}$ représentent les raideurs propres linéaires et en torsion minimales (respectivement maximales) de la matrice entre parenthèse. Si on intègre ces hypothèses simplificatrices dans le calcul de la matrice de raideur cartésienne d'un MPC, on constate que la raideur généralisée du mécanisme est égale à celle de ces actionneurs. Si, de plus, on considère que ces actionneurs sont parfaitement rigides, c'est-à-dire que les valeurs propres de \mathbf{K}_ψ tendent vers l'infini, alors le mécanisme est rigide (pour peu que le mécanisme soit pleinement actionné).

$$\gamma_i(\mathbf{K}_M) \approx \gamma_i(\mathbf{K}_\psi) \rightarrow \infty, \quad \forall i \in \{1, \dots, \mathfrak{M}\}. \quad (4.65)$$

4.3.3 Conservativité et symétrie

Les propriétés de la matrice de raideur d'un mécanisme **sans articulation passive** compliant sont abondamment discutées dans la littérature [12, 16, 17, 19, 22, 23, 38, 56, 85, 91]. Cette matrice, notée \mathbf{K}_C^0 , s'écrit

$$\mathbf{K}_C^0 = \mathbf{J}^{-T} (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_E) \mathbf{J}^{-1} = \left(\mathbf{J} (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_E)^{-1} \mathbf{J}^T \right)^{-1}. \quad (4.66)$$

Au sein de \mathbf{K}_C^0 , la matrice \mathbf{K}_ψ est symétrique par définition et la matrice \mathbf{K}_E ne l'est que lorsqu'elle est décrite dans une base de coordonnées, c'est-à-dire respectant le théorème de Schwarz. Par exemple pour un mécanisme plan à 2 ddl, la matrice \mathbf{K}_E est symétrique lorsque les coordonnées cartésiennes (x, y) sont utilisées alors qu'elle ne l'est pas lorsque les coordonnées polaires (r, ϑ) le sont [60]. Dans un mécanisme spatial, puisque qu'aucune base de coordonnées ne peut décrire un mécanisme à 6 ddl, la matrice \mathbf{K}_E n'est pas symétrique. De plus, même si la matrice de raideur cartésienne \mathbf{K}_C^0 peut être non symétrique, elle est conservative [17, 18, 44, 50, 61].

La matrice \mathbf{K}_I est définie comme la matrice hessienne de l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans les articulations $\boldsymbol{\lambda}$ et la matrice \mathbf{K}_W comme la matrice hessienne de l'énergie potentielle de gravité du mécanisme. Ces dérivations se faisant par rapport aux coordonnées généralisées $\boldsymbol{\psi}$ qui forment une base de coordonnées, \mathbf{K}_I et \mathbf{K}_W

sont symétriques et conservatives. Ainsi, \mathbf{K}_M , égale à la somme de \mathbf{K}_ψ , \mathbf{K}_E , \mathbf{K}_I et \mathbf{K}_W possède les mêmes propriétés de symétrie et de conservativité que \mathbf{K}_E . En outre, le fait que \mathbf{J} soit carrée ou non n'a pas d'influence sur la symétrie et la conservativité de \mathbf{K}_C . Cette dernière a donc les mêmes propriétés que la matrice \mathbf{K}_C^0 .

4.3.4 Critère de positivité de la matrice

4.3.4.1 Utilité de cette propriété

Dans la littérature, il est parfois dit qu'une matrice de raideur doit être définie positive, mais un simple contre-exemple permet de démontrer que ça n'est pas toujours le cas (voir l'exemple à la section 4.3.4.2). En fait, comme une matrice de raideur provient de la dérivation d'un équilibre statique, sa positivité est fonction de la stabilité de cet équilibre statique (ou inversement). Une matrice de raideur est définie positive lorsque toutes ses valeurs propres —ou « coefficient de raideur propre »— sont strictement positives. Dans ce cas, la configuration adoptée par le mécanisme est stable. Une matrice de raideur peut avoir des valeurs propres négatives et dans ce cas, l'équilibre du mécanisme est instable par rapport à ces coordonnées. Enfin, il est possible que certaines valeurs propres soient nulles. On ne se situe alors ni dans un minimum, ni dans un maximum d'énergie potentielle et on ne peut pas conclure quant à la stabilité de l'équilibre. On parle dans ce cas de *catastrophe* [12, 13, 69, 90]. La possibilité de basculer entre deux états stables d'équilibre statique, c'est-à-dire deux zones où la matrice de raideur est définie positive, en passant par un point où elle ne l'est pas est utilisée dans certains MPC. On les qualifie alors de *mécanismes bistables*.

4.3.4.2 Exemple

Pour illustrer les différents cas de stabilité d'un mécanisme, le 2-RP est étudié dans la configuration présentée à la figure 4.2. Cette configuration est en équilibre statique.

Dans cet exemple, les matrices de raideur cartésienne et généralisée peuvent être déterminées symboliquement et ainsi illustrer la propriété de positivité ou non, selon la stabilité de l'équilibre.

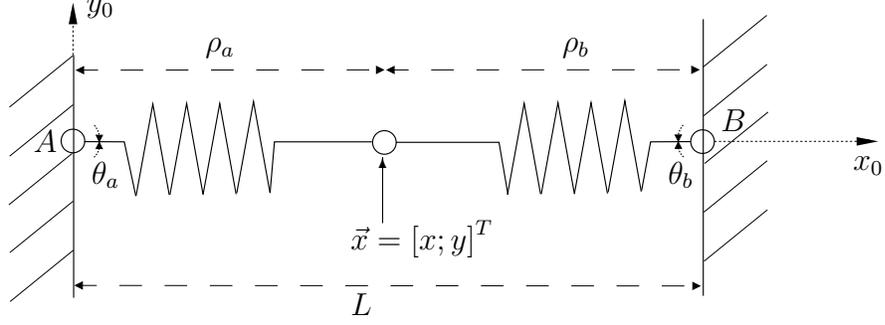


FIG. 4.2 – Mécanisme parallèle à 2 ddl en équilibre statique.

Paramètres du mécanisme Les variables articulaires sont θ_a , θ_b , ρ_a et ρ_b , la pose de la plate-forme est décrite par le vecteur $\vec{x} = [x; y]^T$. Les deux points d'attache des pattes, notés A et B , sont définis par les vecteurs $\vec{a} = [0; 0]^T$ et $\vec{b} = [L; 0]^T$. Les articulations rotoïdes ne sont pas compliantes alors que les deux articulations prismatiques sont compliantes et identiques, la longueur libre des ressorts linéaires équivalents est notée ρ_0 et leur raideur, k_ρ . Dans la configuration présentée à la figure 4.2, la valeur des paramètres est : $\theta_a = 0$, $\theta_b = \pi$, $\rho_a = \rho_b = L/2$ et il n'y a pas d'effort extérieur ($\vec{f} = \vec{0}$).

Pose de l'effecteur Les coordonnées de la patte a sont arbitrairement choisies comme coordonnées généralisées et sont notées $\vec{\psi}$. Ainsi, la pose et la matrice jacobienne peuvent être exprimées comme

$$\vec{x} = \begin{cases} \rho_a \cos \theta_a \\ \rho_a \sin \theta_a \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\rho_a \sin \theta_a & \cos \theta_a \\ \rho_a \cos \theta_a & \sin \theta_a \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Contraintes géométriques Les deux articulations géométriquement contraintes, notées $\vec{\lambda}$, sont θ_b et ρ_b . Les contraintes correspondant au respect de la géométrie de la plate-forme sont écrites comme

$$\vec{x}_a - \vec{x}_b = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_a \cos \theta_a - (\rho_b \cos \theta_b + L) = 0 \\ \rho_a \sin \theta_a - \rho_b \sin \theta_b = 0 \end{cases}. \quad (4.68)$$

La solution retenue pour l'équation précédente est la suivante

$$\rho_b = \sqrt{\rho_a^2 - 2\rho_a L \cos \theta_a + L^2}, \quad \theta_b = \arctan \left(\frac{\rho_a \sin \theta_a}{\rho_b}, \frac{\rho_a \cos \theta_a}{\rho_b} \right). \quad (4.69)$$

Contraintes cinématiques Avec la solution précédente, la matrice \mathbf{G} définie à l'équation (2.27) peut être obtenue en dérivant les contraintes géométriques. \mathbf{G} s'écrit

$$\mathbf{G} = \frac{d\vec{\lambda}}{d\vec{\psi}} = \begin{bmatrix} \frac{-(\cos \theta_a L - \rho_a)\rho_a}{\rho_a^2 - 2\rho_a L \cos \theta_a + L^2} & \frac{-\sin \theta_a L}{\rho_a^2 - 2\rho_a L \cos \theta_a + L^2} \\ \frac{\rho_a \sin \theta_a L}{\sqrt{\rho_a^2 - 2\rho_a L \cos \theta_a + L^2}} & \frac{-(\cos \theta_a L - \rho_a)}{\sqrt{\rho_a^2 - 2\rho_a L \cos \theta_a + L^2}} \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Vecteurs de couple/force La force associée à l'articulation compliant passive ρ_b est $\tau_\rho = k_\rho(\rho_b - \rho_0)$.

Matrice de raideur due aux articulations passives Les quatre coefficients de la matrice \mathbf{K}_{IK} , définie par $\mathbf{K}_{IK} = \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G}$, peuvent être calculés symboliquement :

$$(\mathbf{K}_{IK})_{1,1} = \frac{\rho_a^2 \sin^2 \theta_a L^2 k_\rho}{\rho_b^2}, \quad (\mathbf{K}_{IK})_{2,2} = \frac{(\cos \theta_a L - \rho_a)^2 k_\rho}{\rho_b^2}, \quad (4.71)$$

$$(\mathbf{K}_{IK})_{1,2} = (\mathbf{K}_{IK})_{2,1} = \frac{\rho_a \sin \theta_a L k_\rho (\cos \theta_a L - \rho_a)}{\rho_b^2}. \quad (4.72)$$

Les quatre coefficients de la matrice \mathbf{K}_{IG} , définie à l'équation (4.10), peuvent également être déterminés analytiquement :

$$(\mathbf{K}_{IG})_{1,1} = -\frac{\rho_a^2 \sin^2 \theta_a L^2 \tau_\rho}{\rho_b^3} + \frac{\rho_a \cos \theta_a L \tau_\rho}{\rho_b}, \quad (4.73)$$

$$(\mathbf{K}_{IG})_{1,2} = (\mathbf{K}_{IG})_{2,1} = \frac{\sin \theta_a L \tau_\rho}{\rho_b} + \frac{(\cos \theta_a L - \rho_a) \tau_\rho \rho_a \sin \theta_a L}{\rho_b^3}, \quad (4.74)$$

$$(\mathbf{K}_{IG})_{2,2} = \frac{\tau_\rho}{\rho_b} + \frac{(\cos \theta_a L - \rho_a) \tau_\rho}{2\rho_b^2}. \quad (4.75)$$

Matrice de raideur généralisée En l'absence d'effort extérieur et de gravité, la matrice de raideur généralisée \mathbf{K}_M s'écrit

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_{IK} + \mathbf{K}_{IG}, \quad \text{avec } \mathbf{K}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_\rho \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Critère de positivité de la matrice de raideur Dans la configuration présentée à la figure 4.2, on a $\cos \theta_a = 1$, $\sin \theta_a = 0$ et $\rho_a = \rho_b = L/2$ de telle sorte que $\tau_b = k_\rho(L/2 - \rho_0)$. Ainsi les matrices \mathbf{K}_M et \mathbf{J} ne deviennent fonction que de trois paramètres seulement, en l'occurrence k_ρ , L et ρ_0 . Ces matrices s'écrivent

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} k_\rho L(\frac{1}{2}L - \rho_0) & 0 \\ 0 & 2k_\rho \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L/2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Donc la matrice de raideur cartésienne (éq.(4.50)) est

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} 2k_\rho & 0 \\ 0 & 2k_\rho(L - 2\rho_0)/L \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

En regardant les deux matrices de raideur, on constate immédiatement qu'elle sont toujours positives selon la coordonnée cartésienne x pour \mathbf{K}_C et selon la coordonnée généralisée ρ_a pour \mathbf{K}_M . En revanche, la positivité de la seconde valeur propre selon y et θ_a dépend de la valeur ρ_0 .

La signification physique du critère de positivité d'une matrice de raideur devient ici évidente. Lorsque les deux ressorts sont en tension, c'est-à-dire que $\rho_0 < L/2$ alors le mécanisme est dans un équilibre stable, tant selon l'axe (Ax_0) que (Ay_0) . Lorsque les ressorts sont au repos, c'est-à-dire que $\rho_0 = L/2$ et les matrices \mathbf{K}_M et \mathbf{K}_C sont semi-définies positives, l'équilibre est dégénéré : il n'est ni stable, ni instable selon la coordonnée y . Ce qui signifie que selon l'axe (Oy_0) , le mécanisme n'opposera localement pas de résistance à un changement de configuration, mais qu'il n'aura pas non plus tendance à s'éloigner de celle-ci. Enfin, lorsque les ressorts sont en compression, c'est-à-dire que $\rho_0 > L/2$, l'équilibre selon l'axe (Ay_0) est instable et le mécanisme s'écartera à la moindre perturbation pour aller se positionner dans une configuration stable. Grâce à la symétrie du mécanisme par rapport à l'axe (Ax_0) , on sait qu'il existe deux de ces configurations, le mécanisme présenté peut être donc qualifié de bistable.

4.3.5 Formulation alternative de la matrice de raideur

4.3.5.1 Formulation systématique de \mathbf{K}_M

En pratique, la mise en œuvre de la matrice de raideur \mathbf{K}_M peut poser quelques difficultés, en particulier pour la dérivation par rapport aux coordonnées généralisées $\vec{\psi}$.

Une formulation alternative de cette matrice de raideur ne nécessitant que des dérivations par rapport à $\vec{\theta}$ est donc proposée ici. Cette formulation est systématique et valable pour tous les MPC. L'astuce pour contourner la dérivation par rapport à $\vec{\psi}$ est de considérer le mécanisme non pas comme un unique mécanisme parallèle, mais comme n mécanismes sériels et de réaliser les dérivations par rapport aux coordonnées $\vec{\theta}$ qui sont alors indépendantes. Il convient ensuite d'ajouter l'effet de la dérivation des contraintes cinématiques. La dérivation par rapport à $\vec{\psi}$ peut être évitée en utilisant la dérivation en chaîne et la matrice \mathbf{R} . La matrice \mathbf{J} est égale à

$$\mathbf{J} = \frac{d\vec{x}_{\mathcal{S}}}{d\vec{\theta}} \frac{d\vec{\theta}}{d\vec{\psi}} = \mathbf{J}_{\theta} \mathbf{R}, \quad (4.79)$$

et la dérivée de sa transposée s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\psi}} = \frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\theta}} \frac{d\vec{\theta}}{d\vec{\psi}} = \frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\theta}} \mathbf{R}, \\ \frac{d\mathbf{J}^T}{d\vec{\theta}} = \frac{d(\mathbf{J}_{\theta} \mathbf{R})^T}{d\vec{\theta}} = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{J}_{\theta}^T}{d\vec{\theta}} + \frac{d\mathbf{R}^T}{d\vec{\theta}} \mathbf{J}_{\theta}^T. \end{cases} \quad (4.80)$$

La matrice de raideur \mathbf{K}_M peut donc s'écrire

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{R}^T [\mathbf{K}_{\theta} + \mathbf{K}_E^{\theta} + \mathbf{K}_W^{\theta}] \mathbf{R} + \mathbf{K}_S \quad (4.81)$$

où les matrices suivantes sont définies :

- La matrice des raideurs articulaires

$$\mathbf{K}_{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\lambda} \end{bmatrix}, \text{ telle que } \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{\theta} \mathbf{R} = \mathbf{K}_{\psi} + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_{\lambda} \mathbf{G}. \quad (4.82)$$

- La matrice de raideur due aux efforts extérieurs

$$\mathbf{K}_E^{\theta} = -\frac{d\mathbf{J}_{\theta}^T}{d\vec{\theta}} \vec{f}. \quad (4.83)$$

- La matrice de raideur due à la gravité

$$\mathbf{K}_W^{\theta} = \sum_{j=1}^m \frac{d^2 \vec{c}_j^T}{d\vec{\theta}^2} \vec{w}_j = \sum_{j=1}^m \left(\frac{d\mathbf{P}_j^{\theta}}{d\vec{\theta}} \right)^T \vec{w}_j \text{ avec } \mathbf{P}_j^{\theta} = \frac{d\vec{c}_j}{d\vec{\theta}}. \quad (4.84)$$

La matrice $\mathbf{K}_{\theta} + \mathbf{K}_E^{\theta} + \mathbf{K}_W^{\theta}$ correspond à la matrice de raideur généralisée des pattes considérées comme des mécanismes sériels indépendants. La dernière matrice composant la matrice \mathbf{K}_M du mécanisme parallèle correspond à la dérivation des contraintes cinématiques qui relie les pattes entre elles.

- Cette matrice \mathbf{K}_S est définie par

$$\mathbf{K}_S = \left[\frac{d\mathbf{R}^T}{d\vec{\theta}} \left(\vec{\tau}_\theta - \mathbf{J}_\theta^T \vec{f} + \sum_{j=1}^m (\mathbf{P}_j^\theta)^T \vec{w}_j \right) \right] \mathbf{R}. \quad (4.85)$$

Là encore, une expression symbolique de la matrice \mathbf{R} n'étant pas toujours connue, la matrice \mathbf{K}_S peut être écrite sous une autre forme plus simple à mettre en œuvre.

4.3.5.2 Calcul de la matrice \mathbf{K}_S

Sachant qu'un des blocs de la matrice \mathbf{R} est la matrice identité $\mathbf{1}_{\mathfrak{M}}$ dont la dérivée est nulle, l'équation (4.85) est équivalente à

$$\mathbf{K}_S = \left[\frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\theta}} \left(\vec{\tau}_\lambda - \mathbf{J}_\lambda^T \vec{f} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \vec{c}_j}{\partial \lambda} \right)^T \vec{w}_j \right) \right] \mathbf{R} = \left[\frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\theta}} \vec{v}_\lambda \right] \mathbf{R}, \quad (4.86)$$

où le vecteur \vec{v}_λ représente les efforts qui s'appliquent sur les articulations λ et qui dans le cas d'un mécanisme parallèle se répercutent sur les articulations ψ par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{G}^T . De plus, lorsqu'aucune expression symbolique de la matrice \mathbf{G} n'est connue, la formulation suivante peut être utilisée pour obtenir une valeur numérique de $(d\mathbf{G}/d\vec{\theta})^T \vec{v}_\lambda$ tout en n'effectuant que des dérivations symboliques et en évitant les dérivations numériques. La matrice \mathbf{G} est calculée à l'équation (2.35) à partir de la dérivée des contraintes géométriques. Leur dérivée s'écrit

$$\frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\theta}} \vec{v}_\lambda = - \frac{d(\mathbf{S}_\lambda^{-1} \mathbf{S}_\psi)^T}{d\vec{\theta}} \vec{v}_\lambda = - \mathbf{S}_\psi^T \frac{d\mathbf{S}_\lambda^{-T}}{d\vec{\theta}} \vec{v}_\lambda - \frac{d\mathbf{S}_\psi^T}{d\vec{\theta}} \mathbf{S}_\lambda^{-T} \vec{v}_\lambda. \quad (4.87)$$

Dans cette dernière formulation la dérivée de \mathbf{S}_λ^{-1} sous cette forme requérant de calculer symboliquement l'inverse de \mathbf{S}_λ , on utilise la dérivée suivante : $d\mathbf{S}_\lambda^{-1}/d\vec{\theta} = -\mathbf{S}_\lambda^{-1} (d\mathbf{S}_\lambda/d\vec{\theta}) \mathbf{S}_\lambda^{-1}$. Ainsi, une valeur numérique exacte de la dérivée de la matrice \mathbf{G} peut être obtenue à partir des valeurs numériques d'éléments simples à calculer : \vec{v}_λ , \mathbf{S}_ψ , \mathbf{S}_λ et $(d\mathbf{S}/d\vec{\theta})^T \vec{v}_\lambda$.

$$\frac{d\mathbf{G}^T}{d\vec{\theta}} \vec{v}_\lambda = - \frac{d(\mathbf{S}_\lambda^{-1} \mathbf{S}_\psi)^T}{d\vec{\theta}} \vec{v}_\lambda = \mathbf{S}_\psi^T \mathbf{S}_\lambda^{-T} \frac{d\mathbf{S}_\lambda^T}{d\vec{\theta}} \mathbf{S}_\lambda^T \vec{v}_\lambda - \frac{d\mathbf{S}_\psi^T}{d\vec{\theta}} \mathbf{S}_\lambda^{-T} \vec{v}_\lambda. \quad (4.88)$$

Et donc, la matrice \mathbf{K}_S qui représente la raideur du mécanisme parallèle due aux contraintes cinématiques se calcule aisément comme

$$\mathbf{K}_S = - \left[\left(\mathbf{G}^T \frac{d\mathbf{S}_\lambda^T}{d\vec{\theta}} + \frac{d\mathbf{S}_\psi^T}{d\vec{\theta}} \right) \mathbf{S}_\lambda^{-T} \vec{v}_\lambda \right] \mathbf{R}. \quad (4.89)$$

4.3.6 Conclusion

La formulation des matrices de raideur —généralisée et cartésienne— présentées dans ce chapitre sont une généralisation de toutes les matrices qui existent dans la littérature. Elles sont valables depuis le mécanisme conventionnel sériel jusqu’au mécanisme parallèle sous-actionné, même bistable, que le mécanisme étudié soit soumis ou non à la gravité, à de grands efforts extérieurs et à des contraintes internes. La matrice de raideur est un élément central dans la modélisation des mécanismes compliants et ses propriétés révèlent quelques caractéristiques importantes du mécanisme, notamment la stabilité de sa configuration. Dans le chapitre suivant, la matrice de raideur généralisée est utilisée pour décrire le comportement quasi-statique d’un mécanisme parallèle compliant.

Chapitre 5

Modèle quasi-statique d'un mécanisme parallèle compliant

« Une théorie est bonne lorsqu'elle est belle. »

—Henri Poincaré (1854-1912)

Le modèle cinémato-statique ou *modèle quasi-statique* d'un mécanisme parallèle compliant est obtenu en dérivant le modèle géométrico-statique par rapport aux paramètres extérieurs, en l'occurrence la position des actionneurs et les efforts externes. Deux matrices fondamentales apparaissent dans ce modèle : la *matrice de compliance cartésienne* \mathbf{C}_C et la *matrice jacobienne quasi-statique* \mathbf{J}_Q . Cette dernière est liée à une nouvelle matrice, la *matrice de transmission* \mathbf{T} entre la variation des actionneurs et la variation des coordonnées généralisées. Les modèles quasi-statiques complet et inverse sont ensuite présentés.

5.1 Concept et appellation

Le modèle géométrico-statique (MGS) présenté au chapitre 3 permet de modéliser avec précision les MPC, cependant la complexité des équations et le nombre de solutions peuvent rendre sa détermination numérique trop longue. Ainsi, dans ce chapitre est étudiée la dérivation du MGS par rapport aux paramètres extérieurs. Celle-ci donne une relation linéaire entre la variation de la position des actionneurs, celle de l'effort extérieur et celle de la pose de l'effecteur, tout en respectant l'hypothèse de déplacements quasi-statiques, c'est-à-dire sans effet dynamique. Dans la suite de ce chapitre, on calcule la variation temporelle du MGS plutôt que sa variation infinitésimale afin d'alléger la présentation des calculs. Il est cependant important de noter que le temps ne joue aucun rôle dans le modèle quasi-statique.

Au début de ces travaux de doctorat, ce modèle fût baptisé *modèle cinémato-statique* (MCS). En anglais, le terme *kinematics* signifiant à la fois *géométrie* et *cinématique*, la différence entre le MGS —traduit par *kinemastatic model*— et le MCS s'est faite en dénommant ce dernier *instantaneous kinemastatic model* [73]. D'autre part, il est intéressant de noter que le terme *cinéto-statique* (*kinetostatic* en anglais) apparaît à de nombreuses reprises dans la littérature [6, 15, 88, 94] (ou même le terme *kinestatic* [33]). Cependant dans tous les articles lus, le terme cinéto-statique ne fait référence qu'à une étude de la compliance du mécanisme. À la rigueur, en acceptant que la *cinéto-statique* soit à la *statique* ce que la *cinématique* est à la *géométrie*, alors le MCS aurait pu être appelé *modèle cinémato-cinéto-statique*!

Toutefois, afin d'être simple et plus explicite, et puisqu'il est situé entre le modèle cinématique et le modèle dynamique, le modèle cinémato-statique a désormais été renommé *modèle quasi-statique* (MQS) en français et *Quasi-Static Model* en anglais [77].

5.2 Calcul du modèle quasi-statique

5.2.1 Définition mathématique

Le MQS correspond à la dérivation du MGS —donné à l'équation (3.28)— par rapport aux paramètres extérieurs. La variation temporelle du MGS s'écrit

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}_{\mathfrak{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{\phi}} \dot{\vec{\phi}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}_{\mathfrak{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{f}} \dot{\vec{f}}, \quad (5.1)$$

où $\partial \vec{\mathcal{M}}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{L}' \partial \vec{\mathcal{M}}_C$. Lorsque aucune formulation symbolique de la fonction $\vec{\mathcal{M}}_{\mathfrak{F}}$ n'est connue, alors le MQS peut être déterminé à partir de la dérivation des modèles géométrique et statique en utilisant l'équation (3.29). Sachant que $\vec{\psi} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})$, cela s'écrit

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}_{\mathfrak{F}}}{d\vec{\psi}} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{\phi}} \dot{\vec{\phi}} + \frac{d\vec{\mathcal{P}}_{\mathfrak{F}}}{d\vec{\psi}} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{f}} \dot{\vec{f}}. \quad (5.2)$$

5.2.2 Dérivation du modèle géométrique

La dérivation du modèle géométrique par rapport aux coordonnées généralisées $\vec{\psi}$ correspond à la définition du modèle cinématique donnée à l'équation (2.55). Le premier terme de la dérivation en chaîne de l'équation (5.2) est donc la matrice jacobienne cinématique :

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}_{\mathfrak{F}}(\vec{\psi})}{d\vec{\psi}} = \mathbf{J}. \quad (5.3)$$

5.2.3 Dérivation du modèle statique

Le modèle statique étant défini par $\vec{\psi} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})$, les matrices jacobienes correspondant à sa dérivation par rapport à $\vec{\psi}$ et \vec{f} peuvent être définies comme

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{\phi}} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{\phi}} = \mathbf{T}, \\ \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{f}} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{f}} = \mathbf{T}_f. \end{cases} \quad (5.4)$$

Lorsqu'une expression symbolique explicite du modèle statique $\vec{\mathcal{F}}(\vec{\phi}, \vec{f})$ est connue, le calcul de ces matrices jacobiennes ne pose pas de difficulté particulière. Par contre, lorsque cette forme symbolique n'est pas connue, il est possible de déterminer les deux matrices à partir de la dérivation des contraintes statiques (éq. (3.19)). D'une manière générale, la variation instantanée de ces contraintes par rapport aux paramètres $\vec{\psi}$, $\vec{\phi}$ et \vec{f} s'écrit

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{\psi}} \dot{\vec{\psi}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{\phi}} \dot{\vec{\phi}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}(\vec{\psi}, \vec{\phi}, \vec{f})}{\partial \vec{f}} \dot{\vec{f}} = \vec{0}_m. \quad (5.5)$$

Ainsi lorsque la matrice $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{\psi}$ n'est pas singulière, les matrices \mathbf{T} et \mathbf{T}_f peuvent être calculées comme

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{\phi}} = -\left(\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{\psi}}\right)^{-1} \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{\phi}}, \\ \mathbf{T}_f = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{f}} = -\left(\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{\psi}}\right)^{-1} \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{f}}. \end{cases} \quad (5.6)$$

En utilisant la formulation générale de l'équilibre statique d'un MPC donnée à l'équation (3.22), les formulations des trois matrices $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{\psi}$, $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{\phi}$ et $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{f}$ peuvent être déterminées. Celles-ci sont présentées dans les sections suivantes.

5.2.3.1 Matrice $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{\psi}$

D'après sa définition donnée dans le chapitre 4 à l'équation (4.4), la matrice de raideur généralisée \mathbf{K}_M est égale à la dérivation des contraintes statiques par les coordonnées généralisées. Cela s'écrit

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{\psi}} = \mathbf{K}_M = \mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_W. \quad (5.7)$$

Les définitions des matrices \mathbf{T} et \mathbf{T}_f données à l'équation (5.6) sont donc valides uniquement si la matrice \mathbf{K}_M n'est pas singulière.

5.2.3.2 Matrice $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{\phi}$

Dans l'expression des contraintes statiques donnée à l'équation (3.22), les matrices \mathbf{G} , \mathbf{J} et \mathbf{P}_j ainsi que les vecteurs $\vec{\tau}_\lambda$, \vec{f} et \vec{w}_j ne sont pas fonction de $\vec{\phi}$. Ainsi, seule la dérivation du vecteur $\vec{\tau}_\psi$ n'est pas nulle.

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{\phi}} = \frac{\partial \vec{\tau}_\psi}{\partial \vec{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \vec{\phi}} \left(\int_{\vec{\psi}_0}^{\vec{\psi}} \mathbf{K}_\psi d\vec{\psi} \right). \quad (5.8)$$

Les longueurs/angles libres des articulations géométriquement libres étant constantes pour les articulations passives (c'est-à-dire non actionnées) et égales à une valeur commandée pour les actionneurs, les variations $\dot{\psi}_{0j}$ sont nulles dans le premier cas et égales à $\dot{\phi}_j$ dans le second. Ainsi, la dérivation du vecteur $\vec{\tau}_\psi$ par rapport aux coordonnées du vecteur $\vec{\phi}$ donne une matrice $\mathfrak{M} \times \mathfrak{A}$ composée de sous-matrices $\mathbf{0}$ et d'une matrice correspondant à la dérivation du couple/force appliqué par les actionneurs noté $\vec{\tau}_\phi$.

$$\frac{\partial \vec{\tau}_\psi}{\partial \vec{\phi}} = \mathbf{A} \frac{\partial \vec{\tau}_\phi}{\partial \vec{\phi}}, \quad (5.9)$$

où la matrice¹ $\mathbf{A} = \partial \vec{\psi} / \partial \vec{\psi}_\phi$. \mathbf{A} est la matrice identité si \mathfrak{A} est égal à \mathfrak{M} (toutes les coordonnées généralisées sont actionnées) et c'est une matrice rectangulaire composée de « zéros » et de \mathfrak{A} « uns » correspondant à $\partial \psi_{\phi j} / \partial \psi_{\phi j}$ lorsque $\mathfrak{M} > \mathfrak{A}$. Puisque $\vec{\phi}$ est la borne inférieure de l'intégrale déterminant $\vec{\tau}_\phi$, on a

$$\frac{\partial \vec{\tau}_\phi}{\partial \vec{\phi}} = -\mathbf{K}_\phi. \quad (5.10)$$

Ainsi, la dérivée des contraintes statiques par rapport à la position des actionneurs s'écrit

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{\phi}} = -\mathbf{A} \mathbf{K}_\phi = -\mathbf{K}_\phi^*, \quad (5.11)$$

où \mathbf{K}_ϕ^* est une matrice $\mathfrak{M} \times \mathfrak{A}$ composée par les coefficients de raideur $k_{\phi j}$. Cette matrice est utilisée pour alléger les équations.

5.2.3.3 Matrice $\partial \vec{\mathcal{S}} / \partial \vec{f}$

La dérivée des contraintes statiques, c'est-à-dire de l'équilibre statique (éq. (3.22)), par rapport à l'effort externe \vec{f} se calcule comme

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \vec{f}} = -\mathbf{J}^T. \quad (5.12)$$

5.2.3.4 Matrices \mathbf{T} et \mathbf{T}_f

En utilisant les matrices jacobiennes déterminées plus haut, les matrices \mathbf{T} et \mathbf{T}_f définies à l'équation (5.6) s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}_\phi = \mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{K}_\phi^*, \\ \mathbf{T}_f = \mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{J}^T. \end{cases} \quad (5.13)$$

¹La matrice \mathbf{A} est celle présentée à la section 4.3.1 et dans l'équation (4.52).

La matrice \mathbf{T} , appelée *matrice de transmission quasi-statique*, est étudiée plus en détail à la section 5.3.4. Les deux matrices sont définies uniquement lorsque la matrice de raideur généralisée \mathbf{K}_M est non singulière. En utilisant ces deux matrices, la variation instantanée du modèle statique s'écrit

$$\dot{\vec{\psi}} = \mathbf{T}\dot{\vec{\phi}} + \mathbf{T}_f\dot{\vec{f}} = \mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{K}_\phi^*\dot{\vec{\phi}} + \mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T\dot{\vec{f}}. \quad (5.14)$$

Cette relation correspond au *modèle quasi-statique généralisé* d'un MPC.

5.2.4 Modèle quasi-statique cartésien

La dérivation du modèle géométrique cartésien et du modèle statique permettent donc de formuler le modèle quasi-statique cartésien d'un MPC. Celui-ci s'exprime sous une forme très simple et parlante,

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{S}} = \mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{K}_\phi^*\dot{\vec{\phi}} + \mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T\dot{\vec{f}}. \quad (5.15)$$

En effet dans cette formulation, deux matrices importantes apparaissent :

- La *matrice jacobienne compliante* ou *matrice jacobienne quasi-statique* qui donne la relation entre la variation de la position des actionneurs et la variation de la pose de l'effecteur.

$$\mathbf{J}_Q = \frac{\partial \vec{x}_{\mathfrak{S}}}{\partial \vec{\phi}} = \mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{K}_\phi^*. \quad (5.16)$$

- La *matrice de compliance cartésienne* qui donne la relation entre la variation de l'effort externe appliqué sur l'effecteur et la variation de la pose de ce dernier.

$$\mathbf{C}_C = \frac{\partial \vec{x}_{\mathfrak{S}}}{\partial \vec{f}} = \mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T. \quad (5.17)$$

Le modèle quasi-statique cartésien d'un mécanisme parallèle compliant, dans lequel les actionneurs sont contrôlés en position, s'écrit donc tout simplement

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{S}} = \mathbf{J}_Q\dot{\vec{\phi}} + \mathbf{C}_C\dot{\vec{f}}. \quad (5.18)$$

5.3 Propriétés du modèle

5.3.1 Modèle cinémato-statique

La matrice de raideur cartésienne est définie par $\partial \vec{f} / \partial \vec{x}_{\mathfrak{F}}$ en considérant que tous les paramètres excepté \vec{f} sont constants, en particulier la position des actionneurs $\vec{\phi}$. Ainsi, à partir de cette définition de la matrice de raideur, $\dot{\vec{f}}$ peut être écrit comme

$$\dot{\vec{f}} = \mathbf{K}_C \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}|\vec{\phi}_{constant}}. \quad (5.19)$$

Simultanément, la matrice jacobienne quasi-statique \mathbf{J}_Q est calculée pour un effort externe \vec{f} considéré constant. Ainsi, $\dot{\vec{\phi}}$ peut s'écrire

$$\dot{\vec{\phi}} = \mathbf{J}_Q^{-1} \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}|\vec{f}_{constant}}. \quad (5.20)$$

Donc le modèle quasi-statique (éq.(5.18)) —également appelé modèle cinémato-statique— correspond à la somme de ces deux influences cinématique et cinétostatique

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}|\vec{f}_{constant}} + \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}|\vec{\phi}_{constant}}. \quad (5.21)$$

5.3.2 Matrice de compliance cartésienne

La matrice \mathbf{T}_f , définie par $\partial \vec{\psi} / \partial \vec{f}$, est égale à $\mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{J}^T$. Il est intéressant de noter que la matrice $\partial f / \partial \vec{\psi}$ —correspondant à son inverse— représente la dérivée d'un effort défini dans le domaine cartésien par des coordonnées définies dans le domaine des coordonnées généralisées, ainsi $\partial f / \partial \vec{\psi}$ n'est pas une matrice de raideur mais un *générateur de torseur élastique* (*elastic wrench generator* en anglais) [56]. Par contre, la matrice \mathbf{C}_C correspond à l'inverse d'une matrice de raideur. C'est la matrice de compliance cartésienne (éq.(4.38)). Elle s'écrit

$$\mathbf{C}_C = \mathbf{J} \mathbf{T}_f = \mathbf{J} \mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{J}^T. \quad (5.22)$$

Et, avec cette dernière formulation et l'équation (4.49), il est clair que l'inverse \mathbf{C}_C^{-1} correspond à la matrice de raideur cartésienne.

$$\mathbf{C}_C^{-1} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_M \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{K}_C. \quad (5.23)$$

5.3.3 Matrice jacobienne quasi-statique

La matrice jacobienne quasi-statique \mathbf{J}_Q s'écrit

$$\mathbf{J}_Q = \mathbf{J}\mathbf{T}, \text{ avec } \mathbf{T} = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial \vec{\phi}} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{\phi}}. \quad (5.24)$$

La formulation de cette *matrice jacobienne quasi-statique* \mathbf{J}_Q ne diffère de la matrice jacobienne cinématique \mathbf{J} que par la présence de la matrice de transmission quasi-statique \mathbf{T} . Cette dernière est discutée à la section suivante.

5.3.4 Matrice de transmission quasi-statique

5.3.4.1 Influence de la matrice

L'influence de la matrice \mathbf{T} dans le modèle quasi-statique n'apparaît réellement que lorsque celle-ci est différente de la matrice identité. Dans le cas où $\mathbf{T} = \mathbf{1}$, le modèle quasi-statique est égal au modèle cinématique. La formulation de la matrice \mathbf{T} requiert qu'une formulation correcte de la matrice de raideur généralisée \mathbf{K}_M soit utilisée. En effet pour un mécanisme pleinement actionné, si la matrice de raideur qui ne considère ni les efforts extérieurs, ni les raideurs des articulations passives, ni la gravité —c'est-à-dire la matrice $\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_\phi$ [31, 81]— est utilisée alors \mathbf{T} est toujours égale à $\mathbf{1}$ et dans ce cas, on a

$$\mathbf{J}_Q = \mathbf{J}. \quad (5.25)$$

5.3.4.2 Concept de la matrice

La matrice de transmission \mathbf{T} entre le mouvement instantané des actionneurs et le mouvement réel des coordonnées généralisées est égale à $\partial \vec{\psi} / \partial \vec{\phi}$ et se calcule comme suit

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}_M^{-1} \mathbf{K}_\phi^*. \quad (5.26)$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{T} sont appelés ratios de transmission. Ils caractérisent la façon dont une variation des efforts produits par les actionneurs $\dot{\vec{\tau}}_\phi (= \mathbf{K}_\phi^* \dot{\vec{\phi}})$ est distribuée aux coordonnées généralisées, en entraînant de petits déplacements $\dot{\vec{\psi}} (= \mathbf{K}_M^{-1} \dot{\vec{\tau}}_\phi)$.

Avec la définition de la matrice de raideur généralisée (éq.(4.25)), la matrice \mathbf{T} s'écrit

$$\mathbf{T} = (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_W)^{-1} \mathbf{K}_\phi^*. \quad (5.27)$$

Lorsque le mécanisme est pleinement actionné ($\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$), toutes les articulations géométriquement libres sont actionnées ($\vec{\psi} = \vec{\phi}$). Alors, par définition, $\mathbf{K}_\phi^* = \mathbf{K}_\phi = \mathbf{K}_\psi$ et la matrice de transmission quasi-statique peut s'écrire

$$\mathbf{T} = [\mathbf{1} + \mathbf{K}_\phi^{-1} \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_\phi^{-1} \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_\phi^{-1} \mathbf{K}_W]^{-1}. \quad (5.28)$$

5.3.4.3 Distribution des déplacements

Le fait qu'un ratio de transmission ne soit pas égal à un indique que la variation d'une coordonnée généralisée correspondant à une articulation actionnée n'est pas nécessairement égale à la variation de position de son actionneur. La différence provient du fait que la position d'un actionneur a une influence multiple sur le mécanisme. L'énergie apportée —ou retirée— au système lors d'un mouvement de l'actionneur est utilisée à plusieurs fins :

- elle modifie la configuration du mécanisme au travers de la matrice \mathbf{K}_ψ (déplacement désiré),
- elle préserve l'équilibre statique modifié par une variation de la matrice \mathbf{J} . Cela est accompli au travers de la matrice \mathbf{K}_E , qui est proportionnelle à l'effort extérieur \vec{f} (variation « perdue »),
- elle préserve l'équilibre statique modifié par une variation des contraintes cinématiques (matrice \mathbf{G}). Cela est accompli au travers de la matrice \mathbf{K}_I , qui est due à la raideur des articulations passives \mathbf{K}_λ (variation « perdue »),
- elle préserve l'équilibre statique modifié par une variation de la position des centres de masse des membrures (matrices \mathbf{P}_i). Cela est accompli au travers de la matrice \mathbf{K}_W (variation « perdue »).

5.3.4.4 Valeurs des ratios de transmission

En conséquence de la section précédente, la matrice de transmission diffère généralement de la matrice identité $\mathbf{1}$:

- Les ratios peuvent être compris entre zéro et un, ce qui signifie que les efforts internes, externes ou dus à la gravité diminuent l'amplitude du déplacement et que de l'énergie est stockée dans le mécanisme.

- Les ratios peuvent être supérieurs à un, c'est-à-dire que les efforts internes, externes ou dus à la gravité augmentent l'amplitude du déplacement. Le mécanisme restitue de l'énergie.
- La matrice de transmission peut avoir des coefficients négatifs. Dans ce cas, le mouvement réel de certaines coordonnées généralisées, notamment actionnées, est opposé à celui commandé pour les actionneurs. Cela arrive seulement lorsque le mécanisme est dans une configuration instable. Dans ce cas, l'effort fourni par la modification de l'équilibre statique (ou par le «déséquilibre» statique) est plus grand que celui des actionneurs.
- Lorsque \mathbf{K}_M est singulière, \mathbf{T} n'est pas définie.

Enfin, dans un mécanisme pleinement actionné, \mathbf{T} tend vers $\mathbf{1}$ lorsque

$$\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{K}_\phi^{-1} (\mathbf{K}_I + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_W) \rightarrow \mathbf{0} \quad (5.29)$$

ce qui est équivalent à dire que les raideurs dues aux efforts externes, à la gravité et aux articulations passives sont négligeables devant la raideur des actionneurs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\text{lin max}} (\mathbf{K}_W + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_I) \lll \gamma_{\text{lin min}} (\mathbf{K}_\psi) \\ \text{et} \\ \gamma_{\text{tor max}} (\mathbf{K}_W + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_I) \lll \gamma_{\text{tor min}} (\mathbf{K}_\psi) \end{array} \right. \quad (5.30)$$

où $\gamma_{\text{lin min}}$ et $\gamma_{\text{tor min}}$ représentent les raideurs propres linéaires et en torsion minimales (respectivement maximales) de la matrice entre parenthèse.

5.3.5 Contrôle en force

Lorsqu'un manipulateur est contrôlé en force, les actionneurs ne sont plus modélisés comme des ressorts à longueur libre variable, mais comme des efforts extérieurs appliqués sur les articulations passives $\vec{\psi}_\phi$ dont la raideur est égale à \mathbf{K}_ϕ . Les deux modèles, *force* ou *ressort*, sont équivalents, et leur variation instantanée s'écrit

$$\dot{\vec{\tau}}_\phi = \mathbf{K}_\phi \dot{\vec{\phi}}. \quad (5.31)$$

Ainsi, le modèle quasi-statique s'écrit

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{S}} = \mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{A}\dot{\vec{\tau}}_\phi + \mathbf{J}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T\dot{\vec{f}}. \quad (5.32)$$

En notant $\dot{\vec{\tau}}_\beta = \mathbf{A}\dot{\vec{\tau}}_\phi + \mathbf{J}^T \dot{\vec{f}}$, la variation des efforts extérieurs appliqués sur l'ensemble des articulations correspondant à des coordonnées généralisées, le MQS d'un MPC devient

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{JK}_M^{-1} \dot{\vec{\tau}}_\beta. \quad (5.33)$$

Dans cette équation, le nombre de paramètres extérieurs *indépendants* qui peuvent avoir une influence sur un MPC à \mathfrak{M} degrés de mobilité est clairement égal à \mathfrak{M} .

5.3.6 Modèle quasi-statique complet

Le modèle quasi-statique direct complet s'écrit

$$\dot{\vec{u}}_{\mathfrak{M}} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} \\ \dot{\vec{y}} \end{bmatrix} = \mathbf{HK}_M^{-1} \mathbf{D} \dot{\vec{\beta}} = \mathbf{M} \dot{\vec{\beta}} \quad (5.34)$$

où la matrice \mathbf{D} est une matrice de dimension $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ composée par les colonnes des matrices \mathbf{A} et \mathbf{H}^T correspondant aux paramètres extérieurs $\dot{\vec{\beta}}$. Par exemple, si $\dot{\vec{\beta}}^T = [\dot{\vec{\phi}}^T; \dot{\vec{f}}^T; \dot{\vec{f}}_z^T]$ avec \vec{z} un vecteur composé par $(\mathfrak{M} - \mathfrak{F} - \mathfrak{A})$ coordonnées du vecteur \vec{y} de manière à ce que $\dot{\vec{\beta}}$ contienne \mathfrak{M} coordonnées indépendantes, le MGS inverse s'écrit

$$\dot{\vec{u}}_{\mathfrak{M}} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} \\ \dot{\vec{y}} \end{bmatrix} = \mathbf{HK}_M^{-1} [\mathbf{A}; \mathbf{J}^T; \mathbf{H}_z^T] \begin{bmatrix} \dot{\vec{\phi}} \\ \dot{\vec{f}} \\ \dot{\vec{f}}_z \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

où $\mathbf{H}_z = d\vec{z}/d\vec{\psi}$ est une matrice formée par les colonnes de \mathbf{H} correspondant aux coordonnées \vec{z} .

5.3.7 Modèle quasi-statique inverse

De la même manière que pour le modèle géométrico-statique à la section 3.2.3, du fait de la multiplicité des entrées/sorties possibles, de nombreux modèles peuvent être imaginés. Celui correspondant au MGS inverse n'a pas une grande utilité en pratique puisque les coordonnées \vec{y} et les efforts \vec{f}_y ne sont pas commandables. Ce modèle inverse s'écrit

$$\dot{\vec{\beta}} = \mathbf{M}^{-1} \dot{\vec{u}}_{\mathfrak{M}} \quad (5.36)$$

Le MQS de *commande*, c'est-à-dire la relation permettant de déterminer le mouvement $\dot{\vec{\phi}}$ à appliquer aux actionneurs afin d'obtenir un certain mouvement $\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}}$ de l'effecteur, est une relation plus utile en pratique. Dans cette section, on se limite à présenter le MQS de commande pour des mécanismes où le nombre d'actionneurs est égal au degré de liberté de l'effecteur ($\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$). Dans ce cas, la matrice \mathbf{J}_Q est carrée. Ainsi lorsque le mécanisme n'est pas dans une configuration cinématiquement ou statiquement singulière, la matrice \mathbf{J}_Q est inversible. La matrice \mathbf{C}_C est pour sa part toujours carrée et inversible lorsque le mécanisme n'est pas dans une configuration statiquement singulière. Le MQS de commande s'écrit alors

$$\dot{\vec{\phi}} = \mathbf{J}_Q^{-1} \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} - \mathbf{J}_Q^{-1} \mathbf{C}_C \dot{\vec{f}}. \quad (5.37)$$

De plus, si on étudie un mécanisme pleinement actionné et sans mobilité interne, c'est-à-dire, si $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, alors les matrices \mathbf{J} et \mathbf{T} sont carrées et, lorsqu'elles sont inversibles, l'équation précédente peut se simplifier et s'écrire comme suit

$$\dot{\vec{\phi}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} - \mathbf{K}_\phi^{-1} \mathbf{J}^T \dot{\vec{f}}. \quad (5.38)$$

Avec l'équation (5.37), une application intéressante du MQS de commande est de garder une pose constante ($\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \vec{0}$), lorsque les efforts externes varient. La variation instantanée $\dot{\vec{\phi}}^*$ à donner aux actionneurs est alors calculée par

$$\dot{\vec{\phi}}^* = -\mathbf{J}_Q^{-1} \mathbf{C}_C \dot{\vec{f}}, \text{ de manière à ce que } \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{J}_Q \dot{\vec{\phi}}^* + \mathbf{C}_C \dot{\vec{f}} = \vec{0}. \quad (5.39)$$

Enfin, à côté du MQS direct, du MQS inverse et du MQS de commande, il est également possible de déterminer la variation d'effort externe à appliquer à un mécanisme pour que les actionneurs et l'effecteur suivent simultanément un mouvement désiré :

$$\dot{\vec{f}} = \mathbf{K}_C \dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} - \mathbf{C}_C^{-1} \mathbf{J}_Q \dot{\vec{\phi}}, \quad (5.40)$$

où $\mathbf{K}_C = \mathbf{C}_C^{-1}$ existe lorsque le mécanisme n'est pas dans une configuration statiquement singulière.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, est présenté le modèle quasi-statique qui permet de décrire avec précision le comportement d'un mécanisme parallèle compliant soumis à des efforts

conservatifs —les effets dynamiques n'étant cependant pas pris en compte. La formulation proposée pour ce MQS est facile à utiliser, simple à interpréter et rapide à calculer puisque les relations y sont linéaires. La matrice de compliance cartésienne et la matrice jacobienne quasi-statique sont des outils de modélisation très puissants qui permettent de contrôler un mécanisme avec un nombre \mathfrak{M} de paramètres internes arbitrairement élevé à partir d'un nombre de paramètres extérieurs plus faible ($\mathfrak{F} + \mathfrak{A}$). Dans ce modèle, apparaît une nouvelle matrice, notée \mathbf{T} et appelée matrice de transmission quasi-statique, qui donne la relation entre le mouvement des actionneurs et celui du mécanisme. c'est principalement cette matrice qui apporte la plus-value en précision de la modélisation cinémato-statique par rapport à la modélisation cinématique. Une étude plus approfondie de cette matrice serait sûrement riche d'enseignements, notamment dans le cas des mécanismes sous-actionnés. Enfin, dans le MQS tout comme dans le modèle géométrico-statique, le nombre de paramètres extérieurs influents sur le mécanisme se révèle supérieur aux seuls actionneurs et efforts appliqués à l'effecteur, ce qui offre de nouvelles perspectives pour le contrôle des MPC.

Chapitre 6

Exemples d'applications

Dans ce dernier chapitre, quelques exemples d'application des modèles géométrico-statiques et quasi-statiques sont présentés. Le premier est un exemple simple d'un mécanisme plan qui permet une présentation analytique des modèles. Une étude de la matrice des ratios de transmission y est effectuée pour illustrer les possibilités offertes par les nouveaux modèles. Le deuxième exemple est traité numériquement et permet de mesurer le gain de précision qu'apporte le modèle géométrico-statique par rapport au modèle géométrique conventionnel. Le dernier exemple est le Triptéron compliant. La mise en œuvre des modèles pour ce mécanisme complexe est d'abord expliquée, puis quelques résultats de simulation sont présentés.

Dans ce dernier chapitre, l'utilisation des modèles développés pour les mécanismes parallèles compliant est illustrée au travers trois exemples.

Le premier est un mécanisme plan à un seul degré de liberté, qui est suffisamment simple pour être traité symboliquement et pour que les équations puissent être présentées dans cette thèse, mais qui est en même temps suffisamment élaboré pour illustrer les nouvelles possibilités apportées par les modèles géométrico-statique et quasi-statique.

Le second exemple est traité numériquement et illustre la possibilité offerte par les modèles présentés dans cette thèse de considérer les articulations compliantes comme ayant plusieurs degrés de mobilité. Ce second exemple est aussi là pour prouver la validité des modèles puisque ses résultats ont été comparés à ceux obtenus avec le logiciel MSC.Adams.

Enfin, le troisième exemple est l'application de ces modèles au mécanisme développé au laboratoire de robotique de l'Université Laval qui est à l'origine de cette thèse : le Triptéron compliant. L'application présentée explique comment mettre en œuvre les modèles géométrico-statique et quasi-statique pour le Triptéron compliant. Peu de résultats sont présentés dans cette thèse puisque nous n'avons pas d'éléments de comparaison permettant une évaluation quantitative de l'apport du MGS et du MQS. En effet, puisque l'équivalence entre le modèle MGS (MQS) et les équations de Lagrange (respectivement leur dérivée) a été démontrée, les écarts qui auraient été probablement observés entre les résultats du modèle, ceux d'un logiciel d'analyse par éléments finis ou ceux mesurés expérimentalement, l'auraient principalement été à cause des erreurs de modélisation des articulations compliantes elles-mêmes. Or, la modélisation des articulations compliantes n'est pas le sujet de cette thèse, on a donc préféré s'attarder aux problèmes théoriques plutôt qu'aux problèmes expérimentaux. De la même manière, le Triptéron compliant n'a pas non plus été modélisé sous Adams puisque ce logiciel utilise les équations de Lagrange et donc, comme dans le deuxième exemple, nous aurait donné les mêmes résultats que le MGS.

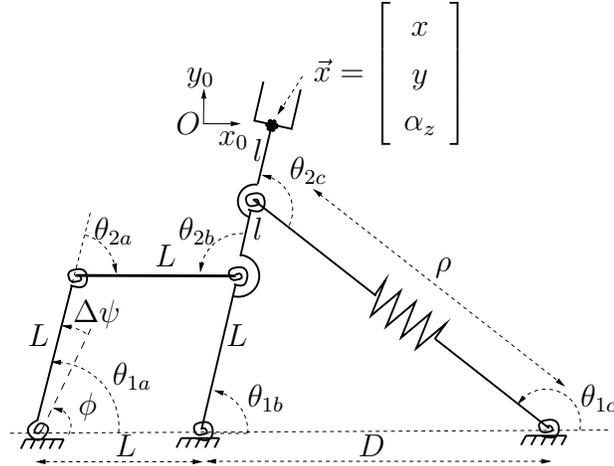


FIG. 6.1 – Mécanisme parallèle compliant plan à 1 ddl.

6.1 Mécanisme plan à 1ddl

Le mécanisme étudié est présenté dans la figure 6.1. Les valeurs numériques des paramètres du mécanisme ont été choisies de manière à ce que les expressions symboliques soient simples et que la pose du mécanisme soit $\vec{x} = [0; 0; \pi/2]$ lorsque $\theta_{1a} = \phi = \pi/2$ et $\vec{f} = \vec{0}$.

- Les longueurs des liens rigides sont $L = 1$ cm et $l = 0,5$ cm. Et les distances entre les points d'attache de la base sont $L = 1$ cm et $D = 2,5$ cm.
- L'articulation actionnée θ_{1a} possède un coefficient de raideur relativement *élevé* $k_\phi = 97$ Nm.rad⁻¹ et sa configuration au repos (non déformée) est notée ϕ et correspond à la valeur commandée de l'actionneur.
- Les articulations passives θ_{2a} , θ_{1b} et θ_{2b} sont identiques avec un coefficient de raideur relativement *faible* $k_\theta = 1$ Nm.rad⁻¹. Leurs angles libres (non déformés) sont $\theta_{2a0} = -\pi/2$ rad, $\theta_{1b0} = \pi/2$ rad et $\theta_{2b0} = \pi/2$ rad.
- Les deux autres articulations compliantes rotatoires θ_{1c} et θ_{2c} ont un coefficient de raideur nul, c'est-à-dire $k_0 = 0$ Nm.rad⁻¹.
- Les coefficients de raideur et les longueurs libres —respectivement k_ρ et ρ_0 — des articulations compliantes prismatiques passives ρ prennent différentes valeurs afin d'explorer les différents comportements possibles de ce mécanisme.
- Le degré de liberté de l'effecteur est égal à un. On considère que seule la coordonnée selon l'axe (Ox_0) est indépendante. On a donc $\vec{x}_\xi = x$.

De plus, dans cette application, l'effort extérieur \vec{f} appliqué à l'effecteur est toujours nul pour deux raisons : garder les expressions analytiques simples et surtout pour insister

sur le fait que ce modèle ne nécessite pas forcément de capteur pour apporter des nouveautés en vue de la commande d'un MPC.

6.1.1 Modèle géométrico-statique

6.1.1.1 Analyse de la mobilité

Ce mécanisme compte six liens rigides et sept articulations, parmi lesquelles l'articulation actionnée possède deux mobilités. Ainsi, avec l'équation (2.1), le degré de mobilité de ce MPC est deux ($\mathfrak{M} = 2$). L'un est situé au niveau de l'effecteur terminal qui est contraint dans une trajectoire circulaire à un ddl et l'autre est situé au niveau de l'articulation actionnée où les angles ϕ et θ_{1a} peuvent varier indépendamment l'un de l'autre.

6.1.1.2 Contraintes géométriques et coordonnées généralisées

Les coordonnées θ_{1a} et ϕ sont choisies comme coordonnées généralisées. Elles permettent une description complète de la configuration du mécanisme. Cependant, seule la variable θ_{1a} sera utilisée comme coordonnée généralisée pour l'analyse géométrique puisque l'analyse de la configuration du mécanisme pour sa mobilité en ϕ est évidente. Ainsi le MGS et le MQS ne seront déterminés que pour la mobilité à l'effecteur. Les six articulations contraintes λ_j sont θ_{2a} , θ_{1b} , θ_{2b} , ρ , θ_{1c} et θ_{2c} . Les six contraintes géométriques indépendantes que les coordonnées articulaires doivent respecter sont les six équations de fermeture des boucles cinématiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cos \theta_{1a} + L \cos(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - L \cos \theta_{1b} - L = 0, \\ L \sin \theta_{1a} + L \sin(\theta_{1a} + \theta_{2a}) - L \sin \theta_{1b} = 0, \\ \theta_{1a} + (\pi + \theta_{2a}) + (\pi - \theta_{1b}) + (\pi - \theta_{2b}) - 2\pi = 0, \\ (L + l) \cos \theta_{1b} - \rho \cos \theta_{1c} - D = 0, \\ (L + l) \sin \theta_{1b} - \rho \sin \theta_{1c} = 0, \\ \theta_{1b} + (\pi - \theta_{1c}) + (\pi - \theta_{2c}) - \pi = 0. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Ce système d'équations possède plusieurs solutions, mais seule celle correspondant à la configuration montrée dans la figure 6.1 est étudiée ici. Cette solution s'écrit

$$\vec{\lambda} = \vec{C}(\theta_{1a}) \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{2a} = -\theta_{1a}, \\ \theta_{1b} = \theta_{1a}, \\ \theta_{2b} = -\theta_{1a} + \pi, \\ \rho = \sqrt{(L+l)^2 - 2D(L+l)\cos\theta_{1a} + D^2}, \\ \theta_{1c} = \arctan\left(\sin\theta_{1a}, \cos\theta_{1a} - \frac{D}{L+l}\right), \\ \theta_{2c} = \theta_{1a} + \pi - \arctan\left(\sin\theta_{1a}, \cos\theta_{1a} - \frac{D}{L+l}\right). \end{cases} \quad (6.2)$$

6.1.1.3 Pose de l'effecteur

La pose cartésienne de l'effecteur est fonction des coordonnées articulaires du mécanisme. Cette fonction s'écrit

$$\vec{x} = \vec{P}(\theta_{1a}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = (L+2l)\cos\theta_{1b} & = (L+2l)\cos\theta_{1a}, \\ y = (L+2l)(\sin\theta_{1b} - 1) & = (L+2l)(\sin\theta_{1a} - 1), \\ \alpha_z = \theta_{1b} & = \theta_{1a}. \end{cases} \quad (6.3)$$

La pose possède ici trois composantes, mais puisque celles-ci ne sont pas indépendantes, on a bien un seul degré de liberté. La pose contenant un seul paramètre s'écrit

$$\vec{x}_{\mathfrak{F}} = \vec{P}_{\mathfrak{F}}(\theta_{1a}) = (L+2l)\cos\theta_{1a}. \quad (6.4)$$

6.1.1.4 Matrices des contraintes cinématiques et matrice jacobienne

À partir de l'équation (6.2), la matrice \mathbf{G} définie à l'équation (2.32) s'écrit

$$\mathbf{G} = \frac{d\vec{\lambda}}{d\theta_{1a}} = \begin{bmatrix} [-1; \quad 1; \quad -1]^T \\ D \frac{(L+l)}{\rho} \sin\theta_{1a} \\ \left(1 - \frac{D}{L+l} \cos\theta_{1a}\right) \left(\frac{L+l}{\rho}\right)^2 \\ 1 - \left(1 - \frac{D}{L+l} \cos\theta_{1a}\right) \left(\frac{L+l}{\rho}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

La matrice \mathbf{J} peut se calculer directement comme suit

$$\mathbf{J} = \frac{d\vec{x}_{\mathfrak{F}}}{d\theta_{1a}} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}_{\mathfrak{F}}}{d\theta_{1a}} = -(L + 2l) \sin \theta_{1a}. \quad (6.6)$$

On peut aussi l'obtenir sous la forme du produit :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}' \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{d\theta_{1a}} = [1; 0; 0] \begin{bmatrix} -(L + 2l) \sin \theta_{1a} \\ (L + 2l) \cos \theta_{1a} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

6.1.1.5 Force et moment aux articulations

Les efforts au niveau des articulations compliantes s'écrivent

$$\tau_{\theta_1} = k_{\phi}(\theta_{1a} - \phi) \text{ et } \vec{\tau}_{\lambda} = \mathbf{K}_{\lambda} (\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0) = \begin{bmatrix} k_{\theta}(\theta_{2a} - \theta_{2a0}) \\ k_{\theta}(\theta_{1b} - \theta_{1b0}) \\ k_{\theta}(\theta_{2b} - \theta_{2b0}) \\ k_{\rho}(\rho - \rho_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

6.1.1.6 Équilibre statique

En l'absence d'effort extérieur et de gravité, la formule de l'équilibre statique donnée à l'équation (3.22) s'écrit

$$\vec{\mathcal{S}}(\theta_{1a}, \phi) = \tau_{\theta_1} + \mathbf{G}^T \vec{\tau}_{\lambda} = 0. \quad (6.9)$$

Ainsi, avec les équations (6.2), (6.5) et (6.8), l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{S}}(\theta_{1a}, \phi) = & k_{\phi}(\theta_{1a} - \phi) - k_{\theta}(-\theta_{1a} - \theta_{2a0}) + k_{\theta}(\theta_{1a} - \theta_{1b0}) \\ & - k_{\theta}(\pi - \theta_{1a} - \theta_{2b0}) + D(L + l) \sin \theta_{1a} k_{\rho} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

où $\rho = \sqrt{(L + l)^2 - 2D(L + l) \cos \theta_{1a} + D^2}$. En utilisant les valeurs numériques, on a

$$\vec{\mathcal{S}}(\theta_{1a}, \phi) = 100\theta_{1a} - 97\phi - 3\pi/2 + 3,75 \sin \theta_{1a} k_{\rho} \left(1 - \frac{\rho_0}{\sqrt{8,5 - 7,5 \cos \theta_{1a}}} \right) = 0. \quad (6.11)$$

6.1.1.7 Modèle géométrico-statique

Lorsque l'actionneur ϕ est fixé et que le ressort $\rho(k_\rho, \rho_0)$ a été choisi, la coordonnée généralisée θ_{1a} est la seule variable de l'équation (6.11). Par conséquent, cette équation peut être résolue et la configuration du mécanisme déterminée. Puis, à partir de cette configuration θ_{1a} , la pose \vec{x}_p est calculée grâce à l'équation (6.3).

6.1.2 Modèle quasi-statique

6.1.2.1 Pose de l'effecteur

La dérivée temporelle de l'équation (6.3) s'écrit

$$\dot{\vec{x}}_{\mathfrak{F}} = \dot{\vec{\mathcal{P}}}_{\mathfrak{F}}(\theta_{1a}, \dot{\theta}_{1a}) = \mathbf{J}\dot{\theta}_{1a} = \dot{x} = -(L + 2l) \sin(\theta_{1a})\dot{\theta}_{1a}. \quad (6.12)$$

6.1.2.2 Matrice de raideur

Les deux matrices de raideur requises pour obtenir \mathbf{T} , la matrice de transmission —qui est ici de dimension 1×1 et qui peut donc être renommé ratio de transmission—, sont calculées en dérivant l'équilibre statique (éq. (6.10)). La matrice \mathbf{K}_ϕ s'écrit

$$\mathbf{K}_\phi = \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \phi} = -k_\phi, \quad (6.13)$$

et la matrice \mathbf{K}_M ,

$$\mathbf{K}_M = \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial \theta_{1a}} = k_\phi + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \theta_{1a}} \vec{\tau}_\lambda, \quad (6.14)$$

où

$$\mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda \mathbf{G} = k_\theta + k_\theta + k_\theta + k_\rho \left(D \frac{L+l}{\rho} \sin \theta_{1a} \right)^2 \quad (6.15)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{G}^T}{\partial \theta_{1a}} \vec{\tau}_\lambda = \left(D \frac{L+l}{\rho} \cos \theta_{1a} - \frac{1}{\rho} \left(D \frac{L+l}{\rho} \sin \theta_{1a} \right)^2 \right) k_\rho (\rho - \rho_0). \quad (6.16)$$

En attribuant les valeurs numériques, les deux coefficients de raideur suivants peuvent être introduits

$$\begin{aligned}
 k_{\theta}^{\psi} &= 3k_{\theta} \\
 k_{\rho}^{\psi} &= k_{\rho} \left(\frac{14,0625 \sin^2 \theta_{1a}}{8,5 - 7,5 \cos \theta_{1a}} + \left(\frac{3,75}{\sqrt{8,5 - 7,5 \cos \theta_{1a}}} \cos \theta_{1a} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{14,0625 \sin^2 \theta_{1a}}{\sqrt{8,5 - 7,5 \cos \theta_{1a}}^3} \right) (\sqrt{8,5 - 7,5 \cos \theta_{1a}} - \rho_0) \right), \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

de telle sorte que \mathbf{K}_M et le ratio de transmission \mathbf{T} entre $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}_{1a}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{K}_M = k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi} \\ \mathbf{T} = (k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi})^{-1} k_{\phi}. \end{cases} \tag{6.18}$$

6.1.2.3 Modèle quasi-statique cartésien

En utilisant la dérivée des contraintes géométriques et statiques, la MQS de ce mécanisme s'écrit

$$\dot{\vec{x}}_{\mathcal{S}} = \mathbf{J}\mathbf{T}\dot{\phi} = - \frac{k_{\phi}(L + 2l) \sin(\theta_{1a})}{k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi}} \dot{\phi}. \tag{6.19}$$

La variation de la pose contenant trois coordonnées peut s'écrire

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} - \frac{k_{\phi}(L + 2l) \sin(\theta_{1a})}{k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi}} \\ \frac{k_{\phi}(L + 2l) \cos(\theta_{1a})}{k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi}} \\ \frac{k_{\phi}}{k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi}} \end{bmatrix} \dot{\phi}. \tag{6.20}$$

6.1.3 Étude du ratio de transmission \mathbf{T}

Le ratio entre les vitesses angulaires $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}_{1a}$ correspond au ratio de transmission \mathbf{T} . Il est égal à la dérivée de θ_{1a} par rapport à ϕ , la valeur de l'actionneur sans déformation. En l'absence d'effort externe, ce ratio est uniquement fonction de la configuration du mécanisme :

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\theta}_{1a}}{\dot{\phi}} = \frac{\partial \theta_{1a}}{\partial \phi} = (k_{\phi} + k_{\theta}^{\psi} + k_{\rho}^{\psi})^{-1} k_{\phi}. \tag{6.21}$$

L'évolution de ce ratio de transmission diffère selon la valeur du coefficient de raideur du ressort ρ . Cette évolution est étudiée ci-dessous pour différentes valeurs de k_ρ .

6.1.3.1 Sans ressort ρ

Lorsque le coefficient de raideur k_ρ est égal à 0, le mécanisme devient alors équivalent à un simple mécanisme à quatre barres. La raideur du mécanisme, et donc le ratio de transmission sont constants :

$$\mathbf{T} = (k_\phi + k_\theta^\psi)^{-1} k_\phi = 0,97, \text{ lorsque } k_\rho = 0. \quad (6.22)$$

Le ratio de transmission \mathbf{T} est proche de 1 mais la différence de 3% entre la valeur commandée ϕ et la position réelle de l'articulation actionnée θ_{1a} correspond à un gain de précision du modèle quasi-statique par rapport au modèle uniquement cinématique. Ce gain est obtenu en tenant compte des raideurs k_θ , même si elles sont faibles par rapport à la raideur des actionneurs k_ρ .

6.1.3.2 Ressort ρ avec une raideur faible et sans déformation initiale.

Lorsque les deux caractéristiques du ressort ρ sont un coefficient de raideur $k_\rho = 1 \text{ N.cm}^{-1}$ et une longueur libre $\rho_0 = \sqrt{8,5} \text{ cm}$ —égale à la distance¹ d entre θ_{1c} et θ_{2c} lorsque $\theta_{1a} = \pi/2$ —, l'évolution du ratio de transmission peut être tracée pour θ_{1a} variant de $-\pi/2$ à $3\pi/2$. Dans la figure 6.2, on peut voir que le ratio n'est pas constant

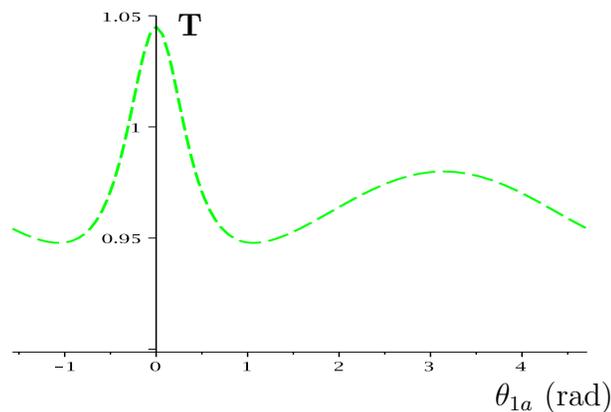


FIG. 6.2 – Évolution de \mathbf{T} pour $k_\rho = 1 \text{ N.cm}^{-1}$.

et peut être inférieur ou supérieur à 1. En particulier, le ratio de transmission s'accroît

$${}^1d = \sqrt{D^2 + (L+l)^2 - D(L+l) \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{8,5} \text{ cm}$$

rapidement lorsque θ_{1a} se rapproche de 0, c'est-à-dire lorsque le ressort linéaire ρ est à sa compression maximale et la raideur \mathbf{K}_M du mécanisme est à sa valeur minimale. Ce phénomène est abordé plus en détail à la section suivante.

6.1.3.3 Ressort ρ avec un coefficient de raideur élevé et avec une déformation initiale (préchargement).

Lorsque la longueur libre du ressort ρ est différente de la distance d , alors un effort interne existe dans le mécanisme même lorsque $\theta_{1a} = \pi/2$. En conséquence de quoi, le MGS doit être résolu afin de déterminer la configuration initiale du mécanisme, c'est-à-dire lorsque $\phi = \pi/2$. Dans le cas présent, on choisit une longueur $\rho_0 = 2d = 2\sqrt{8,5}$ cm et un coefficient de raideur $k_\rho = 10$ N.cm⁻¹. La solution de l'équation (6.11) lorsque $\phi = \pi/2$ rad est $\theta_{1a} = 1,855$ rad, ainsi la position *initiale* de l'effecteur est $\vec{p} = [-0,561; -0,080]^T$ cm.

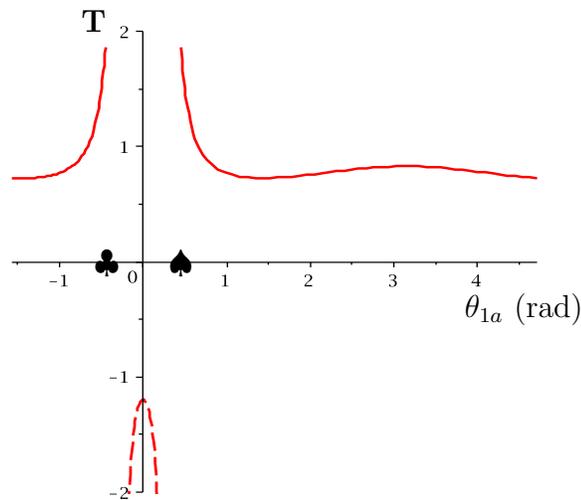


FIG. 6.3 – Évolution de \mathbf{T} pour $k_\rho = 1$ N.cm⁻¹ et $\rho_0 = 2\sqrt{8,5}$ cm.

La figure 6.3 montre l'évolution du ratio de transmission \mathbf{T} pour θ_{1a} variant de $-\pi/2$ à $3\pi/2$. On remarque le même phénomène qu'à la figure 6.2 lorsque θ_{1a} s'accroît de -1 ou décroît de $+1$ en se rapprochant de 0 : le ratio de transmission augmente, et dans le cas étudié ici, devient même infini (ou non défini) pour $\theta_{1a} = -0,296$ rad (\clubsuit) et $\theta_{1a} = 0,296$ rad (\spadesuit). Cela correspond à des singularités statiques ($\mathbf{K}_M = 0$). Dans ces configurations, une *catastrophe* arrive, c'est-à-dire que le mécanisme bascule d'une configuration à l'autre ($\clubsuit \rightarrow \diamond$ et $\spadesuit \rightarrow \bullet$). La figure 6.4 représente la configuration

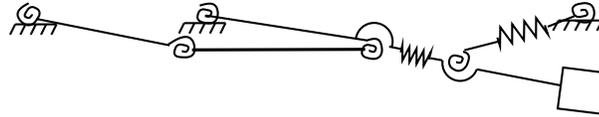


FIG. 6.4 – Mécanisme dans une configuration proche de ♣.

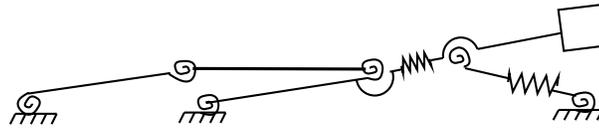
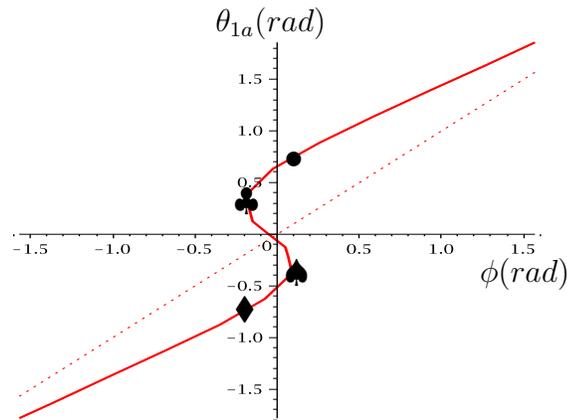


FIG. 6.5 – Mécanisme dans la configuration ♦.

instable ♣ et la figure 6.5 représente la configuration ♦ dans laquelle le mécanisme se retrouve après avoir basculé, lorsque ϕ a continué à augmenter. La figure 6.6 montre

FIG. 6.6 – Évolution du MGS : $\theta_{1a} = \mathcal{F}(\phi)$.

les configurations θ_{1a} possibles pour une valeur commandée ϕ de l'actionneur. Ce graphique a été obtenu avec une résolution numérique du MGS et révèle que θ_{1a} n'est pas une *fonction mathématique* de ϕ parce que θ_{1a} peut prendre deux valeurs différentes pour une même valeur de ϕ . La configuration dépend également de la trajectoire suivie (phénomène d'hystérésis). Cependant, ce phénomène possède son équivalent en cinématique, lorsque plusieurs branches de solution peuvent exister pour un même problème géométrique inverse et où un basculement entre deux branches de solution différentes peut se produire au passage d'une singularité cinématique [47].

6.1.4 Contribution de cette application

Dans cette application simple, le MGS et le MQS ont été mis en œuvre et utilisés. Aucun effort extérieur n'a été appliqué pour mettre en évidence le fait que ces modèles apportent de nouvelles possibilités pour l'analyse et la commande des mécanismes parallèles compliants, même en l'absence d'un capteur d'effort. Ces modèles peuvent décrire avec précision le comportement des MPCs, prédire les configurations instables (*catastrophes*) et fournir des informations sur ce qui va se passer dans ces configurations. Cependant, il est important de garder présent à l'esprit les hypothèses sur lesquelles les modèles ont été bâtis : les effets dynamiques sont négligeables. En conséquence de quoi, lorsque le mécanisme bascule rapidement d'une configuration instable à une configuration stable, les conditions d'applications de ces modèles ne sont plus respectées.

6.2 Mécanisme plan 3-RRR compliant

6.2.1 Le mécanisme plan 3-RRR

La deuxième application présentée dans ce chapitre est un mécanisme parallèle 3-RRR compliant. Le mécanisme 3-RRR conventionnel est présenté dans [8]. Lorsque les cercles à motif représentent des articulations rotoïdes, la figure 6.7 est le schéma d'un mécanisme 3-RRR conventionnel. À l'inverse, si ces six cercles représentent des

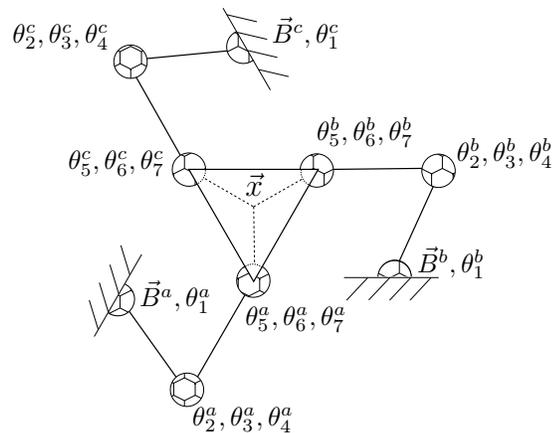


FIG. 6.7 – Mécanisme 3-RRR.

articulations compliantes à trois ddl (figure 1.7), alors la figure 6.7 représente le mécanisme parallèle étudié dans cette section. Les trois pattes sont identiques (figure 6.8) et sont composées d'un actionneur rotoïde —considéré comme une articulation rotoïde compliante à 1 ddl— et deux articulations compliantes passives —chacune modélisée par trois ressorts. Ainsi chaque patte est équivalente à un mécanisme sériel $\underline{\text{RPPRPPR}}$ à 7 degrés de mobilité. Le mécanisme entier possède 21 articulations.

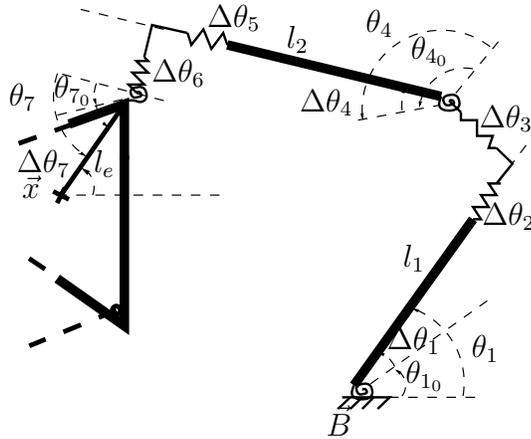


FIG. 6.8 – Schéma équivalent d'une patte.

Les paramètres géométriques utilisés dans cette application sont les suivants. La longueur des membrures $l_1 = l_2 = 1$ m et $l_e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ m. Les points d'ancrage à la base de chaque patte sont $\vec{B}^a = [-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}]^T$, $\vec{B}^b = [1; -\frac{\sqrt{3}}{3}]^T$ et $\vec{B}^c = [0; \frac{2\sqrt{3}}{3}]^T$. Le vecteur $\vec{\phi}$ regroupe les valeurs commandées (non déformées) des trois actionneurs. Dans la configuration initiale $\vec{\phi}$ est

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{10}^a \\ \theta_{10}^b \\ \theta_{10}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi/3 \\ \pi/3 \\ \pi \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

L'angle ou la longueur au repos du $j^{\text{ème}}$ ressort équivalent de la $i^{\text{ème}}$ patte est noté(e) θ_{j0}^i . Sa déformation s'écrit $\Delta\theta_j^i = \theta_j^i - \theta_{j0}^i$. Toutes les déformations du mécanisme sont assemblées dans le vecteur $\Delta\vec{\theta}$.

6.2.2 Modèle géométrico-statique

6.2.2.1 Contraintes géométriques

La pose $\vec{x}^i = [x^i; y^i; \phi^i]^T$ de la $i^{\text{ème}}$ patte s'écrit

$$\begin{cases} x^i = B_x^i + (1 + \Delta\theta_2^i)c_1^i + \Delta\theta_3^i s_1^i + (1 + \Delta\theta_5^i)c_{14}^i + \Delta\theta_6^i s_{14}^i + l_e c_{147}^i \\ y^i = B_y^i + (1 + \Delta\theta_2^i)s_1^i - \Delta\theta_3^i c_1^i + (1 + \Delta\theta_5^i)s_{14}^i - \Delta\theta_6^i c_{14}^i + l_e s_{147}^i \\ \phi^i = \theta_1^i + \theta_4^i + \theta_7^i \end{cases} \quad (6.24)$$

où $c_1^i = \cos(\theta_1^i)$, $c_{14}^i = \cos(\theta_1^i + \theta_4^i)$, $c_{147}^i = \cos(\theta_1^i + \theta_4^i + \theta_7^i)$ (respectivement s pour \sin). Les contraintes géométriques de fermeture des boucles cinématiques sont définies comme suit

$$\begin{cases} \vec{x}^a - \vec{x}^b = \vec{0}, \\ \vec{x}^a - \vec{x}^c = \vec{0}. \end{cases} \quad (6.25)$$

Dans ce mécanisme plan à trois pattes, il y a six contraintes géométriques indépendantes. Ces contraintes peuvent être découplées en deux ensembles de trois contraintes. Les coordonnées θ_5^b , θ_6^b , θ_7^b , θ_5^c , θ_6^c et θ_7^c sont choisies comme coordonnées dépendantes

$$\vec{\lambda} = [\theta_5^b; \theta_6^b; \theta_7^b; \theta_5^c; \theta_6^c; \theta_7^c]. \quad (6.26)$$

Les coordonnées généralisées sont

$$\vec{\psi} = [\theta_1^a; \dots; \theta_7^a; \theta_1^b; \dots; \theta_4^b; \theta_1^c; \dots; \theta_4^c]. \quad (6.27)$$

Lorsqu'une pose \vec{x}^* est imposée au mécanisme, les trois contraintes supplémentaires s'écrivent

$$\vec{x}^* - \vec{x}^a = \vec{0}. \quad (6.28)$$

6.2.2.2 Contraintes cinématiques

La matrice jacobienne \mathbf{J}_θ du mécanisme 3-RRR compliant s'écrit

$$\mathbf{J}_\theta = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \vec{x}^a}{\partial \vec{\theta}^a}; \frac{\partial \vec{x}^b}{\partial \vec{\theta}^b}; \frac{\partial \vec{x}^c}{\partial \vec{\theta}^c} \right] = \frac{1}{3} [\mathbf{J}^a; \mathbf{J}^b; \mathbf{J}^c], \quad (6.29)$$

où les matrices \mathbf{J}^i sont égales à

$$\mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial \theta_1^i} & c_1^i & s_1^i & -(1 + \Delta\theta_4^i)s_{14}^i + \Delta\theta_5^i c_{14}^i - l_e s_{147}^i & c_{14}^i & s_{14}^i & -l_e s_{147}^i \\ \frac{\partial y^i}{\partial \theta_1^i} & s_1^i & -c_1^i & (1 + \Delta\theta_4^i)c_{14}^i - \Delta\theta_5^i s_{14}^i + l_e c_{147}^i & s_{14}^i & -c_{14}^i & l_e c_{147}^i \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

avec $\partial x^i / \partial \theta_1^i = -(1 + \Delta\theta_2^i)s_1^i + \Delta\theta_3^i c_1^i - (1 + \Delta\theta_5^i)s_{14}^i + \Delta\theta_6^i c_{14}^i - l_e s_{147}^i$
 et $\partial y^i / \partial \theta_1^i = (1 + \Delta\theta_2^i)c_1^i - \Delta\theta_3^i s_1^i + (1 + \Delta\theta_5^i)c_{14}^i - \Delta\theta_6^i s_{14}^i + l_e c_{147}^i$.

Les contraintes cinématiques s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{J}^a \dot{\theta}^a - \mathbf{J}^b \dot{\theta}^b = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}^a \dot{\theta}^a - \mathbf{J}^c \dot{\theta}^c = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{S}^b = [\mathbf{J}^a - \mathbf{J}^b] \\ \mathbf{S}^c = [\mathbf{J}^a - \mathbf{J}^c] \end{cases} \quad (6.31)$$

Les matrices \mathbf{S}^i peuvent être décomposées en matrices \mathbf{S}_ψ^i et \mathbf{S}_λ^i :

$$\mathbf{S}_\psi^b = \begin{bmatrix} -\partial x^b / \partial \theta_1^b & -c_1^b & -s_1^b & (1 + \Delta\theta_4^b)s_{14}^b - \Delta\theta_5^b c_{14}^b + l_e s_{147}^b & & \\ \mathbf{J}^a & -\partial y^b / \partial \theta_1^b & -s_1^b & c_1^b & -(1 + \Delta\theta_4^b)c_{14}^b + \Delta\theta_5^b s_{14}^b - l_e c_{147}^b & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$\mathbf{S}_\psi^c = \begin{bmatrix} -\partial x^c / \partial \theta_1^c & -c_1^c & -s_1^c & (1 + \Delta\theta_4^c)s_{14}^c - \Delta\theta_5^c c_{14}^c + l_e s_{147}^c & & \\ \mathbf{J}^a & \mathbf{0}_{3 \times 4} & -\partial y^c / \partial \theta_1^c & -s_1^c & c_1^c & -(1 + \Delta\theta_4^c)c_{14}^c + \Delta\theta_5^c s_{14}^c - l_e c_{147}^c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$\mathbf{S}_\lambda^i = \begin{bmatrix} c_{14}^i & s_{14}^i & -l_e s_{147}^i \\ s_{14}^i & -c_{14}^i & l_e c_{147}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_\lambda^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{14}^i & s_{14}^i & l_e s_{147}^i \\ s_{14}^i & -c_{14}^i & l_e c_{147}^i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Les matrices \mathbf{G}^i se calculent ensuite facilement :

$$\mathbf{G}^i = \frac{d\vec{\lambda}^i}{d\vec{\psi}} = -\mathbf{S}_\lambda^{i-1} \mathbf{S}_\lambda^i. \quad (6.35)$$

La matrice jacobienne \mathbf{J} du mécanisme s'écrit alors

$$\mathbf{J} = \frac{d\vec{x}}{d\vec{\psi}} = \mathbf{J}_\psi + \mathbf{J}_\lambda^b \mathbf{G}^b + \mathbf{J}_\lambda^c \mathbf{G}^c, \quad (6.36)$$

où les matrices \mathbf{J}_χ sont formées par les colonnes de \mathbf{J}_θ correspondant aux coordonnées χ .

6.2.2.3 Contraintes statiques

L'effort extérieur appliqué sur la plate-forme du mécanisme s'écrit

$$\vec{f} = [f_x, f_y, m_z]^T. \quad (6.37)$$

Les coefficients de raideur k_j^i de chaque ressort sont assemblés dans \mathbf{K}_ψ et \mathbf{K}_λ

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\psi &= \text{diag}(k_1^a, \dots, k_7^a, k_1^b, \dots, k_4^b, k_1^c, \dots, k_4^c), \\ \mathbf{K}_\lambda^b &= \text{diag}(k_5^b, k_6^b, k_7^b), \\ \mathbf{K}_\lambda^c &= \text{diag}(k_5^c, k_6^c, k_7^c). \end{aligned} \quad (6.38)$$

L'équilibre statique du mécanisme est de dimension 15 et il s'écrit

$$\mathbf{K}_\psi(\vec{\psi} - \vec{\psi}_0) + \mathbf{G}_b^T \mathbf{K}_\lambda^b(\vec{\lambda}_b - \vec{\lambda}_{b0}) + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_\lambda^c(\vec{\lambda}_c - \vec{\lambda}_{c0}) - \mathbf{J}^T \vec{f} = \mathbf{0}. \quad (6.39)$$

6.2.3 Modèle géométrico-statique

Utiliser le modèle géométrico-statique de ce MPC consiste à résoudre le système composé par les 24 équations (6.25), (6.28) et (6.39). La résolution se fait numériquement en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Parmi les 30 paramètres $\{\vec{\theta}, \vec{\alpha}, \vec{f}, \vec{x}\}$, six doivent être connus, c'est-à-dire, fixés par l'utilisateur.

6.2.3.1 Validation du modèle

Les résultats obtenus par le MGS sur ce mécanisme ont été comparés à des résultats de simulations statiques effectuées avec le logiciel MSC.Adams. Dans MSC.Adams, les articulations compliantes à trois ddl ont été modélisées par des paliers lisses (*bushing*), puisque ce type d'articulation permet de donner des coefficients de raideur dans les six directions. Dans le but d'étudier l'influence du ratio ρ des raideurs au sein d'une articulation (Sec.1.2.3) sur le comportement d'un MPC, les valeurs de raideur données à ces paliers lisses sous Adams sont $k_x = k_y = \rho$ (N.m⁻¹), $k_{\alpha z} = 1$ (Nm.rad⁻¹) et les raideurs des directions hors du plan $k_{\alpha x} = k_{\alpha y} = 10^{20}$ (Nm.rad⁻¹) et $k_z = 10^{20}$ (N.m⁻¹), soit une valeur pratiquement infinie. Les résultats donnés par les simulations sous Adams étant rigoureusement les mêmes que ceux du modèle géométrico-statique, la validité de ce dernier à partir de nos hypothèses de modélisation d'une articulation compliant est confirmée. Dans les trois graphiques qui suivent (figures 6.9 à 6.11), les résultats Adams n'ont pas été représentés puisqu'ils coïncidaient exactement avec les courbes du MGS.

6.2.3.2 Utilisation du MGS

L'un des principaux apports de ce MGS est qu'il permet de garder une très bonne précision de modélisation d'un MPC même lorsque le comportement des articulations de ce dernier est très différent de celui des articulations conventionnelles qu'elles sont censées remplacer. Cette différence de comportement est d'autant plus importante que le ratio entre la raideur primaire et les raideurs secondaires est bas (éq. 1.8). Dans le but d'illustrer cet apport, le MGS est utilisé dans les prochaines sections pour résoudre

des problèmes classiques en robotique pour différents ratios ρ entre 1 et 100.

6.2.3.3 Modèle géométrique inverse

Le premier graphique (figure 6.9) montre la coordonnée ϕ^a à donner à l'actionneur a pour que l'effecteur se déplace (sans effet dynamique) de $\vec{x}^* = [-0,1; 0; 0]^T$ à $[0,6; 0; 0]^T$. On remarque que lorsque ρ est élevé, le comportement du mécanisme compliant se

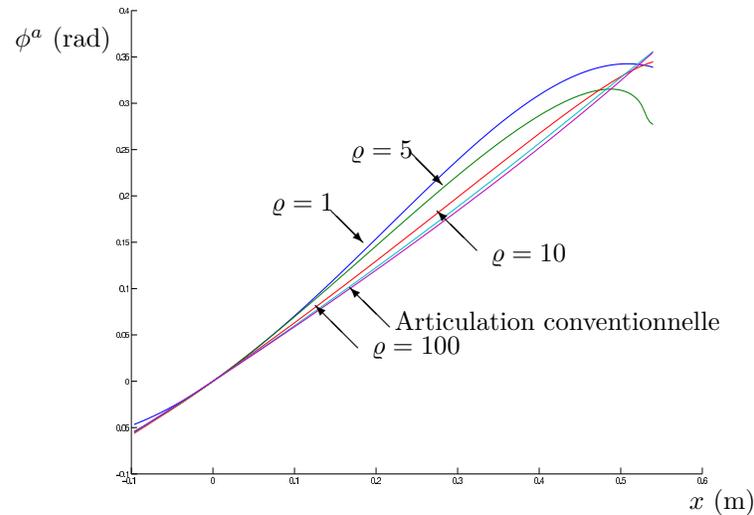


FIG. 6.9 – Coordonnée de l'actionneur ϕ^a pour différentes positions x et différents ratios ρ .

rapproche de celui du mécanisme conventionnel. On remarque également que plus le mécanisme est loin de $x = 0$ (configuration non déformée), plus son comportement diffère de celui d'un mécanisme conventionnel.

6.2.3.4 Modèle géométrique direct

Le deuxième graphique (figure 6.10) montre le déplacement en x de l'effecteur lorsque la valeur commandée de l'actionneur a varie de $(-\pi/3-0,1)$ rad à $(-\pi/3+1)$ rad. Les deux autres actionneurs sont fixes : $\phi^b = \pi/3$ rad et $\phi^c = \pi$ rad. On observe encore qu'un ratio ρ élevé rapproche le MGS du modèle cinématique conventionnel et qu'un mécanisme compliant très déformé se comporte très différemment qu'un mécanisme conventionnel.

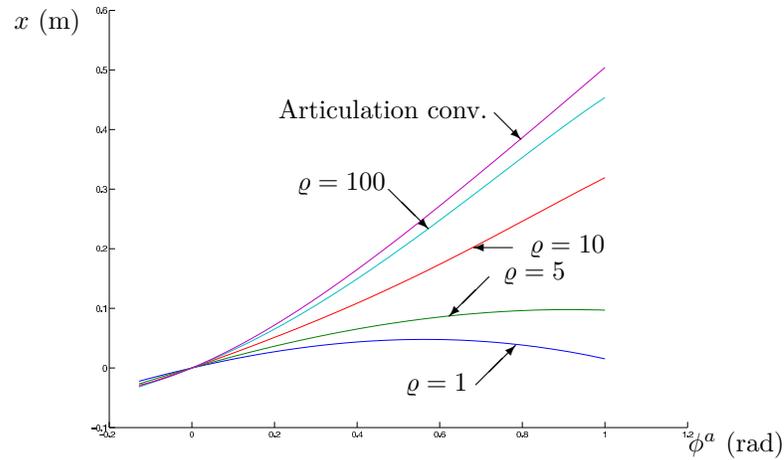


FIG. 6.10 – Position en x de l'effecteur en fonction de ϕ^a pour différents ρ .

6.2.3.5 Raideur du mécanisme

Le troisième graphique (figure 6.11) montre le comportement du mécanisme soumis à un effort extérieur \vec{f} variant de $[-0,1; 0; 0]^T$ à $[0,6; 0; 0]^T$.

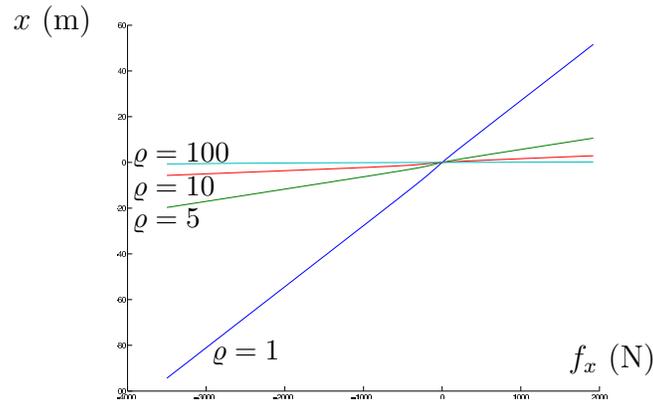


FIG. 6.11 – Variation de la position en x en fonction de l'effort \vec{f} pour différents ρ .

Puisqu'un mécanisme conventionnel est supposé avoir une compliance nulle (raideur infinie), la position de l'effecteur ne varie pas, quel que soit l'effort auquel il est soumis. Ainsi, on peut encore conclure de ce graphique que le MGS confirme que le comportement d'un MPC se rapproche de celui d'un mécanisme conventionnel lorsque ρ est élevé.

6.2.4 Conclusion

L'application présentée permet de confirmer par les simulations que le MGS est correct, qu'il est plus précis que le seul modèle géométrique pour les MPC et que le MGS reste valide pour les mécanismes conventionnels.

6.3 Triptéron compliant

6.3.1 Présentation du Triptéron compliant

6.3.1.1 Le Triptéron conventionnel

Le dernier exemple d'application choisi pour illustrer l'application de la modélisation géométrico-statique et quasi-statique des mécanismes parallèles compliants est le *Triptéron*, un mécanisme spatial 3-PRRR présenté dans [14, 51, 53]. La structure cinématique de ce mécanisme est montrée à la figure 6.12.

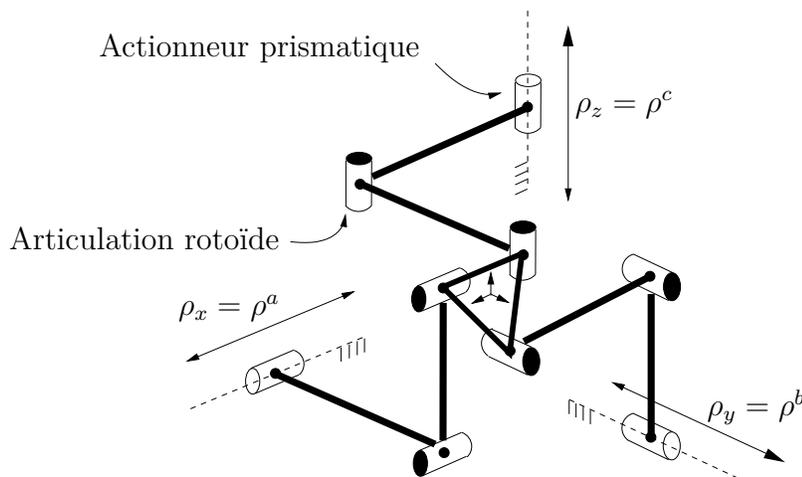


FIG. 6.12 – Structure cinématique du Triptéron.

Les principaux avantages de cette architecture sont :

- La relation entre l'entrée (déplacement des actionneurs) et la sortie (déplacement de la plate-forme terminale) est une correspondance directe un pour un.

- La matrice jacobienne cinématique est constante et diagonale.
- Il n’y a pas de singularité cinématique.
- Un mécanisme parallèle 3-PRRR isotrope est isotrope sur l’ensemble de son espace de travail, c’est-à-dire qu’il possède les mêmes propriétés dans toutes les directions.

6.3.1.2 Le Triptéron compliant

Un prototype de Triptéron compliant a été construit au laboratoire de robotique de l’université Laval [86] en remplaçant les articulations rotoïdes conventionnelles par des articulations compliantes à axe cruciforme [67]. Ce type d’articulation compliant a été choisi parce qu’il offre un débattement relativement grand. La figure 6.13 est une photographie de ce prototype. Ce dernier n’est pas actionné.

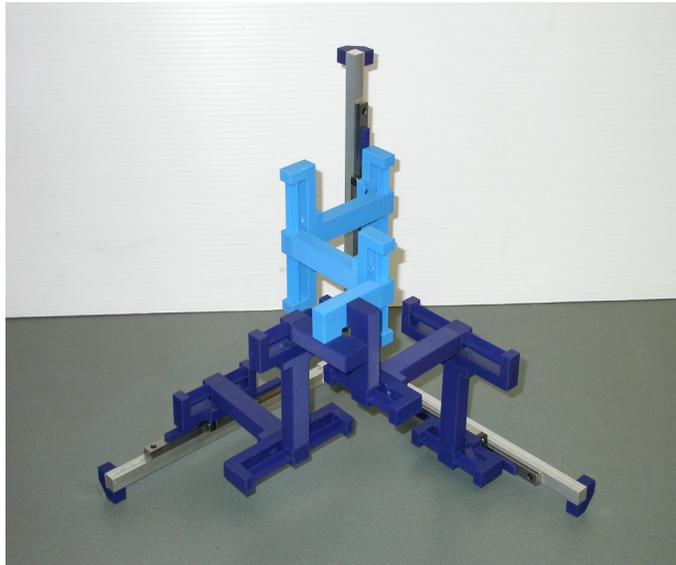


FIG. 6.13 – Triptéron compliant non actionné.

6.3.1.3 Structure cinématique équivalente

Les articulations à axe cruciforme peuvent être modélisées comme un ensemble de six ressorts non couplés et à raideur constante (voir section 1.2.4.1) : trois ressorts linéaires et trois ressorts en torsion. Cependant dans cette application, afin d’alléger le modèle, les articulations compliantes sont modélisées comme un ensemble de trois ressorts en torsion seulement. La perte de précision découlant de cette simplification

est négligeable pour deux raisons :

- Les raideurs des ressorts linéaires équivalents sont élevées dans ce type d’articulation. Les déplacements linéaires dus aux efforts sont donc faibles.
- Une erreur de positionnement linéaire de la $j^{\text{ème}}$ articulation a beaucoup moins d’impact sur la position de la plate-forme du mécanisme que ses erreurs angulaires puisque ces dernières sont amplifiées (multipliées) par la longueur des membrures.

D’un point de vue cinématique, la structure du mécanisme est donc équivalente à un 3-PSSS.

6.3.2 Contraintes à respecter dans les modèles

6.3.2.1 Contraintes géométriques

Coordonnées articulaires Les trois pattes du Triptéron compliant ont la même structure cinématique puisque ce mécanisme est symétrique. Cette structure cinématique est représentée à la figure 6.14. Chaque articulation compliant y est représentée

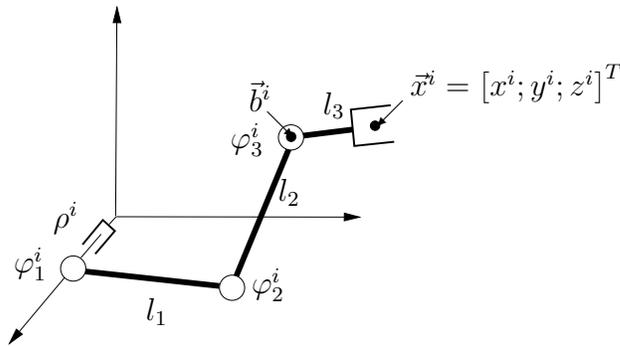


FIG. 6.14 – Structure cinématique équivalente d’une patte.

par un cercle. On modélise une articulation sphérique (figure 6.15) en la remplaçant par trois articulations rotoïdes dont les axes de rotation sont concourants. Ainsi, 3 angles φ_u , φ_v et φ_w sont utilisés pour décrire la configuration d’une articulation sphérique. La définition de ces angles est donnée au paragraphe suivant et dans la figure 6.16. Chaque patte i est donc décrite par 10 coordonnées articulaires :

- ρ^i représente la position de l’articulation prismatic,
- $\varphi_{1u}^i, \varphi_{1v}^i$ et φ_{1w}^i représentent les angles de la première articulation compliant,
- $\varphi_{2u}^i, \varphi_{2v}^i$ et φ_{2w}^i représentent les angles de la deuxième articulation compliant,

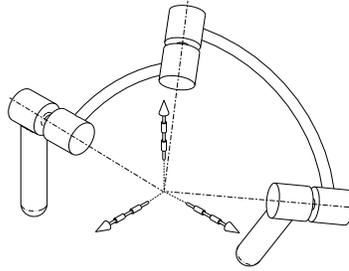


FIG. 6.15 – Schéma d'une articulation sphérique (Tiré de [55]).

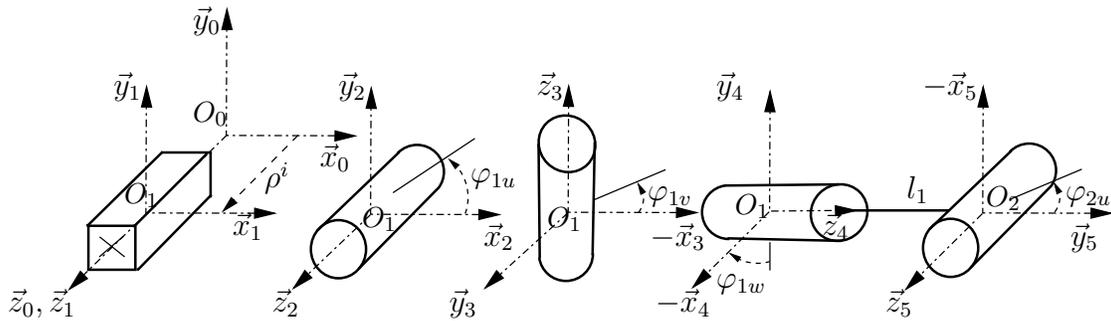


FIG. 6.16 – Repères et paramètres de Denavit-Hartenberg de la première articulation.

– $\varphi_{3u}^i, \varphi_{3v}^i$ et φ_{3w}^i représentent les angles de la troisième articulation compliant. Les 10 coordonnées de la $i^{\text{ème}}$ patte sont regroupées dans un vecteur $\vec{\theta}^i$ comme suit,

$$\vec{\theta}^i = [\rho^i; \varphi_{1u}^i; \varphi_{1v}^i; \varphi_{1w}^i; \varphi_{2u}^i; \varphi_{2v}^i; \varphi_{2w}^i; \varphi_{3u}^i; \varphi_{3v}^i; \varphi_{3w}^i]^T, \quad i = a, b, c. \quad (6.40)$$

Le mécanisme possède 30 coordonnées articulaires ($m = 30$) qui sont regroupées dans un vecteur $\vec{\theta}$. L'ordre des coordonnées au sein de ce vecteur est détaillé dans le paragraphe sur les contraintes géométriques.

Pose de la plate-forme En utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg [35], on peut calculer la position et la matrice d'orientation de la plate-forme. Les repères utilisés pour déterminer les paramètres de Denavit-Hartenberg de l'articulation prismatique et de la première articulation sphérique sont représentés à la figure 6.16 (les repères 1 à 4 ont la même origine O_1). Pour déterminer les paramètres DH, on considère que les trois membrures l_1, l_2 et l_3 sont alignées. Les paramètres DH sont donnés dans le tableau 6.1. La configuration de la patte est mise en accord avec la réalité (figure 6.13) en utilisant les angles au repos des ressorts en torsion équivalents. Les trois pattes étant identiques, ces angles au repos sont donnés dans le tableau 6.2. De plus, chaque

	a_j	α_j	b_j	θ_j
ρ^i	0	0	ρ^i	0
φ_{ju}^i	0	$\pi/2$	0	$\pi + \varphi_{ju}^i$
φ_{jv}^i	0	$\pi/2$	0	$-\pi/2 + \varphi_{jv}^i$
φ_{jw}^i	0	$\pi/2$	l_i	$-\pi/2 + \varphi_{jw}^i$

TAB. 6.1 – Paramètres DH de la patte i ($j = 1, 2, 3$).

ρ_0^a	ϕ_x	φ_{1u}^i	$\pi/2$ rad	φ_{2u}^i	$-\pi/2$ rad	φ_{3u}^i	$\pi/2$ rad
ρ_0^b	ϕ_y	φ_{1v}^i	0 rad	φ_{2v}^i	0 rad	φ_{3v}^i	0 rad
ρ_0^c	ϕ_z	φ_{1w}^i	0 rad	φ_{2w}^i	0 rad	φ_{3w}^i	0 rad

TAB. 6.2 – Coordonnées correspondant à la configuration non déformée des ressorts équivalents.

patte est orientée selon un des axes du repère global $\{O_0x_0y_0z_0\}$: l'actionneur ρ^a agit selon (Ox_0) , l'actionneur ρ^b agit selon (Oy_0) et l'actionneur ρ^c agit selon (Oz_0) . Les matrices homogènes représentant la position et l'orientation des repères locaux de chacune des pattes sont donc écrites

$$\mathbf{Z}_0^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_0^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Les matrices homogènes de chaque articulation s'écrivent

$$\mathbf{Z}_\rho^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z}_{ju}^i = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_{ju}^i & 0 & -\sin \varphi_{ju}^i & 0 \\ -\sin \varphi_{ju}^i & 0 & \cos \varphi_{ju}^i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Z}_{jv}^i = \begin{bmatrix} \sin \varphi_{jv}^i & 0 & -\cos \varphi_{jv}^i & 0 \\ -\cos \varphi_{jv}^i & 0 & -\sin \varphi_{jv}^i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z}_{jw}^i = \begin{bmatrix} \sin \varphi_{jw}^i & 0 & -\cos \varphi_{jw}^i & 0 \\ -\cos \varphi_{jw}^i & 0 & -\sin \varphi_{jw}^i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Grâce à ces matrices, on peut calculer la pose de l'effecteur exprimée dans le repère de la patte et considéré comme l'organe terminal de chacune des pattes.

$$\mathbf{Z}^i = \mathbf{Z}_\rho^i \mathbf{Z}_{1u}^i \mathbf{Z}_{1v}^i \mathbf{Z}_{1w}^i \mathbf{Z}_{2u}^i \mathbf{Z}_{2v}^i \mathbf{Z}_{2w}^i \mathbf{Z}_{3u}^i \mathbf{Z}_{3v}^i \mathbf{Z}_{3w}^i = \prod_{j=1}^{10} \mathbf{T}_{\theta_j^i}^i \quad (6.43)$$

La matrice homogène correspondant à la pose de la plate-forme est la moyenne des matrices de chaque patte exprimée dans le repère global. Elle s'écrit

$$\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{Z}_0^i \mathbf{Z}^i (\mathbf{Z}_0^i)^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \vec{p} \\ \vec{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad i = a, b, c, \quad (6.44)$$

où la moyenne des positions \vec{p}^i se fait arithmétiquement et la moyenne des orientations \mathbf{Q}^i se fait en calculant d'abord les paramètres de Rodrigues de chaque matrice d'orientation \mathbf{Q}^i , puis la moyenne arithmétique de ces paramètres et enfin, la matrice d'orientation \mathbf{Q} correspondant à ces paramètres moyens. En pratique cependant, pour diminuer les temps de calculs, on définit $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^a$. À partir de cette équation matricielle (6.44), le vecteur \vec{x} , qui représente la pose de l'effecteur, peut être écrit. En utilisant les invariants quadratiques ce vecteur possède sept coordonnées non indépendantes. Il se calcule à partir de \mathbf{Z} comme suit lorsque $a_0 \neq 0$:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{Q})} \\ \frac{1}{2a_0} \vec{\text{vect}}(\mathbf{Q}) \end{bmatrix}, \quad a_0 \neq 0, \quad (6.45)$$

où l'opérateur $\vec{\text{vect}}(\cdot)$ est défini par

$$\vec{\text{vect}}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} Q_{23} - Q_{32} \\ Q_{13} - Q_{31} \\ Q_{12} - Q_{21} \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

avec Q_{ij} le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{Q} . Lorsque l'on désire n'avoir que des coordonnées indépendantes pour décrire la pose cartésienne du mécanisme, on peut choisir d'utiliser les paramètres de Rodrigues. La pose \vec{x} est alors définie par six coordonnées et s'écrit

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \frac{1}{2a_0^2} \vec{\text{vect}}(\mathbf{Q}) \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{Q})} \neq 0. \quad (6.47)$$

L'orientation initiale de l'effecteur est définie telle que $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$, c'est-à-dire $\text{tr}(\mathbf{Q}) = 3$ et $a_0 = 1$. Puisque les variations de la pose sont faibles du fait du débattement limité des articulations compliantes, on aura $\text{tr}(\mathbf{Q}) \neq -1$ et $a_0 \neq 0$ sur tout l'espace atteignable du mécanisme, donc il n'y aura pas de singularité de représentation.

Contraintes de fermeture des boucles cinématiques Le Triptéron étant un mécanisme parallèle, les poses de toutes ses pattes prises individuellement doivent être égales. Cela fournit un premier système de trente-deux contraintes géométriques (triviales ou non triviales) que les coordonnées articulaires du mécanisme doivent respecter :

$$\mathcal{K}(\vec{\theta}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{Z}_0^a \mathbf{Z}^a \mathbf{Z}_0^{a-1} - \mathbf{Z}_0^b \mathbf{Z}^b \mathbf{Z}_0^{b-1} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{Z}_0^a \mathbf{Z}^a \mathbf{Z}_0^{a-1} - \mathbf{Z}_0^c \mathbf{Z}^c \mathbf{Z}_0^{c-1} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6.48)$$

Ces trente-deux contraintes n'étant pas indépendantes les unes des autres, on préfère utiliser en pratique les équations qui utilisent les paramètres de Rodrigues et qui fournissent six contraintes indépendantes par boucle cinématique. Le mécanisme compte donc trente coordonnées articulaires et douze contraintes géométriques indépendantes ($\mathfrak{C} = 12$). Le degré de mobilité \mathfrak{M} est égal à dix-huit puisque $\mathfrak{M} = m - \mathfrak{C}$. Les contraintes géométriques s'écrivent

$$\mathcal{K}(\vec{\theta}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}^a - \vec{p}^b = \vec{0} \\ \vec{q}^a - \vec{q}^b = \vec{0} \\ \vec{p}^a - \vec{p}^c = \vec{0} \\ \vec{q}^a - \vec{q}^c = \vec{0} \end{cases} . \quad (6.49)$$

Choix des coordonnées dépendantes et généralisées Parmi les m coordonnées articulaires $\vec{\theta}$, douze coordonnées dépendantes $\vec{\lambda}$ et dix-huit coordonnées généralisées, géométriquement indépendantes $\vec{\psi}$ doivent être choisies. Puisqu'il y a dix coordonnées articulaires par patte, il est possible de découpler les contraintes géométriques en ne choisissant pas de coordonnée λ sur la patte a . De plus, il est possible de découpler les six contraintes géométriques au sein d'une même boucle cinématique en choisissant de fermer les boucles aux points \vec{b}^b et \vec{b}^c plutôt que \vec{x} (figure 6.14). Ainsi, parmi les coordonnées $\vec{\lambda}$, les contraintes en position dépendent seulement des coordonnées $\varphi_{1u}^b, \varphi_{1v}^b$ et φ_{2u}^b pour la boucle ab et $\varphi_{1u}^c, \varphi_{1v}^c$ et φ_{2u}^c pour la boucle ac . La résolution des contraintes en orientation peut s'effectuer dans un second temps pour déterminer les autres coordonnées ($\varphi_{3u}^b, \varphi_{3v}^b, \varphi_{3w}^b$ pour la boucle ab et $\varphi_{3u}^c, \varphi_{3v}^c, \varphi_{3w}^c$ pour la boucle ac). Les coordonnées généralisées retenues sont donc

$$\vec{\psi} = [\vec{\theta}^{aT}; \rho^b; \varphi_{1w}^b; \varphi_{2v}^b; \varphi_{2w}^b; \rho^c; \varphi_{1w}^c; \varphi_{2v}^c; \varphi_{2w}^c]^T, \quad (6.50)$$

et les coordonnées dépendantes sont

$$\vec{\lambda} = [\varphi_{1u}^b; \varphi_{1v}^b; \varphi_{2u}^b; \varphi_{3u}^b; \varphi_{3v}^b; \varphi_{3w}^b; \varphi_{1u}^c; \varphi_{1v}^c; \varphi_{2u}^c; \varphi_{3u}^c; \varphi_{3v}^c; \varphi_{3w}^c]^T. \quad (6.51)$$

On note ψ_j la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de $\vec{\psi}$ et λ_j la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de $\vec{\lambda}$. De plus, le vecteur des coordonnées articulaires $\vec{\theta}$ est défini de manière à ce que les coordonnées généralisées soient les dix-huit premières coordonnées (ψ_1^a à ψ_{10}^a , puis ψ_1^b à ψ_4^b et ψ_1^c à ψ_4^c) et que les coordonnées contraintes soient les douze dernières (λ_1^b à λ_6^b , puis λ_1^c à λ_6^c) :

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Position des centres de masse \vec{c}_j^i La plate-forme du mécanisme étant considérée comme un ensemble de trois membrures appartenant chacune à une patte, le mécanisme possède neuf membrures. Les positions des centres de masse de ces neuf corps exprimés dans leur repère local sont représentées par un vecteur homogène noté \vec{c}_{jL}^i

$$\begin{cases} \vec{c}_{1L}^i = [0; -l_1/2; 0; 1]^T, \\ \vec{c}_{2L}^i = [0; -l_2/2; 0; 1]^T, \\ \vec{c}_{3L}^i = [0; -l_3/2; 0; 1]^T. \end{cases} \quad (6.53)$$

Dans le repère global, la position \vec{c}_j^i du $j^{\text{ème}}$ centre de masse se calcule facilement en utilisant les matrices homogènes

$$\begin{cases} \vec{c}_1^i = \mathbf{Z}_0^i \prod_{j=1}^3 \mathbf{Z}_{\theta_j^i}^i \vec{c}_{1L}^i, \\ \vec{c}_2^i = \mathbf{Z}_0^i \prod_{j=1}^6 \mathbf{Z}_{\theta_j^i}^i \vec{c}_{2L}^i, \\ \vec{c}_3^i = \mathbf{Z}_0^i \prod_{j=1}^9 \mathbf{Z}_{\theta_j^i}^i \vec{c}_{3L}^i. \end{cases} \quad (6.54)$$

6.3.2.2 Contraintes cinématiques

Matrice \mathbf{G} Grâce à la possibilité de découpler les contraintes géométriques, la matrice \mathbf{G} peut être écrite sous la forme d'un ensemble de deux blocs \mathbf{G}^{ab} et \mathbf{G}^{ac} :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} d\vec{\lambda}^b/d\vec{\psi} \\ d\vec{\lambda}^c/d\vec{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{ab} \\ \mathbf{G}^{ac} \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Les matrices \mathbf{G}^{ai} peuvent être calculées indifféremment à partir des trente-deux contraintes géométriques non indépendantes (*écrites sous une forme de vecteur de dimension douze*

plutôt que de matrice de dimension 4×4) données à l'équation (6.48) ou des contraintes géométriques indépendantes (éq. (6.49)). Dans le premier cas, \mathbf{G}^{ai} s'écrit

$$\mathbf{G}^{ai} = -\left(\mathbf{S}_\lambda^{iT} \mathbf{S}_\lambda^i\right)^{-1} \mathbf{S}_\lambda^{iT} \mathbf{S}_\psi^i, \quad i = b, c \quad (6.56)$$

où $\mathbf{S}_\lambda^i = d\mathcal{K}^{ai}/d\vec{\lambda}^i$ est de dimension 16×6 et $\mathbf{S}_\psi^i = d\mathcal{K}^{ai}/d\vec{\psi}$ est de dimension 16×18 . Dans le cas où les contraintes indépendantes sont utilisées, \mathbf{G}^{ai} s'écrit

$$\mathbf{G}^{ai} = -(\mathbf{S}_\lambda^i)^{-1} \mathbf{S}_\psi^i \quad i = b, c \quad (6.57)$$

où $\mathbf{S}_\lambda^i = d\mathcal{K}^{ai}/d\vec{\lambda}^i$ est carrée (6×6) et $\mathbf{S}_\psi^i = d\mathcal{K}^{ai}/d\vec{\psi}$ est de dimension 6×18 .

Matrices S L'intérêt de la première formulation réside dans le fait que les dérivations analytiques de ces contraintes sont très simples. La $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{S}^i s'écrit²

$$\mathbf{S}_j^i = \frac{\partial \mathcal{K}^{ai}}{\partial \theta_j} \stackrel{\circ}{=} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\mathbf{Z}_0^a \mathbf{Z}^a \mathbf{Z}_0^{a-1} - \mathbf{Z}_0^i \mathbf{Z}^i \mathbf{Z}_0^{i-1} \right). \quad (6.58)$$

La dérivée de la matrice homogène de l'articulation θ_j par la coordonnée $\theta_{j'} (\neq \theta_j)$ est nulle et la dérivée de la matrice homogène de l'articulation θ_j par la coordonnée θ_j s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}_\rho^i}{d\rho^i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{Z}_{ju}^i}{d\varphi_{ju}^i} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_{ju}^i & 0 & -\cos \varphi_{ju}^i & 0 \\ -\cos \varphi_{ju}^i & 0 & -\sin \varphi_{ju}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \frac{d\mathbf{Z}_{jv}^i}{d\varphi_{jv}^i} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_{jv}^i & 0 & \sin \varphi_{jv}^i & 0 \\ \sin \varphi_{jv}^i & 0 & -\cos \varphi_{jv}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{Z}_{jw}^i}{d\varphi_{jw}^i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{jw}^i & 0 & \sin \varphi_{jw}^i & 0 \\ \sin \varphi_{jw}^i & 0 & -\cos \varphi_{jw}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Donc, la colonne $\mathbf{S}_{\theta_j}^i$ se calcule de la façon suivante

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\theta_j^a}^i \stackrel{\circ}{=} \mathbf{Z}_0^a \prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^a}^a \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_j^a}^a}{d\theta_j^a} \cdot \prod_{s=j+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^a}^a \mathbf{Z}_0^{a-1}, \\ \mathbf{S}_{\theta_j^i}^i \stackrel{\circ}{=} -\mathbf{Z}_0^i \prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i}^i \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_j^i}^i}{d\theta_j^i} \cdot \prod_{s=j+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^i}^i \mathbf{Z}_0^{i-1}, \text{ pour } i = b, c. \end{cases} \quad (6.60)$$

Les matrices \mathbf{S}_λ^i et \mathbf{S}_ψ^i sont ensuite assemblées à partir des colonnes correspondant respectivement aux coordonnées λ et ψ .

²La notation $\stackrel{\circ}{=}$ est utilisée à la place de la notation $=$ pour rappeler que le terme de droite est une colonne de 16 éléments alors que le terme de gauche est une matrice 4×4 .

Matrices \mathbf{J}_θ et \mathbf{J} À l'inverse des matrices \mathbf{G}^{ai} et des matrices \mathbf{S}^i , les matrices jacobiennes cinématiques \mathbf{J}_θ et \mathbf{J} ne doivent avoir que six lignes, notamment parce qu'elles servent pour le calcul de l'équilibre statique ($\mathbf{J}^T \vec{f}$). Ces matrices peuvent être calculées à partir de la variation de la matrice homogène représentant la pose \mathbf{Z} (éq.(6.44)).

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\vec{\theta}} = \frac{d}{d\vec{\theta}} \left(\overline{\mathbf{Z}_0^i \mathbf{Z}^i \mathbf{Z}_0^{i-1}} \right) = \frac{d}{d\vec{\theta}} \left(\frac{1}{3} \sum_{i=a}^c \mathbf{Z}_0^i \mathbf{Z}^i \mathbf{Z}_0^{i-1} \right). \quad (6.61)$$

Chaque matrice 4×4 composant ce tenseur d'ordre 3 est égale à

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \theta_j^i} \left(= \frac{1}{3} \mathbf{Z}_0^i \prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_j^i}^i}{d\theta_j^i} \cdot \prod_{s=j+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \mathbf{Z}_0^{i-1} \right). \quad (6.62)$$

À partir de ces matrices $\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}$, on peut calculer les colonnes de la matrice \mathbf{J}_θ . Les trois premiers coefficients de la quatrième colonne de $\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}$, relatifs à la vitesse, correspondent aux trois premiers coefficients de la colonne de \mathbf{J}_θ correspondant à θ_j^i . Les trois coefficients relatifs à la vitesse angulaire sont calculés à partir des blocs 3×3 relatifs aux orientations dans les matrices $\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}$ et \mathbf{Z} .

$$\mathbf{J}_{\theta_j^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}[1, 4] \\ \mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}[2, 4] \\ \mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}[3, 4] \\ \overrightarrow{\text{vect}} \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i} \mathbf{Z}^T)_{[1..3, 1..3]} \right] \end{bmatrix}, \quad (6.63)$$

À partir de ces colonnes $\mathbf{J}_{\theta_j^i}$, on peut assembler les matrices \mathbf{J}_λ et \mathbf{J}_ψ , puis calculer numériquement la matrice \mathbf{J} de dimension 6×18 , avec à la relation suivante

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_\psi + \mathbf{J}_\lambda \mathbf{G}. \quad (6.64)$$

Matrices $\mathbf{P}_j^{i\theta}$ et \mathbf{P}_j^i La matrice $\mathbf{P}_j^{i\theta}$ correspond à la matrice jacobienne du centre de masse de la $j^{\text{ème}}$ membrure de la $i^{\text{ème}}$ patte, par rapport aux coordonnées articulaires $\vec{\theta}$. La $s^{\text{ème}}$ colonne de chacune ces matrices se calcule comme suit

$$\begin{cases} (\mathbf{P}_1^{i\theta})_s = \frac{\partial \vec{c}_1^i}{\partial \theta_s} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{Z}_0^i \prod_{r=1}^{s-1} \mathbf{Z}_{\theta_r^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_s^i}^i}{d\theta_s^i} \cdot \prod_{r=s+1}^3 \mathbf{Z}_{\theta_r^i} \vec{c}_{1L}^i, \\ (\mathbf{P}_2^{i\theta})_s = \frac{\partial \vec{c}_2^i}{\partial \theta_s} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{Z}_0^i \prod_{r=1}^{s-1} \mathbf{Z}_{\theta_r^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_s^i}^i}{d\theta_s^i} \cdot \prod_{r=s+1}^6 \mathbf{Z}_{\theta_r^i} \vec{c}_{2L}^i, \\ (\mathbf{P}_3^{i\theta})_s = \frac{\partial \vec{c}_3^i}{\partial \theta_s} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{Z}_0^i \prod_{r=1}^{s-1} \mathbf{Z}_{\theta_r^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_s^i}^i}{d\theta_s^i} \cdot \prod_{r=s+1}^9 \mathbf{Z}_{\theta_r^i} \vec{c}_{3L}^i. \end{cases} \quad (6.65)$$

La matrice \mathbf{P}_j^i correspondant à la matrice jacobienne du centre de masse de la $j^{\text{ème}}$ membrure de la $i^{\text{ème}}$ patte par rapport aux coordonnées généralisées $\vec{\psi}$, se calcule grâce à la relation suivante :

$$\mathbf{P}_j^i = \mathbf{P}_j^{i\theta} \mathbf{R}. \quad (6.66)$$

6.3.2.3 Contraintes statiques

Raideur des articulations La raideur de l'articulation θ_j est notée k_{θ_j} . Les raideurs des articulations à axe cruciforme étant considérées découplées, les matrices \mathbf{K}_ψ , \mathbf{K}_λ^b et \mathbf{K}_λ^c sont des matrices diagonales composées des raideurs des articulations correspondantes.

Poids des membrures La section et le matériau de fabrication de toutes les membrures étant identiques, la masse de chaque membrure est proportionnelle à sa longueur. En notant \vec{g} l'accélération gravitationnelle et μ la masse linéaire d'une membrure, son poids \vec{w}_j^i s'écrit

$$\vec{w}_j^i = l_j \mu \vec{g}. \quad (6.67)$$

Équilibre statique Les raideurs étant constantes, les efforts articulaires se calculent avec l'équation suivante :

$$\vec{\tau}_\psi = \mathbf{K}_\psi (\vec{\psi} - \vec{\psi}_0) \quad \text{et} \quad \vec{\tau}_\lambda^i = \mathbf{K}_\lambda^i (\vec{\lambda}^i - \vec{\lambda}_0^i). \quad (6.68)$$

En utilisant les matrices calculées plus haut, l'équilibre statique du mécanisme fournit \mathfrak{M} contraintes statiques. Celles-ci s'écrivent

$$\mathcal{S}(\vec{\theta}, \vec{f}) = \vec{\tau}_\psi + \mathbf{G}^{abT} \vec{\tau}_\lambda^b + \mathbf{G}^{acT} \vec{\tau}_\lambda^c - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}_j^{iT} \vec{w}_j^i - \mathbf{J}^T \vec{f} = \vec{0}. \quad (6.69)$$

6.3.2.4 Matrice de raideur

Dans cette application, puisqu'aucune expression symbolique des matrices \mathbf{J} et \mathbf{G} n'est disponible, la formulation alternative présentée à la section 4.3.5 est utilisée. Celle-ci s'écrit

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{R}^T \left[\mathbf{K}_\theta + \mathbf{K}_E^\theta + \mathbf{K}_W^\theta \right] \mathbf{R} + \mathbf{K}_S. \quad (6.70)$$

Les calculs de chacun des éléments (\mathbf{K}_E^θ , \mathbf{K}_W^θ et \mathbf{K}_S) et de la matrice \mathbf{K}_M sont détaillés dans les paragraphes suivants.

Matrice \mathbf{K}_E^θ

$$\mathbf{K}_E^\theta = \frac{d\mathbf{J}_\theta^T}{d\vec{\theta}} \vec{f}. \quad (6.71)$$

La matrice \mathbf{K}_E^θ nécessite de calculer la dérivée de la matrice \mathbf{J}_θ et donc la dérivée des matrices $\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j^i}$. Afin d'alléger le nombre d'indices dans les équations, on ne se réfère au vecteur $\vec{\theta}$ qu'avec un seul indice j variant de un à trente. La distinction entre les pattes se faisant par la position d'une coordonnée dans ce vecteur. On désigne désormais par $\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j}$, la matrice jacobienne correspondant à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de $\vec{\theta}$. On a donc :

$$\frac{d\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j}}{d\vec{\theta}} = \frac{d}{d\vec{\theta}} \left(\frac{d\mathbf{Z}}{d\theta_j} \right) = \frac{d}{d\vec{\theta}} \left(\frac{d}{d\theta_j} \left(\frac{1}{3} \sum_{i=a}^c \mathbf{Z}_0^i \mathbf{Z}_0^{i-1} \right) \right). \quad (6.72)$$

Chaque matrice $d\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j}/d\theta_l$ composant ce tenseur d'ordre 3 est égale à

$$\frac{d\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j}}{d\theta_l} = \frac{d^2\mathbf{Z}}{d\theta_l d\theta_j} = \frac{d}{d\theta_l} \left(\frac{1}{3} \mathbf{Z}_0^i \prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_j^i}}{d\theta_j} \cdot \prod_{s=j+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \mathbf{Z}_0^{i-1} \right), \quad (6.73)$$

où $i = a$ si $j \in \{1, \dots, 10\}$, $i = b$ si $j \in \{11, \dots, 20\}$ et $i = c$ si $j \in \{21, \dots, 30\}$. L'équation précédente est équivalente à

$$\frac{d\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_j}}{d\theta_l} = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ lorsque } \theta_l \text{ et } \theta_j \text{ n'appartiennent pas à la même patte.} \\ \frac{1}{3} \mathbf{Z}_0^i \prod_{s=1}^{l-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_l^i}}{d\theta_l^i} \cdot \prod_{s=l+1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_j^i}}{d\theta_j^i} \cdot \prod_{s=j+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \mathbf{Z}_0^{i-1} \text{ pour } l < j, \\ \frac{1}{3} \mathbf{Z}_0^i \prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d^2\mathbf{Z}_{\theta_j^i}}{d\theta_j^{i2}} \cdot \prod_{s=j+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \mathbf{Z}_0^{i-1} \text{ pour } l = j, \\ \frac{1}{3} \mathbf{Z}_0^i \prod_{s=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_j^i}}{d\theta_j^i} \cdot \prod_{s=j+1}^{l-1} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_{\theta_l^i}}{d\theta_l^i} \cdot \prod_{s=l+1}^{10} \mathbf{Z}_{\theta_s^i} \mathbf{Z}_0^{i-1} \text{ pour } l < j. \end{cases} \quad (6.74)$$

On remarque que ces relations sont relativement simples à mettre en œuvre puisqu'elles utilisent toujours les mêmes éléments (pour $j = a, b, c, \theta_1, \dots, \theta_{30}$) :

- \mathbf{Z}_j .
- $d\mathbf{Z}_j/d\theta_j$ puisque toutes les autres dérivées de \mathbf{Z}_j par $\theta_{j'} \neq \theta_j$ sont nulles.
- $d^2\mathbf{Z}_j/d\theta_j^2$ puisque toutes les autres dérivées secondes de \mathbf{Z}_j sont nulles. Ces dérivées secondes s'écrivent pour les quatre premières articulations :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathbf{Z}_\rho^i}{d\rho^{i^2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{Z}_{ju}^i}{d\varphi_{ju}^i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ju}^i & 0 & \sin \varphi_{ju}^i & 0 \\ \sin \varphi_{ju}^i & 0 & -\cos \varphi_{ju}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
\frac{d\mathbf{Z}_{jv}^i}{d\varphi_{jv}^i} &= \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{jv}^i & 0 & \cos \varphi_{jv}^i & 0 \\ \cos \varphi_{jv}^i & 0 & \sin \varphi_{jv}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{Z}_{jw}^i}{d\varphi_{jw}^i} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{jw}^i & 0 & \cos \varphi_{jw}^i & 0 \\ \cos \varphi_{jw}^i & 0 & \sin \varphi_{jw}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.75}$$

À partir de ces matrices $d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}/d\theta_l$, on peut calculer les vecteur colonnes à six coordonnées $d\mathbf{J}_{\theta_j}/d\theta_l$. Les trois premiers coefficients de la quatrième colonne de $d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}/d\theta_l$, relatifs à l'accélération, correspondent aux trois premiers coefficients de $d\mathbf{J}_{\theta_j}/d\theta_l$. Les trois coefficients relatifs à l'accélération angulaire sont calculés à partir des blocs 3×3 relatifs aux orientations dans les matrices $d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}/d\theta_l$, $\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}$ et \mathbf{Z}_j .

$$\frac{d\mathbf{J}_{\theta_j}}{d\theta_l} = \begin{bmatrix} d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}/d\theta_l[1, 4] \\ d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}/d\theta_l[2, 4] \\ d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}/d\theta_l[3, 4] \\ \text{vect} \left[\left(\frac{d\mathbf{J}_{\mathbf{z}_j}}{d\theta_l} \mathbf{Z}^T + \mathbf{J}_{\mathbf{z}_j} \mathbf{J}_{\mathbf{z}_l}^T \right)_{[1..3, 1..3]} \right] \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

La matrice \mathbf{K}_E^θ est ensuite assemblée. $(d\mathbf{J}_{\theta_j}/d\theta_l)^T \vec{f}$ étant le $j^{\text{ème}}$ coefficient de la $l^{\text{ème}}$ ligne. La matrice \mathbf{K}_E^θ est une matrice 30×30 composée d'une diagonale de trois blocs de dimension 10×10 .

$$\mathbf{K}_E^\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E^a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_E^c \end{bmatrix}. \tag{6.77}$$

Matrice \mathbf{K}_W^θ De la même manière que pour la matrice \mathbf{K}_E^θ , le calcul de la matrice de raideur due au poids des membrures se calcule avec les matrices \mathbf{Z}_j , $d\mathbf{Z}_j/d\theta_j$ et $d^2\mathbf{Z}_j/d\theta_j^2$.

Matrice \mathbf{K}_S D'après l'équation (4.89), cette matrice peut s'écrire

$$\mathbf{K}_S = - \left[\left(\mathbf{G}^{abT} \frac{d\mathbf{S}_\lambda^{bT}}{d\theta} + \frac{d\mathbf{S}_\psi^{bT}}{d\theta} \right) \vec{v}_{\lambda^b} + \left(\mathbf{G}^{acT} \frac{d\mathbf{S}_\lambda^{cT}}{d\theta} + \frac{d\mathbf{S}_\psi^{cT}}{d\theta} \right) \vec{v}_{\lambda^c} \right] \mathbf{R}, \quad (6.78)$$

$$\text{avec } \vec{v}_{\lambda^i} = (\mathbf{S}_\lambda^i)^{-T} \left(\vec{\tau}_{\lambda^i} - \mathbf{J}_{\lambda^i}^T \vec{f} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{c}_j}{\partial \lambda^i} \right)^T \vec{w}_j \right).$$

Pour calculer la matrice \mathbf{K}_S , il faut donc calculer la dérivée des matrices \mathbf{S}_λ^i et \mathbf{S}_ψ^i . Ces dérivations ne demandent pas de calcul supplémentaire puisqu'elles utilisent les dérivées des matrices jacobiennes. Les contraintes géométriques de fermeture des boucles ab et ac ; et leurs dérivées s'écrivent

$$\mathcal{K}^{ai}(\theta) = \vec{x}^a - \vec{x}^i = \vec{0}, \quad i = b, c. \quad (6.79)$$

$$\mathbf{S}^i = \left[\frac{d\mathcal{K}^{ai}}{d\vec{\psi}_a} \quad \frac{d\mathcal{K}^{ai}}{d\vec{\psi}^i} \quad \frac{d\mathcal{K}^{ai}}{d\vec{\lambda}^i} \right] = \left[\mathbf{J}_{\vec{\theta}^a} \quad -\mathbf{J}_{\vec{\theta}^i} \right]. \quad (6.80)$$

Chaque colonne $\mathbf{S}_{\theta_j^i}^i$ ou $\mathbf{S}_{\theta_j^i}^i$ de cette matrice peut donc s'écrire $\mathbf{S}_{\theta_j^i}^i = \mathbf{j}_{\theta_j^a}$ et $\mathbf{S}_{\theta_j^i}^i = \mathbf{j}_{\theta_j^i}$. La dérivée de ces colonnes peut donc être numériquement calculée en réutilisant les calculs des dérivées des vecteurs colonne \mathbf{j}_{θ_j} . Puisque $d\mathbf{j}_{\theta_j}/d\theta_l$ est nulle si $l \neq j$, on retrouve beaucoup de zéros dans ces matrices :

$$\frac{d\vec{S}_\lambda^{bT}}{d\vec{\theta}} \vec{v}_{\lambda^b} = \left[\mathbf{0}_{6 \times 18} \quad \text{diag} \left(-\frac{d\mathbf{j}_{\lambda_j^b T}}{d\lambda_j^b} \vec{v}_{\lambda^b} \right)_{j=1,6} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6} \right] \quad (6.81)$$

$$\frac{d\vec{S}_\lambda^{cT}}{d\vec{\theta}} \vec{v}_{\lambda^c} = \left[\mathbf{0}_{6 \times 24} \quad \text{diag} \left(-\frac{d\mathbf{j}_{\lambda_j^c T}}{d\lambda_j^c} \vec{v}_{\lambda^b} \right)_{j=1,6} \right] \quad (6.82)$$

$$\frac{d\vec{S}_\psi^{bT}}{d\vec{\theta}} \vec{v}_{\lambda^b} = \left[\begin{array}{ccc} \text{diag} \left(-\frac{d\mathbf{j}_{\theta_j^a T}}{d\theta_j^a} \vec{v}_{\lambda^b} \right)_{j=1,10} & \mathbf{0}_{10 \times 4} & \mathbf{0}_{10 \times 16} \\ \mathbf{0}_{4 \times 10} & \text{diag} \left(-\frac{d\mathbf{j}_{\psi_j^b T}}{d\psi_j^b} \vec{v}_{\lambda^b} \right)_{j=1,4} & \mathbf{0}_{4 \times 16} \\ \mathbf{0}_{4 \times 10} & \mathbf{0}_{4 \times 10} & \mathbf{0}_{4 \times 16} \end{array} \right] \quad (6.83)$$

$$\frac{d\vec{S}_\psi^{cT}}{d\vec{\theta}} \vec{v}_{\lambda^c} = \left[\begin{array}{ccc} \text{diag} \left(-\frac{d\mathbf{j}_{\theta_j^a T}}{d\theta_j^a} \vec{v}_{\lambda^c} \right)_{j=1,10} & \mathbf{0}_{10 \times 4} & \mathbf{0}_{10 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 12} \\ \mathbf{0}_{4 \times 10} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 12} \\ \mathbf{0}_{4 \times 10} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \text{diag} \left(-\frac{d\mathbf{j}_{\psi_j^c T}}{d\psi_j^c} \vec{v}_{\lambda^c} \right)_{j=1,4} & \mathbf{0}_{4 \times 12} \end{array} \right] \quad (6.84)$$

Matrice \mathbf{K}_M À partir de tous les éléments calculés plus haut, l'évaluation numérique de l'équation (6.70) ne pose aucune difficulté particulière.

6.3.3 Modèle géométrico-statique

La résolution de ce modèle géométrico-statique doit être réalisée par une méthode numérique, en l'occurrence la méthode de Newton-Raphson. On calcule la configuration du mécanisme dans un premier temps en résolvant les contraintes géométriques et statiques, regroupées dans une fonction $\vec{Q}(\vec{\theta})$.

$$\vec{Q}(\vec{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}^{\vec{a}b}(\vec{\theta}) \\ \mathcal{K}^{\vec{a}c}(\vec{\theta}) \\ \vec{S}(\vec{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (6.85)$$

On résoud numériquement le système $\vec{Q}(\vec{\theta}) = \vec{0}$ avec la commande *fsolve* de Matlab où l'effort extérieur \vec{f} est une variable globale.

```
theta=fsolve(@Q,theta);
```

À partir de la configuration $\vec{\theta}$ calculée, la pose du mécanisme peut être déterminée simplement en utilisant les équations (6.44) et (6.45).

6.3.4 Modèle quasi-statique

Pour calculer le modèle quasi-statique pendant plusieurs pas de temps successifs, il est nécessaire de conserver toute l'information disponible sur la configuration du mécanisme. On utilise donc le MQS qui permet de calculer l'évolution de $\vec{\theta}$:

$$\Delta\vec{\theta} = \mathbf{R}\Delta\vec{\psi} = \mathbf{R}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{K}_\phi^*\Delta\vec{\phi} + \mathbf{R}\mathbf{K}_M^{-1}\mathbf{J}^T\Delta\vec{f} \quad (6.86)$$

La valeur de $\vec{\theta}$ évolue entre le pas de temps t et $t + 1$ comme suit :

$$\vec{\theta}_{t+1} = \vec{\theta}_t + \Delta\vec{\theta}_t. \quad (6.87)$$

Il est évident que la précision de ce MQS dépend de la taille des variations Δ utilisées. La pose \vec{x}_{t+1} est déterminée comme suit :

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{x}_t + \mathbf{J}_\theta\Delta\vec{\theta}_t. \quad (6.88)$$

6.3.4.1 Résultats

Les modèles géométrico-statiques et quasi-statiques du Triptéron compliant ont été mis en œuvre dans Matlab. Cependant, comme le Triptéron compliant n'a pas été modélisé ni avec Adams, ni avec un logiciel d'analyse par éléments finis, et qu'aucune mesure précise n'a été effectuée sur le prototype non actionné, les résultats présentés ici apportent des informations plus qualitatives que quantitatives. Le temps de calcul du modèle géométrico-statique pour ce mécanisme dépend de la variation apportée aux paramètres extérieurs. Le résolution numérique par la méthode de Newton-Raphson prenant environ 0,25 s par itération, il faut de 0,25 s à plus de 20 s pour résoudre le MGS. La solution obtenue est quasiment exacte. La solution du modèle quasi-statique est par contre beaucoup plus rapide à calculer que celle du MGS. Mais, comme toute méthode différentielle, la précision de la solution dépend de l'amplitude des incréments. Entre deux itérations s'écoulent entre 5 et 10 ms, un intervalle de temps compatible avec une application de commande en temps réel d'un mécanisme.

a) Conventiennel			b) Compliant		
ρ^i	250	N.m ⁻¹	ρ^i	250	N.m ⁻¹
φ_{ju}^i	0	Nm.rad ⁻¹	φ_{ju}^i	1	Nm.rad ⁻¹
φ_{jv}^i	10 ⁹	N.m ⁻¹	φ_{jv}^i	250	N.m ⁻¹
φ_{jw}^i	10 ⁹	N.m ⁻¹	φ_{jw}^i	250	N.m ⁻¹

TAB. 6.3 – Raideurs des ressorts équivalents.

Triptéron «conventiennel» Dans un premier temps, les valeurs choisies pour les raideurs des articulations compliantes correspondent à celle d'un Triptéron dont les articulations passives ont les caractéristiques des articulations rotoïdes conventionnelles, c'est-à-dire la raideur principale nulle et raideurs secondaires très élevées (Tab. 6.3.a).

La matrice de raideur cartésienne à l'effecteur calculée avec le MQS est constante et correspond à celle du Triptéron conventionnel dont les actionneurs ont une raideur

de 250 N.m^{-1} :

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 250 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -250 & 208 \\ 125 & 0 & -94 \\ -250 & 208 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 125 & -250 \\ -250 & 0 & 208 \\ 208 & -94 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^{14} & -208 & -49 \\ -208 & 6 \cdot 10^{14} & -208 \\ -49 & -208 & 5 \cdot 10^{14} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Le bloc 3×3 inférieur droit représente la raideur en torsion du mécanisme : celle-ci est très élevée et en accord avec l'hypothèse qu'un Triptéron est un mécanisme spatial à trois degrés de liberté. Les termes hors diagonale sont négligeables par rapport à ceux de la diagonale.

La matrice jacobienne quasi-statique est elle aussi constante et correspond à celle du Triptéron compliant, à ceci près qu'elle est de dimension 6×3 :

$$\mathbf{J}_Q = \begin{bmatrix} 1 - 10^{-12} & 10^{-12} & 10^{-15} \\ 10^{-15} & 1 - 10^{-8} & 10^{-9} \\ 10^{-15} & 10^{-9} & 1 - 10^{-8} \\ 10^{-15} & 10^{-15} & 10^{-15} \\ 10^{-15} & 10^{-15} & 10^{-15} \\ 10^{-15} & 10^{-15} & 10^{-14} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le bloc supérieur est quasiment égal à la matrice identité, ce qui indique que le mouvement de l'effecteur dans une direction est égal à celui de l'actionneur correspondant. Le bloc inférieur est nul, ce qui signifie que le mouvement des actionneurs ne fait pas varier l'orientation de l'effecteur et que par conséquent, celle-ci est constante.

Triptéron compliant Le ratio ρ entre la raideur principale et les deux raideurs secondaires des articulations compliantes qui dépend du rapport entre l'épaisseur et la largeur de la section cruciforme [67, 86] est désormais fixé à 250. Vue la géométrie des articulations utilisées, cette valeur de ratio correspond celle, théorique, du prototype. Par contre, les valeurs de raideur utilisées ne sont pas celles du prototype, puisque ces dernières ne sont pas connues. Les valeurs numériques utilisées dans cet exemple sont reportées dans le tableau 6.3.b.

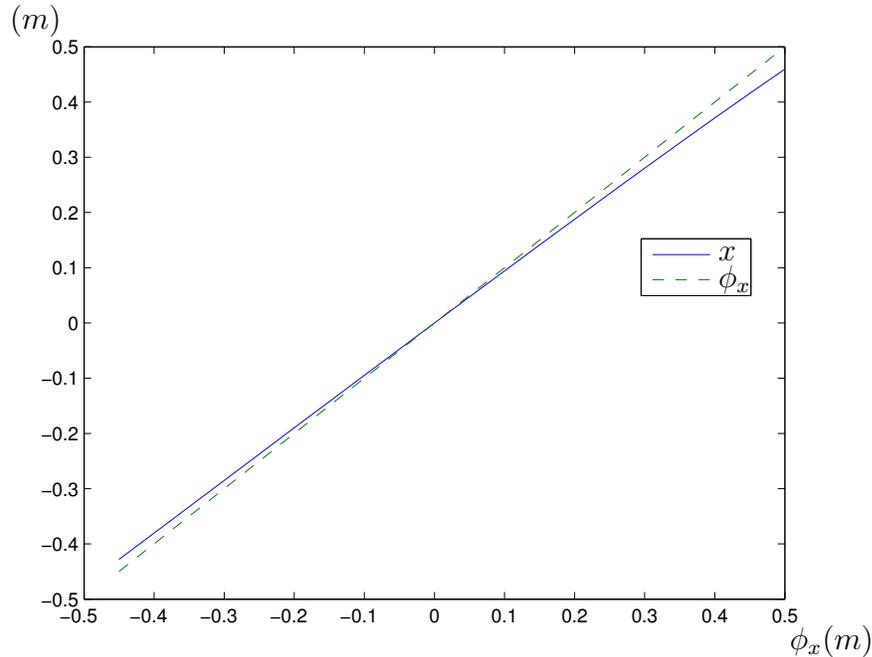


FIG. 6.17 – Coordonnée x de l'effecteur en fonction de l'actionneur ρ_x .

La figure 6.17, obtenue en utilisant le MGS, montre l'évolution de la coordonnée x de l'effecteur en fonction de la valeur de l'actionneur ϕ_x . La précision du modèle ne peut certes pas être quantifiée sans mesure sur le prototype, mais on remarque que conformément à la réalité, le déplacement de l'effecteur est toujours légèrement inférieur à celui de l'actionneur ($|x| < |\phi_x|$), puisqu'une partie de l'énergie de l'actionneur part dans la déformation des articulations compliantes selon les directions secondaires. La matrice jacobienne quasi-statique du Triptéron compliant n'est pas constante. Cependant, elle garde la forme générale de la matrice jacobienne cinématique du Triptéron conventionnel :

- Une matrice supérieure relative aux translations à diagonale dominante avec des coefficients sur la diagonale, proches et inférieurs à un. Les coefficients hors diagonale non nuls indiquent qu'un couplage existe entre l'actionnement selon une direction et le déplacement de l'effecteur selon les autres directions. Ainsi, à l'inverse du Triptéron conventionnel, le Triptéron compliant n'est plus un mécanisme découplé.
- Une matrice inférieure avec des coefficients faibles indiquant que l'orientation du mécanisme varie peu.

Par exemple, pour $\vec{\phi} = [0,5; 0; 0]^T$ et $\vec{f} = \vec{0}$, la matrice \mathbf{J}_Q est égale à

$$\mathbf{J}_Q = \begin{bmatrix} 0,855 & -0,038 & -0,038 \\ -0,055 & 0,877 & -0,023 \\ 0,001 & -0,000 & 0,996 \\ -0,003 & 0,005 & -0,004 \\ -0,036 & -0,009 & -0,014 \\ 0,029 & 0,012 & 0,001 \end{bmatrix}.$$

Conclusion

*« Tout ce qu'un homme a été capable d'imaginer,
un autre homme peut le réaliser. »*

—Jules Verne (1828-1905)

Afin de permettre une analyse et un contrôle plus précis des mécanismes parallèles compliants, une modélisation très générale adaptée à leurs caractéristiques a été développée lors de ce doctorat. Les modèles proposés peuvent prendre en compte plus d'éléments que ceux utilisés pour les mécanismes conventionnels, en l'occurrence les raideurs des actionneurs, articulations passives et membrures, et les efforts statiques tels que les efforts externes, internes et le poids.

Dans le chapitre 1, une revue des articulations compliantes existantes et de leurs modèles met en évidence le fait que le nombre de degrés de mobilité d'un mécanisme compliant est en réalité fixé arbitrairement en fonction de la précision désirée. Le comportement à plusieurs degrés de liberté d'une articulation compliante, ainsi que ses raideurs, montrent les limites d'une modélisation uniquement géométrique ou cinématique. En effet, selon la raideur d'un élément dans une direction, cette dernière peut être considérée comme celle d'un degré de liberté cinématique ou comme celle d'un degré de contrainte. Cela implique qu'il puisse transmettre des efforts dans le premier cas et des mouvements (négligés) dans le second. Par l'intermédiaire des raideurs, on passe ainsi

d'une vision binaire à une vision « en couleurs » de la mobilité d'un mécanisme. De plus, la définition d'une fonction $\vec{\tau}_j = \vec{\mathcal{A}}_j(\vec{\theta}_j)$ liant la configuration d'une articulation à l'effort auquel elle est soumise, permet de développer les modèles géométrico-statique et quasi-statique pour n'importe quel type d'articulation compliant, quels que soient sa complexité et le nombre de ses degrés de liberté. Il apparaît donc que le choix des *coordonnées généralisées* pour un mécanisme parallèle compliant n'est pas aussi évident et systématique que dans une modélisation classique. Leur nombre est déterminé selon la précision désirée et leur valeur n'est pas directement fixée comme celle d'un actionneur, mais est fonction d'un certain nombre de paramètres extérieurs. Par ailleurs, la connaissance de la configuration des *coordonnées géométriquement contraintes* est également importante dans les mécanismes compliants.

Le chapitre 2 présente donc les modèles géométrique et cinématique qui tiennent compte de toutes ces particularités. La possibilité de découpler les contraintes est notamment soulignée puisqu'elle arrive fréquemment lorsque des mobilités sont ajoutées, et qu'elle simplifie beaucoup les calculs. Enfin, dans ce chapitre, des modèles *complets* qui ne définissent pas la configuration du mécanisme uniquement par sa pose, sont proposés et les modèles *inverses* peuvent ainsi être définis.

Dans le chapitre 3 sur la *modélisation géométrico-statique*, des contraintes statiques sont utilisées en plus des contraintes géométriques. La relation donnant l'équilibre statique d'un mécanisme est calculée et formulée d'une manière très générale et est valable pour tous les mécanismes, même non-compliants. Le modèle mathématique est dès lors rapproché de la réalité physique et gagne en précision puisqu'il peut prendre en compte des paramètres très influents sur le comportement du mécanisme : la position des actionneurs et les efforts statiques (internes, externes et de gravité). Enfin dans ce chapitre, les critères permettant de choisir parmi le grand nombre de solutions possibles à ces modèles statique et géométrico-statique sont également discutés.

La matrice de raideur proposée au chapitre 4 est également valable pour tous les mécanismes, même non compliants. Elle est une généralisation de toutes les matrices de raideur présentes dans la littérature. Elle caractérise la stabilité d'un équilibre statique et n'est donc pas nécessairement définie positive (à l'inverse de ce qui est parfois dit dans la littérature). Ainsi, elle jette un pont entre cette thèse et les travaux sur la stabilité des préhenseurs ou des mécanismes bistables. Une attention particulière a été portée sur les matrices de compliance et de raideur cartésiennes, qui définissent la

relation entre une variation de la pose de l'effecteur et une variation de l'effort auquel il est soumis. Ces matrices permettent de déterminer « en interne » les variations des \mathfrak{M} coordonnées $\vec{\psi}$ à partir de \mathfrak{F} paramètres seulement. Les travaux sur la matrice de raideur ont été présentés lors des conférences ARK-2008 [75] et ASME-DETC-2008 [76], et ont été soumis pour publication dans le Journal of Mechanisms and Robotics [78].

Dans le chapitre 5, consacré au *modèle quasi-statique*, à côté de la matrice de compliance cartésienne sont définies deux nouvelles matrices : la *matrice jacobienne quasi-statique* \mathbf{J}_Q et la *matrice des ratios de transmission* \mathbf{T} . Toutes ces nouvelles matrices peuvent être obtenues à partir de la formulation correcte de la *matrice de raideur généralisée*. Elles permettent d'intégrer l'effet des efforts externes et internes au comportement cinématique du mécanisme. Le modèle quasi-statique, qui correspond à la dérivée du modèle géométrico-statique est un modèle différentiel très rapide à calculer. Il peut donc facilement être utilisé pour contrôler un manipulateur en temps réel. La formulation simple et explicite de ce modèle permet par ailleurs une meilleure compréhension du fonctionnement d'un mécanisme compliant. Les travaux sur le modèle quasi-statique ont été présentés à la conférence ASME-DETC-2008 [73] et dans le Journal of Mechanisms and Robotics [77].

Le dernier chapitre de cette thèse présente l'application des modèles géométrico-statique et quasi-statique à trois mécanismes différents. Les résultats obtenus permettent de prédire les différences de comportement entre les mécanismes compliants et les mécanismes conventionnels. L'ensemble du travail sur la modélisation des mécanismes parallèles compliants et notamment la modélisation du Triptéron compliant a été présenté lors du symposium de 2008 sur les mécanismes parallèles [74].

Malheureusement, le temps nous a manqué pour pousser plus loin l'étude quantitative des résultats fournis par nos modèles. Des analyses par éléments finis et des mesures expérimentales seront donc un travail prioritaire à réaliser dans le futur. La raison pour laquelle cela n'a pas été fait durant le doctorat est que —jusqu'à la publication du travail de Su [83] sur les articulations à entaille au mois d'août 2008— nous ne disposions pas d'une articulation économique³ à fabriquer qui soit suffisamment bien modélisée pour que les résultats fournis par le MGS et le MQS soient significatifs. La figure 6.18 présente une version compliant du mécanisme 3-RRR qui utilise les articu-

³Les articulations à axe cruciforme [67] peuvent être modélisées avec précision mais leur fabrication est encore trop dispendieuse.

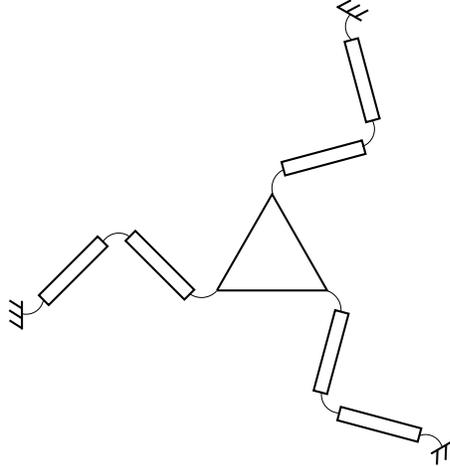


FIG. 6.18 – Mécanisme parallèle compliant modélisable avec une grande précision.

lations à entailles et non les articulations à axe cruciforme comme le deuxième exemple du chapitre 6. La fabrication d'un tel prototype serait vraiment très bon marché et elle permettrait de quantifier la précision du modèle en minimisant les erreurs qui ne lui sont pas dues. En parallèle, il sera également important d'améliorer les méthodes d'étalonnage des paramètres du modèle. Cet aspect a été abordé durant le doctorat mais n'a pas été présenté dans cette thèse.

Ensuite, d'un point de vue théorique, un prolongement naturel de ce travail qui se veut général est d'étudier comment le modèle quasi-statique peut être utilisé pour étudier les mécanismes sous-actionnés. En effet, il serait notamment intéressant de faire le lien avec la matrice \mathbf{T} présentée dans [7] pour les mécanismes conventionnels et de l'appliquer par exemple au manipulateur compliant sous-actionné développé au laboratoire de robotique de l'Université Laval [9]. De la même manière, les propriétés de la matrice de raideur doivent encore être explorées plus en profondeur. Mieux connaître les caractéristiques de ses valeurs et vecteurs propres permettrait une amélioration de la conception des mécanismes compliants. Une application directe d'une bonne connaissance de la matrice de raideur se fera dans la conception du capteur d'effort à 6 axes développé au laboratoire de robotique de l'Université Laval (figure 6.20).

Enfin pour continuer d'affiner la modélisation des mécanismes compliants, il convient de réfléchir aux éléments que l'on a considérés négligeables dans cette recherche. Dans un calcul mathématique, on qualifie de négligeable un élément dont l'influence sur un résultat n'est pas jugée significative et ne justifie pas l'augmentation de la complexité et

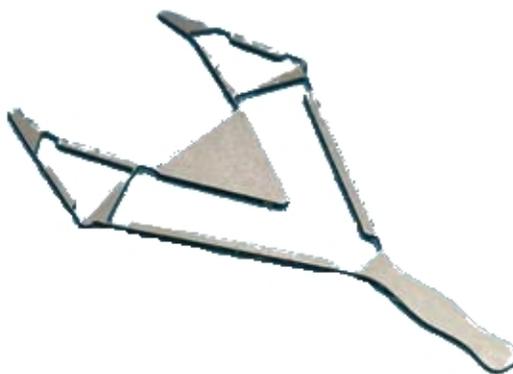


FIG. 6.19 – Préhenseur compliant sous-actionné (tiré de [9]).

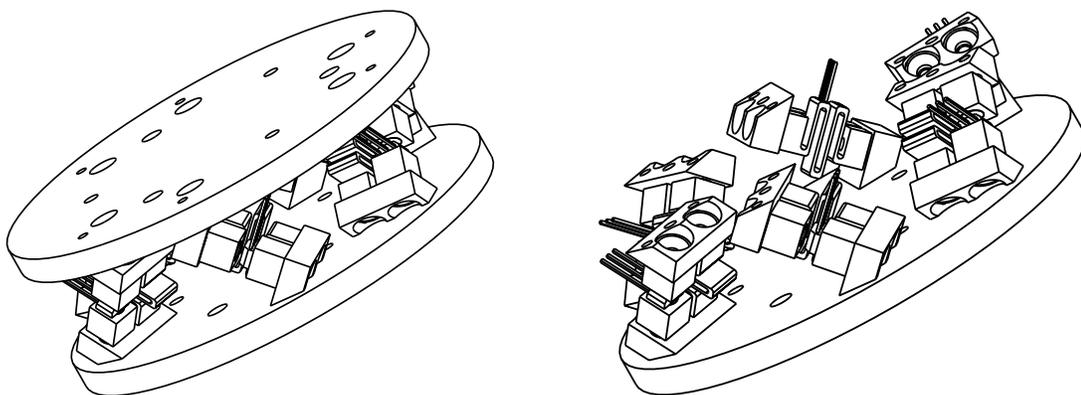


FIG. 6.20 – Capteur d'effort compliant à 6 axes (courtoisie de J.-P. Jobin).

du coût de calcul que sa prise en compte implique. Ainsi, négliger un effet quelconque revient donc à limiter *volontairement* la précision du modèle, et donc limiter la précision d'utilisation d'un mécanisme manipulateur. À l'heure où la puissance de calcul est devenue bon marché et où les gains de précision par l'amélioration de l'usinage et de la fabrication des mécanismes sont de plus en plus coûteux, le bon sens pousse à poursuivre le travail de ce doctorat et à continuer d'adapter les modèles mathématiques aux caractéristiques des mécanismes compliants. Il faudra à l'avenir y intégrer de plus en plus d'éléments. La principale barrière à la modélisation que constituait le jeu mécanique —difficilement modélisable—, n'existant pas dans les mécanismes compliants, les éléments dont l'influence a été jugée négligeable sont devenus les nouvelles limitations à la précision du modèle. Dans l'ordre, on pourra donc s'attaquer à considérer les effets dynamiques, ceux-ci étant importants pour de grandes vitesses et faibles mais *non nuls* pour de faibles vitesses. Lorsque le modèle dynamique aura été développé, la nouvelle limite sera due aux effets thermiques qui modifient la géométrie et la raideur de certaines pièces, il faudra donc intégrer ces paramètres pour continuer d'augmenter la précision. Ensuite, on pourra penser à considérer les effets visco-élastiques ou électromagnétiques pour des mécanismes nanoscopiques, les effets d'un gradient de gravité pour des mécanismes gigantesques, ou même les effets relativistes de déformation de l'espace-temps [27] pour des mécanismes évoluant à des vitesses proches de celle de la lumière... mais cela sera plutôt pour le XXII^{ème} siècle.

Bibliographie

- [1] G.K. ANANTHASURESH et L.L. HOWELL : Case Studies and a Note on the Degrees-of-Freedom in Compliant Mechanisms. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers in Engineering Conference*, 1996.
- [2] J. ANGELES : *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems : Theory, Methods, and Algorithms*. Springer, 2003.
- [3] J.-P. BACHER, C. JOSEPH et R. CLAVEL : Flexures for High Precision Robotics. *Industrial Robot : An International Journal*, 29(4):349–353, 2002.
- [4] I. BELTRAMI, C. JOSEPH, R. CLAVEL, J.-P. BACHER et S. BOTTINELLI : Micro and Nanoelectric-Discharge Machining. *Journal of Materials Processing Technology*, 149:263–265, 2004.
- [5] M.D. BERGLUND, S.P. MAGLEBY et L.L. HOWELL : Design Rules for Selecting and Designing Compliant Mechanisms for Rigid-Body Replacement Synthesis. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences*, p. 14225, 2000.
- [6] L. BIRGLEN et C.M. GOSSELIN : Kinetostatic Analysis of Underactuated Fingers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2):211–221, 2004.
- [7] L. BIRGLEN, T. LALIBERTÉ et C.M. GOSSELIN : *Underactuated Robotic Hands*. Springer, 2008.
- [8] I.A. BONEV, D. ZLATANOV et C.M. GOSSELIN : Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory. *Journal of Mechanical Design*, 125(3):573–581, 2003.

- [9] E. BOUDREAULT et C.M. GOSSELIN : Design of Sub-Centimetre Underactuated Compliant Grippers. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences*, p. 99415, 2006.
- [10] J.R. CANNON et L.L. HOWELL : A Compliant Contact-Aided Revolute Joint. *Mechanism and Machine Theory*, 40(11):1273–1293, 2005.
- [11] M. CARRICATO : Contributi teorici per l’analisi statica dei meccanismi con elementi elastici. Mémoire de maîtrise, Università degli Studi di Bologna, Italia, 1998.
- [12] M. CARRICATO, J. DUFFY et V. PARENTI-CASTELLI : The Stiffness Matrix and the Hessian Matrix of the Total Potential Energy in Mechanisms. *Publication no. 111 of DIEM, Dept. of Mechanical Engineering of the University of Bologna, Italy*, pp. 1–17, 2000.
- [13] M. CARRICATO, J. DUFFY et V. PARENTI-CASTELLI : Catastrophe Analysis of a Planar System with Flexural Pivots. *Mechanism and Machine Theory*, 37(7):693–716, 2002.
- [14] M. CARRICATO et V. PARENTI-CASTELLI : A Family of 3-DOF Translational Parallel Manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 125(2):302–307, 2003.
- [15] D. CHABLAT et J. ANGELES : On the Kinetostatic Optimization of Revolute-Coupled Planar Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 37(4):351–374, 2002.
- [16] S.F. CHEN : The 6×6 Stiffness Formulation and Transformation of Serial Manipulators via the CCT Theory. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, 2003.
- [17] S.F. CHEN : The Spatial Conservative Congruence Transformation for Manipulator Stiffness Modeling with Coordinate and Noncoordinate Bases. *Journal of Robotic Systems*, 22(1):31–44, 2005.
- [18] S.F. CHEN et I. KAO : Conservative Congruence Transformation for Joint and Cartesian Stiffness Matrices of Robotic Hands and Fingers. *The International Journal of Robotics Research*, 19(9):835–847, 2000.
- [19] S.F. CHEN et I. KAO : Geometrical Method for Modeling of Asymmetric 6×6 Cartesian Stiffness Matrix. *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 2, 2000.
- [20] S.F. CHEN et I. KAO : Geometrical Approach to the Conservative Congruence Transformation (CCT) for Robotic Stiffness Control. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2002.

- [21] W. CHO, D. TESAR et R.A. FREEMAN : The Dynamic and Stiffness Modeling of General Robotic Manipulator Systems with Antagonistic Actuation. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1380–1387, 1989.
- [22] N. CIBLAK et H. LIPKIN : Asymmetric Cartesian Stiffness for the Modeling of Compliant Robotic Systems. *Comptes rendus – 23rd Biennial Mechanical Conference, Design Engineering Division*, vol. 72, 1994.
- [23] N. CIBLAK et H. LIPKIN : Synthesis of Cartesian Stiffness for Robotic Applications. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, 1999.
- [24] C.D. CRANE III, J. BAYAT, V. VIKASS et R. ROBERTS : Kinematic Analysis of a Planar Tensegrity Mechanism with Pre-Stressed Springs. *Advances in Robot Kinematics : Analysis and Design*, pp. 419–427, 2008.
- [25] M.L. CULPEPPER et G. ANDERSON : Design of a Low-Cost Nano-Manipulator which Utilizes a Monolithic, Spatial Compliant Mechanism. *Precision Engineering*, 28(4):469–482, 2004.
- [26] J.S. DAI, Z. HUANG et H. LIPKIN : Mobility of Overconstrained Parallel Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 128(1):220–229, 2006.
- [27] A. EINSTEIN : Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10): 891–921, 1905.
- [28] L. EULER : VariæDemonstrationes Geometriæ. *Novi Commentarii AcademiaeScientiarum Imperialis Petropolitanæ*, I:49–66, 1747.
- [29] M. GALLANT : *Étude de l'effet du jeu aux articulations passives et de la flexibilité des membrures sur les propriétés des manipulateurs parallèles*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, QC, Canada, 2008.
- [30] G. GOGU : Mobility of Mechanisms : a Critical Review. *Mechanism and Machine Theory*, 40(9):1068–1097, 2005.
- [31] C.M. GOSSELIN : Stiffness Mapping for Parallel Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3):377–382, 1990.
- [32] C.M. GOSSELIN : *Mécanique des manipulateurs GMC-64338*. Université Laval, Québec, QC, Canada, Hiver 2004.
- [33] M.W. GRIFFIS et J. DUFFY : Kinestatic Control : a Novel Theory for Simultaneously Regulating Force and Displacement. *Journal of Mechanical Design*, 113(4):508–515, 1991.

- [34] M.W. GRIFFIS et J. DUFFY : Global Stiffness Modeling of a Class of Simple Compliant Couplings. *Mechanism and machine theory*, 28(2):207–224, 1993.
- [35] R.S. HARTENBERG et J. DENAVIT : *Kinematic Synthesis of Linkages*. McGraw-Hill Education, New York, 1964.
- [36] S. HEINEIN : *Conception des guidages flexibles*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- [37] W.S. HOWARD, M. ZEFRAN et V. KUMAR : On the 6×6 Stiffness Matrix for Three Dimensional Motions. *Comptes rendus – 9th World Congress of the IFToMM*, 1995.
- [38] W.S. HOWARD, M. ZEFRAN et V. KUMAR : On the 6×6 Cartesian Stiffness Matrix for Three-Dimensional Motions. *Mechanism and Machine Theory*, 33(4):389–408, 1998.
- [39] L.L. HOWELL : *Compliant Mechanisms*. Wiley-Interscience, 2001.
- [40] L.L. HOWELL et A. MIDHA : A Method for the Design of Compliant Mechanisms With Small-Length Flexural Pivots. *Journal of Mechanical Design*, 116(1):280–290, 1994.
- [41] L.L. HOWELL et A. MIDHA : Parametric Deflection Approximations for End-Loaded, Large-Deflection Beams in Compliant Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 117(1):156–165, 1995.
- [42] L.L. HOWELL et A. MIDHA : Parametric Deflection Approximations for Initially Curved, Large-Deflection Beams in Compliant Mechanisms. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1996.
- [43] L.L. HOWELL, A. MIDHA et T.W. NORTON : Evaluation of Equivalent Spring Stiffness for Use in a Pseudo-Rigid-Body Model of Large-Deflection Compliant Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 118(1):126–131, 1996.
- [44] C. HUANG, W.H. HUNG et I. KAO : New Conservative Stiffness Mapping for the Stewart-Gough Platform. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 823–828, 2002.
- [45] K.H. HUNT : *Kinematic Geometry of Mechanisms*,. Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [46] C. INNOCENTI : Kinematic Clearance Sensitivity Analysis of Spatial Structures with Revolute Joints. *Journal of mechanical design*, 124(1):52–57, 2002.
- [47] C. INNOCENTI et V. PARENTI-CASTELLI : Singularity-Free Evolution From One Configuration to Another in Serial and Fully-Parallel Manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 120(1):73, 1998.

- [48] A. JEANNEAU, J. HERDER, T. LALIBERTÉ et C.M. GOSSELIN : A Compliant Rolling Contact Joint and its Application in a 3-DOF Planar Parallel Mechanism with Kinematic Analysis. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences*, p. 57264, 2004.
- [49] D. KALAPAY et C. KIM : Design of a Compliant Energy Storage Impulse Mechanism for a Desktop Stapler. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, p. 49451, 2008.
- [50] I. KAO et C. NGO : Properties of the Grasp Stiffness Matrix and Conservative Control Strategies. *The International Journal of Robotics Research*, 18(2):159–167, 1999.
- [51] H.S. KIM et L.-W. TSAI : Design Optimization of a Cartesian Parallel Manipulator. *Journal of Mechanical Design*, 125(1):43–51, 2003.
- [52] S. KOCK et W. SCHUMACHER : A Parallel xy Manipulator with Actuation Redundancy for High-Speed and Active-Stiffness Applications. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, 1998.
- [53] X. KONG et C.M. GOSSELIN : Kinematics and Singularity Analysis of a Novel Type of 3-CRR 3-DOF Translational Parallel Manipulator. *The International Journal of Robotics Research*, 21(9), 2002.
- [54] X. KONG et C.M. GOSSELIN : Mobility Analysis of Parallel Mechanisms Based on Screw Theory and the Concept of Equivalent Serial Kinematic Chain. *Comptes rendus – ASME Mechanisms and Robotics Conference*, p. 85337, 2005.
- [55] X. KONG et C.M. GOSSELIN : *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*. Springer, 2007.
- [56] J. KÖVECSES et J. ANGELES : The Stiffness Matrix in Elastically Articulated Rigid-Body Systems. *Multibody System Dynamics*, 18(2):169–184, 2007.
- [57] J.L. LAGRANGE et J. BERTRAND : *Mécanique analytique*. Gauthier-Villars et fils, 1888.
- [58] T. LALIBERTÉ, C.M. GOSSELIN et M. JEAN : Static Balancing of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 4(4):363–377, 1999.
- [59] C.-C. LAN et Yang Y.-N. : An Analytical Design Method for a Shape Memory Alloy Wire Actuated Compliant Finger. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, p. 49045, 2008.

- [60] Y. LI, S.F. CHEN et I. KAO : Stiffness Control and Transformation for Robotic Systems with Coordinate and Non-Coordinate Bases. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, 2002.
- [61] Y. LI et I. KAO : On the Stiffness Control and Congruence Transformation Using the Conservative Congruence Transformation (CCT). *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 823–828, 2001.
- [62] N. LOBONTIU : *Compliant Mechanisms : Design of Flexure Hinges*. CRC Press, 2003.
- [63] B. MASSA : Design of Underactuated Fingers and PMs based on Compliant Mechanisms. Rapport technique, Laboratoire de Robotique, Université Laval, Québec, QC, Canada, juin 2003.
- [64] J.P. MERLET : *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publisher, 2006.
- [65] D.J. MONTANA : The Kinematics of Contact with Compliance. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 770–774, mai 1989.
- [66] Y.-M. MOON et S. KOTA : Design of compliant parallel kinematic machines. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, p. 34204, 2002.
- [67] Y.-M. MOON, B.P. TREASE et Kota. S. : Design of Large-Displacement Compliant Joints. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, p. 34207, 2002.
- [68] A.J. NIELSON et L.L. HOWELL : Compliant Pantographs via the Pseudo-Rigid-Body Model. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1998.
- [69] P.G. OPDAHL, B.D. JENSEN et L.L. HOWELL : An Investigation into Compliant Bistable Mechanisms. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1998.
- [70] V. PARENTI-CASTELLI et C.M. GOSSELIN : On the Joint Clearance Effects in Serial and Parallel Manipulators. *Comptes rendus – International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, 2002.
- [71] B. PAUL : *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Prentice Hall, 1979.
- [72] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : Static Equilibrium and Kinemato-Static Model of Planar Compliant Parallel Mechanisms. Rapport technique, Laboratoire de Robotique, Université Laval, Québec, QC, Canada, 2007.

- [73] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : Instantaneous Kinemato-Static Model of Compliant Parallel Mechanisms. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, p. 49265, 2008.
- [74] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : Kinemato-Static Modelling of Compliant Parallel Mechanisms : Application to a 3-PRRR Mechanism, the Tripton. *Comptes rendus – Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, 2008.
- [75] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : Stiffness Matrix of Compliant Parallel Mechanisms. *Advances in Robot Kinematics : Analysis and Design*, pp. 331–341, 2008.
- [76] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : Stiffness Matrix of Compliant Parallel Mechanisms. *Comptes rendus – ASME Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*, p. 49253, 2008.
- [77] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : A Quasi-Static Model for Planar Compliant Parallel Mechanisms. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 1(2):021012, 2009.
- [78] C. QUENNOUELLE et C.M. GOSSELIN : Stiffness Matrix of Compliant parallel Mechanisms. *Soumis au Journal of Mechanisms and Robotics*, 2009.
- [79] J.M. RICO et B. RAVANI : On Mobility Analysis of Linkages Using Group Theory. *Journal of Mechanical Design*, 125(1):70–80, 2003.
- [80] B.O. RODRIGUES : Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 5(1):380–440, 1840.
- [81] J.K. SALISBURY : Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinates. *Comptes rendus – 19th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 87–97, 1980.
- [82] A. SAXENA et S.N. KRAMER : A Simple and Accurate Method for Determining Large Deflections in Compliant Mechanisms Subjected to End Forces and Moments. *Journal of Mechanical Design*, 120(3):392–400, 1998.
- [83] H.-J. SU : A Pseudorigid-Body 3R Model for Determining Large Deflection of Cantilever Beams Subject to Tip Loads. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 1(2):021008, 2009.

- [84] H.-J. SU et J.M. MCCARTHY : A Polynomial Homotopy Formulation of the Inverse Static Analysis of Planar Compliant Mechanisms. *ASME Journal of Mechanical Design*, 128(4):776–786, 2006.
- [85] M.M. SVININ, S. HOSOE et M. UCHIYAMA : On the Stiffness and Stability of Gough-Stewart Platforms. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, 2001.
- [86] Y. WANG et C.M. GOSSELIN : On the Design of a 3-PRRR Spatial Parallel Compliant Mechanism. *Comptes rendus – ASME Mechanisms and Robotics Conference*, p. 57140, 2004.
- [87] J. M. WEINSTEIN : Flexure Pivot Bearings. *Machine Design*, pp. 150–157, Juin 1965.
- [88] F. XI, D. ZHANG, C.M. MECHEFSKE et S.Y.T. LANG : Global Kinetostatic Modelling of Tripod-Based Parallel Kinematic Machine. *Mechanism and Machine Theory*, 39(4):357–377, 2004.
- [89] B.J. YI, G.B. CHUNG, H.Y. NA, W.K. KIM et I.H. SUH : Design and Experiment of a 3-DOF Parallel Micromechanism Utilizing Flexure Hinges. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(4):604–612, 2003.
- [90] J.P. YIN, D. MARSH et J. DUFFY : Catastrophe Analysis of Planar Three-Spring Systems. *Comptes rendus – ASME Mechanisms and Robotics Conference*, 1998.
- [91] M. ŽEFRAN et V. KUMAR : Affine Connections for the Cartesian Stiffness Matrix. *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, 1997.
- [92] M. ŽEFRAN et V. KUMAR : A Geometrical Approach to the Study of the Cartesian Stiffness Matrix. *Journal of Mechanical Design*, 124(1):30–38, 2002.
- [93] D. ZHANG : *Kinetostatic Analysis and Optimization of Parallel and Hybrid Architectures for Machine Tools*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, QC, Canada, avril 2000.
- [94] D. ZHANG et C.M. GOSSELIN : Kinetostatic Modeling of Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Revolute Actuators. *Mechanism and Machine Theory*, 37(6):599–617, 2002.
- [95] D. ZHANG et C.M. GOSSELIN : Parallel Kinematic Machine Design with Kinetostatic Model. *Robotica*, 20(4):429–438, 2002.
- [96] H. ZHOU et K.L. TING : Shape and Size Synthesis of Compliant Mechanisms Using Wide Curve Theory. *Journal of Mechanical Design*, 128(3):551–558, 2006.