



Conception d'un mécanisme déployable à grand ratio d'expansion et de son système d'actionnement par roues d'inertie pour applications spatiales

Thèse

David St-Onge

Doctorat en génie mécanique
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© David St-Onge, 2016

Résumé

Cette thèse propose de développer des mécanismes déployables pour applications spatiales ainsi que des modes d'actionnement permettant leur déploiement et le contrôle de l'orientation en orbite de l'engin spatial les supportant. L'objectif étant de permettre le déploiement de surfaces larges pour des panneaux solaires, coupoles de télécommunication ou sections de station spatiale, une géométrie plane simple en triangle est retenue afin de pouvoir être assemblée en différents types de surfaces. Les configurations à membrures rigides proposées dans la littérature pour le déploiement de solides symétriques sont optimisées et adaptées à l'expansion d'une géométrie ouverte, telle une coupole. L'optimisation permet d'atteindre un ratio d'expansion plan pour une seule unité de plus de 5, mais présente des instabilités lors de l'actionnement d'un prototype. Le principe de transmission du mouvement d'un étage à l'autre du mécanisme est revu afin de diminuer la sensibilité des performances du mécanisme à la géométrie de ses membrures internes. Le nouveau modèle, basé sur des courroies crantées, permet d'atteindre des ratios d'expansion plans supérieurs à 20 dans certaines configurations. L'effet des principaux facteurs géométriques de conception est étudié afin d'obtenir une relation simple d'optimisation du mécanisme plan pour adapter ce dernier à différents contextes d'applications. La géométrie identique des faces triangulaires de chaque surface déployée permet aussi l'empilement de ces faces pour augmenter la compacité du mécanisme. Une articulation spécialisée est conçue afin de permettre le dépliage des faces puis leur déploiement successivement.

Le déploiement de grandes surfaces ne se fait pas sans influencer lourdement l'orientation et potentiellement la trajectoire de l'engin spatial, aussi, différentes stratégies de contrôle de l'orientation novatrices sont proposées. Afin de tirer profit d'une grande surface, l'actionnement par masses ponctuelles en périphérie du mécanisme est présentée, ses équations dynamiques sont dérivées et simulées pour en observer les performances. Celles-ci démontrent le potentiel de cette stratégie de réorientation, sans obstruction de l'espace central du satellite de base, mais les performances restent en deçà de l'effet d'une roue d'inertie de masse équivalente. Une stratégie d'actionnement redondant par roue d'inertie est alors présentée pour différents niveaux de complexité de mécanismes dont toutes les articulations sont passives, c'est-à-dire non actionnées. Un mécanisme à quatre barres plan est simulé en boucle fermée avec un contrôleur simple pour valider le contrôle d'un mécanisme ciseau commun. Ces résultats sont étendus à la

dérivation des équations dynamiques d'un mécanisme sphérique à quatre barres, qui démontre le potentiel de l'actionnement par roue d'inertie pour le contrôle de la configuration et de l'orientation spatiale d'un tel mécanisme. Un prototype à deux corps ayant chacun une roue d'inertie et une seule articulation passive les reliant est réalisé et contrôlé grâce à un suivi par caméra des modules. Le banc d'essai est détaillé, ainsi que les défis que l'élimination des forces externes ont représenté dans sa conception. Les résultats montrent que le système est contrôlable en orientation et en configuration.

La thèse se termine par une étude de cas pour l'application des principaux systèmes développés dans cette recherche. La collecte de débris orbitaux de petite et moyenne taille est présentée comme un problème n'ayant pas encore eu de solution adéquate et posant un réel danger aux missions spatiales à venir. L'unité déployable triangulaire entraînée par courroies est dupliquée de manière à former une coupole de plusieurs centaines de mètres de diamètre et est proposée comme solution pour capturer et ralentir ces catégories de débris. Les paramètres d'une mission à cette fin sont détaillés, ainsi que le potentiel de réorientation que les roues d'inertie permettent en plus du contrôle de son déploiement. Près de 2000 débris pourraient être retirés en moins d'un an en orbite basse à 819 km d'altitude.

Abstract

This thesis presents the design of deployable mechanisms for space applications and means of actuation for the control of their deployment and the attitude control of their satellite base. For this purpose, the triangular geometry is selected as a planar deployable basic unit to tessellate any surface. Each such module needs to achieve a high expansion ratio. From the literature, planar mechanisms based only on rigid links and developed for deployable Platonic solids are optimized and adapted for open geometries such as a cupola. The resulting expansion ratio is above 5, but the corresponding prototype shows instability of the deployment movement close to the retracted position. The paradigm of power transmission is revised to reduce the sensitivity of the mechanism to its internal transmission angles. The novel solution, based on timing belts, can achieve expansion ratios above 20 in particular configurations. The influence of the principal geometric parameters of design on the expansion ratio is discussed to allow the derivation of a simple optimization relation. The optimization can be performed to adapt this mechanism to different contexts of application. In order to further improve the compactness of the mechanism for transport purposes, a novel joint is presented, allowing two successive phases of rotation on non parallel axes. This way the triangular units can be piled before being deployed.

The deployment of a large surface in orbit is prone to impact the spacecraft attitude and maybe its course. Hence, control strategies are proposed to manage these effects. Since the deployment targets a large surface, its edges are far from the centre of mass and are advantageous to induce torque from the linear motion of point masses. The dynamic equations are derived based on the conservation of the angular momentum and the resulting matrix form of the equation set is used to simulate the system and assess its performances. The results validate the strategy for orientation control without obstruction of the spacecraft central space, but a flywheel of equivalent mass still outperforms this design. Redundant actuation by flywheel on each link of a multibody mechanism composed only of passive revolute joints is presented. The dynamic equations are derived for a two-body architecture and a four-bar planar mechanism. The closed-loop control of the four-bar mechanism is using a PD controller to achieve the control of a scissor mechanism unit. The results are then extended to a four-bar spherical mechanism and its simulation demonstrates the potential of this strategy for the control of both the configuration and the orientation of a spatial mechanism. A two-

body prototype, linked by a passive revolute joint, is manufactured and controlled with visual tracking feedback. The results confirm that the system is controllable in orientation and configuration.

This thesis ends with a case study for the application of the main components developed in this research. The capture of small to medium sized orbital debris is introduced. The triangular deployable unit based on timing belts is replicated in order to create a cupola of hundreds of metres to catch and slow down the debris. The parameters of such a mission are detailed as well as the flywheel potential to control the spacecraft attitude on top of the mechanism deployment. It is estimated that almost 2000 pieces of debris can be removed from the orbit at 819 km altitude in a one year mission.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xiii
Remerciements	xxiii
1 Introduction	1
1.1 Contexte	1
1.2 Revue de littérature	3
1.2.1 Mécanismes déployables	4
Éléments de structure linéaire	4
Tenségrités	6
Panneaux rigides ou membranes épaisses	7
Structures gonflables	9
Mécanismes polyédriques	10
1.2.2 Réorientation	13
Mécanismes externes permettant la réorientation	18
1.2.3 Plateformes expérimentales	19
1.3 Méthodologie	20
1.4 Contributions	21
1.5 Problématique	22
2 Mécanismes plans pour le déploiement de surfaces tessellées	23
2.1 Unités élémentaires	23
2.2 Mobilité d'un mécanisme	25
2.3 Mécanismes plans à membrures rigides	27
Angles de transmission	39
2.3.1 Optimisation	43
2.4 Conception de l'entraînement par courroies crantées	45
2.4.1 Analyse géométrique et effet des paramètres	48
2.4.2 Nombre d'étages (n)	51
2.4.3 Largeur des membrures (w)	51

2.4.4	Longueur radiale du triangle interne (h_T)	52
2.4.5	Optimisation du mécanisme	53
2.5	Assemblage de surfaces	54
	Articulation de rotation à deux phases	56
2.6	Prototype	58
2.7	Conclusion	60
3	Actionnement et ré-orientation	61
3.1	Modélisation dynamique	62
3.1.1	Dérivation pour deux corps	64
	Validation	65
3.1.2	Dérivation pour trois corps	67
	Validation	68
3.1.3	Effets du déploiement du mécanisme triangulaire	69
3.1.4	Masses en mouvement linéaire	71
	Carré avec 4 masses	71
	Carré avec une masse sur la diagonale	80
3.1.5	Comparaison avec une roue d'inertie	85
3.2	Déploiement par roues d'inertie	85
3.2.1	Mécanisme à deux corps	87
3.2.2	Mécanisme plan à quatre barres	89
	Simulation	93
	Optimisation de la consommation d'énergie	95
	Influence des paramètres géométriques	98
	Contrôle d'un élément ciseau	100
3.2.3	Mécanisme sphérique à quatre barres	102
3.3	Prototype plan	109
3.3.1	Commande	112
3.3.2	Contrôlabilité	113
	Acquisition du mouvement	114
	Résultats	118
3.4	Conclusion	123
4	Étude de cas : la récolte de débris orbitaux	125
4.1	Les débris orbitaux	126
4.1.1	Modèle de débris sur LEO	127
4.1.2	Objectifs et contraintes de mission	132
4.2	Revue des systèmes de retrait de débris orbitaux	136
4.2.1	Stratégies possibles	136
4.2.2	Technologies existantes	137
4.3	Système de retrait de débris déployable actionné par roues d'inertie	141
4.3.1	Conception mécanique	142
4.3.2	Dynamique orbitale du dispositif de retrait des débris	147
4.4	Conclusion	152
	Conclusion	153
	Annexe A Coefficients du polynôme obtenu des équations 2.34 et 2.35	157

Annexe B	Coefficients des équations matricielles 3.91	165
Annexe C	Coefficients des équations matricielles 3.113	167
Annexe D	Modèle <i>SimMechanics</i> du mécanisme à quatre barres plan	173
Annexe E	Modèle <i>SimMechanics</i> du mécanisme à quatre barres sphérique	175
Annexe F	Expressions des équations de Kane pour le mécanisme sphérique à quatre barres	177

Liste des tableaux

1.1	Comparaison de certains concepts de mécanismes déployables.	2
2.1	Mobilité des mécanismes étudiés selon la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach, équation 2.2 et leur ratio d'expansion maximal, R_M	27
3.1	Orientation des référentiels des corps A et B tel que représentés à la figure 3.1.	87
3.2	Moyenne du carré des erreurs des tests.	119
4.1	Répartition des types d'objets dangereux et leurs risques associées sur LEO (inspiré des travaux de LEVIN et al., 2012).	131
4.2	Propriétés physiques du mécanisme déployable de retrait des déchets orbitaux.	147
4.3	Valeurs des coefficients pour l'application de la formule de Wertz, équation 4.12, pour les altitudes de 350 km à plus de 1 000 km (MOE et MOE, 2005).	149

Liste des figures

1.1	Exemple de structures déployables brevetées : (a) un parapluie (AHERN et FREDERICK, 1912), (b) une tente (BRERETON, 2001).	2
1.2	Concepts de mâts par AEC-Able Engineering (GANTES, 2001) : (a) FASTmast, (b) Principe de mât enroulable.	4
1.3	Mécanismes inspirés du ciseau simple (PELLEGRINO, 2001) : (a) ciseau symétrique déployé et le pantographe, unité triangulaire 3D ayant un ciseau sur chaque face, (b) Ciseau asymétrique et anneau de pantographes.	5
1.4	Exemples de tenségrités déployables (WANG et LI, 2005) : (a) par membrures pliables, (b) par unité s'affaissant.	6
1.5	L'antenne réflective spatiale Astromesh (PELLEGRINO, 2001).	7
1.6	Système de déploiement d'antenne en tournesol (GANTES, 2001).	8
1.7	Articulations pour le pliage de style origami : (a) Composite mince flexible (FELTON et al., 2013), (b) Penture mince en acier (REYNOLDS et al., 2013).	9
1.8	Sphère d'Hobermann (HOBERMAN, 1991).	11
1.9	Jitterbug de Fuller (VERHEYEN, 1989).	11
1.10	Mécanismes plans doublés pour une couple (WOHLHART, 2008).	12
1.11	Couple, moment et agilité de système de contrôle de couple, tiré de HAMILTON et PECK, 2015. Le point <i>ISS</i> est la position du système de contrôle de l'orientation de la station spatiale internationale selon ces axes.	15
1.12	Modèle du chat simplifié (GE et GUO, 2012).	16
1.13	Plateforme de compensation de la gravité au Centre d'ingénierie spatiale Johnson ¹	20
2.1	Les trois géométries de dallage régulier (BARNES, 2012) : le triangle, 6 faces de 3 arêtes chacune se rejoignant à chaque sommet, le carré, 4 faces par sommet de 4 arêtes et l'hexagone, 3 faces par sommet de 6 arêtes.	24
2.2	Assemblage de faces triangulaires planes en coupole avec une section d'icosaèdre ²	25
2.3	Déploiement d'un icosaèdre avec faces articulées triangulaires, dit original (fermé) (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006).	26
2.4	Représentation schématique d'un triangle déployable des travaux de GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006.	27
2.5	Patte du mécanisme inspiré par GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006 avec deux étages.	28
2.6	Schéma et modélisation des mécanismes triangulaires à 1 DdL rétractés : (a) avec un seul niveau par patte, dit original (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006) et (b) avec trois niveaux par patte avec encombrement optimisé, dit amélioré.	29

2.7	Schéma d'une interprétation simplifiée du mécanisme en y ajoutant des liaisons prismatiques virtuelles sur les membrures.	30
2.8	Ratio de transmission des forces dans les membrures : (a) pour le mécanisme original (figure 2.6-a) et (b) pour le mécanisme optimisé (figure 2.6-b).	32
2.9	Évolution du ratio d'expansion et des longueurs radiale de la face déployée et rétractée en fonction du nombre d'étage des pattes par des simulations <i>Solidworks</i>	34
2.10	Détail des membrures pour le design présenté à la figure 2.6-b.	35
2.11	Photographie du prototype en position fermée suivant le design présenté à la figure 2.6-b.	36
2.12	Simulation du déploiement d'une patte avec son étage d'actionnement à 5 barres et un étage de parallélogramme subséquent.	37
2.13	Ratio de transmission de la vitesse angulaire d'entrée θ_1 à celle de sortie de l'étage d'actionnement, θ_7	38
2.14	Modèle à membrures rigides optimisées en position déployée.	39
2.15	Angles de transmission et boucles cinématiques. Le parallélogramme superposé et contraignant le mouvement du module d'actionnement n'est pas mis en évidence.	40
2.16	Niveau d'actionnement inspiré du modèle de la figure 2.10, mais simplifiant l'écriture des équations par l'ajout d'un repère mobile en A	40
2.17	Ratio de transmission des vitesses pour tout le déploiement du schéma de la figure 2.12 avec la géométrie de la figure 2.6-b.	42
2.18	Évolution des angles de transmission de la position rétractée ($\theta_1 = 2,96rad$) à la position déployée ($\theta_1 = 1,08rad$).	42
2.19	Ratio d'expansion du mécanisme selon l'angle de départ rétracté évaluant l'impact d'une butée pour empêcher la fermeture complète du mécanisme, ce qui évite d'approcher une position ayant des valeurs inacceptables des angles de transmission.	43
2.20	Simulation du déploiement d'un quadrilatère optimisé allant de $\theta_1 = \pi$ rad, normalement rétracté, à $\theta_1 = 0$ rad, normalement déployé. Cependant, le maximum est atteint un peu après la mi-parcours.	44
2.21	Équivalence d'un étage avec transmission par courroies (a) et un mécanisme à 4 barres (b).	46
2.22	Équivalence entre le mécanisme entraîné par courroies (a) et celui à membrures rigides (b).	47
2.23	Mécanisme entraîné par courroies (les courroies sont représentées par des lignes pointillées) ³	48
2.24	Triangle virtuel (en supposant un arrangement de triangles adjacents) : (a) respectées si les triangles adjacents ne sont pas dans le même plan, (b) non-respectées parce que des membrures sortent du triangle des deux côtés de la médiatrice.	49
2.25	Représentation géométrique de la longueur rétractée H_R (a) et de celle déployée H_D (b) utilisée dans les équations 2.51-2.52.	50
2.26	Ratio d'expansion en fonction du nombre d'étages pour $h_T = 90$ mm et $w = 17$ mm pour les itérations de design réalisées.	51
2.27	Ratio d'expansion en fonction de la largeur des membrures pour $n = 5$ et $h_T = 90$ mm pour les itérations de design réalisées.	52
2.28	Ratio d'expansion en fonction de la longueur radiale du triangle interne pour $w = 17mm$ et $n = 5$ pour les itérations de design réalisées.	53

2.29	Assemblage plan de six mécanismes triangulaires entraînés par courroies.	55
2.30	Assemblage en coupole de cinq mécanismes triangulaires entraînés par courroies.	56
2.31	Étapes de dépliage d'une icocoupole formée de 5 modules.	56
2.32	Liaison de rotation à deux phases modélisée dans <i>Solidworks</i> . (a) état de départ, (b) sur le point de relâcher le premier axe de rotation, (c) sections en rotation retenues ensemble par un aimant permanent, (d) second axe de rotation.	57
2.33	Prototype du mécanisme plan entraîné par courroies crantées : (a) Vu de haut, (b) vue de face où une flexion des membrures dû à la tension des courroies est visible.	59
3.1	Schéma d'un système plan flottant à deux corps et une liaison.	64
3.2	Comparaison entre un modèle <i>Simscape Multibody</i> à deux corps limité au plan et le résultat de l'équation 3.16 pour un mouvement à l'articulation de palier doux.	66
3.3	(a) Résultats d'une simulation avec trois membrures et deux articulations avec une géométrie plus performante des membrures (3.30), (b) Résultat d'une simulation pour trois membrures et deux articulations pour une géométrie des membrures moins performante (3.31)	69
3.4	Exemple d'étapes de simulation du mécanisme de réorientation : de l'état de départ contracté (a), une patte seule est déployée (b) puis les deux pattes restantes simultanément (c) ; l'inverse pour retourner à la configuration rétractée (a), commençant par le repli d'une patte seule (d).	70
3.5	Simulation de déploiement en séquence : (a) Commandes aux articulations pour un mécanisme à 9 membrures et 9 articulations rotoïdes regroupées en trois pattes (unité triangulaire), (b) Trajectoire résultante sur l'orientation selon les angles d'Euler.	70
3.6	Carré avec une masse mobile ponctuelle sur chaque arête de longueur $2L$ actionnée par une liaison prismatique.	72
3.7	Oscillations des masses pour un changement d'orientation maximal. Le mouvement de la masse 3 est superposé à celui de la masse 1 et de même pour celui de la masse 4 superposé à 2. Les première et seconde dérivées de la trajectoire des masses sont nulles au début et à la fin de la simulation.	75
3.8	Amplitude du changement d'orientation du cadre (rad) en fonction des phases pour des amplitudes des fréquences unitaires ⁴ : (a) Masse 2 versus 4, (b) Masse 3 versus 4.	75
3.9	Amplitude du changement d'orientation du cadre (rad) en fonction des fréquences avec des amplitudes unitaires et les phases optimales de l'équation 3.52 : (a) Masse 2 versus 3, (b) Masse 2 versus 4.	76
3.10	Géométrie cubique avec une masse ponctuelle sur chaque arête.	77
3.11	Simulation de trajectoire atteignable : (a) consigne et résultats (superposés) et (b) trajectoires des masses.	78
3.12	Simulation de trajectoire atteignable avec certaines masses atteignant leur limite ⁵ : (a) consigne et résultats (superposés) et (b) trajectoires des masses dont certaines atteignent leur limite.	78
3.13	Simulation de trajectoire non atteignable : (a) consigne, (b) résultats et (c) trajectoires des masses dont certaines atteignent leur limite.	79
3.14	Géométrie carrée d'arête $2L$ avec une masse actionnée sur sa diagonale.	80

3.15	Oscillations des masses pour un changement d'orientation maximal. Le mouvement de la masse 3 est superposé à celui de la masse 2. Les première et seconde dérivées de la trajectoire des masses sont nulles au début et à la fin de la simulation.	81
3.16	Amplitude du changement d'orientation du cadre (rad) en fonction des phases avec des amplitudes et des fréquences unitaires : (a) Masse 1 versus 2, (b) Masse 1 versus 3 et (c) Masse 2 versus 3.	82
3.17	Amplitude du changement d'orientation du cadre (rad) en fonction des fréquences avec des amplitudes unitaires et les phases optimales de l'équation 3.75 : (a) Masse 1 versus 2, (b) Masse 1 versus 3 et (c) Masse 2 versus 3.	83
3.18	Trajectoire du centroïde pour le déplacement de la figure 3.15 avec D=départ et A=arrivée.	84
3.19	<i>CubeSat</i> , plateforme ouverte de satellite cubique ⁶	85
3.20	Représentation schématique d'un mécanisme plan à quatre barres avec quatre roues d'inertie.	89
3.21	Comparaison des résultats obtenus avec la simulation du mécanisme à quatre barres et quatre roues d'inertie par les équations analytiques et le modèle numérique <i>Simscape Multibody</i> en utilisant une consigne en cosinus sur ⁷ : (a) la position angulaire de deux roues d'inertie opposées, (b) la position angulaire de toutes les roues d'inertie.	94
3.22	Comparaison de l'énergie requise afin d'exécuter une trajectoire de palier doux en minimisant la norme de l'accélération de 4 roues d'inerties ou en utilisant la solution unique avec seulement 2 roues d'inerties.	96
3.23	Résultat d'une optimisation avec CMA-ES afin d'obtenir les trajectoires et inerties des roues d'inertie minimisant la puissance cumulée sur une trajectoire de palier doux pour l'ensemble du mécanisme. La consigne et la trajectoire résultantes sont superposées dans les graphiques de gauche.	97
3.24	Influence sur le conditionnement de la matrice A de : (a) le ratio de la longueur de la membrure A sur la longueur de la membrure B , (b) le décalage du centre de masse de la membrure sur l'axe y du référentiel du corps.	99
3.25	Mécanisme de ciseau : (a) modèle plan standard, (b) unité centrale à quatre barres.	100
3.26	Boucle de contrôle <i>Simulink</i> - <i>Simscape Multibody</i> / <i>MATLAB</i> avec retour en orientation et vitesse angulaire des deux premières membrures, équations de Kane inverses et contrôleur PD.	100
3.27	Résultat du contrôle en boucle fermée d'une unité ciseau ⁸ : (a) orientation des membrures A et B réelles (R) et désirées (D), (b) vitesses angulaires des mêmes corps.	101
3.28	La membrure A du mécanisme sphérique à quatre barres avec son référentiel local, $x - y - z$, au centre de rotation.	102
3.29	Influence de l'arc des membrures λ_A et de l'angle d'ouverture du mécanisme θ_1 sur la valeur du second angle interne du mécanisme θ_2	106
3.30	Résultats d'une simulation du mécanisme sphérique pour une commande identique à deux roues d'inertie opposées ⁹ : a- norme de l'erreur sur les matrices de rotation, b- angle interne θ_1 du premier actionneur du mécanisme.	107
3.31	Proposition de design d'un mécanisme sphérique à quatre barres équipé de roues d'inertie, de masses déportées et d'encodeurs.	108

3.32	Vue en plan d'un module du prototype avec la position de son centre de masse (axes en rose).	110
3.33	Modèle 3D du prototype avec tubes d'air, roues d'inertie et moteurs réalisé avec <i>Solidworks</i>	110
3.34	Schéma blocs du contrôle en boucle fermée.	114
3.35	Évolution du conditionnement du jacobien en faisant varier : (a) le rayon du module, (b) le décalage selon y du centre de masse.	115
3.36	Prototype avec ses marqueurs fiduciaires tel que vu par la caméra. Le suivi des marqueurs superpose sur l'image le référentiel (orientation et position) des marqueurs trouvés dans l'image.	116
3.37	Test 1 avec les consignes 3.198 ¹⁰ : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d'inertie.	119
3.38	Test 2 ¹¹ : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d'inertie.	120
3.39	Test 3 ¹² : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d'inertie.	121
3.40	Amplitude et phase du filtre Tchebyshev Type I utilisé sur la commande du prototype.	121
3.41	Test 1 avec les consignes filtrées : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d'inertie.	122
4.1	L'état des débris en orbite selon les producteurs du film <i>Wall-E</i> (Stanton, 2008).	126
4.2	Visualisation des débris autour de la Terre : (a) Vue d'ensemble provenant de la NASA ¹³ , (b) Zoom sur LEO provenant de l'ESA ¹⁴	127
4.3	Évolution du nuage de débris causé par la collision Iridium/Cosmos (Celes-trak/AGI Viewer 9) : (a) 10 minutes après impact, (b) 3 heures après impact.	128
4.4	Distribution du flux de débris en fonction de leur diamètre, prédit en 2020 sur une orbite à 800 km d'altitude et 80° d'inclinaison (ORDEM3). La courbe jaune est la limite basse, la rouge, la limite haute et la courbe bleue la moyenne.	129
4.5	Illustration de l'effet d'une collision entre un bloc solide d'aluminium représentant l'engin spatial et un petit débris provenant de tests effectués par ESA ¹⁵	130
4.6	Distribution du flux de débris selon la masse à 819 km d'altitude pour différentes sources de débris (MASTER).	132
4.7	Distribution de densité des débris de 5 mm à 10 cm sur les LEO en fonction de l'altitude et de la déclinaison, pour une mission d'un an sans scénario de mitigation des débris (MASTER).	133
4.8	Évolution d'une orbite générique LEO par rapport à la rotation de la Terre à chaque passage de l'engin à l'équateur ¹⁶	134
4.9	Détails géométriques de la fusée Ariane 5 (PEREZ, 2011).	135
4.10	Schéma du concept de longe électro-dynamique EDDE (LEVIN et al., 2012).	138
4.11	Schéma du concept de contrôle d'un manipulateur sans effets sur la base par CMG (CARPENTER, 2009).	139
4.12	Concept pour augmenter la traînée des débris et les ralentir : (a) Ballon GOLD (T. NOCK et al., 2004), (b) Voile solaire ¹⁷	141

4.13 (a) Ratio d'expansion R_P en fonction de la longueur de la première membrure l_1 pour différentes valeurs du nombre de membrures n ayant toutes une épaisseur de 60 mm. Une chute à zéro survient lorsque le mécanisme ne peut entrer dans les limites imposées de l'espace disponible en mode rétracté ($H_R \leq \frac{4,5}{2}$ m), (b) Solution possible avec $n = 30$, $l_1 = 2,1$ m et $w = 60$ mm.	143
4.14 Empilement des faces triangulaires pour le transport.	144
4.15 Ordre de dépliage des 80 faces sur la surface de la coupole tessellée par des mécanismes plans triangulaires et une vue en coupe de la coupole ¹⁸	144
4.16 Coupe de la section d'une membrure (dimensions en mm) et section de la courroies hachurées.	146
4.17 Diminution de l'altitude pour une coupole de 415 m de diamètre.	149
4.18 Transferts d'orbite de Hohmann.	150
4.19 Coupole de 80 triangles avec le vecteur de couple de chacune de leur roues d'inertie.	152
D.1 Modèle <i>Simscape Multibody</i> du mécanisme plan flottant à 4 barres.	174
E.1 Modèle <i>Simscape Multibody</i> du mécanisme sphérique à quatre barres.	176

À ma mère,

*Et à toutes les personnes qui
m'ont apporté leur soutien
direct et indirect.*

“Toute technologie suffisamment
avancée ne peut être distinguée
de la magie”.

—B.W.

Remerciements

Le travail de recherche sous-tenant cette thèse a été conduit dans les infrastructures de l'Université Laval, plus particulièrement dans le Laboratoire de Robotique dirigé par le professeur Clément Gosselin. Les outils et travaux antérieurs de ce groupe de recherche prolifique m'ont grandement servi. L'expertise du professionnel de recherche Thierry Laliberté sur la production de prototypes a permis de rendre beaucoup plus fluide et efficace mes itérations de modèles déployables et le contrôle de corps flottant sur une table à coussin d'air. Les nombreux collègues du laboratoire ont stimulé ma créativité et canalisé mes énergies par des discussions animées sur des sujets variés. Je dois mentionner particulièrement Dinh et nos parties de Go, Pascal et son insatiable énergie, Vincent, Alexis et André pour nos discussions de sous-sol et Éric pour les centaines d'heures de squash. Il va sans dire que la supervision du professeur Clément Gosselin est exemplaire et m'a permis d'apprécier ma chance de poursuivre ces années de recherche dans son groupe. Sa disponibilité et la rétroaction de qualité qu'il procure à ses étudiants nous permet d'évoluer rapidement. Son expertise sur la conception de mécanismes ne cesse de me surprendre et de m'emballer. Sa capacité de synthèse et de compréhension de l'algèbre géométrique des mécanismes m'a permis à chaque visite à son bureau de faire avancer à grands pas mes travaux. Je souhaite aussi mentionner le soutien de mes juges pendant le processus de recherche, Inna Sharf et Philippe Giguère, qui m'ont donné confiance. Je n'aurais pas pu arriver au bout de ce projet marathonien sans l'appui inconditionnel de ma famille, de ma conjointe et de mes amis. Jusque dans ses derniers jours parmi nous, ma mère ne se lassait pas de répéter l'importance qu'elle accordait à ce travail et la fierté qu'elle éprouvait à témoigner de ma ténacité. La résilience et l'énergie investie dans le travail font partie du caractère qu'elle m'a légué. Ma merveilleuse compagne de vie a été à mes côtés pour me supporter et me motiver en toutes situations. Comme elle, mes amis et ma famille, qui ont dû subir mes absences et la distance pendant ces dernières années ont fait preuve de patience et ont toujours montré une confiance en mes capacités et une présence indéfectible aux moments importants. Un merci particulier à mon beau-frère, Laurent, pour son travail de correction et ses suggestions éclairantes sur ma thèse.

Comme c'est le cas pour les travaux de cette envergure, il n'aurait pas été possible sans la collaboration et le soutien de ces personnes uniques et cette thèse veut tous leur rendre un peu hommage.

Chapitre 1

Introduction

Avant d’explorer les concepts de mécanismes déployables et de réorientation en orbite, le contexte du projet de recherche, la littérature pertinente aux domaines touchés par ces travaux et la méthodologie de recherche sont détaillés dans ce premier chapitre. Les contributions que ces recherches ont apportées à différents domaines sont traités à la fin du chapitre ainsi que la problématique exacte à laquelle les solutions proposées répondent.

1.1 Contexte

L’ingéniosité dans la conception de mécanismes rétractables et déployables ouvre à de nouvelles fonctionnalités et permet des gains d’énergie et d’espace. Les tables et chaises pliantes font maintenant parties du quotidien, comme les sèche-linge rétractables ; des mécanismes déployables simples. Des structures déployables plus complexes sont aussi présentes pour des applications variées, parmi les plus connues : les parapluies et les tentes (voir les brevets à la figure 1.1). Des concepts architecturaux innovateurs permettant le changement de forme du bâtiment utilisent ce type de mécanismes (AKGÜN et al., 2010). Ils ont l’avantage de s’adapter aux besoins des utilisateurs pour optimiser l’espace, d’ajuster les propriétés acoustiques du bâtiment, de maximiser la protection du soleil et les conditions d’éclairage naturel, de faciliter la ventilation, de détendre les contraintes aérodynamiques sur la structure, d’augmenter l’efficacité photovoltaïque d’un toit solaire, de brasser la neige accumulée sur le toit et de produire des effets esthétiques impressionnants (CHRISTOFOROU et al., 2015). De manière plus générale ces mécanismes offrent un avantage majeur dans des contextes où l’espace de transport et d’entreposage est limité ou couteux. En plus de l’optimisation de leur ratio d’expansion, c’est-à-dire du ratio d’une longueur caractéristique en configuration déployée sur la valeur de cette longueur en configuration rétractée, et des critères de résistance communs aux structures fixes, les mécanismes déployables doivent être relativement simples et rapides à déployer. Plusieurs critères permettent leur classification : ces structures sont-elles réutilisables, c’est-à-dire rétractables après expansion, ou à usage unique ? Conservent-elles leur forme extérieure géné-

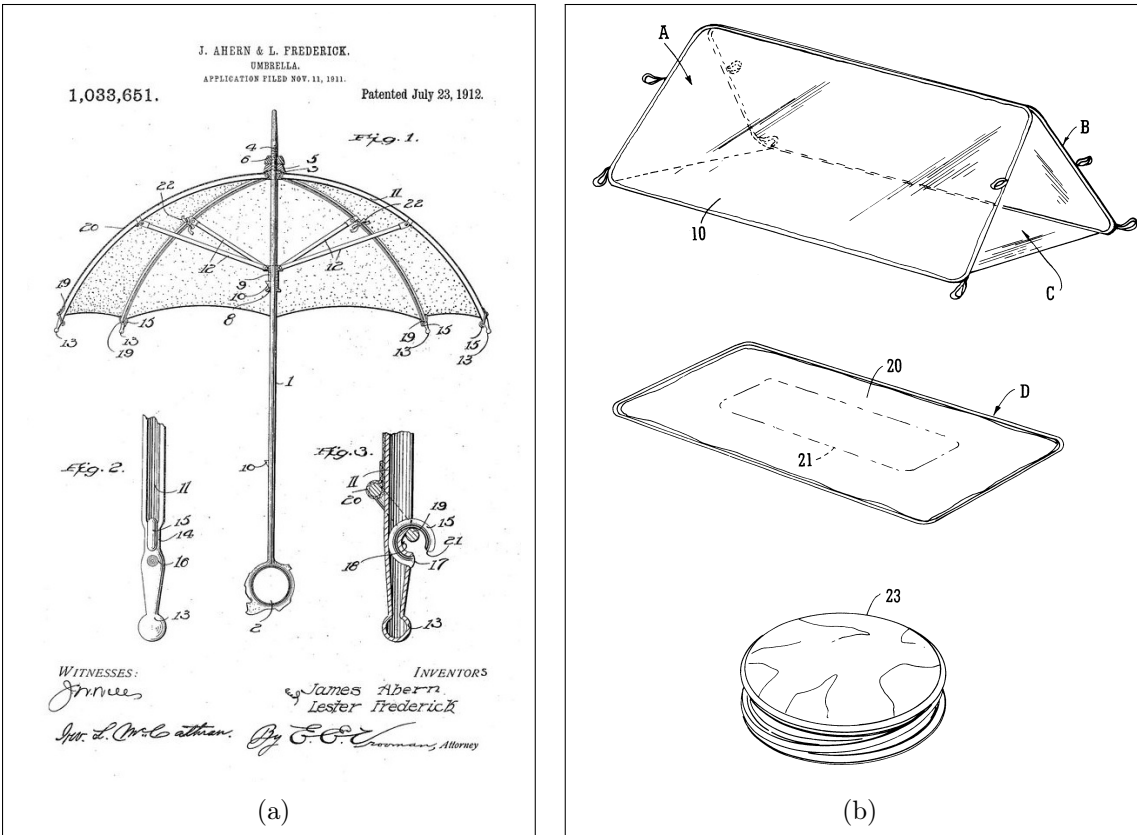


FIGURE 1.1 – Exemple de structures déployables brevetées : (a) un parapluie (AHERN et FREDERICK, 1912), (b) une tente (BRERETON, 2001).

Modèle	Ratio	Préservation de la forme	Rétractable/Réutilisable
Sphère d’Hoberman (HOBERMAN, 1991)	3.2	Non	Oui
Membrure polyédrique (WOHLHART, 2008)	< 2	Oui	Oui
Parallélogramme (WEI et al., 2006)	< 1.5	Oui	Oui
Mécanisme plan 1DDL (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006)	3.26	Oui	Oui
Bigelow gonflable (Leonard2013)	2.54	Non	Non
Membrane d’origami (NATORI et al., 2013)	9	Non	Non
Poutre télescopique (GANTES, 2001)	30	Non ¹	Oui

TABLEAU 1.1 – Comparaison de certains concepts de mécanismes déployables.

rale pendant le déploiement ? Plusieurs familles de mécanismes existent et celle-ci servent à la classification utilisée à la section 1.2.1. Le tableau 1.1 expose les caractéristiques de quelques mécanismes de structures déployables.

L’optimisation du volume de transport est essentiel lors d’explorations en territoire inconnu ;

1. En considérant que l’extension linéaire des mâts tendent une membrane.

sous-marin, éloigné sur Terre ou plus récemment dans l'espace. La quantité, le poids et la dimension des équipements emportés sont constamment optimisés pour minimiser les coûts énergétiques du transport. Deux nouvelles avenues sont alors ouvertes : emmener plus d'énergie et permettre ainsi des expériences plus poussées dans un meilleur confort des explorateurs, ou conserver son énergie pour atteindre des régions plus lointaines. Des abris temporaires de toiles repliées aux ustensiles de camping en origami de téflon², les possibilités sont vastes et les besoins diversifiés. Les structures d'abris temporaires, généralement des architectures déployables à base de textile, sont populaires depuis près d'un siècle. Leurs applications restent limitées à des contextes ne risquant pas de provoquer la rupture du tissu. Comme hors de l'atmosphère terrestre les radiations sont très puissantes et la vitesse de déplacement des objets peut provoquer des collisions puissantes (ces conditions sont traitées en détail au chapitre 4), cette approche est moins pertinente. Si certains groupes de recherche s'affairent au développement de tissus résistant à ces conditions (SPILLANTINI et al., 2007 ; CHRISTIANSEN, 2003), une approche alternative consiste à déployer une structure rigide plus lourde mais structurellement plus robuste aux impacts. Dès les premières explorations hors de l'atmosphère terrestre, de telles structures ont été abondamment mises à profit.

Cette thèse vise aussi des applications spatiales potentielles de structures déployables. À nouveau, l'énergie étant limitée et la trajectoire d'un satellite étant sensible aux perturbations, l'effet du déploiement peut être néfaste (QUADRELLI et WEST, 2009). Une attention particulière doit être portée aux effets du déploiement sur l'orientation du satellite de base. En orbite, les objets flottants ont la propriété de voir leur quantité de mouvement et d'énergie conservées. Autrement dit, un moteur interne qui produit une force ou un couple pour bouger une pièce mécanique a un effet sur le positionnement de tout le satellite. En pratique ces forces sont généralement appliquées à des masses faibles comparées à celle de tout le satellite et leur effet sur l'orientation du satellite est cumulé dans le temps et contrecarré par des propulseurs chimiques (DEV et ZOU, 2013). Toutefois, il serait préférable de ne pas faire usage de combustible et de tirer avantage d'une stratégie de déploiement conçue pour son effet contrôlé sur l'orientation de l'engin spatial.

1.2 Revue de littérature

À notre connaissance, aucun travail de recherche académique n'a encore été accompli sur les mécanismes déployables rigides conçus pour la ré-orientation de satellites. Cependant, plusieurs travaux spécialisés sur les mécanismes déployables, la manipulation d'objets en orbite et la réorientation d'engin spatiaux ont déjà été réalisés et leurs résultats sont résumés ici.

2. notamment les produits Fozzils : <http://www.fozzils.com/#!outdoor/c4vn> (site web visité le 08/05/2016)

1.2.1 Mécanismes déployables

Les travaux sur des mécanismes permettant de déployer des surfaces sont nombreux. Ils seront exposés selon qu'ils se basent sur l'utilisation d'extension d'éléments de structure linéaires, du principe de tenségrité, qu'ils appartiennent au domaine des panneaux rigides pleins ou encore des structures gonflables ou des mécanismes polyédriques. Chacune de ces approches possède ses avantages et inconvénients qui doivent être comparés afin de sélectionner la mieux adaptée.

Éléments de structure linéaire

Le déploiement d'une surface peut se faire par l'extension selon une seule dimension d'éléments de structure interne permettant de tendre une membrane. Le système conçu par la compagnie Craighead, par exemple, est basé sur des longerons dépliables et des transverses télescopiques. Il est déployé avec l'énergie accumulée avant le lancement dans des ressorts et peut atteindre en théorie un ratio de déploiement linéaire de 30 pour 1 (GANTES, 2001). Toutefois, le *FASTmast*, montré à la figure 1.2-a, fait d'articulations cylindriques à chaque coin et de contreventements câblés, était la technologie la plus populaire pour le déploiement de membranes en orbite jusqu'au début des années 2010 (STRAUBEL et SINAPIUS, 2013). Les technologies d'extension de tubes roulés, comme des rubans à mesurer, sont aussi très prometteuses : lorsque pleinement déployés les tubes ont une grande stabilité structurelle grâce à leur profilé incurvé alors qu'aplatis et enroulés, ils sont très compacts. D'une manière similaire, des longerons faits de tubes enroulés et entreposés dans un cylindre ont été proposés pour des applications spatiales, tel que montré à la figure 1.2-b.

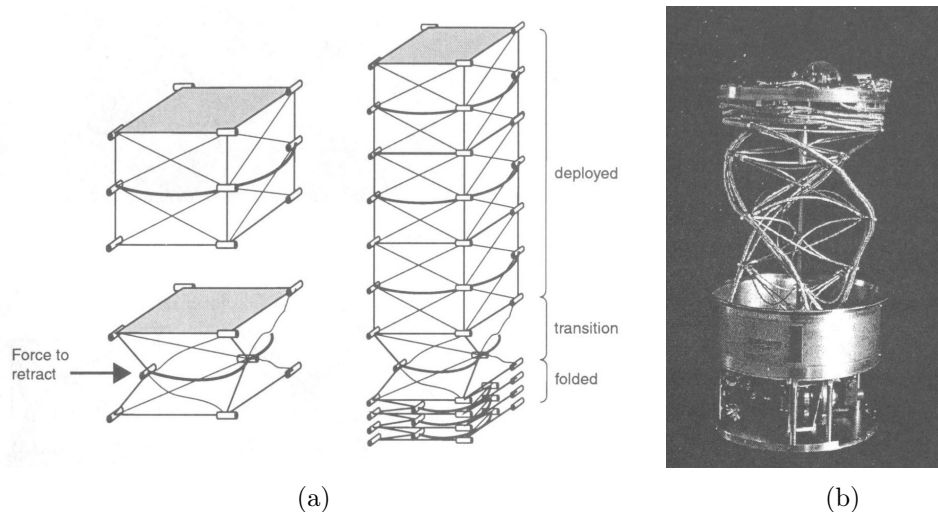


FIGURE 1.2 – Concepts de mâts par AEC-Able Engineering (GANTES, 2001) : (a) FASTmast, (b) Principe de mât enroulable.

L'un des principaux défis de la conception de mâts télescopiques très longs est la modélisation de leur flexibilité. Les mouvements créés par le déploiement axial peuvent être modélisés, mais

les modèles utilisés sont complexes et approximatifs (TABARROK et BEHDINAN, 2000).

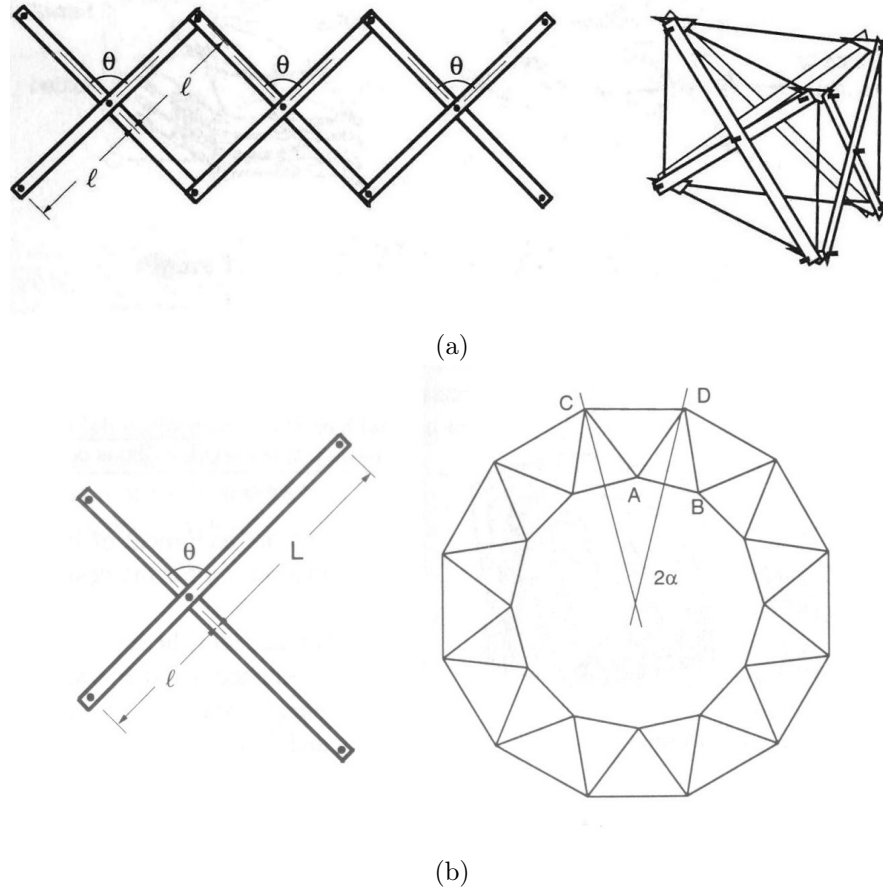


FIGURE 1.3 – Mécanismes inspirés du ciseau simple (PELLEGRINO, 2001) : (a) ciseau symétrique déployé et le pantographe, unité triangulaire 3D ayant un ciseau sur chaque face, (b) Ciseau asymétrique et anneau de pantographes.

Une extension linéaire peut être réalisée sur la circonférence d'un cercle avec des concepts similaires aux mâts. La résistance de cette géométrie est meilleure car elle est fermée, mais le mécanisme reste sensible aux forces hors du plan du cercle. Le pantographe, montré à la figure 1.3-a, est un assemblage en prisme triangulaire de mécanismes ciseaux stabilisé par des câbles qui, lorsque assemblé en anneau, permet de déployer une membrane et un filet de câbles. L'arc de cercle défini par un module est relié aux dimensions du module de sorte que :

$$\frac{L}{l} = \frac{\cos \alpha \sin^2 \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha}, \quad (1.1)$$

où α est l'arc balayé par une unité de pantographe et L, l sont les dimensions d'une unité de pantographe. Un de ces anneaux est montré à la figure 1.3. Ceux-ci se rapprochent du domaine des tensegrités (traité plus bas) en tirant profit de la mixité câbles-barres.

Tenségrités

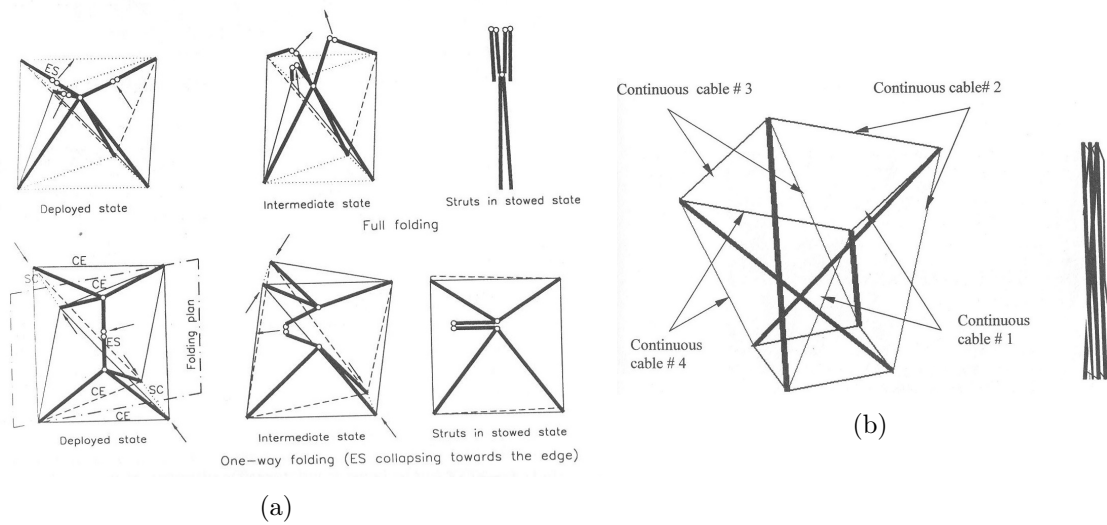


FIGURE 1.4 – Exemples de tenségrités déployables (WANG et LI, 2005) : (a) par membres pliables, (b) par unité s’affaissant.

Des structures, par exemple en treillis, dont la synthèse peut être réduite à la somme des forces aux articulations et à l’étude de membrures à deux forces, peuvent être optimisées en tenant compte du fait que leurs membrures supportent uniquement une force de traction ou de compression axiale. Une manière de s’y prendre est de remplacer les membrures en traction par des câbles de sorte que la structure ne devienne stable que par la compression des membrures rigides et la tension des câbles ensemble. Ces structures sont appelées tenségrités et sont populaires en architecture principalement parce qu’elles sont plus légères et moins encombrantes visuellement que les charpentes solides (SNELSON, 1965). Comme ces assemblages demandent d’être toujours sous tension, relâcher cette tension dans un élément devrait provoquer l’effondrement de toute la structure. Afin d’utiliser ce concept pour des surfaces déployables, il faut d’abord arriver à contrôler cette tension interne. Des solutions ont été proposées tel que l’utilisation de membrures rigides télescopiques dans l’assemblage, le contrôle de la longueur et de la tension des câbles (LIAPI, 2005) ou encore des membrures pliables (WANG et LI, 2005). En fait le contrôle de la tension interne peut même servir à induire des vibrations afin de déplacer un robot mobile (ZIMMERMANN, 2013). L’unité de base montrée à la figure 1.4 peut être assemblée côte-à-côte avec d’autres structures similaires pour former un grillage ou un mât. Les principales difficultés associées à ce type de structures sont de bien modéliser les contacts entre les membrures, notamment lorsque celles-ci glissent l’une sur l’autre avant d’être en compression, ainsi que de choisir quelles membrures ou quels câbles devraient être actifs (actionnés) pour déployer l’assemblage (BOUDERBALA et MOTRO, 2000). Il peut être plus avantageux de retenir le mode d’actionnement par câbles car celui-ci maintient une tension dans les câbles et diminue ainsi les risques que ceux-ci s’emmêlent.

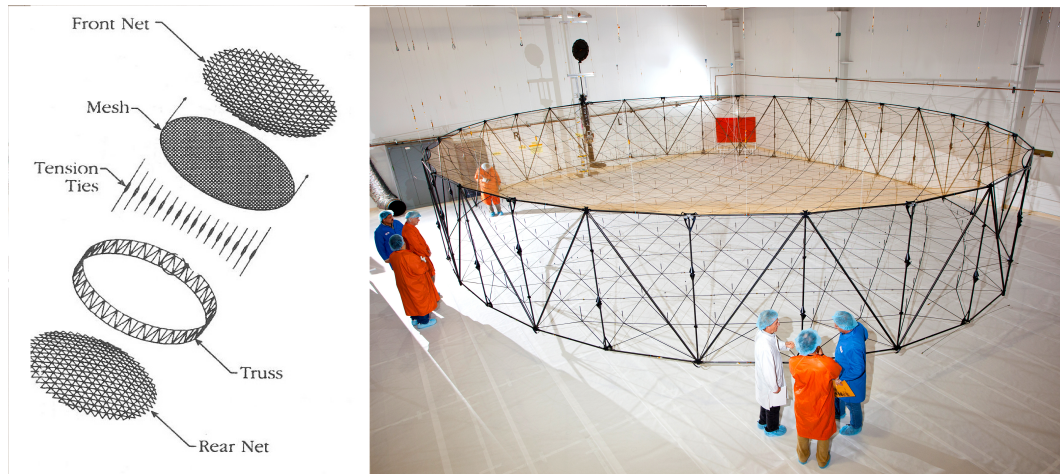


FIGURE 1.5 – L'antenne réflective spatiale Astromesh (PELLEGRINO, 2001).

Certains ont déjà proposés des variantes adaptées pour des applications spatiales, comme l'antenne réflective de Tiber (MOTRO, 2005). L'AstroMesh est inspiré des tensegrités mais avec certaines membrures rigides théoriquement uniquement en tension pour obtenir une structure plus rigide. L'AstroMesh est un anneau déployable supportant un filet interne de câbles, tel que montré à la figure 1.5. Un prototype a déjà été testé en orbite par Northrop Grumman³. Cette entreprise, ainsi que la compagnie NEC, utilisent des anneaux semblables aux concepts de Tiber et Thomson pour étendre un filet et des attaches retenant deux membranes miroirs : une de chaque côté (PELLEGRINO, 2001). La moyenne des carrés de l'erreur de positionnement de points sur la surface peut être aussi faible que 0,5 mm, ce qui est suffisant pour une antenne de communication. Ce type d'application requiert une coupole, qui dans cette structure est approximée par un dôme géodésique tendu par des fixations perpendiculaires à la surface à chaque articulation. En fait, l'une des deux surfaces est uniquement utilisée afin de tendre les attaches entre les surfaces et maintenir les membranes tendues avec une bonne précision. Ces structures sont aussi régulièrement appelées "fermes sous tension" et des principes similaires ont servi à concevoir des structures déjà en orbite depuis plus de 10 ans, comme l'antenne parabolique de 8 m HALCA, lancée avant 2000 (MIURA et TNAZAWA, 2000). Ces concepts ont plusieurs avantages notables mais, lors de leur déploiement, passent par des géométries instables. De plus, leur intégrité structurelle repose sur des matériaux flexibles (membranes, câbles, etc.).

Panneaux rigides ou membranes épaisses

Plutôt que de reposer sur l'extension d'une membrane par une structure externe, il est possible de déplier une membrane épaisse, ou carrément des panneaux rigides pour créer la surface finale. Guest et Pellegrino, tel que rapporté par BARKER et GUEST, 2000, ont proposé une

3. <http://www.northropgrumman.com/businessventures/astroaerospace/products/pages/astromesh.aspx>

technique permettant le pliage d'une membrane cylindrique par décomposition de celle-ci en triangles (tessellation), concept utile entre autres pour le déploiement d'éléments de structures gonflables discutées à la section suivante.

Un domaine d'inspiration pour ces mécanismes est l'art ancien de l'origami et sa compréhension du comportement des pliages. Des chercheurs tentent d'éclaircir les mathématiques pouvant modéliser ces comportements afin de s'en inspirer entre autres pour créer de nouveaux types d'articulations (avec la possibilité de modifier leur mobilité tel que les liens kinématotropiques de Wohlhart), de nouveaux mécanismes parallèles et plusieurs nouveaux domaines d'application de ces connaissances, tel que l'industrie de l'emballage alimentaire (TACHI, 2010). En ce qui concerne les applications spatiales, le concept phare est celui du schéma de maillage de l'origami Miura-ori, basé sur une liaison de pliage à quatre degrés de liberté. Ces mécanismes utilisent des surfaces rigides pleines contrairement au déploiement de filets ou de membranes fragiles par mâts de la section précédente. Ce peut aussi être un moyen de déployer des structures en nid d'abeille pour former une armature solide et légère (ZHANG et DAI, 2013). Une série de symposiums de l'ASME ont permis d'explorer le potentiel de l'origami suite à une mention de l'intérêt de la NASA pour des applications spatiales de ces concepts. Par exemple, l'antenne de surface solide déployable (*Solid Surface Deployable Antenna*) enroule ses ailes autour d'un mât central. Chacune de ses ailes est composée de panneaux rigides assemblés par des articulations de pliage (GANTES, 2001).

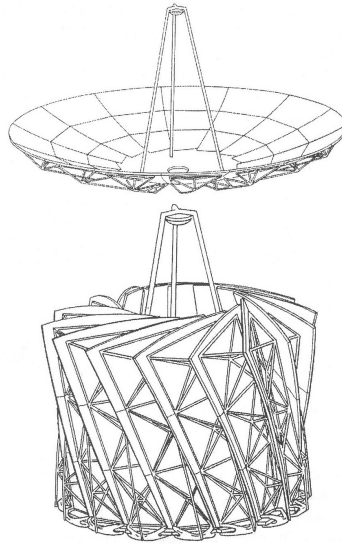


FIGURE 1.6 – Système de déploiement d'antenne en tournesol (GANTES, 2001).

Une variante basée sur la géométrie d'une fleur de tournesol a été produite par Dornier/ESA, tel que montré à la figure 1.6, l'antenne TRW Extended Sunflower. Des panneaux rigides se déploient à partir de la structure conique centrale en tournant sur leur base ce qui permet de créer une coupole finale avec plus de précision que les techniques gonflables, pratique pour des

applications en télécommunication ou pour les télescopes.

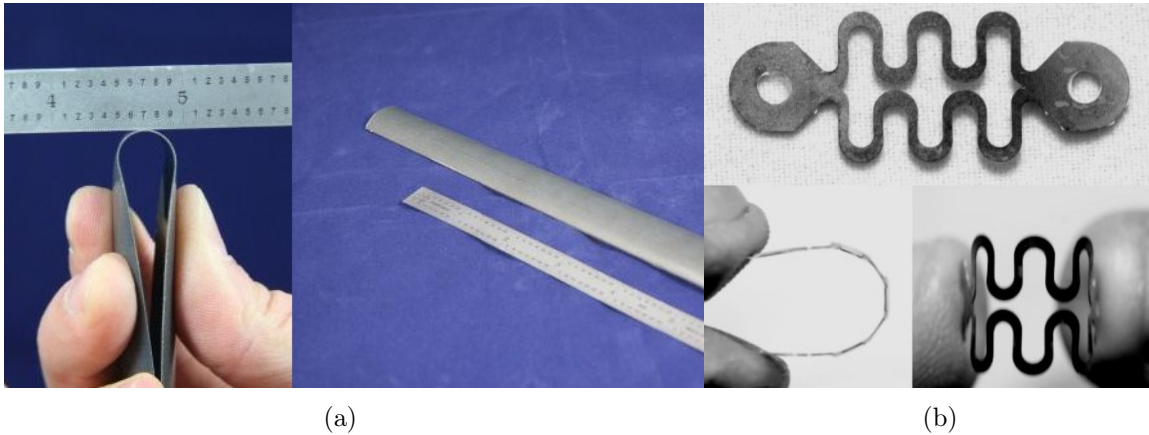


FIGURE 1.7 – Articulations pour le pliage de style origami : (a) Composite mince flexible (FELTON et al., 2013), (b) Penture mince en acier (REYNOLDS et al., 2013).

Pour les applications demandant moins de précision sur la géométrie de leur surface, tel que les voiles solaires, le déploiement en spirale ou déploiement sur la circonférence permet d’atteindre de hauts ratios en restant simple d’utilisation. Par exemple, la voile d’IKAROS lancée en 2010 par l’agence spatiale japonaise (JAXA) atteint une superficie carrée de 20m de diagonale afin de permettre la propulsion d’un engin jusqu’au côté le plus éloigné du soleil (NATORI et al., 2013). C’est l’exemple utilisé dans le tableau 1.1, un déploiement de membrane en spirale. Si les schémas de pliage pour membranes et panneaux rigides ont beaucoup de potentiel pour les applications spatiales, elles doivent comme toutes les autres solutions démontrer une grande robustesse dans leur déploiement autonome, ce qui semble moins évident. Quelques solutions ont été suggérées pour cela, telles que des circuits imprimés sur des polymères à mémoire de forme pour créer des articulations de pliage actionnés (FELTON et al., 2013), montré à la figure 1.7-a, du ruban de composite flexible (REYNOLDS et al., 2013), montré à la figure 1.7-b, ou le gonflage d’éléments actionnant (section suivante). Ces mécanismes de déploiement de panneaux rigides ont l’avantage d’être robustes mais ils sont lourds et atteignent de faibles ratio d’expansion. Ils ont aussi l’avantage d’être déjà utilisés dans l’espace comme dans le projet de l’Agence Spatiale Canadienne (ASC) utilisant des antennes déployées par des ressorts pré-contraints (REYNOLDS et al., 2013).

Structures gonflables

*DEPLOYTECH*⁴ est l’une des nombreuses compagnies commercialisant le concept de structure gonflable. Il s’agit de déployer des structures faites de membranes étanches en les remplissant de gaz. Leur poutre légèrement biseautée (ou mât conique) est inspirée elle aussi, de l’origami, principalement des études de BARKER et GUEST, 2000 sur les schémas de pliage

4. Site web de l’entreprise *DEPLOYTECH* : <http://deploytech.eu/>, visité le 05/03/2016.

en accordéon. Si les géométries possibles sont infinies, plusieurs désavantages doivent être considérés avec cette famille de mécanismes :

1. Le déploiement risque d'être incontrôlable et peut ne jamais atteindre son état complètement déployé ;
2. Si utilisé sur un satellite, le déploiement peut engendrer des perturbations (couples) ;
3. La pression interne de gaz peut nécessiter d'être maintenue en permanence pour conserver l'état déployé.

Les cylindres décomposés en triangles gonflables réduisent certains de ces risques grâce à la symétrie de leur pliage (BARKER et GUEST, 2000). Néanmoins le principal obstacle à leur utilisation est le maintien de leur géométrie déployée. L'idéal consisterait généralement à utiliser d'autres sources de rigidité que le gaz servant au déploiement de la géométrie. C'est possible en utilisant des membranes d'époxy qui durciront lentement au soleil, des gels à fort pourcentage d'eau qui s'évaporeront pour ne laisser qu'une structure éponge rigide, ou encore un alliage d'aluminium à mémoire de forme pouvant "mémoriser" son état permanent en le stressant légèrement (JENKINS, 2001). Une structure gonflable habitable est ajoutée en 2016 à ISS par la compagnie Bigelow mandatée par la NASA. Tel qu'indiqué au tableau 1.1 son ratio d'expansion surfacique est de 2,54, passant d'un cylindre de 2,36 m de diamètre par 2,16 m de long à un cylindre final de 3,23 m de diamètre par 4,01 m de long.

Mécanismes polyédriques

Lorsqu'un mécanisme est tel que sa géométrie finale est un polyèdre régulier ou irrégulier, ses faces et ses sommets possèdent des attributs particuliers à la famille des articulations polyédriques ou des mécanismes polyédriques déployables (DPM). Cette famille de mécanismes a été popularisée par le travail d'Hoberman, visible à la figure 1.8, déployant des étoiles en sphères grâce à des mécanismes plans en cercles imbriqués (HOBERMAN, 1991). En plus d'avoir produit une ligne de jouets, sa compagnie éponyme⁵ propose des solutions de bâtiments temporaires et permanents se déployant et même des sculptures monumentales exploitant le concept. Dans les travaux de WOHLHART, 2001 une revue exhaustive de l'utilisation de mécanismes plans pour le déploiement de polyèdres réguliers est présentée. Les solides de Platon (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre) sont réputés uniques par leur symétrie parfaite. Ceci permet d'associer une structure plane identique à chacune de leur face et permettant leur expansion. Des solutions ont proposé l'expansion plus complexe de polyèdres irréguliers possédant moins de plans de symétrie et ont proposé l'utilisation de mécanismes spatiaux (3D) sur chaque face plutôt que plan. Cependant si leur intérêt mathématique est indéniable, leur mise en application est beaucoup plus complexe (WOHLHART, 2003).

Les mécanismes plans déployables s'étendent dans un spectre beaucoup plus large que l'assemblage en polyèdres. Probablement le plus populaire et le plus couramment utilisé, l'élément

5. Site web de l'entreprise *Hoberman* : <http://www.hoberman.com/>, visité le 17/05/2016.

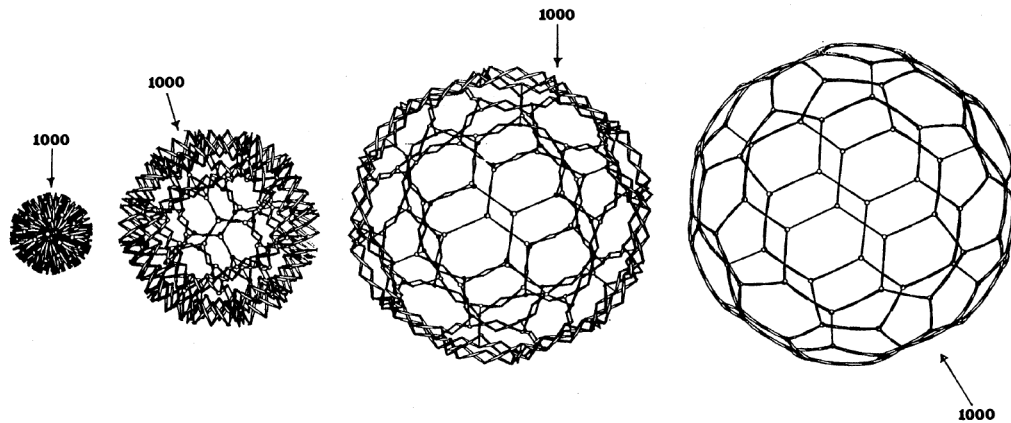


FIGURE 1.8 – Sphère d’Hobermann (HOBERMAN, 1991).

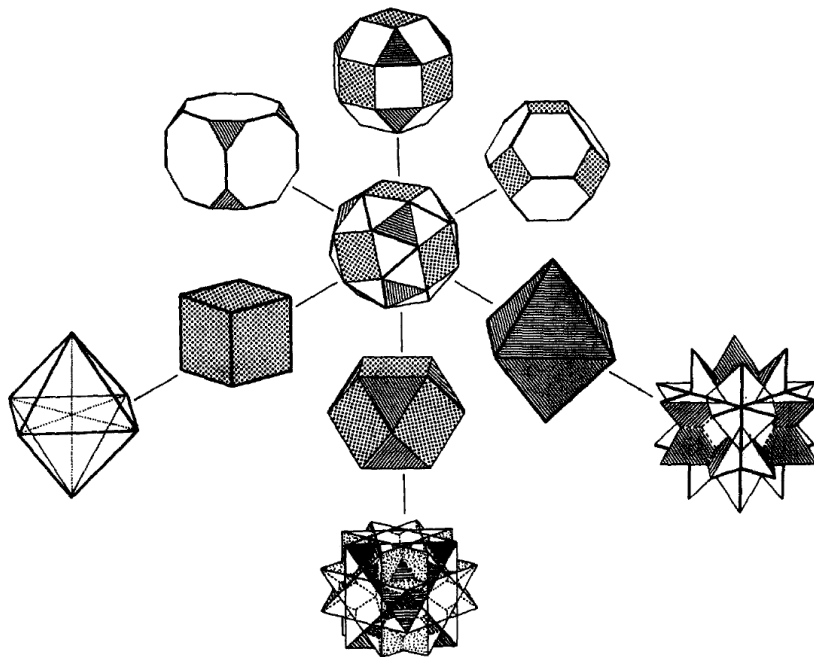


FIGURE 1.9 – Jitterbug de Fuller (VERHEYEN, 1989).

en ciseaux (*scissor-like elements - SLE*) introduit à la figure 1.3, repose sur l’assemblage de paires de barres pouvant pivoter l’une par rapport à l’autre suivant un axe perpendiculaire à leur plan commun et pouvant être assemblés de manière à créer des surfaces cylindriques (ZHAO et al., 2009). En variant la position du centre de rotation sur de tels mécanismes, des Éléments Angulaires Généralisés (*Generalized Angulated Elements*) sont créés permettant de produire n’importe quelle surface pouvant être décomposée en dalles, c’est-à-dire tessellée (GANTES, 2001). Pour faire une conception à partir de ces éléments, il est nécessaire de dériver les contraintes des articulations de pliage, les égalités de projection des longueurs caractéristiques des modules, en s’assurant de respecter la loi des angles internes du parallélogramme,

de manière à s’assurer d’obtenir un mécanisme fonctionnel. Plusieurs autres concepts de mécanismes existent, tel que les ciseaux superposés (WEI et al., 2006) et les ciseaux à 6 barres (KIPER et al., 2008).

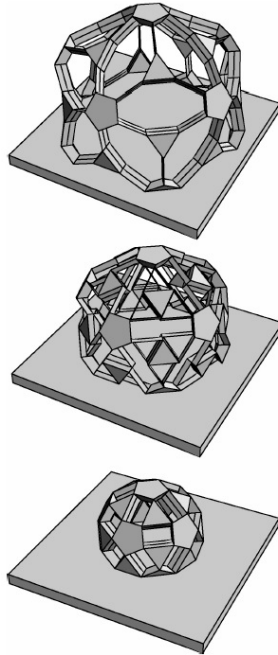


FIGURE 1.10 – Mécanismes plans doublés pour une coupole (WOHLHART, 2008).

Permettre à chacune des faces d’un polyèdre de se déployer engendre l’expansion spatiale du polyèdre et donc chaque face doit pouvoir subir des rotations à chacun de ses sommets indépendamment de ses faces adjacentes. Le problème automatiquement soulevé est celui de la configuration des articulations aux sommets, une simple liaison rotoïde ne pouvant pas suivre les rotations de faces adjacentes non coplanaires. Pour le cas des polyèdres réguliers, Wohlhart propose l’utilisation d’articulations “*gussets*”, c’est-à-dire un agencement de liaisons cylindriques non parallèles suivant la géométrie du polyèdre (WOHLHART, 2001). La majorité des mécanismes polyédriques sont basés sur ces articulations (WEI et al., 2006) et quelques-uns sur des articulations prismatiques. Les polyèdres ainsi déployés sont toujours convexes, mais il est possible d’en produire des concaves grâce à des articulations 2R plus complexes composées de deux rotoïdes (RÖSCHEL, 2000). Un pionnier s’est démarqué dans le domaine en créant un liaison permettant de “glisser” d’un polyèdre à un autre, le “*jitterbug*” de Buckminster Fuller, montré à la figure 1.9. Les travaux de GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006 en ce sens proposent un concept de patte générique s’attachant aux coins de ces solides par des articulations sphériques. Des mécanismes polyédriques inspirés de la nature font plutôt usage d’articulations planes reliant des faces en rotation (KOVÁCS et al., 2004) ou seulement en translation pour certaines géométries plus simples (WOHLHART, 1995). Finalement, plutôt que d’utiliser uniquement les sommets, les faces peuvent se déployer par des articulations

prismatiques sur chaque arête (AGRAWAL et al., 2002).

Tous les mécanismes susmentionnés sont étudiés pour une forme assemblée fermée stable. C'est-à-dire que les faces forment ensemble un solide fermé. Dans le cas du déploiement d'une surface, plane ou incurvée telle une coupole, la stabilité est précaire. En effet les sommets de la périphérie ont beaucoup de degrés de liberté. WOHLHART, 2008 a proposé de doubler le mécanisme plan de chaque face en inversant son sens de rotation pour rendre la géométrie ouverte stable pendant tout le déploiement, visible à la figure 1.10.

Ainsi pour la conception d'une coupole approximée par un polyèdre dont les faces sont des mécanismes plans identiques, un certain nombre de contraintes doivent être respectées :

1. Chaque unité doit se comporter indépendamment tel que désiré.
2. Sous tous les angles de vue, la projection plane de la structure doit s'inscrire dans une sphère et décrire un polygone convexe.
3. Tous les nœuds extérieurs doivent reposer sur une même hémisphère ou moins.
4. Les unités adjacentes, partageant leurs sommets, doivent toujours avoir les mêmes dimensions externes.

Les principales catégories de surfaces déployables et de structure permettant de déployer une surface ont été discutées et les mécanismes les plus pertinents aux applications spatiales ont été présentés. Afin d'obtenir un très grand ratio de déploiement tout en limitant le moins possible la géométrie finale de la surface, la dernière approche, basée sur des mécanismes plans est celle retenue pour la conception d'un nouveau mécanisme. Ces mécanismes sont plus robustes et plus stables pendant et après leur déploiement, mais le très grand nombre d'articulations les rend sensibles au frottement cumulé et aux risques de coincement de pièces mobiles. Il faut donc en concevoir le principe de déploiement en considérant méticuleusement ces aspects de la transmission du mouvement.

1.2.2 Réorientation

Le déploiement d'une large surface peut difficilement se faire sans engendrer des effets sur la position et l'orientation de sa base flottante en orbite. Des systèmes de compensation sont montés à bord de tous les engins spatiaux (GUI et al., 2013 ; SILANI et LOVERA, 2005 ; SHIBLI, 2011 ; KUO et WU, 2012) pour leur permettre de contrecarrer les perturbations habituelles dues au champs électromagnétiques, à la légère friction présente près de la Terre ou aux collisions potentielles avec d'autres objets en orbite (REYHANOGLU et MCCLAMROCH, 1992). L'étude de DEV et ZOU, 2013 quantifie ces perturbations et démontre que, pour un pico-satellite (masse inférieure à 1 kg), l'effet de trainée en orbite basse est plus de quatre fois supérieur aux effets des radiations solaires et des champs électromagnétiques. Ces systèmes de stabilisation de l'orientation, nommés *Attitude Control Systems (ACS)*, peuvent prendre plusieurs formes, dont les plus communes sont l'utilisation de propulseurs chimiques, même en

sous-actionnement⁶ (DEV et ZOU, 2013; WANG et al., 2012), ou l'utilisation d'un assemblage de roues d'inertie (*Reaction Wheel*) (GUI et al., 2013). Ces dernières sont généralement très légères en comparaison au satellite et permettent ainsi un contrôle précis de la vitesse angulaire de l'engin. Dans le cas le plus simple, la roue d'inertie est accélérée et conséquemment tout le satellite tourne dans la direction opposée, avec une vitesse proportionnelle au rapport de l'inertie de la roue d'inertie sur celle de l'ensemble du système. Une autre utilisation du même mécanisme est de conserver une vitesse de rotation non nulle, de sorte qu'une perturbation externe causant un couple sur le satellite ne fasse que légèrement pivoter son axe de rotation sans accélérer celui-ci, c'est l'utilisation du mouvement de précession (HAMILTON et PECK, 2015). La conservation du moment angulaire, lorsque l'orientation est stabilisée par des roues d'inertie, est donnée par (YE et al., 2012) :

$$\mathbf{h} = \mathbf{J}_b \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{A}_w \mathbf{J}_w \boldsymbol{\omega}_w \quad (1.2)$$

avec \mathbf{J}_b , le tenseur d'inertie du corps flottant, $\boldsymbol{\omega}_b$ sa vitesse angulaire, \mathbf{A}_w la matrice d'installation des roues, \mathbf{J}_w leur tenseur d'inertie et $\boldsymbol{\omega}_w$ leurs vitesses angulaires. Tandis que pour des propulseurs ce sera plutôt :

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \times \mathbf{J}_b^{-1} \mathbf{h} + \mathbf{u}_e \quad (1.3)$$

avec \mathbf{u}_e le moment produit par la poussée des propulseurs. La comparaison de ces équations met en lumière l'effet des propulseurs sur le taux de variation du moment angulaire alors que les roues d'inerties agissent directement sur la grandeur de celui-ci. Les roues d'inerties, comparées aux propulseurs chimiques, utilisent de l'énergie électrique renouvelable, permettent un contrôle fin de l'orientation, mais agissent lentement et risquent de saturer (GUI et al., 2013). Dans la pratique, plusieurs satellites stabilisent au moins un de leurs angles d'orientation par ce moyen ou, suivant le même principe, en faisant tourner l'ensemble du satellite autour d'un axe, généralement suivant la trajectoire. Le principal désavantage de la stabilisation par roue d'inertie classique est qu'elle demande d'accélérer cette inertie qui peut ainsi voir la vitesse cumulée jusqu'à saturation du moteur. Il en sera de même pour les manœuvres sur de grands angles. Certaines intégrations couplent ce système avec un autre permettant de vider l'énergie cumulée et d'augmenter la réactivité lorsque nécessaire (YE et al., 2012).

Pour de très petits satellites une structure micro-électromécanique (MEM) peut être suffisante. En faisant plier des micro-membrures, celle-ci induit de petits moments au satellite (KUO et WU, 2012). Des générateurs de couple magnétiques (SILANI et LOVERA, 2005) ont aussi été proposés ainsi que des gyrodynes (*Control Moment Gyroscope - CMG*) . Les CMG sont composés d'une roue d'inertie tournant à vitesse constante montée sur une structure dont l'orientation est contrôlable. Le couple résultant, $\boldsymbol{\tau}$ est alors obtenu avec :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad (1.4)$$

6. moins d'actionneurs que de degrés de liberté

où ω est le vecteur de vitesse angulaire des supports et h le vecteur du moment angulaire de la roue d'inertie à vitesse de rotation constante. Contrairement à la roue d'inertie simple, la commande des actionneurs sur le support du CMG est en vitesse et non en accélération. Il est donc possible d'atteindre une plus grande puissance pour un moteur équivalent (HAMILTON et PECK, 2015). La comparaison entre le contrôle de l'orientation d'un satellite par roue d'inertie ou par CMG dont un ou deux axes sont actionnés est présenté à la figure 1.11. Il y est indiqué que les roues d'inertie permettent de couvrir tout le spectre de moment généré et d'agilité, mais qu'en augmentant le moment généré l'agilité de l'actionneur diminue et vice-versa. Un système de CMG à un seul axe est toujours agile, mais ne permet pas de modifier grandement le moment du satellite. Une comparaison plus détaillée de ce type de produits commerciaux est réalisée dans les travaux de VOTEL et SINCLAIR, 2012. Dans tous les cas, il est avantageux de considérer des systèmes n'utilisant que de l'énergie électrique, renouvelable, diminuant les besoins en combustible précieux et coûteux à transporter en orbite. Plutôt

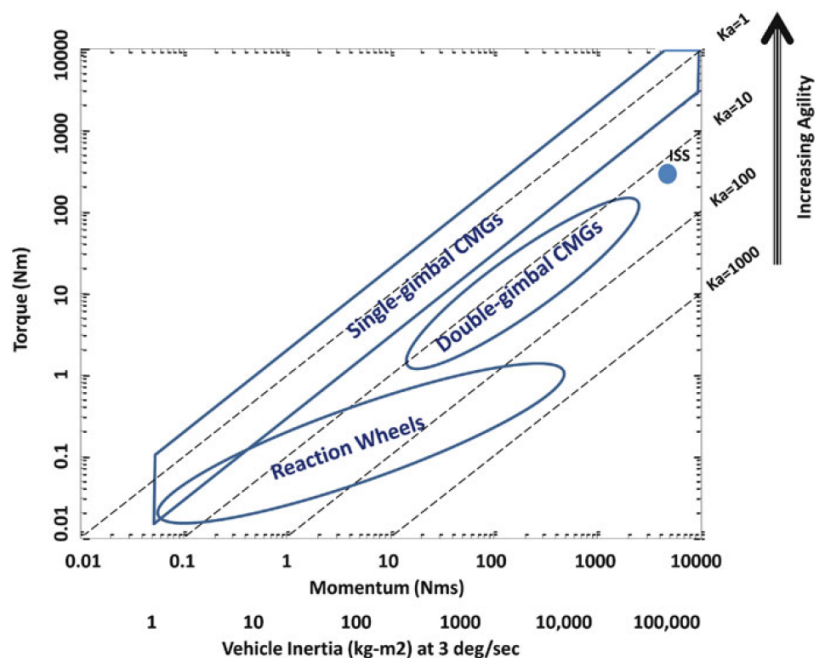


FIGURE 1.11 – Couple, moment et agilité de système de contrôle de couple, tiré de HAMILTON et PECK, 2015. Le point *ISS* est la position du système de contrôle de l'orientation de la station spatiale internationale selon ces axes.

que de réfléchir à un moyen de contrer les effets indésirables d'un mécanisme déployable, une avenue serait de rendre son usage sans effets sur le satellite. De plus en plus populaires pour l'entretien d'équipement en orbite, les manipulateurs spatiaux voient leur dynamique analysée par plusieurs groupes de recherche pour permettre leur actionnement sans que des manœuvres d'ajustement de l'orientation du satellite ne soient requises (SHIBLI, 2011). C'est en fait un domaine d'étude intitulé "systèmes robotiques flottant librement" (*free-floating*

robotics systems). PAPADOPOULOS et DUBOWSKY, 1993 donnent un bon aperçu de l'état des connaissances sur ce sujet ainsi que sur les systèmes robotiques "volant" librement. L'idée centrale de ces principes d'actionnement est de dériver les équations dynamiques du système en prenant une attention particulière à la conservation du moment angulaire puisque les forces non conservatrices peuvent généralement être négligées (friction faible). La commande de l'assiette d'un satellite est donc contrainte par des relations non-holonomes (FERNANDES et al., 1994). Des relations non-holonomes sont des contraintes sur un système dynamique exprimées en fonction de ses vitesses et qui ne sont pas intégrables. Ce type de dérivation dynamique a entre autres servi à l'étude du mécanisme de retournement lors de la chute d'un chat (KANE et SCHER, 1969 ; GE et GUO, 2012) et de systèmes multi-corps en série à articulations passives (SHIROMA et al., 2002). L'élimination des impacts du mouvement d'un manipulateur standard redondant est possible avec des trajectoires spécifiques basées sur le noyau de la matrice des équations dynamiques, produisant ainsi des trajectoires sans réaction. Cet espace, analogue au noyau de la matrice jacobienne cinématique des manipulateurs redondants, regroupe les mouvements instantanés qui n'auront pas d'effet sur l'orientation de la base. Par exemple, en utilisant une carte des perturbations que le manipulateur peut engendrer, un contrôleur peut déterminer la trajectoire minimisant les coûts de carburant nécessaires pour la contre-réaction (LINDBERG et al., 1993). Une solution décrivant le manipulateur au moyen des paramètres de Cayley-Klein pour déterminer un contrôle presque optimal par un algorithme Basis (utilisant une base orthonormée) est présentée à cette fin dans les travaux de FERNANDES et al., 1994. Une solution innovatrice a été proposée dans les travaux de CARPENTER, 2009 basée sur l'utilisation de deux CMG sur chaque membrure d'un manipulateur dont les articulations sont passives afin d'en contrôler la configuration en minimisant son impact sur l'orientation de la base. La conservation du moment angulaire signifie qu'un corps rigide sur lequel n'agit aucune force externe ni aucun couple externe aura un moment angulaire constant, mais celui-ci n'est pas nécessairement nul. Sa valeur aura une influence sur l'amplitude des vitesses requises pour contrôler le système flottant.

Inspiré des recherches faites dans le domaine de la planification de trajectoires pour une dynamique non-holonyme, de l'étude du retournement en chute libre du chat, tel que montré à la figure 1.12 et de la conception de systèmes de contrôle d'attitude des satellites, un intérêt particulier a émergé pour la modélisation dynamique non-holonyme de mécanismes plans à plusieurs corps (SHIROMA et al., 2002 ; SREENATH, 1992 ; REYHANOGLU et McCLAMROCH, 1992 ; REYHANOGLU et McCLAMROCH, 1991 ; SHEN, 2002). Les mécanismes plans sous-actionnés, puisqu'ils possèdent généralement des articulations non-actionnées, c'est-à-dire passives, dont les contraintes sur la dynamique seront non-holonomes, font partie de cette catégorie. Ces mécanismes sont aussi populaires pour certaines applications parce qu'ils réduisent le poids et l'énergie consommée (moins d'actionneurs) et peuvent même simplifier leur fabrication. Il faut néanmoins mentionner qu'il est généralement souhaitable, afin d'améliorer le facteur de sécurité, d'avoir de la redondance dans l'actionnement. De plus, la dynamique et le contrôle

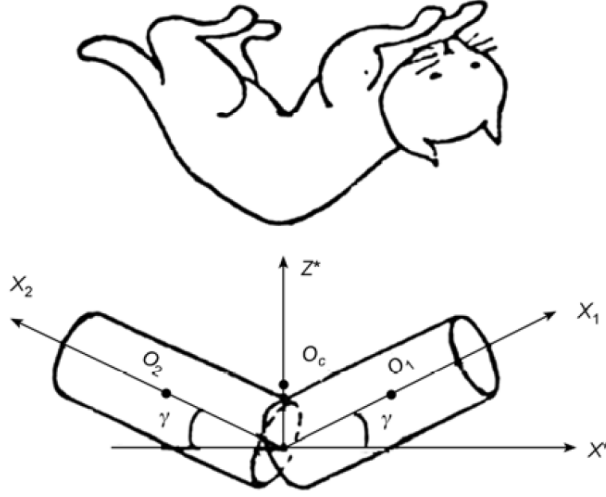


FIGURE 1.12 – Modèle du chat simplifié (GE et GUO, 2012).

de ce type de mécanismes sous-actionnés sont généralement plus complexes. Il est démontré que pour un mécanisme plan ayant une liaison passive et une liaison actionnée (trois corps), il est possible de produire une trajectoire d'un état de repos à un autre avec n'importe quel point d'arrivée (SHIROMA et al., 2002). La manière la plus courante de contrôler ces mécanismes à plusieurs corps est de les actionner par leur articulations, comme des bras robotisés sériels standard. PAPADOPOULOS et DUBOWSKY, 1993 proposent une approche générique à ces problèmes plans en autant qu'ils respectent une architecture sérielle. Il est alors possible d'utiliser leur définition du barycentre et des corps augmentés pour simplifier la dérivation.

REYHANOGLU et MCCLAMROCH, 1991 ont démontré qu'un système à trois corps ou plus est toujours contrôlable localement pour de petits intervalles de temps et ils présentent un contrôle idéal sur l'orientation et la configuration du mécanisme indépendant du temps. KOLMANOVSKY et al., 1995 ont démontré qu'avec au moins quatre membrures, un mécanisme multi-corps plan peut être réorienté suivant n'importe quelle trajectoire dont la dérivée sera périodique. La conservation du moment angulaire (scalaire puisque dans le plan) pour ce système à N corps (donc $N - 1$ articulations) est exprimée comme suit :

$$\dot{\theta} = \frac{h}{m_{\theta\theta}(\phi)} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m_{\theta i}(\phi)}{m_{\theta\theta}(\phi)} \dot{\phi}_i \quad (1.5)$$

où h est le moment angulaire, θ est l'orientation de la membrure de base, ϕ_i sont les angles des articulations et m_{xy} sont des fonctions réelles périodiques sur 2π . Le triplet $(\theta, \phi, \dot{\phi})$ est nommé l'état de la configuration du système. La relation dynamique inverse permettant d'obtenir la vitesse des articulations de ce système pour une trajectoire désirée $\dot{\theta}_d$ est, pour la première articulation :

$$\dot{\phi}_1 = \frac{H}{m_{\theta 1}(\phi)} - \frac{m_{\theta\theta}(\phi)}{m_{\theta 1}(\phi)} \dot{\theta}_d - \sum_{i=2}^{N-1} \frac{m_{\theta i}(\phi)}{m_{\theta\theta}(\phi)} \dot{\phi}_i \quad (1.6)$$

Cette étude est déterminante pour le contrôle de mécanisme sur un satellite, car elle signifie que, dans le plan, tant l'orientation de la base que la configuration du mécanisme sont contrôlables. Toutefois en plus d'être limitée au plan, cette étude ne s'applique qu'à un mécanisme sériel ouvert. Tel que mentionné plus haut, le mécanisme rigide déployable, pour limiter les actionneurs requis, a avantage à posséder des boucles cinématiques fermées.

Il est ainsi possible de concevoir un mécanisme de telle sorte que ces effets dynamiques sur l'orientation de la base soient connus et compensés par un des systèmes décrits précédemment ou encore de concevoir ce système avec redondance de sorte qu'une trajectoire de déploiement sans effet sur le satellite soit possible.

Mécanismes externes permettant la réorientation

Partant du postulat qu'un système déployable existe sur le satellite, celui-ci peut donc être conçu pour ne pas influencer l'orientation de l'ensemble en orbite, voir même justement pour en contrôler l'orientation. Le mécanisme déployable servira alors deux objectifs avec les mêmes actionneurs : le déploiement d'une voile, coupole de communication ou panneau solaire et le contrôle de l'orientation du satellite. Plusieurs travaux spécifiques aux manipulateurs ont été réalisés, dont FERNANDES et al., 1994 qui utilisent un manipulateur à trois degrés de liberté de type PUMA pour réorienter la base en plus de servir de manipulateur redondant. JIN et al., 2015 ont développé et simulé un contrôleur basé sur le noyau de la matrice des équations dynamiques, sans réaction afin d'optimiser les trajectoires d'un manipulateur à sept degrés de liberté pour contrôler en même temps l'orientation du satellite et la configuration du bras robotisé.

Dans le domaine des mécanismes déployables contrairement à celui des bras robotisés, peu d'exemples contrôlant l'orientation par les actionneurs internes existent. Pour le déploiement d'une voile de propulsion par vent solaire, le contrôle de la position du centre de masse relatif au centre de propulsion permet d'influencer l'orientation du satellite. En pratique, pour les engins à propulsion éolienne solaire, des prototypes bougeant des masses internes pour changer la position du centre de masse ainsi que d'autres utilisant des propulseurs pour réorienter la voile et changer son centre de propulsion, ou encore des hybrides impliquant les deux simultanément, ont été testés avec succès (ADELI et al., 2011).

Les travaux susmentionnés sur un manipulateur actionné par CMG (CARPENTER, 2009) auraient probablement le potentiel d'être étendus au contrôle de l'orientation de la base, mais aucune piste en ce sens n'a encore été proposée par le groupe de recherche.

Les principes d'actionnement pour l'orientation d'un satellite et la théorie de contrôle leur étant rattachée ont été survolés dans cette section. Le concept sous-jacent à ces différentes approches est la conservation du moment angulaire et de la quantité de mouvement et la manipulation de sa distribution par des actionneurs le moins énergivores possible. Plusieurs

études se sont attardées au contrôle de manipulateur sans réaction sur sa base flottante, mais à notre connaissance aucune n'a approché le principe de contrôle de l'orientation par des actionneurs sur un mécanisme déployable en boucle fermé.

1.2.3 Plateformes expérimentales

Afin de valider les concepts de déploiement et d'actionnement, les mécanismes sont simulés mathématiquement ainsi que par des logiciels de modélisation (*Solidworks*, *SimMechanics*, *Adams*). Cependant, la meilleure validation reste celle du prototype réel. Pour un mécanisme destiné à des applications spatiales cela représente un défi de taille. La plateforme de test doit permettre des mouvements libres des effets (ou presque) de la gravité terrestre, sans effets de friction (ou presque) de l'air et permettre des vitesses de plusieurs kilomètres par seconde. Cette dernière condition est rarement réalisable expérimentalement sur Terre, mais les deux autres peuvent être compensées avec l'un de ces trois types de dispositifs : les plateformes utilisant la poussée d'Archimède, celles faisant appel à un contrôle actif externe de libération des charges et les tables sans friction. La poussée d'Archimède permet de compenser la gravité, mais non la friction. La forme doit donc être aérodynamique et symétrique et les vitesses de test très basses pour limiter les effets de traînée. Une sphère gonflée d'hélium, munie de turbines pour se déplacer dans l'air et parfaitement équilibrée, c'est-à-dire son centre de masse coïncidant avec son centroïde (centre de volume), permet de simuler un satellite flottant (SHARF et al., 2011). Des plateformes similaires ont été proposées pour être utilisées sous l'eau, par exemple pour tester le déploiement de la coupole du télescope *Hubble* (SHAYLER et HARLAND, 2016). Le déploiement d'un mécanisme risque de rendre l'inertie du système non parfaitement symétrique et cette technique devient alors difficile à réaliser. Pour des systèmes non symétriques, l'équilibrage par un mécanisme actif externe à câbles est très souvent utilisé par les manufacturiers de satellites, comme c'est le cas de la plateforme de test ARGOS présentée à la figure 1.13. Il s'agit de suspendre le satellite de sorte que les effets de la gravité soient annulés. Les infrastructures utilisant ces systèmes ont à l'occasion des chambres sous vide pour éliminer les effets de friction. Toutefois, leur architecture et leur contrôle doivent être développés spécifiquement pour chaque engin à tester et demandent beaucoup de ressources. Une approche cherchant aussi à libérer le mécanisme à tester de ces contraintes, mais en le supportant par des socles robots parallèles HEXA mobiles, permet des mouvements amples dans le plan de mobilité des robots et une certaine étendue de mouvement perpendiculairement à ce plan (SHIGEMATSU et al., 2014).

Finalement, le type de dispositif le plus courant est celui des tables sans friction. Elles permettent uniquement des mouvements plans, mais, en éliminant la friction sur la table, la gravité n'a plus d'effet sur la dynamique du système. Les plateformes les plus populaires sont les tables projetant de l'air, comme celles du jeu de hockey sur coussin d'air. Le dimensionnement du mécanisme à tester revient alors à calculer la surface permettant de faire décoller de



FIGURE 1.13 – Plateforme de compensation de la gravité au Centre d’ingénierie spatiale Johnson⁷.

la table le poids du mécanisme à tester selon la pression d’air fournie. Toutefois, les tables de ce type sont onéreuses pour des expérimentations précises et gaspillent un grand volume d’air comprimé. À l’opposé, si l’air est propulsé à partir du mécanisme, une surface minimale suffit pour stabiliser le coussin d’air et beaucoup moins d’air est nécessaire. Il faut cependant alors ajouter les tubes d’air aux éléments, pouvant ainsi perturber le mouvement du mécanisme. Pour éliminer les besoins en air comprimé et en tubes, la table peut être recouverte de glace, permettant au mécanisme de développer une mince couche d’eau pour glisser. La friction est cependant légèrement plus grande pour ce type de table. HAMILTON et PECK, 2015 énumèrent les perturbations potentielles de ce type de plateforme telles que : les couples dûs au mécanisme (déséquilibre), les couples dûs au support aérien, les couples dûs à l’environnement (courants d’air, etc.) et ceux dûs au système instrumenté.

1.3 Méthodologie

Tel que mentionné précédemment, ce projet de recherche a été divisé en deux domaines distincts. En plus de permettre à chaque nouveau concept développé indépendamment d’être libéré de contraintes pouvant limiter la réflexion, cette vision permet de concevoir des solutions au potentiel d’application plus large qu’uniquement les structures déployables en orbite.

Le chapitre 2 aborde l’optimisation géométrique d’un mécanisme plan dont le choix de la géométrie est justifié par la diversité des surfaces pouvant être créées avec celle-ci, le minimum

7. http://www.nasa.gov/centers/johnson/engineering/integrated_environments/active_response_gravity/, visité le 17/05/2016

d'actionneur requis et la robustesse du design. Les performances du mécanisme sont étudiées et optimisées, tel que son ratio d'expansion et son ratio de transmission de puissance, ainsi que l'influence de certains paramètres géométriques sur ces performances. Les observations en découlant dirigent l'évolution du mécanisme vers un changement de paradigme sur sa transmission de puissance. Le nouveau modèle proposé, basé sur un entraînement par courroies crantées, est analysé et un prototype permet d'en corroborer les avantages et de prévoir les possibles désavantages.

Le mécanisme résultant de l'étude du chapitre 2 est conçu pour ne requérir qu'un actionneur, celui-ci pouvant être disposé n'importe où dans la chaîne cinématique fermée. En limitant le nombre d'actionneurs minimum requis, cette solution permet ainsi une flexibilité du choix de l'architecture d'actionneurs qui peut aisément être développée pour être redondante, comme il est généralement souhaitable pour des applications critiques. Le chapitre 3 traite d'abord du potentiel de réorientation d'une unité simple du mécanisme plan triangulaire à courroies crantées. Afin de mieux comprendre la dynamique non-holonome du contrôle d'orientation d'un satellite, un concept théorique basé sur des masses en translation est développé et comparé avec l'efficacité de roues d'inerties. Ces dernières étant plus avantageuses, une nouvelle dérivation dynamique, selon l'approche de Kane, est développée afin de contrôler simultanément l'orientation d'un mécanisme plan et la configuration de ses membrures. Le comportement pour une chaîne fermée est approfondi avec le mécanisme plan à 4 barres et le concept de contrôle est validé expérimentalement avec un prototype à deux corps et une liaison passive. Finalement un aperçu du comportement en trois dimensions pour une coupole est donné par la dérivation du contrôle et la simulation d'un mécanisme sphérique à quatre barres.

Le dernier chapitre permet l'intégration de toutes ces parties dans le cadre d'une étude d'un cas particulier d'application. Les besoins de l'application, la récolte de débris orbitaux de petites et moyennes dimensions, sont obtenus par une revue littéraire du contexte de ce domaine et par simulation dans des logiciels spécialisés en environnement spatial. À partir des résultats des deux chapitres précédents, les concepts de déploiement et d'actionnement pour la réorientation sont optimisés et leur performance discutée pour cette application spécifique.

1.4 Contributions

Les contributions de cette recherche doctorale sont présentées en détails dans les chapitres suivants et résumées dans la conclusion. Toutefois, la pertinence des contributions a aussi déjà été validée par l'acceptation de sections du travail dans des journaux et conférences spécialisés du domaine de l'aérospatiale, de la synthèse de mécanismes et de la modélisation de systèmes multi-corps.

Le concept de mécanisme plan triangulaire dont la transmission de puissance se fait par courroie, présenté au chapitre 2 est le sujet d'un article du journal sur les mécanismes et la robotique

de l'ASME (ST-ONGE et GOSSELIN, 2016a). Le concept de contrôle de l'orientation par roues d'inerties et sans actionneur aux articulations a été présenté avec le mécanisme plan à 4 barres au Symposium International sur la Dynamique de mécanismes Multi-corps, *ISMD* (ST-ONGE et GOSSELIN, 2016b). Les résultats plus approfondis de ce chapitre, développés pour un mécanisme sphérique à quatre barres et corroborés par des expériences sur un prototype à deux corps sur coussins d'air sont le sujet d'un article à soumettre à un journal en 2016. Finalement, l'étude de cas du dernier chapitre a été développée dans le cadre d'une collaboration sous forme d'ateliers semestriels avec l'entreprise Airbus Defense (anciennement Astrium) et présentée au Congrès International d'Astronautique (ST-ONGE et GOSSELIN, 2014) avec le support de l'Agence Spatiale Canadienne.

En plus de ces publications, les outils algébriques, algorithmiques et matériels développés pour le projet ont permis des publications d'autres étudiants du laboratoire. Ainsi l'intégration du système de vision pour suivre le mouvement en six degrés de liberté d'un marqueur fiduciaire jumelé à la librairie d'asservissement par USB de moteurs DC a été utilisée par Vincent Babin dans le développement d'un nouveau modèle de main robotique faisant l'objet d'un article qui sera soumis à un journal en 2016. Les mêmes outils, ainsi que l'expertise sur le banc de test pour prototype flottant, ont servi aux travaux de maîtrise de Jean-Alexandre Bettez-Bouchard ainsi qu'à la publication d'un article pour la conférence ICRA 2016 (BETTEZ-BOUCHARD et GOSSELIN, 2016).

1.5 Problématique

Cette thèse vise à produire une solution de mécanisme déployable dépassant les performances des mécanismes existants permettant le déploiement de surfaces à partir de membrures rigides. Comme il en est discuté au chapitre 2, un ratio d'expansion minimal de 5 doit être dépassé pour réaliser cet objectif. Par la suite, une stratégie de déploiement doit être suggérée de sorte qu'elle permette, par l'utilisation de ces mêmes actionneurs, le contrôle de l'orientation du satellite. Finalement, ces deux systèmes doivent être optimisés et adaptés dans le cadre d'une mission de retrait de débris, de manière à rendre cette mission viable économiquement et réalisable physiquement.

Chapitre 2

Mécanismes plans pour le déploiement de surfaces tessellées

Ce chapitre couvre d'abord l'optimisation d'un mécanisme plan triangulaire inspiré des travaux de GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006 jusqu'à ce que l'augmentation de son ratio d'expansion soit limité par des considérations géométriques. Décortiquant son comportement cinématique, les principales faiblesses sont relevées, dont principalement l'évolution de ses angles de transmission au cours du déploiement. Une nouvelle proposition devant augmenter les capacités du mécanisme en éliminant cette faiblesse de transmission du mouvement est introduite. Dans ce mécanisme, la transmission du mouvement entre les étages du mécanisme est assurée par des courroies crantées. Le comportement du nouveau mécanisme triangulaire plan déployable est étudié et son ratio d'expansion surfacique lorsque assemblé en coupole est dérivé. Afin d'améliorer encore le potentiel de déploiement du système, un nouveau type d'articulation permettant de déplier les unités triangulaires planes préalablement empilées, avant leur déploiement, est développé et présenté.

2.1 Unités élémentaires

Les applications des structures déployables sont diversifiées et chacune requiert des caractéristiques spécifiques, dont la principale est généralement la géométrie la plus appropriée à une application donnée. Par exemple, des bâtiments temporaires auront une forme en demi-cylindre, alors qu'une voile sera plutôt carrée et une antenne de télécommunication, parabolique. Là où plusieurs solutions de mécanismes déployables se concentrent sur une application et sa géométrie spécifique, la présente étude tente de rejoindre le plus grand nombre de contextes d'utilisation. Pour ce faire, il convient d'introduire la notion de décomposition en mosaïque d'une surface, ou tessellation. Ce domaine de la géométrie s'intéresse aux formes de base pouvant être assemblées côte-à-côte pour produire une surface plane ou approximer une surface courbe. Il est possible d'utiliser des éléments de base de plusieurs formes, comme pour la

création d'un dôme géodésique, ou encore un ensemble d'éléments identiques. Cette seconde option est d'autant plus intéressante pour une structure déployable qu'elle suppose un seul mécanisme à répliquer, simplifiant le processus de conception et de fabrication. Par contre, seules trois géométries sont dites pouvoir créer un dallage régulier : le triangle, le carré et l'hexagone (figure 2.1). Leur unicité est démontrable en considérant simplement que le nombre d'arêtes se rejoignant à chaque sommet doit être un facteur de 360° . Six triangles équilatéraux donneront des angles de 60° , quatre carrés des angles de 90° et trois hexagones des angles de 120° , ce qui correspond aux angles internes de ces polygones (BARNES, 2012).

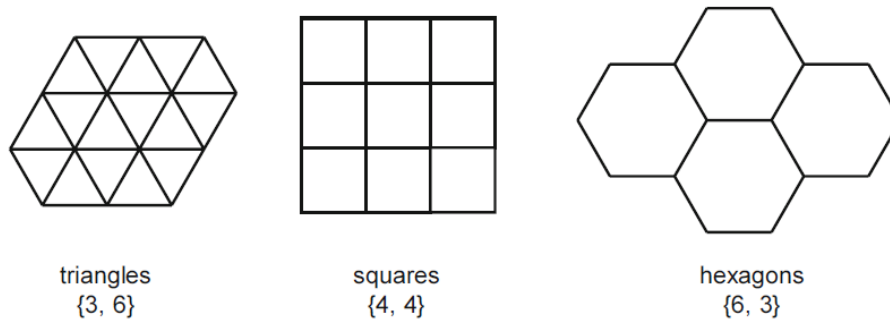


FIGURE 2.1 – Les trois géométries de dallage régulier (BARNES, 2012) : le triangle, 6 faces de 3 arêtes chacune se rejoignant à chaque sommet, le carré, 4 faces par sommet de 4 arêtes et l'hexagone, 3 faces par sommet de 6 arêtes.

La tessellation d'une surface se fait par l'adaptation de la géométrie des unités de base et leur topologie. Cette propriété concerne l'assemblage des faces, c'est-à-dire le nombre de faces jointes à un sommet et l'angle entre leur normale. L'unité la plus courante pour la décomposition de surface est le triangle, régulièrement utilisée pour l'analyse par éléments finis et la simplification de modèles 3D en graphisme. Il est important de noter que les surfaces courbes ne sont qu'approximées par des assemblages de triangles et que plus l'unité de base est petite, plus la courbure de la surface sera précise. Lorsque des variations de la taille des triangles sont possibles, par exemple pour des applications en graphisme, ou le maillage de solides pour des études par éléments finis (LEE, 1999), plusieurs algorithmes, tel que celui de SHEWCHUCK, 2002 inspiré du populaire algorithme de Delaunay, permettent d'optimiser la quantité de triangles en même temps que la précision de la surface. Par contre, lorsque seulement des polyèdres identiques sont utilisés pour former un dallage de surface, trois types de techniques sont possibles (AKKOUCHE et GALIN, 2001) :

- L'échantillonnage de l'espace, généralement avec des cubes ou des tétraèdres dont l'intersection avec la surface est conservée. Les polygones résultants sur la surface sont généralement distordus.
- L'adaptation de surface avec des polygones crée d'abord un dallage approximatif sur la surface implicite puis le raffine. C'est une méthode rapide qui optimise selon plusieurs

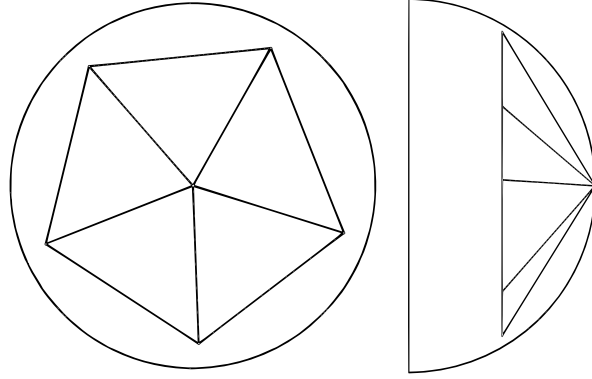


FIGURE 2.2 – Assemblage de faces triangulaires planes en coupole avec une section d’icosaèdre¹.

directions simultanément, mais qui peut causer des fissures aux jonctions des sections ainsi créées.

- Le suivi de surface, ou méthode de continuité, part simplement d’une dalle et complète en ajoutant des dalles sur son périmètre jusqu’à ce que celui-ci n’ai plus de trou ou rejoigne les frontières de la surface. C’est une technique qui peut omettre des détails de la surface.

Ce dernier type de tessellation, aussi appelé l’algorithme de marche peut être appliqué avec des triangles équilatéraux sur une surface en vérifiant à chaque pas que la création d’un nouveau triangle respecte une contrainte similaire à celle développée par Delaunay (AKKOCHE et GALIN, 2001). Une manière simple de créer une coupole par exemple est d’assembler 5 triangles en un sommet (6 donnant une surface plane) pour créer une section d’icosaèdre tel que montrée à la figure 2.2.

2.2 Mobilité d’un mécanisme

Lors de la conception d’un mécanisme, il est important de calculer le nombre de degrés de libertés n_{ddl} que le système devra actionner pour être complètement contrôlable. La méthode la plus répandue est basée sur la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach (PHILLIPS, 2007). Il en existe des variantes dérivées spécifiquement pour les mécanismes plans ou sphériques (MCCARTHY et SOH, 2010), mais la forme générale pour des mécanismes spatiaux est :

$$n_{ddl} = n_g(n_{cr} - n_l - 1) + \sum_{i=1}^{n_l} n_{ddli} \quad (2.1)$$

où n_g est le nombre de degrés de liberté d’un corps rigide non contraint (six pour un mécanisme dans l’espace), n_{cr} est le nombre de corps rigides, n_l le nombre de liaisons et n_{ddli} le nombre de degrés de liberté de la liaison i (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006). Les mécanismes

1. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

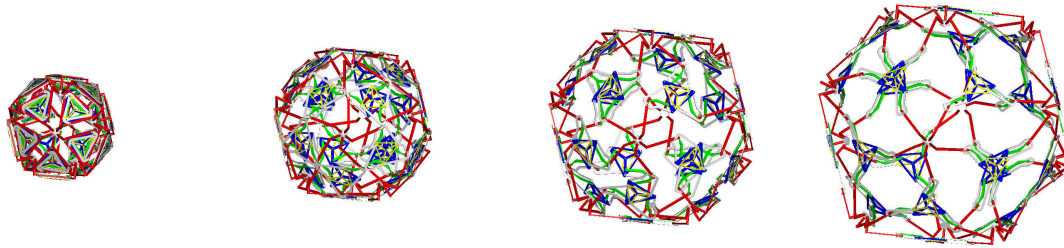


FIGURE 2.3 – Déploiement d’un icososaèdre avec faces articulées triangulaires, dit original (fermé) (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006).

discutés dans les prochaines sections ne possédant que des liaisons rotoïdes ayant un seul degré de liberté et des liaisons sphériques en ayant trois, l’équation 2.2 peut être simplifiée comme suit :

$$n_{ddl} = 6(n_{cr} - 1) - 5n_r - 3n_s \quad (2.2)$$

où n_r est le nombre d’articulations rotoïdes et n_s le nombre d’articulations sphériques. Le niveau de sur-contrainte dans un mécanisme est déterminé en comparant n_{ddl} avec le nombre réel de degrés de liberté d’un mécanisme. Cette différence, donne une idée du degré de sur-contrainte. Puisque les mécanismes étudiés et développés dans ce chapitre ont tous un seul degré de liberté, lorsque l’équation 2.2 est appliquée à ceux-ci, le résultat est toujours négatif : les mécanismes sont donc considérés sur-contraints.

Il est connu que le critère de mobilité de Tchebychev-Grübler-Kutzbach ne peut pas être utilisé pour prédire le degré de mobilité d’un mécanisme sur-contraint (GUEST et FOWLER, 2005 ; LOEB, 1991). En effet, certains auteurs ont même soutenu que ce critère n’est pas acceptable pour des mécanismes à plusieurs boucles cinématiques (GOGU, 2005). Il reste pertinent pour cette étude afin d’estimer le niveau relatif de sur-contraintes en comparant les mécanismes avec une mesure étalon. Les caractéristiques des mécanismes discutés dans ce chapitre ainsi que de certains comparatifs sont présentés au tableau 2.1. La valeur ne sera donc pas utilisée de manière absolue. La première ligne du tableau 2.1 correspond au mécanisme montré à la figure 2.3 alors que la seconde représente un assemblage de cinq de ces mêmes unités triangulaires afin de produire une géométrie ouverte en coupole, schématisée à la figure 2.2. La valeur absolue de n_{ddl} est beaucoup plus faible pour le modèle ouvert, indiquant qu’il est moins sur-contraint que la version fermée. Ceci s’explique par le grand nombre de degrés de liberté des articulations sur la périphérie. Ces mécanismes plans peuvent atteindre en pratique des ratio d’expansion de $R_M = 3.26$ (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006). Les deux dernières lignes du tableau 2.1 correspondent aux mécanismes discutés dans la suite de ce chapitre.

Mécanisme	<i>faces</i>	n_{cr}	n_r	n_s	n_{ddl}	R_M
Original (fermé)	20	292	440	12	-490	3,26
Original (ouvert)	5	76	110	6	-118	3,26
Amélioré (ouvert)	5	136	200	6	-208	5
Avec courroies (ouvert)	5	166	245	6	-253	5,6

TABLEAU 2.1 – Mobilité des mécanismes étudiés selon la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach, équation 2.2 et leur ratio d’expansion maximal, R_M .

2.3 Mécanismes plans à membrures rigides

La figure 2.4 montre les détails d’une face triangulaire du mécanisme décrit par GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006. Le corps fixe central (1) forme un mécanisme à quatre barres avec les membrures (4), (5) et (6). Les longueurs des membrures du quadrilatère sont généralement choisies pour former un parallélogramme, simplifiant ainsi les équations cinématiques et la fabrication. Le triangle central (2) de la figure 2.4 peut tourner autour de l’origine (O) par rapport au triangle fixe (1) et doit être actionné par un moteur ou un ressort en torsion. Le mouvement de (2) pousse ainsi symétriquement les trois pattes du mécanisme. Pour augmenter le ratio d’expansion de ce modèle, les parallélogrammes peuvent être dupliqués et ajoutés au bout des pattes, tel que montré à la figure 2.5.

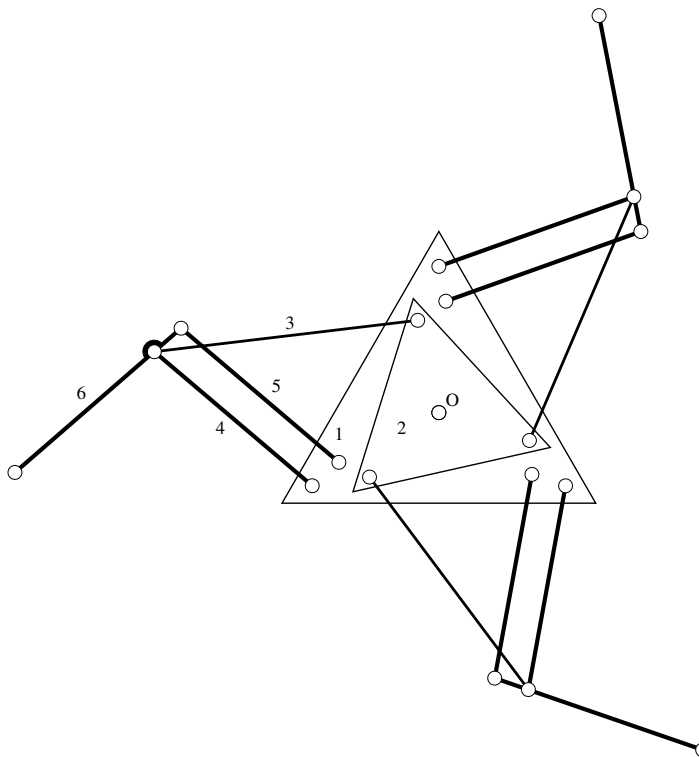


FIGURE 2.4 – Représentation schématique d’un triangle déployable des travaux de GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006.

Des ratios d'expansion supérieurs à 5 peuvent être obtenus théoriquement en ajoutant seulement deux niveaux supplémentaires de parallélogrammes au mécanisme de la figure 2.4. Toutefois l'ajout de niveaux augmente le degré de sur-contrainte, tel que montré au tableau 2.1 (ligne 3) et augmente la friction, mais le mécanisme conserve son actionnement à un seul degré de liberté.

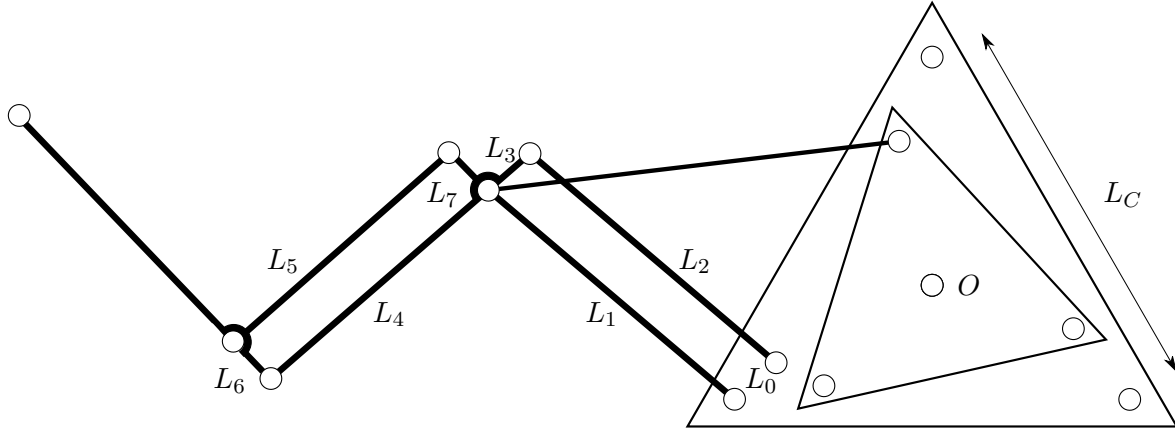


FIGURE 2.5 – Patte du mécanisme inspiré par GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006 avec deux étages.

Afin de permettre son extension, chaque boucle cinématique interne des pattes, tel que $L_0 - L_1 - L_2 - L_3$, doit respecter la contrainte de déploiement suivante :

$$L_2 + L_3 = L_0 + L_1 \quad (2.3)$$

Puis pour permettre la rétraction complète, chaque boucle doit aussi respecter les contraintes suivantes :

$$L_1 + L_3 = L_C \quad (2.4)$$

$$L_2 + L_0 = L_C \quad (2.5)$$

où L_C est la longueur d'un côté du triangle fixe du mécanisme, tel que montré à la figure 2.5. Pour optimiser cette géométrie, d'autres contraintes sont nécessaires car pour un L_C donné, il reste quatre inconnues (L_0 à L_3) dans trois équations. Pour le cas simplifié du parallélogramme, plus que deux inconnues restent car $L_1 = L_2$ et $L_0 = L_3$. Ce qui rend les équations 2.4 et 2.5 redondantes et l'équation 2.3 inutile. C'est donc encore un système sous-déterminé. Ces relations aident à formuler le problème d'optimisation mais restent théoriques, car le mécanisme réel doit tenir compte de l'encombrement de ces membrures et de leurs liaisons, tel qu'illustré sur les deux mises en forme de la figure 2.6. Cette figure montre la différence entre la version originale du mécanisme et celle améliorant l'encombrement des membrures et le ratio d'expansion, $R_M = 5$ du tableau 2.2.

Il est plus significatif de tenter l'optimisation du système complet sur toute sa trajectoire, afin de prendre en compte l'encombrement dans toutes les positions et les possibilités d'approcher

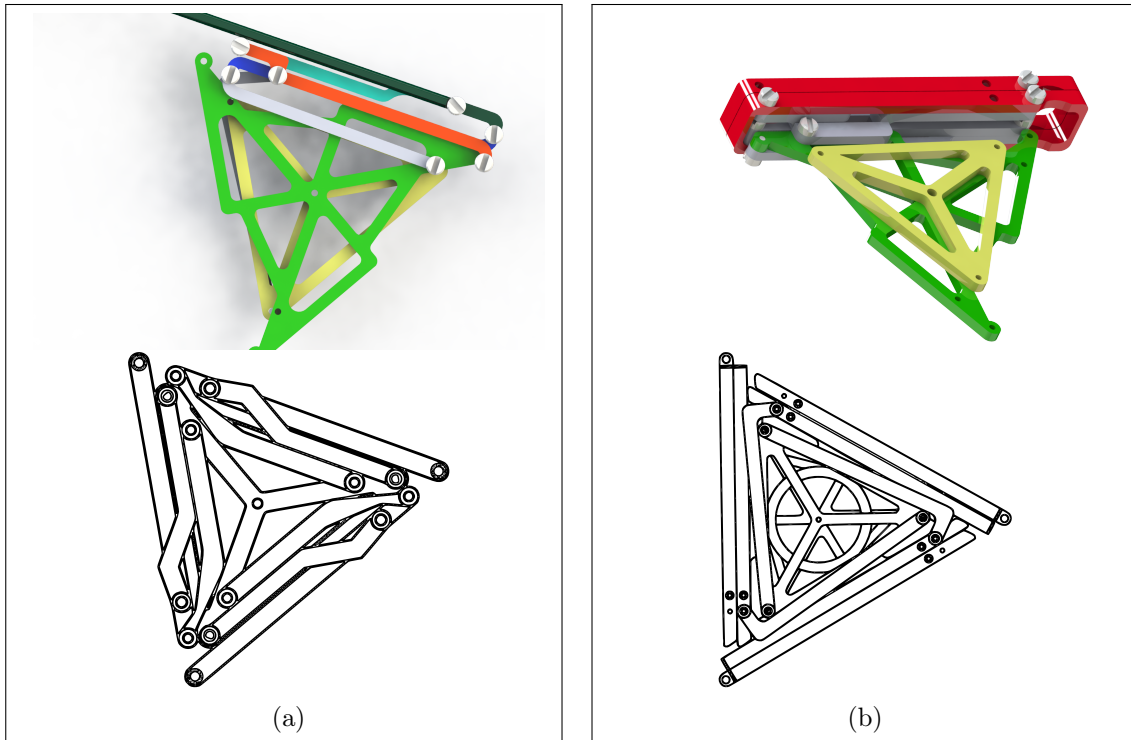


FIGURE 2.6 – Schéma et modélisation des mécanismes triangulaires à 1 DdL rétractés : (a) avec un seul niveau par patte, dit original (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006) et (b) avec trois niveaux par patte avec encombrement optimisé, dit amélioré.

des singularités. L'étude de la relation entre la vitesse d'entrée du mécanisme et celle de sortie, ratio de transmission aussi applicable aux couples, doit autant servir à l'optimisation que le ratio d'expansion. Le jacobien, \mathbf{J} , reliant $\dot{\mathbf{p}}$, la vitesse de l'effecteur, c'est-à-dire de l'extrémité d'une patte déployable, à $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, les vitesses des articulations, tel que $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$, doit être évalué. Une représentation simplifiée du mécanisme permet d'abord obtenir un jacobien approximatif.

Si seulement le mouvement général des parallélogrammes est considéré, ces derniers peuvent être considérés comme des membrures reliées par des liaisons rotoïdes. La figure 2.7 représente un mécanisme composé de trois paires de membrures (ou trois parallélogrammes). Des liaisons prismatiques virtuelles sont ajoutées dans les membrures afin de faire ressortir les forces présentes dans les membrures. C'est dorénavant une chaîne sérielle d'articulations alternant 4 articulations rotoïdes avec 3 articulations prismatiques, semblable à un manipulateur

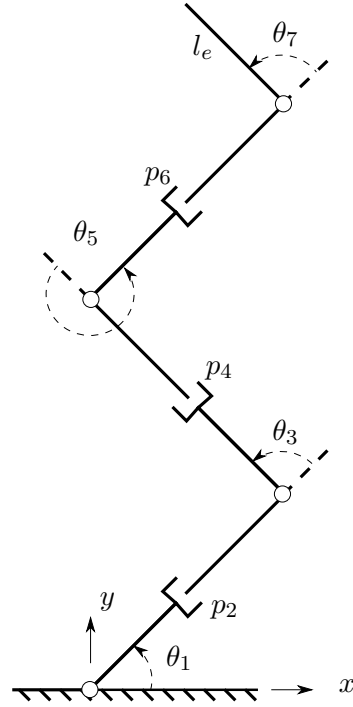


FIGURE 2.7 – Schéma d’une interprétation simplifiée du mécanisme en y ajoutant des liaisons prismatiques virtuelles sur les membrures.

RPRPRPR. Les coordonnées articulaires telles que présentées à la figure 2.7 sont :

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ p_2 \\ \theta_3 \\ p_4 \\ \theta_5 \\ p_6 \\ \theta_7 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

L’orientation du sommet de la patte, c’est-à-dire l’effecteur d’un manipulateur équivalent, est donnée par :

$$\boldsymbol{Q} = \prod_{i=1}^7 \boldsymbol{Q}_i \quad (2.7)$$

avec les matrices de rotation d’une membrure à la suivante :

$$\boldsymbol{Q}_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

où s_x et c_x sont respectivement le sinus et le cosinus de x et sachant que $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_4 = \boldsymbol{Q}_6 = \mathbf{1}$, la matrice identité de dimension 2 par 2.

La position du sommet, $\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} x_e \\ y_e \end{Bmatrix}$, est alors donnée par :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^7 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{a}_i \quad (2.9)$$

avec $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_5 = 0$ et $\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} p_i \\ 0 \end{Bmatrix}$, pour $i = 2, 4, 6$ et $\mathbf{a}_7 = \begin{Bmatrix} l_e c_7 \\ l_e s_7 \end{Bmatrix}$. Pour la chaîne RPRPRPR de la figure 2.7, la vitesse de translation du sommet est :

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_1 + \dot{p}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_3 + \dot{p}_4 \mathbf{e}_4 + \dot{\theta}_5 \mathbf{e}_5 \mathbf{E} \mathbf{r}_5 + \dot{p}_6 \mathbf{e}_6 + \dot{\theta}_7 \mathbf{e}_7 \mathbf{E} \mathbf{r}_7, \quad (2.10)$$

où $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et avec \mathbf{e}_i , les axes des liaisons prismatiques exprimés dans le référentiel global et $\mathbf{r}_i = \sum_{j=i}^7 \mathbf{a}_j$. La vitesse angulaire de la membrure terminale est quant à elle simplifiée puisque le mouvement est restreint au plan :

$$\omega = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_7. \quad (2.11)$$

Ce qui permet d'exprimer la relation entre les vitesses articulaires et les vitesses du sommet par un jacobien :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \omega \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.12)$$

avec

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_z \mathbf{E} \mathbf{r}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_z \mathbf{E} \mathbf{r}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_z \mathbf{E} \mathbf{r}_5 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_z \mathbf{E} \mathbf{r}_7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{p}_6 \\ \dot{\theta}_7 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Ce jacobien simplifié devient :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1 p_2 - s_{1+3} p_4 - s_{1+3+5} p_6 - s_{1+3+5+7} l_e & c_1 p_2 + c_{1+3} p_4 + c_{1+3+5} p_6 + c_{1+3+5+7} l_e & 1 \\ c_1 & s_1 & 0 \\ -s_{1+3} p_4 - s_{1+3+5} p_6 - s_{1+3+5+7} l_e & c_{1+3} p_4 + c_{1+3+5} p_6 + c_{1+3+5+7} l_e & 1 \\ c_{1+3} & s_{1+3} & 0 \\ -s_{1+3+5} p_6 - s_{1+3+5+7} l_e & c_{1+3+5} p_6 + c_{1+3+5+7} l_e & 1 \\ c_{1+3+5} & s_{1+3+5} & 0 \\ -s_{1+3+5+7} l_e & c_{1+3+5+7} l_e & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.15)$$

où s_{i+j} est le sinus de la somme des angles i et j , c_{i+j} , leur cosinus et p_2, p_4, p_6 les longueurs des liaisons prismatiques virtuelles tel qu'illustré à la figure 2.7.

Toutefois, l'effet des parallélogrammes est de lier le mouvement de chacun des angles de sorte qu'un seul degré de liberté existe dans le mécanisme. Il est donc possible de définir une matrice \mathbf{J}_R qui exprime les angles θ_3, θ_5 , et θ_7 en fonction de θ_1 . En pratique les designs proposés contraignent tous les angles internes d'une patte à suivre la même vitesse, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_5 = \dot{\theta}_7$. Ainsi le jacobien devient :

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_R & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

où \mathbf{J}_i est la colonne i de l'équation 2.13, $\mathbf{J}_R = \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_5 + \mathbf{J}_7$ et avec

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}' = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{p}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

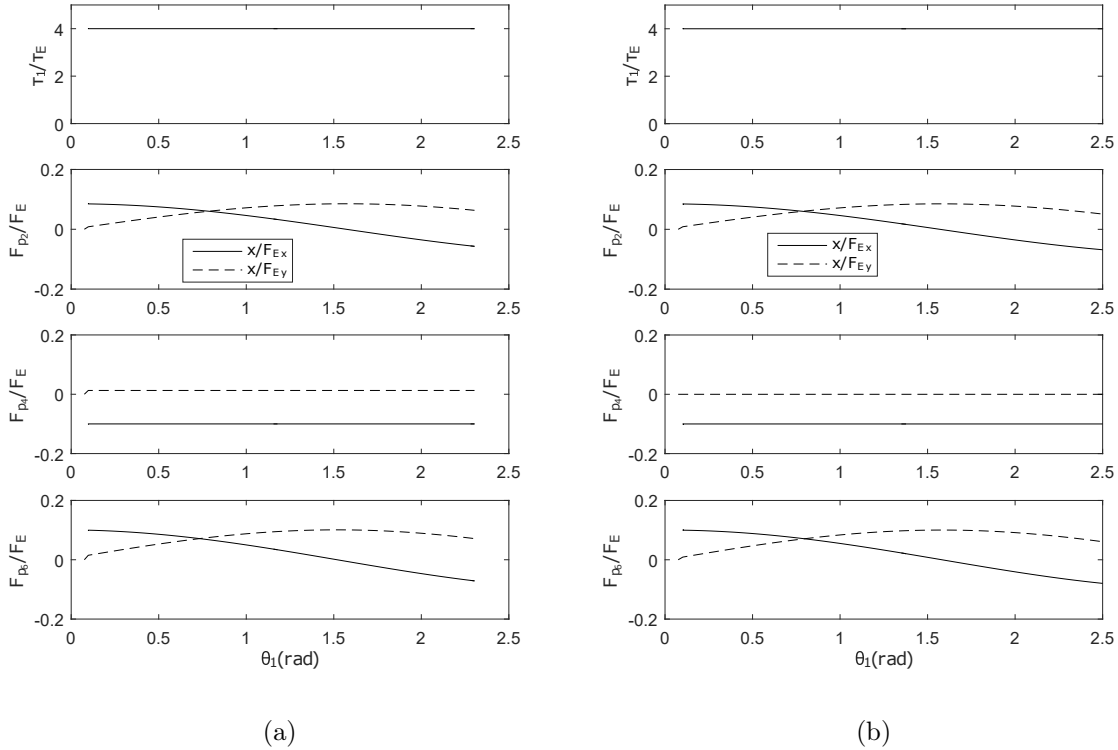


FIGURE 2.8 – Ratio de transmission des forces dans les membrures : (a) pour le mécanisme original (figure 2.6-a) et (b) pour le mécanisme optimisé (figure 2.6-b).

En utilisant cette relation et celle du travail virtuel,

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}' = \mathbf{F}_E^T \dot{\mathbf{p}}, \quad (2.18)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur des couples aux articulations, et \boldsymbol{F}_E celui des forces à l'extrémité de la patte, il est possible de connaître la relation entre les forces à l'effecteur et celles dans les membrures en y substituant l'équation 2.12 :

$$\boldsymbol{J}^T \boldsymbol{F}_E = \boldsymbol{\tau} . \quad (2.19)$$

Les ratios de transmission de force entre l'effecteur et les forces dans chacune des "membrures", représentées par les liaisons prismatiques virtuelles p_i sont tracées à la figure 2.8. Ainsi les forces transmises aux membrures seront toujours inférieure à 10% de celles transmises à l'effecteur. La figure 2.8 montre aussi le ratio du couple à l'effecteur par rapport à celui en entrée du mécanisme (articulation de θ_1) : le moment à l'entrée sera jusqu'à quatre fois celui de l'effecteur. En ajoutant la friction dans toutes ces liaisons, l'actionnement central peut être difficile. L'actionneur doit être sélectionné en conséquence.

Si le comportement général du mécanisme original et celui du mécanisme optimisé semblent similaires sur toute l'étendue de leur trajectoire, le modèle de la figure 2.6-b apparaît légèrement plus sollicité que celui de la figure 2.6-a. Par exemple, la membrure associée à la liaison prismatique p_2 , lorsque celle-ci est complètement déployée, sera 35% plus sensible à une force appliquée à l'effecteur selon l'axe des x . Un constat similaire s'applique à la membrure associée à la liaison prismatique p_6 qui sera 30% plus sensible. Par contre, la membrure associée à la liaison prismatique virtuelle p_4 du modèle de la figure 2.6-b est parallèle à celle de l'effecteur (ou dernière membrure de la patte l_e), aussi elle n'est pas sujette aux forces appliquées perpendiculairement, contrairement au modèle de la figure 2.6-a.

Le niveau de compacité du mécanisme en position rétractée a une grande influence sur son ratio d'expansion, $R = H_D/H_R$. Le calcul de ce ratio est détaillé plus loin avec l'influence des paramètres géométriques, mais les dimensions caractéristiques qu'il utilise sont les longueurs radiale du triangle déployé (H_D) et rétracté (H_R). Tel que montré à la figure 2.9, augmenter le nombre d'étages de mécanisme améliore le ratio jusqu'à une valeur limite, au-delà de laquelle le ratio arrête presque d'augmenter à cause de la trop grande dimension du système rétracté. Suite à quelques itérations de design sur le modèle original (voir la figure 2.6-a) répliquant les mêmes paires de membrures pour augmenter le taux d'expansion, l'évolution empirique montre un maximum à 5 paires. Toutefois, même ce maximum (3.8) reste en-deça du maximum théorique de 4.16 et bien inférieur aux objectifs de cette recherche. Un second design a été produit, tel que montré à la figure 2.10, pour lequel les parallélogrammes ne sont plus identiques d'un étage à l'autre, mais sont revus de manière à maximiser leur densité lorsque rétractés. Le taux d'expansion pour trois étages est de 5.14 en simulation, ce qui est déjà supérieur au modèle précédent avec cinq étages.

Tel que mentionné précédemment, le ratio est grandement influencé par la compacité des membrures, intimement lié à la fabrication du mécanisme. Par exemple, ajouter deux étages de parallélogrammes au mécanisme initial permet théoriquement au mécanisme d'atteindre un

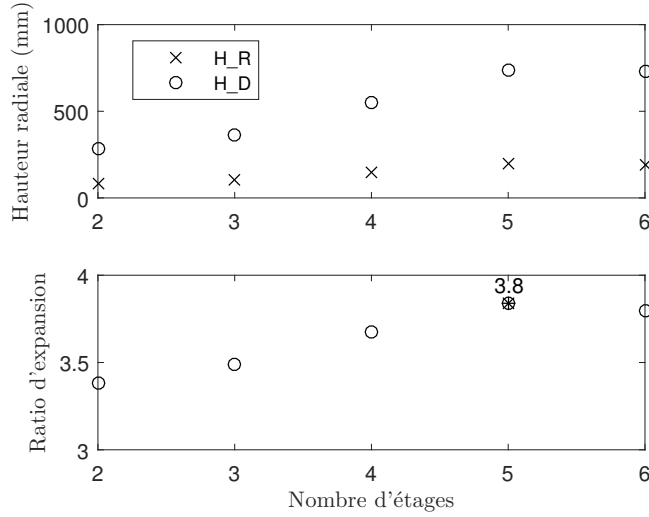


FIGURE 2.9 – Évolution du ratio d'expansion et des longueurs radiale de la face déployée et rétractée en fonction du nombre d'étage des pattes par des simulations *Solidworks*.

ratio d'expansion de 7.92 (GOSSELIN et GAGNON-LACHANCE, 2006) en supposant que toutes les membrures soient superposées lorsqu'en position rétractée. Cependant, des contraintes de fabrication et d'interférences mécaniques limitent ce ratio en pratique à environ 5 (voir R_M au tableau 2.1). Le design du prototype montré à la figure 2.6-b a été contraint par sa fabrication à l'imprimante 3D (précision limitée pour de petits objets) et par l'utilisation, pour les liaisons lisses, de boulons d'acier à épaulement commerciaux (#4-40, 1/4" de long) faciles à trouver, c'est-à-dire interface acier-ABS plutôt que ABS-ABS. Le résultat est montré en photo à la figure 2.11.

Jusqu'à maintenant l'étude de la géométrie s'est limitée aux étages de parallélogrammes, cependant l'étage d'actionnement est en fait un mécanisme à cinq barres superposé à un mécanisme à quatre barres, tel que montré à la figure 2.10. Afin de mieux en comprendre le comportement général, les équations sont développées en éliminant l'hypothèse du parallélogramme reliant l'angle θ_6 à l'angle de sortie θ_7 . Les équations cinématiques sont obtenues de sorte que la relation entre l'angle de sortie θ_7 et celui d'actionnement θ_1 soit connue considérant la contrainte interne sur le mouvement de la membrure terminale. Prenant la membrure 2 (de longueur l_2) de la figure 2.10, le mécanisme à 5 barres permet la relation :

$$l_2 \mathbf{e}_2 = l_5 \mathbf{e}_5 + l_4 \mathbf{e}_4 - l_3 \mathbf{e}_7 - l_1 \mathbf{e}_1 \quad (2.20)$$

avec \mathbf{e}_i le vecteur direction unitaire de la membrure i :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} c_{1+2} \\ s_{1+2} \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{Bmatrix} c_6 \\ s_6 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_5 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_7 = \begin{Bmatrix} c_{6+7} \\ s_{6+7} \end{Bmatrix}, \mathbf{e}_8 = \begin{Bmatrix} c_b \\ s_b \end{Bmatrix}$$

où les indices des sinus et cosinus représentent les angles variables $\theta_1 \dots \theta_{11}$ et l'angle constant θ_b dépendant de la géométrie du mécanisme. De cette équation, la norme de la membrure

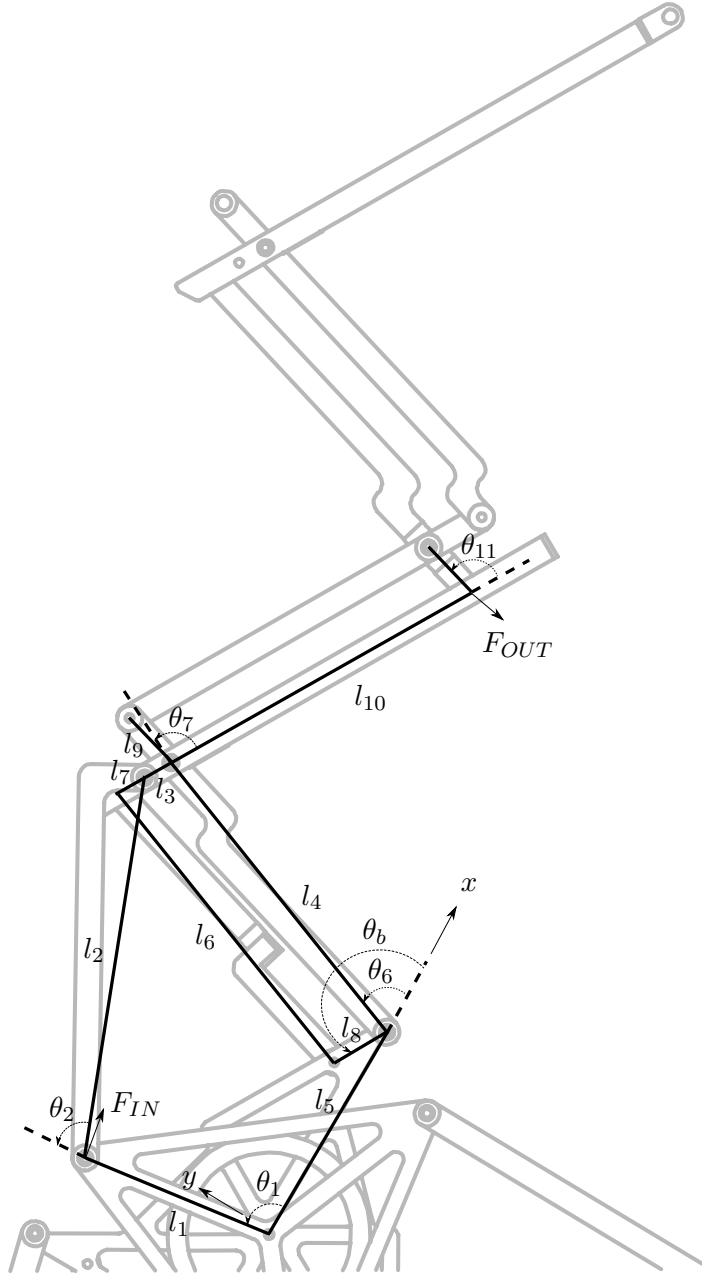


FIGURE 2.10 – Détail des membrures pour le design présenté à la figure 2.6-b.

2 est obtenue en prenant le produit scalaire de chaque côté de l'équation 2.20, de sorte que l'expression scalaire soit :

$$l_2^2 = (l_5 \mathbf{e}_5 + l_4 \mathbf{e}_4 - l_3 \mathbf{e}_7 - l_1 \mathbf{e}_1)^T (l_5 \mathbf{e}_5 + l_4 \mathbf{e}_4 - l_3 \mathbf{e}_7 - l_1 \mathbf{e}_1) \quad (2.21)$$

La dérivée par rapport au temps de cette équation permet ensuite de produire une matrice jacobienne reliant les vitesses du mécanisme \$\dot{\theta}_1\$ et \$\dot{\theta}_6\$ à la sortie \$\dot{\theta}_7\$:

$$0 = l_5 l_4 \mathbf{e}_5^T \mathbf{E} \mathbf{e}_4 \dot{\theta}_6 - l_5 l_3 \mathbf{e}_5^T \mathbf{E} \mathbf{e}_7 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_7) - l_5 l_1 \mathbf{e}_5^T \mathbf{E} \mathbf{e}_1 \dot{\theta}_1 - l_3 l_4 \mathbf{e}_7^T \mathbf{E} \mathbf{e}_4 \dot{\theta}_6 - l_4 l_3 \mathbf{e}_4^T \mathbf{E} \mathbf{e}_7 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_7)$$

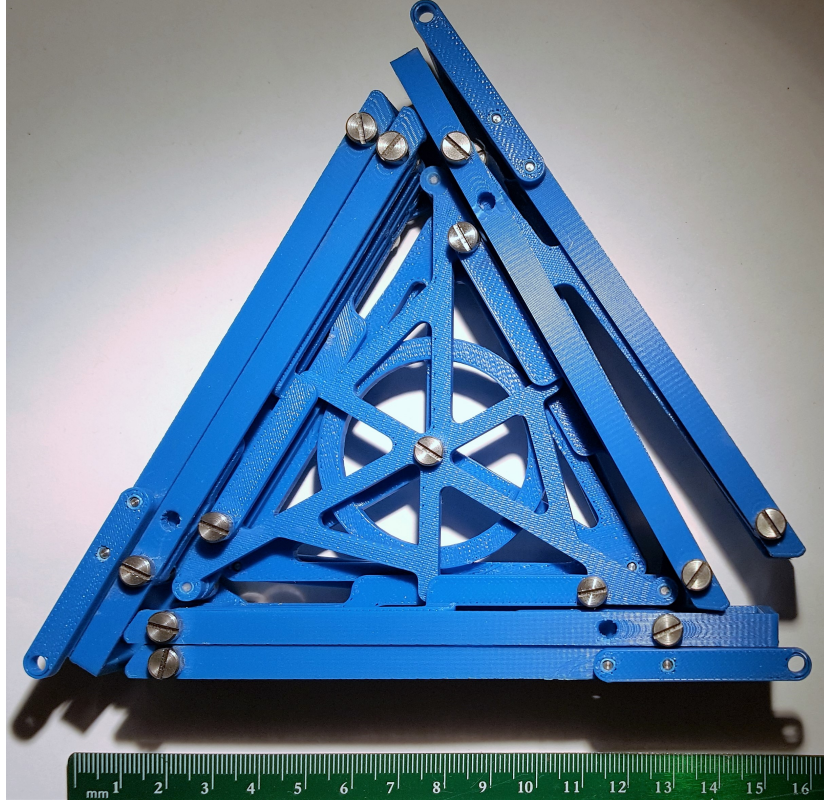


FIGURE 2.11 – Photographie du prototype en position fermée suivant le design présenté à la figure 2.6-b.

$$-l_1 l_4 e_1^T \mathbf{E} e_4 \dot{\theta}_6 - l_4 l_1 e_4^T \mathbf{E} e_1 \dot{\theta}_1 + l_1 l_3 e_1^T \mathbf{E} e_7 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_7) + l_3 l_1 e_7^T \mathbf{E} e_1 \dot{\theta}_1, \quad (2.22)$$

avec \mathbf{E} défini à l'équation 2.10, ce qui permet, en rassemblant les coefficients, l'écriture matricielle suivante :

$$\dot{\theta}_7 = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

En substituant aux vecteurs unitaires leurs valeurs, ce jacobien devient :

$$\mathbf{J}^T = \frac{1}{l_1 s_{-1+6+7} - l_5 s_{6+7} - l_4 s_7} \begin{bmatrix} l_1 l_3 s_{-1+6+7} - l_1 l_5 s_{-1} - l_1 l_4 s_{-1+6} \\ l_1 l_4 s_{-1+6} - l_1 l_3 s_{-1+6+7} - l_4 l_5 s_6 + l_3 l_5 s_{6+7} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Cette matrice devient nulle à $\theta_1 = \theta_6 = \theta_7 = 0$ ou des positions pour lesquelles ces trois angles seront en même temps des multiples entiers de π . Ces positions pourraient survenir lorsque la patte est complètement repliée, tout ces angles sont alors π ou en position complètement étirée, où ils sont tous nuls. La contrainte du quadrilatère "interne passif", c'est-à-dire les limites cinématiques imposées par la superposition d'un mécanisme à quatre barres, s'exprime avec l'équation de contrainte de la barre interne de la même manière que précédemment :

$$l_6 e_6 = [l_4 e_4 - (l_3 + l_7) e_7] + l_8 e_8 \quad (2.25)$$

Ce qui conduit à l'expression scalaire de la longueur de la membrure 6 :

$$l_6^2 = (l_4 c_6 - (l_3 + l_7) c_{6+7} + l_8 c_b)^2 + (l_4 s_6 - (l_3 + l_7) s_{6+7} + l_8 s_b)^2 \quad (2.26)$$

La dérivée par rapport au temps permet d'obtenir la relation entre la vitesse d'entrée du mécanisme à quatre barres interne $\dot{\theta}_6$ et celle de sortie de l'étage d'actionnement $\dot{\theta}_7$:

$$\frac{l_8 l_4 s_{b-6} + l_8 (l_3 + l_7) s_{6+7-b}}{l_8 (l_3 + l_7) s_{6+7-b} + l_4 (l_3 + l_7) s_7} = \frac{\dot{\theta}_7}{\dot{\theta}_6} \quad (2.27)$$

Afin de valider cette dernière relation, pour un 4 barres parallélogramme, c'est-à-dire avec $l_8 = (l_3 + l_7)$, $l_6 = l_4$ et $\theta_7 = \theta_b - \theta_6$, le rapport des vitesses est tel qu'attendu unitaire, ou $\dot{\theta}_6 = \dot{\theta}_7$. La substitution de cette relation dans l'équation 2.23 procure une équation de vitesse de sortie du mécanisme d'actionnement ne dépendant que de l'entrée θ_1 . Il est ainsi possible de simuler cet étage sans en représenter le mécanisme à 4 barres interne, comme à la figure 2.12. Cette figure montre aussi un étage de parallélogramme suivant celui d'actionnement. Lorsque le mécanisme est conçu avec des parallélogrammes, il est bien connu qu'une singularité des mécanismes à quatre barres surviendra lorsqu'il est complètement affaissé. Ce qui signifie des singularités lorsque e_9 est aligné avec e_{10} dans la figure 2.10.

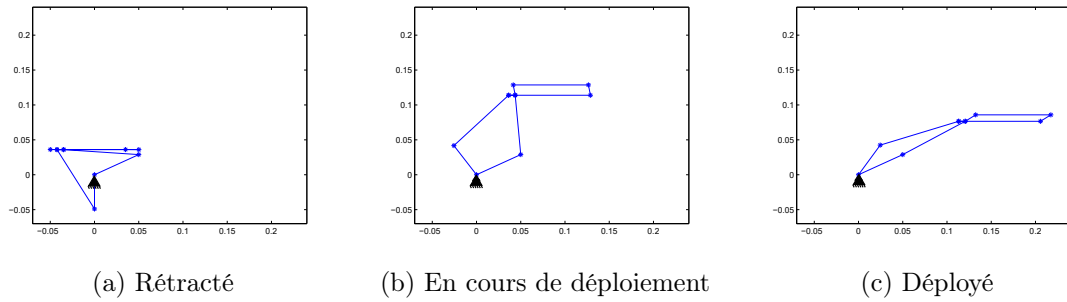


FIGURE 2.12 – Simulation du déploiement d'une patte avec son étage d'actionnement à 5 barres et un étage de parallélogramme subséquent.

La figure 2.13 montre l'évolution de la vitesse, $\dot{\theta}_7$, pour une vitesse $\dot{\theta}_1$ unitaire tout au long de la trajectoire de déploiement. Lorsqu'en mode compact (θ_1 le plus grand), le ratio atteint de petites valeurs, ainsi de grandes vitesses sont requises pour faire bouger les parallélogrammes.

Ces deux positions ne surviennent jamais pour la trajectoire réelle du mécanisme : $\frac{3\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, telle que représentée à la figure 2.12. Les performances calculées ont été validées expérimentalement à l'aide d'un prototype, photographié à la figure 2.11. Ce prototype basé sur le design de la figure 2.6-b démontre de très bonnes performances des articulations et une résistance suffisante des membrures en position complètement déployée (voir la figure 2.14). Les simulations ont permis de déterminer qu'aucune position singulière ne peut être atteinte et que le couple et la vitesse angulaire sont toujours transmis avec un ratio acceptable (figure 2.17). Cependant les expériences avec le prototype ont montré une transmission de force déficiente pour

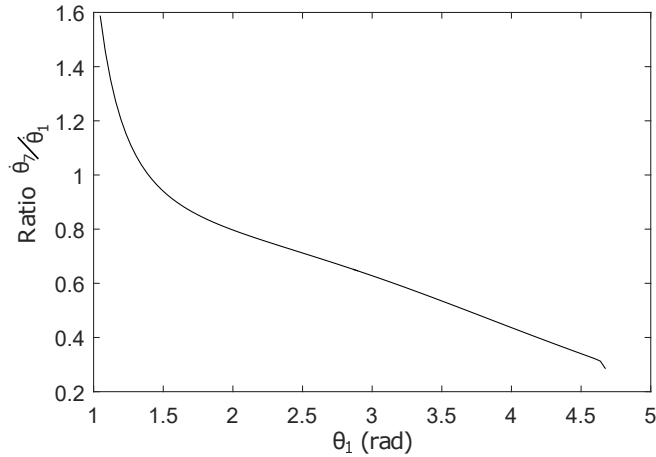


FIGURE 2.13 – Ratio de transmission de la vitesse angulaire d’entrée θ_1 à celle de sortie de l’étage d’actionnement, θ_7 .

la configuration complètement rétractée du mécanisme. La géométrie des pattes les empêche d’atteindre une position dans laquelle les membrures sont superposées, mais une force assez grande lors de son utilisation peut faire légèrement fléchir les membrures et ainsi atteindre une position singulière qui bloque le mécanisme. Il a aussi été observé qu’en faisant vibrer le mécanisme celui-ci réussit aisément à sauter par-dessus cette position et à reprendre son extension normale. Cet effet non désirable est attribuable au ratio de transmission des forces, F_{OUT}/F_{IN} montré à la figure 2.10, atteignant des valeurs trop faibles. Plutôt que de simuler l’ensemble du mécanisme sur toute sa trajectoire pour obtenir ce ratio, une information équivalente consiste à étudier le comportement des angles de transmission de chaque boucle cinématique. La conception du mécanisme doit être réalisée de manière à ce que ses angles de transmission ne sortent jamais d’une plage jugée acceptable.

L’angle de transmission est défini comme étant l’angle entre le vecteur de vitesse d’entrée du mécanisme et celui de sortie (HARTENBERG et DENAVIT, 1964). Plusieurs de ces aspects sont toujours sujets à l’étude, tels que son impact sur les performances des mécanismes et des plages standardisées de valeurs acceptables (BALLI et CHAND, 2002 ; TAO, 1964). Une bonne pratique consiste à imposer un intervalle autour de $\pi/2$ dont l’étendue varie selon les critères propres au mécanisme. Pour un mécanisme possiblement flexible, avec de longues membrures minces, et une grande quantité de liaisons, le jeu dans le mécanisme final risque d’être important, aussi un intervalle conservateur de $\pm\pi/4$ est utilisé. À ce propos, peu d’emphase est mise dans cette recherche sur la modélisation du comportement de structures flexibles, mais c’est un sujet bien couvert dans la littérature en mathématique et mécanique (LOEB, 1991) et particulièrement en ce qui concerne les polyèdres articulés (GUEST et FOWLER, 2005). Pour approfondir ces effets, une étude des contraintes internes doit se baser sur l’hypothèse de grands déplacements pour de faibles contraintes et utiliser des modèles de friction aux articulations tel que celui du ressort de torsion. Toutefois, pour la conception géométrique du mécanisme, le système est



FIGURE 2.14 – Modèle à membrures rigides optimisées en position déployée.

supposé parfaitement rigide.

Angles de transmission

L'application de la définition géométrique de l'angle de transmission indique un angle différent pour chaque type de configuration, il faut donc en scinder l'étude : le niveau d'actionnement, un mécanisme à cinq barres et le ou les mécanismes à quatre barres le suivant. La boucle d'actionnement et la boucle d'un premier niveau de mécanisme à quatre barres sont illustrés à la figure 2.15. BALLI et CHAND, 2002 proposent une méthode de calcul pour les angles de transmission de mécanismes plans à quatre et cinq barres. Leurs définitions sont utilisées pour étudier le comportement du système cinématique et sont indiquées à la figure 2.15 selon qu'ils concernent la boucle d'actionnement, l'angle de transmission μ_A , ou celles suivantes, l'angle de transmission μ_P .

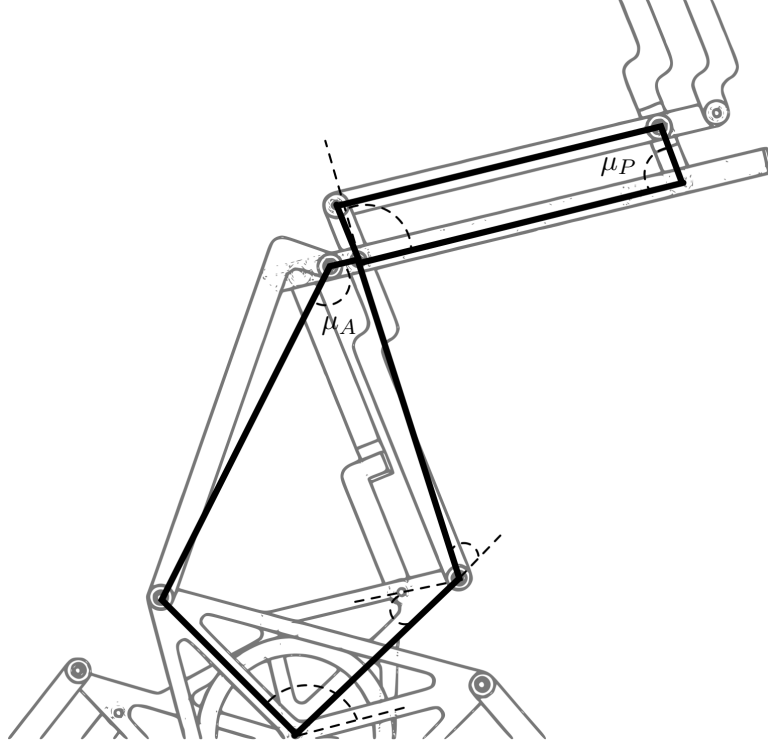


FIGURE 2.15 – Angles de transmission et boucles cinématiques. Le parallélogramme superposé et contraignant le mouvement du module d’actionnement n’est pas mis en évidence.

Le premier niveau est schématisé dans sa forme générale à la figure 2.16. Son angle de transmission est $\mu_A = \pi - \theta_3$. Puisque que la valeur de l’angle d’entrée θ_1 est connue tout au long de la trajectoire, la dérivation mathématique consiste à déterminer la pose de la membrure EBC pour des positions données des points A , F et D , selon un référentiel fixé en A .

La solution est obtenue avec une rotation, \mathbf{Q} , et une translation, \mathbf{d} , du référentiel fixé au point O , tel que :

$$\mathbf{p}_{x_1, y_1} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{p}_{x, y} - \mathbf{d}) \quad (2.28)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

où $\mathbf{p}_{x, y}$ est le vecteur positionnant un point sur la barre EBC dans le référentiel fixé à O et \mathbf{p}_{x_1, y_1} est le vecteur positionnant ce même point exprimé dans le référentiel A_{x_1, y_1} dont l’origine est en A . La figure 2.16 reprend l’étage d’actionnement préalablement présenté à la figure 2.10 avec de nouvelles définitions des angles permettant de clarifier l’utilisation du référentiel mobile. La solution de ce problème est déterminée en utilisant l’approche décrite dans les travaux de GOSSELIN et al., 1992. À cette fin, les coordonnées des points B , D et F

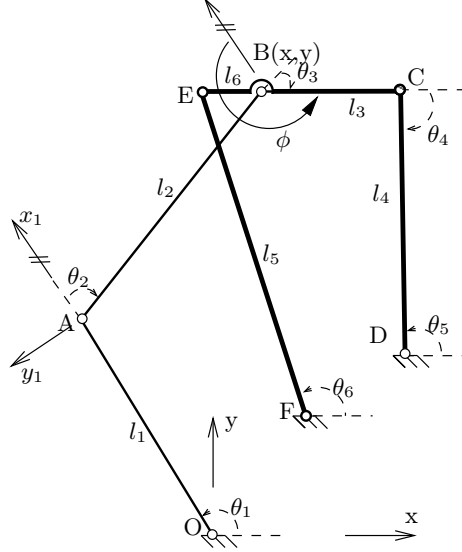


FIGURE 2.16 – Niveau d’actionnement inspiré du modèle de la figure 2.10, mais simplifiant l’écriture des équations par l’ajout d’un repère mobile en A .

sont définies comme des valeurs réelles telles que B_x , B_y et F_y dans le référentiel x_1y_1 . La contrainte correspondant aux membrures AB , CD et EF peut ainsi être exprimée comme suit :

$$l_2^2 = B_x^2 + B_y^2 \quad (2.31)$$

$$l_4^2 = (B_x + l_3c_\phi - D_x)^2 + (B_y + l_3s_\phi - D_y)^2 \quad (2.32)$$

$$l_5^2 = (B_x - l_6c_\phi - F_x)^2 + (B_y - l_6s_\phi - F_y)^2 \quad (2.33)$$

où ϕ est l’angle définit entre l’axe x_1 et la membrure EBC , tel qu’indiqué à la figure 2.16 et où les longueurs l_2 , l_3 , l_4 , l_5 et l_6 sont aussi définies à la figure 2.16. En suivant la procédure décrite dans les travaux de GOSSELIN et al., 1992, l’équation 2.31 est ensuite soustraite des équations 2.32 et 2.33 et deux nouvelles équations sont ainsi obtenues et résolues en fonction de B_x et B_y :

$$B_x = \frac{R_3R_5 - R_6R_2}{R_4R_2 - R_5R_1} \quad (2.34)$$

$$B_y = \frac{R_6R_1 - R_4R_3}{R_4R_2 - R_5R_1} \quad (2.35)$$

avec

$$R_1 = 2l_3c_\phi - 2D_x \quad (2.36)$$

$$R_2 = 2l_3s_\phi - 2D_y \quad (2.37)$$

$$R_3 = l_3^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D_xl_3c_\phi - 2D_yl_3s_\phi - l_4^2 + l_2^2 \quad (2.38)$$

$$R_4 = -2l_6c_\phi - 2F_x \quad (2.39)$$

$$R_5 = -2l_6s_\phi - 2F_y \quad (2.40)$$

$$R_6 = l_6^2 + F_x^2 + F_y^2 + 2F_x l_6 c_\phi + 2F_y l_6 s_\phi - l_5^2 + l_2^2 \quad (2.41)$$

où s_ϕ et c_ϕ sont respectivement le sinus et le cosinus de l'angle ϕ . Les équations 2.34 et 2.35 sont ensuite substituées dans l'équation 2.31, afin d'obtenir une relation ne contenant qu'une seule inconnue, l'angle ϕ . En utilisant la substitution de la tangente de la demie de l'angle, cette relation devient un polynôme de degré 6 tel que démontré dans les travaux de GOSSELIN et al., 1992. Il est aussi démontré dans cet article que la solution de ce polynôme peut produire jusqu'à six racines réelles. Les coefficients du polynôme sont détaillés à l'annexe A.

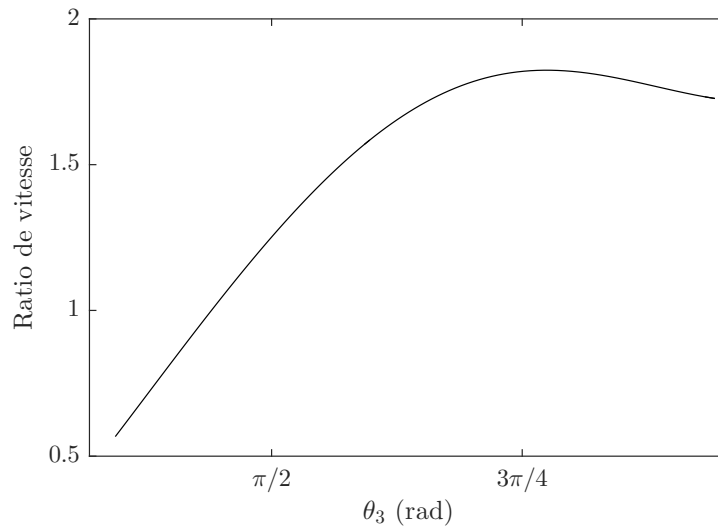


FIGURE 2.17 – Ratio de transmission des vitesses pour tout le déploiement du schéma de la figure 2.12 avec la géométrie de la figure 2.6-b.

La simulation complète du déploiement d'une patte du mécanisme permet de tracer l'évolution des angles de transmission en fonction de θ_1 à la figure 2.18. Ces courbes sortent des limites prescrites mentionnées précédemment pour les angles de transmission (lignes horizontales), ce qui confirme les observations faites sur le prototype, ne se déployant pas sans à-coups. En fait, l'angle de transmission de la boucle d'actionnement dépasse largement la limite lorsque le mécanisme s'approche de la position rétractée (θ_1 près de π) tel que montré à la figure 2.18.

Une approche pourrait consister à bloquer mécaniquement le mouvement plus tôt dans la trajectoire pour éviter de trop s'approcher d'une configuration rétractée précaire, mais les possibilités d'améliorer le ratio d'expansion sont alors trop limitées (voir figure 2.19). Il est aussi envisageable de fixer un ressort de torsion sur la liaison en A de sorte qu'il force le mouvement dans la bonne direction lorsque le mécanisme est rétracté. Pour tester cette approche, il faudrait fabriquer un prototype beaucoup plus gros que celui de la figure 2.11, car le plus petit ressort commercial disponible a un diamètre externe de 0,130" (3,3mm).

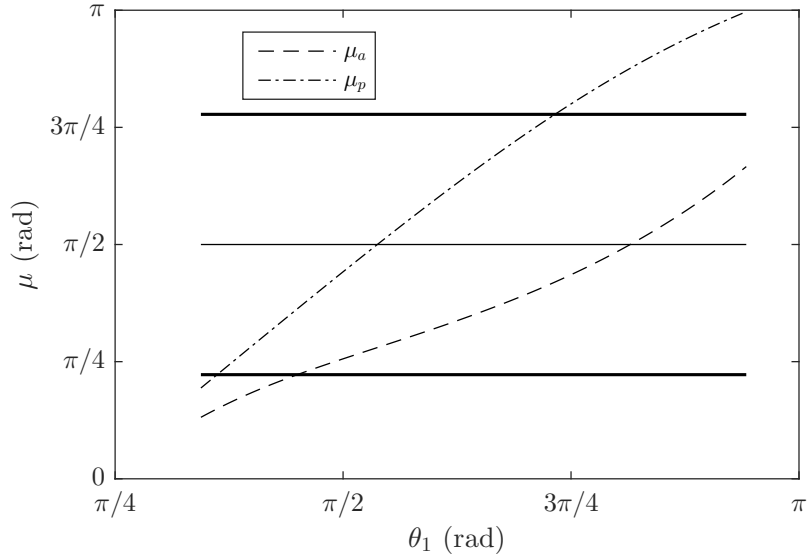


FIGURE 2.18 – Évolution des angles de transmission de la position rétractée ($\theta_1 = 2,96rad$) à la position déployée ($\theta_1 = 1,08rad$).

2.3.1 Optimisation

Optimiser le design des membrures de sorte que le déploiement atteigne un ratio d'expansion au dessus de cinq tout en conservant ses angles de transmission à l'intérieur des limites prescrites précédemment est complexe à réaliser. Par itérations manuelles sur le design et en approximant une modélisation mathématique d'une configuration difficilement paramétrable, aucune solution n'a été obtenue. La première étape est d'optimiser un mécanisme à quatre barres standard, ce qui représente le deuxième étage (et les suivants s'il y a lieu) du mécanisme. L'optimisation est faite avec la fonction "*fmincon*" de *MATLAB* en imposant l'algorithme "*Sequential Quadratic Programming*". Le critère à optimiser est le ratio d'expansion géométrique, soit le ratio de la longueur de la diagonale maximale du quadrilatère dans la configuration déployée divisée par celle dans la configuration rétractée. Afin d'éviter des configurations où la distance initiale serait près de zéro (dénominateur) créant ainsi un ratio tendant vers l'infini, une constante de distance ($\gamma = 0,01$ m) est ajoutée aux deux valeurs avant la division :

$$R = \frac{H_D + \gamma}{H_R + \gamma} \quad (2.42)$$

Ensuite des contraintes en terme d'inégalités sont ajoutées à l'optimisation sur la longueur des membrures l_i , la longueur de la diagonale $l_{diagonale}$ et l'angle de transmission μ :

$$l_i \geq 0.01 \text{ m} \quad (2.43)$$

$$l_i \leq 0.1 \text{ m} \quad (2.44)$$

$$l_{diagonale} \geq 0 \quad (2.45)$$

$$\left| \frac{\pi}{2} - \mu \right| \leq \pi/4. \quad (2.46)$$

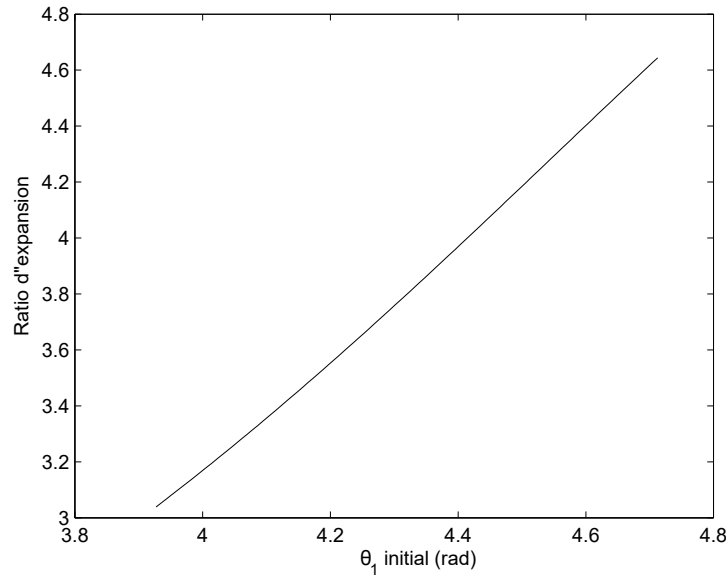


FIGURE 2.19 – Ratio d’expansion du mécanisme selon l’angle de départ rétracté évaluant l’impact d’une butée pour empêcher la fermeture complète du mécanisme, ce qui évite d’approcher une position ayant des valeurs inacceptables des angles de transmission.

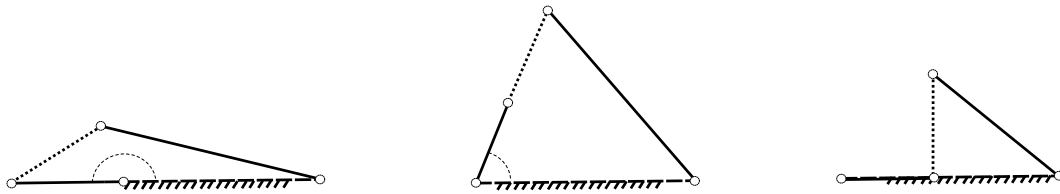


FIGURE 2.20 – Simulation du déploiement d’un quadrilatère optimisé allant de $\theta_1 = \pi$ rad, normalement rétracté, à $\theta_1 = 0$ rad, normalement déployé. Cependant, le maximum est atteint un peu après la mi-parcours.

Le résultat de cette optimisation est certainement un optimum local, mais difficile de vérifier s’il est près du maximum global pour ce problème. Néanmoins, les longueurs des quatre membrures obtenues sont $\{l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4\} = \{44,4 \ 66,9 \ 86,6 \ 100\}$ mm et donne un ratio (réel) d’expansion géométrique de 1,64, beaucoup mieux que le 1,24 de la géométrie initiale du deuxième étage du mécanisme pour une longueur rétractée identique. Qui plus est, comme le montre la figure 2.20, cet optimum est atteint à une fraction de la trajectoire possible, c’est-à-dire à la seconde illustration plutôt qu’à la fin.

Une routine d’optimisation numérique sur l’étage d’actionnement en plus d’un étage de quadrilatère a été testée afin de maximiser le ratio d’expansion pour tout le système tout en maintenant les angles de transmission à l’intérieur des limites prescrites. L’algorithme CMA-ES (*Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy*) (HANSEN et OSTERMEIER, 1996) a été retenu pour cette optimisation puisque le système doit être simulé sur toute sa trajectoire pour

assurer de maintenir les valeurs géométriques dans les limites prescrites. Ce faisant le problème est non-linéaire, non-convexe et risque fortement de voir son espace de solution être discontinu. L'algorithme CMA-ES est idéal pour ce contexte et ne requiert aucun ajustement de paramètres. L'algorithme fait partie de la grande famille des stratégies évolutives, c'est-à-dire basées sur la création de générations "enfants" par combinaison de la génération précédente ou de "parents". Les "enfants" retenus pour se joindre à la prochaine génération de parents étant ceux qui optimisent le plus le problème. CMA-ES est particulier en ce qu'il fait varier la matrice de covariance des distributions normales servant à faire muter les enfants après leur création. Cette matrice est adaptée à chaque génération aux résultats les plus performants afin, entre autres, de contrôler la dispersion des mutations. Finalement, un programme est disponible pour une implémentation rapide sous *MATLAB*. Toutefois, celui-ci ne prenant pas de contraintes d'inégalités, le problème est reformulé pour inclure toutes ces contraintes dans la valeur à optimiser sous forme de contraintes souples. Les résultats n'ont cependant pas permis d'atteindre un ratio d'expansion au-dessus de 5 ; il est donc nécessaire de repenser le concept de transmission à membrure rigide pour permettre plus de flexibilité dans les trajectoires des pattes.

2.4 Conception de l'entraînement par courroies crantées

Les mécanismes à membrures rigides ont dans bien des cas des équivalents entraînés par courroies, par exemple pour les doigts sous-actionnés (BIRGLEN et al., 2008). Prise individuellement, chacune des pattes du mécanisme triangulaire peut être interprétée comme une chaîne cinématique en série permettant une conversion directe d'un mécanisme à membrures rigides vers un mécanisme de type tendon-poulie.

Les modèles à quatre et à cinq barres discutés précédemment peuvent ainsi être convertis en mécanismes entraînés par courroies, tel qu'illustré à la figure 2.22. Les poulies sont disposées sur les liaisons et partagent le même axe de rotation, mais elles n'y sont pas fixées et ne transmettent pas leur rotation à l'articulation. Chaque étage du mécanisme possède une poulie à chaque extrémité et les courroies relient donc deux modules non-adjacents, tel qu'illustré à la figure 2.23. Comme ce schéma le montre, deux niveaux de courroies sont requis pour éviter l'encombrement aux articulations. En clair, le premier module transmet son mouvement au troisième alors que le second est mu par le mouvement de la base. Au final, le mécanisme a, comme le mécanisme à barres rigides, un seul degré de liberté. L'équivalence des deux mécanismes est indéniable lorsque leurs jacobiniennes sont comparées, l'expression de ces dernières étant la même pour un étage à quatre barres et pour un module entraîné par courroies. En fait, l'entraînement par courroies peut physiquement être perçu comme un mécanisme à quatre barres si l'on visualise les deux bandes latérales de la courroie comme les membrures rigides longues du quadrilatère et que l'on ferme les extrémités par le diamètre des poulies rigides (voir figure 2.22). Le jacobien du module à courroie de la figure 2.21-a est aisément obtenu à

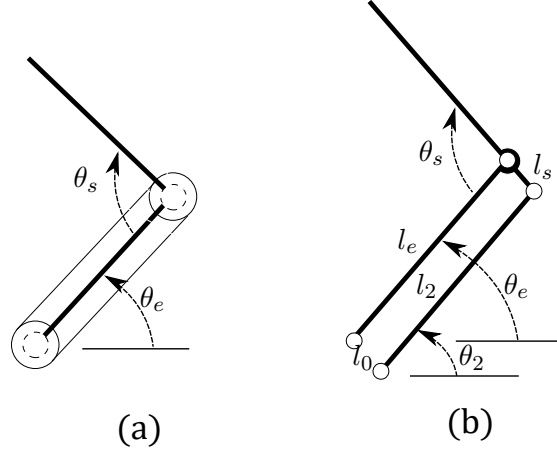


FIGURE 2.21 – Équivalence d'un étage avec transmission par courroies (a) et un mécanisme à 4 barres (b).

partir seulement du ratio des poulies :

$$\dot{\theta}_s = -\dot{\theta}_e \frac{r_e}{r_s} \quad (2.47)$$

avec r_e le rayon de la poulie d'entrée du mécanisme et r_s celui de la poulie de sortie. En ce qui concerne le jacobien du module à 4 barres, il est bien connu et obtenu avec la contrainte de fermeture du mécanisme :

$$l_e \mathbf{e}_e + l_s \mathbf{e}_s = l_0 \mathbf{e}_0 + l_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.48)$$

avec les \mathbf{e}_i vecteurs unitaires de direction des membrures associées aux longueurs l_i de la figure 2.21-b. Sachant que \mathbf{e}_0 est constant puisque ses deux extrémités sont fixées à la base, la dérivée par rapport au temps de l'équation simplifiée donne :

$$(-l_s \mathbf{E} \mathbf{e}_s) \dot{\theta}_s = \begin{bmatrix} l_e \mathbf{E} \mathbf{e}_e + l_s \mathbf{E} \mathbf{e}_s & -l_2 \mathbf{E} \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_e \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

avec la même matrice de passage \mathbf{E} de dimension 2×2 définie précédemment. Il est alors possible de déterminer que la transmission de vitesse pour ces deux mécanismes sera équivalente dans le cas de poulies identiques ($\frac{r_e}{r_s} = 1$) et d'un parallélogramme ($\theta_2 = \theta_e$ et $l_2 = l_e$) : $\dot{\theta}_s = -\dot{\theta}_e$. C'est ce cas qui est utilisé pour les simulations et prototypes de ce chapitre.

La configuration retenue montrée à la figure 2.22-a a un étage de plus que son équivalent de la figure 2.14, ce qui augmente son degré de sur-contrainte tel qu'indiqué dans le tableau 2.1. Cependant les deux designs sont, d'un point de vue cinématique, équivalents.

Étant donné que les courroies sont faites d'un matériel flexible, il est probable que celles-ci s'étirent légèrement lors de leur utilisation mais l'effet de ce phénomène sur les performances du mécanisme est négligé. Cette hypothèse est renforcée par l'utilisation de courroies crantées qui assurent un mouvement synchronisé des membrures en éliminant le glissement. Une tension

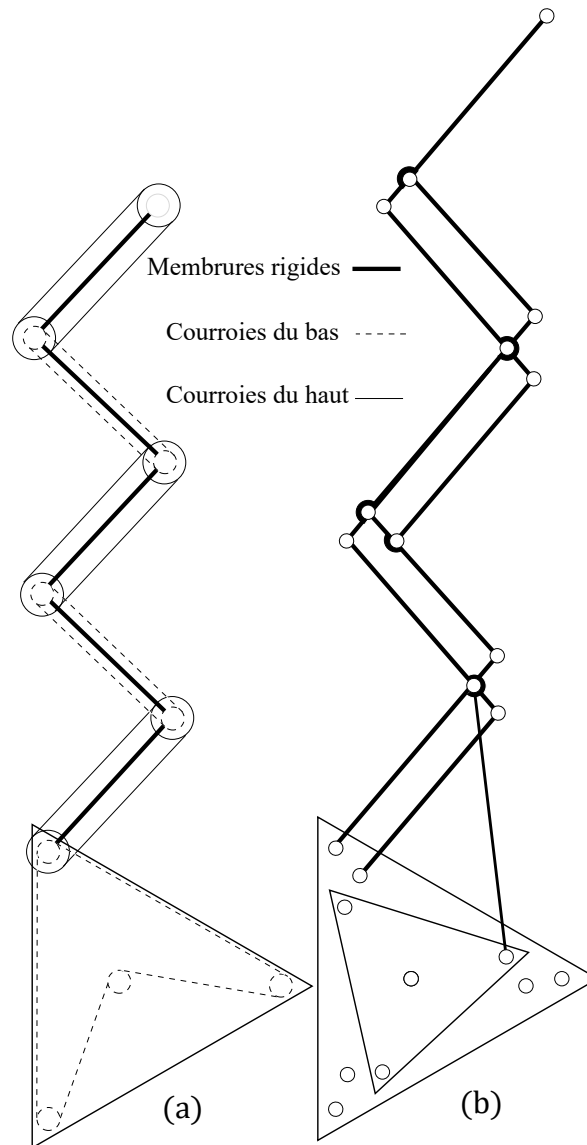


FIGURE 2.22 – Équivalence entre le mécanisme entraîné par courroies (a) et celui à membrures rigides (b).

constante, variant selon la longueur et le matériel des membrures, doit être maintenue pour assurer l'efficacité des courroies. Les forces que cela induit dans la structure des modules sont non-négligeables et doivent être considérées pour la production d'un prototype. Toutefois, dans le contexte de cette étude, les courroies ne sont utilisées que pour la transmission du mouvement et pour la transmission de forces sur une plage de mouvements réduite. L'un des critères de sélection d'une courroie doit donc être le ratio de la longueur des ses dents sur l'amplitude de ce mouvement. Un déploiement complet du mécanisme correspond à une rotation de chaque poulie de π radians relativement à leur référentiel spécifique, ce qui pour le prototype présenté plus loin représente 4%². Comme ce fut le cas pour le mécanisme précédent,

2. Longueur moyenne de courroie de 373 mm et diamètre de poulie de 8,6 mm pour le prototype réalisé.

le ratio de transmission des forces par les pattes du mécanisme a une importance majeure sur ses performances. Par contre, pour les modules à courroies, le produit des ratios des poulies est le seul paramètre influant sur le rapport de transmission. Si chaque étage a un ratio $\frac{R_{i+1}}{R_i} < 1$, où R_i est le rayon de la poulie de l'articulation i , l'actionneur central aura besoin de plus de puissance pour vaincre la friction cumulée des liaisons, des ratios en-deçà de 1 peuvent donc être préférables. Pour des raisons pratiques évidentes, une seule dimension de poulie est utilisée dans le prototype présenté plus bas et donc le ratio $\frac{R_{i+1}}{R_i}$ est toujours de 1. Cela simplifie aussi la cinématique du déploiement en assurant un taux d'extension identique et synchronisé entre les étages.

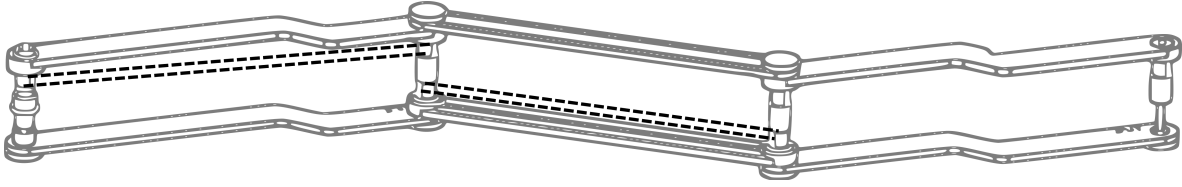


FIGURE 2.23 – Mécanisme entraîné par courroies (les courroies sont représentées par des lignes pointillées)³.

Un autre avantage du passage aux courroies est de diminuer la sensibilité du mécanisme à la friction dans les articulations. Pour un mécanisme à 4 barres, la friction des articulations cylindriques influence la force en sortie du mécanisme, de sorte que :

$$M_m \dot{\theta} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + \mu \sqrt{F_x^2 + F_y^2} r_{cyl} \quad (2.50)$$

avec M_m le moment généré par le moteur à l'entrée du mécanisme, r_{cyl} , le rayon de l'interface cylindrique de friction dans les articulations, μ le coefficient de friction dans les articulations et x, y la position de l'articulation de sortie du mécanisme. C'est donc dire qu'avec la friction l'angle de transmission des forces à l'extrémité du mécanisme à quatre barres changera. Dans le cas d'un mécanisme dont la transmission se fait par courroies crantées, la friction des poulies ne changera pas l'angle de transmission. Cependant, le moteur actionnant plusieurs étages de courroies crantées en série, il doit être suffisamment puissant pour vaincre la friction additionnée de celles-ci. Il n'y a donc aucune limite théorique du nombre d'étage de déploiement pour un mécanisme entraîné par courroies due à la friction, tant qu'un moteur de la puissance requise existe.

2.4.1 Analyse géométrique et effet des paramètres

Avant de tenter une optimisation numérique du design, l'effet spécifique de certains paramètres géométriques est étudié pour guider la formulation du problème. Tout d'abord le concept de *triangle virtuel* doit être explicité pour limiter les possibilités de configurations non réalisables. Le triangle virtuel est défini comme le triangle dont les sommets sont situés aux extrémités

3. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

des pattes du mécanisme triangulaire, tel qu'illustré à la figure 2.24. Si plusieurs unités triangulaires sont assemblées de manière à créer une surface plane, alors tous les modules doivent rester pendant tout le déploiement à l'intérieur des limites du triangle virtuel afin d'éviter des interférences avec les modules adjacents. Par contre si les triangles sont assemblés pour former une surface non plane, tel qu'une coupole, les membrures peuvent en certaines occasions sortir de ce triangle virtuel, permettant ainsi de plus longues membrures et conséquemment un ratio d'expansion plus élevé.

L'optimisation d'une configuration et des dimensions caractéristiques de ce mécanisme doit être réalisée de manière itérative, car plusieurs facteurs influencent simultanément sa conception dont l'interdépendance peut difficilement être modélisée. Un modèle paramétrique est construit dans *Solidworks* permettant d'étudier différentes configurations ou ensembles de dimensions caractéristiques, mais il reste que créer chaque configuration requiert un certain temps de manipulation afin de s'assurer que le triangle virtuel soit respecté pendant tout le déploiement.

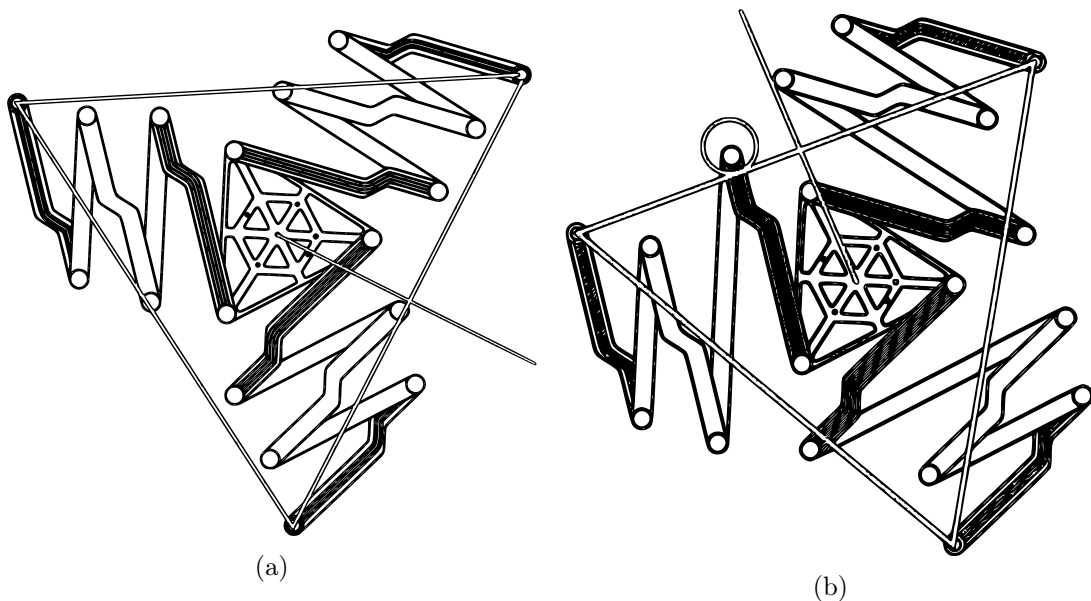


FIGURE 2.24 – Triangle virtuel (en supposant un arrangement de triangles adjacents) : (a) respectées si les triangles adjacents ne sont pas dans le même plan, (b) non-respectées parce que des membrures sortent du triangle des deux côtés de la médiatrice.

Dans la majorité des applications potentielles de ce système, les faces triangulaires ne seront pas dans le même plan. Il est donc possible dans ces cas d'allonger les membrures vers l'extérieur du triangle virtuel sans interférer avec les modules adjacents en autant que cela reste dans une seule demi-section de chaque arête du triangle virtuel représentée par la médiatrice sur la figure 2.24).

Les configurations générées automatiquement pour ce mécanisme ont été manuellement adap-

tées selon ce critère. Les figures qui suivent (2.26–2.28) ont été réalisées avec un petit nombre d’itérations de design mais suffisant pour démontrer une tendance dans l’influence de chaque paramètre. L’objectif de ces études est toujours de maximiser le ratio d’expansion dans le plan (R_P) de chaque mécanisme triangulaire. Cette valeur est définie comme le ratio de la longueur

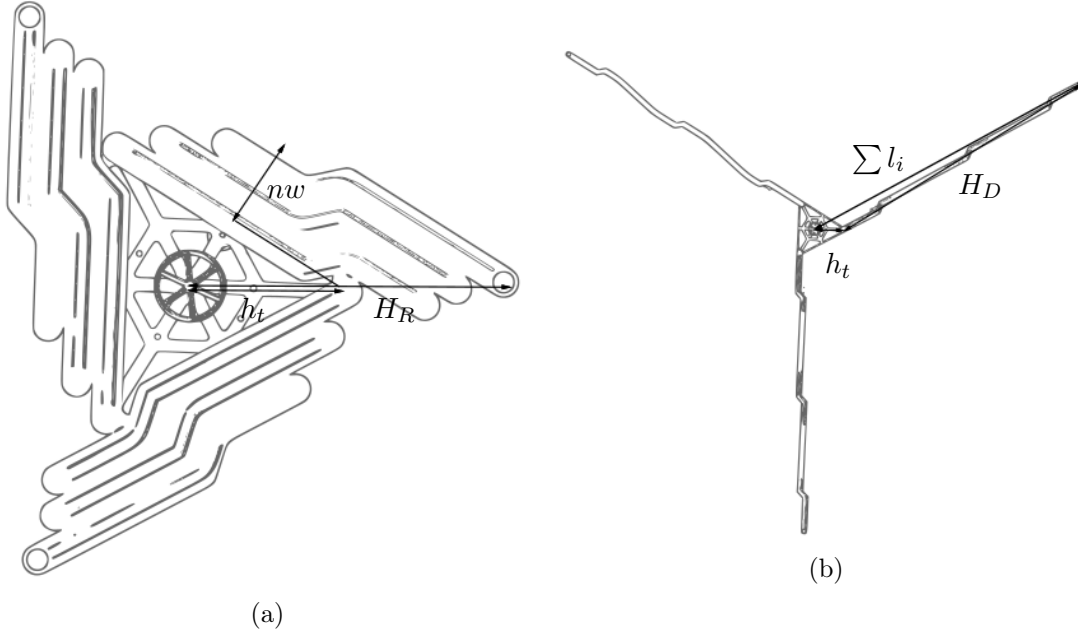


FIGURE 2.25 – Représentation géométrique de la longueur rétractée H_R (a) et de celle déployée H_D (b) utilisée dans les équations 2.51-2.52.

radiale du triangle déployé (H_D) sur la longueur radiale du triangle rétracté (H_R), longueurs illustrées à la figure 2.25. La longueur radiale rétractée est d’abord calculée selon l’équation suivante :

$$H_R = h_T + \sqrt{\left[\frac{w}{2}(n+1)\right]^2 + \left[-\sum_{i=1}^n (-1)^i l_i - 2h_T \cos(\pi/6)\right]^2}, \quad (2.51)$$

où h_T est la longueur radiale du triangle interne fixe, w la largeur des membrures, l_i la longueur de la membrure i et n le nombre d’étages. D’une manière similaire, la longueur radiale du triangle complètement déployé est calculée avec l’équation suivante :

$$H_D^2 = h_T^2 + \left(\sum_{i=1}^n l_i\right)^2 - 2h_T \cos(5\pi/6) \sum_{i=1}^n l_i. \quad (2.52)$$

En observant les contraintes d’interférences évoluant au cours du déploiement par de multiples itérations de design, deux relations non optimales, mais procurant une compréhension approximative de la relation entre les longueurs des membrures, ont été déterminées empiriquement :

$$\sum_{i=1}^n l_i \approx nl_1 + (n-1)w \quad (2.53)$$

et

$$-\sum_{i=1}^n (-1)^i l_i \approx l_1 + (n-5)\frac{w}{2} + w. \quad (2.54)$$

Le ratio d'expansion plan est défini comme

$$R_P = \frac{H_D}{H_R}, \quad (2.55)$$

et, selon les équations 2.51–2.54, il ne dépend que du nombre d'étages n , de la largeur des membrures w , de la longueur radiale du triangle interne h_T et de la longueur des membrures l_i .

2.4.2 Nombre d'étages (n)

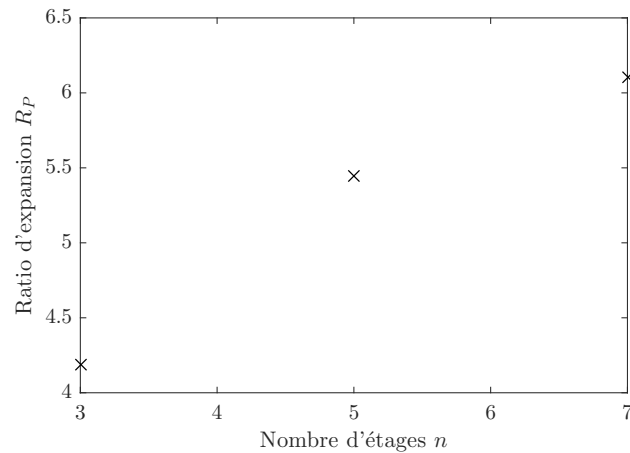


FIGURE 2.26 – Ratio d'expansion en fonction du nombre d'étages pour $h_T = 90$ mm et $w = 17$ mm pour les itérations de design réalisées.

Comme il a été précédemment discuté pour l'architecture à membrures uniquement rigides, le nombre d'étages pour chaque patte influence directement le facteur d'expansion. Puisqu'un nombre plus grand de modules augmente par la même occasion la quantité de liaisons et donc la complexité du mécanisme, un nombre maximum raisonnable d'étages devrait limiter n selon l'application. Par exemple, pour une longueur radiale du triangle interne fixe de 90 mm et une largeur des membrures de 17 mm, une augmentation d'environ 0,5 du ratio d'expansion est observée pour chaque nouvel étage ajouté au mécanisme. Ce résultat est visible à la figure 2.26, dans laquelle le ratio d'expansion est tracé en fonction du nombre d'étages pour la sélection de paramètres fixes mentionnée. Il était aussi prévisible de constater que n fait augmenter linéairement le ratio d'expansion puisque ce dernier est réparti sur le déploiement d'étages identiques.

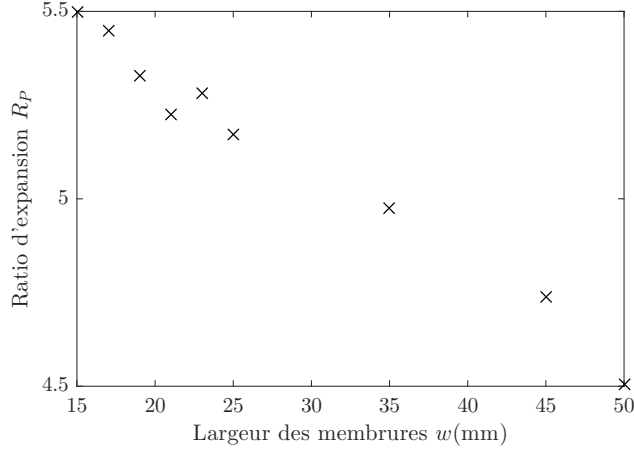


FIGURE 2.27 – Ratio d’expansion en fonction de la largeur des membrures pour $n = 5$ et $h_T = 90$ mm pour les itérations de design réalisées.

2.4.3 Largeur des membrures (w)

La largeur des membrures a aussi un effet sur le ratio d’expansion. L’influence est nulle sur l’ensemble de la trajectoire de déploiement ainsi que sur sa longueur radiale finale, mais la largeur influence grandement la compacité des membrures rétractées et donc la longueur radiale de cette position. Pour une longueur radiale de triangle interne fixe de 90 mm et un nombre de modules fixé à 5, une diminution de 0,26 du facteur d’expansion est observée pour chaque augmentation de 10 mm de la largeur des membrures. La figure 2.27 illustre l’évolution du ratio d’expansion en fonction de la largeur des membrures. Il est évident que ce paramètre n’est pas le plus influent. Pour les optimisations dans le cadre d’applications concrètes, il est suggéré d’utiliser une valeur minimum qui assure une résistance structurelle suffisante pour une charge donnée et permet l’intégration des poulies sélectionnées. Afin de mieux comprendre l’influence de ce paramètre, la différence entre les longueurs H_D et H_R , notée ΔH et définie comme $\Delta H = H_D - H_R$, est utilisée plutôt que le ratio d’expansion. La dérivation partielle de ΔH en fonction de w a l’avantage de produire une relation simple à comprendre par observation du résultat algébrique pour l’effet de la largeur des membrures. Après simplification la relation devient :

$$\frac{\partial(\Delta H)}{\partial w} \approx \frac{(n + 1)}{2} \quad (2.56)$$

ce qui démontre que l’impact de w diminue lorsque le nombre de liens n augmente.

2.4.4 Longueur radiale du triangle interne (h_T)

La longueur radiale du triangle interne apparaît autant dans l’expression de H_R que de H_D . Son impact direct sur le facteur d’expansion peut alors sembler limité. Cependant, modifier ce paramètre requiert l’adaptation des longueurs de toutes les membrures. Pour un nombre de membrures fixé à 5 et une largeur des membrures de 17 mm, le ratio d’expansion augmente de

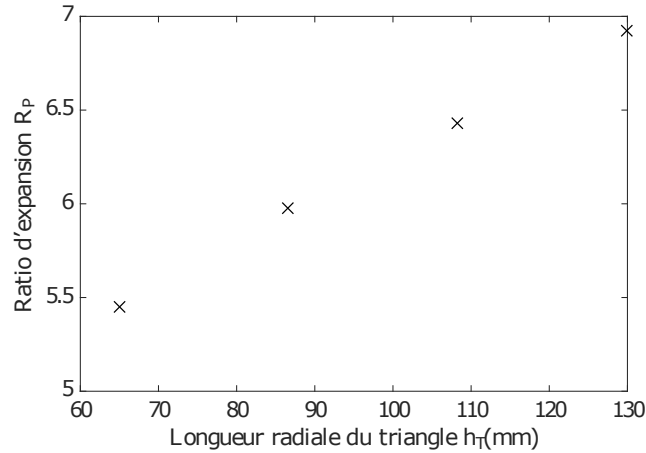


FIGURE 2.28 – Ratio d’expansion en fonction de la longueur radiale du triangle interne pour $w = 17mm$ et $n = 5$ pour les itérations de design réalisées.

0,23 pour une augmentation de 10 mm de la longueur radiale du triangle interne. La figure 2.28 présente ce résultat avec le tracé du ratio d’expansion en fonction de la longueur radiale du triangle interne. Même si l’influence de ce paramètre peut sembler du même ordre que celle de la largeur des membrures à partir des courbes, il reste plus avantageux de faire varier la longueur radiale du triangle interne que la largeur des membrures car ces dernières influencent aussi directement la robustesse du mécanisme.

2.4.5 Optimisation du mécanisme

En se basant sur les relations construites à la section précédente, un problème d’optimisation est formulé pour améliorer le ratio d’expansion du mécanisme. Tel qu’il a été mentionné, l’influence de w est faible et il sera donc choisi de fixer ce paramètre à une valeur raisonnable qui assurera la robustesse des membrures. Afin de contraindre l’optimisation à un scénario donné, il est supposé que H_R est connue. Ce sera le cas en général pour satisfaire des contraintes de volume de transport. L’équation 2.51 peut ainsi être utilisée pour obtenir la longueur radiale du triangle interne, h_T , exprimée en fonction de n et de la longueur de chaque membrure uniquement. Pour simplifier le problème, les relations 2.53 et 2.54 sont utilisées pour estimer la somme des longueurs des membrures en fonction de la longueur de la première membrure et de leur nombre uniquement. En substituant le résultat et l’expression pour h_T dans l’équation 2.52, l’optimisation revient à maximiser H_D selon n et l_1 . Le problème d’optimisation est donc formulé comme suit :

$$\arg \max_{n, l_i} (R_p) \quad (2.57)$$

Certaines des simplifications faites pour arriver à cette expression de l’optimisation sont en fait des estimations. Il convient de simuler avec soin chaque solution de design pour s’assurer de leur cohérence géométrique. Tel qu’il est montré au tableau 2.1 pour une longueur radiale

rétractée H_R de 15 cm, une largeur de membrure w de 6mm le nombre de membrure n et la longueur de la première membrure l_1 sont déterminés de manière à maximiser le ratio maximum R_M . Une optimisation avec la routine *fmincon* de *MATLAB* permet d’obtenir un ratio de 5,6. Ce problème d’optimisation est aussi appliqué dans un contexte physique différent au chapitre 4 pour lequel la longueur radiale rétractée maximale imposée est 4,5 m. Le résultat de cette optimisation donne un mécanisme à 30 membrures dont la première mesure 2,5 m de long avec une largeur des membrures fixée à 60 mm. Le ratio obtenu est alors supérieur à 20. Il est discuté plus en détail au chapitre 4.

2.5 Assemblage de surfaces

Plusieurs unités triangulaires déployables, telles que décrites dans les pages précédentes, peuvent être connectées l’une à l’autre pour former des surfaces plus grandes et plus complexes. Le ratio d’expansion doit alors prendre en compte l’ensemble de la surface pour être représentatif des performances du mécanisme. Tel que mentionné au début du chapitre, en théorie, n’importe quelle géométrie de surface peut être approximée par un triangle en autant que celle-ci soit divisible par des dalles triangulaires. Si la surface assemblée est plane le ratio d’expansion global sera le même que celui des unités la composant. Un exemple de ce type de surface, composée de six mécanismes triangulaires coplanaires déployables est présenté à la figure 2.29. Le principal désavantage de ce type d’assemblage est sa piètre résistance aux forces perpendiculaires à la surface lorsque celle-ci est pleinement déployée. De plus, comme mentionné plus haut, toutes les membrures doivent rester à l’intérieur du triangle virtuel pendant toute la trajectoire de déploiement. Pour des applications sur Terre, là où la gravité influence le déploiement et la rigidité de la structure, il faut des membrures très épaisses et robustes pour permettre le déploiement de grandes surfaces planes. Dans l’espace, le poids des membrures a peu d’influence sur leur propension à fléchir aussi cette approche pourrait être pertinente pour le déploiement de voiles solaires notamment.

Pour des applications architecturales (toits, abris) et quelques applications spatiales (aéro-freinage, filet pour débris, télescope), la forme la plus appropriée est celle d’une coupole, comme celle de la figure 2.30. En comparaison avec la surface plane, la coupole a le grand avantage d’être beaucoup plus robuste au flambage de la surface et aux forces perpendiculaires à sa surface.

L’assemblage en icosaèdre permet d’approximer une coupole par des triangles, mais avec un ratio global différent de celui des faces planes individuelles. Le ratio d’expansion de la coupole, noté R_C , est le ratio de son rayon déployé sur son rayon rétracté. Les deux rayons sont calculés à l’aide de la sphère dans laquelle s’inscrit l’icosaèdre. Le rayon de cette sphère est (POSAMENTIER, 2011)

$$r_{Si} = \frac{\alpha^2 a_i}{2\sqrt{3}} + \frac{e}{2} \quad (2.58)$$

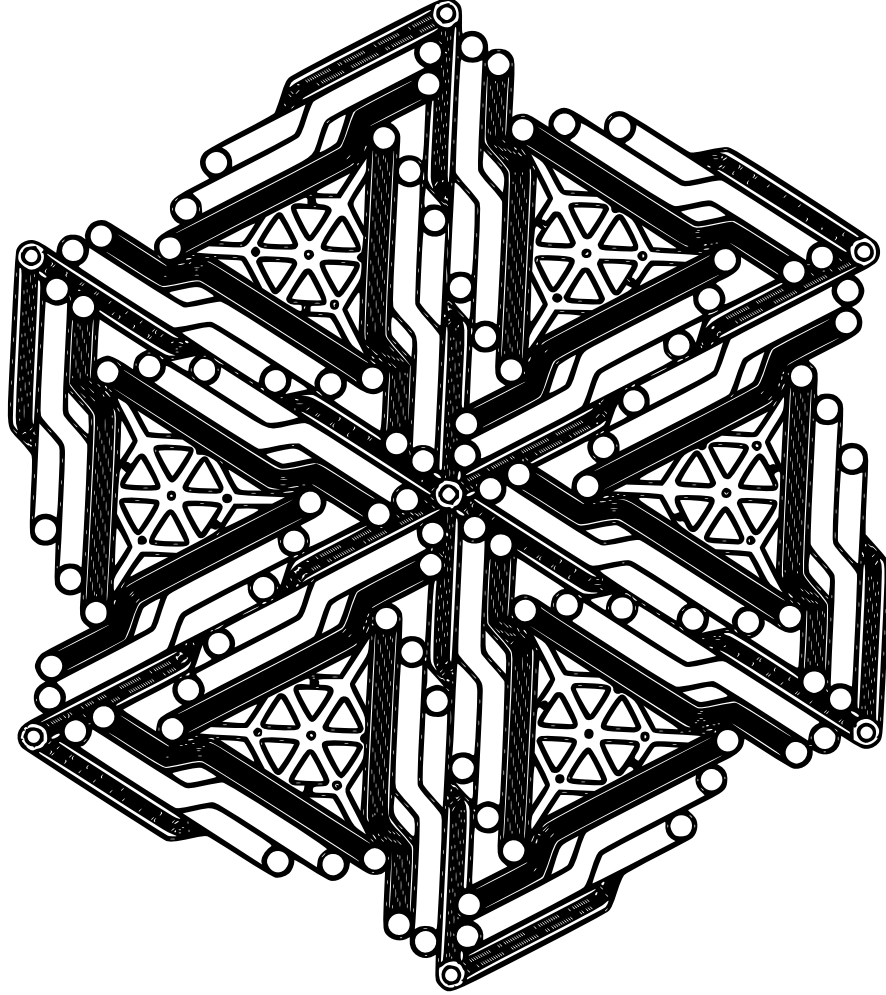


FIGURE 2.29 – Assemblage plan de six mécanismes triangulaires entraînés par courroies.

où α est le ratio d'or ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), a_i la longueur du côté de la face triangulaire dans sa configuration i et e l'épaisseur d'une face. Le ratio d'expansion de la surface d'une coupole, R_C , est ainsi obtenu du calcul de ce rayon dans la configuration déployée sur celui de la configuration rétractée, sachant que $a_D = a_R R_P$:

$$R_C = \frac{r_{SD}}{r_{SR}} = \frac{R_P + \frac{\sqrt{3}}{\alpha^2} \frac{e}{a_R}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\alpha^2} \frac{e}{a_R}} \quad (2.59)$$

ou r_{SD} et r_{SR} sont respectivement les rayons de la sphère inscrite pour un mécanisme déployé et pour un mécanisme rétracté. À l'exception de certaines constantes, la différence entre le ratio d'expansion plan R_P de l'équation 2.55 et celui de la coupole R_C repose sur l'effet de l'épaisseur du mécanisme (perpendiculaire au plan d'expansion). Autrement dit, si le ratio $\frac{e}{a_R}$ diminue, le ratio d'expansion de la coupole diminue aussi (sachant que R_P est toujours supérieur à 1).

Chaque surface doit être étudiée pour déterminer les étapes optimales de dépliage qui éviteront

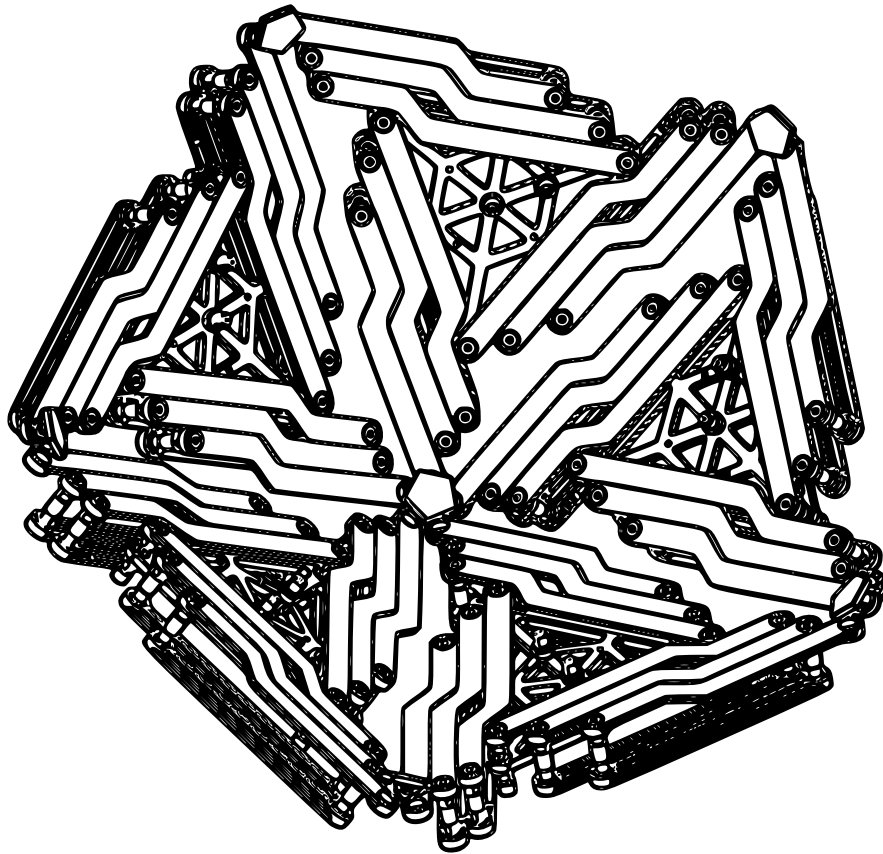


FIGURE 2.30 – Assemblage en coupole de cinq mécanismes triangulaires entraînés par courroies.

les interférences entre les faces tout en permettant de minimiser l'effort de ressorts et les effets sur l'orientation générale du satellite. Par exemple, les étapes de dépliage d'une icocoupole formée de cinq modules triangulaires sont présentées à la figure 2.31.

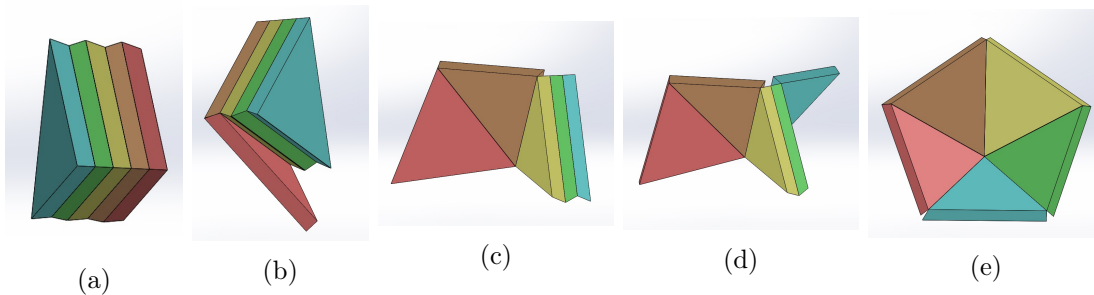


FIGURE 2.31 – Étapes de dépliage d'une icocoupole formée de 5 modules.

Articulation de rotation à deux phases

Le ratio de déploiement de la coupole R_C est donc toujours inférieur à celui du mécanisme plan dû à l'épaisseur du mécanisme. Toutefois un avantage de ces mécanismes n'a pas encore

été exploité dans le design de cette surface déployable : la répétition d'unités identiques. La géométrie des surfaces générées est toujours un assemblage répétitif et symétrique. Il est aisé de concevoir que toutes ces faces pourraient entrer dans un espace plus restreint si elles étaient empilées l'une sur l'autre avant d'être assemblées en coupole. Afin de bénéficier du gain en espace que cela représente pour le transport, il faut concevoir des liaisons qui permettront aux faces de se déplier avant de se déployer. Le principal défi de cette conception est de terminer le dépliage avec des liaisons communes entre les faces dont les axes de rotation sont perpendiculaires à la surface pour le déploiement. Il faut donc une solution permettant de produire une rotation de 180° autour de l'arête du triangle (figure 2.32-a) et qui se bloque pour permettre une rotation libre sur un axe différent du premier (figure 2.32-d). Des solutions à des problématiques similaires impliquent des designs d'articulations reconfigurables (WEI et DAI, 2014), mais aucune ne permet le changement d'axe de rotation automatiquement.

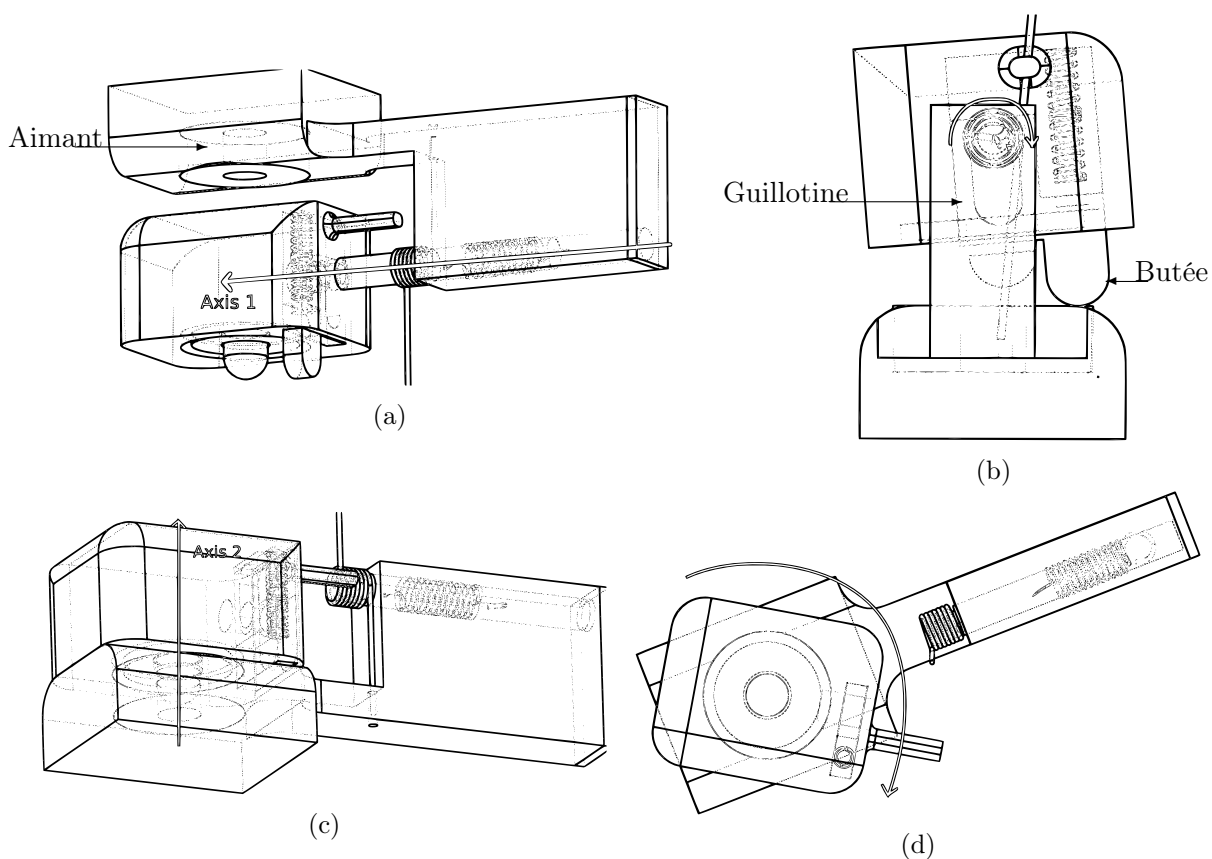


FIGURE 2.32 – Liaison de rotation à deux phases modélisée dans *Solidworks*. (a) état de départ, (b) sur le point de relâcher le premier axe de rotation, (c) sections en rotation retenues ensemble par un aimant permanent, (d) second axe de rotation.

Le concept d'une telle liaison est proposé à la figure 2.32 pour un assemblage des triangles plans, c'est-à-dire avec un axe de rotation final perpendiculaire à celui du dépliage. Le mécanisme proposé à la figure 2.32 utilise des ressorts précontraints pour déplier les triangles et rétracter la partie empêchant la rotation sur le second axe. Un aimant permanent permet aussi

d'assurer un contact dans la configuration finale de la liaison sans bloquer les mouvements de rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'aimant.

Dans sa configuration initiale (figure 2.32-a), les deux faces sont empilées l'une sur l'autre et un ressort de torsion est étiré sur le premier axe. La liaison permet de déplier les triangles jusqu'à ce qu'une butée enclenche le système de relâche, situation illustrée à la figure 2.32-b. Dès que le contact est fait, l'axe de la première rotation, se terminant, est libre de rentrer dans la cavité du corps de droite, tiré par un ressort étiré à l'intérieur. C'est une guillotine empêchant l'axe de se rétracter qui est libérée lorsque la butée touche l'autre section en fin de course. L'aimant permanent assure ensuite la fin de la trajectoire et la solidarité de la liaison finale (figure 2.32-c). L'articulation est maintenant libre de tourner perpendiculairement à la surface des triangles, tel que requis pour la phase de déploiement suivante (figure 2.32-d). Pour différentes géométries de surfaces non-planes le principe sera le même, seulement l'angle final entre les faces ne leur sera pas perpendiculaire.

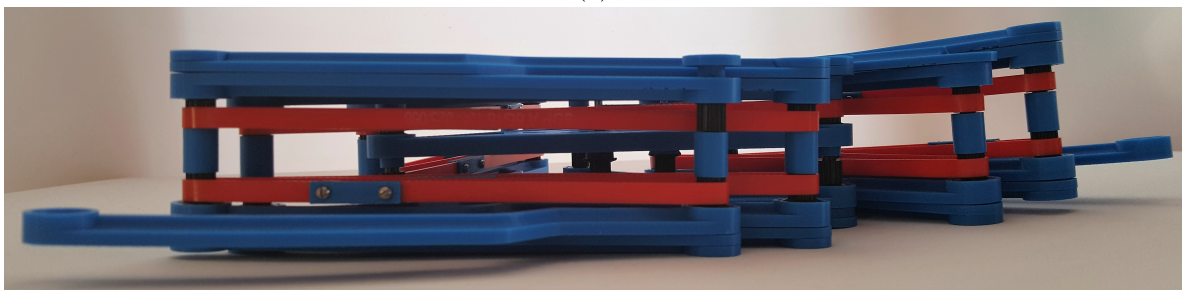
2.6 Prototype

Un prototype du mécanisme triangulaire déployable entraîné par courroies décrit dans ce chapitre a été réalisé en impression 3D selon les méthodes proposées dans (LALIBERTÉ et al., 2001). La symétrie du mouvement d'extension de chaque patte du prototype est montrée à la figure 2.33-a. Les liaisons rotoïdes sont conçues encliquetables, ce qui permet l'ajout rapide de nouveaux étages sur chaque patte. Chaque poulie est collée sur la membrure correspondante de sorte qu'elle en soit solidaire. Les courroies sont quant à elles installées dans la configuration complètement déployée du mécanisme et une jonction les serrant entre deux pièces dentelées d'ABS permet de régler leur tension. Les axes des liaisons sont faits d'acier allié 4340 pour améliorer leur robustesse et diminuer la friction avec l'ABS. Finalement chaque membrure est doublée avec une partie basse et une partie haute fermant la géométrie autour de la courroie pour améliorer sa résistance à la flexion.

Le principe de déploiement basé sur la transmission du mouvement par les courroies a fait ses preuves avec le prototype. Cependant, afin de réduire au minimum la taille du prototype tout en gardant le temps et les coûts de production raisonnables, de petites roues dentées comptant seulement douze dents ont été retenues pour les articulations. Ainsi seulement cinq dents sont accrochées à la courroie (un peu moins de la demi-circonférence de la poulie) et le mécanisme peut assez aisément glisser. La tension dans les courroies peut être ajustée pour compenser une partie de cet effet, mais lorsqu'elle est trop grande elle fait aussi fléchir les modules, comme il est visible à la figure 2.33-b. La manipulation du mécanisme a montré une bonne fonctionnalité du concept mais l'actionnement par le centre s'est avéré ardu pour compenser la somme de la friction dans les liaisons avec un petit volant. Des poulies ayant un plus grand diamètre et des membrures plus épaisses devraient être utilisées pour éliminer les



(a)



(b)

FIGURE 2.33 – Prototype du mécanisme plan entraîné par courroies crantées : (a) Vu de haut, (b) vue de face où une flexion des membrures dû à la tension des courroies est visible.

problèmes de flexion et de friction liés à la tension des courroies.

L'utilisation de liaisons rotoïdes peut aussi engendrer des jeux dans le mouvement du mécanisme. Ces jeux peuvent être prédits par simulation afin de diminuer leur impact lors du contrôle du déploiement du mécanisme, tel que discuté dans (LI et al., 2012; GUO et al., 2013). Une autre limitation importante à prendre en compte et à simuler est la flexibilité des membrures de cette taille sous pression pour tendre les courroies (BRITVEC, 1995).

Le prototype a permis de révéler que le choix de l'actionneur doit prendre en compte la puissance requise pour démarrer le mouvement malgré la friction statique cumulée de toutes les liaisons du mécanisme. Toutefois, tel que discuté à la section 1.2.2, l'avantage d'un mécanisme à un seul degré de liberté n'est pas tant de minimiser le nombre d'actionneurs que de permettre

plus de flexibilité dans le design d'un actionnement redondant. Ce faisant, l'actionnement par moteurs aux articulations centrales des faces n'est peut-être pas l'idéal pour permettre une redondance efficiente. Le prochain chapitre présente une nouvelle approche pouvant pallier ce problème.

2.7 Conclusion

Ce chapitre a d'abord présenté le potentiel de développer des unités de mécanismes plans pour réaliser un dallage de surface tessellée. En faisant varier la taille de ces unités, un grand éventail de surfaces peuvent être relativement bien approximées. Un premier mécanisme triangulaire à membrures rigides a été discuté et ses performances comparées en mode fermé et ouvert en terme du niveau de sur-contrainte qu'il présente. Le ratio d'expansion de ce mécanisme étant limité par l'encombrement de ses membrures, une nouvelle géométrie beaucoup plus compacte a été présentée et réalisée en prototype. Le ratio d'expansion obtenu est au-dessus de l'objectif minimal de 5 dans ces dimensions, toutefois la fiabilité du prototype n'est pas satisfaisante. Lorsque complètement rétracté, les angles de transmission de ces différents étages de déploiement dépassent les limites normalement acceptable pour ce type de mécanisme. Un mécanisme aux propriétés cinématiques similaires, mais dont le mouvement est transmis par courroies crantées a été introduit. Celui-ci permet d'excellentes performances, autant sur son ratio d'expansion que sur la fiabilité du mouvement de déploiement. Ces performances ont été validées expérimentalement. Finalement, pour améliorer le ratio entre le volume entreposé et celui de la surface déployée, une articulation à deux phases permettant d'empiler les faces triangulaires a été présentée. Cette articulation permet d'abord de déplier les faces l'une par rapport à l'autre jusqu'à former une surface prête à déployer. Le ratio d'expansion final d'une surface peut ainsi être optimisé selon l'espace de transport pour atteindre des limites bien au-dessus des comparables de la littérature.

Chapitre 3

Actionnement et ré-orientation

Le chapitre précédent a présenté un nouveau mécanisme de déploiement de surface en utilisant des triangles déployables identiques répétés pour former un dallage sur la surface. Dans le cas des satellites stabilisés par autorotation discutés à la section 1.2.2 et étant donné que le système ne possède qu'un seul degré de liberté, l'actionneur central régissant son déploiement peut être orienté de sorte que son axe de rotation soit le même que celui du satellite. L'effet du couple de déploiement sera ainsi diminué au regard de la quantité de mouvement angulaire déjà en jeu dans cet axe du satellite. Cette énergie de rotation peut aussi servir, jumelée à l'inertie de la coupole, à déployer quasi-passivement le mécanisme. Ce type de stabilisation en orientation n'est toutefois pas utilisée sur tous les engins spatiaux. De plus, la phase de dépliage provoquera invariablement des moments en divers endroits sur la structure et risque de grandement déstabiliser le satellite. Comme les dispositifs spatiaux ont avantage à être redondants, il est aussi préférable de répartir en plusieurs endroits sur la surface à déployer des actionneurs simples. Ceux-ci pourront aussi permettre de rétracter une structure abimée possédant plus d'un degré de liberté, le cas échéant.

Ce chapitre explore d'abord les relations dynamiques d'Euler-Newton d'un mécanisme flottant pour étudier les effets d'une seule unité de déploiement triangulaire sur son orientation dans un contexte sans gravité ni friction. Ensuite des modèles simplifiés de réorientation par mouvement de masses ponctuelles sont étudiés. Afin d'arriver à des actionnements plus complexes et ayant peu de répercussions sur l'ensemble du satellite, une approche par roue d'inertie, sans actionneur aux articulations du mécanisme et redondante, est proposée et dérivée avec l'approche de Kane.

Pour la majorité des variantes mécaniques présentées dans ce chapitre, une validation en simulation est effectuée. Les équations, généralement sous forme matricielle, sont programmées dans l'environnement *MATLAB* pour être simulées. Afin de valider que les résultats obtenus sont justes, une comparaison est faite avec un modèle géométrique 3D conçu dans *Solidworks* et importé dans le module *Simscape Multibody* de *Simulink* (*MATLAB*). Ce module permet

la simulation numérique d'un modèle solide de mécanisme grâce à sa librairie d'articulations, de transformées géométriques et son algorithme de résolution dynamique. Contrairement aux résolutions analytiques développées dans ce chapitre, l'approche de ce type de logiciel est dite numérique et itérative, c'est-à-dire qu'un arbre de relations est construit reliant les corps solides entre eux et la position de chacun est estimée à chaque pas de temps en se basant sur les résultats du pas de temps précédent. *Simscape Multibody* est préféré à *MSC Adams* parce que son interface est plus simple à apprivoiser, à *MapleSim* parce que les paramètres géométriques sont plus aisément accessibles pour modifier une simulation et à *Solidworks Motion Analysis* car ses résultats sont plus simples à extraire et à personnaliser.

3.1 Modélisation dynamique

Un système à plusieurs corps rigides en orbite ou flottant doit respecter des relations physiques telles que :

1. la position constante de son centre de masse par rapport aux composantes du satellite

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = m_T \mathbf{r}_0 ; \quad (3.1)$$

2. la conservation de sa quantité de mouvement

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} ; \quad (3.2)$$

3. la conservation de sa quantité de mouvement angulaire

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{c}_0 . \quad (3.3)$$

où \mathbf{I}_i est la matrice d'inertie du corps i exprimée dans le référentiel inertiel pour chacun des n corps, \mathbf{v}_i est vecteur de vitesse du centre de masse de ce corps, $\boldsymbol{\omega}_i$ sa vitesse angulaire, m_i sa masse, \mathbf{r}_i la position de son centre de masse par rapport au centre de masse global, \mathbf{r}_0 la position du centre de masse global et m_T la masse totale du système multi-corps. Le vecteur constant \mathbf{c}_0 sera posé égale à zéro pour la suite afin de simplifier les équations sans perte de généralité, puisqu'elle n'a d'impact que sur l'amplitude des vitesses et non sur le comportement général du système.

Autrement dit, sans la présence de forces ou de couples externes, la position et l'orientation du système multi-corps relativement à son centre de masse ne changeront pas. En plus de ces trois relations, toutes les articulations rotoïdes du système fixent un axe de chaque corps rigide à un autre en empêchant tout mouvement de translation relative et toute rotation relative sauf autour de l'axe de la liaison. Dans un mécanisme plan cette contrainte sera généralement exprimée sous forme de relations entre les vitesses des centres de masse des deux corps rigides

en fonction de leur géométrie et de leur vitesse angulaire relative. Pour une chaîne cinématique ouverte à n corps rigides évoluant dans un plan, chaque corps peut avoir jusqu'à 3 degrés de liberté, mais ayant $n - 1$ articulations et l'équation 2.2 indique que le système aura donc besoin de $n - 1$ actionneurs afin de contrôler sa position, son orientation et sa configuration (orientation relative des corps rigides).

L'application de ces équations pour un mécanisme flottant cherche à déterminer la vitesse du premier corps, \mathbf{v}_1 , ainsi que les vitesses angulaires de toutes les membrures. Pour une chaîne cinématique sérielle ouverte, les vitesses de translation des centres de masse des membrures pour $i > 1$ sont :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \dot{\mathbf{Q}}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,j} - \dot{\mathbf{Q}}_i \mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{v}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,j} - \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{Q}_i \mathbf{r}_{i,j} , \quad (3.4)$$

avec \mathbf{Q}_i la matrice de rotation représentant la rotation du corps i , $\dot{\mathbf{Q}}_i$, sa dérivée par rapport au temps et sachant que $\dot{\mathbf{Q}}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{Q}_i$ où $\boldsymbol{\Omega}_i$ est le tenseur de vitesse angulaire défini comme $\boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{1} \times \boldsymbol{\omega}_i$, avec $\boldsymbol{\omega}_i$ le vecteur de vitesse angulaire du corps i . Pour un mécanisme plan, les relations deviennent :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \omega_{i-1} \mathbf{E} \mathbf{r}_{i-1,j} - \omega_i \mathbf{E} \mathbf{r}_{i,j} . \quad (3.5)$$

où $\mathbf{r}_{i,j}$ est la position de la liaison j par rapport au centre de masse du corps i dans son référentiel local, ω_i est la vitesse angulaire (scalaire) du corps i et \mathbf{E} est défini à l'équation 2.10. L'équation 3.4 est en fait la dérivée de la position des centres de masse de chaque corps :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,j} - \mathbf{Q}_i \mathbf{r}_{i,j} . \quad (3.6)$$

Ainsi l'équation 3.2 pour n corps et m articulations devient :

$$m_T \mathbf{v}_1 + \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=j+1}^n m_i (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{j,j} - \boldsymbol{\omega}_{j+1} \times \mathbf{r}_{j+1,j}) \right] = \mathbf{0} , \quad (3.7)$$

avec \mathbf{v}_1 et les $\boldsymbol{\omega}_i$ à déterminer et les $\mathbf{r}_{i,j}$ connus et constants dans leur référentiel local mais exprimés dans cette équation dans le référentiel global inertiel. De la même manière l'équation 3.3 devient :

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i m_i) \times \mathbf{v}_1 + \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=j+1}^n (\mathbf{r}_i m_i) \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{j,j} - \boldsymbol{\omega}_{j+1} \times \mathbf{r}_{j+1,j}) \right] = \mathbf{0} . \quad (3.8)$$

Les \mathbf{r}_i de cette dernière équation sont connus et peuvent être substitués par l'équation récurrente 3.6. Ce qui crée un système d'équations pouvant être représenté sous forme matricielle $\mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ dans lequel $\dot{\mathbf{u}}$ peut contenir la vitesse du centre de masse du premier corps et les vitesses angulaires de tous les corps, mais sera généralement simplifié pour ne contenir que les vitesses angulaires devant être contrôlées. La matrice \mathbf{A} contient les coefficients regroupés des différentes vitesses u_i . On retrouve des expressions similaires dans les dérivations présentées par PAPADOPOULOS et DUBOWSKY, 1993.

3.1.1 Dérivation pour deux corps

Le cas le plus simple, quoique ayant été sujet à plusieurs études (voir section 1.2.2), est un système plan à deux corps rigides, illustré à la figure 3.1. Cette première configuration sert à estimer l'influence du déploiement d'un module plan, aussi les équations sont dérivées dans l'espace tridimensionnel pour inclure les asymétries potentielles des membrures.

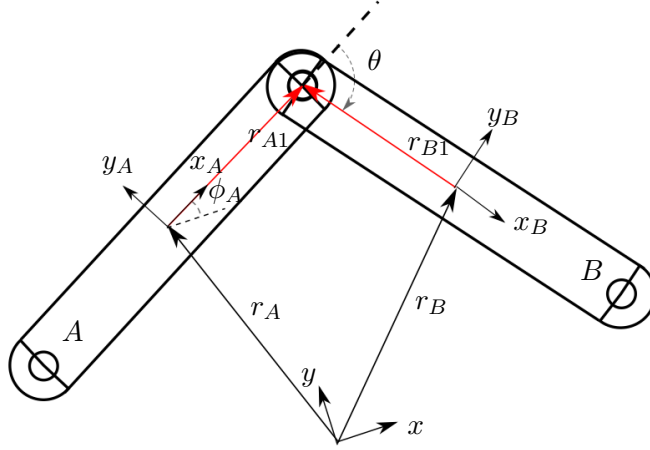


FIGURE 3.1 – Schéma d'un système plan flottant à deux corps et une liaison.

Il convient d'abord d'exprimer les positions de la liaison par rapport au centre de masse de chaque membrure dans le référentiel global inertiel :

$$\mathbf{r}_{A,1} = \mathbf{Q}_A \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{r}_{B,1} = \mathbf{Q}_A {}^A\mathbf{Q}_B \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

où $\mathbf{Q}_A = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\psi)$, la matrice de rotation de la membrure A par rapport au repère global et ${}^A\mathbf{Q}_B = -\mathbf{R}_z(\alpha)$, la matrice de rotation du repère de la membrure B à celui de la membrure A exprimée dans ce dernier et évoluant avec la position angulaire de l'actionneur θ dans l'axe de rotation $\mathbf{e}_1 = [0, 0, -1]^T$, tel qu'illustré à la figure 3.1.

À partir de ces définitions et de l'équation 3.1, la position du centre de masse de chaque corps par rapport au centre de masse global, notées respectivement \mathbf{r}_A et \mathbf{r}_B , peut être dérivée :

$$\mathbf{r}_A = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \mathbf{r}_{AB} \text{ et } \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} \quad (3.10)$$

où

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1} \quad (3.11)$$

Ensuite la vitesse du centre de masse du corps A est obtenue de la relation 3.7 :

$$\mathbf{v}_A = -\frac{m_B}{m_T} \left[\boldsymbol{\omega}_A \times (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1}) - \dot{\theta} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1} \right] . \quad (3.12)$$

La relation de la conservation du moment angulaire, équation 3.8, pour deux membrures et une seule articulation, donne alors :

$$(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B)\boldsymbol{\omega}_A + \mathbf{I}_B\dot{\theta}\mathbf{e}_1 + \left(\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}\right) \mathbf{r}_{AB} \times [\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AB} - \dot{\theta}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1}] = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{Q}_A {}^A \mathbf{I}_A \mathbf{Q}_A^T \quad (3.14)$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{Q}_A {}^A \mathbf{Q}_B {}^B \mathbf{I}_B \mathbf{Q}_A^T \mathbf{Q}_B^T \quad (3.15)$$

où ${}^A \mathbf{I}_A$ est le tenseur d'inertie de la membrure A exprimé dans le référentiel de cette même membrure et de même pour le tenseur d'inertie de la membrure B, ${}^B \mathbf{I}_B$, le tenseur d'inertie exprimée dans son référentiel.

Le système peut être exprimé sous forme matricielle

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_A = \mathbf{b}\dot{\theta}, \quad (3.16)$$

Pendant l'équation 3.13 présente $\boldsymbol{\omega}_A$ au cœur d'un double produit vectoriel. Celui-ci doit être décomposé selon :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AB}) &= (\mathbf{r}_{AB}^T \mathbf{r}_{AB})\boldsymbol{\omega}_A - (\boldsymbol{\omega}_A^T \mathbf{r}_{AB})\mathbf{r}_{AB} \\ &= (\mathbf{r}_{AB}^T \mathbf{r}_{AB} \mathbf{1} - \mathbf{r}_{AB} \mathbf{r}_{AB}^T)\boldsymbol{\omega}_A \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \left(\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}\right) (\mathbf{r}_{AB}^T \mathbf{r}_{AB} \mathbf{1} - \mathbf{r}_{AB} \mathbf{r}_{AB}^T) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{I}_B \mathbf{e}_1 + \left(\frac{m_a m_b}{m_a + m_b}\right) [(\mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1}))] \quad (3.18)$$

où $\mathbf{1}$ est une matrice identité de dimension 3 par 3.

Validation

Afin de valider les équations, des simulations comparant un mécanisme simple à deux corps et une liaison rotoïde ont été réalisées avec des propriétés géométriques identiques dans l'environnement *MATLAB* (équations) et *Simscape Multibody* (modèle). Les résultats présentés à la figure 3.2 montrent que le comportement est correctement représenté. Pour cette comparaison les membrures sont identiques, d'une longueur de 88 mm et ayant des matrices d'inertie diagonales égales :

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} \text{kgmm}^2, \quad (3.19)$$

Le mouvement du mécanisme est limité au plan et la masse des membrures est $m_A = m_B = 0,1$ kg. La consigne de l'actionneur à l'articulation est une trajectoire polynomide de degré 5 dont

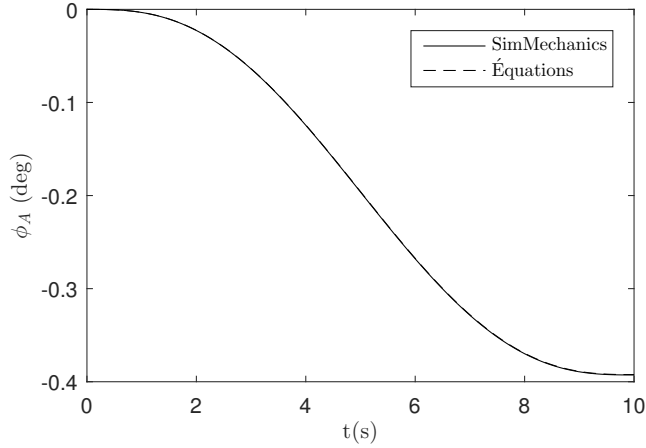


FIGURE 3.2 – Comparaison entre un modèle *Simscape Multibody* à deux corps limité au plan et le résultat de l'équation 3.16 pour un mouvement à l'articulation de palier doux.

les deux dérivées sont nulles au début et à la fin et qui exécute un saut de $\pi/4$ en 10 secondes, c'est-à-dire un palier doux.

Cette première comparaison montre bien la correspondance des résultats et donc la justesse des équations présentées. Toutefois, il est possible de libérer ce mécanisme du mouvement plan pour tenter de produire des rotations générales qui ne sont plus contraintes à un plan. Pour obtenir ce type d'effets, les matrices d'inerties doivent être modifiées pour inclure des termes non-diagonaux. Afin de comparer avec la modélisation comme à la figure 3.2, les angles d'Euler sont nécessaires. Ils sont obtenus en intégrant leur dérivée dont la relation est directe avec ω_A :

$$\omega_A = \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (3.20)$$

où $\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ sont les dérivées des angles d'Euler et $\mathbf{S} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{R}_x \mathbf{e}_y \ \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{e}_z]$ la matrice de passage.

Des matrices sont volontairement non diagonales afin de permettre l'orientation du mécanisme hors du plan, même si son actionneur est perpendiculaire au plan. Les inerties I_{xz} et I_{yz} produisent respectivement un effet du mouvement autour de l'axe z de l'actionneur sur les orientations relatives aux axes x et y . Toutefois, par observation de l'équation 3.16, il est clair que le contrôle de la vitesse de l'articulation $\dot{\theta}$ ne permet pas de contrôler l'orientation ω_A (mais seulement son module). En effet, le membre de droite de l'équation 3.16 est un vecteur dont la direction ne peut être modifiée par la variation de $\dot{\theta}$. Ainsi l'inversion de la matrice \mathbf{A} produira un vecteur ω_A dont la direction est déterminée pour un vecteur \mathbf{b} donné. Afin de contrôler l'orientation d'un des corps, il faut donc avoir au moins deux articulations.

3.1.2 Dérivation pour trois corps

Tel que mentionné à la section précédente, le contrôle de l'orientation globale d'un système articulé nécessite plusieurs articulations dont les axes ne sont pas parallèles entre eux. Pour tester un cas plus général (mécanisme non plan), celui de deux articulations non parallèles et trois membrures est dérivé. L'équation 3.7 devient ainsi :

$$\mathbf{v}_A = -\frac{m_B + m_C}{m_T} \left[\boldsymbol{\omega}_A \times (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1}) - \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1} \right] - \frac{m_C}{m_T} \left[\boldsymbol{\omega}_A \times (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) - \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{C,2} \right] = \mathbf{0} . \quad (3.21)$$

où A, B et C désignent chacun des trois corps et où \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont les vecteurs unitaires associés aux axes des articulations. De la même manière, l'équation 3.8 devient :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) \boldsymbol{\omega}_A + (\mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{I}_C \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + (\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) \times \mathbf{v}_A \\ & + (\mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) \times \left[\boldsymbol{\omega}_A \times (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1}) - \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1} \right] \\ & + \mathbf{r}_C m_C \times \left[\boldsymbol{\omega}_A \times (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) - \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{C,2} \right] = \mathbf{0} , \quad (3.22) \end{aligned}$$

De la même manière que pour le système à deux membrures, la vitesse \mathbf{v}_A peut être substituée dans l'équation précédente de sorte que celle-ci ne contienne en terme d'inconnues que la vitesse angulaire du corps A et comme entrée les vitesses des articulations. L'équation 3.22 peut alors être réécrite sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_A = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C - \frac{m_B + m_C}{m_T} [(\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C)^T (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1}) \mathbf{1} + \\ & (\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1})^T] - \frac{m_C}{m_T} [(\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C)^T (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) \mathbf{1} + \\ & (\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2})^T] + \\ & (\mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C)^T (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1}) \mathbf{1} + (\mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) (\mathbf{r}_{A,1} - \mathbf{r}_{B,1})^T \\ & + \mathbf{r}_C^T m_C (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) \mathbf{1} + \mathbf{r}_C m_C (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2})^T \quad (3.24) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 = & (\mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) \times \left[\frac{m_B + m_C}{m_T} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1} - \frac{m_C}{m_T} \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2}) \right] \\ & - (\mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{B,1}) + \mathbf{r}_C m_C \times [\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{r}_{B,2} - \mathbf{r}_{C,2})] \quad (3.26) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{I}_C \mathbf{e}_2 + (\mathbf{r}_A m_A + \mathbf{r}_B m_B + \mathbf{r}_C m_C) \times \left(\frac{m_C}{m_T} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{C,2} \right) - \mathbf{r}_C m_C \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{C,2}). \quad (3.27)$$

Puisque la matrice \mathbf{B} est de dimension 3×2 , son rang maximum est de 2. Ainsi, si l'on prescrit une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_A$ il est en général impossible de trouver un vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ qui va produire la vitesse angulaire prescrite, à moins de se trouver dans le cas particulier où le vecteur $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_A$ est dans l'espace colonne de la matrice \mathbf{B} . On peut toutefois calculer un vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ qui approxime le mieux possible la vitesse angulaire prescrite $\boldsymbol{\omega}_A$ en utilisant la solution aux moindres carrés de l'équation 3.23, c'est-à-dire :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}^I \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_A \quad (3.28)$$

où

$$\mathbf{B}^I = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (3.29)$$

Validation

En ajoutant une autre membrure à la chaîne via une seconde liaison rotoïde dont l'axe n'est pas parallèle au premier, le mécanisme obtenu a un bien meilleur potentiel de contrôle de son orientation dans l'espace, tel que visible à la figure 3.3. Cette simulation utilise une trajectoire désirée en palier doux jusqu'à $\pi/4$ sur le premier angle d'Euler alors que les deux autres angles restent nuls. Les résultats de la figure 3.3-a ont été obtenus avec trois membrures ayant des propriétés géométriques identiques :

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} 21 & 20 & 20 \\ 20 & 21 & 20 \\ 20 & 20 & 21 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2, \quad (3.30)$$

$l_A = l_B = l_C = 0,1$ m et $m_A = m_B = m_C = 0,1$ kg. La raciné carré de la moyenne des carrés des erreurs (MSE) pour cette trajectoire est 0,05 rad. Les propriétés physiques des membrures ont un grand impact sur les performances de ré-orientation du système. Par exemple, en utilisant plutôt des matrices d'inertie ayant de grands produits d'inertie comme suit :

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2, \quad \mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 41 \\ 0 & 21 & 41 \\ 41 & 41 & 21 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2. \quad (3.31)$$

et en conservant toujours les mêmes masses et longueurs on obtient une trajectoire qui ne parvient pas à approximer aussi bien la consigne, tel que montré à la figure 3.3-b. Celle-ci a une MSE de 0,25 rad.

En extrapolant la différence entre les figures 3.3-a et 3.3-b, il est possible de conclure que les propriétés géométriques et inertielles du mécanisme peuvent être sélectionnées de sorte que l'on obtienne un meilleur contrôle. Il est donc possible en théorie d'utiliser ces résultats afin d'optimiser le design des membrures pour satisfaire des besoins spécifiques de ré-orientation.

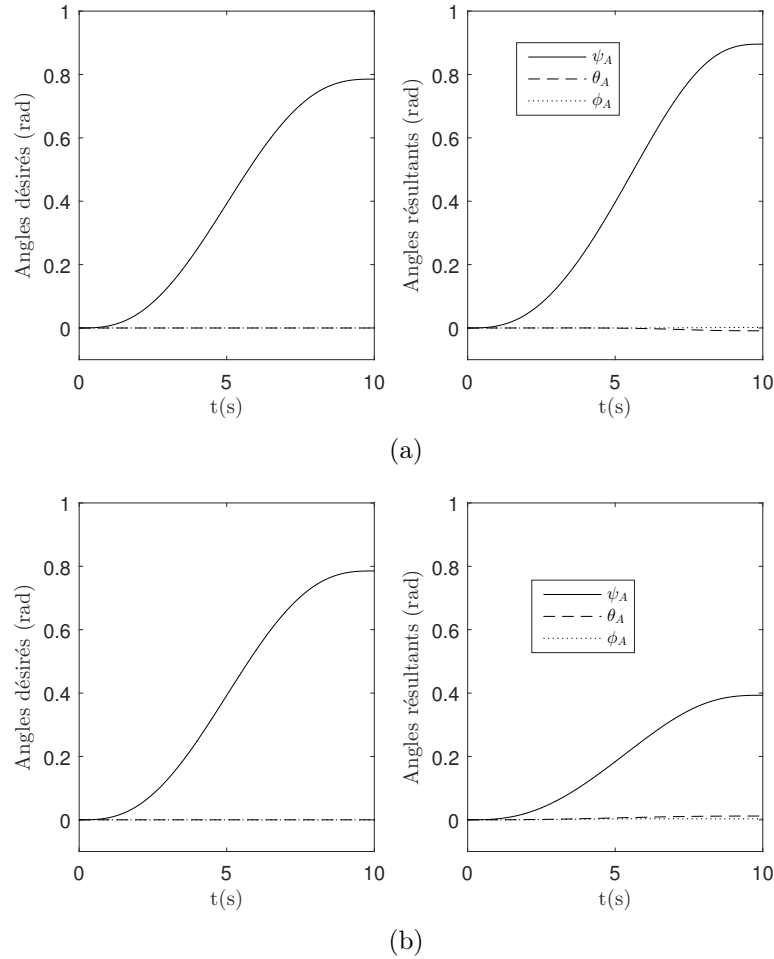


FIGURE 3.3 – (a) Résultats d’une simulation avec trois membrures et deux articulations avec une géométrie plus performante des membrures (3.30), (b) Résultat d’une simulation pour trois membrures et deux articulations pour une géométrie des membrures moins performante (3.31)

3.1.3 Effets du déploiement du mécanisme triangulaire

Une face triangulaire complète telle que décrite au chapitre 2, avec trois modules par patte et une patte à chaque sommet, est simulée grâce aux équations précédentes. L’avantage de ce mécanisme est de pouvoir se déployer de manière asymétrique. Lorsque l’actionneur central du triangle est retiré, chacune des pattes redevient indépendante pour permettre leur actionnement en séquence, tel qu’illustré à la figure 3.4. Cette séquence est donc représentée par trois angles, un par patte à déployer, à la figure 3.5-a et produit le changement d’orientation visible à la figure 3.5-b de 0,08 rad selon l’angle d’Euler ψ . Ces résultats ont été confirmés par simulation dans le module *Motion Analysis* de *Solidworks*.

Le changement d’orientation résultant à la succession de commandes asymétriques de la figure 3.5-a, est montré à la figure 3.5-b. Pour cette simulation, chaque patte est actionnée

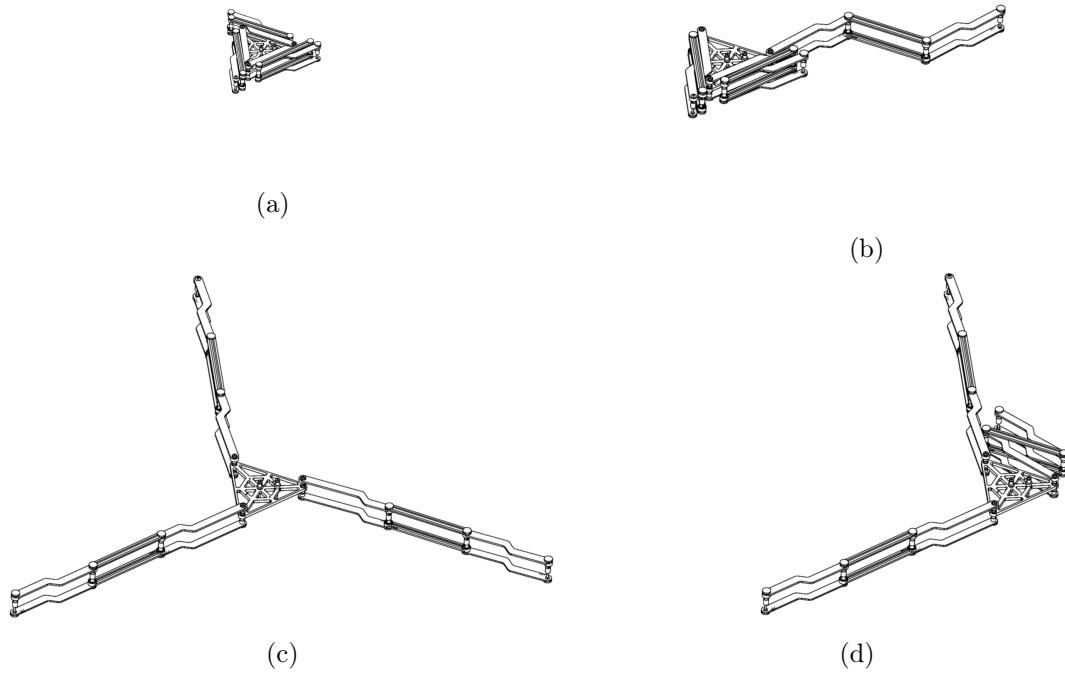


FIGURE 3.4 – Exemple d'étapes de simulation du mécanisme de réorientation : de l'état de départ contracté (a), une patte seule est déployée (b) puis les deux pattes restantes simultanément (c) ; l'inverse pour retourner à la configuration rétractée (a), commençant par le repli d'une patte seule (d).

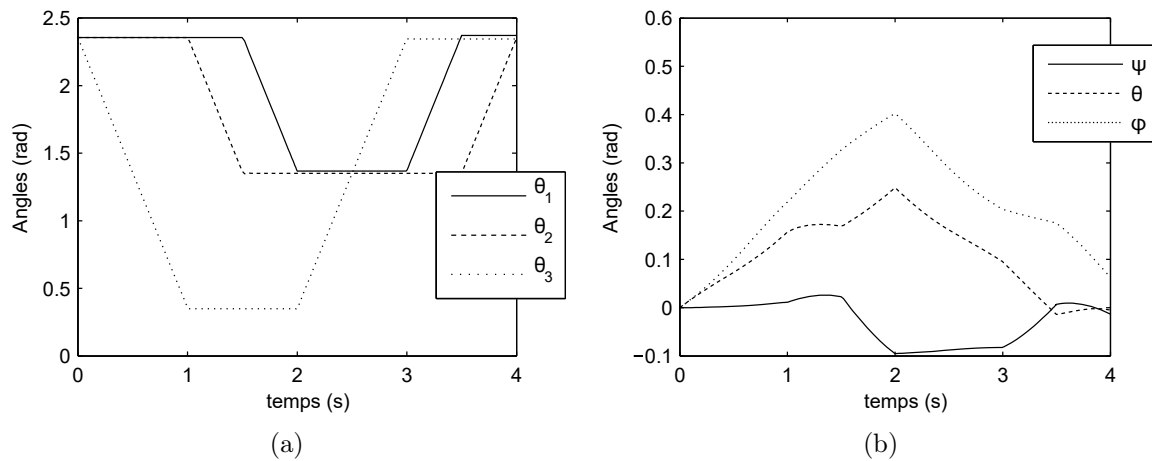


FIGURE 3.5 – Simulation de déploiement en séquence : (a) Commandes aux articulations pour un mécanisme à 9 membrures et 9 articulations rotoïdes regroupées en trois pattes (unité triangulaire), (b) Trajectoire résultante sur l'orientation selon les angles d'Euler.

séparément et il est donc possible de contrôler l'orientation finale du mécanisme en passant par des stades ayant des inerties différentes. Les étapes de déploiement asymétriques sont illustrées à la figure 3.4 : de la disposition rétractée (a), la première patte est complètement déployée alors que les deux autres restent rétractées (b), puis ces deux dernières se déploient simultanément (c). Une patte est alors rétractée seule (d) avant de permettre le retrait des deux suivantes pour reprendre la configuration de départ. Le résultat est un mécanisme dont la configuration est la même qu'à l'origine, mais dont l'orientation a changé. L'effet en séquence, ou pompage, peut être répété pour atteindre la variation de l'angle désirée.

Si le potentiel de ré-orientation est maintenant démontré pour une unité seule se déployant de manière asymétrique, il convient de statuer à ce point que cette approche est irréaliste dans un assemblage surfacique de plusieurs unités. Celles-ci seront alors solidaires et conçues pour se déployer symétriquement avec un seul degré d'actionnement. La suite de ce chapitre s'attarde donc sur d'autres mécanismes de ré-orientation intégrables à la surface déployable.

3.1.4 Masses en mouvement linéaire

Afin de contrôler l'orientation d'une surface déployée de grande dimension, une stratégie permettant l'utilisation d'énergie renouvelable électrique doit être conçue. Considérant que le déploiement de la surface est produit par un actionneur central contrôlant, tel que les mécanismes du chapitre précédent l'ont démontré, un mouvement uniforme et simultané dans toutes les unités triangulaires de la surface, par la suite un actionnement spécialisé peut s'assurer uniquement de contrôler l'orientation de la surface pendant sa mission en orbite. Le déploiement de grandes surfaces engendre nécessairement des éléments de structure éloignés du centre de masse. Ces éléments peuvent être mis à profit afin de créer des moments de grande envergure par rapport au centre de masse sans devoir recourir à des masses lourdes. La technique proposée pour générer ces moments utilise des masses ponctuelles en translation sur la périphérie. Cette section explore les propriétés et le potentiel de ce mécanisme en l'appliquant d'abord à des géométries simples (carré, cube).

Carré avec 4 masses

Pour commencer, une géométrie plane et symétrique est étudiée : celle d'un carré ayant une masse en mouvement sur chaque arête, tel qu'illustré à la figure 3.6. Il s'agit d'un système à un seul degré de liberté contrôlé, considérant que la position du centre de masse ne peut être contrôlée et que, malgré que la position du cadre soit contrôlable, seule son orientation est visée par ce contrôle. Puisque les quatre masses peuvent créer des moments influençant l'orientation, c'est un système redondant.

La position de chacune des quatre masses m_i du carré dans le référentiel inertiel est définie comme :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{Ci}, \text{ pour } i = 1 \dots 4 \quad (3.32)$$

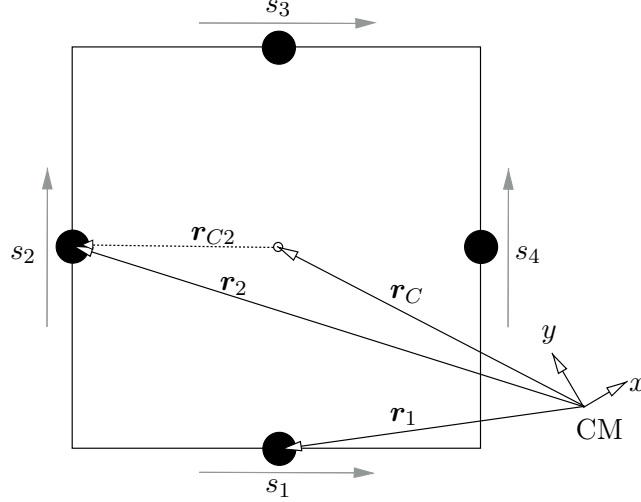


FIGURE 3.6 – Carré avec une masse mobile ponctuelle sur chaque arête de longueur $2L$ actionnée par une liaison prismatique.

où r_C est la position du centroïde par rapport au centre de masse (position de l'origine du référentiel inertiel) et les r_{Ci} sont définis tels que :

$$\mathbf{r}_{C1} = \mathbf{e}_1 s_1 - L\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_{C2} = \mathbf{e}_2 s_2 - L\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_{C3} = \mathbf{e}_1 s_3 + L\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_{C4} = \mathbf{e}_2 s_4 + L\mathbf{e}_1 \quad (3.33)$$

avec les vecteurs de direction des actionneurs prismatiques

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}_z(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{e}_2 = \mathbf{R}_z(\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

s_i la coordonnée de mouvement de la masse i (entrées du système), L la longueur du demi côté du cadre et $\mathbf{R}_z(\alpha)$ la matrice de rotation autour de l'axe z du système limité au plan. Les équations de vitesse des masses sont obtenues en prenant la dérivée de l'équation 3.32 par rapport au temps dans laquelle ont substitué d'abord l'équation 3.33 :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_1 \dot{s}_1 + \mathbf{e}_2 s_1 \dot{\alpha} + L\mathbf{e}_1 \dot{\alpha} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_2 \dot{s}_2 - \mathbf{e}_1 s_2 \dot{\alpha} - L\mathbf{e}_2 \dot{\alpha} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_1 \dot{s}_3 + \mathbf{e}_2 s_3 \dot{\alpha} - L\mathbf{e}_1 \dot{\alpha} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_2 \dot{s}_4 - \mathbf{e}_1 s_4 \dot{\alpha} + L\mathbf{e}_2 \dot{\alpha} \quad (3.38)$$

où \mathbf{v}_C est la vitesse du centre de masse du cadre seul. Le centre de masse est positionné à l'origine, c'est à dire que

$$m_C \mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad (3.39)$$

où m_C est la masse du cadre et la somme des quantités de mouvement est nulle (équation 3.2), ce qui permet de construire la relation suivante :

$$m_T \mathbf{v}_C + [-(m_2 s_2 - m_1 L + m_3 L + m_4 s_4) \mathbf{e}_1 + (m_1 s_1 - m_2 L + m_3 s_3 + m_4 L) \mathbf{e}_2] \dot{\alpha} = -m_1 \mathbf{e}_1 \dot{s}_1 - m_2 \mathbf{e}_2 \dot{s}_2 - m_3 \mathbf{e}_1 \dot{s}_3 - m_4 \mathbf{e}_2 \dot{s}_4, \quad (3.40)$$

avec $m_T = m_C + \sum_{i=1}^4 m_i$. Sachant qu'aucune force externe n'intervient sur le mécanisme, il y a aussi conservation de la quantité de mouvement angulaire (équation 3.3) :

$$\sum_{i=0}^4 I_i^z \omega_0^z - \sum_{i=0}^4 m_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{E} \mathbf{v}_i = 0, \quad (3.41)$$

avec \mathbf{E} définie à l'équation 2.10. L'inertie du cadre au centre de masse est :

$$I_0^z = I_{fCV}^z + m_C \mathbf{r}_C^T \mathbf{r}_C, \quad (3.42)$$

où I_{fCV} est l'inertie du cadre par rapport au centroïde. L'inertie totale du système avec les masses est donc :

$$\begin{aligned} I_T^z &= I_{fCV}^z + m_C \mathbf{r}_C^T \mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \\ &= I_{fCV}^z + m_T \mathbf{r}_C^T \mathbf{r}_C + m_1 (2\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_1 s_1 - 2L\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_2 + s_1^2 + L^2) \\ &\quad + m_2 (2\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_2 s_2 - 2L\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_1 + s_2^2 + L^2) \\ &\quad + m_3 (2\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_1 s_3 + 2L\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_2 + s_3^2 + L^2) \\ &\quad + m_4 (2\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_2 s_4 + 2L\mathbf{r}_C^T \mathbf{e}_1 + s_4^2 + L^2) \end{aligned}$$

En posant que toutes les masses sont identiques, $m_i = m$, l'équation 3.39 permet d'obtenir l'expression de \mathbf{r}_C :

$$\mathbf{r}_C = -\frac{m}{m_T} (s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2 + s_3 \mathbf{e}_1 + s_4 \mathbf{e}_2) \quad (3.43)$$

et l'expression de l'inertie totale est simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} I_T^z &= I_{fCV}^z + m_T \mathbf{r}_C^T \mathbf{r}_C + m(4L^2 + s_1^2 + s_3^2 + s_2^2 + s_4^2) + 2m\mathbf{r}_C^T (\mathbf{e}_1 s_1 + \mathbf{e}_2 s_2 + \mathbf{e}_1 s_3 + \mathbf{e}_2 s_4) \\ &= I_{fCV}^z + m(4L^2 + s_1^2 + s_3^2 + s_2^2 + s_4^2) - \frac{m^2}{m_T} (s_1^2 + 2s_1 s_3 + s_3^2 + s_2^2 + 2s_2 s_4 + s_4^2), \end{aligned}$$

et l'équation 3.41 devient :

$$\begin{aligned} m_C \mathbf{r}_C \mathbf{E} \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^4 (m_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{E} \mathbf{v}_i) &= \\ &+ \left[\frac{m^2}{m_T} (2s_1 s_3 + s_1^2 + s_3^2 + 2s_2 s_4 + s_2^2 + s_4^2) - m(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + 4L^2) \right] \dot{\alpha} \\ &\quad + \left[-\frac{m^2}{m_T} (s_2 + s_4) - mL \right] \dot{s}_1 + \left[\frac{m^2}{m_T} (s_1 + s_3) + mL \right] \dot{s}_2 \\ &\quad + \left[-\frac{m^2}{m_T} (s_2 + s_4) + mL \right] \dot{s}_3 + \left[\frac{m^2}{m_T} (s_1 + s_3) - mL \right] \dot{s}_4. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Le système d'équations définissant le mécanisme est formé de cette dernière équation avec l'équation 3.40, qui sous forme matricielle donne :

$$\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{s}} \quad (3.45)$$

avec

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_T \mathbf{1} & -m(s_2 + s_4)\mathbf{e}_1 + m(s_1 + s_3)\mathbf{e}_2 \\ 0 & I_{fCV}^z - \frac{4m^2}{m_T}(s_1 s_3 + s_2 s_4) + 2m\left(1 - \frac{m}{m_T}\right)(s_1^2 + s_3^2 + s_2^2 + s_4^2) + 8mL^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

où $\mathbf{1}$ est une matrice identité de dimension 2×2 , et

$$\mathbf{B} = m \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 \\ -L - \frac{m}{m_T}(s_2 + s_4) & L + \frac{m}{m_T}(s_1 + s_3) & L - \frac{m}{m_T}(s_2 + s_4) & -L + \frac{m}{m_T}(s_1 + s_3) \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

À partir du système d'équation ci-dessus, il est possible de simuler le mécanisme pour en isoler certaines propriétés et en analyser les performances. Les masses en mouvement sont toutes identiques, $m_i = 1kg$ et l'inertie du cadre fait de tiges minces est :

$$I_{fCV} = m_C(2L)^2/12 + m_C(L/2)^2 \quad (3.49)$$

avec $m_C = 10kg$ et $L = 1m$. On impose un mouvement des masses périodique générique tel que :

$$s_i = A_i \sin(W_i t + \phi_i), \quad (3.50)$$

où les A_i sont limités entre 0 et 1 m et les W_i entre 0 et 2 rad/s afin de respecter des limites applicables à certains actionneurs et où les ϕ_i sont limités entre 0 et 2π puisqu'une différence de phase au-delà ne serait qu'un multiple. Une routine d'optimisation de ces coefficients pour maximiser le changement de l'orientation du cadre, $\dot{\alpha}$, sur une durée de 10 s est conduite avec l'algorithme CMA-ES (voir la justification et la description de l'algorithme section 2.3.1). Le résultat obtenu est présenté à la figure 3.7 et utilise le mouvement des masses suivant :

$$s_1 = \sin(2t + 3\pi/2), \quad s_2 = \sin(2t), \quad s_3 = -\sin(2t + \pi/2), \quad s_4 = \sin(2t) \quad (3.51)$$

Certains aspects de ce résultat sont intuitifs. D'abord il est souhaitable de maximiser l'amplitude des oscillations pour maximiser le déplacement, puis de maximiser la vitesse de déplacement, c'est-à-dire la fréquence des mouvements sinusoïdaux, pour permettre un plus grand nombre d'oscillations dans un temps de simulation donné. Finalement, les différences de phase, $(\phi_{i-1} - \phi_i)$, indiquent un décalage entre les masses verticales et horizontales. Le mouvement est en fait une forme de pompage, les masses verticales se déplacent vers les sommets ce qui augmente l'inertie du mécanisme, puis les masses horizontales se déplacent à leur tour, mais l'inertie du mécanisme ayant augmentée, ce mouvement n'a que peu d'effet. Le mouvement reprend ensuite du début et cumule ces petits changements d'orientation à chaque cycle. Afin

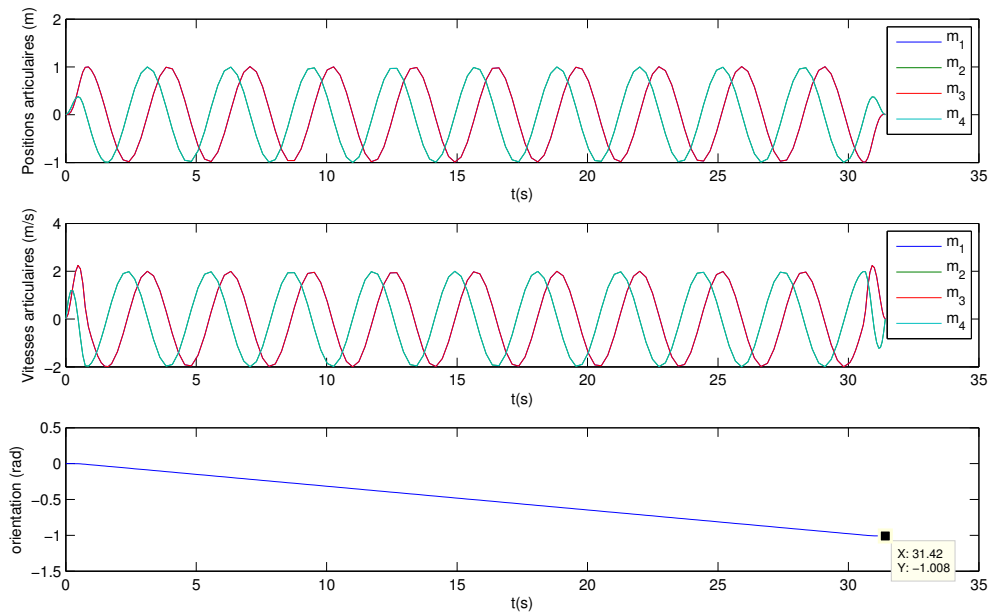


FIGURE 3.7 – Oscillations des masses pour un changement d’orientation maximal. Le mouvement de la masse 3 est superposé à celui de la masse 1 et de même pour celui de la masse 4 superposé à 2. Les première et seconde dérivées de la trajectoire des masses sont nulles au début et à la fin de la simulation.

de s’assurer que ce type de mouvement représente la solution optimale, les amplitudes A_i et les fréquences w_i sont fixées pour n’étudier que l’influence des phases ϕ_i . La figure 3.8 montre l’influence des phases des masses 2, 3 et 4 en fixant celle de la masse 1 à zéro. Les maximums apparaissent pour des phases identiques des masses 2 et 4, mais déphasées de $\pi/2$ ou $3\pi/2$ par rapport aux masses 1 et 3. Il semble qu’un ensemble de phases optimales soit :

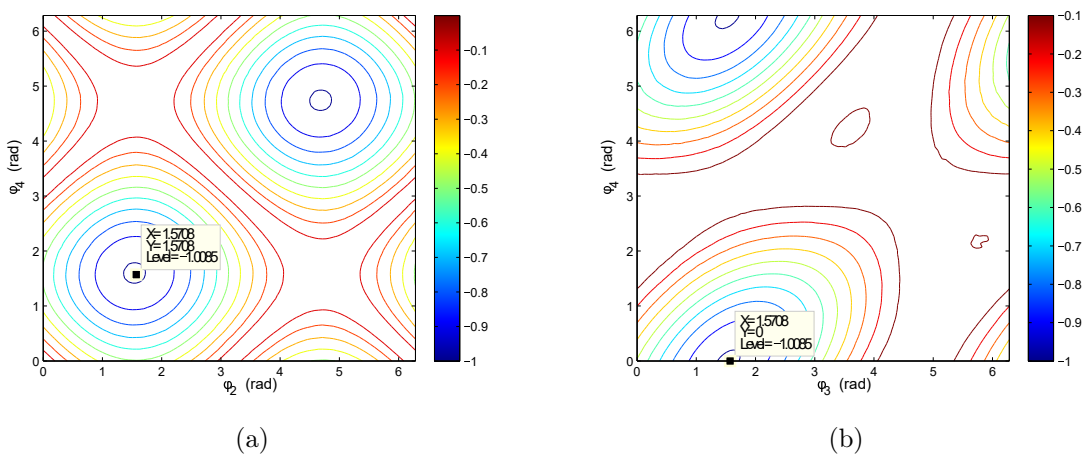


FIGURE 3.8 – Amplitude du changement d’orientation du cadre (rad) en fonction des phases pour des amplitudes des fréquences unitaires¹ : (a) Masse 2 versus 4, (b) Masse 3 versus 4.

$$\phi_2 - \phi_1 = \pi/2, \phi_4 - \phi_3 = \pi/2. \quad (3.52)$$

En utilisant ces phases et en posant la fréquence du mouvement de la masse 1 à 2 rad/s (maximum de l'optimisation précédente), l'influence des fréquences des autres masses est présentée à la figure 3.9. Les courbes de niveaux montrent clairement que les fréquences ont avantage à être maximales, cependant des performances comparables peuvent être obtenues avec, au minimum, des fréquences égales pour les masses perpendiculaires.

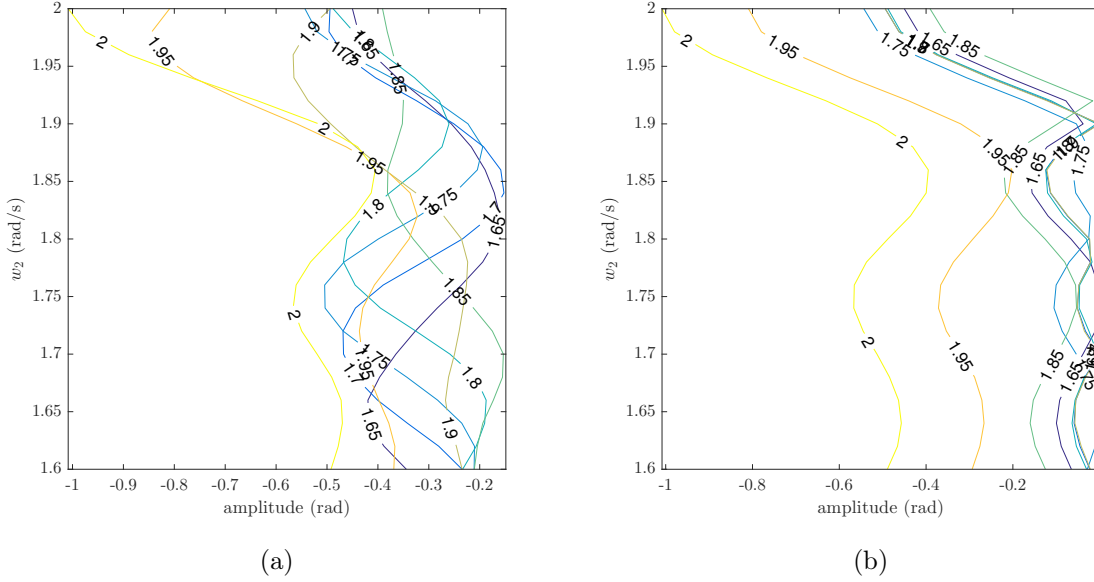


FIGURE 3.9 – Amplitude du changement d'orientation du cadre (rad) en fonction des fréquences avec des amplitudes unitaires et les phases optimales de l'équation 3.52 : (a) Masse 2 versus 3, (b) Masse 2 versus 4.

Ces études de l'influence des paramètres de trajectoire des masses actionnées ont montré que la solution de l'optimisation CMA-ES est en effet la solution optimale pour ce type de mouvement périodique des masses.

Fort de cette compréhension du système, il est possible d'étendre le mécanisme à un contrôle dans l'espace tridimensionnel. Pour ce faire, le carré est remplacé par le cube en conservant une masse sur chaque arête tel que montré à la figure 3.10. Le système est donc toujours redondant puisqu'il contient douze actionneurs pour trois degrés de liberté contrôlés (la position du cadre est laissée libre). Les vecteurs position des masses sont dorénavant :

$$\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{Q}_C \mathbf{f}_i \quad (3.53)$$

avec

1. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

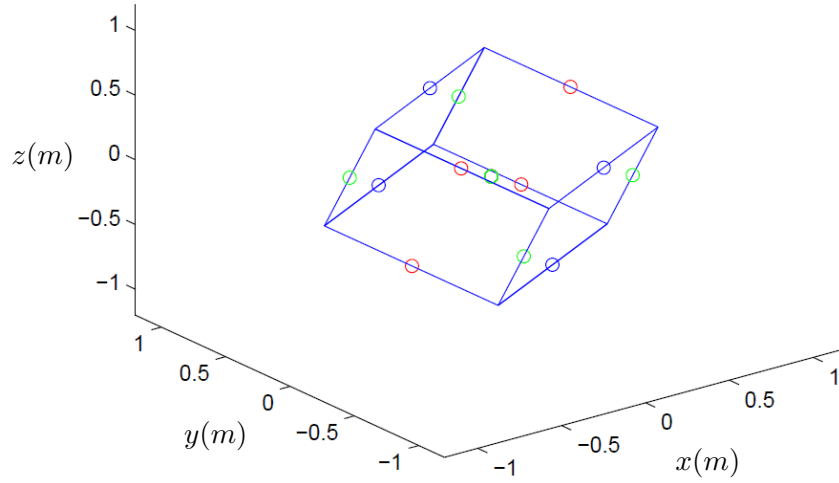


FIGURE 3.10 – Géométrie cubique avec une masse ponctuelle sur chaque arête.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= [0, \frac{L}{2}, -\frac{L}{2}]^T, \mathbf{f}_2 = [-\frac{L}{2}, 0, -\frac{L}{2}]^T, \mathbf{f}_3 = [0, -\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}]^T, \mathbf{f}_4 = [\frac{L}{2}, 0, -\frac{L}{2}]^T, \\
\mathbf{f}_5 &= [\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0]^T, \mathbf{f}_6 = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0]^T, \mathbf{f}_7 = [-\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}, 0]^T, \mathbf{f}_8 = [\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}, 0]^T, \\
\mathbf{f}_9 &= [\frac{L}{2}, 0, \frac{L}{2}]^T, \mathbf{f}_{10} = [0, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^T, \mathbf{f}_{11} = [-\frac{L}{2}, 0, \frac{L}{2}]^T, \mathbf{f}_{12} = [0, -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^T
\end{aligned} \quad (3.54)$$

et leur dérivés s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{r}}_{Ci} = \dot{s}_i \mathbf{e}_i \quad (3.55)$$

où les \mathbf{e}_i sont les directions des articulations prismatiques dans le repère du cadre. La vitesse de chaque masse est définie telle que :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{Q}_C \mathbf{e}_i \dot{s}_i + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{Q}_C \mathbf{r}_{Ci} . \quad (3.56)$$

L'équation 3.2 de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$-m_T \mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^{12} m_i \mathbf{Q}_C \mathbf{e}_i \dot{s}_i + \sum_{i=1}^{12} m_i \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{Q}_C \mathbf{r}_{Ci} \quad (3.57)$$

et l'équation 3.3 de conservation de la quantité de mouvement angulaire :

$$(\mathbf{Q}_C \mathbf{I}_C + \sum_{i=1}^{12} \mathbf{Q}_C \mathbf{I}_i) \boldsymbol{\omega}_C + \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^{12} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (3.58)$$

où $\mathbf{Q}_C = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi)$ est la matrice de rotation du cadre (Euler XY'Z'). Les inerties des masses sont calculées avec :

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} \frac{2m_i r_i^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m_i r_i^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m_i r_i^2}{5} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

où les r_i sont posés égaux à $\frac{L}{10}$, $2L$ étant la longueur de l'arête.

En regroupant ces relations, le système dynamique peut être encore une fois exprimé sous forme matricielle,

$$\mathbf{A}\omega_C = \mathbf{B}\dot{\mathbf{s}}. \quad (3.60)$$

où $\dot{\mathbf{s}} = \{\dot{s}_1 \dots \dot{s}_{12}\}^T$ correspond au vecteur de vitesse des actionneurs, \mathbf{A} est une matrice de dimension 6×3 et \mathbf{B} de dimensions 6×12 . Le principe de pompage mis en lumière à la section précédente est utilisé indépendamment autour de chaque axe pour influencer l'orientation du cube. Les résultats sont présentés à la figure 3.11. La relation est inversée de sorte que les

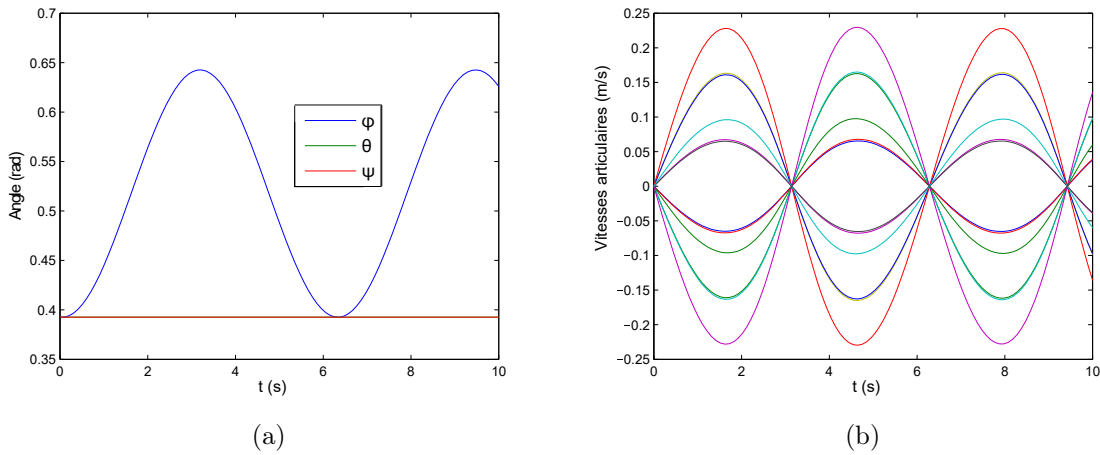


FIGURE 3.11 – Simulation de trajectoire atteignable : (a) consigne et résultats (superposés) et (b) trajectoires des masses.

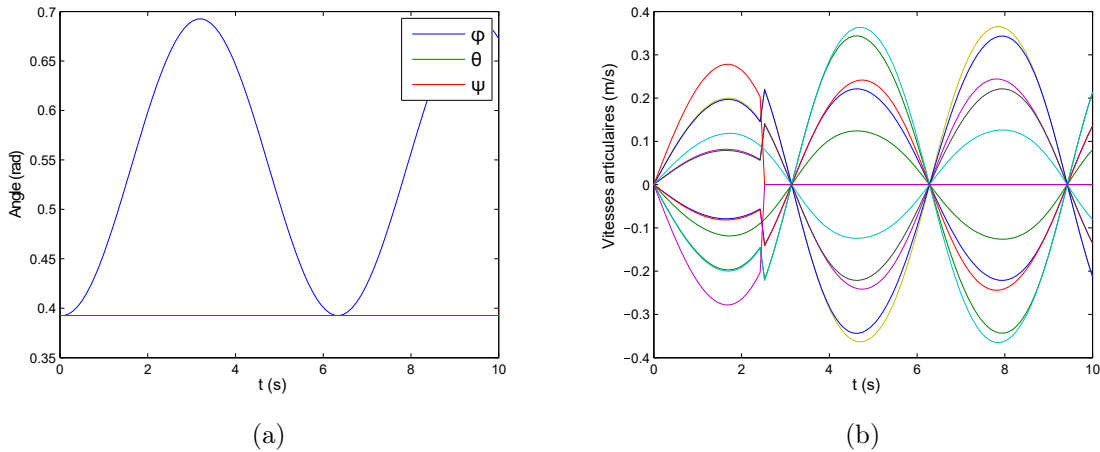


FIGURE 3.12 – Simulation de trajectoire atteignable avec certaines masses atteignant leur limite² : (a) consigne et résultats (superposés) et (b) trajectoires des masses dont certaines atteignent leur limite.

2. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

vitesse des articulations prismatiques puissent être obtenues pour une trajectoire donnée. Comme le système est redondant la solution minimisant la norme des vitesses articulaires est retenue :

$$\dot{s} = B^I A \omega_C \quad (3.61)$$

où

$$B^I = B^T (B B^T)^{-1} . \quad (3.62)$$

Toutefois, les articulations prismatiques sont limitées physiquement à un déplacement $\pm L$,

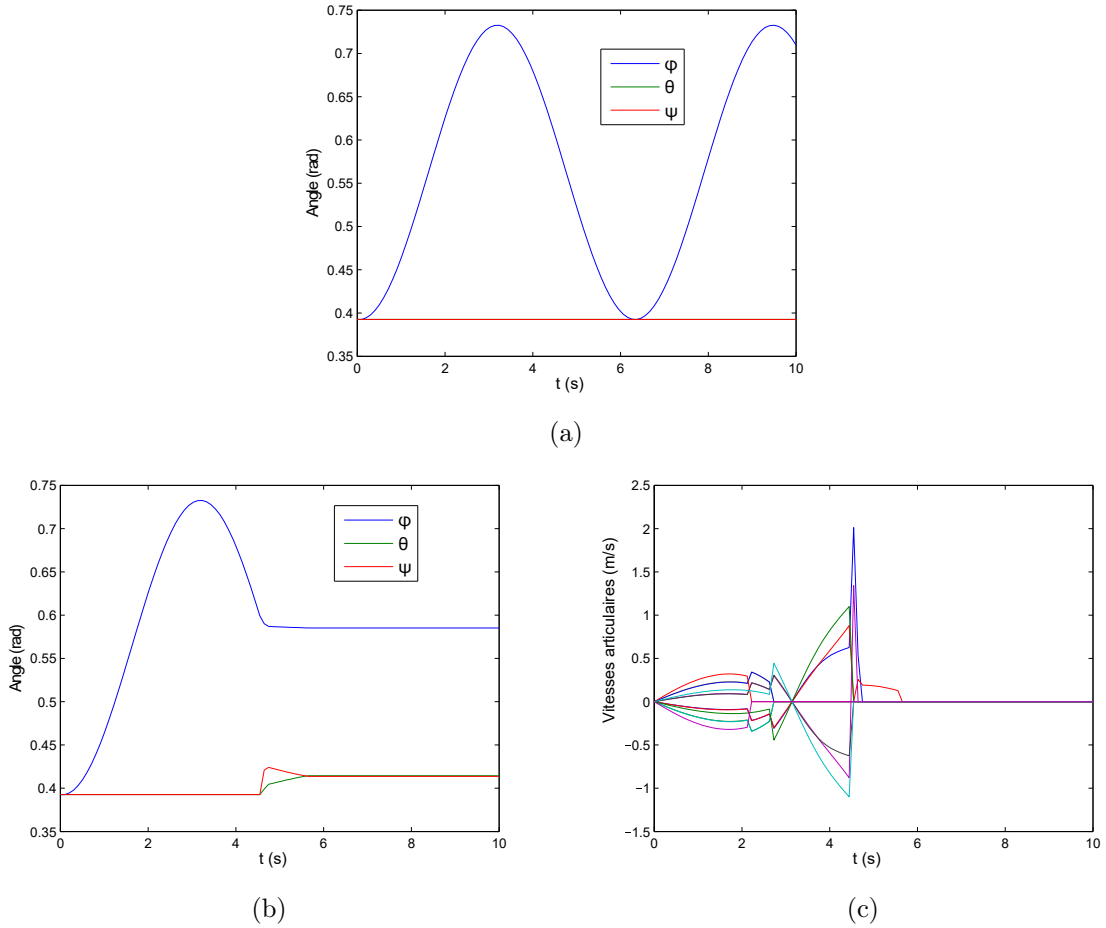


FIGURE 3.13 – Simulation de trajectoire non atteignable : (a) consigne, (b) résultats et (c) trajectoires des masses dont certaines atteignent leur limite.

la demi-longueur de l'arête du cube. Lorsqu'une masse atteint un maximum, elle est retirée du système d'équations et la solution est recalculée. La solution pour toutes les masses est recalculée à chaque pas et si la résultante retourne une masse dans une direction permise elle est réintégrée au système. Pour des masses identiques, $m_i = 1$ kg, et $2L = 1$ m, une trajectoire atteignable dont les masses n'atteignent pas les limites est montrée à la figure 3.11 alors qu'une trajectoire atteignant certaines limites physiques mais tout de même réalisable

est montrée à la figure 3.12. Finalement une trajectoire non atteignable avec ces paramètres physiques est montrée à la figure 3.13. Les figures 3.12-b et 3.13-c présentent des sauts dans les vitesses articulaires de certaines masses, qui se produisent lorsque que ces dernières atteignent la limite de leur actionneur prismatique. Évidemment, augmenter les masses et augmenter les dimensions du cube permettent d'atteindre des orientations de plus grande amplitude.

Carré avec une masse sur la diagonale

L'actionnement de masses sur la périphérie n'est peut-être pas optimal pour minimiser le poids embarqué d'un système de ré-orientation. Si l'on suppose qu'il est possible de positionner une masse sur une articulation prismatique traversant le mécanisme sans nuire à celui-ci, il est possible de simplifier le nombre d'actionneurs en remplaçant deux des masses de la périphérie par une seule positionnée sur la diagonale du mécanisme tel qu'illustré à la figure 3.14.

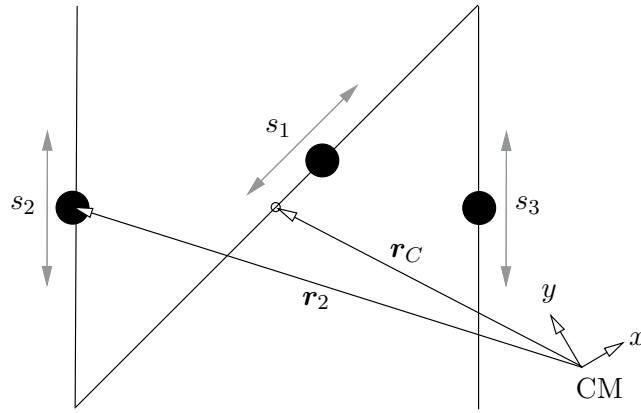


FIGURE 3.14 – Géométrie carrée d'arête $2L$ avec une masse actionnée sur sa diagonale.

Les expressions de la position des trois masses par rapport au centroïde sont maintenant :

$$\mathbf{r}_{01} = \mathbf{e}_D s_1, \mathbf{r}_{02} = \mathbf{e}_2 s_2 - L\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_{03} = \mathbf{e}_2 s_3 + L\mathbf{e}_1 \quad (3.63)$$

avec $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{R}_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_4 = \mathbf{R}_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{e}_D = \mathbf{R}_z \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Les relations de vitesses deviennent :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_D \dot{s}_1 + E\mathbf{e}_D s_1 \dot{\alpha} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_2 \dot{s}_2 - \mathbf{e}_1 s_2 \dot{\alpha} - L\mathbf{e}_2 \dot{\alpha} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_C + \mathbf{e}_2 \dot{s}_3 - \mathbf{e}_1 s_3 \dot{\alpha} + L\mathbf{e}_2 \dot{\alpha}, \quad (3.66)$$

où α est l'orientation du cadre. La relation de conservation de la quantité de mouvement, équation 3.2, devient :

$$m_T \mathbf{v}_C + [m_1 \mathbf{E} \mathbf{e}_D s_1 - m_2 s_2 + m_3 s_3] \mathbf{e}_1 \dot{\alpha} = -m_1 \mathbf{e}_D \dot{s}_1 - m_2 \mathbf{e}_2 \dot{s}_2 - m_3 \mathbf{e}_2 \dot{s}_3. \quad (3.67)$$

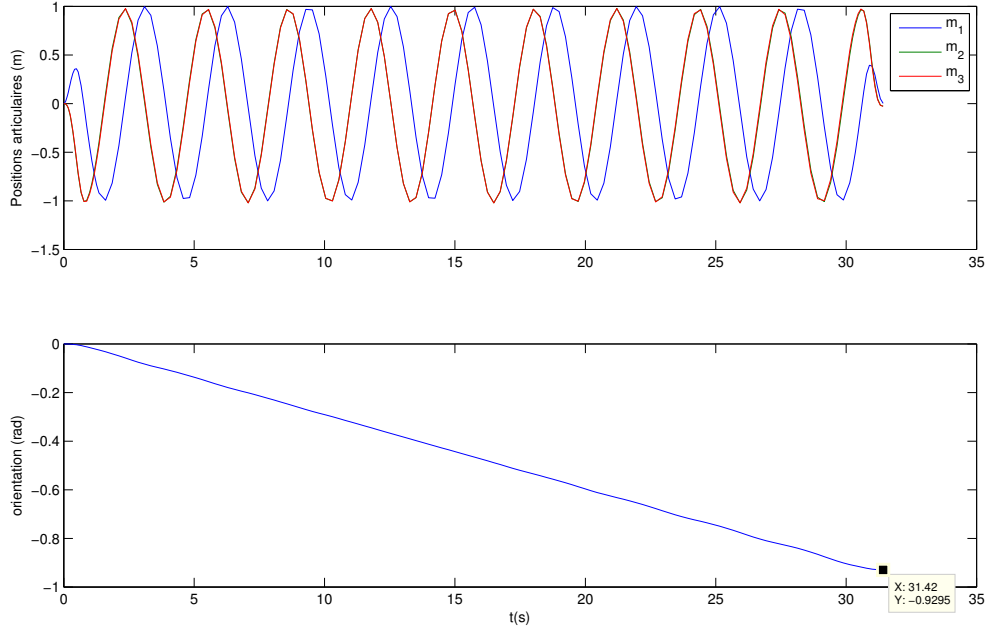


FIGURE 3.15 – Oscillations des masses pour un changement d’orientation maximal. Le mouvement de la masse 3 est superposé à celui de la masse 2. Les première et seconde dérivées de la trajectoire des masses sont nulles au début et à la fin de la simulation.

L’inertie totale du mécanisme est aussi légèrement différente :

$$I_T^z = I_{f_{CV}}^z + m_T \mathbf{r}_C^T \mathbf{r}_C + m_1^2 s_1^2 + m_2^2 s_2^2 + 2m_2 m_3 s_2 s_3 + m_3^2 s_3^2 + 2\mathbf{r}_C^T (m_1 \mathbf{e}_D s_1 + m_2 \mathbf{e}_2 s_2 + m_3 \mathbf{e}_2 s_3) \quad (3.68)$$

qui est simplifié en posant que $m_2 = m_3 = m$ pour donner :

$$I_T^z = I_{f_{CV}}^z + m_1 s_1^2 + m^2 (s_2^2 + 2L^2 + s_3^2) - \frac{1}{m_T} (m_1^2 s_1^2 + 2\mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_2 m_1 m s_1 (s_2 + s_3) + m^2 (s_2 + s_3)^2) \quad (3.69)$$

ce qui permet de recalculer la relation de conservation de la quantité de mouvement angulaire, équation 3.3 :

$$\begin{aligned} m_C \mathbf{r}_C \mathbf{E} \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^3 (m_i \mathbf{r}_i)^T \mathbf{E} \mathbf{v}_i = \\ + [-m_1 s_1^2 - m(s_2^2 + 2L^2 + s_3^2) + \frac{1}{m_T} (m_1^2 s_1^2 + 2m_1 m s_1 (s_2 + s_3) \mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_2 + m^2 (s_2 + s_3)^2)] \dot{\alpha} \\ + [-\frac{m_1 m}{m_T} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_D (s_2 + s_3)] \dot{s}_1 + [mL + \frac{m_1 m}{m_T} \mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_1 s_1] \dot{s}_2 + [-mL + \frac{m_1 m}{m_T} \mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_1 s_1] \dot{s}_3 . \quad (3.70) \end{aligned}$$

Comme pour le mécanisme à quatre masses, ces équations sont exprimées sous la forme matricielle de l'équation 3.60 avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_T \mathbf{1} & m_1 \mathbf{E} \mathbf{e}_D s_1 - m(s_2 + s_3) \mathbf{e}_1 \\ 0 & I_{f_{CV}}^z + 2(m_1 s_1^2 + m(s_2^2 + L + s_3^2 + s_2 s_3)) \\ & -\frac{1}{m_T} (m_1^2 s_1^2 + 2m_1 m s_1 (s_2 + s_3) \mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_2 + m^2 (s_2 + s_3)^2) \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -m_1 \mathbf{e}_D & -m \mathbf{e}_2 & -m \mathbf{e}_2 \\ -\frac{m_1 m}{m_t} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_D (s_2 + s_3) & mL + \frac{m_1 m}{m_t} \mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_1 s_1 & -mL + \frac{m_1 m}{m_t} \mathbf{e}_D^T \mathbf{e}_1 s_1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

et

$$\dot{\mathbf{s}} = \left\{ \dot{s}_1 \quad \dot{s}_2 \quad \dot{s}_3 \right\}^T. \quad (3.73)$$

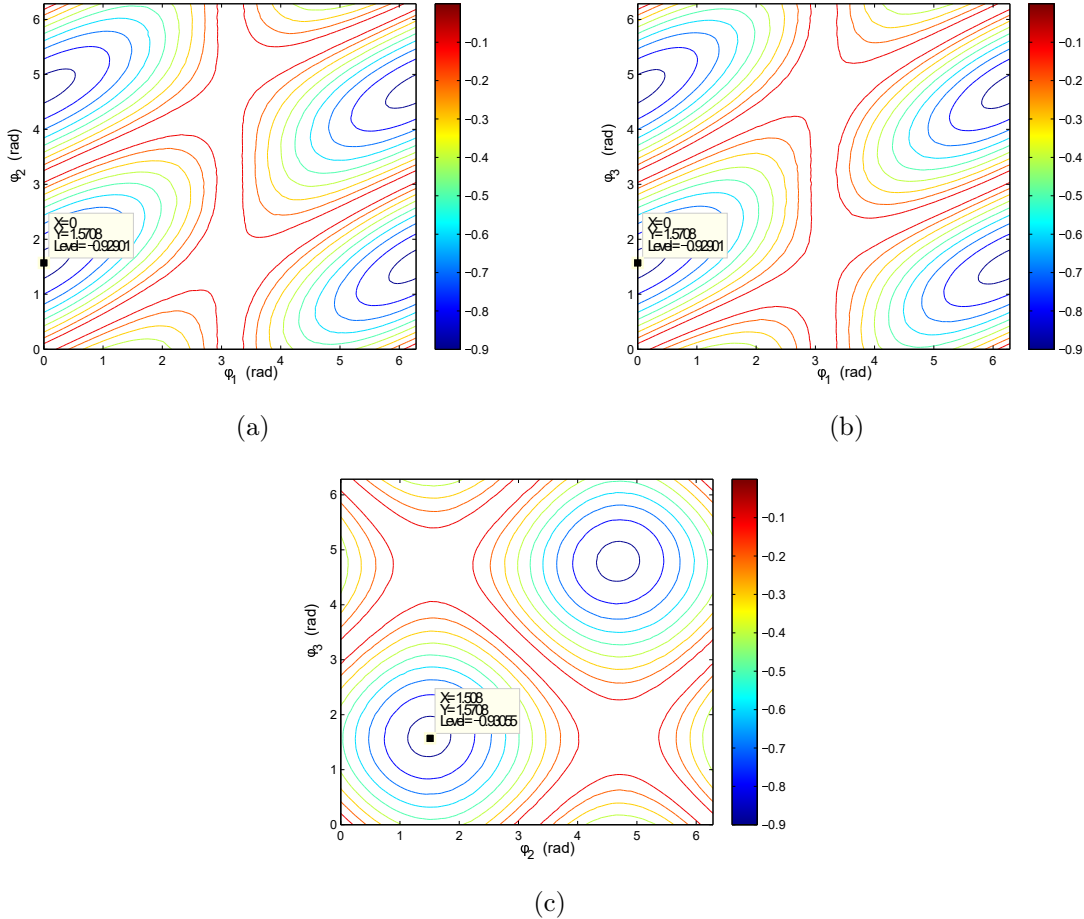


FIGURE 3.16 – Amplitude du changement d'orientation du cadre (rad) en fonction des phases avec des amplitudes et des fréquences unitaires : (a) Masse 1 versus 2, (b) Masse 1 versus 3 et (c) Masse 2 versus 3.

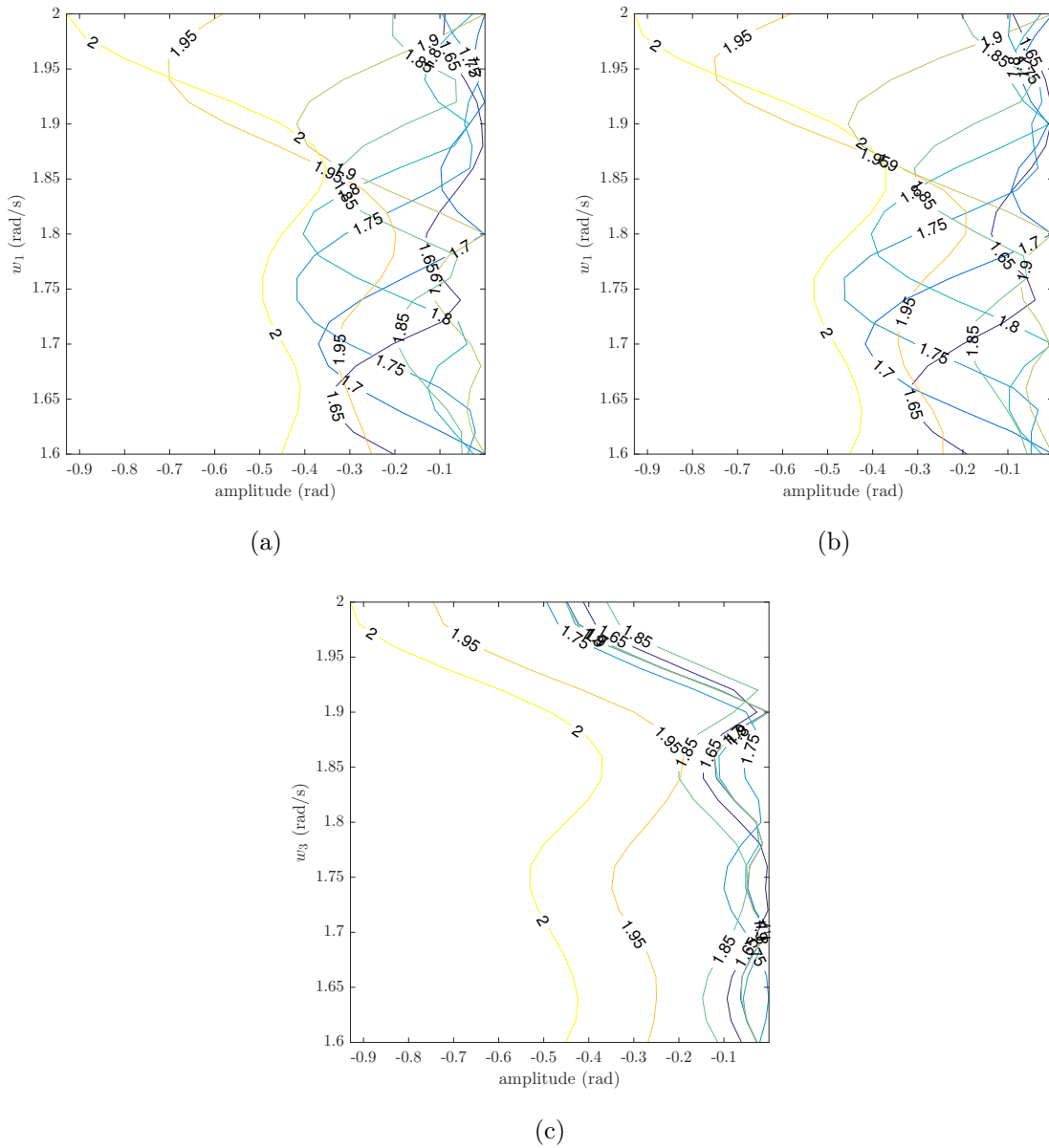


FIGURE 3.17 – Amplitude du changement d’orientation du cadre (rad) en fonction des fréquences avec des amplitudes unitaires et les phases optimales de l’équation 3.75 : (a) Masse 1 versus 2, (b) Masse 1 versus 3 et (c) Masse 2 versus 3.

À nouveau, le mécanisme est simulé pour une inertie de cadre en forme de “Z” fait de tiges minces de sorte que :

$$I_{fCV} = m_C(2L)^2/12 + m_C(L/2)^2 \quad (3.74)$$

avec $m_C = 10kg$ la masse du cadre, ainsi que deux masses bougeant verticalement de $m_2 = m_3 = 1kg$ chacune et une sur la diagonale de $m_1 = 2kg$. Le mouvement des masses est encore posé comme périodique, suivant l’équation 3.50. Une optimisation pour maximiser le déplacement angulaire est à nouveau tentée avec l’algorithme CMA-ES. Le résultat obtenu

sur 30 s est présenté à la figure 3.15 et donne les mouvements de masses suivants :

$$s_1 = -\sin(2t + 3\pi/2) , s_2 = -\sin(2t) , s_3 = \sin(2t + \pi) \quad (3.75)$$

Des conclusions similaires à celles tirées de l'analyse du mécanisme à quatre masses s'appliquent ici : le déphasage optimal entre la masse diagonale et les deux verticales est de $\pi/2$ et les fréquences et amplitudes sont maximales dans la plage permise.

De la même manière que précédemment, les amplitudes sont fixées au maximum et l'influence des six paramètres restants est étudiée. Des résultats similaires à ceux obtenus pour le mécanisme à quatre masses et concordant avec l'optimisation sont obtenus : les fréquences ont avantage à être maximales, mais surtout égales (figure 3.16) et les masses verticales doivent être synchronisées mais déphasées de $\pi/2$ par rapport à celle de la diagonale (figure 3.17).

Ces études du comportement du mécanisme à trois masses démontrent que, comme le mécanisme précédent (quatre masses sur les arêtes du carré), une technique de pompage est la solution optimale. Par contre, les effets de cette configuration sont moins importants que pour le mécanisme à quatre masses, 0,9 rad comparé à 1,008 rad pour un peu plus de 30 s de simulation. Cette différence est explicable par l'amplitude du mouvement de la masse diagonale qui crée un bras de levier moins important par rapport au centre de masse. Finalement, malgré la symétrie des deux mécanismes présentés et la conservation de la quantité de mouvement, le centroïde se déplace. Par exemple, pour la trajectoire du mécanisme à trois masses de la figure 3.15, le déplacement du centroïde est tracé à la figure 3.18.

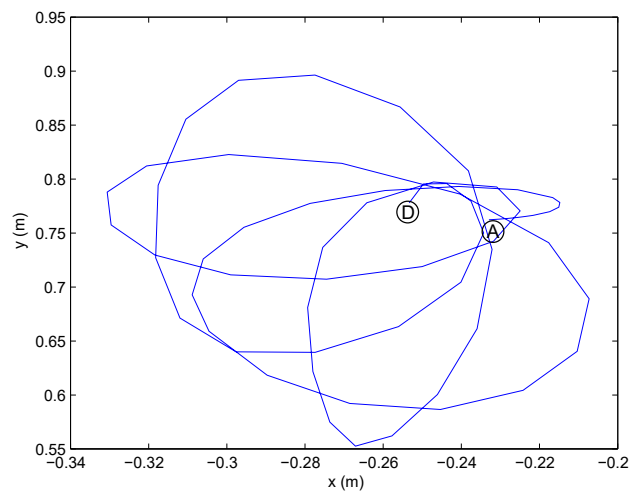


FIGURE 3.18 – Trajectoire du centroïde pour le déplacement de la figure 3.15 avec D=départ et A=arrivée.

3.1.5 Comparaison avec une roue d'inertie

Tel qu'il a été discuté à la section 1.2.2, l'un des mécanismes les plus communs pour la réorientation d'engins spatiaux, après l'utilisation de propulseurs chimiques, est la roue d'inertie. Celle-ci permet un effet direct sur l'orientation du satellite autour de l'axe de rotation de la roue. À des fins de comparaison, avec une roue de masse équivalente à la somme des masses des solutions proposées plus haut, soit 4 kg, répartie dans un anneau mince maximisant l'espace disponible à l'intérieur du cadre de la figure 3.6, l'angle d'un module plan peut être modifié de plus de 12 rad. La relation est tout simplement un ratio des inerties :

$$I_C \omega_C = I_f \omega_f \quad (3.76)$$

où I_f et ω_f sont respectivement l'inertie de la roue d'inertie et sa vitesse angulaire. Les performances de la roue d'inertie sont donc beaucoup plus grandes que les systèmes proposés précédemment. Toutefois le cadre à quatre masses a le grand avantage de ne pas obstruer le centre du module en n'utilisant que la périphérie du module. Ce pourrait être plus avantageux pour des petits modules tels que le *Cubesat*, présenté à la figure 3.19. Ceci étant dit, l'intégration de roues d'inertie est étudié pour le déploiement d'un mécanisme et sa réorientation dans la suite de ce chapitre.

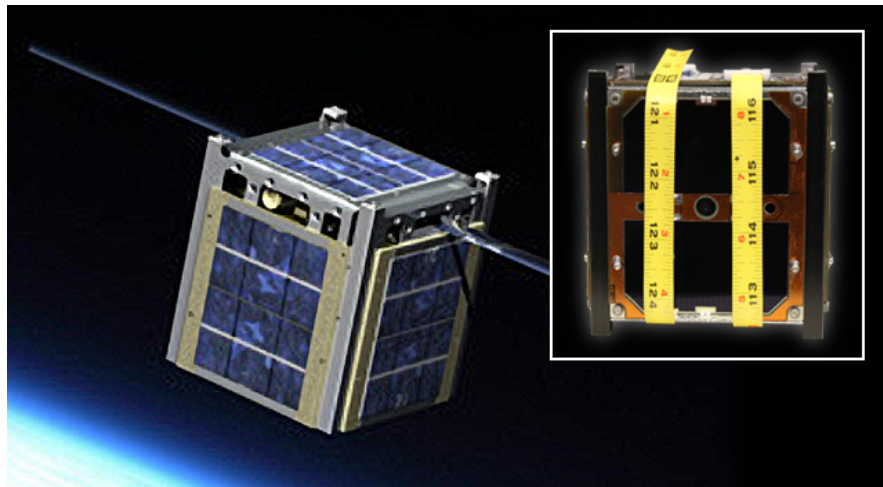


FIGURE 3.19 – *CubeSat*, plateforme ouverte de satellite cubique³.

3.2 Déploiement par roues d'inertie

Considérant que l'effet des roues d'inertie sur l'orientation d'un mécanisme flottant est plus important pour un même poids, une stratégie est proposée pour en tirer avantage. Pour le moment l'actionnement proposé pour le mécanisme déployable consistait à motoriser une ou plusieurs de ses articulations rotoïdes, de manière conventionnelle. Il a ensuite été proposé

³. Site web des CubeSat : http://www.nasa.gov/directorates/heo/home/CubeSats_initiative/), visité le 13/08/2013

d'ajouter un système de réorientation sur la périphérie faisant usage de masses en translation pour engendrer des moments. La solution proposée dans la suite de ce chapitre est conçue pour ré-orienter le système en plus de déployer la surface et ce, sans utiliser d'actionneurs aux articulations du mécanisme. En disposant des roues d'inertie sur les membrures déployables tout en laissant toutes les articulations cylindriques libres, c'est à dire non actionnés mais engendrant un degré de liberté chacun dans le système, un contrôle redondant à double usage est possible avec une connaissance appropriée des propriétés géométriques du mécanisme.

Les équations dynamiques pour un tel système doivent être construites de sorte que l'accélération angulaire de chaque corps y apparaisse explicitement, permettant d'y inclure les contraintes non holonomes des liaisons passives. En effet, l'une des contraintes internes au mécanisme pour une liaison passive est la somme nulle des moments à ce point. L'approche cinématique jumelée à la conservation de la quantité de mouvement de la section précédente ne peut donc pas être utilisée. Pour poursuivre avec les équations de Newton-Euler, il faut dériver les accélérations et les forces internes pour chaque corps.

Une méthode mieux adaptée, évitant certains de ces calculs fastidieux, est d'utiliser l'approche de Kane pour dériver les équations dynamiques de chaque système proposé. L'avantage de cette approche est de permettre une écriture simple et rapide des équations sans devoir exprimer les contraintes internes du mécanisme. Elle permet aussi, contrairement à d'autres approches visant par exemple les manipulateurs, de construire le système d'équations d'une chaîne cinématique non sérielle, par exemple en arbre. Kane propose de sélectionner un ensemble de g vitesses généralisées indépendantes définissant complètement la dynamique du système puis de dériver les forces inertielles et les forces externes appliquées sur chacun des n corps par rapport à chacune de ces vitesses pour former le système de g équations (KANE et LEVINSON, 1985). Le système est formé à partir de la relation :

$$F_i^* + F_i = 0 \text{ pour } i = 1 \dots g \quad (3.77)$$

avec chacun les forces inertielles F_i^* résultant d'une somme de produits scalaires :

$$F_i^* = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial u_i} \cdot (-\dot{\mathbf{v}}_j m_j) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial u_i} \cdot (\dot{\mathbf{H}}_i) \right], \quad (3.78)$$

avec

$$\dot{\mathbf{H}}_i = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (3.79)$$

où les \mathbf{v}_j et $\boldsymbol{\omega}_j$ sont respectivement la vitesse du point de référence, la vitesse angulaire du corps j et n est le nombre de corps. Les forces externes sont réparties de la même manière :

$$F_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial u_i} \cdot \mathbf{f}_j + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial u_i} \cdot \mathbf{t}_j \right], \quad (3.80)$$

où \mathbf{f}_j et \mathbf{t}_j sont respectivement la force externe et le moment externe appliqués sur le corps j . D'une manière analogue à celle utilisée dans les sections précédentes, les \mathbf{v}_j sont exprimées

en fonction des $\dot{\omega}_j$ et des contraintes des articulations passives. Il ne reste ainsi, dans les équations, que les $\dot{\omega}_j$ de chaque corps et le \dot{v}_1 du premier corps, les sorties générales du système à contrôler, et les $\dot{\omega}_{fi}$, les commandes en accélérations angulaires des roues d'inertie. À nouveau, pour simplifier le système aux besoins de la réorientation, la translation du premier corps est éliminée autant que possible des équations grâce à l'expression de la conservation de la quantité de mouvement.

3.2.1 Mécanisme à deux corps

Le système le plus simple pour démontrer ce principe d'actionnement est constitué du minimum de deux corps rigides reliés par une seule liaison rotoïde libre. Chaque corps possède une roue d'inertie centrée sur son centre de masse. Le mécanisme est limité aux mouvements dans le plan comme à la section 3.1.1. Initialement les deux membrures sont considérées indépendantes et leur orientation absolue est définie par rapport au référentiel inertiel global. Les axes des référentiels de chaque corps (A et B) sont définis grâce aux axes du référentiel inertiel et l'orientation absolue des corps au tableau 3.1. La vitesse du centre de masse du premier corps

	\mathbf{x}_a	\mathbf{y}_a	\mathbf{z}_a	\mathbf{x}_b	\mathbf{y}_b	\mathbf{z}_b
x	$c\phi_1$	$-s\phi_1$	0	$c\phi_2$	$-s\phi_2$	0
y	$s\phi_1$	$c\phi_1$	0	$s\phi_2$	$c\phi_2$	0
z	0	0	1	0	0	1

TABLEAU 3.1 – Orientation des référentiels des corps A et B tel que représentés à la figure 3.1.

et les vitesses angulaires absolues des deux corps sont sélectionnées comme vitesses généralisées indépendantes servant à la construction du système d'équations de Kane. Ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$\mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\boldsymbol{\omega}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\boldsymbol{\omega}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{A,1} - \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{B,1} \quad (3.84)$$

avec

$$\mathbf{r}_{A,1} = r_x^{A,1} \mathbf{x}_a + r_y^{A,1} \mathbf{y}_a + r_z^{A,1} \mathbf{z}_a \quad (3.85)$$

$$\mathbf{r}_{B,1} = r_x^{B,1} \mathbf{x}_b + r_y^{B,1} \mathbf{y}_b + r_z^{B,1} \mathbf{z}_b, \quad (3.86)$$

les vecteurs de position de l'articulation par rapport au centre de masse de chaque membrure, tel qu'illustré à la figure 3.1. La contrainte cinématique de la liaison est prise en compte dans les équations par la définition de la vitesse du centre de masse du corps B en fonction des autres vitesses. De ces équations on dérive les accélérations :

$$\dot{\mathbf{v}}_A = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\omega}_a \times \mathbf{r}_{A,1} - \dot{\omega}_a \times \mathbf{r}_{B,1} + \omega_a \times \dot{\mathbf{r}}_{A,1} - \omega_b \times \dot{\mathbf{r}}_{B,1} \quad (3.88)$$

Tous les éléments nécessaires au calcul des forces inertielles sont maintenant connus, et l'équation 3.78 est simplifiée pour un mouvement plan à deux corps :

$$F_i^* = -\frac{\partial \mathbf{v}_A}{\partial u_i} \cdot (\dot{\mathbf{v}}_A m_A) - \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial u_i} \cdot (\dot{\mathbf{v}}_B m_B) - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_A}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_A I_A) - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_B}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_B I_B), \quad (3.89)$$

avec m_i la masse du corps i et I_i son inertie autour de l'axe perpendiculaire au plan, ce qui donne :

$$\begin{aligned} F_1^* &= -m_T \dot{u}_1 + A_1(\phi_A) \dot{u}_3 + B_1(\phi_B) \dot{u}_4 + C_1(\phi_A, \phi_B, u_3^2, u_4^2) \\ F_2^* &= -m_T \dot{u}_2 + A_2(\phi_A) \dot{u}_3 + B_2(\phi_B) \dot{u}_4 + C_2(\phi_A, \phi_B, u_3^2, u_4^2) \\ F_3^* &= A_3(\phi_A) \dot{u}_1 + B_3(\phi_A) \dot{u}_2 + C_3(\phi_A) \dot{u}_3 + D_3(\phi_A, \phi_B) \dot{u}_4 \\ &\quad + E_3(\phi_A, \phi_B, u_3^2, u_4^2) \\ F_4^* &= A_4(\phi_B) \dot{u}_1 + B_4(\phi_B) \dot{u}_2 + C_4(\phi_A, \phi_B) \dot{u}_3 + D_4(\phi_B) \dot{u}_4 \\ &\quad + E_4(\phi_A, \phi_B, u_3^2, u_4^2), \end{aligned}$$

dont les coefficients A_i , B_i , C_i , D_i sont détaillés à l'annexe B, où ϕ_i est l'orientation du corps i et $m_T = m_a + m_b$. Les seules forces externes sont celles qui proviennent des roues d'inertie. Puisqu'aucune force n'est appliquée aux articulations, le système d'équations de Kane appliquera automatiquement la contrainte de somme des moments nulle aux articulations passives. Les roues d'inerties étant positionnées au centre de masse de chaque membrure, les dérivées partielles sont :

$$F_i = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{f,A}}{\partial u_i} \cdot (-\boldsymbol{\alpha}_{f,A} I_{f,A}) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{f,B}}{\partial u_i} \cdot (-\boldsymbol{\alpha}_{f,B} I_{f,B}) \quad (3.90)$$

ce qui donne $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = I_{f,A} \dot{\omega}_{f,A}$ et $F_4 = I_{f,B} \dot{\omega}_{f,B}$, avec $\omega_{f,A}$ et $\omega_{f,B}$, les vitesses angulaires des roues d'inertie respectivement sur le corps A et le corps B .

Le système d'équation est réécrit sous forme matricielle compacte :

$$\begin{bmatrix} -m_T & 0 & A_1 & B_1 \\ 0 & -m_T & A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{f1} & 0 \\ 0 & I_{f2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_{f1} \\ \dot{\omega}_{f2} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.91)$$

De ces équations ressort que les roues d'inertie n'agissent directement que sur les deux accélérations angulaires. Toutefois, les deux premières lignes de l'équation 3.91 couplent les accélérations du centre de masse de la première membrure avec les accélérations angulaires. Connaissant l'état du système à un temps donné, c'est-à-dire la valeur de tous les coefficients, les \dot{u}_1 et \dot{u}_2 peuvent être calculés séparément puis le système se réduit à deux équations, deux inconnues et deux actionneurs. Ce système simple sera l'objet d'un prototype à la section 3.3 pour valider le fonctionnement et en tester le contrôle.

3.2.2 Mécanisme plan à quatre barres

Puisque les mécanismes déployables à membrures rigides, tels que ceux présentés au chapitre 2, sont généralement constitués de chaînes cinématiques fermées, cette section étudie un tel cas simple, le mécanisme plan à quatre barres. Pour plus de généralité, les membrures ne sont pas contraintes à être nécessairement identiques, mais elles possèdent toutes une roue d'inertie fixée à leur centre de masse, tel que montré à la figure 3.20. La formule de Tchebyshev-Grübler-

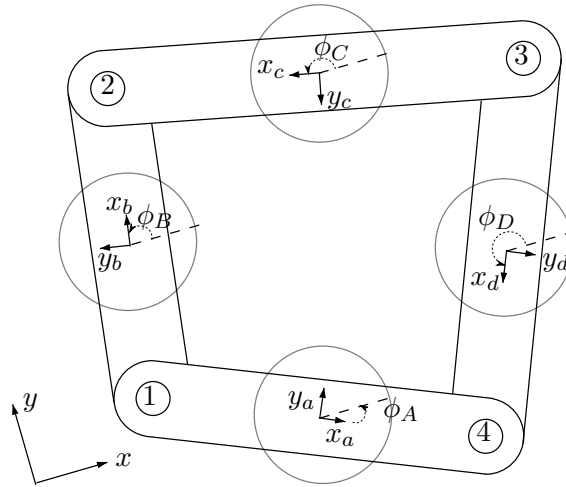


FIGURE 3.20 – Représentation schématique d'un mécanisme plan à quatre barres avec quatre roues d'inertie.

Kutzbach introduite à la section 2.2 permet ici de déterminer combien de degrés de liberté possède ce mécanisme plan dont les articulations ne sont pas actionnés :

$$n_{ddl} = 3(n_{cr} - 1) - 2n_r = 1, \quad (3.92)$$

où n_{ddl} est le nombre de degrés de liberté, n_{cr} le nombre de membrures et n_r le nombre de articulations rotoïdes. Un seul degré de liberté est requis pour modifier la configuration du système, auquel s'ajoute trois autres degrés de liberté positionnant et orientant la première membrure, ou d'une manière équivalente, le centre de masse du système. Comme précédemment pour le cas simple à deux corps, la vitesse du centre de masse du premier corps fait partie des degrés de liberté mais ne peut être contrôlée avec ce type d'actionnement. Aussi, puisque

quatre roues d'inertie sont utilisées, le mécanisme est redondant pour le contrôle des deux orientations définissant l'orientation de l'ensemble du mécanisme et la configuration de celui-ci. Deux actionneurs seraient suffisants pour former un système complètement contrôlable, seulement il a déjà été mentionné que la redondance est souhaitable dans le cadre d'applications spatiales. De plus, elle permet ici d'assurer une symétrie du mécanisme et une uniformité de sa fabrication. Les variables utilisées pour définir le mécanisme sont la position du centre de masse du premier corps (x_A, y_A) , et l'orientation de chaque membrure, donnée par ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C et ϕ_D définie par rapport au référentiel inertiel global (x, y) tel qu'illustré à la figure 3.20. Les équations du mouvement sont aussi développées par l'approche de Kane et en considérant que \mathbf{R}_j est la matrice de rotation du corps j dans le référentiel inertiel. Les vitesses généralisées indépendantes sélectionnées (notées $u_i, i = 1 \dots 4$) sont choisies comme étant les deux composantes de la vitesse du centre de masse d'une membrure et la vitesse angulaire de deux des quatre membrures dans le référentiel inertiel. Les vitesses des centre de masse de chaque corps définissant le système sont donc exprimées en fonction des vitesses généralisées :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_4 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{A,1} - \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{B,1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_{A,1} - u_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_{B,1} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{B,2} - \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{C,2} \\ \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{C,3} - \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_{D,3}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

le coefficient matriciel équivalent au produit vectoriel d'un vecteur dans le plan x, y avec un vecteur orienté selon z , et où z est orthogonal au plan de déplacement, où $\mathbf{r}_{j,i}$ est le vecteur position de la liaison i par rapport au centre de masse de la membrure j exprimé dans le référentiel inertiel. Comme pour le cas précédent, certaines contraintes sont directement incluses dans la définition algébrique au niveau des équations de vitesse. C'est le cas des articulations 1, 2 et 3 dont les contraintes permettent d'exprimer les vitesses $\mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$ et \mathbf{v}_D en fonction des autres vitesses. Cependant la contrainte de fermeture du mécanisme, ou contrainte de la liaison 4, n'y est pas présente. Une autre relation peut permettre d'exprimer $\boldsymbol{\omega}_C$ et $\boldsymbol{\omega}_D$ en fonction des autres vitesses de sorte que ces vitesses non indépendantes soient éliminées des équations. La contrainte de fermeture du mécanisme est :

$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{14} + \mathbf{r}_{43}, \quad (3.94)$$

qui peut être ré-écrit tel que :

$$\mathbf{R}_B \mathbf{r}_{12}^B + \mathbf{R}_C \mathbf{r}_{23}^C = \mathbf{R}_A \mathbf{r}_{14}^A + \mathbf{R}_D \mathbf{r}_{43}^D, \quad (3.95)$$

ou $\mathbf{r}_{i,j}^k$ est un vecteur constant allant d'une liaison à l'autre sur la membrure k . La dérivation de cette équation donne :

$$\mathbf{E} \mathbf{R}_B \omega_B \mathbf{r}_{12}^B + \mathbf{E} \mathbf{R}_C \omega_C \mathbf{r}_{23}^C = \mathbf{E} \mathbf{R}_A \omega_A \mathbf{r}_{14}^A + \mathbf{E} \mathbf{R}_D \omega_D \mathbf{r}_{43}^D, \quad (3.96)$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_A \mathbf{r}_{14}^A & -\mathbf{R}_B \mathbf{r}_{12}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_A \\ \omega_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_C \mathbf{r}_{23}^C & -\mathbf{R}_D \mathbf{r}_{43}^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_C \\ \omega_D \end{Bmatrix}, \quad (3.97)$$

Les vitesses angulaires des corps C et D peuvent alors être exprimées par une combinaison linéaire de deux des vitesses indépendantes généralisées tel que :

$$\omega_C = \gamma_1 u_3 + \gamma_2 u_4 \quad (3.98)$$

$$\omega_D = \gamma_3 u_3 + \gamma_4 u_4, \quad (3.99)$$

où les γ_i sont des constantes et \mathbf{v}_C et \mathbf{v}_D deviennent alors :

$$\mathbf{v}_C = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_{A1} - u_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_{B,1} + u_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_{B,2} - (\gamma_1 u_3 + \gamma_2 u_4) \mathbf{E} \mathbf{r}_{C,2} \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

$$\mathbf{v}_D = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_{A,1} - u_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_{B,1} + u_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_{B,2} - (\gamma_1 u_3 + \gamma_2 u_4) \mathbf{E} \mathbf{r}_{C,2} + (\gamma_1 u_3 + \gamma_2 u_4) \mathbf{E} \mathbf{r}_{C,3} \\ -(\gamma_3 u_3 + \gamma_4 u_4) \mathbf{E} \mathbf{r}_{D,3} \end{Bmatrix}. \quad (3.101)$$

Puisque les équations de Kane sont exprimées en terme d'accélération, les relations de vitesses sont dérivées, ce qui mène à :

$$\dot{\mathbf{v}}_A = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_{A,1} - \dot{u}_4 \mathbf{E} \mathbf{r}_{B1} + u_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{r}}_{A,1} - u_4 \mathbf{E} \dot{\mathbf{r}}_{B1} \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_C = \dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\omega}_B \times \mathbf{r}_{B,2} - \dot{\omega}_C \times \mathbf{r}_{C,1} + \omega_B \times \dot{\mathbf{r}}_{B,2} - \omega_C \times \dot{\mathbf{r}}_{C,1} \quad (3.104)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_D = \dot{\mathbf{v}}_C + \dot{\omega}_C \times \mathbf{r}_{C,2} - \dot{\omega}_D \times \mathbf{r}_{D,1} + \omega_C \times \dot{\mathbf{r}}_{C,2} - \omega_D \times \dot{\mathbf{r}}_{D,1} \quad (3.105)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_D = \dot{\mathbf{v}}_C + \dot{\omega}_C \times \mathbf{r}_{C,2} - \dot{\omega}_D \times \mathbf{r}_{D,1} + \omega_C \times \dot{\mathbf{r}}_{C,2} - \omega_D \times \dot{\mathbf{r}}_{D,1} \quad (3.106)$$

puis utilisées pour construire les expressions des forces virtuelles F_i^* tel que :

$$F_i^* = -\frac{\partial v_A}{\partial u_i} \cdot (\dot{v}_A m_A) - \frac{\partial v_B}{\partial u_i} \cdot (\dot{v}_B m_B) - \frac{\partial \omega_A}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_A I_A) - \frac{\partial \omega_B}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_B I_B) \\ - \frac{\partial v_C}{\partial u_i} \cdot (\dot{v}_C m_C) - \frac{\partial v_D}{\partial u_i} \cdot (\dot{v}_D m_D) - \frac{\partial \omega_C}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_C I_C) - \frac{\partial \omega_D}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_D I_D), \quad (3.107)$$

et donne

$$F_1^* = -m_T \dot{u}_1 \quad (3.108)$$

$$F_2^* = -m_T \dot{u}_2 \quad (3.109)$$

$$F_3^* = (\mathbf{E}r_{A,1})(-m_B \dot{v}_B) - I_A \dot{\omega}_A + (\mathbf{E}r_{A,1} - \gamma_1 \mathbf{E}r_{C,2})(-m_C \dot{v}_C) \\ - I_C \dot{\omega}_C + (\mathbf{E}r_{A,1} - \gamma_1 \mathbf{E}r_{C,2} + \gamma_1 \mathbf{E}r_{C,3} - \gamma_3 \mathbf{E}r_{D,3})(-m_D \dot{v}_D) - \gamma_3 I_D \dot{\omega}_D \quad (3.110)$$

$$F_4^* = (\mathbf{E}r_{B,1})(m_B \dot{v}_B) - I_B \dot{\omega}_B + (\mathbf{E}r_{B,1} - \mathbf{E}r_{B,2} + \gamma_2 \mathbf{E}r_{C,2})(m_C \dot{v}_C) \\ - \gamma_2 I_C \dot{\omega}_C + (\mathbf{E}r_{B,1} - \mathbf{E} \times \mathbf{r}_{B,2} + \gamma_2 \mathbf{E}r_{C,2} - \gamma_2 \mathbf{E}r_{C,3} + \gamma_4 \mathbf{E}r_{D,3})(m_D \dot{v}_D) \\ - \gamma_4 I_D \dot{\omega}_D. \quad (3.111)$$

Les forces externes $F_i, i = 1, \dots, 4$ des roues d'inerties sont développées comme pour le cas précédent :

$$F_i = \frac{\partial \omega_{fA}}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_{fA} I_{fA}) + \frac{\partial \omega_{fB}}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_{fB} I_{fB}) + \frac{\partial \omega_{fC}}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_{fC} I_{fC}) + \frac{\partial \omega_{fD}}{\partial u_i} \cdot (\dot{\omega}_{fD} I_{fD}), \quad (3.112)$$

ce qui donne $F_1 = F_2 = 0, F_3 = I_{fA} \dot{\omega}_{fA} + \gamma_1 I_{fC} \dot{\omega}_{fC} + \gamma_3 I_{fD} \dot{\omega}_{fD}$ et $F_4 = I_{fB} \dot{\omega}_{fB} + \gamma_2 I_{fC} \dot{\omega}_{fC} + \gamma_4 I_{fD} \dot{\omega}_{fD}$, ou fj est la roue d'inertie sur le corps j et $\dot{\omega}_{fj}$ est son accélération angulaire.

Le système matriciel résultant est :

$$\begin{bmatrix} -m_T & 0 & A_1(\phi_1) & B_1(\phi_2) \\ 0 & -m_T & A_2(\phi_1) & B_2(\phi_2) \\ A_3(\phi_1) & B_3(\phi_1) & C_3(\phi_2) & D_3(\phi_1, \phi_2) \\ A_4(\phi_3) & B_4(\phi_3) & C_4(\phi_1, \phi_3) & D_4(\phi_2, \phi_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} C_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, u_3^2, u_4^2, u_5^2, u_6^2) \\ C_2(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, u_3^2, u_4^2, u_5^2, u_6^2) \\ E_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, u_3^2, u_4^2, u_5^2, u_6^2) \\ E_4(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, u_3^2, u_4^2, u_5^2, u_6^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_{fA} & 0 & -\gamma_1 I_{fC} & -\gamma_2 I_{fD} \\ 0 & -I_{f2} & -\gamma_2 I_{fC} & -\gamma_4 I_{fD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{f1} \\ \dot{\omega}_{f2} \\ \dot{\omega}_{f3} \\ \dot{\omega}_{f4} \end{bmatrix},$$

dont les coefficients sont détaillés à l'annexe C. L'expression peut être réduite en enlevant l'accélération du centre de masse de la membrure A. En effet, tel que mentionné précédemment, les deux premières équations ne dépendant pas des accélérations des actionneurs, elles peuvent

être résolues pour \dot{u}_1 et \dot{u}_2 puis substituées dans les autres équations du système. Le système réduit a la forme :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} = \mathbf{I}_f\dot{\boldsymbol{\omega}}_f \quad (3.113)$$

où \mathbf{A} est une matrice de dimension 2×2 , $\dot{\mathbf{q}}$ un vecteur de dimension 2, soit $\dot{\mathbf{q}} = \left\{ \dot{u}_3 \quad \dot{u}_4 \right\}^T$, \mathbf{I}_f une matrice de dimension 2 et $\dot{\boldsymbol{\omega}}_f$ un vecteur de dimension 4, soit $\dot{\boldsymbol{\omega}}_f = \left\{ \dot{\omega}_{f1} \quad \dot{\omega}_{f2} \quad \dot{\omega}_{f3} \quad \dot{\omega}_{f4} \right\}^T$. En inversant la relation matricielle, l'équation ci-haut permet de déterminer les accélérations angulaires des roues d'inertie nécessaires pour compléter une trajectoire désirée du mécanisme. Cette forme réduite met aussi en lumière la redondance du système, soit quatre entrées pour deux degrés de liberté contrôlés.

Simulation

Afin de valider le modèle algébrique développé, une comparaison du comportement dynamique entre une implémentation *MATLAB* des équations analytiques et une simulation numérique *Simscape Multibody* du modèle tridimensionnel correspondant est réalisée. La figure de l'annexe D montre le modèle *Simscape Multibody* du mécanisme à quatre barres, chacune ayant une seule roue d'inertie et l'ensemble étant contraint par une relation plane au repère fixe. En parallèle, des simulations utilisant les mêmes propriétés géométriques sont produites avec la forme matricielle des équations. Le système est simplifié pour ces simulations en posant toutes les membrures et les roues d'inertie identiques : $m_i = 0,02 \text{ kg}$, $l_i = 0,1 \text{ m}$, $I_i = 2,2 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^2$ et $I_{f,i} = 3,4 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$. Le modèle est validé au moyen de deux tests conduits en boucle ouverte. D'abord deux roues d'inertie opposées, c'est à dire celles des membrures *A* et *C*, sont actionnées de sorte que leur position angulaire suive un cosinus pendant 10 secondes. Les résultats de ce test, illustrés à la figure 3.21-a montrent que l'orientation des membrures *A* et *C* suit cette fonction périodique alors que les deux autres conservent leur orientation initiale. Le test suivant met à contribution les quatre roues d'inertie avec la même consigne. La figure 3.21-b montre que l'ensemble du mécanisme suit la consigne périodique comme si ce n'était qu'un seul corps rigide. Un autre test consiste à donner une consigne opposée à des roues d'inertie opposées. Les courbes de ce test ne sont pas montrées ici puisque le résultat est qu'aucun mouvement n'est produit. Ces cas particuliers sont intuitifs et permettent de s'assurer que le modèle numérique autant que le modèle analytique réagissent comme il se devrait et produisent des résultats identiques.

Les résultats de la simulation *Simscape Multibody* et des équations concordent à l'exception de petites différences. L'erreur carrée moyenne sur la trajectoire angulaire des deux corps contrôlés est de 0,028 rad pour le premier test et de 0,034 rad pour le second, alors que l'amplitude de leur mouvement est 0,36 rad dans les deux cas. Les membrures dont les roues d'inertie ne sont pas actionnées dans le premier test ne devraient pas voir leur orientation varier, mais

4. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

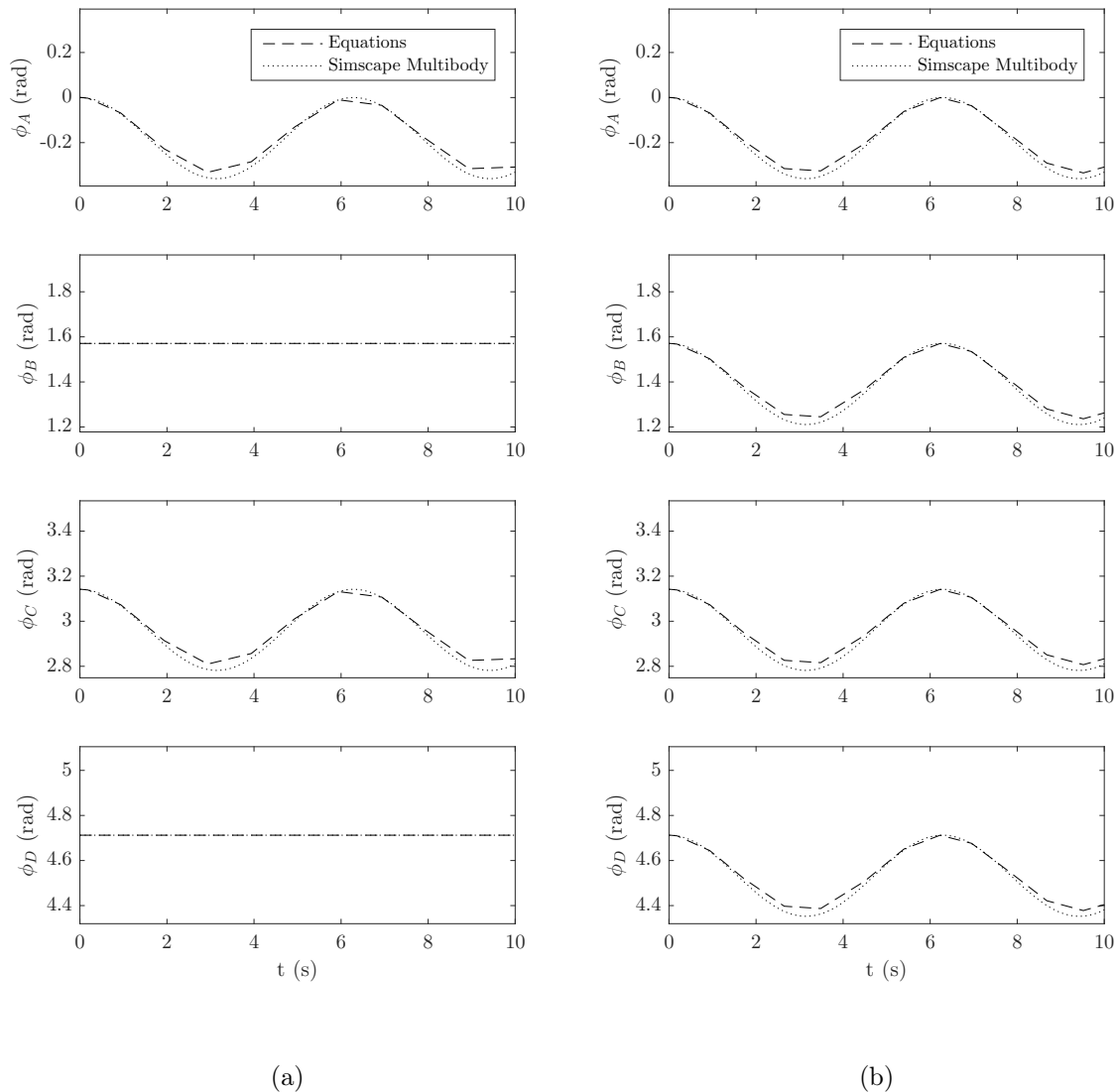


FIGURE 3.21 – Comparaison des résultats obtenus avec la simulation du mécanisme à quatre barres et quatre roues d’inertie par les équations analytiques et le modèle numérique *Simscape Multibody* en utilisant une consigne en cosinus sur ⁴ : (a) la position angulaire de deux roues d’inertie opposées, (b) la position angulaire de toutes les roues d’inertie.

des asymétries dans le modèle numérique font qu’elles bougent légèrement. Ce mouvement vient donc diminuer celui des deux autres membrures. Dans le second test, une observation similaire peut être faite concernant le léger changement de configuration (variation des angles internes) du mécanisme simulé par *Simscape Multibody*. Une étude plus détaillée de l’influence des paramètres géométriques est faite à la section 3.2.2.

Optimisation de la consommation d'énergie

L'équation 3.113 montre que le système possède deux degrés de liberté (dimension de $\dot{\mathbf{q}}$), ce qui corrobore les résultats de la discussion autour de l'équation 3.92 puisque les deux composantes de la vitesse du centre de masse ont été retirées des équations et ne sont pas contrôlées. Celle-ci n'est pas essentielle pour une application en orbite puisque la translation du centre de masse est gérée par des propulseurs pour permettre de grands mouvements lors des changements de trajectoire. Ce contexte d'application suppose aussi qu'une grande quantité de modules seront connectés ensemble formant ainsi plusieurs chaînes cinématiques fermées. Il est probable que pour simplifier les procédures de fabrication, tout en assurant une grande redondance dans le système, une fraction importante des membrures soient identiques. Les consignes utilisées à la section précédente font usage de la redondance pour diminuer la vitesse requise des roues d'inertie. Cette approche minimise en fait l'énergie cinétique du système. Il aurait été possible de produire le même mouvement avec seulement la moitié des roues actionnées dans chaque test. Si par exemple une seule roue d'inertie était utilisée pour produire le mouvement de la figure 3.21-a, l'énergie cinétique du mécanisme serait presque le double.

L'énergie est difficile à obtenir en orbite, généralement soit par des panneaux solaires sur de longues durées ou en apportant plus de carburant au lancement. L'une des principales contraintes d'optimisation des mécanismes spatiaux est donc de minimiser leur consommation d'énergie. Il en découle que le système devrait minimiser l'énergie cinétique instantanée totale :

$$E = \sum_{i=1}^4 \frac{I_{fi}}{2} \omega_{fi}^2, \quad (3.114)$$

tout en respectant les contraintes dynamiques de l'équation 3.113. Une approche analogue consiste à plutôt minimiser les accélérations. Ce qui peut être fait avec des commandes de roues d'inertie obtenues par l'inverse à norme minimale de l'équation 3.113 :

$$\dot{\omega}_f = -\mathbf{I}_f^T (\mathbf{I}_f \mathbf{I}_f^T)^{-1} (\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}), \quad (3.115)$$

Cette expression permet de générer les consignes aux roues d'inertie pour un mouvement des corps A et B souhaité. D'abord un ensemble de consignes a été généré afin de produire une trajectoire uniforme du mécanisme suivant un palier doux (palier de $\frac{\pi}{2}$ dont les deux premières sont nulles au début et à la fin du palier) avec quatre roues d'inertie. Ensuite la solution unique pour laquelle seulement deux des quatre roues sont actionnées a servi à générer un comparatif pour la consommation énergétique du mécanisme. La figure 3.22 démontre que l'énergie cinétique instantanée est plus faible pour la solution à norme minimale. Une autre quantité énergétique représentative de la consommation est l'énergie totale requise pour une trajectoire :

$$E_T = \int_0^T \sum_{i=1}^4 (M_{fi}(t) \omega_{fi}(t)) dt \quad (3.116)$$

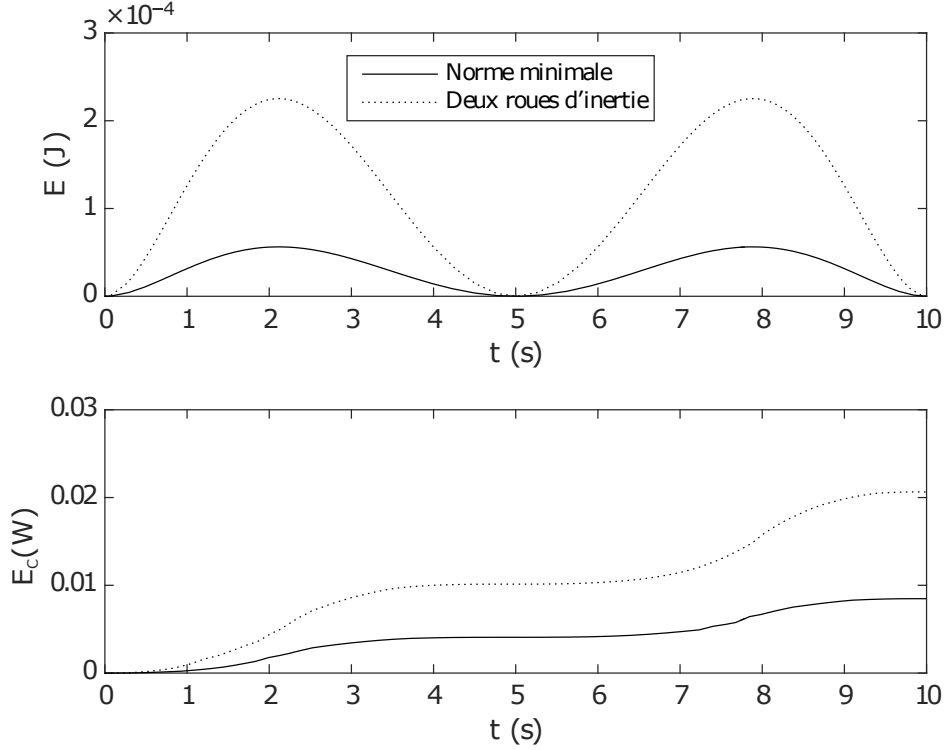


FIGURE 3.22 – Comparaison de l'énergie requise afin d'exécuter une trajectoire de palier doux en minimisant la norme de l'accélération de 4 roues d'inerties ou en utilisant la solution unique avec seulement 2 roues d'inerties.

avec $M_{fi}(t)$, le couple instantané produit par la roue d'inertie i au temps t . Une valeur équivalente est calculée de manière itérative à chaque pas de temps pour obtenir l'énergie cumulée :

$$E_C(t) \approx P(t-1) + \sum_{i=1}^4 I_{fi} \left| \frac{\dot{\omega}_{fi}(t)(\theta_{fi}(t) - \theta_{fi}(t-1))}{\Delta t} \right|. \quad (3.117)$$

Même si ce n'est pas directement la quantité qui cherche à être minimisée, elle est aussi plus faible pour la solution à norme minimale.

Les résultats de cette comparaison peuvent être interprétés ainsi : plus le mécanisme a de roues d'inertie, meilleures seront les performances, puisque la vitesse maximale de chaque roue d'inertie sera plus faible. Cependant, cette conclusion ne dépend que de l'inertie des roues. Autrement dit, plus leur inertie cumulée est grande plus leurs vitesses seront petites et plus faible sera l'énergie cinétique instantanée. Nécessairement, augmenter l'inertie des actionneurs dans un contexte d'applications spatiales n'est pas souhaitable, car cela demande aussi entre autre plus d'énergie à déplacer. C'est pourquoi les exemples précédents utilisaient une valeur fixe d'inertie des roues (1/10 de l'inertie des membrures) et des trajectoires aisément atteignable avec ces propriétés physiques dans le temps alloué de simulation (10 s). Bien sûr, des temps plus longs permettent d'atteindre des changements d'orientation plus grands, ce qui

n'est pas un souci dans l'espace ou le temps est plus facilement disponible que l'énergie. La

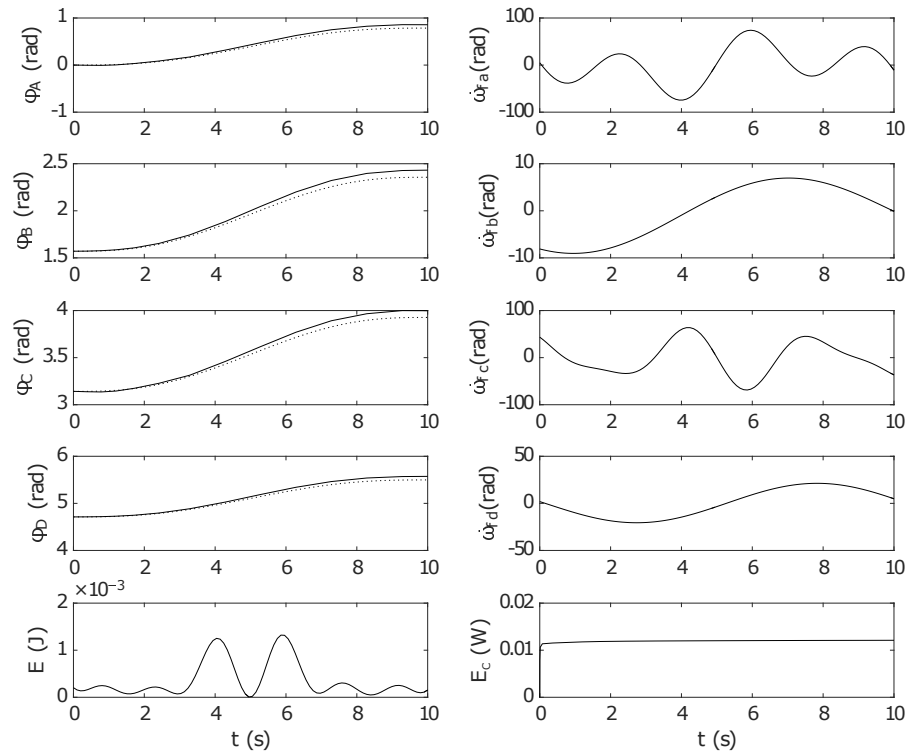


FIGURE 3.23 – Résultat d’une optimisation avec CMA-ES afin d’obtenir les trajectoires et inerties des roues d’inertie minimisant la puissance cumulée sur une trajectoire de palier doux pour l’ensemble du mécanisme. La consigne et la trajectoire résultantes sont superposées dans les graphiques de gauche.

résolution précédente de la dynamique inverse du système permet de minimiser la norme des accélérations et, selon les observations, l’énergie cinétique instantanée. Cependant, la puissance cumulée pendant la trajectoire est plus représentative et n’est pas nécessairement minimisée par cette solution. Construire une relation avec multiplicateurs de Lagrange pour obtenir la solution au système inverse minimisant cette quantité est complexe et demande de résoudre simultanément à chaque itération un ensemble d’équations différentielles couplées. Afin de vérifier si une autre solution existe permettant de minimiser spécifiquement la puissance cumulée, une optimisation avec CMA-ES est conduite pour la même trajectoire. Un ensemble de paramètres géométriques initial est aléatoirement déterminé et de la même manière une commande aux roues d’inertie sous la forme $\theta_{fi} = C_{1,i} \sin(W_{1,i}t + P_{1,i}) + C_{2,i} \sin(W_{2,i}t + P_{2,i})$, dont tous les $\{C, W, P\}_{j,i}$ sont des paramètres de l’optimisation. Ces paramètres sont ensuite passés dans le système d’équations dynamiques directes afin d’obtenir la trajectoire résultante des quatre corps par une résolution d’équations différentielles à pas variable (ode45). La figure 3.23 présente le résultat de cette optimisation minimisant simultanément la moyenne de l’erreur

au carré sur la trajectoire des deux degrés de libertés contrôlés et la puissance cumulée pour cette trajectoire. Même en permettant de faibles erreurs sur la trajectoire (ce que les solutions précédentes n’avaient pas), le résultat donne une solution bien différente, avec des trajectoires et des inerties variées ($I_{f1} = 0.88I_{f0}$, $I_{f2} = 0.41I_{f0}$, $I_{f3} = 1.37I_{f0}$ et $I_{f4} = 0.77I_{f0}$) mais produisant sensiblement la même performance en ce qui concerne la puissance cumulée.

Influence des paramètres géométriques

Les comparaisons de la section 3.2.2 ont démontré l’exactitude de la dérivation algébrique pour ce mécanisme avec la méthode de Kane. Les équations peuvent maintenant permettre de mieux comprendre le comportement du mécanisme et ses changements de comportement avec l’évolution de sa géométrie. En effet, plusieurs paramètres géométriques peuvent varier : la longueur des membrures, formant des paires symétriques ou non, leur inertie et celle des roues ainsi que la position des centres de masse de chaque corps par exemple. Les mesures de comparaison utilisées dans cette section sont inspirées de la revue de MERMERTAŞ, 2004 pour l’étude des mécanismes à quatre barres.

Il est bien connu que pour maintenir stable la résolution d’un système d’équations sous forme matricielle, le conditionnement de la matrice \mathbf{A} doit rester aussi près de l’unité que possible. Comme le mécanisme est flottant, son comportement n’est pas propice à être influencé par sa position ou son orientation absolue. Par contre, sa configuration peut avoir un impact sur l’efficacité de ses actionneurs. Les deux études présentées à la figure 3.24 tracent l’évolution du conditionnement de la matrice sur une plage étendue de valeurs de l’angle entre les membrures A et B , θ_1 , représentant la configuration du mécanisme à quatre barres. Afin d’étudier la stabilité numérique d’une solution en fonction de paramètres géométriques, une valeur significative est le conditionnement de la matrice \mathbf{A} reliant les accélérations de sortie à celles d’entrée, donné par $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$. Cette valeur sera toujours supérieure à 1, mais doit restée la plus faible possible. Le conditionnement de la matrice \mathbf{A} est présenté en fonction du ratio de la longueur de la membrure A sur la longueur de la membrure B à la figure 3.24-a. Pour cette étude, une géométrie en parallélogramme a été retenue ($l_c = l_a$ et $l_d = l_b$). L’effet de ce ratio est indépendant de la configuration du mécanisme ($\theta_1 = \phi_b - \phi_a$, selon la figure 3.20) et tend à faire augmenter le conditionnement lorsqu’il s’éloigne de 1 (supérieur ou inférieur). Le second test observe l’influence de la position du centre de masse des membrures. Le décalage ∂y est mesuré perpendiculairement à la ligne rejoignant les deux articulations de la membrure (coordonnée y dans le référentiel local du corps). Toutes les membrures sont conservées identiques, donc ayant le même décalage de leur centre, pour cette étude. Les courbes de niveau de la figure 3.24-b montre que le décalage a beaucoup plus d’influence pour un angle interne entre les membrures A et B négatif que positif, où son influence tend à être indépendante de la configuration du mécanisme. Les valeurs de conditionnement restent faibles et donc le système est encore stable dans les plages de valeurs simulées. Cependant leur étude permet

de réaliser l'impact néfaste qu'un très petit ou très grand ratio de longueur des membrures adjacentes pourrait avoir sur la stabilité. Il en va de même pour le décalage du centre de masse des membrures.

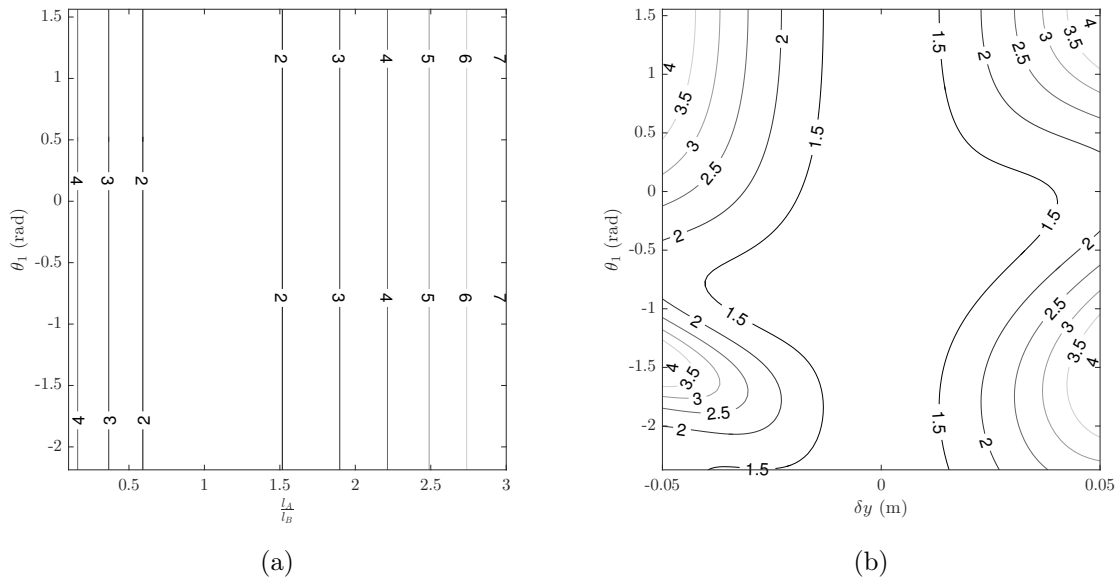


FIGURE 3.24 – Influence sur le conditionnement de la matrice A de : (a) le ratio de la longueur de la membrure A sur la longueur de la membrure B , (b) le décalage du centre de masse de la membrure sur l'axe y du référentiel du corps.

En général pour un mécanisme à quatre barres actionné par ses articulations, une singularité courante survient lorsque le mécanisme rejoint une configuration écrasée, c'est-à-dire avec ses membrures superposées. Dans cette situation la configuration du mécanisme peut bouger librement sans consigne des actionneurs. NENCHEV et UCHIYAMA, 1998 proposent une solution permettant d'éviter le même problème avec un mécanisme à cinq barres en changeant la géométrie de deux membrures opposées afin qu'elles aient la même masse mais des longueurs légèrement différentes. Par contre avec l'actionnement par roues d'inertie cette manipulation aurait tendance à augmenter le conditionnement de la matrice A et n'est de toute manière pas nécessaire puisque la singularité à $\theta_1 = 0$ n'apparaît plus. En effet, l'étude du déterminant de la matrice sur toute la trajectoire réalisée par le mécanisme montre qu'aucune singularité n'apparaît. Cet avantage indéniable de la stratégie d'actionnement par roues d'inertie provient de sa redondance. Dans un mécanisme à 4 barres, ayant un seul degré de liberté, si l'actionnement provient d'une seule articulation, lorsque le mécanisme est complètement aplati, un mouvement du moteur ne détermine plus que la position relative des deux membrures sur lesquelles il est attaché, les deux autres étant libres de partir dans deux directions opposées. Toutefois, les roues d'inertie présentes sur chaque membrure permettent, dans toutes les configurations, de contrôler le mouvement relatif de chaque membrure par rapport aux autres.

Contrôle d'un élément ciseau

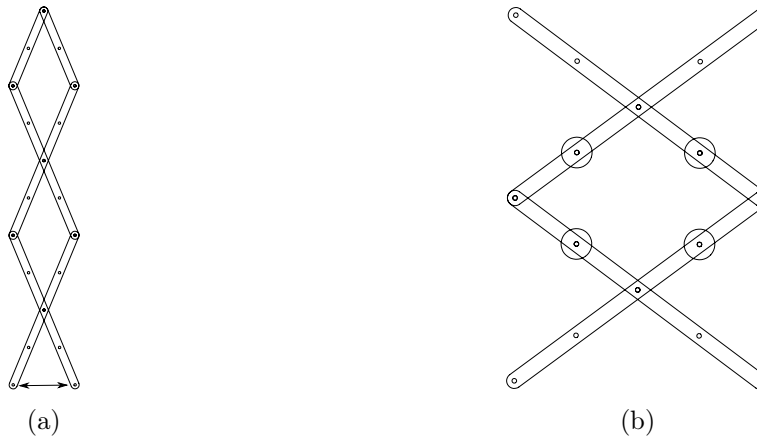


FIGURE 3.25 – Mécanisme de ciseau : (a) modèle plan standard, (b) unité centrale à quatre barres.

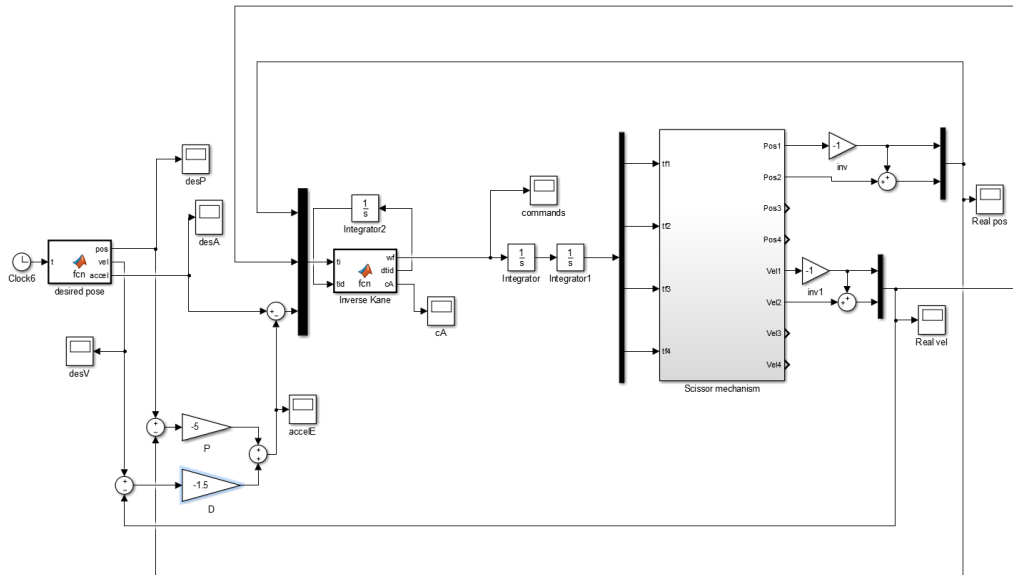


FIGURE 3.26 – Boucle de contrôle *Simulink - Simscape Multibody / MATLAB* avec retour en orientation et vitesse angulaire des deux premières membrures, équations de Kane inverses et contrôleur PD.

Le mécanisme à quatre barres est une unité simple permettant d'étudier les limites et la faisabilité de l'actionnement par roues d'inertie avant de se rapprocher de la géométrie d'une coupole déployable. Son intérêt n'est toutefois pas limité à une démonstration théorique intermédiaire, il est aussi pratique puisque directement lié à un mécanisme déployable couramment utilisé. En effet le mécanisme ciseau, aussi appelé pantographe, discuté dans l'introduction de cette thèse sur les mécanismes permettant l'extension de membrures linéaires, est en fait composé d'une série de géométries à quatre barres, tel qu'illustré à la figure 3.25-a. Les équations dérivées

précédemment peuvent donc être adaptées aisément à cette configuration. Comme l'illustre la figure 3.25-b, une unité ciseau est d'une géométrie similaire au mécanisme à quatre barres standard à l'exception que le centre de masse de ces membrures est situé aux articulations du mécanisme. Il s'agit de modifier les définitions des vecteurs $\mathbf{r}_{i,j}$ des centres de masse des membrures aux articulations pour adapter la formulation dynamique. Un modèle en boucle

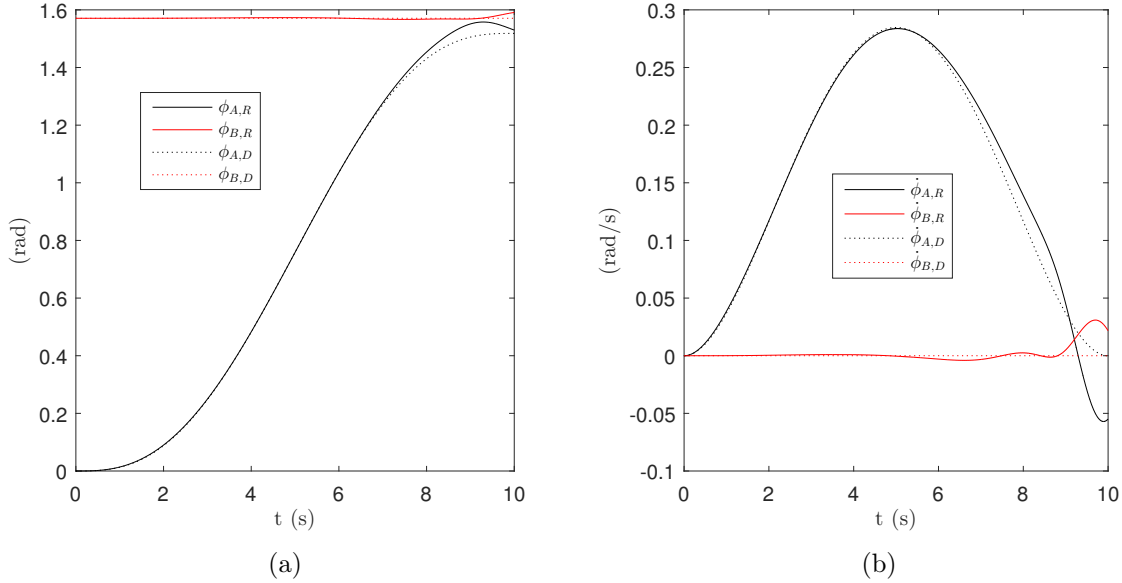


FIGURE 3.27 – Résultat du contrôle en boucle fermée d'une unité ciseau⁵ : (a) orientation des membrures A et B réelles (R) et désirées (D), (b) vitesses angulaires des mêmes corps.

fermée est créé afin de contrôler l'orientation et la configuration de ce mécanisme. Le modèle inspiré de la figure 3.25-b est construit dans *Solidworks* puis importé dans *Simscape Multibody* pour produire le bloc "Scissor mechanism" du modèle de la figure 3.26. L'équation 3.115 est programmée dans le bloc "Inverse Kane" afin de calculer les accélérations des roues d'inerties requises pour suivre la trajectoire désirée à chaque pas de temps de simulation. Pour le calcul de la matrice \mathbf{A} et du vecteur \mathbf{b} , les positions et vitesses angulaires des deux premiers corps (A et B) obtenues par *Simscape Multibody* sont utilisées alors que celles des deux autres corps sont intégrées directement de la contrainte de fermeture, équation 3.99. Finalement, la commande est calculée en déterminant $\dot{\mathbf{q}}$ avec un contrôleur PD :

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_D - k_P(\boldsymbol{\theta}_D - \boldsymbol{\theta}_R) - k_D(\mathbf{q}_D - \mathbf{q}_R) , \quad (3.118)$$

où les indices D et R signifient respectivement que ces valeurs sont celles désirées et celles réellement obtenues de la simulation *Simscape Multibody*, où k_P est le gain proportionnel, k_D le gain dérivatif et où $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta}$. Les résultats en orientations et en vitesses angulaires sont présentés à la figure 3.27. Les courbes démontrent un bon contrôle du mécanisme sur toute

5. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

sa trajectoire avec des valeurs du contrôleur déterminées empiriquement : $P = 5$ et $D = 1,5$. Lorsque le corps A arrive près de sa position finale du mécanisme écrasé, c'est-à-dire superposé aux autres membrures, le système a plus de difficulté à maintenir d'aussi bonnes performances. L'étude du conditionnement de la matrice \mathbf{A} pendant cette simulation montre que celui-ci passe rapidement à des valeurs avoisinant 14 alors que pour le reste de la trajectoire ce conditionnement est stable à 1. Cet aspect n'empêche pas le contrôle, mais révèle une sensibilité du mécanisme à cette configuration. Il est toutefois important de noter que cette position n'est jamais atteinte pour un prototype, car elle demande de superposer complètement les membrures.

3.2.3 Mécanisme sphérique à quatre barres

Les stratégies utilisant des roues d'inertie comme actionneurs ont jusqu'à présent porté sur des mécanismes plans. L'utilisation d'une telle technique pour la ré-orientation en orbite demande de pouvoir gérer l'orientation du système dans l'espace en plus de sa configuration interne. Dans le chapitre précédent, la coupole est mentionnée comme un type d'assemblage prometteur pour les mécanismes plans triangulaires décrits. Afin de tirer profit de l'analyse de la section précédente et de s'approcher de la géométrie d'une coupole, les équations dynamiques d'un mécanisme sphérique à quatre barres sont développées ici puis simulées. En se servant à

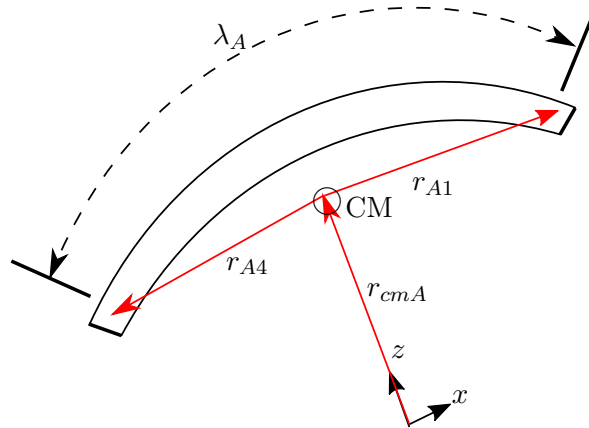


FIGURE 3.28 – La membrure A du mécanisme sphérique à quatre barres avec son référentiel local, $x - y - z$, au centre de rotation.

nouveau de la dérivation des équations de Kane, le mécanisme à quatre barres est décrit avec autant d'équations que de vitesses généralisées. Puisque c'est un mécanisme spatial, 6 degrés de liberté sont nécessaires pour exprimer la position et l'orientation d'une base puis 1 seul degré de liberté supplémentaire pour la configuration du mécanisme à quatre barres. Les trois premières sont sélectionnées comme étant les composantes de la vitesse du centre de rotation

du mécanisme sphérique, où tous les axes des articulations s'intersectent :

$$\mathbf{v}_{CR} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} . \quad (3.119)$$

Les trois suivantes sont les composantes de la vitesse angulaire du premier corps A :

$$\boldsymbol{\omega}_A = \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} . \quad (3.120)$$

Comme ce sont des vitesses relatives aux axes locaux du corps A , ils seront transposés dans le référentiel inertiel grâce à une représentation XYZ des angles d'Euler ϕ, θ, ψ . La matrice de rotation du corps A est ainsi :

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{Z}_\psi \mathbf{Y}_\theta \mathbf{X}_\phi \quad (3.121)$$

La vitesse angulaire du corps A dans son référentiel local est liée au taux de variation des angles d'Euler par :

$$\boldsymbol{\omega}_A = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\eta}} , \quad (3.122)$$

avec

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} . \quad (3.123)$$

Les vitesses angulaires des autres membrures sont exprimées en fonction de $\boldsymbol{\omega}_A$ et des articulations du mécanisme :

$$\boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \quad (3.124)$$

$$\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.125)$$

$$\boldsymbol{\omega}_D = \boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.126)$$

où les \mathbf{e}_i sont les vecteurs unitaires de direction des liaisons. La figure 3.28 montre la géométrie d'une membrure et les vecteurs de position de ses articulations aux extrémités par rapport à son centre de masse. Le schéma montre aussi que chaque membrure couvre en fait un arc de cercle λ_i par rapport à son centre de rotation. Pour simplifier les équations le centre de rotation est défini comme référentiel local et la position du centre de masse de chaque membrure i est \mathbf{r}_{cmi} . Ainsi la rotation du référentiel A au référentiel B se fait d'abord par une rotation autour de y_A de $\frac{-\lambda_A}{2}$, puis autour de z de θ_1 et finalement de $\frac{-\lambda_B}{2}$ autour de y' (MCCARTHY et SOH, 2010). Ce qui permet d'écrire les vecteurs direction des articulations dans le référentiel de la membrure A tels que :

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{Q}_A \mathbf{R}_y \left(\frac{-\lambda_A}{2} \right) \mathbf{e}_z \quad (3.127)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{Q}_A \mathbf{R}_y\left(\frac{-\lambda_A}{2}\right) \mathbf{R}_z(\theta_1) \mathbf{R}_y\left(\frac{-\lambda_B}{2}\right) \mathbf{e}_z \quad (3.128)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{Q}_A \mathbf{R}_y\left(\frac{-\lambda_A}{2}\right) \mathbf{R}_z(\theta_1) \mathbf{R}_y(-\lambda_B) \mathbf{R}_z(\theta_2) \mathbf{R}_y\left(\frac{-\lambda_C}{2}\right) \mathbf{e}_z \quad (3.129)$$

$$\mathbf{e}_4 = \mathbf{Q}_A \mathbf{R}_y\left(\frac{-\lambda_A}{2}\right) \mathbf{R}_z(\theta_1) \mathbf{R}_y(-\lambda_B) \mathbf{R}_z(\theta_2) \mathbf{R}_y(-\lambda_C) \mathbf{R}_z(\theta_3) \mathbf{R}_y\left(\frac{-\lambda_D}{2}\right) \mathbf{e}_z \quad (3.130)$$

Le dernier vecteur pourrait aussi être exprimé avec $\mathbf{e}_4 = \mathbf{Q}_A \mathbf{R}_y\left(\frac{\lambda_A}{2}\right) \mathbf{e}_z$, cependant la relation précédente sera préférable pour la définition ultérieure des contraintes de fermeture. Les positions des centres de masse de chaque membrure peuvent aussi être exprimées par de simples combinaisons linéaires des vecteurs des articulations. Par exemple pour des membrures parfaitement symétriques celles-ci sont :

$$\mathbf{r}_{cmA} = r_s \mathbf{e}_1 - \frac{r_s}{2} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4) \quad (3.131)$$

$$\mathbf{r}_{cmB} = r_s \mathbf{e}_2 - \frac{r_s}{2} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \quad (3.132)$$

$$\mathbf{r}_{cmC} = r_s \mathbf{e}_3 - \frac{r_s}{2} (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \quad (3.133)$$

$$\mathbf{r}_{cmD} = r_s \mathbf{e}_4 - \frac{r_s}{2} (\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3) \quad (3.134)$$

où r_s est le rayon constant de la sphère inscrite du mécanisme. Les vitesses des centres de masse sont obtenues des relations précédentes et donnent :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{CR} + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{cmA} \quad (3.135)$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{CR} + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{cmB} \quad (3.136)$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CR} + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{cmC} \quad (3.137)$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{CR} + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_{cmD} \quad (3.138)$$

Afin de construire le système d'équations de Kane, il faut dériver ces dernières relations à nouveau :

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{CR} + \boldsymbol{\alpha}_A \times \mathbf{r}_{cmA} + \boldsymbol{\omega}_A \times \dot{\mathbf{r}}_{cmA} \quad (3.139)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{CR} + \boldsymbol{\alpha}_B \times \mathbf{r}_{cmB} + \boldsymbol{\omega}_B \times \dot{\mathbf{r}}_{cmB} \quad (3.140)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{CR} + \boldsymbol{\alpha}_C \times \mathbf{r}_{cmC} + \boldsymbol{\omega}_C \times \dot{\mathbf{r}}_{cmC} \quad (3.141)$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{CR} + \boldsymbol{\alpha}_D \times \mathbf{r}_{cmD} + \boldsymbol{\omega}_D \times \dot{\mathbf{r}}_{cmD} \quad (3.142)$$

avec

$$\dot{\mathbf{r}}_{cmA} = r_s \dot{\mathbf{e}}_1 - \frac{r_s}{2} (\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{e}}_4) \quad (3.143)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{cmB} = r_s \dot{\mathbf{e}}_2 - \frac{r_s}{2} (\dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\mathbf{e}}_1) \quad (3.144)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{cmC} = r_s \dot{\mathbf{e}}_3 - \frac{r_s}{2} (\dot{\mathbf{e}}_3 - \dot{\mathbf{e}}_2) \quad (3.145)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{cmD} = r_s \dot{\mathbf{e}}_4 - \frac{r_s}{2} (\dot{\mathbf{e}}_4 - \dot{\mathbf{e}}_3) \quad (3.146)$$

et

$$\alpha_B = \alpha_A + \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 \quad (3.147)$$

$$\alpha_C = \alpha_A + \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\theta}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 \quad (3.148)$$

$$\alpha_D = \alpha_A + \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \ddot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 + \dot{\theta}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\theta}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\mathbf{e}}_3 \quad (3.149)$$

où les $\dot{\mathbf{e}}_i$ sont exprimés tel que décrit dans les travaux de GOSSELIN et GAGNÉ, 1995 :

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_1 \quad (3.150)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{e}_2 \quad (3.151)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{e}_3 \quad (3.152)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_4 = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{e}_4 \quad (3.153)$$

Finalement, une dernière vitesse généralisée est nécessaire pour le seul degré de liberté de la configuration du mécanisme. Cette fois-ci pour simplifier la dérivation, plutôt que de prendre l'orientation absolue d'une seconde membrure, la vitesse angulaire de la première articulation est retenue, $u_7 = \dot{\theta}_1$. Le système a donc sept degrés de libertés et autant d'équations sont nécessaires. Toutefois l'orientation et la position des trois autres membrures doivent être exprimées en fonction de ces seules vitesses généralisées. Or les équations précédentes font apparaître des θ_2 et θ_3 . Pour les éliminer les contraintes de fermeture sont utilisées :

$$\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos(\lambda_D) \quad (3.154)$$

ce qui permet d'obtenir, après substitution de la demie de l'arc tangente $T_{\theta_2} = \tan(\frac{\theta_2}{2})$ dans la première contrainte, une relation exprimant θ_2 en fonction de θ_1 , telle que :

$$A(\theta_1)T_{\theta_2}^2 + 2B(\theta_1)T_{\theta_2} + C(\theta_1) = 0, \quad (3.155)$$

Toutefois l'expression de cette contrainte est sensible à la géométrie des membrures, comme l'illustre la figure 3.29. En faisant varier leur longueur, considérant que toutes les membrures sont identiques, en même temps que l'angle interne θ_1 , les courbes de niveaux montrent qu'en approchant de $\theta_1 = \pi/2$ pour toutes les longueurs de membrure, cette relation fait dégénérer la valeur de θ_2 . Les trajectoires de simulations seront donc sélectionnés pour faire varier θ_1 entre 0 et $\pi/2$ pour les validations en simulation. Il est aussi possible d'obtenir θ_3 d'une contrainte similaire, cependant les équations ne nécessitent pas cette valeur pour être exprimées. La dérivée de l'équation 3.154 fournit une expression de $\dot{\theta}_2$ en fonction de $\dot{\theta}_1$:

$$\dot{\mathbf{e}}_4 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \cdot \dot{\mathbf{e}}_3 = 0 \quad (3.156)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_4] \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \cdot [(\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3] = 0 \quad (3.157)$$

À celle-ci une équation de contrainte supplémentaire doit être ajoutée pour obtenir une relation exprimant la vitesse angulaire $\dot{\theta}_3$:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4 = \cos(\lambda_A) \quad (3.158)$$

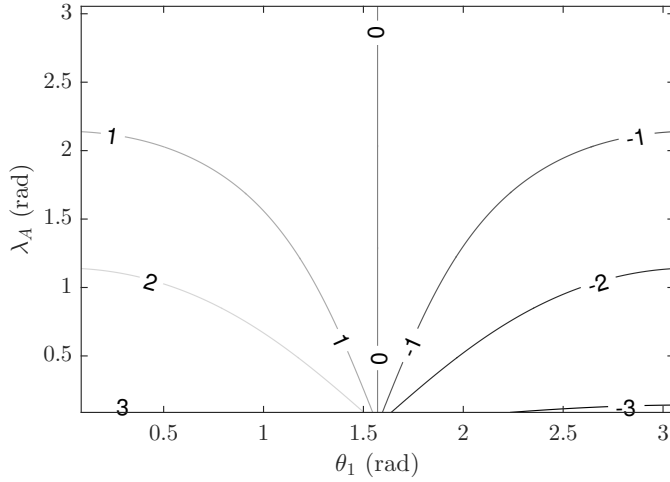


FIGURE 3.29 – Influence de l’arc des membrures λ_A et de l’angle d’ouverture du mécanisme θ_1 sur la valeur du second angle interne du mécanisme θ_2 .

$$\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_4 = 0 \quad (3.159)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_1] \cdot \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1 \cdot [(\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_4] = 0 \quad (3.160)$$

Ces relations sont exprimées sous forme matricielle et les termes coefficients de $\boldsymbol{\omega}_A$ s’annulent alors, ce qui permet l’écriture simplifiée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \dot{\theta}_1, \quad (3.161)$$

avec

$$\mathbf{G} = \frac{-1}{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)^T \mathbf{e}_4 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_4)^T \mathbf{e}_1} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_4)^T \mathbf{e}_1 & -(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_4)^T \mathbf{e}_1 \\ 0 & (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)^T \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3)^T \mathbf{e}_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.162)$$

De la même manière une expression de $\ddot{\theta}_2$ et $\ddot{\theta}_3$ en fonction de $\ddot{\theta}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_A$ est obtenue en dérivant les équations 3.156 et 3.159 :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \ddot{\theta}_1 + \mathbf{b}_G, \quad (3.163)$$

avec la même matrice \mathbf{G} que précédemment et :

$$\mathbf{b}_G = - \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)^T \mathbf{e}_4 & 0 \\ (\mathbf{e}_e \times \mathbf{e}_4)^T \mathbf{e}_1 & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_4)^T \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2(\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_4)^T [(\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3] + \\ \mathbf{e}_4^T [(\dot{\theta}_1 \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 (\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3] \\ 2(\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_1)^T [(\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_4] + \\ \mathbf{e}_1^T [(\dot{\theta}_1 \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 (\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2 + \dot{\theta}_3 (\boldsymbol{\omega}_A + \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_4] \end{Bmatrix} \quad (3.164)$$

Les F_i^* et les F_i sont calculés de la forme générale de l'équation 3.78 et sont listés à l'annexe F avec $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CR} + \mathbf{r}_{cmi}$. Ce qui permet finalement d'obtenir la forme matricielle des équations pour le mécanisme complet :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{I}_f\dot{\omega}_f \quad (3.165)$$

où \mathbf{A} est une matrice de dimension 7 par 7, \mathbf{I}_f de dimension 7 par 4, $\dot{\omega}_f$ le vecteur des accélérations angulaires des roues d'inertie et avec

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} \quad (3.166)$$

Afin de valider ces équations, une simulation *Simscape Multibody* provenant d'un modèle tri-

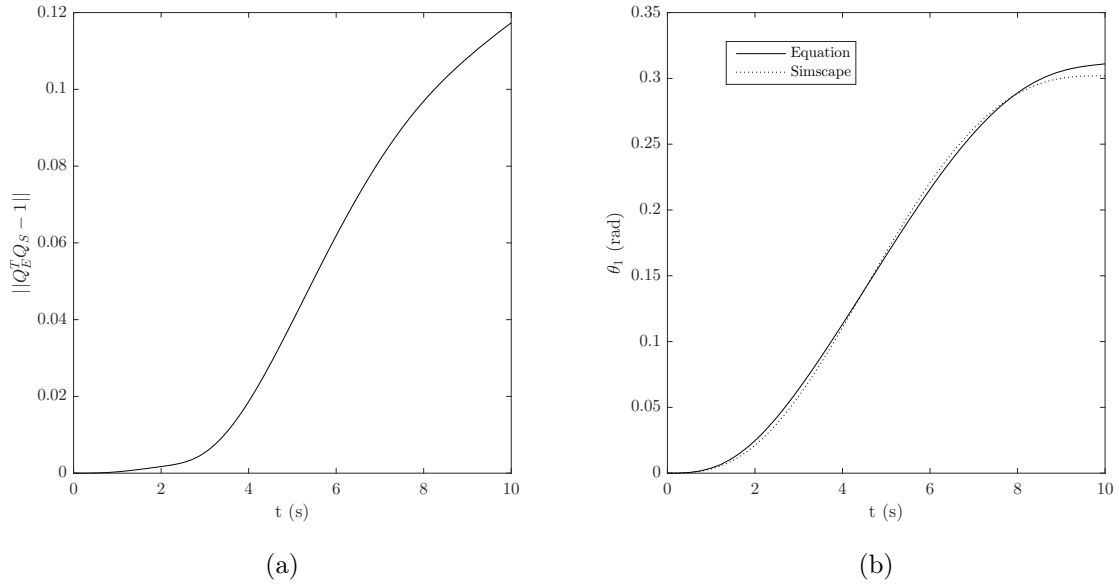


FIGURE 3.30 – Résultats d'une simulation du mécanisme sphérique pour une commande identique à deux roues d'inertie opposées⁶ : a- norme de l'erreur sur les matrices de rotation, b- angle interne θ_1 du premier actionneur du mécanisme.

dimensionnel simple de mécanisme à quatre barres identiques ayant chacune une roue d'inertie au milieu de sa membrure et perpendiculaire à la surface de la sphère est comparée aux résultats des équations matricielles simulées sous *MATLAB* pour des consignes identiques. Le modèle cinématique de *Simscape Multibody* est présenté à la figure de l'annexe E. Il est très

6. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

similaire à celui du mécanisme plan à quatre barres, excepté pour sa liaison attachant le mécanisme au repère fixe, qui est dans ce cas une liaison à six degrés de liberté. Les résultats d'une simulation avec seulement deux roues d'inertie sur des membrures opposées actionnées avec la même commande de palier doux, utilisé pour les validations précédentes, sont présentés à la figure 3.30. Les paramètres géométriques de cette comparaison sont :

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} 6 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, m_i = 0,01, \alpha_i = \pi/2 \quad (3.167)$$

et

$$\mathbf{I}_{fi} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, m_{fi} = 0.002. \quad (3.168)$$

La moyenne des erreurs au carré sur l'angle de configuration du mécanisme, θ_1 , pour ce test

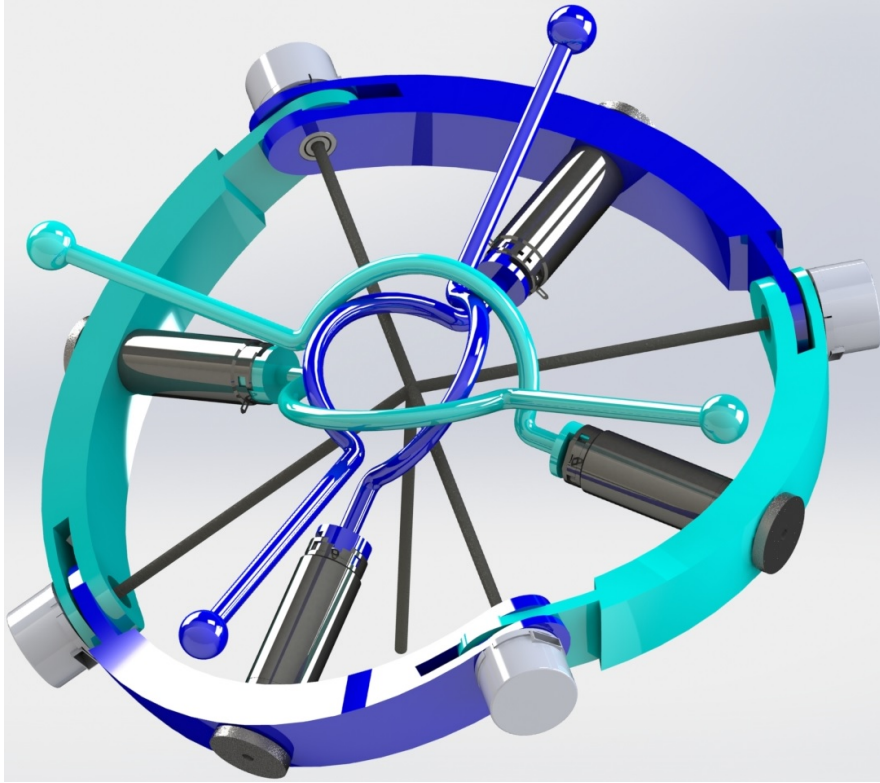


FIGURE 3.31 – Proposition de design d'un mécanisme sphérique à quatre barres équipé de roues d'inertie, de masses déportées et d'encodeurs.

est 0,0038 rad, pour une amplitude de mouvement de 0,32 rad. La comparaison de l'évolution de l'orientation du corps A est présentée par le calcul de la norme de la différence des matrices de rotation, $\|\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} - \mathbf{1}\|$. Les légères différences des propriétés géométriques et inertielles entre le modèle *SimScape Multibody* et la simulation des équations augmente l'erreur en orientation

proportionnellement à la commande, mais reste faible. Puisque ce mécanisme représente bien le potentiel de réorientation et de déploiement par roue d'inertie sur une coupole, il serait avantageux de pouvoir en produire une version physique afin de valider son contrôle. Cependant les conditions de test pour atteindre un environnement semblable à celui en orbite ne sont pas aisément atteignables. Afin de simplifier la gestion des effets de la gravité et de la friction, un concept de prototype est présenté à la figure 3.31 possédant des masses déportées équilibrant chaque membrure individuellement de sorte que son centre de rotation et son centre de masse soient juxtaposés. Le prototype peut être supporté en son centre, avec des axes reliant chaque liaison du mécanisme sphérique à une liaison sphérique centrale. Le concept présenté illustre aussi la disposition de moteurs à courant continu standard pour actionner les roues d'inertie au centre de chaque membrures et des encodeurs aux articulations pour observer l'effet des commandes aux roues d'inertie. Un prototype plan plus réaliste dans le temps alloué à ce projet est présenté à la section suivante.

3.3 Prototype plan

La validation par simulation des sections précédentes est très informative et permet de vérifier les principes théoriques appliqués à des mécanismes complexes à réaliser et surtout à tester dans des conditions représentatives de celle prévues pour leur utilisation. En effet, l'utilisation de roues d'inertie pour la ré-orientation suppose un mécanisme flottant en orbite, ce qui représente plusieurs défis à tester physiquement sur Terre. Néanmoins afin de valider le fonctionnement avec un prototype réel et d'explorer le potentiel de contrôle en boucle fermée de ce type d'actionnement, un modèle plan à deux corps et une liaison passive est réalisé. Cette architecture est la plus simple possible permettant la validation de la stratégie de contrôle de l'orientation et de la configuration d'un mécanisme par roues d'inertie. Une seule liaison passive est contrôlée simultanément avec l'orientation des modules. Ce faisant l'architecture n'est pas une boucle cinématique fermée, mais permettra de valider les équations dynamiques basées sur la conservation du moment angulaire présentées dans les sections précédentes du chapitre. Suivant les équations de la section 3.2.1, les degrés de liberté du mécanisme sont : la position du centre de masse de l'ensemble ou du premier corps et l'orientation des deux corps.

Le prototype conçu est présenté aux figures 3.32 et 3.33. Il comporte une roue d'inertie sur roulement à billes actionnée par un moteur à courant continu grâce à une courroie de néoprène sur chaque corps. Les roues d'inertie possèdent des tiges permettant d'y fixer des poids en rondelle pour modifier leur impact sur le mouvement du mécanisme. Pour vérifier le potentiel de ce type d'actionnement, le mouvement plan ne doit pas être contraint par la friction. Plutôt que de fabriquer ou acheter une table produisant un coussin d'air qui pourrait ne pas être suffisamment puissante et qui en général utilise une grande quantité d'air sous pression, des pattes ont été spécialement conçues pour permettre à un coussin d'air de se former dessous. L'air sort par un trou en leur centre et est emmené par des tubes très flexibles d'une prise

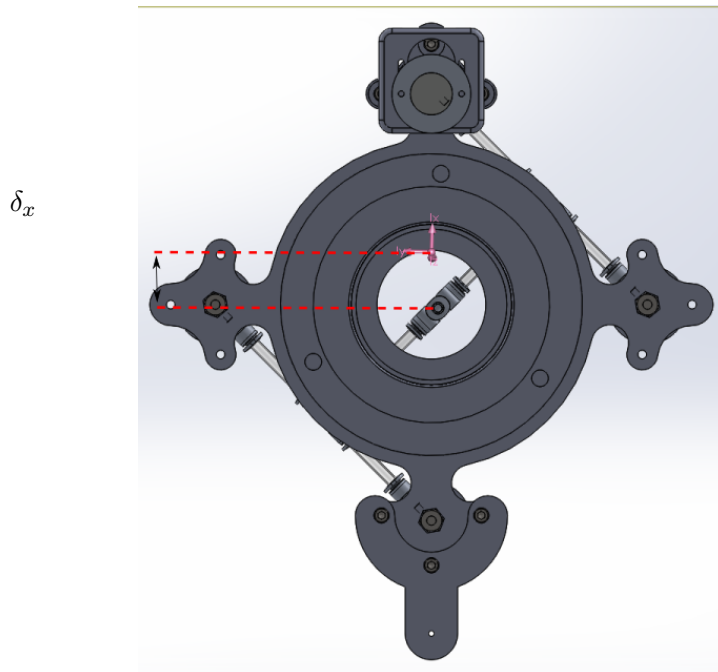


FIGURE 3.32 – Vue en plan d’un module du prototype avec la position de son centre de masse (axes en rose).

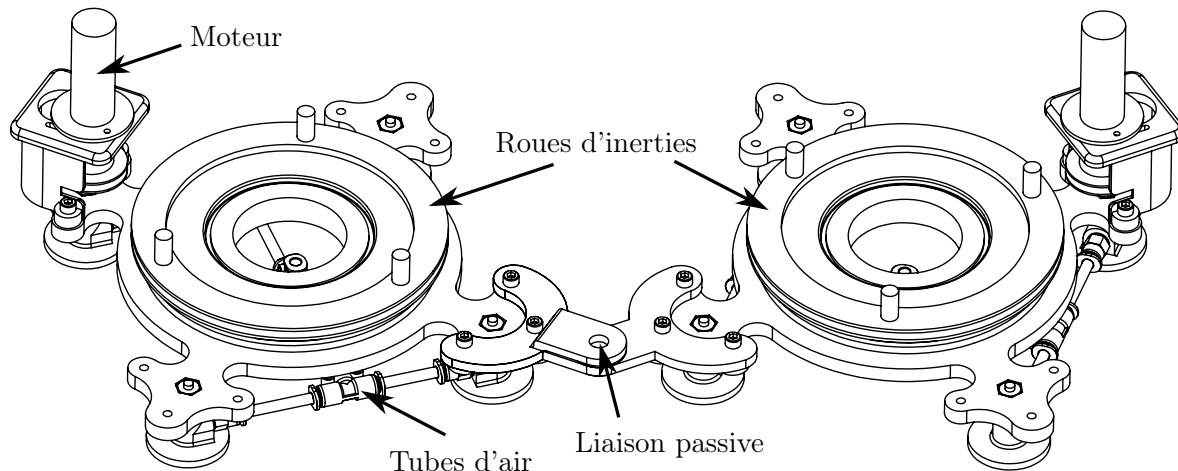


FIGURE 3.33 – Modèle 3D du prototype avec tubes d’air, roues d’inertie et moteurs réalisé avec *Solidworks*.

murale de l’approvisionnement central du laboratoire (100 psi). Puisque le moteur représente la majeure fraction du poids de chaque module, le centre de masse est déplacé légèrement vers les moteurs à partir du centre de volume du module complet. La différence δ_x illustrée à la figure 3.32 est de 5 cm.

Les propriétés physiques de chaque module, estimées au moyen de *Solidworks*, sont :

$$m = 0,4998 \text{ kg} \quad (3.169)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0,00163 & 0,00001898 & 0,00000113 \\ 0,00001898 & 0,0007167 & 0,0004759 \\ 0,00000113 & 0,0004759 & 0,001642 \end{bmatrix} \text{kgm}^2 \quad (3.170)$$

$$\mathbf{r}_{CM} = \begin{Bmatrix} -0,00004962 \\ 0,0489 \\ 0,05459 \end{Bmatrix} m \quad (3.171)$$

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} 0,00007966 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00007966 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001542 \end{bmatrix} \text{kgm}^2 \quad (3.172)$$

Les moteurs sont contrôlés par une carte d'acquisition Phidget connectée en USB à la station de travail. Phidget fournit les éléments de base pour contrôler des moteurs à courant continu en voltage en passant une commande de 0 à 100% du voltage d'entrée de la carte. Les moteurs sélectionnés, des Maxon RE-Max 17, demandent un voltage nominal de 12V. Ils sont aussi équipés de boîtiers de réduction à engrenages planétaires procurant un facteur de réduction de la vitesse de 24 pour 1. De plus, le ratio des poulies d'entraînement de la roue d'inertie multiplie encore ce facteur par 9. La friction dans le système crée invariablement une bande morte autour de 0V. Par identification des spécifications du moteur, elle est estimée entre -1V et 1V. Pour raffiner le contrôle du module avec des simulations hors ligne, il est souhaitable d'avoir un modèle approximatif du moteur. Un moteur à courant continu est généralement modélisé basé sur la seconde loi de Newton et la loi des mailles de Kirkchhoff ($\sum V_{i=1}^n = 0$), considérant que son couple est proportionnel au courant ($T = K_m i$) et que le moteur émet une tension (e) proportionnelle à sa rotation ($e = K_m \dot{\theta}$). Ainsi :

$$I_R \ddot{\theta}_{out} + \mu_m \dot{\theta}_{out} = K_m i \quad (3.173)$$

$$L_m \frac{di}{dt} + R_m i = V - K_m \theta_{out} \quad (3.174)$$

où I_R est le moment d'inertie du rotor, μ le coefficient de friction visqueuse du moteur, K_m la constante de couple du moteur, L_m son inductance, R_m sa résistance électrique, V la tension d'alimentation du moteur et i son courant. La transformée en z de ce modèle possède deux pôles et un zéro, considérant un terme d'erreur de modélisation, et est identifiée expérimentalement avec les lectures de courant, voltage et de vitesse de la carte d'acquisition passée à la boîte à outils *System Identification* de *MATLAB*. Le résultat en est :

$$C_O(z) \theta_{out}(t) = C_I(z) V_{in}(t) + e(t) \quad (3.175)$$

$$C_O(z) = 1 - 0,5479z^{-1} + 0,009344z^{-2} \quad (3.176)$$

$$C_I(z) = 0,4692z^{-1} \quad (3.177)$$

avec θ_{out} , la vitesse du rotor du moteur, V_{in} , le voltage en entrée et e , l'erreur de modélisation. Les modules évoluent sur une table de stratifié extrêmement lisse dont le niveau est méticuleusement vérifié avant chaque séance de tests. Plutôt que de faire projeter de l'air de la table,

le prototype possède sa propre interface lui permettant de se soulever, d'une manière similaire aux travaux de MUROTSU et al., 1996.

Le contrôle des modules est programmé en C++, basé sur la librairie C de Phidget intégrée à une classe pour ce projet. Les communications avec la carte d'acquisition se font par des fonctions "callback" synchronisées sur l'horloge de la carte pour permettre un pas de temps stable entre les lectures et écriture de 8 ms (125 Hz).

3.3.1 Commande

La loi de commande pour le prototype a été sélectionnée de sorte qu'elle reste la plus simple possible. Comme c'est le cas de la majorité des systèmes physiques, les modules sont assujettis à deux catégories de forces externes, celles relatives à leur position, c'est-à-dire l'effet de ressort des câbles d'air et électriques, ainsi que celles relatives à leur vitesse, principalement la friction avec la table. Même si ces effets souhaitent être minimisés, il est réaliste de poser l'hypothèse que l'orientation de chacun des deux corps doit suivre une loi du second ordre, telle que :

$$\dot{u}_i + Wu_i + Z\phi_i = 0, i = 1, 2 \quad (3.178)$$

où $u_i = \dot{\phi}_i$ est la vitesse angulaire du module i et ϕ_i sont orientation. Les équations dynamiques étant en terme d'accélération, cette relation permet d'estimer les accélérations angulaires à partir d'observations sur la vitesse et la position. En effet, les lectures de la vitesse et de la position angulaire sont plus simples à obtenir dans ce contexte avec un suivi visuel (présenté plus loin) et des encodeurs ce qui permet d'estimer l'accélération avec des coefficients de contrôle comparables à un contrôleur PID (proportionnel, intégral, dérivé). Comme c'est pour une boucle de rétro-action servant au contrôle de suivi d'une trajectoire, les positions, vitesses et accélérations angulaires désirées sont connues, aussi l'erreur est utilisée dans les équations dynamiques :

$$\Delta\dot{u}_i = -W\Delta u_i - Z\Delta\phi_i, i = 1, 2 \quad (3.179)$$

Cette estimation de l'accélération peut encore être améliorée avec une prédiction sur l'accélération puisque l'on connaît l'accélération désirée, $u_{i,desiree}$. C'est un contrôle par moment pré-calculé et il a été démontré qu'il est plus performant dans des systèmes assez rapides n'ayant que des sources de mesures lentes et surtout lorsque celui-ci est fortement non-linéaire (PILTAN et al., 2012). La prédiction sur l'accélération est intégrée à l'équation 3.178 tel que :

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i,desiree} - W\Delta u_i - Z\Delta\phi_i, i = 1, 2 \quad (3.180)$$

Les équations dynamiques des deux modules assemblés et de leur roues d'inertie ont été présentées sous la forme matricielle de l'équation 3.91 avec quatre degrés de liberté et deux actionneurs. Le système de localisation et de suivi développé a le potentiel de fournir l'orientation et la position des deux corps. Toutefois, comme seule l'orientation est visée par ce

contrôle, il est avantageux de simplifier l'intensité des calculs de la boucle de rétro-action. Les actionneurs n'ayant pas d'effet direct sur la position du centre de masse, son accélération (\dot{u}_1 et \dot{u}_2) peut être résolue séparément de l'orientation des deux corps (\dot{u}_3 et \dot{u}_4).

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{m_T} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -W\Delta u_3 - Z\Delta\phi_3 \\ -W\Delta u_4 - Z\Delta\phi_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.181)$$

ce qui donne finalement la loi de commande :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\omega}_{f1} \\ \dot{\omega}_{f2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{f1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{f2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ -W\Delta u_3 - Z\Delta\phi_3 \\ -W\Delta u_4 - Z\Delta\phi_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{f1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{f2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.182)$$

Une autre procédure de résolution de ces équations consiste à substituer les expressions de \dot{u}_1 et \dot{u}_2 obtenues de l'équation 3.181 :

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{m_T}(A_1\dot{u}_3 + B_1\dot{u}_4 + C_1) \quad (3.183)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{1}{m_T}(A_2\dot{u}_3 + B_2\dot{u}_4 + C_2). \quad (3.184)$$

dans l'équation 3.182. En inversant l'expression résultante on obtient directement la relation entre les accélérations des deux corps et les accélérations des roues d'inertie qu'il faudra pour les réaliser :

$$\dot{\omega}_f = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{b} \quad (3.185)$$

où $\dot{\omega}_f = \left\{ \dot{\omega}_{f1} \quad \dot{\omega}_{f2} \right\}^T$ est le vecteur des accélérations angulaires des roues d'inertie, $\dot{\mathbf{q}}_s = \left\{ \dot{u}_3 \quad \dot{u}_4 \right\}^T$ est le vecteur des accélérations angulaires des deux corps,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{I_{f1}}(C_3 + A_3\frac{A_1}{m_T} + B_3\frac{A_2}{m_T}) & D_3 + A_3\frac{B_1}{m_T} + B_3\frac{B_2}{m_T} \\ \frac{-1}{I_{f2}}(C_4 + A_4\frac{A_1}{m_T} + B_4\frac{A_2}{m_T}) & D_4 + A_4\frac{B_1}{m_T} + B_4\frac{B_2}{m_T} \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

et

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \frac{-1}{I_{f1}}(E_3 + A_3\frac{C_1}{m_T} + B_3\frac{C_2}{m_T}) \\ \frac{-1}{I_{f2}}(E_4 + A_4\frac{C_1}{m_T} + B_4\frac{C_2}{m_T}) \end{Bmatrix}. \quad (3.187)$$

Le schéma correspondant à cette boucle de rétro-action est présenté à la figure 3.34.

3.3.2 Contrôlabilité

Cette dernière procédure de résolution a aussi l'avantage de condenser les variations possibles de sa stabilité dans les propriétés d'une seule matrice carrée, \mathbf{A} . Par exemple pour la configu-

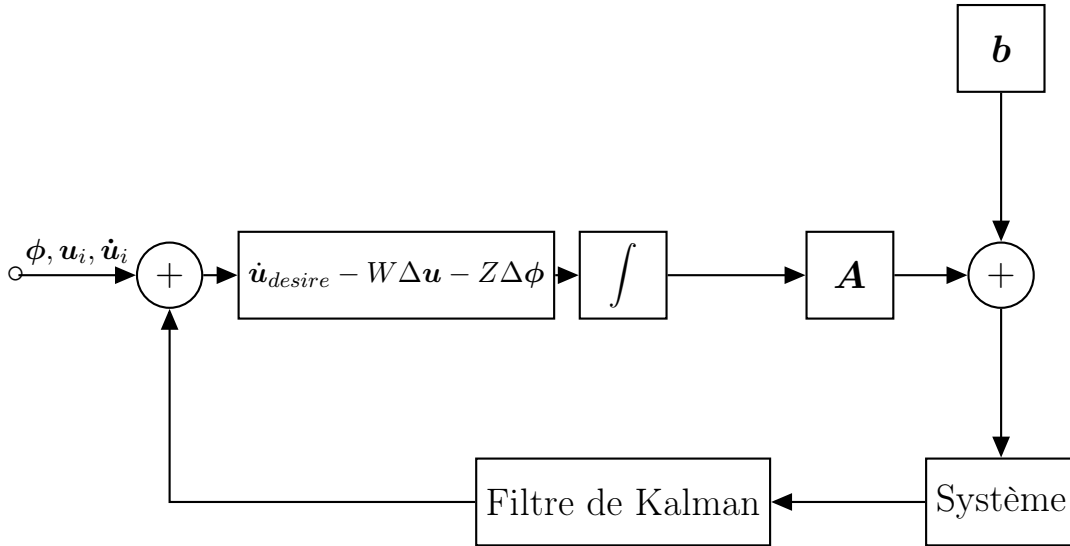


FIGURE 3.34 – Schéma blocs du contrôle en boucle fermée.

ration géométrique de ce prototype, la matrice \mathbf{A} de l'équation 3.186 devient :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10,3c_1^2 + 10,3s_1^2 + 3,31 & 10,3c_1c_2 + 10,3s_1s_2 \\ 10,3c_1c_2 + 10,3s_1s_2 & 10,3c_2^2 + 10,3s_2^2 + 3,31 \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

où s_i et c_i sont les sinus et cosinus de l'orientation absolue du corps i . En traçant l'évolution du conditionnement de cette matrice selon l'évolution de certains paramètres géométriques, une meilleure compréhension des comportements du système est possible. La figure 3.35-a montre que lorsque le rayon du module devient très petit le conditionnement de la matrice devient rapidement très grand. Autrement dit, plus le module est petit moins le système dynamique est stable. La figure 3.35-b montre que le centre de masse du module ne devrait pas trop s'éloigner de l'axe central entre le moteur et le liaison, sans quoi le conditionnement de la matrice devient trop grand. Toutefois les courbes montrent aussi dans ce cas que le décalage du centre de masse n'a d'effet sur le mécanisme que pour des configurations près du mécanisme refermé (petit θ).

Acquisition du mouvement

L'acquisition de données sur le mouvement des modules est sensible et non-triviale. Les modules doivent avoir le moins de câble possible les reliant à une structure fixe ainsi que le moins de poids embarqué possible. L'utilisation des Phidgets et des moteurs DC Maxon déjà montés avec un encodeur optique permet l'acquisition de la position de chaque moteur, duquel il est possible d'inférer leur vitesse angulaire, en plus de leur consommation de courant. Quoiqu'il puisse être utile à de hautes fréquences d'acquisition pour un contrôle en force, le courant n'a été utilisé que pour assurer des protections logicielles à la commande des moteurs. Les encodeurs quant à eux sont très précis, n'ajoutent pas de friction (optiques) et leur fréquence

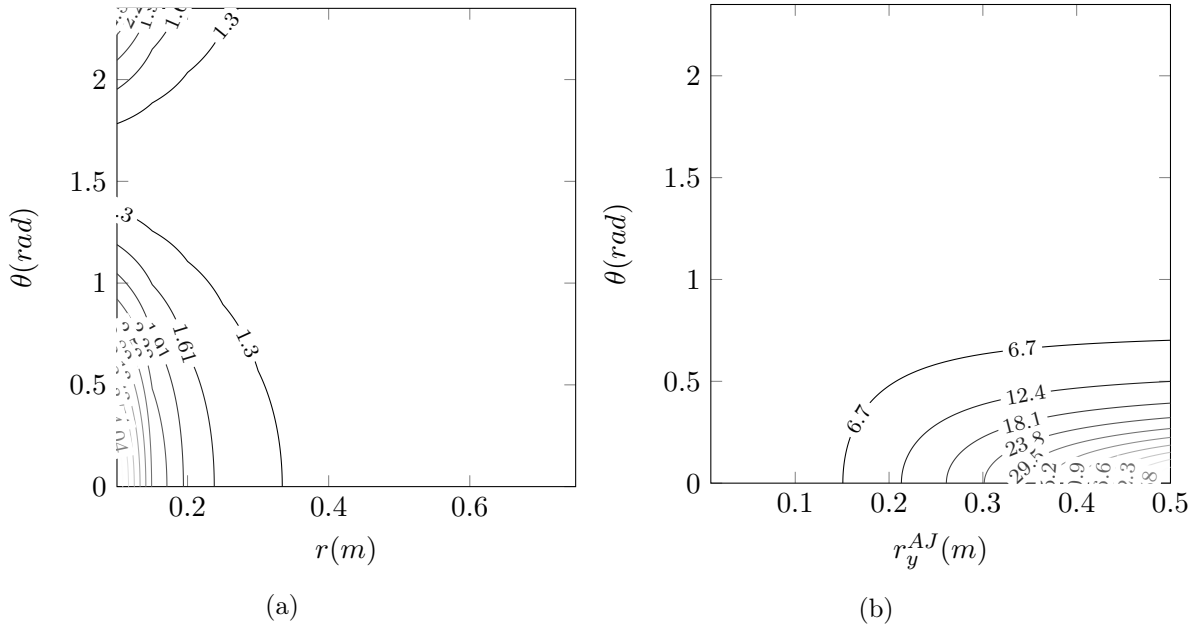


FIGURE 3.35 – Évolution du conditionnement du jacobien en faisant varier : (a) le rayon du module, (b) le décalage selon y du centre de masse.

d’acquisition avec la carte Phidget est satisfaisante pour cette plateforme (125 Hz). Il faut néanmoins passer ces vitesses dans la dynamique directe développée pour le prototype pour obtenir le mouvement estimé des plateformes. Les équations réduites sont suffisamment rapides à résoudre pour ne pas trop ralentir l’acquisition, mais elles ne tiennent pas compte des nombreuses perturbations auxquelles le système est soumis. Il est donc nécessaire d’avoir un système de localisation absolu des modules procurant au minimum l’orientation de chacun.

Pour ce faire une caméra USB haute définition est installée en plongée au-dessus de la table d’expérimentation. La librairie C++ *ArUco* (MUÑOZ-SALINAS et al., 2014) est utilisée pour détecter et suivre précisément des marqueurs fiduciaires installés sur les modules. Cette librairie a été retenue parmi celles de marqueurs fiduciaires disponibles pour sa simplicité et sa robustesse. Elle est entièrement programmée avec des routines de la librairie *OpenCV*. Comme la majorité des librairies de la sorte, son objectif est de positionner des éléments virtuels dans un environnement réel capté par caméra. Aussi certaines limitations de ce type d’algorithme qui n’ont aucun impact pour la réalité augmentée peuvent rendre plus instable l’utilisation de ce modèle pour le suivi du mouvement réel, l’acquisition en boucle fermée. La principale faiblesse apparaît lorsque la pose complète (6 degrés de liberté) est demandée pour un marqueur presque parallèle ou presque perpendiculaire à la caméra. L’algorithme éprouve dans ces situations des difficultés à déterminer la bonne orientation, car la déformation du marqueur est trop faible pour inférer un angle. Par contre la précision reste bonne dans le plan parallèle à l’image de la caméra, ce qui importe pour un suivi de marqueur en plongée. L’algorithme a donc été légèrement altéré de sorte qu’un mouvement plan soit imposé et qu’ainsi cette zone

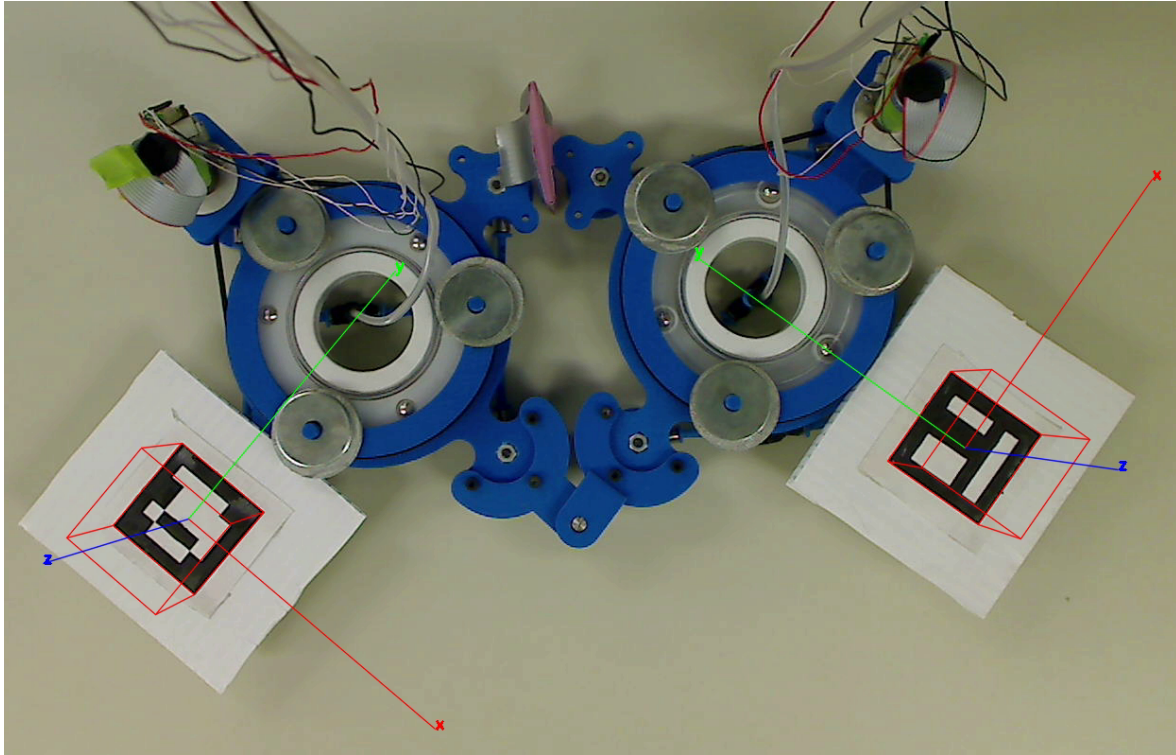


FIGURE 3.36 – Prototype avec ses marqueurs fiduciaires tel que vu par la caméra. Le suivi des marqueurs superpose sur l'image le référentiel (orientation et position) des marqueurs trouvés dans l'image.

d'instabilité soit éliminée. Un référentiel centré sur le marqueur, représentant le résultat visuel des routines de détection pour chaque module, est montré à la figure 3.36, en superposition à l'image prise par la caméra. Le matériel utilisé limite la fréquence d'acquisition des caméras USB, ce qui fournit des données de localisation à 30 Hz. Toutefois, le système est très précis et donne la position et l'orientation complète de chaque marqueurs.

Les équations dynamiques nécessitent d'avoir une lecture de la vitesse, mais celle-ci ne peut pas être mesurée directement par le suivi des marqueurs ni inférée avec précision des encodeurs aux moteurs des roues d'inertie. Un filtre de Kalman est donc ajouté à la rétro-action de la caméra pour dériver sa vitesse et son accélération tout en lissant en partie le faible bruit provenant de la lecture de position des marqueurs. Afin d'accélérer la réponse du filtre, la sortie des encodeurs est passée dans les équations dynamiques directes du système pour estimer l'accélération des modules et utiliser ces valeurs pour mettre à jour le filtre plus rapidement (125 Hz versus 30 Hz). Cela permet du même coup de lisser un peu la vitesse dérivée par le filtre et de rendre possible une navigation à l'estime lorsque les marqueurs ne sont pas visibles (cachés par des câbles ou hors du cadre) pendant une courte durée. Le filtre est construit avec, pour chaque degré de liberté :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \quad (3.189)$$

où $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ est l'estimé de \mathbf{x} à l'étape courante (k) en fonction des résultats de l'étape précédente, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ est l'estimé de l'étape précédente et \mathbf{A}_k est la matrice d'état de l'étape courante, équation 3.193. Aussi les matrices d'erreurs et d'observations (ou de mesures) sont mises à jour à chaque pas de temps avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \end{aligned} \quad (3.190)$$

où \mathbf{Q} est la matrice d'erreur de modélisation discrète, équation 3.195, qui est utilisée pour calculer la matrice de gain de Kalman (\mathbf{S}_k étant seulement une matrice temporaire) :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}, \end{aligned} \quad (3.191)$$

où \mathbf{C} est le vecteur des observations, équation 3.194. L'état courant est ensuite calculé à partir du modèle, de l'état précédent et des entrées, tel que :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \\ \mathbf{P}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}. \end{aligned} \quad (3.192)$$

La matrice d'état est définie pour représenter un modèle cinématique continu :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.193)$$

Puisque les états observés sont l'orientation et l'accélération angulaire, la matrice des observations est :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.194)$$

La matrice de modélisation discrète, inspirée des travaux de ZARCHAN et MUSOFF, 2005, donne :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{dt^5}{20} & \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{6} \\ \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{3} & \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt^3}{6} & \frac{dt^2}{2} & dt \end{bmatrix} \quad (3.195)$$

et la matrice de confiance des mesures, déterminée expérimentalement, est :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (3.196)$$

pour chaque degré de liberté i , c'est-à-dire pour les deux orientations absolues. Ce qui permet finalement de calculer l'état $\hat{\mathbf{x}}$ en fonction de l'entrée \mathbf{y} :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \begin{Bmatrix} \phi_i \\ u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{Bmatrix} \phi_{i,observe} \\ 0 \\ \dot{u}_{i,observe} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (3.197)$$

Des itérations sur le design ont été requises afin de limiter le plus possible les effets indésirables des tubes amenant l'air au prototype et des câbles électriques des moteurs et encodeurs. La solution finale utilise des conducteurs électriques ultra-légers et flexibles provenant de câbles de souris d'ordinateur et des tubes d'air flexibles en PVC d'un diamètre interne de 1/8" avec une paroi mince de 1/32" d'épaisseur. Une grande attention portée au niveau de la table préalable à chaque expérimentation a permis des résultats reproductibles minimisant les forces externes.

Résultats

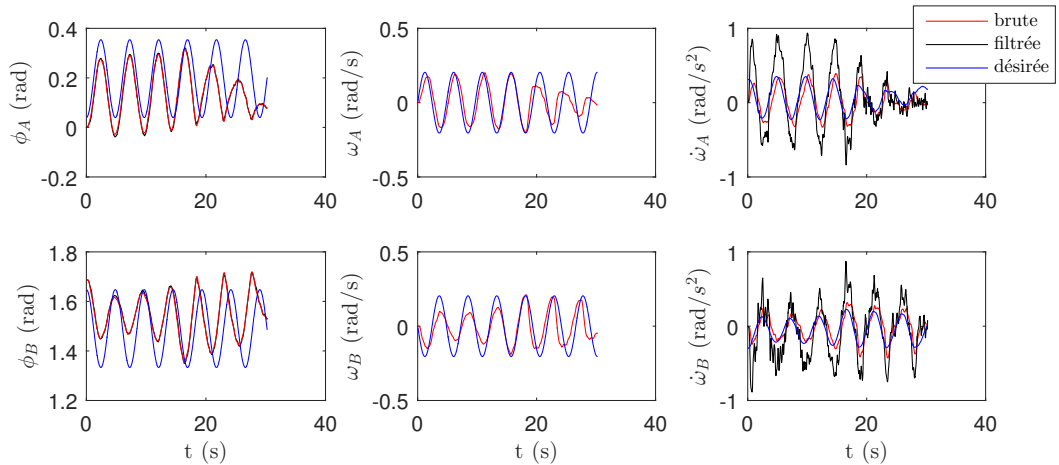
Plusieurs tests ont été effectués sur la plateforme, permettant de mettre en lumière des incongruités de contrôle de même que des forces externes prépondérantes nuisant à la dynamique qu'il est prévu d'observer. Après itérations, des trajectoires représentatives du potentiel du mécanisme ont été produites et reproduites afin de s'assurer de la robustesse des résultats. La première trajectoire est montrée à la figure 3.37. Elle a comme consigne de faire osciller les deux corps selon :

$$\begin{aligned}\phi_A &= \phi_{A,init} + \pi/12(1 - \cos(0, 8t)) \\ \phi_B &= \phi_{B,init} + \pi/12(\cos(0, 8t) - 1)\end{aligned}\quad (3.198)$$

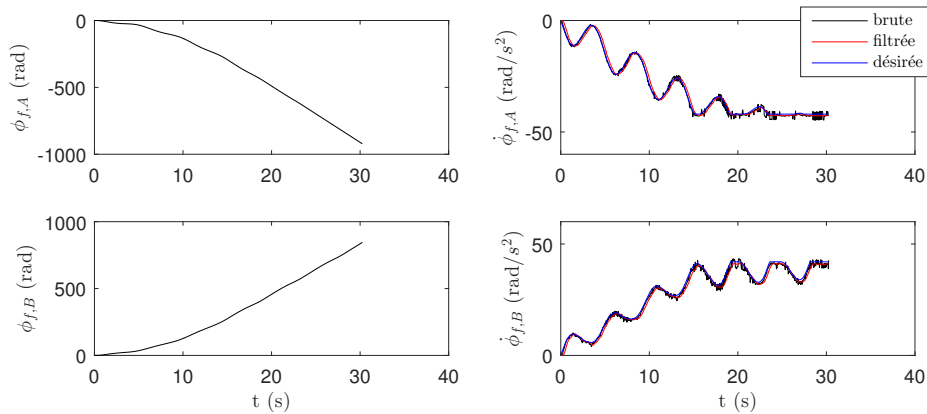
Pour tous les tests les coefficients finaux de 3.180 sont $W = 2\zeta\omega_0$ et $Z = \omega_0^2$ avec une valeur d'amortissement de $\zeta = 0.5$ et une fréquence naturelle de $\omega_0 = 1.05$. La courbe de vitesse de la figure 3.37-a montre que les modules éprouvent de la difficulté à respecter la trajectoire autour de 25 s de test, ce qui s'explique par la saturation des moteurs des roues d'inerties. En effet, ceux-ci atteignent à ce moment leur limite en vitesse, 40 rad/s, comme le montre la figure 3.37-b.

Le deuxième test dont les résultats sont présentés aux figures 3.38-a et 3.38-b utilise la même commande pour le premier corps, mais donne la consigne au second de rester sur place. Les courbes montrent que le mouvement transmis au second module est difficile à arrêter, mais le premier corps bouge avec plus d'amplitude et de manière plus constante que le second qui tente de freiner son oscillation. Finalement le dernier test, dont les résultats sont présenté

7. Un fichier vidéo a été déposé séparément.



(a)



(b)

FIGURE 3.37 – Test 1 avec les consignes 3.198⁷ : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d’inertie.

aux figures 3.39-a et 3.39-b, impose la même consigne aux deux corps, ceux-ci devant donc osciller ensemble. Dans les deux cas la consigne est bien suivie, du moins jusqu’à saturation de la roue d’inertie du second module. Les performances moyennes des deux premiers tests sur l’ensemble de leur trajectoire sont présentées au tableau 3.2 sous forme de la moyenne du carré de leurs erreurs. Les résultats sont difficilement comparables à d’autres stratégies d’actionnement, mais démontrent dans l’absolu un rendement satisfaisant.

	Test 1	Test 2	Test 3
$RMS_{\phi_1}(rad)$	0,078	0,112	0,06
$RMS_{\phi_2}(rad)$	0,094	0,049	0,079

TABLEAU 3.2 – Moyenne du carré des erreurs des tests.

8. Un fichier vidéo a été déposé séparément.
 9. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

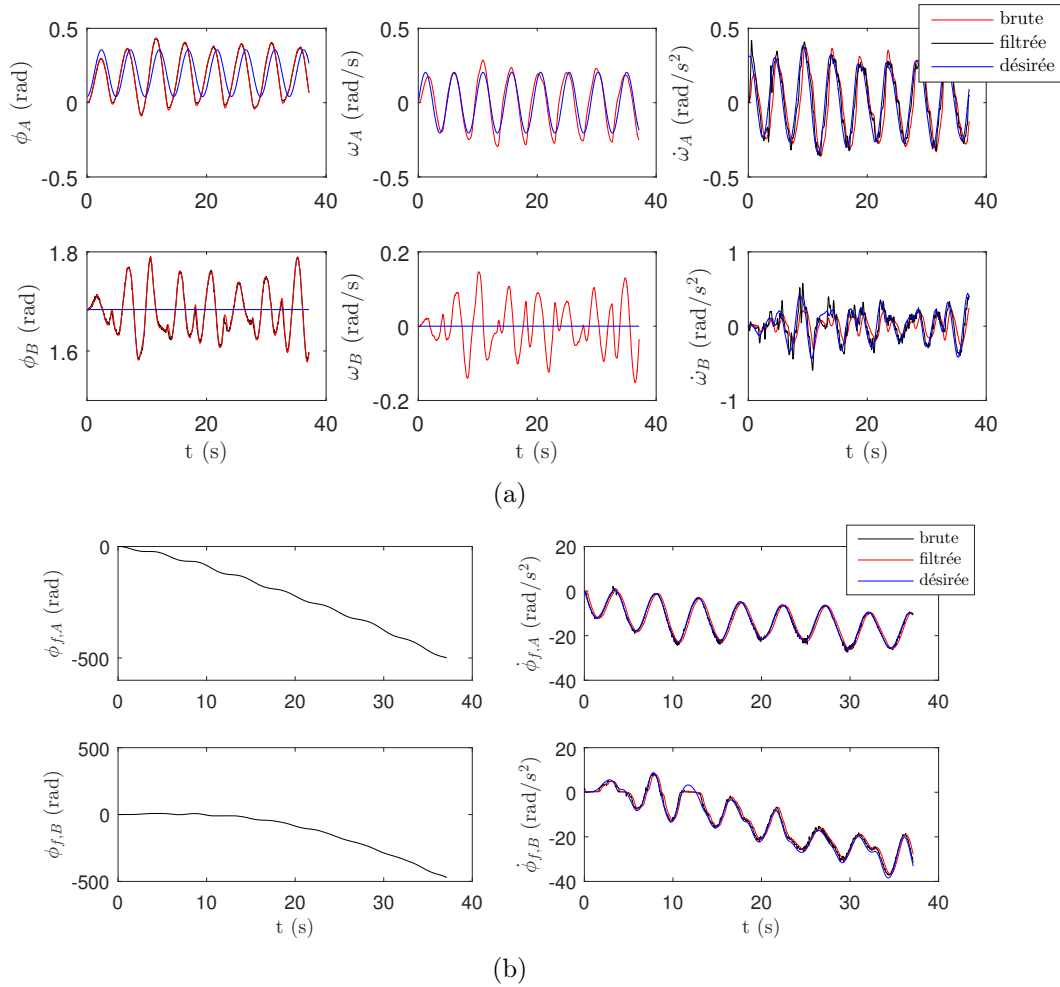
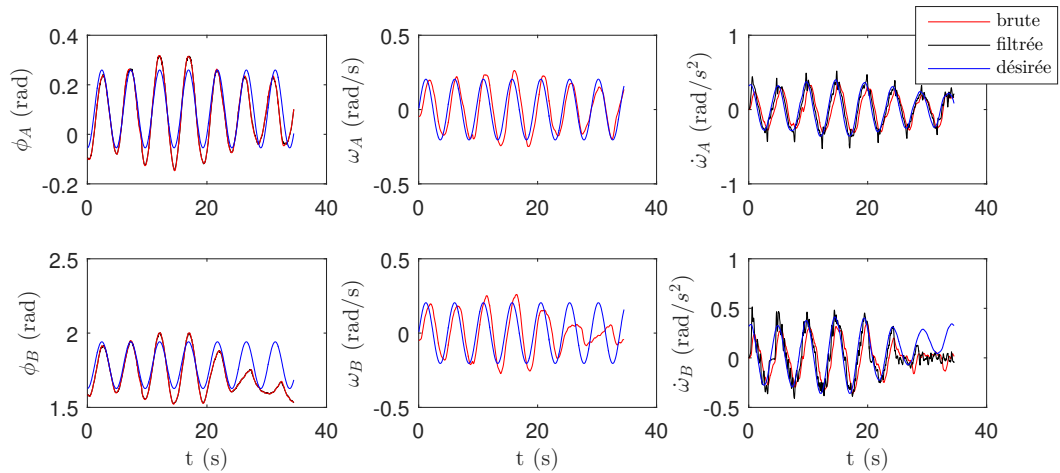


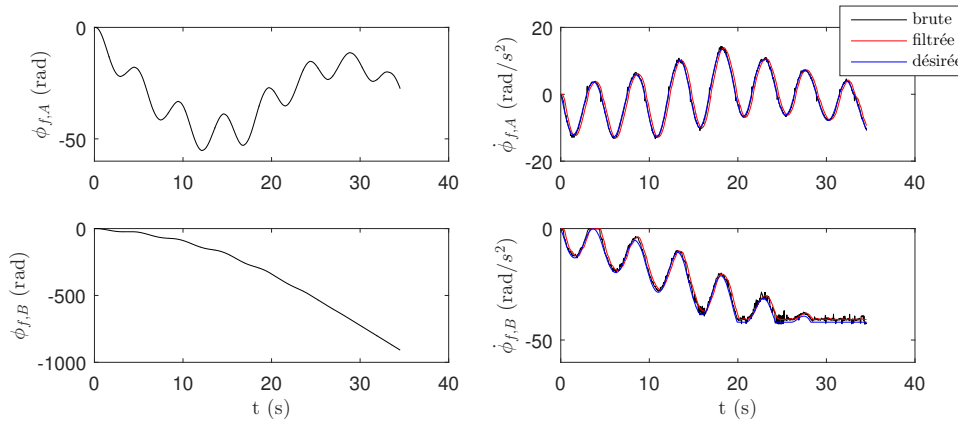
FIGURE 3.38 – Test 2⁸ : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d’inertie.

Pour tous ces tests, une accumulation de la vitesse de l’actionneur fait en sorte qu’il sature. Afin de valider que cet effet est bien dû à des forces constantes présentes sur la plateforme d’expérimentation non-idéale et non à des erreurs de contrôle ou d’intégration, une nouvelle série de test a été produite. En effet, une courbure minimale de la table ou une tension dans les câbles aurait tendance à créer des forces et moments non nuls ne pouvant être compensés que par des accélérations constantes des roues d’inerties, amenant celles-ci à saturer en vitesse éventuellement. Pour éliminer les effets d’une force constante, un filtre passe-haut est ajouté au contrôleur, dont les performances sont montrées à la figure 3.40. Empiriquement, un design de filtre procurant de bonnes performances est un Tchebyshev type I d’ordre 2, de fréquence de coupure 0,1 Hz et avec une ondulation de crête à crête de 0,1 dB.

Le test 1 est refait, avec les mêmes consignes et les mêmes modules, avec ce filtre en plus sur la commande pour éviter de réagir aux effets non souhaités de la plateforme expérimentale. La courbe de la figure 3.41-b montre que les moteurs ne saturent plus. Par exemple, la vitesse de



(a)



(b)

FIGURE 3.39 – Test 3⁹ : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d’inertie.

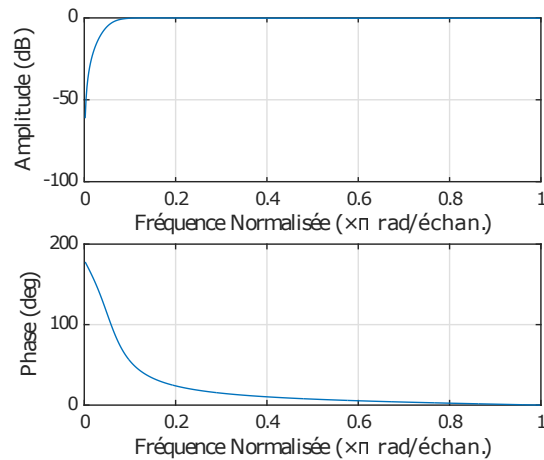


FIGURE 3.40 – Amplitude et phase du filtre Tchebyshev Type I utilisé sur la commande du prototype.

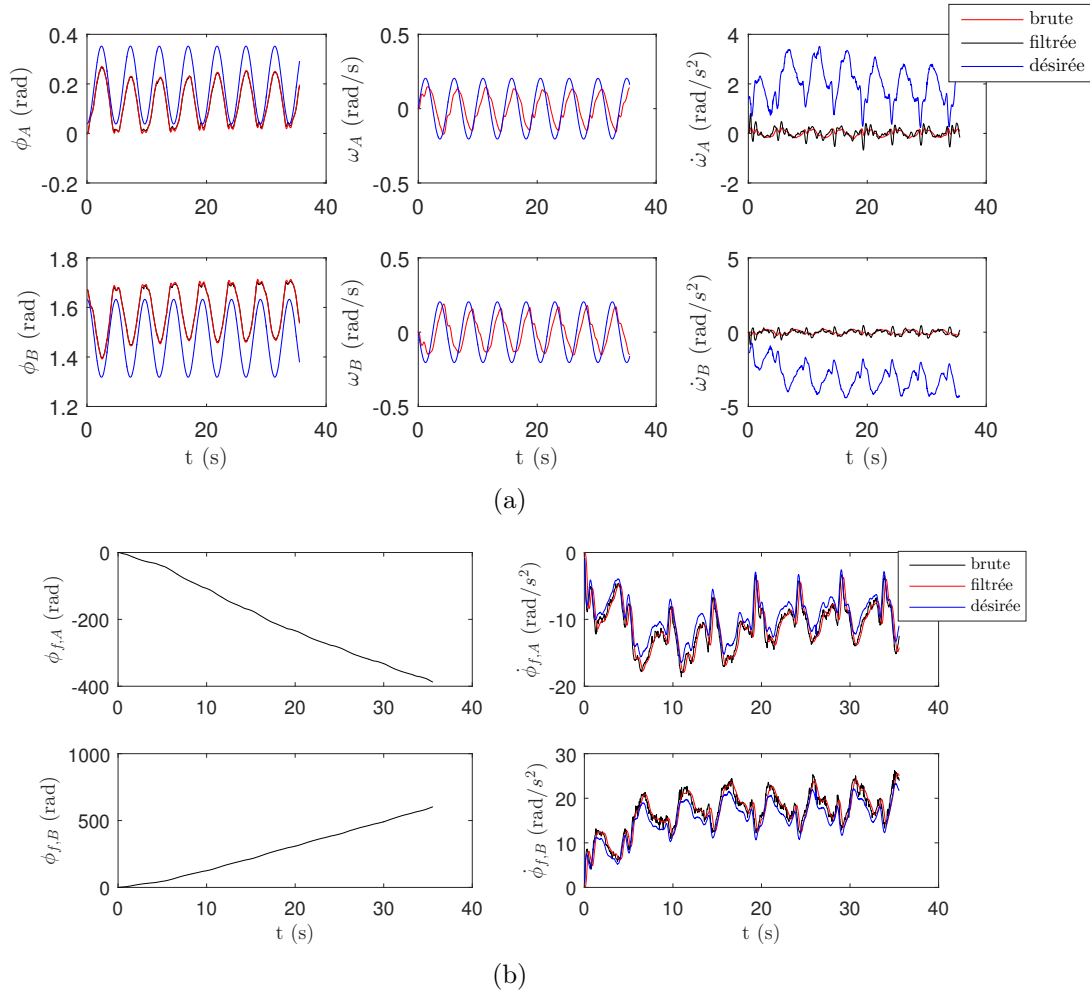


FIGURE 3.41 – Test 1 avec les consignes filtrées : (a) position, vitesse et accélération angulaires des corps et (b) commandes aux roues d’inertie.

la roue d’inertie du module B augmente rapidement au début puis stabilise sa valeur moyenne autour de 18 rad/s. Par ailleurs, la figure 3.41-a montre que le second module n’arrive pas à suivre la trajectoire et dérive. L’accumulation dans la valeur intégrée de la vitesse n’est donc pas due à des erreurs numériques mais aux forces externes de la plateforme expérimentale qui sont constantes et demandent donc des accélérations constantes pour être vaincues.

Ce prototype simple dans le plan a permis de valider le principe d’actionnement d’un mécanisme par roues d’inertie plutôt que par l’actionnement des articulations rotoïdes. La loi de contrôle est très simple, la plateforme expérimentale assez bruitée et l’acquisition de données sur le mouvement des modules plutôt lente, mais la dynamique du mécanisme parvient malgré tout à être bien contrôlée avant saturation des moteurs. Il est raisonnable de penser qu’un assemblage en couple aurait des performances similaires suivant la dynamique développée à la section 3.2.3. C’est donc un nouveau mode d’actionnement dont le bon potentiel pour le déploiement de structures flottantes de grandes dimensions en orbite a été démontré et validé

dans ce chapitre.

3.4 Conclusion

Ce chapitre a couvert différents systèmes de ré-orientation innovateurs. Partant du principe que la quantité de mouvement et le moment angulaire sont conservés, une approche majoritairement cinématique a permis d'estimer les effets du déploiement d'un module déployable du chapitre précédent. Suite à ces premières dérivations mathématiques, une solution utilisant la périphérie du satellite pour actionner linéairement des masses a été proposée et dérivée pour deux mécanismes dans le plan : un carré avec quatre masses, une sur chaque arête, et un cadre à trois masses, dont une sur sa diagonale. L'approche a été généralisée pour la réorientation dans l'espace via l'exemple d'un cube avec douze masses. Les résultats ont montré de bonnes performances de ces systèmes, aussi une étude de l'influence des principaux facteurs géométriques a été réalisée. Si ces actionneurs peuvent être plus adaptés à certains types de satellites, il a été démontré qu'à masse égale une roue d'inertie permet des mouvements plus amples. Une nouvelle approche a été développée, qui consiste à utiliser des roues d'inertie pour le déploiement de mécanismes aux articulations passives. Le principe a été dérivé selon le formalisme des équations de Kane, de sorte que les expressions soient relativement simples et exprimées en terme d'accélération. Des modèles plans à deux et quatre corps formant une chaîne cinématique fermée ont été développés et validés par des simulations *Simscape Multibody*. Finalement, un premier modèle de coupole simple, représenté par le mécanisme sphérique à quatre barres a été étudié avec ce principe d'actionnement et s'est avéré permettre le contrôle de l'orientation et de la configuration du mécanisme. Afin d'explorer le contrôle de ce type d'actionnement, un modèle à deux corps flottant sur un coussin d'air a été fabriqué et les résultats des expérimentations ont été présentés.

Chapitre 4

Étude de cas : la récolte de débris orbitaux

Les concepts des chapitres précédents peuvent être appliqués à différents contextes d'utilisation. Certains des choix de conception ont été faits en fonction d'applications spatiales et ce chapitre propose ainsi d'étudier l'une de ces utilisations plus en détail. Une structure déployable composée des éléments triangulaires du chapitre 2 peut servir d'antenne de télécommunication, de panneau solaire, de voile solaire ou même un module de station spatiale. Cependant toutes ces utilisations, comme tous les systèmes en orbite, sont menacées par la grande quantité de débris pouvant à tout moment les rendre inopérants. Le danger créé par la présence de débris en orbite stimule beaucoup d'intérêt auprès des agences spatiales, des groupes de recherche en technologies spatiales et fait même partie de la culture populaire. Par exemple la télésérie *Quark* (Henry, 1977) et plus récemment les films *Gravity* (Cuaron, 2013) et *Wall-E* (Stanton, 2008), dont l'image présentée à la figure 4.1 est tirée, ont influencé cette culture. L'application discutée dans ce chapitre consiste donc à capturer et ralentir des débris orbitaux entre 1,4 cm et 10 cm afin de rendre ces trajectoires plus sécuritaires. Il s'agit d'une nouvelle approche proposée pour un problème bien connu, mais pour lequel aucune solution réalisable et ciblant ces dimensions d'objets n'est encore disponible.

Le nouveau concept de mécanisme déployable plan à un degré de liberté utilisant des courroies crantées, présenté au chapitre 2, est assemblé en surface tessellée dont les dimensions et la géométrie sont adaptées à la récolte de débris. Tel que mentionné précédemment, ce mécanisme atteint un ratio d'expansion inégalé par ses comparables et ne requiert qu'un nombre limité d'actionneurs. Qui plus est, chacune des faces conserve sa géométrie triangulaire tout au long de la phase de déploiement, ce qui s'avère utile pour déplier une membrane de textile supporté par cette structure. Toutes les faces ainsi assemblées peuvent être actionnées par une articulation centrale, à condition que les impacts sur l'orientation du système soient compensés par un contrôleur et des actionneurs indépendants. Plutôt que d'utiliser à cette fin des



FIGURE 4.1 – L'état des débris en orbite selon les producteurs du film *Wall-E* (Stanton, 2008).

propulseurs chimiques, d'autres avenues ont été proposées au chapitre 3. La solution utilisée pour l'application traitée dans ce chapitre est l'actionnement redondant par roues d'inertie, permettant de ré-orienter l'engin spatial suite à un contact avec des débris. En effet cette approche permet de contrôler avec un même système l'orientation et la configuration de l'engin spatial. Sa redondance permet aussi de conserver le contrôle du mécanisme en cas de bris.

La situation générale des débris orbitaux est d'abord présentée, suite à quoi des objectifs réalistes de mission sont déterminés. Le mécanisme est alors optimisé et ses composants adaptés pour cette utilisation. Sa dynamique en orbite est ensuite dérivée afin d'estimer sa durée de vie utile et les besoins énergétiques. Le potentiel de contrôle de l'orientation par les roues d'inertie est ensuite discuté pour réagir à un impact critique de débris capturé.

4.1 Les débris orbitaux

Le développement et la mise en orbite d'un satellite peuvent coûter jusqu'à 650 M\$US. Ce prodige technologique n'est possible qu'avec la collaboration de plusieurs agences, instances gouvernementales, institutions académiques et intérêts privés. Cela mène invariablement à des projets ayant plusieurs objectifs en parallèle, répondant à différents intérêts, faisant appel à des équipes dispersées et à des budgets gigantesques¹.

Ces investissements à très haut risque sont, depuis quelques temps, sujets à une autre source de danger : l'expansion de la population de débris en orbite. Les orbites les plus populaires sont les plus basses, soit sous les 2000 km d'altitude. Elles sont nommées LEO (*Low Earth Orbits*) et servent autant aux satellites d'observation qu'à certains réseaux de télécommunication et aux missions habitées (Krag et al., 2007). Malheureusement elles sont aussi les plus peuplées

1. Entrevue à ce sujet avec le directeur scientifique de la NASA sur *Discovery* : <http://curiosity.discovery.com/question/satellites-cost>, visité le 05/09/2014

de débris : étages de propulsion d'anciennes missions, satellites hors fonction et particules de toutes tailles s'étant détachées d'objets spatiaux naturels ou artificiels.

4.1.1 Modèle de débris sur LEO

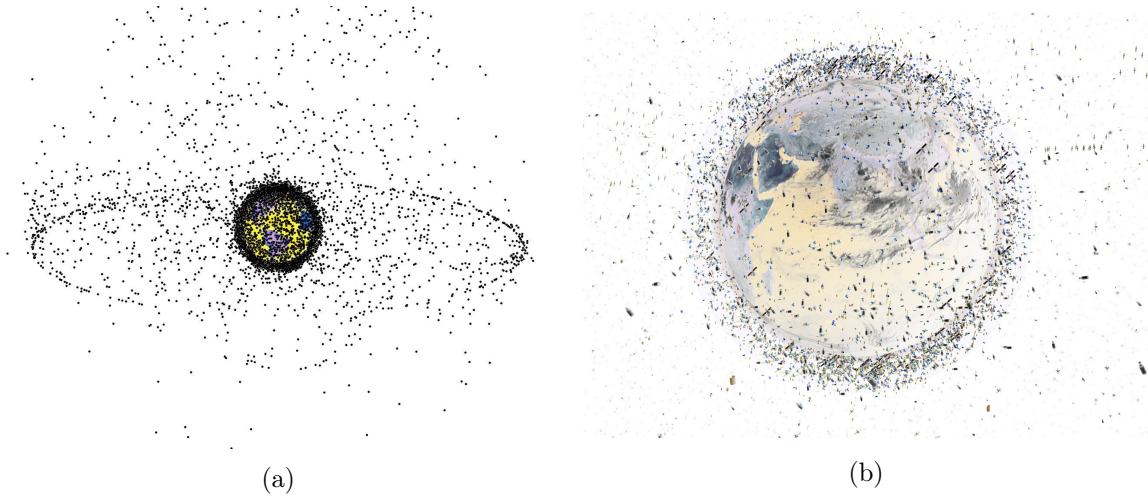


FIGURE 4.2 – Visualisation des débris autour de la Terre : (a) Vue d'ensemble provenant de la NASA², (b) Zoom sur LEO provenant de l'ESA³

La figure 4.2 présente des représentations de débris sur LEO ; l'échelle de ces débris a été augmentée de sorte qu'ils soient visibles malgré l'échelle globale de l'image.

Le phénomène d'augmentation de la population de débris en orbite a été modélisé par KESSLER et COUR-PALAIS, 1978 il y a déjà plus de trois décennies et les prédictions du modèle ont depuis motivé l'adoption de réglementations et le développement de nouvelles technologies pour tenter de le contrer (LIOU et JOHNSON, 2014). Le modèle prédit que l'augmentation des débris atteindra un point critique à partir duquel elle deviendra exponentielle à cause d'une réaction en chaîne incontrôlable. En effet, à ce moment, la quantité de débris deviendra tellement importante qu'une collision ne pourra plus être évitée, créant à chaque fois des nuages de plus petits débris qui rendront le passage sur ces orbites non sécuritaire pour tous les engins spatiaux. Les nouveaux satellites lancés seront systématiquement frappés, venant ainsi s'ajouter à la population de débris à la dérive en orbite. Il est possible que ce point de non retour soit déjà atteint, principalement suite aux incidents de 2007 et 2009 (BONNAL et al., 2013). Le plus récent impliquait un satellite commercial, Iridium-33 (560 kg), faisant partie de la constellation de satellites de télécommunication Iridium, et un satellite militaire Russe, Cosmos-2251 (900 kg), hors-service depuis 10 ans. Leur collision a créé des milliers de nouveaux débris tel qu'illustré à la figure 4.3. En fait, le modèle d'expansion exponentiel de

2. Disponible à <http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/photogallery/beehives.html>, visité le 06/04/2016.

3. Disponible à http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/03/Debris_objects_-_mostly_debris_-_in_low_Earth_orbit_LEO_-_view_over_the_equator, visité le 06/04/2016.

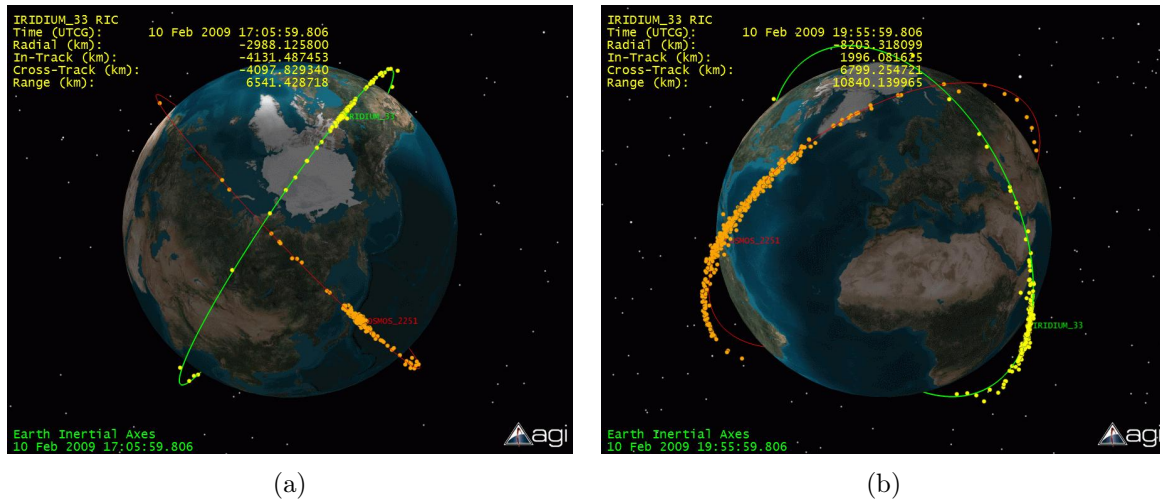


FIGURE 4.3 – Évolution du nuage de débris causé par la collision Iridium/Cosmos (Cesetrak/AGI Viewer 9) : (a) 10 minutes après impact, (b) 3 heures après impact.

Kessler ne repose plus sur l'envoi de nouveaux engins en orbite. À partir du point de non-retour déterminé par KESSLER et COUR-PALAIS, 1978, les objets déjà en orbite entreront en collision entre eux jusqu'à ce que toute nouvelle mission spatiale soit devenue impossible sans courir de grands risques. Pour ces raisons, les agences spatiales nationales encouragent fortement la communauté scientifique à travailler sur des systèmes actifs de retrait des débris (*ADR - Active Debris Removal*) afin de retirer les plus gros objets. En 2014, un des plus gros satellite jamais construit et lancé en orbite, *Envisat*, de la taille d'un autobus, a cessé de fonctionner⁴. Évidemment, des objets de cette taille risquent de détruire complètement n'importe quel satellite ou station orbitale sur leur chemin, mais ils sont d'autant plus dangereux qu'ils créeront un nuage de petits débris si une telle collision survient. La dispersion de ces nuages augmente grandement le risque de collisions des satellites avec de plus petits déchets. Depuis l'an 2000, le Centre National d'Études Spatiales en France (CNES) fait un suivi des déchets en orbite et développe des modèles évolutifs pour prévoir leur croissance et leur dynamique en orbite. Selon l'une de leur études, un satellite a de 3% à 5% de chances d'être abimé par une collision avec un déchet en orbite pendant ses sept premières années de service (BONNAL et al., 2013). Pour les LEO, la population d'objets aussi petits que 1 mm peut être estimée statistiquement en se basant sur l'extrapolation des observations faites sur les engins spatiaux revenant de mission et l'état de leur bouclier protecteur. Les débris les plus volumineux reçoivent plus d'attention car en plus de pouvoir générer de nouveaux débris, le premier 1% le plus gros des débris classés en ordre décroissant de taille représente 99% de la masse totale de déchets en orbite. En retirant seulement cinq des débris les plus volumineux en orbite par an, la croissance de la population de débris s'arrêterait (prévision sur 200 ans) et le nombre de collisions potentielles dans la même période passerait de 45 à 27 (LIOU et al.,

4. *EnviSat*, <http://www.space.com/8829-huge-satellite-poses-150-year-threat-space-debris.html>, visité le 20/09/2015

2010). La population des 99% restants, en très grande partie des débris de moins de 10 cm tel

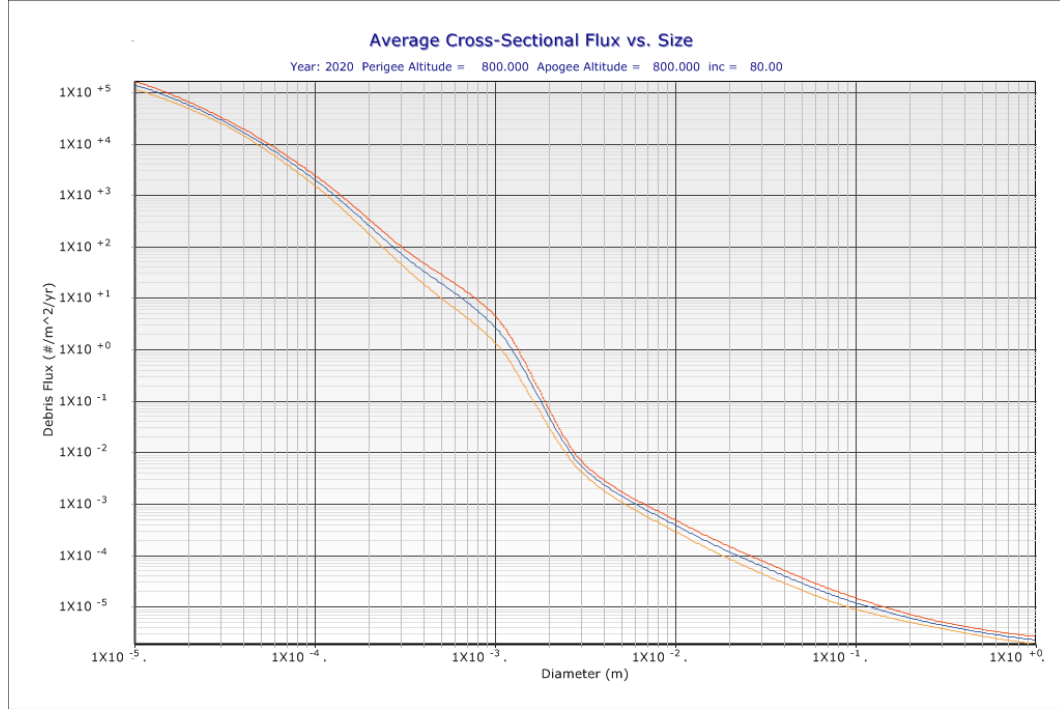


FIGURE 4.4 – Distribution du flux de débris en fonction de leur diamètre, prédit en 2020 sur une orbite à 800 km d’altitude et 80° d’inclinaison (ORDEM3). La courbe jaune est la limite basse, la rouge, la limite haute et la courbe bleue la moyenne.

que présenté à la figure 4.4, était au nombre de 170 milliards en juillet 2013⁵. Un objet aussi petit qu’un éclat de peinture, très commun dans ces populations, peut rendre inutilisable un satellite. L’effet destructeur est principalement dû à la vitesse tangentielle de déplacement des objets en orbite. Cette vitesse, v , est déduite de l’expression d’un bilan des forces sur l’objet pour lequel la force centripètes (F_C) produite par le mouvement de l’objet est égale à celle de la gravité (F_G) :

$$F_G = \frac{Gm_E m_S}{r^2} \text{ et } F_C = \frac{m_S v^2}{r}, \quad (4.1)$$

où $G = 6,67408 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ est la constante gravitationnelle de la Terre, m_S la masse du satellite, $m_E = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$ celle de la Terre et r le rayon de l’orbite circulaire. Considérant que ce rayon peut être exprimée avec l’altitude de l’appareil H et le rayon de la Terre $r_E = 6371 \text{ km}$ lorsqu’approximé à une sphère, et que la masse de l’appareil est négligeable comparée à celle de la Terre, la vitesse tangentielle est :

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{H + R_E}}. \quad (4.2)$$

5. selon l’ESA, http://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/Analysis_and_prediction, visité le 09/09/2014

Pour des altitudes à partir de la surface de la Terre, H , de 300 km à 2000 km (plage des orbites LEO), la vitesse tangentielle est $v = [6,6 - 7,4] \frac{km}{s}$. La vitesse relative entre deux objets sur une orbite basse peut donc atteindre 15km/s, si chacun se déplace à la vitesse maximale en direction opposée. Ces très grandes vitesses, nommées hypervitesses, font apparaître des phénomènes de collisions dont les déformations s'apparentent plus à celles d'explosions et le développement de techniques pour s'en protéger est le sujet de plusieurs recherches (WILLIAMSEN et al., 2008 ; CHRISTIANSEN, 2003 ; RYAN et CHRISTIANSEN, 2011 ; MOUSSI et al., 2005 ; CHRISTIANSEN, 1993 ; KEARSLEY et al., 2005 ; RYAN et al., 2010), dont certaines basées sur des observations provenant d'installations scientifiques à bord des stations spatiales. Par exemple, une petite sphère d'aluminium (2,44 g) peut transférer 56 kJ d'énergie lors d'un impact et produire la déformation illustrée à la figure 4.5. À ces hypervitesses, un débris de 25 g aura la même quantité de mouvement qu'un véhicule de 1360 kg roulant sur Terre à 100 km/h (RAMOHALLI, 1992). Si les sections américaines de la Station Spatiale Internationale (*ISS*) sont fabriquées pour résister à des impacts avec des objets jusqu'à 1,4 cm, ce n'est pas le cas pour tous les engins en orbite. En 2012, quelques 1200 objets de plus de 1,5 cm sont passés sur le chemin de *ISS*, dont 800 étaient de moins de 3 cm (LIOU, 2011b). Pour quantifier de nombreux débris à retirer, comme leur nombre est estimé en fonction d'une surface effective parcourant une orbite, une unité de mesure adéquate est le produit de la surface balayée par le nombre d'années en orbite. Pour diminuer de moitié la population à l'altitude de *ISS*, un produit surface \times années de 1000 $km^2.an$ serait nécessaire. Afin de réduire les risques d'échec de missions orbitales, les



FIGURE 4.5 – Illustration de l'effet d'une collision entre un bloc solide d'aluminium représentant l'engin spatial et un petit débris provenant de tests effectués par ESA ⁶.

efforts de retrait des débris devaient se concentrer sur ceux d'une dimension caractéristique de 5 mm à 1 cm (LIOU, 2011a). En effet, la capture et le ralentissement des gros débris a déjà été largement couvert durant les dernières décennies, alors que le retrait de débris de petite à moyenne dimension, encore relativement peu exploré, soulève des défis importants qui

6. Provenant du site de ESA, http://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/Hypervelocity_impacts_and_protect visité le 08/06/2016.

n'ont pas encore été relevés. Entre autres, pour être significative, une mission de retrait de ces petits et moyens débris devra balayer une surface de plusieurs kilomètres carrés. Qui plus est, dans ces plages de dimensions, la majorité des débris ont un ratio de surface sur masse très élevé, ce qui les rend vulnérables aux perturbations atmosphériques et ils ont donc une dynamique complexe à prévoir. Sur une base mensuelle, la population de débris en-dessous de 1000 km d'altitude fluctue grandement. En fait, les petits débris sont de loin les plus courants en orbite mais aussi les plus difficiles à localiser. Le tableau 4.1 (inspiré des travaux de LEVIN et al., 2012) présente en trois types, inspirés d'une échelle propre aux voitures, les débris, leurs caractéristiques et les risques associés.

Type	Caractéristiques	Risques
Éclats (petits)	Non localisables, < 1 cm, 98% des objets dangereux	Première menace des satellites ; trop petits pour être localisés et évités, trop gros pour s'en protéger.
Enjoliveurs (moyens)	Localisables. > 2 cm, < 2 kg, 2% des objets dangereux	Plus grande proportion des manœuvres d'évitement.
Voitures (gros)	Localisables, > 2 cm, > 2 kg, < 1% des objets dangereux	Principale source de nouveaux éclats ; 99% de la surface et de la masse des collisions potentielles.

TABLEAU 4.1 – Répartition des types d'objets dangereux et leurs risques associées sur LEO (inspiré des travaux de LEVIN et al., 2012).

La majorité des études sur les populations de débris traitent uniquement du comportement des plus volumineux (voitures). Celui des petits (éclats) et moyens (enjolveurs) débris doit donc être analysé au moyen de logiciels de simulation spécialisés afin d'en estimer le comportement. Deux logiciels sont utilisés à des fins comparatives et pour les spécialisations que chacun possède : ORDEM3.0 de la NASA et MASTER09 de ESA. ORDEM permet de jeter un rapide coup d'œil à l'ensemble. La figure 4.4 montre clairement que la grande majorité du flux de débris est constitué d'objets de moins de 1 cm.

ORDEM possède une base de données incluant la vitesse observée ou inférée pour chaque débris connu. Par exemple, à 1000km d'altitude, l'analyse de la vitesse relative des objets par rapport à un satellite montre un flux très faible pour les objets supérieurs à 1 cm. Selon ces données, le cas le plus sévère, même si très peu probable, serait un objet de 10 cm entrant en collision avec le satellite à une vitesse relative de 16 km/s, ce qui générerait une quantité de mouvement avant impact de $1,866 \times 10^5$ kg.m/s. L'angle d'impact peut aussi être obtenu avec ce type de simulation.

Le second logiciel, MASTER, permet une sélection plus fine des sources de débris (météorite, satellite, fusée, etc.) ainsi que du scénario de croissance prédite, c'est-à-dire considérant différentes méthodes de mitigation des déchets futurs. Plus pratique pour certaines analyses d'impact, MASTER permet de tracer les flux de débris en fonction de leur masse pour différentes sources de débris, tel que présenté à la figure 4.6.

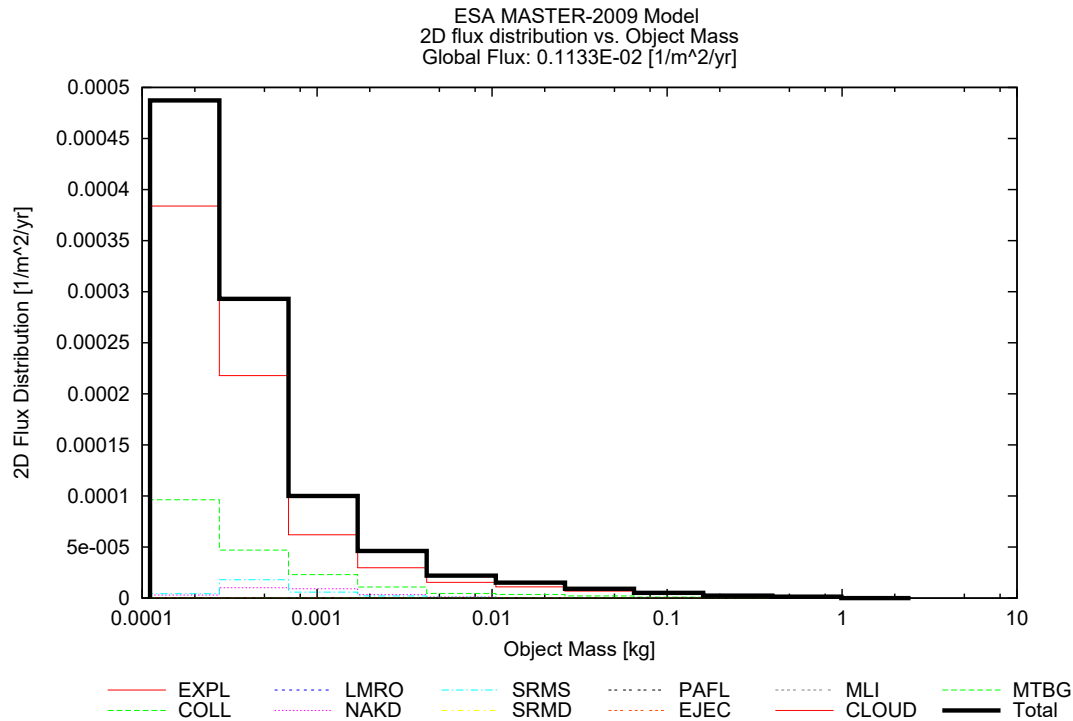


FIGURE 4.6 – Distribution du flux de débris selon la masse à 819 km d’altitude pour différentes sources de débris (MASTER).

Les orbites les plus populaires sont celles dites héliosynchrones, c’est-à-dire que leur plan conserve toujours le même angle par rapport au soleil, c’est-à-dire un satellite sur cette orbite passe toujours à la même heure locale. Ce sont des orbites presque circulaires. Les satellites d’observation environnementale, ceux d’espionnage et la constellation de télécommunication Iridium par exemple sont sur ce type d’orbite. La plupart de ces orbites particulières se retrouvent entre 500 km et 1500 km d’altitude, ce qui correspond aussi aux altitudes où les gros débris sont les plus nombreux (NISHIDA et YOSHIKAWA, 2003 ; ISHIGE et al., 2004). Pour les débris de petite à moyenne dimension, les orbites les plus peuplées sont spécifiquement celles entre 700 km et 1000 km, où, entre autre, a eu lieu la collision Iridium-Cosmos discutée précédemment. La figure 4.7 produite avec MASTER présente la distribution des débris de 5 mm à 10 cm pour les altitudes et inclinaisons des LEO en terme de densité (3D) plutôt que de flux (2D). Le maximum de densité apparaît à 819 km d’altitude. La distribution montre aussi que cette densité est plus élevée à des inclinaisons de $\pm 90^\circ$, car les orbites de toutes inclinaisons se croisent aux pôles terrestres. En retirant les objets plus petits que 1 cm ne représentant pas un grand danger étant donné l’état des protections de satellite actuelles et en se limitant à 10 cm car au-delà une stratégie différente doit être employée, plus de 670 000 objets non désirables sont présents sur les différentes orbites terrestres LEO.

ESA MASTER-2009 Model
 3D spatial density distribution vs. S.D. Altitude and S.D. Declination
 Global Average: 0.5263E-06 [1/km³]

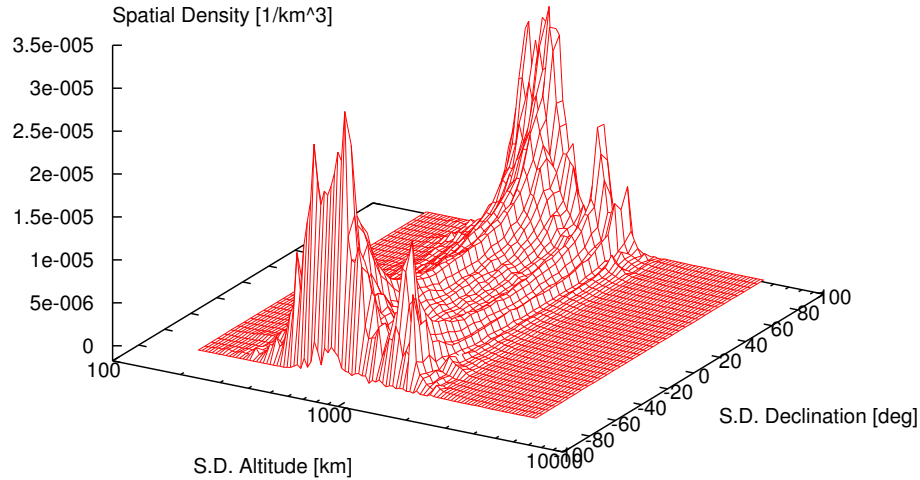


FIGURE 4.7 – Distribution de densité des débris de 5 mm à 10 cm sur les LEO en fonction de l’altitude et de la déclinaison, pour une mission d’un an sans scénario de mitigation des débris (MASTER).

4.1.2 Objectifs et contraintes de mission

Les paramètres les plus importants d’une mission de nettoyage visant ce type de débris sont : l’aire balayée, le temps passé en orbite et l’orbite sélectionnée. Les trois paramètres auront une grande influence sur les performances du système en terme de quantité de débris retirés. Aux fins de cette étude, l’orbite visée par une première mission de retrait de petits et moyens objets est la plus occupée, selon la discussion précédente, à 819 km d’altitude et 80° d’inclinaison. La vitesse moyenne des objets sur cette orbite est 7,44 km/s et la circonférence de l’orbite, ou la longueur totale de sa trajectoire, est de 45 220 km. Le système exécutera donc une rotation complète en 1,7 h. Comme le montre la figure 4.8, la rotation de la Terre simultanément au déplacement du système de retrait déplace le point à l’équateur vis-à-vis lequel celui-ci passe de 3180 km à chaque rotation. Le flux global à cette altitude est de 0,001133 1/m².yr tel qu’indiqué sur la figure 4.6. Il est possible de calculer le flux massique en considérant la somme des produits des masses moyennes des 11 catégories multipliées par leur flux, ce qui donne un estimé de $3,2086 \times 10^{-6}$ kg/m².yr. L’inclinaison de l’orbite de trajectoire n’a que peu d’effet sur la masse totale interceptée, puisque la majorité des débris est collectée aux pôles. Plusieurs contraintes bien connues, mais complexifiant grandement l’envoi de nouvelles

7. provenant du site de l’observatoire de la NASA, <http://earthobservatory.nasa.gov>, visité le 20/09/2014.

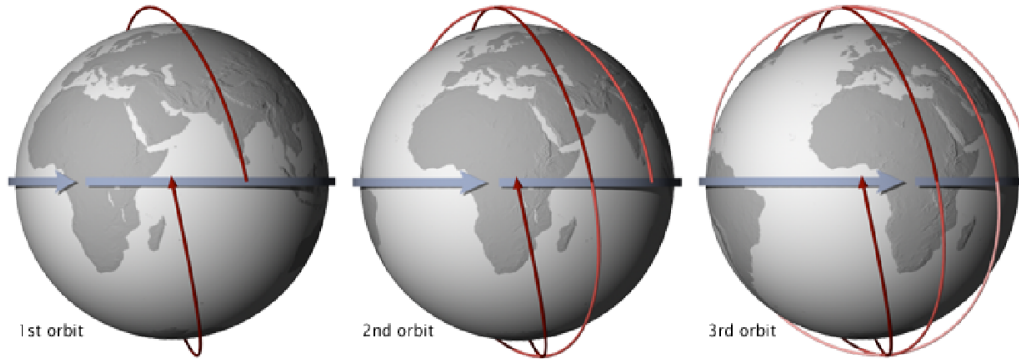


FIGURE 4.8 – Évolution d’une orbite générique LEO par rapport à la rotation de la Terre à chaque passage de l’engin à l’équateur⁷.

technologies dans l’espace sont à considérer pour une version finale de la mécatronique, par exemple : les températures extrêmes et les radiations causées par la ceinture de Van Allen et le soleil (SCHONBERG, 2010). L’étude de ce chapitre considère toutefois que les composantes électroniques et mécaniques répondant aux besoins de robustesse dans cet environnement existent et seront adaptées à la conception de ce système.

Les dimensions du système doivent pouvoir accommoder l’espace disponible dans une fusée de lancement commerciale. La fusée Ariane 5, opérée par *Ariane Space*, a été retenue parce qu’elle est encore à ce jour l’une des plus utilisées, mais la Falcon 9 de *Space X* prend de plus en plus de part sur le marché du lancement des satellites sur des LEO⁸. Ariane 5 vise principalement les satellites lourds et de grandes dimensions pour les LEO ou les orbites hautes géostationnaires (GEO), car elle peut contenir jusqu’à 10 000 kg de matériel dans sa cavité cargo. Ses dimensions sont présentées à la figure 4.9. Elle a la possibilité de lancer deux satellites dans la même cavité pour deux orbites différentes, ce qui permet d’amortir les coûts si la moitié de l’espace de cargo est suffisant pour le système. Le cargo est un cylindre d’environ 4,5 m de diamètre par 10 m de haut (PEREZ, 2011). Le mécanisme et sa base de contrôle doivent donc être limités à ces dimensions lorsque rétractés.

Le coût de l’envoi d’un objet en orbite varie entre 2 500 \$US et 5 000 \$US par kilogramme selon l’altitude visée, les dimensions de l’objet et le lieu du lancement (MCCONNAUGHEY et al., 2015). Afin d’estimer correctement la masse et l’envergure du système, des hypothèses doivent être formulées de sorte que l’étude se concentre sur l’estimation du mécanisme déployable tout en s’assurant de considérer les systèmes connexes dans le calcul pour obtenir un résultat réaliste. Un satellite de base pouvant contenir les instruments nécessaires à sa navigation, aux télécommunications et au contrôle du déploiement du mécanisme doit être conçu pour cette mission. À titre de référence, la masse du satellite ROGER, destiné à retirer des débris des

8. tel que relaté dans l’article de la BBC, <http://www.bbc.com/news/science-environment-30251863>, visité le 08/06/2016

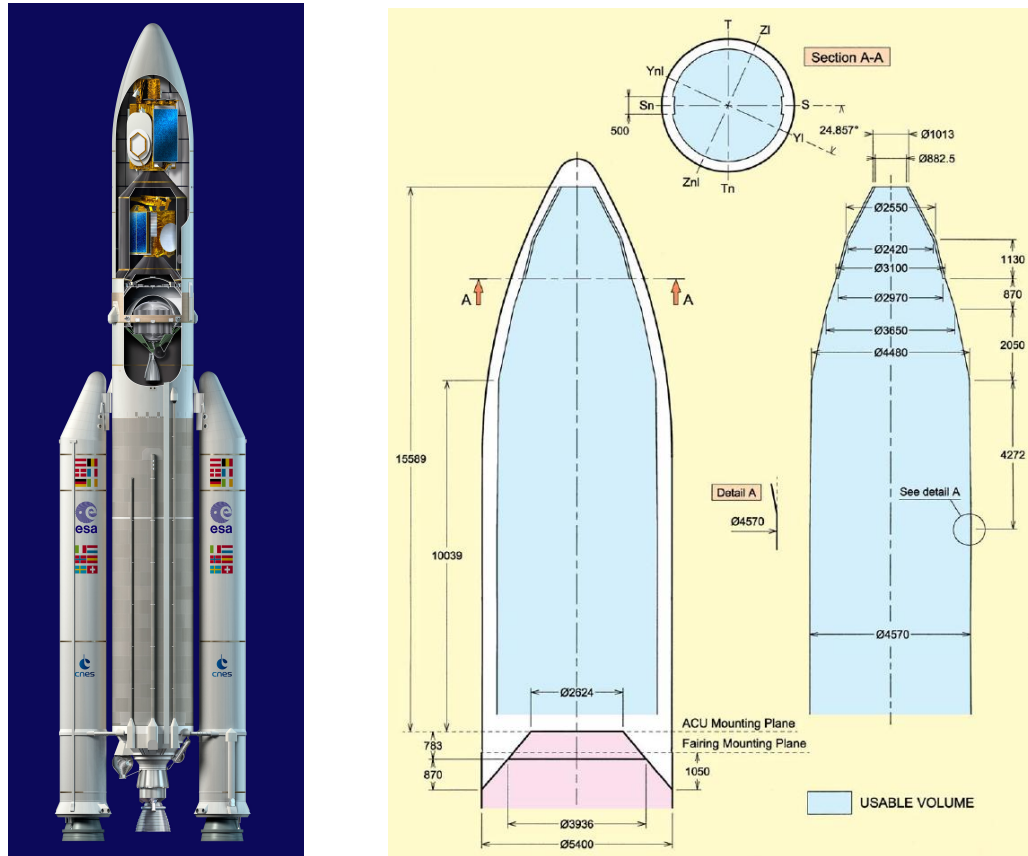


FIGURE 4.9 – Détails géométriques de la fusée Ariane 5 (PEREZ, 2011).

GEO, est utilisée, soit 620 kg (BARBEE et al., 2012).

Pendant tout son trajet en orbite, le système devra se stabiliser en orientation afin d’optimiser le potentiel de capture de débris avec une orientation suivant la direction maximale du flux de ces derniers. Cette orientation sera en partie contrôlée par le mécanisme d’actionnement par roue d’inertie du système et, pour les changements plus rapides, par l’utilisation ponctuelle de propulseurs chimiques. La dynamique générale du système est étudiée afin d’évaluer les besoins pour contrer le ralentissement par traînée, liée au vent solaire radioactif et surtout les perturbations que les impacts de débris causeront sur son orientation.

À la fin de la mission, il est attendu du mécanisme qu’il puisse se rétracter, à la limite de ce que son mécanisme potentiellement endommagé permettra, de sorte que sa surface soit moins encombrante pour la manœuvre de désorbite. Le système n’est pas conçu pour être récupéré, ni pour permettre la récolte de débris et leur rapatriement sur Terre, mais seulement pour permettre le retrait des débris en évitant d’en causer d’autres. Les déchets ralentis tomberont sur Terre et brûleront dans l’atmosphère avant d’atteindre la surface, alors que la structure, incluant les petits déchets récoltés, sera rétractée pour se détruire dans l’atmosphère.

En visant l'une des orbites les plus populaires pour de nouveaux satellites et les plus denses en débris, il est probable qu'un système de retrait de débris de grande envergure constitue lui-même un grand risque pour des collisions avec des satellites fonctionnels. Le système étant complètement actionné et sa mission étant de relativement courte durée, il est entendu que l'évitement de collisions se fera par une coordination avec le réseau de surveillance spatial, idéalement grâce à un plan de vol pré-établi semblable au système de contrôle du trafic aérien ADS-B pour les avions. Le Centre de Standards et d'Innovations Spatiales (*Center for Space Standards and Innovation - CSSI*) élabore depuis 2012 une proposition en ce sens (LEVIN et al., 2012).

4.2 Revue des systèmes de retrait de débris orbitaux

Les objectifs discutés ci-dessus ne peuvent pas être remplis avec des solutions commerciales actuelles, mais certains concepts n'ayant pas encore été testés auraient le potentiel de répondre en partie à ceux-ci. Dans tous les cas, une synthèse des solutions répondant à des défis similaires est nécessaire afin que les avantages du concept de cette thèse ressortent. Avant tout, les étapes d'une mission de retrait de débris sont discutées. Les solutions proposées par d'autres groupes de chercheurs ne sont pas toutes comparables au même degré. En effet, certaines touchent à plus d'une étape d'une mission de retrait de débris et doivent ainsi être restreintes aux comparaisons pertinentes à l'application du mécanisme déployable de l'étude de cas de cette thèse.

4.2.1 Stratégies possibles

Les technologies varient grandement selon le scénario de retrait de débris. Par exemple, si un seul débris est visé ou au contraire si un même système est conçu pour ramasser plusieurs débris l'un à la suite de l'autre, la complexité de son système de navigation ne sera pas la même (BONNAL et al., 2013). Les technologies sont regroupées selon les cinq stratégies envisageables :

1. Système unique pour un objectif unique.
2. Système unique pour des objectifs multiples.
3. Transporteur passif lançant plusieurs unités indépendantes ayant chacune un seul objectif.
4. Transporteur asservi lançant plusieurs véhicules passifs ayant différents objectifs.
5. Système unique passif pour de multiples objectifs.

Les systèmes de retrait de débris, comme tous les satellites, demandent de relever des défis importants pour assurer un minimum d'autonomie et rendre leur pilotage possible malgré la distance. Pour éliminer les débris, plusieurs groupes gouvernementaux ont tenté une approche basée sur Terre évitant ce niveau de complexité. Les avantages étant aussi fortement liés aux applications militaires, c'est-à-dire la destruction de satellite à distance au moyen d'un

laser. Cependant comme l'expérience des Chinois l'a malheureusement démontré en 2007, cette approche crée un nuage de débris aussi dangereux et plus dispersé (SPACE.COM, 2013).

La stratégie du transporteur passif est peu recommandée puisqu'elle nécessite le transport de plusieurs unités complexes et autonomes, ce qui réduit l'efficacité des systèmes (BONNAL et al., 2013). La majorité des solutions sérieusement considérées appartiennent ainsi à la dernière et à l'avant-dernière catégories et doivent intégrer les systèmes permettant l'exécution des différents stades de la mission :

1. L'approche éloignée demande une bonne connaissance du contrôle et de la dynamique du satellite pour rejoindre l'orbite de la cible.
2. L'approche de proximité est sensible aux micro-mouvements de l'objet qui sont difficiles à prédire. Celui-ci est non-coopératif, c'est-à-dire qu'il se déplace sans considération pour le système de retrait.
3. La prise de l'objet ne peut reposer sur une cible préparée, c'est-à-dire qu'elle ne possède pas de poignée conçue pour cette opération. Différents modes de capture sont possibles : par un contact rigide mécanique (un bras robotique), sans contact (un rayon d'ions ou une poussée électrostatique) ou par une mécanique flexible (un filet ou un harpon câblé). Certains seront détaillés plus loin.
4. Le contrôle du mouvement de l'objet capturé qui est beaucoup plus difficile à réaliser avec une mécanique rigide, ne permettant aucun micro-mouvement relatif.
5. Le retrait final de l'orbite au moyen soit d'une poussée en direction de l'espace (généralement utilisé pour les objets sur GEO) ou vers la Terre (pour les objets sur LEO) en augmentant la friction ou avec des propulseurs solaires, électriques ou chimiques. Certaines de ces solutions seront discutées plus loin.

Cette étude sur l'application des technologies présentées dans les chapitres précédents au retrait de débris orbitaux se consacrera uniquement à la conception de la structure et à la modélisation et au contrôle de sa dynamique en orbite. Le rendez-vous de longue distance et de proximité sont réalisés passivement par la grande dimension du système balayant l'orbite, tandis que la prise et le contrôle de l'objet sont moins critiques puisque l'énergie cinétique des petits objets sera absorbée par l'inertie du système. Le contrôle de l'orientation du système malgré ses impacts ainsi que la possibilité de rétracter tout le système pour le rapatriement sur Terre sont quant à eux des éléments clés à aborder.

4.2.2 Technologies existantes

Les technologies de retrait de débris sont nombreuses dans la littérature mais peu s'appliquent aux petits et moyens débris. Cependant les contraintes de leur conception et les solutions qu'elles proposent sont une source d'inspiration importante afin de s'assurer que la technologie que cette recherche propose soit réalistement utilisable. Les solutions sont regroupées selon une classification proposée par BARBEE et al., 2012.

— Propulsion par longe électro-dynamique (*Electro-Dynamic Tether - EDT*)

La longe électro-dynamique est un système de propulsion principalement passif, relativement lent, dont la principale utilisation visée pour le moment serait le retrait de gros débris spatiaux. L'idée est de tirer profit du champ électro-magnétique terrestre pour bouger un objet en orbite sans utiliser de moteurs électriques ou chimiques. Le plasma environnant (la température de la matière étant tellement élevée que les atomes de gaz se séparent) charge la longe d'électrons, produisant un courant qui voyage dans un câble sur une longue distance. Une force de propulsion, appelée force de Lorentz, est générée par le passage de ce courant dans le champ magnétique terrestre. Le Micro-nettoyeur de Débris Spatiaux (*Space Debris Micro-Remover - SDMR*) en est un prototype dont le bras articulé attrapant les débris est propulsé par un EDT (NISHIDA et al., 2009 ; NISHIDA et YOSHIKAWA, 2003). Toutefois ce concept de propulsion est lent et peu précis, de sorte qu'il requiert un actionnement secondaire chimique pour son rendez-vous avec l'objet (ISHIGE et al., 2004). L'entreprise *Star Inc.* a été mandatée par la NASA pour développer un tel mécanisme, nommé EDDE (LEVIN et al., 2012). La figure 4.10 présente le schéma d'une longe de plusieurs kilomètres, ayant un panneau solaire à chaque kilomètre pour le maintien des systèmes électroniques de base et la stabilisation de sa trajectoire par autorotation. Lorsqu'un débris est suffisamment près, un filet est relâché dans la traînée de l'appareil pour le capturer. Si un câble de 1 mm seulement est suffisant pour générer une force de Lorentz considérable dans le champ magnétique terrestre en orbite, celui-ci doit mesurer plusieurs kilomètres de long (150 dans certaines configurations développées pour la capture de gros débris). La fragilité d'un tel système le rend très sensible aux collisions pouvant aisément rendre cette propulsion inopérante.

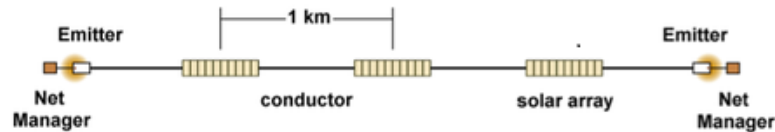


FIGURE 4.10 – Schéma du concept de longe électro-dynamique EDDE (LEVIN et al., 2012).

— Prise et capture rigide de débris

Plusieurs groupes de recherche ont concentré leur travaux dans le domaine de la gestion des débris orbitaux sur leur capture par des bras robotiques spatiaux commerciaux. En fait, ces mécanismes sont étudiés pour plusieurs applications spatiales dont les connaissances peuvent être transférées à la capture de débris, tel que l'entretien de la station spatiale internationale ou la réparation de satellites en fonction. Toutefois, la prise mécanique rigide par un bras robotique requiert un suivi de la cible très précis de sorte que l'approche se fasse avec une vitesse relative presque nulle vers un objet non-coopératif volumineux, rapide et lourd (AGHILI, 2012 ; NGUYEN-HUYNH et SHARF, 2013). Même

si la technologie est similaire, les défis de contrôle sont d'un autre ordre de complexité en comparaison de l'utilisation plus courante des bras robotiques sur ISS avec des objets conçus pour être agrippés et souvent contrôlés pour être stables par rapport au manipulateur (HIRZINGER et al., 2004). Avec la quantité de ressources investies dans cette approche, il est probable qu'une solution de récupération de gros débris soit bientôt réalisable et alors un vidangeur équipé d'un bras, d'une large cisaille et d'un conteneur pourrait être conçu pour capturer de manière compacte plusieurs cibles avant son retour sur Terre (RAMOHALLI, 1992). Une approche intrinsèquement sans effet sur l'orientation de la base du satellite est celle basée sur l'utilisation de gyrodynes en paires sur chaque sections du bras robotisé tel qu'illustré à la figure 4.11.

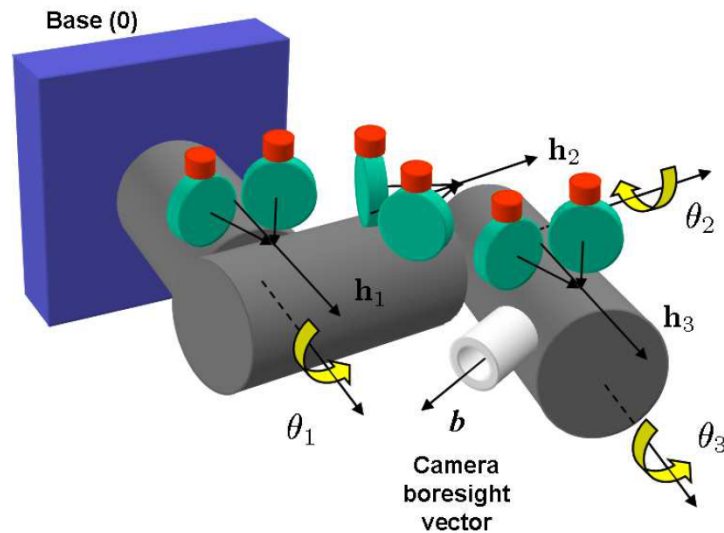


FIGURE 4.11 – Schéma du concept de contrôle d'un manipulateur sans effets sur la base par CMG (CARPENTER, 2009).

— Transfert d'énergie cinétique

Les longes peuvent aussi être utilisées pour harponner un déchet puis le ralentir par transfert d'énergie cinétique. L'une des manières de tirer profit de l'environnement pour obtenir cette énergie est d'utiliser la différence d'énergie cinétique entre deux orbites. Une fois la longe hameçonnée au débris, celle-ci exerce une forte poussée sur l'objet afin de s'en écarter ; la base active de la longe rejoint alors une orbite plus haute alors que le débris, par réaction, est poussé en direction opposée et rejoint une orbite plus basse. Étant reliés par un câble, leur vitesses se stabilisent, obligeant le débris à atteindre une vitesse trop basse pour son orbite. Le déchet commence alors à tomber dès que la longe est rompue (EICHLER et BADE, 1993). Un autre moyen de transférer de l'énergie cinétique uniquement à la cible, sans en faire une capture par bras robotisé, est d'utiliser un filet. *Composite Technology Development Inc.* détient un brevet sur un système de filets actionnés par propulseurs chimiques qui force l'objet à ralentir (TAYLOR et al., 2013).

Le déploiement du filet peut aussi être contrôlé par la projection de poids balistiques (ZHAI et ZHANG, 2012).

— Déviation par lasers depuis la Terre

Les lasers basés sur Terre sont trop dangereux lorsque utilisés pour détruire les satellites, mais à plus faible puissance, ils peuvent servir à détourner la trajectoire d'un déchet pour lui faire éviter une collision. Cette technique peut aussi en théorie permettre de modifier suffisamment la trajectoire d'un déchet pour le faire chuter, mais pour y arriver cela requiert une grande précision de la trajectoire et de la puissance du laser (MASON et al., 2011).

— Membrane et nuage de capture

BARBEE et al., 2012 mentionnent le potentiel des membranes afin de capter de petits débris et de ralentir en se déchirant ceux qui sont un peu plus gros, ce qui accélère la chute des débris sur Terre. Cependant, ils ne recensent aucune recherche ni expérience en ce sens. La technologie la plus près de ce concept est celle de Boeing consistant à libérer un nuage de gaz devant un groupe de petits débris pour augmenter leur traînée et les ralentir (J.DUNN, 2012). L'armée américaine a développé un outil similaire avec un nuage de poussière (GANGULI et al., 2011). Ces technologies n'ont jamais été mises en application car en plus de la complexité du contrôle de la dispersion du nuage, celui-ci peut avoir des impacts collatéraux sur d'autres engins orbitaux fonctionnels.

— Ralentissement passif par augmentation de la traînée

Plutôt que de tenter de ralentir le débris avec une force externe, une stratégie populaire consiste à y accrocher un dispositif augmentant son coefficient de traînée passivement de sorte qu'il ralentisse et tombe de lui-même. Comme à la figure 4.12-a, un ballon peut être attaché au débris pour forcer un aérofreinage (NOCK et al., 2003). Une voile solaire orientée de sorte que la poussée engendrée par la radiation ralentisse l'objet fonctionnerait de manière similaire, tel qu'illustré à la figure 4.12-b. L'avantage de cette dernière est qu'elle peut être aisément transportée par un petit satellite et permet de ralentir le débris en combinant l'augmentation de la traînée à une poussée solaire (LAPPAS et al., 2011). Cette approche est de plus en plus populaire pour accélérer la descente de satellites et plusieurs systèmes ont été conçus pour être intégrés dès le décollage dans l'appareil de sorte qu'en fin de vie utile une surface augmentant son coefficient de traînée soit déployée. C'est principalement le cas pour les courtes missions des petits satellites tel que le *CubeSat* (LOKCU et ASH, 2011 ; HARKNESS et al., 2014).

— Propulsion chimique

La propulsion chimique est la plus utilisée et la mieux maîtrisée des techniques pour le contrôle d'engin en orbite. Moyennant un système permettant d'accrocher une unité de propulsion asservie (capteurs de position et propulseurs chimiques), tel qu'un harpon ou

9. Projet Nanosail-D de la NASA, http://www.nasa.gov/mission_pages/smallsats/nanosaild.html, visité le 09/06/2016.

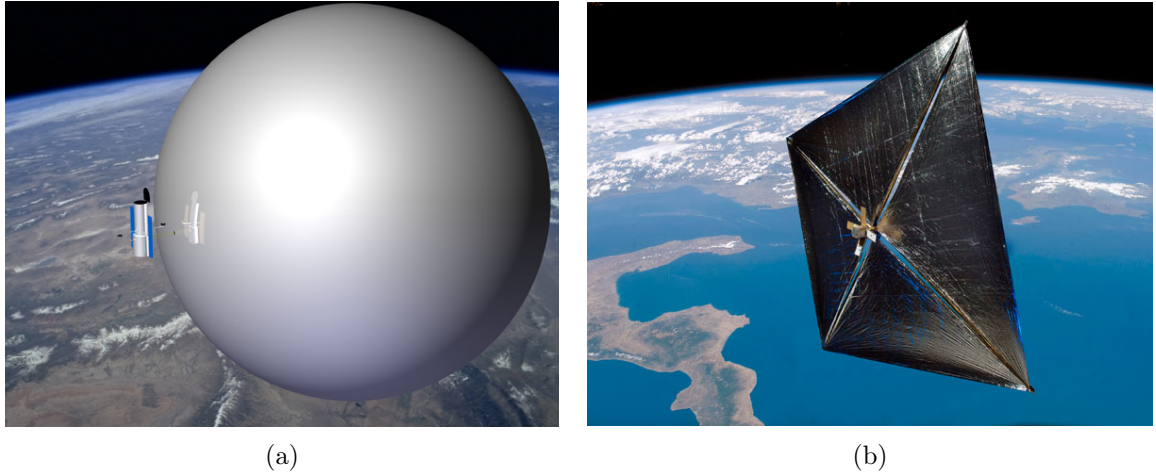


FIGURE 4.12 – Concept pour augmenter la traînée des débris et les ralentir : (a) Ballon GOLD (T. NOCK et al., 2004), (b) Voile solaire⁹.

un bras robotique, cette technique est probablement la plus accessible pour le moment. Toutefois cette solution est complexe et coûteuse pour un seul objet retiré (BARBEE et al., 2012). Elle est adaptée pour les très gros débris représentant un danger immédiat.

Ces technologies sont prometteuses pour la capture de gros débris, car l'action vise un objet précis, aussi celui-ci doit être repérable et il doit rentabiliser le coût de l'opération. Même si quelques cibles sont retirées avec un même système, elles doivent être de dimension suffisante. Seule la surface de capture est adaptée aux petits et moyens débris. Toutefois, pour éviter les risques de dommage collatéral sur des satellites fonctionnels, que la dispersion de gaz ou de poussière pourrait causer, l'approche idéale doit être complètement actionnée et la surface doit être une membrane et non un nuage. Elle doit éviter elle-même les collisions et se retirer de l'orbite en fin de mission. Une structure de bonne dimension et donc déployable une fois en orbite est nécessaire. Selon GANTES, 2001, les structures spatiales assemblées sur Terre et déployées dans l'espace permettent d'emmagasiner de l'énergie, alors que celles assemblées directement dans l'espace ont plus de flexibilité sur leur forme et dimensions. Dans le premier cas, l'énergie de déploiement a l'avantage de pouvoir être emmagasinée sous différentes formes avant le lancement, par exemple par des ressorts ou des aimants chargés dont le mouvement est bloqué jusqu'à l'étape de déploiement. Si le déploiement se fait par actionneurs électriques, il est important de privilégier une redondance.

4.3 Système de retrait de débris déployable actionné par roues d'inertie

Le concept proposé pour répondre en partie au problème des débris de petite et moyenne taille sur les LEO est d'optimiser le mécanisme présenté au chapitre 2 pour les besoins de cette

application et suivant ses contraintes puis de déterminer la configuration de roues d'inertie permettant son actionnement tel qu'introduit au chapitre 3.

4.3.1 Conception mécanique

De nombreuses technologies déployables ont déjà été conçues et testées dans des applications spatiales (BOCCIA et BREINBJERG, 2012 ; PELLEGRINO, 2001). Le concept discuté dans cette section reprend le mécanisme plan à un degré de liberté entraîné par courroies crantées développé au chapitre 2. Des mécanismes entraînés par courroies ont déjà été utilisés avec succès dans des applications spatiales pour déployer des panneaux (LI et al., 2012). Tel qu'il a été discuté dans le chapitre 2, l'optimisation et l'adaptation des unités élémentaires se fait en maximisant le ratio d'expansion plan R_P , défini à l'équation 2.55. Le mécanisme ne peut être simplement optimisé géométriquement avec les relations entre ses éléments, car une contrainte complexe à modéliser doit être vérifiée manuellement : le respect du triangle virtuel. Par conséquent, l'optimisation présentée dans ce chapitre a subi quelques itérations, chacune validée par des simulations dans le logiciel de conception 3D *SolidWorks*.

Avant de sélectionner les paramètres géométriques appropriés, les forces sollicitant les membrures doivent être connues. En posant que le risque de collision d'objets en orbite avec les membrures est faible et que si celle-ci survient, il est permis que la membrure brise puisque l'actionnement du mécanisme est redondant, seules les forces de tension des courroies sont à considérer. Les courroies auront une longueur comprise entre 1 m et 9 m (double longueur de la plus grande membrure, l_1) selon les paramètres retenus et doivent résister à un environnement agressif. Un produit particulièrement adapté est la gamme de courroies crantées renforcées de fibres de carbone de l'entreprise *Gates*. Leur courroies *Poly Chain® GT® Carbon™* peuvent supporter des températures de fonctionnement allant de -54°C à 85°C et ne demandent pas de lubrification car leurs dents sont recouvertes de nylon (GATES, 2009). Le principal avantage des courroies basées sur des fibres de carbone en tension est que leur sensibilité aux variations de température est presque nulle. Un calculateur en ligne fournit par *Gates* permet d'obtenir la force de pré-tension nécessaire selon le type de courroie, sa largeur et sa longueur¹⁰. Par exemple, pour une courroie de 21 mm de large et 4,2 m de long, la tension la courroie est de 249 N pour transmettre une puissance maximale de 0,1 Hp et le poids linéaire de la courroie est de 150 g/m. Les membrures du mécanisme doivent donc résister à une charge de compression de près de 500 N.

Reprenant les résultats du chapitre 2, les longueurs radiales dépendent du nombre de modules à chaque patte, de la longueur des membrures de ces modules, de leur largeur et de la longueur radiale du triangle fixe interne au mécanisme. La section précédente présentait les limites de l'espace de transport de la fusée Ariane 5, dont le cylindre cargo fait 4,5 m de diamètre. La

10. le calculateur est accessible à <http://www.gates.com/catalogs-and-resources/resources/repository/calculator/poly-chain-gt-carbon-tension-calculator>, visité le 15/04/2016

longueur radiale rétracté, H_R , est donc limitée en fonction de cette dimension pour maximiser la surface finale déployée. Comme les membrures seront probablement très longues, leur largeur est déterminée devant être au moins de 60 mm pour assurer une robustesse adéquate de la structure et une résistance suffisante pour la tension des courroies. Une étude sur la résistance de la plus longue des membrures du mécanisme est conduite après optimisation pour valider le choix de cette largeur. Utilisant les résultats empiriques du chapitre 2, la longueur de chacune des membrures est exprimée en fonction de celle de la première uniquement, laissant le nombre de modules, n et la longueur l_1 comme seuls paramètres de l'optimisation. Le résultat est montré à la figure 4.13-a.

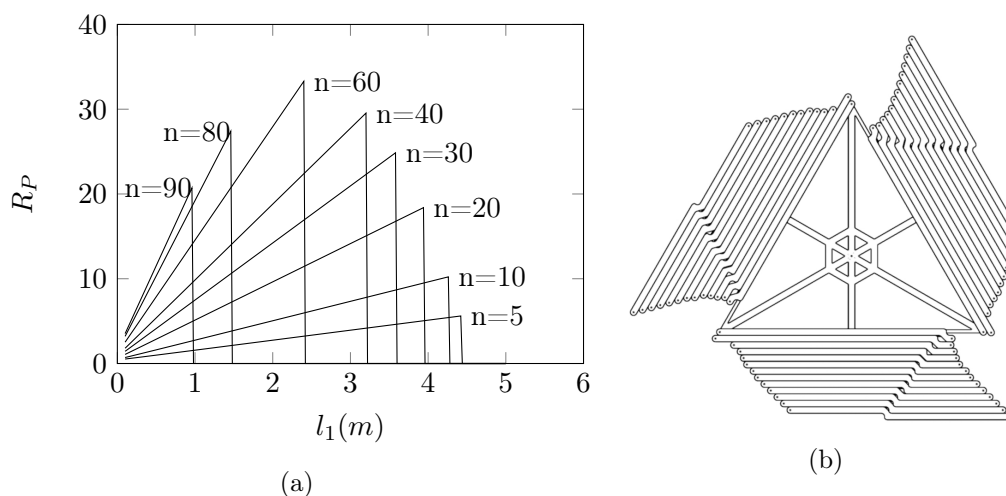


FIGURE 4.13 – (a) Ratio d’expansion R_P en fonction de la longueur de la première membrure l_1 pour différentes valeurs du nombre de membrures n ayant toutes une épaisseur de 60 mm. Une chute à zéro survient lorsque le mécanisme ne peut entrer dans les limites imposées de l’espace disponible en mode rétracté ($H_R \leq \frac{4,5}{2}$ m), (b) Solution possible avec $n = 30$, $l_1 = 2,1$ m et $w = 60$ mm.

Des validations par logiciel de modélisation 3D ont été effectuées pour plusieurs configurations suivant ces ensembles de paramètres géométriques maximisant le ratio d’expansion. Les membrures trop longues ($l_1 > 2,5$ m) se sont avérées trop faibles pour résister à la tension des courroies. De plus un nombre de membrures supérieur à 30 est considéré comme trop risqué, suivant la quantité d’articulations, leur friction et les possibilités de blocage que cela implique. Aussi la configuration optimale retenue possède 30 modules par patte et la première membrure, la plus longue, mesure 2,1 m de long (voir la figure 4.13-b). Le ratio d’expansion plan résultant est $R_P = 23$. En utilisant les courroies de 20 mm, comme deux sont superposées sur chaque module, une épaisseur minimale de 75 mm (voir figure 4.16) est requise pour le module plan. Tel que mentionné précédemment, l’espace cylindrique de la fusée fait 10 m de haut, desquels le satellite de base n’occupe que 2 m, il reste suffisamment d’espace pour plus de 100 mécanismes plans triangulaires empilés comme à la figure 4.14. Par exemple, 80 unités empilées se déploieraient en coupole suivant l’ordre de la figure 4.15 pour créer une surface finale

de $0,13 \text{ km}^2$. Tel qu'expliqué au chapitre 2, le ratio d'expansion de la surface est différent de celui des unités dans le plan, l'assemblage en coupole voit son ratio surfacique diminuer un peu selon l'épaisseur des modules suivant l'équation 2.59. Pour un assemblage de 80 modules, ce ratio est donc de $R_C = 22,7$, ce qui est très près du ratio plan puisque le rayon de la sphère inscrite rétracté, $r_{SR} = 3,4 \text{ m}$, est très grand en comparaison avec l'épaisseur de la surface, $e = 0,075 \text{ m}$.

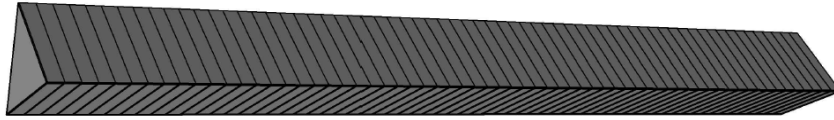


FIGURE 4.14 – Empilement des faces triangulaires pour le transport.

La structure finale aura un grand ratio de surface sur épaisseur de ses membrures. Elle peut donc être fortement flexible. Afin de combler les vides entre les membrures et permettre aux débris les plus gros de passer sans endommager de section critique, le déploiement du mécanisme entraînera l'extension d'une membrane sur chacune des faces triangulaires. La membrane reliant les coins ensemble permet de diminuer l'effet d'un impact sur l'intégrité de toute la coupole, mais une analyse du comportement flexible est nécessaire, lorsque certaines membrures subissent une charge supérieure à leur limite et fléchissent légèrement (BRITVEC, 1995). Ces structures se trouvent à avoir, en plus de leur limites mécaniques en contrainte et en déflexion, une limite élastique d'instabilité à partir de laquelle des effets de flambage peuvent survenir (GANTES, 2001). La flexibilité n'est toutefois pas seulement néfaste, elle permet d'absorber jusqu'à un certain point les chocs. Ce comportement est généralement appelé adaptatif (*compliant*) et a été étudié pour produire un manipulateur spatial volontairement flexible (NISHIDA et YOSHIKAWA, 2003).

Les membrures sont conçues avec un profilé à deux sections cernant les courroies tel que montré dans la coupe de la figure 4.16. Cette géométrie augmente leur robustesse perpendiculairement au plan de déploiement, permettant de mieux résister aux collisions autant qu'aux contraintes causées par les courroies. Pour les calculs de résistance, les membrures sont considérées comme faites d'un alliage d'aluminium isotrope, de sorte que la force critique avant flambage, qui, étant donné la longueur des membrures, est plus faible que la limite en compression, est calculée comme suit :

$$F_{cr} = \frac{EI_s \pi^2}{L_{eff}^2} \quad (4.3)$$

ou E est le module de Young du matériau, I_s le moment d'inertie de surface de la section (ou moment quadratique) et L_{eff} la longueur effective de la membrure. Cette dernière, pour le pire cas de la première membrure (la plus longue) et considérant des appuis simples à chaque

11. Un fichier vidéo a été déposé séparément.

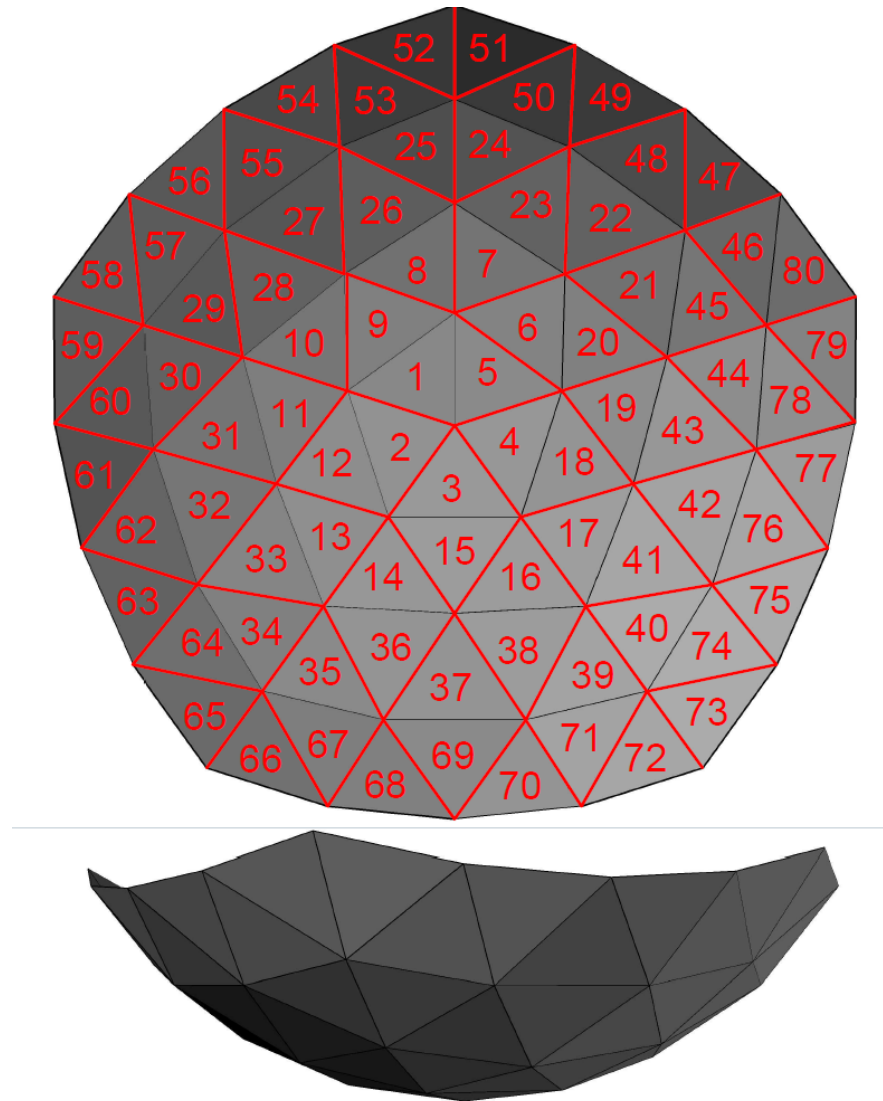


FIGURE 4.15 – Ordre de dépliage des 80 faces sur la surface de la coupole tessellée par des mécanismes plans triangulaires et une vue en coupe de la coupole¹¹.

extrémité (facteur aggravant de 1) est de 2,1 m. I_s est donné par l'intégrale de la surface de la section par rapport à l'axe X à la figure 4.16 : $4,56 \times 10^{-7} m^4$. La force critique que cette membrure peut supporter est donc 7 kN, ce qui est amplement suffisant pour résister à la tension des courroies (0,5 kN). Le poids d'une membrure en composite à base de carbone, conçue de sorte que ces propriétés longitudinales soient les mêmes que pour l'aluminium, et avec des axes en aluminium plein est estimé à 0,8 kg. Puisque chacun des 80 modules possède 30 membrures sur chacune de ses trois pattes, le poids approximatif total de la structure est 5 760 kg.

La coupole se déplaçant parallèle à son axe de symétrie, sa surface projetée perpendiculairement à la trajectoire est maximale, ce qui maximise la probabilité de retrait de débris, mais

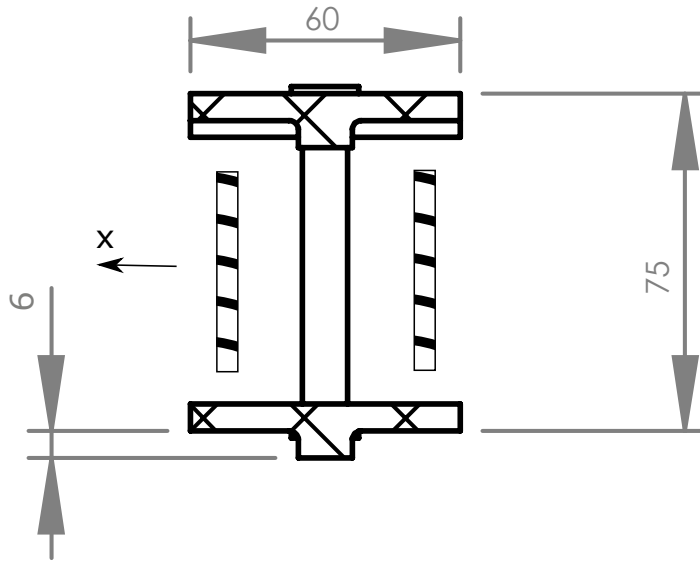


FIGURE 4.16 – Coupe de la section d’une membrure (dimensions en mm) et section de la courroies hachurées.

aussi leur énergie d’impact, puisque c’est la direction de vitesse relative maximale des débris. À 15 km/s, la structure n’est pas conçue pour résister à l’impact, mais la probabilité de cet impact est faible. En effet pour un seul module triangulaire, la surface couverte par les membrures seules représente, en configuration déployée, $9,6 \text{ m}^2$ alors que la surface triangulaire totale couverte par ce module est de $2\,815 \text{ m}^2$. Les objets ont donc moins de 0,3% de chance d’atteindre la structure. Par contre ils atteindront nécessairement la membrane, aussi celle-ci doit permettre de ralentir les plus gros et de conserver dans la coupole les plus petits. L’objectif de cette section est de s’attarder sur le mécanisme plutôt que la membrane, mais quelques références doivent être fournies afin d’évaluer correctement l’envergure du système. Une bonne source d’information sur les divers types de membranes développées pour applications spatiales sont les résultats de tests balistiques faits sur les boucliers de protection des engins spatiaux, notamment ceux conduits par la NASA (CHRISTIANSEN, 2003). Un concept de bouclier très populaire est celui de *Whipple*, consistant à superposer des films de différents matériaux en conservant un espace vide entre eux. Généralement les coques externe et interne sont en aluminium ou en céramique, matériaux trop lourds et rigides pour être employés pour cette coupole déployable. Par contre les couches internes sont construites avec des tissus flexibles faits de *Kevlar*® , *Aramid*® ou *Spectra*® . Ce dernier est jusqu’à 15 fois plus fort que l’acier tout en étant plus durable que le polyester, plus léger que le carbone et ayant une résistance spécifique 40% plus élevée que l’Aramid® (HONEYWELL, 2013). L’aire de la surface couverte par la membrane sur une unité triangulaire équilatérale est $A = \frac{\sqrt{3}}{3} a^2$ où a est la longueur d’un côté, donc $A = 6\,185 \text{ m}^2$. La masse volumique d’un film de *Spectra 1000* étant 970 kg/m^3 et le poids permis pour ne pas dépasser la limite des 10 000 kg que la fusée Ariane peut porter en orbite de 35 kg par face, l’épaisseur maximale de la membrane est $6 \mu\text{m}$. Les

Poids d'un mécanisme plan non-actionné	80 kg (20 kg de courroies)
Poids d'une face de membrane	35 kg
Nombre de faces	80
Poids du satellite de base	620 kg
Poids total	9 820 kg
Surface	0,13 km ²
Diamètre du disque projeté	410 m

TABLEAU 4.2 – Propriétés physiques du mécanisme déployable de retrait des déchets orbitaux.

propriétés physiques finales du mécanisme sont présentées au tableau 4.2.

Tel qu'il est détaillé dans le chapitre 2, le passage de la configuration empilée illustrée à la figure 4.14 à la configuration prête à déployer illustré à la figure 4.15, est assuré par des articulations à deux phases dépliant les faces deux à deux par des ressorts pré-contraints avant le décollage. Chaque face est attachée à la suivante par seulement une arête, ou deux articulations. La séquence de dépliage se fait donc en spirale partant du centre, tel que la numérotation sur la figure 4.15 l'illustre. Les aimants permanents de chaque articulation assurent un contact et un positionnement suffisamment stable pour permettre le déploiement de l'étape suivante. Une fois la géométrie de coupole bien fixée, les courroies relient l'ensemble de la surface en un seul mécanisme et son déploiement est lancé en engendrant des couples avec les roues d'inertie sur chacune des faces. Le rayon final de la coupole est alors 415 m.

Au moyen du logiciel ORDEM, une simulation avec un disque de 415 m de rayon permet de retirer près de 1 900 objets en orbite par année. Avec une masse de 9 820 kg tel que mentionné dans le tableau 4.2 et un prix moyen de 3600\$ du kilogramme à monter en orbite, le prix initial moyen d'un débris retiré est de 1 200\$/débris. Cependant, la très grande superficie de l'objet demandera de régulièrement le repositionner sur son orbite avec des actionneurs puissants vue son inertie. Le coût de cette énergie supplémentaire doit être évalué en déterminant la dynamique en orbite de l'engin.

4.3.2 Dynamique orbitale du dispositif de retrait des débris

Le mécanisme décrit et optimisé à la section précédente possède une géométrie particulière et il est donc important d'en étudier le comportement en orbite. Un corps flottant dans l'espace possède six degrés de liberté, toutefois lorsqu'il suit une orbite autour d'un corps céleste, il est plus pratique d'exprimer ces degrés de libertés par les éléments orbitaux : le demi-grand axe de l'orbite a_o , son excentricité e_o , son inclinaison i_o , la longitude du nœud ascendant Ω_o , l'argument du périastre ω_o et l'anomalie moyenne M_o . Dans le cas général, le satellite subit une perturbation totale \mathbf{F} , somme des perturbations selon ses trois axes :

$$\mathbf{F} = R\mathbf{e}_R + T\mathbf{e}_T + N\mathbf{e}_N \quad (4.4)$$

où e_R est un vecteur unitaire suivant le rayon de l'orbite et pointant vers l'extérieur, e_T est dans le plan de l'orbite, perpendiculaire à e_R et dans la direction du mouvement, e_N est le produit vectoriel des deux autres et R, T, N les amplitudes des perturbations dans ces trois directions.

Les éléments orbitaux deviennent alors (PRUSSING et CONWAY, 1993) :

$$\dot{a}_o = \frac{2a_o^{2/3}}{\sqrt{\mu(1-e_o^2)}} [Re_o \sin(f) + T(1 + e_o \cos(f))] \quad (4.5)$$

$$\dot{e}_o = \sqrt{\frac{a_o(1-e_o^2)}{\mu}} [R \sin(f_o) + T(\cos(f_o) + \cos(E_o))] \quad (4.6)$$

$$\frac{di_o}{dt} = \frac{\sqrt{a_o(1-e_o^2)}N \cos(\theta)}{\sqrt{\mu}(1 + e_o \cos(f))} \quad (4.7)$$

$$\dot{\Omega}_o = \frac{\sqrt{a_o(1-e_o^2)}N \sin(\theta)}{\sqrt{\mu} \sin(i_o)(1 + e_o \cos(f))} \quad (4.8)$$

$$\dot{\omega}_o = -\dot{\Omega} \cos(i_o) + \frac{\sqrt{a_o(1-e_o^2)}}{e\sqrt{\mu}} \left[-R \cos(f) + \frac{T \sin(f_o)(2 + e_o \cos(f_o))}{1 + e_o \cos(f_o)} \right] \quad (4.9)$$

$$M_o = \int ndt - X \quad (4.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu &= G(m + M_e) \approx GM_e \\ \dot{X} &= \frac{\sqrt{a_o}(1-e_o^2)}{\sqrt{\mu}e_o(1 + e_o \cos(f_o))} [R(2e_o - \cos(f) - e_o \cos^2(f_o)) + T \sin(f_o)(2 + e_o \cos(f_o))] , \end{aligned}$$

où E_o est l'anomalie excentrique et f_o est l'anomalie réelle de l'orbite. La principale perturbation qui agira sur la trajectoire est l'effet de trainée dû à la résistance atmosphérique. Celle-ci n'agit que sur la composante transverse des forces de perturbation :

$$T = -\frac{\rho C_D A v^2}{2m} \quad (4.11)$$

Si l'aire effective (normale à la vitesse transversale à l'orbite) A , la vitesse transversale du satellite v et sa masse m sont des valeurs connues ou simples à déterminer, il en est autrement du coefficient de trainée C_D , lié à la manière dont les particules de gaz frappent et glissent sur la paroi, et à la densité atmosphérique ρ , variant selon l'altitude et le flux de radiations solaires (MOE et MOE, 2005). MELTON, 1998 propose l'approche de Wertz utilisant une table (voir tableau 4.3) de valeurs pour déterminer la densité atmosphérique selon l'altitude uniquement avec :

$$\rho = \rho_0 e^{\left(\frac{-(h_\rho - h_{\rho 0})}{H_\rho}\right)} \quad (4.12)$$

où ρ_0 est la densité nominale dans l'intervalle d'altitude courant, h_ρ l'altitude courante, $h_{\rho 0}$ l'altitude de base de l'intervalle courant et H_ρ le facteur d'échelle. Le tableau 4.3 montre que les variations de densité s'amenuisent (densités nominales) avec l'augmentation de l'altitude,

jusqu'à un maximum, quelques 275 km au dessus des orbites géostationnaires où la densité est si faible que des satellites en fin de vie trop éloignés de la Terre y sont envoyés ne risquant pas de nuire aux engins fonctionnels sur toutes les autres orbites (MOE et MOE, 2005).

Altitude h_ρ (km)	Altitude de base h_{ρ_0} (km)	Densité nominale ρ_0 ($\frac{kg}{m^3}$)	Facteur d'échelle H_ρ (km)
350-400	350	$9,518 \times 10^{-12}$	53,298
400-450	400	$3,725 \times 10^{-12}$	58,515
450-500	450	$1,585 \times 10^{-12}$	60,828
500-600	500	$6,967 \times 10^{-13}$	63,822
600-700	600	$1,454 \times 10^{-13}$	71,835
700-800	700	$3,614 \times 10^{-14}$	88,667
800-900	800	$1,170 \times 10^{-14}$	124,64
900-1000	900	$5,245 \times 10^{-15}$	181,05
1000-...	1000	$3,019 \times 10^{-15}$	268,00

TABLEAU 4.3 – Valeurs des coefficients pour l'application de la formule de Wertz, équation 4.12, pour les altitudes de 350 km à plus de 1 000 km (MOE et MOE, 2005).

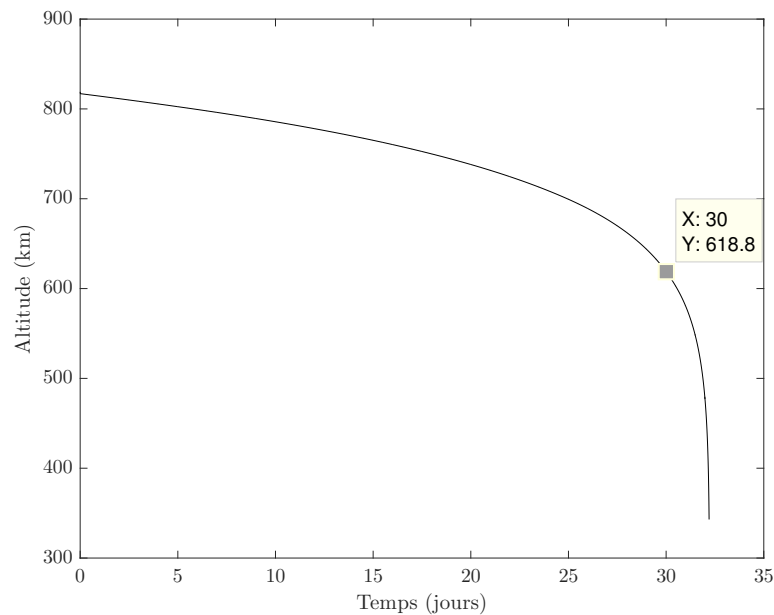


FIGURE 4.17 – Diminution de l'altitude pour une coupole de 415 m de diamètre.

En ce qui concerne le coefficient de traînée C_D , l'approche générale pour des satellites consiste à prendre un facteur moyen conservateur de 2,2 considérant une forme compacte, par exemple un cylindre (MOE et al., 1995). Toutefois la coupole de récolte des débris ne peut certainement pas être considérée comme telle. SADRAEY, 2009 compare le coefficient de traînée de différentes formes à deux dimensions pour des avions. Dans ce cadre, celui d'une forme concave (2,3) est près du double d'une sphère ou d'un cylindre (1,2). Aussi le coefficient C_D pour la forme

concave ouverte en orbite est déterminé de manière conservatrice égal à 4,4. En posant que l'orbite est circulaire $v = \sqrt{\mu/a_o}$ l'équation 4.5 devient :

$$\dot{a}_o = -\sqrt{\mu a_o} \rho C_D A / m \quad (4.13)$$

Considérant la densité constante pour un petit pas de temps δt , la nouvelle altitude suite à un ralentissement constant par traînée est :

$$a_o' = \left(\sqrt{a_o} - \frac{\sqrt{GM_e} \rho C_D A \delta t}{2m} \right)^2 \quad (4.14)$$

Ce qui permet de créer une simulation itérative calculant le changement d'altitude dû à la traînée pour de petits pas de temps en référant au tableau 4.3 à chaque itération. La courbe de la figure 4.17 est produite de cette manière pour une orbite de départ à 819 km d'altitude avec une coupole de 415 m de rayon. Cette courbe montre que l'engin tombera sur Terre très rapidement si aucun système ne contrôle son altitude, ce qui respecte les normes de l'IADC pour la mitigation des débris orbitaux requérant un maximum 25 ans avant la chute naturelle du satellite (IADC, 2007). Toutefois, en seulement 30 jours son altitude aura déjà diminué de 200 km, elle devra donc être rajustée mensuellement pour remplir sa mission correctement.

Pour revenir à l'orbite de consigne, deux poussées sont utilisées, selon l'approche optimale de Hohmann (PRUSSING et CONWAY, 1993) tel qu'illustré à la figure 4.18 : une poussée à l'orbite de départ (point 1) créant une trajectoire parabolique (transfert) et une à l'orbite d'arrivée (point 2) permettant d'embarquer sur l'orbite finale. Les deux changements de vitesse requis sont :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad (4.15)$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \quad (4.16)$$

où r_1 est le rayon de l'orbite de départ et r_2 de celle d'arrivée, tel qu'illustré à la figure 4.18. La somme des poussées requises sur un an (douze transferts d'orbite de Hohmann) pour le passage de $r_1 = 618,8$ km à $r_2 = 819$ km est $\Delta v_T = 1269$ m/s, qui devra être générée par des propulseurs chimiques ou électriques.

La coupole étant très grande, lorsqu'un débris la frappera, il causera un couple puissant modifiant son orientation. Comme celle-ci est importante à maintenir pour maximiser le retrait des débris, il est important de s'assurer que les roues d'inertie sont suffisamment puissantes pour retourner l'engin. Pour une masse de 3 cm de diamètre faite d'aluminium ($m_d = 0,038$ kg) frappant à l'extrémité de la coupole ($r_s = 415$ m du centre de masse) avec une vitesse relative moyenne ($v_d = 8$ km/s), la variation du moment angulaire engendrée par le débris est :

$$\Delta H_d = r_s m_d v_d = 126\ 160 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad (4.17)$$

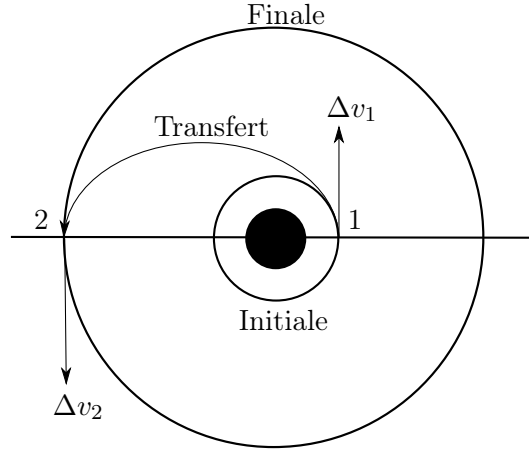


FIGURE 4.18 – Transferts d’orbite de Hohmann.

en posant que l’objet arrive perpendiculairement à la surface projetée de la coupole. Avec une roue d’inertie par face triangulaire, donc 80 roues au total, chacune du cinquième de la masse de cette face, tel que présenté dans l’exemple du mécanisme à quatre barres sphérique du chapitre 3, et perpendiculaire à la face triangulaire sur laquelle elle est posée, la variation de moment angulaire pouvant être provoquée est :

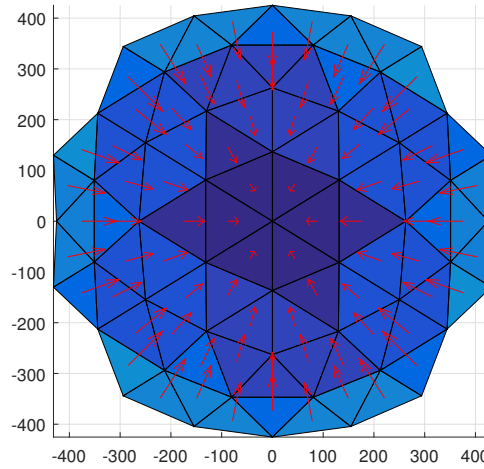
$$\Delta H_f = \sum_{i=1}^{80} I_{fi} \omega_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_t \quad (4.18)$$

où \mathbf{e}_t est le vecteur unitaire parallèle à l’axe de symétrie de la coupole et donc à la direction de l’impact, les \mathbf{e}_i sont les vecteurs orientant chaque roue d’inertie et les ω_i leur vitesse angulaire. Les masses et inerties des roues sont posées égales au cinquième de celle des modules sur lesquels elles sont disposées, suivant l’ordre de grandeur des simulation du chapitre 3. Pour les faces triangulaires décrites précédemment cela donne une masse $m_f = 20$ kg et une inertie $I_{fi} = 45 \text{ kg.m}^2$. Les 80 roues d’inerties disposées au centre de chacune des 80 faces triangulaires déployables peuvent compenser des perturbations et des collisions modifiant l’orientation du système. Par exemple, pour une commande uniforme de 1 Nm à chaque roue d’inertie ($I_{fi} \dot{\omega}_{fi}$), le résultat sur un axe de rotation perpendiculaire à la trajectoire est de 31 Nm. En effet, considérant que la trajectoire de la coupole est suivie avec une orientation maximisant la surface d’impact (perpendiculaire à l’orbite), le potentiel de produire un couple sur tous les axes perpendiculaires à la trajectoire est équivalent. Toutefois, une solution privilégiant l’utilisation des roues d’inerte à la périphérie, qui auront plus d’impact que celles près du centre pour ces couples, tel que montré à la figure 4.19, est préférable. La relation permettant le passage de l’ensemble des couples créés par les roues d’inertie (C_{fi}) au référentiel local du système en

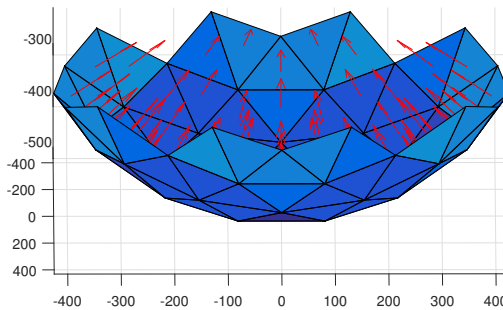
orbite est donné par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{X} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{X} & \dots & \mathbf{e}_{80} \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Y} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Y} & \dots & \mathbf{e}_{80} \cdot \mathbf{Y} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Z} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Z} & \dots & \mathbf{e}_{80} \cdot \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{f1} \\ C_{f2} \\ \dots \\ C_{f80} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

avec \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} les vecteurs unitaires des axes du référentiel local du satellite. Connaissant les positions des liaisons entre les faces à partir du centre et des dimensions de chaque triangle, les vecteurs unitaires de rotation des roues d'inertie (\mathbf{e}_i) sont calculés avec le produit vectoriel de deux vecteurs construits avec ces points. Ce qui permet de conclure qu'avec des moteurs



(a)



(b)

FIGURE 4.19 – Coupole de 80 triangles avec le vecteur de couple de chacune de leur roues d'inertie.

suffisamment puissants, une réorientation peut être réalisée dans un temps raisonnable.

4.4 Conclusion

Les risques posés par les débris entre 1,4 cm et 10 cm sont critiques et les informations que les opérateurs de satellites possèdent sur leur déplacement sont assez peu fiables. Il a été discuté que ce problème majeur ne possède pour le moment aucune solution viable. Ce chapitre a démontré, moyennant la formulation d'hypothèses sur l'environnement, la stratégie de mission et la fabrication du mécanisme, que les technologies de coupole déployable et réorientable présentées dans les chapitres précédents de cette thèse peuvent être réalistement adaptées au retrait de petits et moyens débris en orbite. En plus de l'énergie requise pour la mise en orbite, un Δv_T annuel de 269 m/s est nécessaire pour permettre dans la même période de temps le retrait définitif de plus de 1 900 objets dangereux en orbite.

Conclusion

Cette thèse a présenté les contributions faites au cours de ce travail de doctorat. Les domaines de la conception de mécanismes déployables, de la dynamique des systèmes multi-corps et du contrôle de l'assiette des engins en orbite ont reçu des contributions. Les publications faites et à venir sur le contenu de ces recherches dans des médiums pertinents à chaque domaine permettent d'en témoigner. Les contributions de chaque domaine ont été introduites par une revue exhaustive et concise des travaux comparables ainsi qu'une mise en contexte détaillée, tant au niveau des mathématiques applicables que des solutions existantes.

Le nouveau mécanisme déployable présenté est basé sur des travaux préalables proposés dans la littérature. Malheureusement tous les mécanismes existants tombent soit i) dans la catégorie des mécanismes rigides, ou à membrures uniquement rigides, leur procurant une bonne robustesse, mais dont tous les exemples n'ont que de très faibles ratios d'expansion, soit ii) dans la catégorie des mécanismes à grand ratio d'expansion, mais dont la robustesse est affaiblie par l'utilisation de membranes ou de câbles. Partant de ceux de la première catégorie, des outils ont été présentés et développés pour analyser et optimiser des mécanismes plans simples dont sont composés ces mécanismes à membrures rigides. L'analyse des angles de transmission a mis en lumière que les résultats encourageants de l'optimisation de la compacité ne seraient pas viables sans un changement complet de la méthode de transmission du mouvement et des forces entre les étages d'un tel mécanisme. Une approche différente est donc proposée, en s'inspirant des tendons artificiels pour créer un mécanisme dont le mouvement est transmis par des courroies. En plus de permettre une plus grande compacité des membrures dans un même plan, ce type de transmission assure qu'une bonne force puisse être transmise sans égard à la position des membrures dans leur trajectoire de déploiement. Il a été démontré que suivant une optimisation basée sur la connaissance géométrique de ce design, des ratios d'expansion allant jusqu'à 20 sont possibles et que l'utilisation à grande échelle ne fait que procurer de meilleures performances au mécanisme. C'est déjà plus de quatre fois le ratio maximum pour un mécanisme comparable. Ceci étant dit, l'étude s'est poursuivie pour bénéficier de l'empilement des dalles formant la surface à déployer. En introduisant un nouveau concept d'articulation à deux phases, il a été discuté qu'une pile de mécanismes triangulaires plans a le potentiel de se déplier pour former une surface quelconque, selon qu'elle puisse être tessellée, pour ensuite se déployer. Les ratios sont alors encore beaucoup plus importants. Le système final du cha-

pitre 2 possède un grand potentiel d'expansion et est conçu pour n'être actionné que par un moteur central. C'est un système ayant un degré de liberté unique, peu importe la géométrie de la surface. Il a été démontré que ce type d'actionnement critique n'est pas souhaitable dans l'espace, mais est avantageux car le peu d'actionneur requis permet aisément de déterminer une architecture d'actionnement redondante.

Au chapitre 3, après avoir dérivé les équations nécessaires à la compréhension de l'impact potentiel du déploiement d'une seule unité sur sa propre orientation en orbite, une nouvelle approche de contrôle de l'orientation a été proposée tirant profit de la présence de membrures très éloignées du centre de masse. En y installant seulement de petites masses ponctuelles en translation, des couples peuvent être aisément générés pour réorienter l'objet. Cette application novatrice est intéressante, mais reste moins performante que les roues d'inertie, à masses égales. Aussi un second concept de contrôle a été proposé, celui-ci permettant du même coup le contrôle de la configuration du mécanisme, c'est-à-dire son déploiement. En retirant tous les moteurs des articulations pour les laisser libres, il est possible de contrôler la configuration et l'orientation de l'objet par des roues d'inertie uniquement. Des modèles à quatre barres plans et sphériques ont été dérivés et simulés pour démontrer la faisabilité du concept. L'influence de certains paramètres géométriques a été étudiée pour en guider la conception. Finalement, malgré les défis qu'une telle expérience soulève, un modèle plan simple à deux corps a été construit et testé pour valider le concept et survoler le type de contrôle possible pour ce système.

Les concepts des chapitres 2 et 3 ont été appliqués à une étude de cas réaliste au dernier chapitre. Cette application consiste à retirer un maximum de débris en orbite basse de petites et moyennes dimensions. Grâce à des simulations par les logiciels spécialisés ORDEM3.0 et MASTER09, la population des débris et leur danger ont été exposés. Il en a été déterminé qu'une mission devrait couvrir une très grande surface et viser de façon prioritaire l'orbite à 819 km d'altitude et 80° d'inclinaison. Le mécanisme déployable entraîné par courroies est optimisé pour tirer profit de tout l'espace disponible dans le cylindre de chargement d'une fusée Ariane 5 et engendre une configuration à 30 modules par patte, dont la première membrure fait 2,1 m. La dynamique en orbite de cet engin est ensuite étudiée afin de quantifier l'énergie requise pour rester sur l'orbite ciblée mois après mois et résister aux couples créés par les impacts de débris. C'est une solution réaliste, dont le concept gagne à être approfondi pour devenir une application concrète.

Les résultats et concepts développés au cours de ce doctorat relèvent de la recherche fondamentale en ingénierie et demanderont encore un certain travail pour être utilisés dans la pratique. Le prototype à quatre barres sphérique proposé au chapitre 3 et tirant profit de la superposition de son centre de rotation et de son centre de masse est une avenue prête à être explorée. Le centre de masse peut servir de point d'attache d'une passerelle pour les câbles requis qui n'influenceront pas la dynamique du système, contrairement au modèle à deux corps.

Si l'équilibrage de chaque membrure est suffisamment précis, les résultats de cette expérience seront moins bruités et permettront le contrôle de l'orientation et de la configuration d'un mécanisme spatial.

Le concept de contrôle de la configuration et de l'orientation d'un mécanisme flottant librement peut être étendu à d'autres applications spatiales que le déploiement de membranes en coupole. Plusieurs satellites requièrent l'utilisation de panneaux solaires qui peuvent être déployés par cette technique, et qui pourront ensuite être orientés, de même que le satellite de base, avec les mêmes actionneurs. Il en va de même pour des instruments de télémétrie ou de vision qui peuvent être orientés par rapport à leur base en modifiant la configuration de leurs articulations passives par l'actionnement de roues d'inertie. En fait, l'étude des structures spatiales indique que celles-ci sont généralement flexibles et peuvent ainsi être approximées par des chaînes de corps articulés. Il pourrait être possible de contrôler la flexion d'une longue chaîne spatiale en disposant des roues d'inertie sur sa longueur.

Les deux principales approches de réorientation proposées au chapitre 3, soit les roues d'inertie et le mouvement linéaire de masses ponctuelles, peuvent être adaptées au retournement d'un robot articulé en chute libre. En effet, tel que mentionné dans l'introduction, la chute libre permet des conditions de conservation de la quantité de mouvement angulaire et donc la dérivation des équations dynamiques pour un objet flottant sont applicables. Ceci permet de nouvelles avenues de recherche sur la robustesse aux chutes de robots mobiles.

Le mouvement de masses linéaires pour induire des couples peut servir à autre application que l'orientation d'un corps articulé. En effet, le domaine des interfaces haptiques requiert l'utilisation de retour de force et de couple à l'utilisateur pour permettre un échange tactile bilatéral par le contrôleur physique. Les masses en périphérie peuvent être utilisées à cette fin. De plus, ce type d'interface peut être conçue de sorte qu'elle induise une inertie virtuelle à l'utilisateur, c'est-à-dire en modifiant dynamiquement les couples et les forces agissant sur le contrôleur en fonction des manipulations de l'utilisateur.

En ce qui concerne le mécanisme déployable à très grand ratio, il peut être adapté à une multitude d'applications spatiales requérant des surfaces tessellées. Les panneaux solaires, voiles solaires, coupoles de télécommunications, structures de module de station spatiale ne sont que les exemples les plus courants. Il est possible d'imaginer aussi un agencement de ces mécanismes plans passant par leur centre plutôt que par leurs arêtes. Ceci permettrait le déploiement de mécanismes spatiaux plus robustes aux charges perpendiculaires à la surface finale, mais dont le centre serait plus encombré.

Le mécanisme déployable à grand ratio peut aussi servir sur Terre, mais il faudrait en faire une étude des contraintes pour déterminer les limites géométriques à imposer aux membrures pour pouvoir servir de support rigide à un toit par exemple. L'approche saura dans tous les cas inspirer des designs à venir comme le prouvent les quelques citations déjà de l'article publié.

Annexe A

Coefficients du polynôme obtenu des équations 2.34 et 2.35

Les équations 2.34 et 2.35 du chapitre 2 sont écrites avec ces coefficients :

$$R_1 = 2l_3c_\phi - 2D_x \quad (\text{A.1})$$

$$R_2 = 2l_3s_\phi - 2D_y \quad (\text{A.2})$$

$$R_3 = l_3^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D_xl_3c_\phi - 2D_yl_3s_\phi - l_4^2 + l_2^2 \quad (\text{A.3})$$

$$R_4 = -2l_6c_\phi - 2F_x \quad (\text{A.4})$$

$$R_5 = -2l_6s_\phi - 2F_y \quad (\text{A.5})$$

$$R_6 = l_6^2 + F_x^2 + F_y^2 + 2F_xl_6c_\phi + 2F_yl_6s_\phi - l_5^2 + l_2^2 \quad (\text{A.6})$$

où s_ϕ et c_ϕ sont respectivement le sinus et le cosinus de l'angle ϕ . En les substituant dans les équations 2.31, 2.32, 2.33, le système d'équation ne possède qu'une inconnue, ϕ :

$$(R_4R_2 - R_5R_1)l_2^2 = (R_3R_5 - R_6R_2)^2 + (R_6R_1 - R_4R_3) . \quad (\text{A.7})$$

Toutefois, celle-ci apparaît au travers de fonctions trigonométriques. Celles-ci peuvent être substituées avec la tangente de la demie de l'angle :

$$s_\phi = \frac{2T}{1+T^2} \quad (\text{A.8})$$

$$c_\phi = \frac{1-T^2}{1+T^2} \quad (\text{A.9})$$

En substituant les deux relations précédentes dans l'équation A.7 un polynôme de degré 6 en T est obtenu comme suit :

$$C_0 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3 + C_4T^4 + C_5T^5 + C_6T^6 = 0 , \quad (\text{A.10})$$

dont les coefficients ne dépendent que des paramètres géométriques du mécanisme et des valeurs des angles d'entrée :

$$\begin{aligned}
C_6 = & 4D_x^4 F_x^2 - 8D_x^4 F_x l_6 + 4D_x^4 F_y^2 + 4D_x^4 l_6^2 - 8D_x^3 F_x^3 + 16D_x^3 F_x^2 l_3 + 24D_x^3 F_x^2 l_6 - 8D_x^3 F_x F_y^2 - 8D_x^3 F_x l_6^2 \\
& - 32D_x^3 F_x l_3 l_6 + 8D_x^3 F_x l_5^2 - 24D_x^3 F_x l_6^2 + 16D_x^3 F_y^2 l_3 + 8D_x^3 F_y^2 l_6 + 8D_x^3 l_2^2 l_6 + 16D_x^3 l_3 l_6^2 - 8D_x^3 l_5^2 l_6 + 8D_x^3 l_6^3 \\
& + 8D_x^2 D_y^2 F_x^2 - 16D_x^2 D_y^2 F_x l_6 + 8D_x^2 D_y^2 F_y^2 + 8D_x^2 D_y^2 l_6^2 - 8D_x^2 D_y F_x^2 F_y + 16D_x^2 D_y F_x F_y l_6 - 8D_x^2 D_y F_y^3 \\
& - 8D_x^2 D_y F_y l_6^2 + 8D_x^2 D_y F_y l_5^2 - 8D_x^2 D_y F_y l_6^2 + 4D_x^2 F_x^4 - 24D_x^2 F_x^3 l_3 - 16D_x^2 F_x^3 l_6 + 8D_x^2 F_x^2 F_y^2 + 16D_x^2 F_x^2 l_6^2 \\
& + 24D_x^2 F_x^2 l_3^2 + 72D_x^2 F_x^2 l_3 l_6 - 8D_x^2 F_x^2 l_4^2 - 8D_x^2 F_x^2 l_5^2 + 24D_x^2 F_x^2 l_6^2 - 24D_x^2 F_x F_y^2 l_3 - 16D_x^2 F_x F_y^2 l_6 \\
& - 24D_x^2 F_x l_2^2 l_3 - 32D_x^2 F_x l_2^2 l_6 - 48D_x^2 F_x l_3^2 l_6 + 24D_x^2 F_x l_3 l_5^2 - 72D_x^2 F_x l_3 l_6^2 + 16D_x^2 F_x l_4^2 l_6 + 16D_x^2 F_x l_5^2 l_6 \\
& - 16D_x^2 F_x l_6^3 + 4D_x^2 F_y^4 + 24D_x^2 F_y^2 l_3^2 + 24D_x^2 F_y^2 l_3 l_6 - 8D_x^2 F_y^2 l_4^2 - 8D_x^2 F_y^2 l_5^2 + 8D_x^2 F_y^2 l_6^2 + 4D_x^2 l_2^4 \\
& + 24D_x^2 l_2^2 l_3 l_6 - 8D_x^2 l_2^2 l_5^2 + 16D_x^2 l_2^2 l_6^2 + 24D_x^2 l_3^2 l_6^2 - 24D_x^2 l_3 l_5^2 l_6 + 24D_x^2 l_3 l_6^3 - 8D_x^2 l_4^2 l_6^2 + 4D_x^2 l_5^4 \\
& - 8D_x^2 l_5^2 l_6^2 + 4D_x^2 l_6^4 - 8D_x D_y^2 F_x^3 + 16D_x D_y^2 F_x^2 l_3 + 24D_x D_y^2 F_x^2 l_6 - 8D_x D_y^2 F_x F_y^2 - 8D_x D_y^2 F_x l_6^2 - 32D_x D_y^2 F_x l_3 l_6 \\
& + 8D_x D_y^2 F_x l_5^2 - 24D_x D_y^2 F_x l_6^2 + 16D_x D_y^2 F_y^2 l_3 + 8D_x D_y^2 F_y^2 l_6 + 8D_x D_y^2 l_2^2 l_6 + 16D_x D_y^2 l_3 l_6^2 - 8D_x D_y^2 l_5^2 l_6 \\
& + 8D_x D_y^2 l_6^3 - 16D_x D_y F_x^2 F_y l_3 + 32D_x D_y F_x F_y l_6^2 + 32D_x D_y F_x F_y l_3 l_6 - 16D_x D_y F_y^3 l_3 - 16D_x D_y F_y l_2^2 l_3 - 32D_x D_y F_y l_5^2 l_6 \\
& + 16D_x D_y F_y l_3 l_5^2 - 16D_x D_y F_y l_3 l_6^2 + 8D_x F_x^4 l_3 - 8D_x F_x^3 l_6^2 - 24D_x F_x^3 l_3^2 - 32D_x F_x^3 l_3 l_6 + 8D_x F_x^3 l_4^2 + 16D_x F_x^2 F_y^2 l_3 \\
& + 32D_x F_x^2 l_2^2 l_3 + 24D_x F_x^2 l_2^2 l_6 + 16D_x F_x^2 l_3^3 + 72D_x F_x^2 l_3^2 l_6 - 16D_x F_x^2 l_3 l_4^2 - 16D_x F_x^2 l_3 l_5^2 + 48D_x F_x^2 l_3 l_6^2 \\
& - 24D_x F_x^2 l_4^2 l_6 - 8D_x F_x F_y^2 l_2^2 - 24D_x F_x F_y^2 l_3^2 - 32D_x F_x F_y^2 l_3 l_6 + 8D_x F_x F_y^2 l_4^2 - 8D_x F_x l_2^4 - 24D_x F_x l_2^2 l_3^2 - 64D_x F_x l_2^2 l_3 l_6 \\
& + 8D_x F_x l_2^2 l_4^2 + 8D_x F_x l_2^2 l_5^2 - 24D_x F_x l_2^2 l_6^2 - 32D_x F_x l_3^3 l_6 + 24D_x F_x l_3^2 l_5^2 - 72D_x F_x l_3^2 l_6^2 + 32D_x F_x l_3 l_4^2 l_6 + 32D_x F_x l_3 l_5^2 l_6 \\
& - 32D_x F_x l_3 l_6^3 - 8D_x F_x l_4^2 l_5^2 + 24D_x F_x l_4^2 l_6^2 + 8D_x F_y^4 l_3 + 8D_x F_y^2 l_2^2 l_6 + 16D_x F_y^2 l_3^3 + 24D_x F_y^2 l_3^2 l_6 - 16D_x F_y^2 l_3 l_4^2 \\
& - 16D_x F_y^2 l_3 l_5^2 + 16D_x F_y^2 l_3 l_6^2 - 8D_x F_y^2 l_4^2 l_6 + 8D_x l_2^4 l_3 + 8D_x l_2^4 l_6 + 24D_x l_2^2 l_3^2 l_6 - 16D_x l_2^2 l_3 l_5^2 + 32D_x l_2^2 l_3 l_6^2 \\
& - 8D_x l_2^2 l_4^2 l_6 - 8D_x l_2^2 l_5^2 l_6 + 8D_x l_2^2 l_6^3 + 16D_x l_3^3 l_6^2 - 24D_x l_3^2 l_5^2 l_6 + 24D_x l_3^2 l_6^3 - 16D_x l_3 l_4^2 l_6^2 + 8D_x l_3 l_5^4 \\
& - 16D_x l_3 l_5^2 l_6^2 + 8D_x l_3 l_6^4 + 8D_x l_4^2 l_5^2 l_6 - 8D_x l_4^2 l_6^3 + 4D_y^4 F_x^2 - 8D_y^4 F_x l_6 + 4D_y^4 F_y^2 + 4D_y^4 l_6^2 - 8D_y^3 F_x^2 F_y + 16D_y^3 F_x F_y l_6 - 8D_y^3 F_y^3 \\
& - 8D_y^3 F_y l_6^2 + 8D_y^3 F_y l_5^2 - 8D_y^3 F_y l_6^2 + 4D_y^2 F_x^4 - 8D_y^2 F_x^3 l_3 - 16D_y^2 F_x^3 l_6 + 8D_y^2 F_x^2 F_y^2 + 8D_y^2 F_x^2 l_3^2 + 24D_y^2 F_x^2 l_3 l_6 \\
& - 8D_y^2 F_x^2 l_4^2 - 8D_y^2 F_x^2 l_5^2 + 24D_y^2 F_x^2 l_6^2 - 8D_y^2 F_x F_y^2 l_3 - 16D_y^2 F_x F_y^2 l_6 - 8D_y^2 F_x l_2^2 l_3 - 16D_y^2 F_x l_2^2 l_6 + 8D_y^2 F_x l_3 l_5^2 \\
& - 24D_y^2 F_x l_3 l_6^2 + 16D_y^2 F_x l_4^2 l_6 + 16D_y^2 F_x l_5^2 l_6 - 16D_y^2 F_x l_6^3 + 4D_y^2 F_y^4 + 16D_y^2 F_y^2 l_2^2 + 8D_y^2 F_y^2 l_3^2 + 8D_y^2 F_y^2 l_3 l_6 \\
& - 8D_y^2 F_y^2 l_4^2 - 8D_y^2 F_y^2 l_5^2 + 8D_y^2 F_y^2 l_6^2 + 4D_y^2 l_2^4 + 8D_y^2 l_2^2 l_3 l_6 - 8D_y^2 l_2^2 l_5^2 + 8D_y^2 l_3^2 l_6^2 - 8D_y^2 l_3 l_5^2 l_6 \\
& + 8D_y^2 l_3 l_6^3 - 8D_y^2 l_4^2 l_6^2 + 4D_y^2 l_5^4 - 8D_y^2 l_5^2 l_6^2 + 4D_y^2 l_6^4 - 8D_y F_x^2 F_y l_2^2 - 8D_y F_x^2 F_y l_3^2 + 8D_y F_x^2 F_y l_4^2 + 32D_y F_x F_y l_2^2 l_3 \\
& + 16D_y F_x F_y l_2^2 l_6 + 16D_y F_x F_y l_3^2 l_6 - 16D_y F_x F_y l_4^2 l_6 - 8D_y F_y^3 l_2^2 - 8D_y F_y^3 l_3^2 + 8D_y F_y^3 l_4^2 - 8D_y F_y l_2^4 - 8D_y F_y l_2^2 l_3^2 \\
& - 32D_y F_y l_2^2 l_3 l_6 + 8D_y F_y l_2^2 l_4^2 + 8D_y F_y l_2^2 l_5^2 - 8D_y F_y l_2^2 l_6^2 + 8D_y F_y l_3^2 l_5^2 - 8D_y F_y l_3^2 l_6^2 - 8D_y F_y l_4^2 l_5^2 + 8D_y F_y l_4^2 l_6^2 \\
& + 4F_x^4 l_3^2 - 8F_x^3 l_2^2 l_3 - 8F_x^3 l_3^3 - 16F_x^3 l_3^2 l_6 + 8F_x^3 l_3 l_4^2 + 8F_x^2 F_y^2 l_3^2 + 4F_x^2 l_2^4 + 16F_x^2 l_2^2 l_3^2 + 24F_x^2 l_2^2 l_3 l_6 \\
& - 8F_x^2 l_2^2 l_4^2 + 4F_x^2 l_3^4 + 24F_x^2 l_3^3 l_6 - 8F_x^2 l_3^2 l_4^2 - 8F_x^2 l_3^2 l_5^2 + 24F_x^2 l_3^2 l_6^2 - 24F_x^2 l_3 l_4^2 l_6 + 4F_x^2 l_4^4 - 8F_x F_y^2 l_2^2 l_3 \\
& - 8F_x F_y^2 l_3^3 - 16F_x F_y^2 l_3^2 l_6 + 8F_x F_y^2 l_3 l_4^2 - 8F_x l_2^4 l_3 - 8F_x l_2^4 l_6 - 8F_x l_2^2 l_3^3 - 32F_x l_2^2 l_3^2 l_6 + 8F_x l_2^2 l_3 l_4^2 + 8F_x l_2^2 l_3 l_5^2 \\
& - 24F_x l_2^2 l_3 l_6^2 + 16F_x l_2^2 l_4^2 l_6 - 8F_x l_3^4 l_6 + 8F_x l_3^3 l_5^2 - 24F_x l_3^3 l_6^2 + 16F_x l_3^2 l_4^2 l_6 + 16F_x l_3^2 l_5^2 l_6 - 16F_x l_3^2 l_6^3 - 8F_x l_3 l_4^2 l_5^2 \\
& + 24F_x l_3 l_4^2 l_6^2 - 8F_x l_4^4 l_6 + 4F_y^4 l_3^2 + 4F_y^4 l_2^2 + 8F_y^2 l_2^2 l_3 l_6 - 8F_y^2 l_2^2 l_4^2 + 4F_y^2 l_3^4 + 8F_y^2 l_3^3 l_6 - 8F_y^2 l_3^2 l_4^2 - 8F_y^2 l_3^2 l_5^2 \\
& + 8F_y^2 l_3^2 l_6^2 - 8F_y^2 l_3 l_4^2 l_6 + 4F_y^2 l_4^4 + 4l_2^4 l_3^2 + 8l_2^4 l_3 l_6 + 4l_2^4 l_6^2 + 8l_2^2 l_3^3 l_6 - 8l_2^2 l_3^2 l_5^2 + 16l_2^2 l_3^2 l_6^2 - 8l_2^2 l_3 l_4^2 l_6
\end{aligned}$$

$$-8l_2^2l_3l_5l_6+8l_2^2l_3l_6^3-8l_2^2l_4^2l_6^2+4l_3^4l_6^2-8l_3^3l_5^2l_6+8l_3^3l_6^3-8l_3^2l_4^2l_6^2+4l_3^2l_5^4-8l_3^2l_5^2l_6^2+4l_3^2l_6^4+8l_3l_4^2l_5^2l_6-8l_3l_4^2l_6^3+4l_4^4l_6^2, \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} C_5 = & 16D_x^4F_y l_6 - 32D_x^3F_x F_y l_6 + 64D_x^3F_y l_3 l_6 + 32D_x^3F_y l_6^2 + 32D_x^2D_y^2F_y l_6 - 32D_x^2D_y F_x^2 l_3 - 16D_x^2D_y F_x^2 l_6 + \\ & 64D_x^2D_y F_x l_3 l_6 + 32D_x^2D_y F_x l_6^2 - 32D_x^2D_y F_y^2 l_3 - 48D_x^2D_y F_y^2 l_6 - 16D_x^2D_y l_2^2 l_6 - 32D_x^2D_y l_3 l_6^2 \\ & + 16D_x^2D_y l_5^2 l_6 - 16D_x^2D_y l_6^3 + 16D_x^2F_x^2 F_y l_3 + 32D_x^2F_x^2 F_y l_6 - 128D_x^2F_x F_y l_3 l_6 - 64D_x^2F_x F_y l_6^2 + \\ & 16D_x^2F_y^3 l_3 + 32D_x^2F_y^3 l_6 + 16D_x^2F_y l_2^2 l_3 + 96D_x^2F_y l_3^2 l_6 - 16D_x^2F_y l_3 l_5^2 + 112D_x^2F_y l_3 l_6^2 - \\ & 32D_x^2F_y l_4^2 l_6 - 32D_x^2F_y l_5^2 l_6 + 32D_x^2F_y l_6^3 - 32D_x D_y^2 F_x F_y l_6 + 64D_x D_y^2 F_y l_3 l_6 + 32D_x D_y^2 F_y l_6^2 \\ & + 32D_x D_y F_x^3 l_3 - 64D_x D_y F_x^2 l_3^2 - 128D_x D_y F_x^2 l_3 l_6 + 32D_x D_y F_x F_y^2 l_3 + 32D_x D_y F_x l_2^2 l_3 \\ & + 64D_x D_y F_x l_2^2 l_6 + 128D_x D_y F_x l_3^2 l_6 - 32D_x D_y F_x l_3 l_5^2 + 160D_x D_y F_x l_3 l_6^2 - 64D_x D_y F_y^2 l_3^2 - 128D_x D_y F_y^2 l_3 l_6 - \\ & 64D_x D_y l_2^2 l_3 l_6 - 64D_x D_y l_2^2 l_6^2 - 64D_x D_y l_3^2 l_6^2 + 64D_x D_y l_3 l_5^2 l_6 - 64D_x D_y l_3 l_6^3 + 32D_x F_x^2 F_y l_3^2 + \\ & 64D_x F_x^2 F_y l_3 l_6 - 64D_x F_x F_y l_2^2 l_3 - 32D_x F_x F_y l_2^2 l_6 - 160D_x F_x F_y l_3^2 l_6 - 128D_x F_x F_y l_3 l_6^2 + 32D_x F_x F_y l_4^2 l_6 + \\ & 32D_x F_y^3 l_3^2 + 64D_x F_y^3 l_3 l_6 + 32D_x F_y l_2^2 l_3^2 + 64D_x F_y l_2^2 l_3 l_6 + 32D_x F_y l_2^2 l_6^2 + 64D_x F_y l_3^3 l_6 - 32D_x F_y l_3^2 l_5^2 + \\ & 128D_x F_y l_3^2 l_6^2 - 64D_x F_y l_3 l_4^2 l_6 - 64D_x F_y l_3 l_5^2 l_6 + 64D_x F_y l_3 l_6^3 - 32D_x F_y l_4^2 l_6^2 + 16D_x^4 F_y l_6 - 32D_y^3 F_x^2 l_3 - \\ & 16D_y^3 F_x^2 l_6 + 64D_y^3 F_x l_3 l_6 + 32D_y^3 F_x l_6^2 - 32D_y^3 F_y^2 l_3 - 48D_y^3 F_y^2 l_6 - 16D_y^3 l_2^2 l_6 - 32D_y^3 l_3 l_6^2 + 16D_y^3 l_5^2 l_6 - \\ & 16D_y^3 l_6^3 + 48D_y^2 F_x^2 F_y l_3 + 32D_y^2 F_x^2 F_y l_6 - 128D_y^2 F_x F_y l_3 l_6 - 64D_y^2 F_x F_y l_6^2 + 48D_y^2 F_y^3 l_3 + 32D_y^2 F_y^3 l_6 + \\ & 48D_y^2 F_y l_2^2 l_3 + 64D_y^2 F_y l_2^2 l_6 + 32D_y^2 F_y l_3^2 l_6 - 48D_y^2 F_y l_3 l_5^2 + 80D_y^2 F_y l_3 l_6^2 - 32D_y^2 F_y l_4^2 l_6 - 32D_y^2 F_y l_5^2 l_6 + \\ & 32D_y^2 F_y l_6^3 - 16D_y F_x^4 l_3 + 32D_y F_x^3 l_3^2 + 64D_y F_x^3 l_3 l_6 - 32D_y F_x^2 F_y^2 l_3 - 16D_y F_x^2 l_2^2 l_6 - 32D_y F_x^2 l_3^2 - 112D_y F_x^2 l_3 l_6 + \\ & 32D_y F_x^2 l_3 l_4^2 + 32D_y F_x^2 l_3 l_5^2 - 96D_y F_x^2 l_3 l_6^2 + 16D_y F_x^2 l_4^2 l_6 + 32D_y F_x F_y^2 l_3^2 + 64D_y F_x F_y^2 l_3 l_6 + 32D_y F_x l_2^2 l_3^2 + \\ & 64D_y F_x l_2^2 l_3 l_6 + 32D_y F_x l_2^2 l_6^2 + 64D_y F_x l_3^3 l_6 - 32D_y F_x l_3^2 l_5^2 + 128D_y F_x l_3^2 l_6^2 - 64D_y F_x l_3 l_4^2 l_6 - 64D_y F_x l_3 l_5^2 l_6 + \\ & 64D_y F_x l_3 l_6^3 - 32D_y F_x l_4^2 l_6^2 - 16D_y F_y^4 l_3 - 64D_y F_y^2 l_2^2 l_3 - 48D_y F_y^2 l_2^2 l_6 - 32D_y F_y^2 l_3^3 - 80D_y F_y^2 l_3 l_6 \\ & + 32D_y F_y^2 l_3 l_4^2 + 32D_y F_y^2 l_3 l_5^2 - 32D_y F_y^2 l_3 l_6^2 + 48D_y F_y^2 l_4^2 l_6 - 16D_y l_4^2 l_3 - 16D_y l_4^2 l_6 - 48D_y l_2^2 l_3^2 l_6 + \\ & 32D_y l_2^2 l_3 l_5^2 - 64D_y l_2^2 l_3 l_6^2 + 16D_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 16D_y l_2^2 l_5^2 l_6 - 16D_y l_2^2 l_6^3 - 32D_y l_3^3 l_6^2 + 48D_y l_3^2 l_5^2 l_6 - 48D_y l_3^2 l_6^3 \\ & + 32D_y l_3 l_4^2 l_6^2 - 16D_y l_3 l_5^4 + 32D_y l_3 l_5^2 l_6^2 - 16D_y l_3 l_6^4 - 16D_y l_4^2 l_3^2 l_6 + 16D_y l_4^2 l_3^3 + 16F_x^2 F_y l_2^2 l_3 + 16F_x^2 F_y l_3^3 + \\ & 32F_x^2 F_y l_3^2 l_6 - 16F_x^2 F_y l_3 l_4^2 - 64F_x F_y l_2^2 l_3^2 - 64F_x F_y l_2^2 l_3 l_6 - 64F_x F_y l_3^3 l_6 - 64F_x F_y l_3^2 l_6^2 + 64F_x F_y l_3 l_4^2 l_6 + \\ & 16F_y^3 l_2^2 l_3 + 16F_y^3 l_3^3 + 32F_y^3 l_3^2 l_6 - 16F_y^3 l_3 l_4^2 + 16F_y l_4^4 l_3 + 16F_y l_2^4 l_6 + 16F_y l_2^2 l_3^3 + 64F_y l_2^2 l_3 l_6 - \\ & 16F_y l_2^2 l_3 l_4^2 - 16F_y l_2^2 l_3 l_5^2 + 48F_y l_2^2 l_3 l_6^2 - 32F_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 16F_y l_4^4 l_6 - 16F_y l_3^3 l_5^2 + 48F_y l_3^3 l_6^2 - \\ & 32F_y l_3^2 l_4^2 l_6 - 32F_y l_3^2 l_5^2 l_6 + 32F_y l_3^2 l_6^3 + 16F_y l_3 l_4^2 l_5^2 - 48F_y l_3 l_4^2 l_6^2 + 16F_y l_4^4 l_6, \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 = & 12D_x^4F_x^2 - 8D_x^4F_x l_6 + 12D_x^4F_y^2 + 12D_x^4l_6^2 - 24D_x^3F_x^3 + 16D_x^3F_x^2 l_3 + 24D_x^3F_x^2 l_6 - 24D_x^3F_x F_y^2 - 24D_x^3F_x l_2^2 + \\ & 32D_x^3F_x l_3 l_6 + 24D_x^3F_x l_5^2 - 8D_x^3F_x l_6^2 + 16D_x^3F_y^2 l_3 + 8D_x^3F_y^2 l_6 + 8D_x^3l_2^2 l_6 + 16D_x^3l_3 l_6^2 - 8D_x^3l_5^2 l_6 + 8D_x^3l_6^3 + \\ & 24D_x^2D_y^2F_x^2 - 16D_x^2D_y^2F_x l_6 + 24D_x^2D_y^2F_y^2 + 24D_x^2D_y^2l_6^2 - 24D_x^2D_y F_x^2 F_y + 16D_x^2D_y F_x F_y l_6 - 24D_x^2D_y F_y^3 - \\ & 24D_x^2D_y F_y l_2^2 - 128D_x^2D_y F_y l_3 l_6 + 24D_x^2D_y F_y l_5^2 - 88D_x^2D_y F_y l_6^2 + 12D_x^2F_x^4 - 24D_x^2F_x^3 l_3 - 16D_x^2F_x^3 l_6 + \\ & 24D_x^2F_x^2 F_y^2 + 48D_x^2F_x^2 l_2^2 + 8D_x^2F_x^2 l_3^2 - 40D_x^2F_x^2 l_3 l_6 - 24D_x^2F_x^2 l_4^2 - 24D_x^2F_x^2 l_5^2 + 8D_x^2F_x^2 l_6^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 24D_x^2F_xF_y^2l_3-16D_x^2F_xF_y^2l_6-24D_x^2F_xl_2^2l_3-32D_x^2F_xl_2^2l_6+80D_x^2F_xl_3^2l_6+24D_x^2F_xl_3l_5^2+56D_x^2F_xl_3l_6^2+ \\
& 16D_x^2F_xl_4^2l_6+16D_x^2F_xl_5^2l_6-16D_x^2F_xl_6^3+12D_x^2F_y^4+8D_x^2F_y^2l_3^2+72D_x^2F_y^2l_3l_6-24D_x^2F_y^2l_4^2- \\
& 24D_x^2F_y^2l_5^2+88D_x^2F_y^2l_6^2+12D_x^2l_2^4+8D_x^2l_2^2l_3l_6-24D_x^2l_2^2l_5^2-16D_x^2l_2^2l_6^2+8D_x^2l_3^2l_6^2-8D_x^2l_3^2l_5l_6+ \\
& 8D_x^2l_3l_6^3-24D_x^2l_4^2l_6+12D_x^2l_4^4-24D_x^2l_5^2l_6+12D_x^2l_4^4-24D_xD_y^2F_x^3+16D_xD_y^2F_x^2l_3+24D_xD_y^2F_x^2l_6- \\
& 24D_xD_y^2F_xF_y^2-24D_xD_y^2F_xl_2^2+32D_xD_y^2F_xl_3l_6+24D_xD_y^2F_xl_5^2-8D_xD_y^2F_xl_6^2+16D_xD_y^2F_y^2l_3+8D_xD_y^2F_y^2l_6- \\
& +8D_xD_y^2l_2^2l_6+16D_xD_y^2l_3l_6^2-8D_xD_y^2l_5^2l_6+8D_xD_y^2l_6^3-16D_xD_yF_x^2F_yl_3+96D_xD_yF_xF_yl_2^2+96D_xD_yF_xF_yl_3l_6- \\
& 16D_xD_yF_y^3l_3-16D_xD_yF_y^2l_2l_3-32D_xD_yF_y^2l_2l_6-256D_xD_yF_y^2l_3l_6+16D_xD_yF_y^2l_3l_5^2-272D_xD_yF_y^2l_3l_6^2+8D_xF_x^4l_3- \\
& 24D_xF_x^3l_2^2-8D_xF_x^3l_3^2+32D_xF_x^3l_3l_6+24D_xF_x^3l_4^2+16D_xF_x^2F_y^2l_3+32D_xF_x^2l_2^2l_3+24D_xF_x^2l_2^2l_6+16D_xF_x^2l_3^3- \\
& 56D_xF_x^2l_3^2l_6-16D_xF_x^2l_3l_4^2-16D_xF_x^2l_3l_5^2-80D_xF_x^2l_3l_6^2-24D_xF_x^2l_4^2l_6-24D_xF_xF_y^2l_2^2-8D_xF_xF_y^2l_3^2+ \\
& 32D_xF_xF_y^2l_3l_6+24D_xF_xF_y^2l_4^2-24D_xF_xl_2^4-8D_xF_xl_2^2l_3^2-64D_xF_xl_2^2l_3l_6+24D_xF_xl_2^2l_4^2+24D_xF_xl_2^2l_5^2-8D_xF_xl_2^2l_6^2+ \\
& 32D_xF_xl_3^2l_6+8D_xF_xl_3^2l_5^2+40D_xF_xl_3^2l_6^2-32D_xF_xl_3l_4^2l_6-32D_xF_xl_3l_5^2l_6+32D_xF_xl_3l_6^3-24D_xF_xl_4^2l_5^2+8D_xF_xl_4^2l_6^2+ \\
& 8D_xF_y^4l_3+8D_xF_y^2l_2^2l_6+16D_xF_y^2l_3^3+152D_xF_y^2l_3^2l_6-16D_xF_y^2l_3l_4^2-16D_xF_y^2l_3l_5^2+144D_xF_y^2l_3l_6^2-8D_xF_y^2l_4^2l_6+ \\
& 8D_xl_2^4l_3+8D_xl_2^4l_6+24D_xl_2^2l_3^2l_6-16D_xl_2^2l_3l_5^2+32D_xl_2^2l_3l_6^2-8D_xl_2^2l_4^2l_6-8D_xl_2^2l_5^2l_6+8D_xl_2^2l_6^3+ \\
& 16D_xl_3^2l_6^2-24D_xl_3^2l_5^2l_6+24D_xl_3^2l_6^3-16D_xl_3l_4^2l_6^2+8D_xl_3l_5^4-16D_xl_3l_5^2l_6^2+8D_xl_3l_6^4+8D_xl_4^2l_5^2l_6-8D_xl_4^2l_6^3+ \\
& 12D_y^4F_x^2-8D_y^4F_xl_6+12D_y^4F_y^2+12D_y^4l_6^2-24D_y^3F_x^2F_y+16D_y^3F_xF_yl_6-24D_y^3F_y^3-24D_y^3F_y^2l_2^2-128D_y^3F_y^2l_3l_6+ \\
& 24D_y^3F_y^2l_5^2-88D_y^3F_y^2l_6^2+12D_y^2F_x^4-8D_y^2F_x^3l_3-16D_y^2F_x^3l_6+24D_y^2F_x^2F_y^2+88D_y^2F_x^2l_3^2+72D_y^2F_x^2l_3l_6- \\
& -24D_y^2F_x^2l_4^2-24D_y^2F_x^2l_5^2+8D_y^2F_x^2l_6^2-8D_y^2F_xF_y^2l_3-16D_y^2F_xF_y^2l_6-8D_y^2F_xl_2^2l_3-144D_y^2F_xl_3^2l_6+8D_y^2F_xl_3l_5^2- \\
& -152D_y^2F_xl_3l_6^2+16D_y^2F_xl_4^2l_6+16D_y^2F_xl_5^2l_6-16D_y^2F_xl_6^3+12D_y^2F_y^4+48D_y^2F_y^2l_2^2+88D_y^2F_y^2l_3^2+280D_y^2F_y^2l_3l_6- \\
& -24D_y^2F_y^2l_4^2-24D_y^2F_y^2l_5^2+88D_y^2F_y^2l_6^2+12D_y^2l_2^4+88D_y^2l_2^2l_3l_6-24D_y^2l_2^2l_5^2+64D_y^2l_2^2l_6^2+88D_y^2l_3^2l_6^2- \\
& 88D_y^2l_3^2l_5^2l_6+88D_y^2l_3^2l_6^3-24D_y^2l_4^2l_6^2+12D_y^2l_5^4-24D_y^2l_5^2l_6^2+12D_y^2l_6^4-24D_yF_x^2F_y^2l_2^2-88D_yF_x^2F_y^2l_3^2- \\
& 128D_yF_x^2F_y^2l_3l_6+24D_yF_x^2F_y^2l_4^2+32D_yF_x^2F_y^2l_2l_3+16D_yF_x^2F_y^2l_2l_6+272D_yF_x^2F_y^2l_3l_6+256D_yF_x^2F_y^2l_3l_6^2-16D_yF_x^2F_y^2l_4l_6- \\
& 24D_yF_y^3l_2^2-88D_yF_y^3l_3^2-128D_yF_y^3l_3l_6+24D_yF_y^3l_4^2-24D_yF_y^3l_5^2-88D_yF_y^3l_2^2l_3-224D_yF_y^3l_2^2l_3l_6+24D_yF_y^3l_2^2l_4^2+ \\
& 24D_yF_y^3l_2^2l_5^2-88D_yF_y^3l_2^2l_6^2-128D_yF_y^3l_3^2l_6+88D_yF_y^3l_3^2l_5^2-280D_yF_y^3l_3^2l_6^2+128D_yF_y^3l_3l_4^2l_6+128D_yF_y^3l_3l_5^2l_6- \\
& 128D_yF_y^3l_3l_6^3-24D_yF_y^3l_4^2l_5^2+88D_yF_y^3l_4^2l_6^2+12F_x^4l_3^2-8F_x^3l_2^2l_3-8F_x^3l_3^3-16F_x^3l_3^2l_6+8F_x^3l_3l_4^2+ \\
& 24F_x^2F_y^2l_3^2+12F_x^2l_4^2-16F_x^2l_2^2l_3^2+8F_x^2l_2^2l_3l_6-24F_x^2l_2^2l_4^2+12F_x^2l_3^4+8F_x^2l_3^3l_6-24F_x^2l_3^2l_4^2- \\
& 24F_x^2l_3^2l_5^2+8F_x^2l_3^2l_6^2-8F_x^2l_3l_4^2l_6+12F_x^2l_4^4-8F_xF_y^2l_2^2l_3-8F_xF_y^2l_3^3-16F_xF_y^2l_3^2l_6+8F_xF_y^2l_3l_4^2- \\
& 8F_xl_2^4l_3-8F_xl_2^4l_6-8F_xl_2^2l_3^3-32F_xl_2^2l_3^2l_6+8F_xl_2^2l_3l_4^2+8F_xl_2^2l_3l_5^2-24F_xl_2^2l_3l_6^2+16F_xl_2^2l_4^2l_6-8F_xl_3^4l_6 \\
& +8F_xl_3^3l_5^2-24F_xl_3^3l_6^2+16F_xl_3^2l_4^2l_6+16F_xl_3^2l_5^2l_6-16F_xl_3^2l_6^3-8F_xl_3l_4^2l_5^2+24F_xl_3l_4^2l_6^2-8F_xl_4^4l_6+12F_y^4l_3^2 \\
& +12F_y^2l_2^4+64F_y^2l_2^2l_3^2+88F_y^2l_2^2l_3l_6-24F_y^2l_2^2l_4^2+12F_y^2l_3^4+88F_y^2l_3^3l_6-24F_y^2l_3^2l_4^2-24F_y^2l_3^2l_5^2+ \\
& 88F_y^2l_3^2l_6^2-88F_y^2l_3l_4^2l_6+12F_y^2l_4^4+12l_2^4l_3^2+24l_2^4l_3l_6+12l_2^2l_6^2+24l_2^2l_3^3l_6-24l_2^2l_3^2l_5^2+48l_2^2l_3^2l_6^2- \\
& 24l_2^2l_3l_4^2l_6-24l_2^2l_3l_5^2l_6+24l_2^2l_3l_6^3-24l_2^2l_4^2l_6^2+12l_3^4l_6^2-24l_3^3l_5^2l_6+24l_3^3l_6^3-24l_3^2l_4^2l_6^2+12l_3^2l_5^4- \\
& 24l_3^2l_5^2l_6^2+12l_3^2l_6^4+24l_3l_4^2l_5^2l_6-24l_3l_4^2l_6^3+12l_4^4l_6^2, \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

$$C_3 = 32D_x^4F_yl_6-64D_x^3F_xF_yl_6+64D_x^2D_y^2F_yl_6-64D_x^2D_yF_x^2l_3-32D_x^2D_yF_x^2l_6-64D_x^2D_yF_y^2l_3-96D_x^2D_yF_y^2l_6-$$

$$\begin{aligned}
& 32D_x^2D_y l_2^2 l_6 - 64D_x^2D_y l_3 l_6^2 + 32D_x^2D_y l_5^2 l_6 - 32D_x^2D_y l_6^3 + 32D_x^2F_x^2F_y l_3 + 64D_x^2F_x^2F_y l_6 + 32D_x^2F_y^3 l_3 + \\
& 64D_x^2F_y^3 l_6 + 32D_x^2F_y l_2^2 l_3 - 64D_x^2F_y l_3^2 l_6 - 32D_x^2F_y l_3 l_5^2 - 32D_x^2F_y l_3 l_6^2 - 64D_x^2F_y l_4^2 l_6 - 64D_x^2F_y l_5^2 l_6 + \\
& 64D_x^2F_y l_6^3 - 64D_x D_y^2 F_x F_y l_6 + 64D_x D_y F_x^3 l_3 + 64D_x D_y F_x F_y^2 l_3 + 64D_x D_y F_x l_2^2 l_3 + 128D_x D_y F_x l_2^2 l_6 - \\
& 256D_x D_y F_x l_3^2 l_6 - 64D_x D_y F_x l_3 l_5^2 - 192D_x D_y F_x l_3 l_6^2 - 128D_x F_x F_y l_2^2 l_3 - 64D_x F_x F_y l_2^2 l_6 + 192D_x F_x F_y l_3^2 l_6 + \\
& 256D_x F_x F_y l_3 l_6^2 + 64D_x F_x F_y l_4^2 l_6 + 32D_y^4 F_y l_6 - 64D_y^3 F_x^2 l_3 - 32D_y^3 F_x^2 l_6 - 64D_y^3 F_y^2 l_3 - 96D_y^3 F_y^2 l_6 - \\
& 32D_y^3 l_2^2 l_6 - 64D_y^3 l_3 l_6^2 + 32D_y^3 l_5^2 l_6 - 32D_y^3 l_6^3 + 96D_y^2 F_x^2 F_y l_3 + 64D_y^2 F_x^2 F_y l_6 + 96D_y^2 F_y^3 l_3 + 64D_y^2 F_y^3 l_6 + \\
& 96D_y^2 F_y l_2^2 l_3 + 128D_y^2 F_y l_2^2 l_6 + 320D_y^2 F_y l_3^2 l_6 - 96D_y^2 F_y l_3 l_5^2 + 416D_y^2 F_y l_3 l_6^2 - 64D_y^2 F_y l_4^2 l_6 - \\
& 64D_y^2 F_y l_5^2 l_6 + 64D_y^2 F_y l_6^3 - 32D_y F_x^4 l_3 - 64D_y F_x^2 F_y^2 l_3 - 32D_y F_x^2 l_2^2 l_6 - 64D_y F_x^2 l_3^3 + 32D_y F_x^2 l_3^2 l_6 + \\
& 64D_y F_x^2 l_3 l_4^2 + 64D_y F_x^2 l_3 l_5^2 + 64D_y F_x^2 l_3 l_6^2 + 32D_y F_x^2 l_4^2 l_6 - 32D_y F_y^4 l_3 - 128D_y F_y^2 l_2^2 l_3 - 96D_y F_y^2 l_2^2 l_6 - \\
& 64D_y F_y^2 l_3^3 - 416D_y F_y^2 l_3^2 l_6 + 64D_y F_y^2 l_3 l_4^2 + 64D_y F_y^2 l_3 l_5^2 - 320D_y F_y^2 l_3 l_6^2 + 96D_y F_y^2 l_4^2 l_6 - 32D_y l_2^4 l_3 - \\
& 32D_y l_2^4 l_6 - 96D_y l_2^2 l_3^2 l_6 + 64D_y l_2^2 l_3 l_5^2 - 128D_y l_2^2 l_3 l_6^2 + 32D_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 32D_y l_2^2 l_5^2 l_6 - 32D_y l_2^2 l_6^3 - 64D_y l_3^3 l_6^2 + \\
& 96D_y l_3^2 l_5^2 l_6 - 96D_y l_3^2 l_6^3 + 64D_y l_3 l_4^2 l_6^2 - 32D_y l_3 l_4^4 + 64D_y l_3 l_5^2 l_6^2 - 32D_y l_3 l_6^4 - 32D_y l_4^2 l_5^2 l_6 + 32D_y l_4^2 l_6^3 + 32F_x^2 F_y l_2^2 l_3 + \\
& 32F_x^2 F_y l_3^3 + 64F_x^2 F_y l_3 l_6 - 32F_x^2 F_y l_3 l_4^2 + 32F_y^3 l_2^2 l_3 + 32F_y^3 l_3^3 + 64F_y^3 l_3 l_6 - 32F_y^3 l_3 l_4^2 + 32F_y l_2^4 l_3 + 32F_y l_2^4 l_6 + \\
& 32F_y l_2^2 l_3^3 + 128F_y l_2^2 l_3^2 l_6 - 32F_y l_2^2 l_3 l_4^2 - 32F_y l_2^2 l_3 l_5^2 + 96F_y l_2^2 l_3 l_6^2 - 64F_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 32F_y l_3^4 l_6 - 32F_y l_3^3 l_5^2 + \\
& 96F_y l_3^3 l_6^2 - 64F_y l_3^2 l_4^2 l_6 - 64F_y l_3^2 l_5^2 l_6 + 64F_y l_3^2 l_6^3 + 32F_y l_3 l_4^2 l_5^2 - 96F_y l_3 l_4^2 l_6^2 + 32F_y l_4^4 l_6, \quad (A.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & 12D_x^4 F_x^2 + 8D_x^4 F_x l_6 + 12D_x^4 F_y^2 + 12D_x^4 l_6^2 - 24D_x^3 F_x^3 - 16D_x^3 F_x^2 l_3 - 24D_x^3 F_x^2 l_6 - 24D_x^3 F_x F_y^2 - 24D_x^3 F_x l_2^2 + \\
& 32D_x^3 F_x l_3 l_6 + 24D_x^3 F_x l_5^2 - 8D_x^3 F_x l_6^2 - 16D_x^3 F_y^2 l_3 - 8D_x^3 F_y^2 l_6 - 8D_x^3 l_2^2 l_6 - 16D_x^3 l_3 l_6^2 + 8D_x^3 l_5^2 l_6 - 8D_x^3 l_6^3 + \\
& 24D_x^2 D_y^2 F_x^2 + 16D_x^2 D_y^2 F_x l_6 + 24D_x^2 D_y^2 F_y^2 + 24D_x^2 D_y^2 l_6^2 - 24D_x^2 D_y F_x^2 F_y - 16D_x^2 D_y F_x F_y l_6 - 24D_x^2 D_y F_y^3 - \\
& 24D_x^2 D_y F_y l_2^2 - 128D_x^2 D_y F_y l_3 l_6 + 24D_x^2 D_y F_y l_5^2 - 88D_x^2 D_y F_y l_6^2 + 12D_x^2 F_x^4 + 24D_x^2 F_x^3 l_3 + 16D_x^2 F_x^3 l_6 + \\
& 24D_x^2 F_x^2 F_y^2 + 48D_x^2 F_x^2 l_2^2 + 8D_x^2 F_x^2 l_3^2 - 40D_x^2 F_x^2 l_3 l_6 - 24D_x^2 F_x^2 l_4^2 - 24D_x^2 F_x^2 l_5^2 + 8D_x^2 F_x^2 l_6^2 + \\
& 24D_x^2 F_x F_y^2 l_3 + 16D_x^2 F_x F_y^2 l_6 + 24D_x^2 F_x l_2^2 l_3 + 32D_x^2 F_x l_2^2 l_6 - 80D_x^2 F_x l_3^2 l_6 - 24D_x^2 F_x l_3 l_5^2 - 56D_x^2 F_x l_3 l_6^2 - \\
& 16D_x^2 F_x l_4^2 l_6 - 16D_x^2 F_x l_5^2 l_6 + 16D_x^2 F_x l_6^3 + 12D_x^2 F_y^4 + 8D_x^2 F_y^2 l_3^2 + 72D_x^2 F_y^2 l_3 l_6 - 24D_x^2 F_y^2 l_4^2 - \\
& 24D_x^2 F_y^2 l_5^2 + 88D_x^2 F_y^2 l_6^2 + 12D_x^2 l_4^4 + 8D_x^2 l_2^2 l_3 l_6 - 24D_x^2 l_2^2 l_5^2 - 16D_x^2 l_2^2 l_6^2 + 8D_x^2 l_3^2 l_6^2 \\
& - 8D_x^2 l_3 l_5^2 l_6 + 8D_x^2 l_3 l_6^3 - 24D_x^2 l_4^2 l_6^2 + 12D_x^2 l_5^4 - 24D_x^2 l_5^2 l_6^2 + 12D_x^2 l_6^4 - 24D_x D_y^2 F_x^3 - 16D_x D_y^2 F_x^2 l_3 - \\
& 24D_x D_y^2 F_x^2 l_6 - 24D_x D_y^2 F_x F_y^2 - 24D_x D_y^2 F_x l_2^2 + 32D_x D_y^2 F_x l_3 l_6 + 24D_x D_y^2 F_x l_5^2 - 8D_x D_y^2 F_x l_6^2 - 16D_x D_y^2 F_y^2 l_3 - \\
& 8D_x D_y^2 F_y^2 l_6 - 8D_x D_y^2 l_2^2 l_6 - 16D_x D_y^2 l_3 l_6^2 + 8D_x D_y^2 l_5^2 l_6 - 8D_x D_y^2 l_6^3 + 16D_x D_y F_x^2 F_y l_3 + 96D_x D_y F_x F_y l_2^2 + \\
& 96D_x D_y F_x F_y l_3 l_6 + 16D_x D_y F_y^3 l_3 + 16D_x D_y F_y l_2^2 l_3 + 32D_x D_y F_y l_2^2 l_6 + 256D_x D_y F_y l_3^2 l_6 - 16D_x D_y F_y l_3 l_5^2 \\
& + 272D_x D_y F_y l_3 l_6^2 - 8D_x F_x^4 l_3 - 24D_x F_x^3 l_2^2 - 8D_x F_x^3 l_3^2 + 32D_x F_x^3 l_3 l_6 + 24D_x F_x^3 l_4^2 - 16D_x F_x^2 F_y^2 l_3 - \\
& 32D_x F_x^2 l_2^2 l_3 - 24D_x F_x^2 l_2^2 l_6 - 16D_x F_x^2 l_3^3 + 56D_x F_x^2 l_3 l_6 + 16D_x F_x^2 l_3 l_4^2 + 16D_x F_x^2 l_3 l_5^2 + 80D_x F_x^2 l_3 l_6^2 + \\
& 24D_x F_x^2 l_4^2 l_6 - 24D_x F_x F_y^2 l_2^2 - 8D_x F_x F_y^2 l_3^2 + 32D_x F_x F_y^2 l_3 l_6 + 24D_x F_x F_y^2 l_4^2 - 24D_x F_x l_2^4 - 8D_x F_x l_2^2 l_3^2 - \\
& 64D_x F_x l_2^2 l_3 l_6 + 24D_x F_x l_2^2 l_4^2 + 24D_x F_x l_2^2 l_5^2 - 8D_x F_x l_2^2 l_6^2 + 32D_x F_x l_3^3 l_6 + 8D_x F_x l_3^2 l_5^2 + 40D_x F_x l_3^2 l_6^2 - \\
& 32D_x F_x l_3 l_4^2 l_6 - 32D_x F_x l_3 l_5^2 l_6 + 32D_x F_x l_3 l_6^3 - 24D_x F_x l_4^2 l_5^2 + 8D_x F_x l_4^2 l_6^2 - 8D_x F_y^4 l_3 - 8D_x F_y^2 l_2^2 l_6 - \\
& 16D_x F_y^2 l_3^3 - 152D_x F_y^2 l_3 l_6 + 16D_x F_y^2 l_3 l_4^2 + 16D_x F_y^2 l_3 l_5^2 - 144D_x F_y^2 l_3 l_6^2 + 8D_x F_y^2 l_4^2 l_6 - 8D_x l_2^4 l_3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8D_x l_2^4 l_6 - 24D_x l_2^2 l_3^2 l_6 + 16D_x l_2^2 l_3 l_5^2 - 32D_x l_2^2 l_3 l_6^2 + 8D_x l_2^2 l_4^2 l_6 + 8D_x l_2^2 l_5^2 l_6 - 8D_x l_2^2 l_6^3 - 16D_x l_3^3 l_6^2 + \\
& 24D_x l_3^2 l_5^2 l_6 - 24D_x l_3^2 l_6^3 + 16D_x l_3 l_4^2 l_6^2 - 8D_x l_3 l_5^4 + 16D_x l_3 l_5^2 l_6^2 - 8D_x l_3 l_6^4 - 8D_x l_4^2 l_5^2 l_6 + 8D_x l_4^2 l_6^3 + \\
& 12D_y^4 F_x^2 + 8D_y^4 F_x l_6 + 12D_y^4 F_y^2 + 12D_y^4 l_6^2 - 24D_y^3 F_x^2 F_y - 16D_y^3 F_x F_y l_6 - 24D_y^3 F_y^3 - 24D_y^3 F_y l_6^2 - 128D_y^3 F_y l_3 l_6 + \\
& 24D_y^3 F_y l_5^2 - 88D_y^3 F_y l_6^2 + 12D_y^2 F_x^4 + 8D_y^2 F_x^3 l_3 + 16D_y^2 F_x^2 l_6 + 24D_y^2 F_x^2 F_y^2 + 88D_y^2 F_x^2 l_3^2 + 72D_y^2 F_x^2 l_3 l_6 - \\
& 24D_y^2 F_x^2 l_4^2 - 24D_y^2 F_x^2 l_5^2 + 8D_y^2 F_x^2 l_6^2 + 8D_y^2 F_x F_y^2 l_3 + 16D_y^2 F_x F_y^2 l_6 + 8D_y^2 F_x l_2^2 l_3 + 144D_y^2 F_x l_3^2 l_6 - \\
& 8D_y^2 F_x l_3 l_5^2 + 152D_y^2 F_x l_3 l_6^2 - 16D_y^2 F_x l_4^2 l_6 - 16D_y^2 F_x l_5^2 l_6 + 16D_y^2 F_x l_6^3 + 12D_y^2 F_y^4 + 48D_y^2 F_y^2 l_6^2 + \\
& 88D_y^2 F_y^2 l_3^2 + 280D_y^2 F_y^2 l_3 l_6 - 24D_y^2 F_y^2 l_4^2 - 24D_y^2 F_y^2 l_5^2 + 88D_y^2 F_y^2 l_6^2 + 12D_y^2 l_2^4 + 88D_y^2 l_2^2 l_3 l_6 \\
& - 24D_y^2 l_2^2 l_5^2 + 64D_y^2 l_2^2 l_6^2 + 88D_y^2 l_3^2 l_6^2 - 88D_y^2 l_3 l_5^2 l_6 + 88D_y^2 l_3 l_6^3 - 24D_y^2 l_4^2 l_6^2 + 12D_y^2 l_5^4 - 24D_y^2 l_5^2 l_6^2 \\
& + 12D_y^2 l_6^4 - 24D_y F_x^2 F_y l_2^2 - 88D_y F_x^2 F_y l_3^2 - 128D_y F_x^2 F_y l_3 l_6 + 24D_y F_x^2 F_y l_4^2 - 32D_y F_x F_y l_2^2 l_3 - 16D_y F_x F_y l_2^2 l_6 - \\
& 272D_y F_x F_y l_3^2 l_6 - 256D_y F_x F_y l_3 l_6^2 + 16D_y F_x F_y l_4^2 l_6 - 24D_y F_y^3 l_2^2 - 88D_y F_y^3 l_3^2 - 128D_y F_y^3 l_3 l_6 + 24D_y F_y^3 l_4^2 - 24D_y F_y l_6^4 - \\
& 88D_y F_y l_2^2 l_3^2 - 224D_y F_y l_2^2 l_3 l_6 + 24D_y F_y l_2^2 l_4^2 + 24D_y F_y l_2^2 l_5^2 - 88D_y F_y l_2^2 l_6^2 - 128D_y F_y l_3^3 l_6 + 88D_y F_y l_3^2 l_5^2 - \\
& 280D_y F_y l_3^2 l_6^2 + 128D_y F_y l_3 l_4^2 l_6 + 128D_y F_y l_3 l_5^2 l_6 - 128D_y F_y l_3 l_6^3 - 24D_y F_y l_4^2 l_5^2 + 88D_y F_y l_4^2 l_6^2 + 12F_x^4 l_3^2 + 8F_x^3 l_2^2 l_3 + \\
& 8F_x^3 l_3^3 + 16F_x^3 l_3^2 l_6 - 8F_x^3 l_3 l_4^2 + 24F_x^2 F_y^2 l_3^2 + 12F_x^2 l_2^4 - 16F_x^2 l_2^2 l_3^2 + 8F_x^2 l_2^2 l_3 l_6 - 24F_x^2 l_2^2 l_4^2 + 12F_x^2 l_3^4 + \\
& 8F_x^2 l_3^3 l_6 - 24F_x^2 l_3^2 l_4^2 - 24F_x^2 l_3^2 l_5^2 + 8F_x^2 l_3^2 l_6^2 - 8F_x^2 l_3 l_4^2 l_6 + 12F_x^2 l_4^4 + 8F_x F_y^2 l_2^2 l_3 + 8F_x F_y^2 l_3^3 + \\
& 16F_x F_y^2 l_3^2 l_6 - 8F_x F_y^2 l_3 l_4^2 + 8F_x l_2^4 l_3 + 8F_x l_2^4 l_6 + 8F_x l_2^2 l_3^3 + 32F_x l_2^2 l_3 l_6 - 8F_x l_2^2 l_3 l_4^2 - 8F_x l_2^2 l_3 l_5^2 + 24F_x l_2^2 l_3 l_6^2 - \\
& 16F_x l_2^2 l_4^2 l_6 + 8F_x l_4^4 l_6 - 8F_x l_3^3 l_5^2 + 24F_x l_3^3 l_6^2 - 16F_x l_3^2 l_4^2 l_6 - 16F_x l_3^2 l_5^2 l_6 + 16F_x l_3^2 l_6^3 + 8F_x l_3 l_4^2 l_5^2 - \\
& 24F_x l_3 l_4^2 l_6^2 + 8F_x l_4^4 l_6 + 12F_y^4 l_3^2 + 12F_y^2 l_4^4 + 64F_y^2 l_2^2 l_3^2 + 88F_y^2 l_2^2 l_3 l_6 - 24F_y^2 l_2^2 l_4^2 + 12F_y^2 l_3^4 + 88F_y^2 l_3^3 l_6 - \\
& 24F_y^2 l_3^2 l_4^2 - 24F_y^2 l_3^2 l_5^2 + 88F_y^2 l_3^2 l_6^2 - 88F_y^2 l_3 l_4^2 l_6 + 12F_y^2 l_4^4 + 12l_2^4 l_3^2 + 24l_2^4 l_3 l_6 + 12l_2^4 l_6^2 + 24l_2^2 l_3^3 l_6 - \\
& 24l_2^2 l_3^2 l_5^2 + 48l_2^2 l_3^2 l_6^2 - 24l_2^2 l_3 l_4^2 l_6 - 24l_2^2 l_3 l_5^2 l_6 + 24l_2^2 l_3 l_6^3 - 24l_2^2 l_4^2 l_6^2 + 12l_3^4 l_6^2 - 24l_3^3 l_5^2 l_6 + 24l_3^3 l_6^3 - \\
& 24l_3^2 l_4^2 l_6^2 + 12l_3^2 l_5^4 - 24l_3^2 l_5^2 l_6^2 + 12l_3^2 l_6^4 + 24l_3 l_4^2 l_5^2 l_6 - 24l_3 l_4^2 l_6^3 + 12l_4^4 l_6^2, \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & 16D_x^4 F_y l_6 - 32D_x^3 F_x F_y l_6 - 64D_x^3 F_y l_3 l_6 - 32D_x^3 F_y l_6^2 + 32D_x^2 D_y^2 F_y l_6 - 32D_x^2 D_y F_x^2 l_3 - 16D_x^2 D_y F_x^2 l_6 - \\
& 64D_x^2 D_y F_x l_3 l_6 - 32D_x^2 D_y F_x l_6^2 - 32D_x^2 D_y F_y^2 l_3 - 48D_x^2 D_y F_y^2 l_6 - 16D_x^2 D_y l_2^2 l_6 - 32D_x^2 D_y l_3 l_6^2 + 16D_x^2 D_y l_5^2 l_6 - \\
& 16D_x^2 D_y l_6^3 + 16D_x^2 F_x^2 F_y l_3 + 32D_x^2 F_x^2 F_y l_6 + 128D_x^2 F_x F_y l_3 l_6 + 64D_x^2 F_x F_y l_6^2 + 16D_x^2 F_y^3 l_3 + 32D_x^2 F_y^3 l_6 + \\
& 16D_x^2 F_y l_2^2 l_3 + 96D_x^2 F_y l_3^2 l_6 - 16D_x^2 F_y l_3 l_5^2 + 112D_x^2 F_y l_3 l_6^2 - 32D_x^2 F_y l_4^2 l_6 - 32D_x^2 F_y l_5^2 l_6 + 32D_x^2 F_y l_6^3 - \\
& 32D_x D_y^2 F_x F_y l_6 - 64D_x D_y^2 F_y l_3 l_6 - 32D_x D_y^2 F_y l_6^2 + 32D_x D_y F_x^3 l_3 + 64D_x D_y F_x^2 l_3^2 + 128D_x D_y F_x^2 l_3 l_6 + \\
& 32D_x D_y F_x F_y^2 l_3 + 32D_x D_y F_x l_2^2 l_3 + 64D_x D_y F_x l_2^2 l_6 + 128D_x D_y F_x l_3^2 l_6 - 32D_x D_y F_x l_3 l_5^2 + 160D_x D_y F_x l_3 l_6^2 + \\
& 64D_x D_y F_y^2 l_3^2 + 128D_x D_y F_y^2 l_3 l_6 + 64D_x D_y l_2^2 l_3 l_6 + 64D_x D_y l_2^2 l_6^2 + 64D_x D_y l_3^2 l_6^2 - 64D_x D_y l_3 l_5^2 l_6 + 64D_x D_y l_3 l_6^3 - \\
& 32D_x F_x^2 F_y l_3^2 - 64D_x F_x^2 F_y l_3 l_6 - 64D_x F_x F_y^2 l_3^2 - 32D_x F_x F_y l_2^2 l_3 - 160D_x F_x F_y l_3^2 l_6 - 128D_x F_x F_y l_3 l_6^2 + \\
& 32D_x F_x F_y l_4^2 l_6 - 32D_x F_y^3 l_3^2 - 64D_x F_y^3 l_3 l_6 - 32D_x F_y l_2^2 l_3^2 - 64D_x F_y l_2^2 l_3 l_6 - 32D_x F_y l_2^2 l_6^2 - 64D_x F_y l_3^3 l_6 + \\
& 32D_x F_y l_3^2 l_5^2 - 128D_x F_y l_3^2 l_6^2 + 64D_x F_y l_3 l_4^2 l_6 + 64D_x F_y l_3 l_5^2 l_6 - 64D_x F_y l_3 l_6^3 + 32D_x F_y l_4^2 l_6^2 + 16D_y^4 F_y l_6 - \\
& 32D_y^3 F_x^2 l_3 - 16D_y^3 F_x^2 l_6 - 64D_y^3 F_x l_3 l_6 - 32D_y^3 F_x l_6^2 - 32D_y^3 F_y^2 l_3 - 48D_y^3 F_y^2 l_6 - 16D_y^3 l_2^2 l_6 - 32D_y^3 l_3 l_6^2 + \\
& 16D_y^3 l_5^2 l_6 - 16D_y^3 l_6^3 + 48D_y^2 F_x^2 F_y l_3 + 32D_y^2 F_x^2 F_y l_6 + 128D_y^2 F_x F_y l_3 l_6 + 64D_y^2 F_x F_y l_6^2 + 48D_y^2 F_y^3 l_3 + \\
& 32D_y^2 F_y^3 l_6 + 48D_y^2 F_y l_2^2 l_3 + 64D_y^2 F_y l_2^2 l_6 + 32D_y^2 F_y l_3^2 l_6 - 48D_y^2 F_y l_3 l_5^2 + 80D_y^2 F_y l_3 l_6^2 - 32D_y^2 F_y l_4^2 l_6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 32D_y^2F_y l_5^2 l_6 + 32D_y^2F_y l_6^3 - 16D_yF_x^4 l_3 - 32D_yF_x^3 l_3^2 - 64D_yF_x^3 l_3 l_6 - 32D_yF_x^2F_y^2 l_3 - 16D_yF_x^2 l_2^2 l_6 - \\
& 32D_yF_x^2 l_3^3 - 112D_yF_x^2 l_3^2 l_6 + 32D_yF_x^2 l_3 l_4^2 + 32D_yF_x^2 l_3 l_5^2 - 96D_yF_x^2 l_3 l_6^2 + 16D_yF_x^2 l_4^2 l_6 - 32D_yF_xF_y^2 l_3^2 - \\
& 64D_yF_xF_y^2 l_3 l_6 - 32D_yF_x l_2^2 l_3^2 - 64D_yF_x l_2^2 l_3 l_6 - 32D_yF_x l_2^2 l_6^2 - 64D_yF_x l_3^3 l_6 + 32D_yF_x l_3^2 l_5^2 - 128D_yF_x l_3^2 l_6^2 + \\
& 64D_yF_x l_3 l_4^2 l_6 + 64D_yF_x l_3 l_5^2 l_6 - 64D_yF_x l_3 l_6^3 + 32D_yF_x l_4^2 l_6^2 - 16D_yF_y^4 l_3 - 64D_yF_y^2 l_2^2 l_3 - 48D_yF_y^2 l_2^2 l_6 - \\
& 32D_yF_y^2 l_3^3 - 80D_yF_y^2 l_3^2 l_6 + 32D_yF_y^2 l_3 l_4^2 + 32D_yF_y^2 l_3 l_5^2 - 32D_yF_y^2 l_3 l_6^2 + 48D_yF_y^2 l_4^2 l_6 - 16D_y l_2^4 l_3 - \\
& 16D_y l_2^4 l_6 - 48D_y l_2^2 l_3^2 l_6 + 32D_y l_2^2 l_3 l_5^2 - 64D_y l_2^2 l_3 l_6^2 + 16D_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 16D_y l_2^2 l_5^2 l_6 - 16D_y l_2^2 l_6^3 - \\
& 32D_y l_3^3 l_6^2 + 48D_y l_3^2 l_5^2 l_6 - 48D_y l_3^2 l_6^3 + 32D_y l_3 l_4^2 l_6^2 - 16D_y l_3 l_5^2 l_6 + 32D_y l_3 l_6^4 - 16D_y l_4^2 l_5^2 l_6 + \\
& 16D_y l_4^2 l_6^3 + 16F_x^2F_y l_2^2 l_3 + 16F_x^2F_y l_3^3 + 32F_x^2F_y l_3^2 l_6 - 16F_x^2F_y l_3 l_4^2 + 64F_xF_y l_2^2 l_3^2 + 64F_xF_y l_2^2 l_3 l_6 + \\
& 64F_xF_y l_3^3 l_6 + 64F_xF_y l_3^2 l_6^2 - 64F_xF_y l_3 l_4^2 l_6 + 16F_y^3 l_2^2 l_3 + 16F_y^3 l_3^3 + 32F_y^3 l_3^2 l_6 - 16F_y^3 l_3 l_4^2 + 16F_y l_4^2 l_3 + \\
& 16F_y l_4^2 l_6 + 16F_y l_2^2 l_3^3 + 64F_y l_2^2 l_3^2 l_6 - 16F_y l_2^2 l_3 l_4^2 - 16F_y l_2^2 l_3 l_5^2 + 48F_y l_2^2 l_3 l_6^2 - 32F_y l_2^2 l_4^2 l_6 + \\
& 16F_y l_3^4 l_6 - 16F_y l_3^3 l_5^2 + 48F_y l_3^3 l_6^2 - 32F_y l_3^2 l_4^2 l_6 - 32F_y l_3^2 l_5^2 l_6 + 32F_y l_3^2 l_6^3 + 16F_y l_3 l_4^2 l_5^2 - 48F_y l_3 l_4^2 l_6^2 + \\
& 16F_y l_4^4 l_6, \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & 16D_x^4F_y l_6 - 32D_x^3F_xF_y l_6 - 64D_x^3F_y l_3 l_6 - 32D_x^3F_y l_6^2 + 32D_x^2D_y^2F_y l_6 - 32D_x^2D_yF_x^2 l_3 - 16D_x^2D_yF_x^2 l_6 - \\
& 64D_x^2D_yF_x l_3 l_6 - 32D_x^2D_yF_x l_6^2 - 32D_x^2D_yF_y^2 l_3 - 48D_x^2D_yF_y^2 l_6 - 16D_x^2D_y l_2^2 l_6 - 32D_x^2D_y l_3 l_6^2 + \\
& 16D_x^2D_y l_5^2 l_6 - 16D_x^2D_y l_6^3 + 16D_x^2F_x^2F_y l_3 + 32D_x^2F_x^2F_y l_6 + 128D_x^2F_xF_y l_3 l_6 + 64D_x^2F_xF_y l_6^2 + \\
& 16D_x^2F_y^3 l_3 + 32D_x^2F_y^3 l_6 + 16D_x^2F_y l_2^2 l_3 + 96D_x^2F_y l_3^2 l_6 - 16D_x^2F_y l_3 l_5^2 + 112D_x^2F_y l_3 l_6^2 - 32D_x^2F_y l_4^2 l_6 - \\
& 32D_x^2F_y l_5^2 l_6 + 32D_x^2F_y l_6^3 - 32D_xD_y^2F_xF_y l_6 - 64D_xD_y^2F_y l_3 l_6 - 32D_xD_y^2F_y l_6^2 + 32D_xD_yF_x^3 l_3 + 64D_xD_yF_x^2 l_3^2 + \\
& 128D_xD_yF_x^2 l_3 l_6 + 32D_xD_yF_xF_y^2 l_3 + 32D_xD_yF_x l_2^2 l_3 + 64D_xD_yF_x l_2^2 l_6 + 128D_xD_yF_x l_3^2 l_6 - 32D_xD_yF_x l_3 l_5^2 + \\
& 160D_xD_yF_x l_3 l_6^2 + 64D_xD_yF_y^2 l_3^2 + 128D_xD_yF_y^2 l_3 l_6 + 64D_xD_y l_2^2 l_3 l_6 + 64D_xD_y l_2^2 l_6^2 + 64D_xD_y l_3^2 l_6^2 - \\
& 64D_xD_y l_3 l_5^2 l_6 + 64D_xD_y l_3 l_6^3 - 32D_xF_x^2F_y l_3^2 - 64D_xF_x^2F_y l_3 l_6 - 64D_xF_xF_y l_2^2 l_3 - 32D_xF_xF_y l_2^2 l_6 - 160D_xF_xF_y l_3^2 l_6 - \\
& 128D_xF_xF_y l_3 l_6^2 + 32D_xF_xF_y l_4^2 l_6 - 32D_xF_y^3 l_3^2 - 64D_xF_y^3 l_3 l_6 - 32D_xF_y l_2^2 l_3^2 - 64D_xF_y l_2^2 l_3 l_6 - 32D_xF_y l_2^2 l_6^2 - \\
& 64D_xF_y l_3^3 l_6 + 32D_xF_y l_3^2 l_5^2 - 128D_xF_y l_3^2 l_6^2 + 64D_xF_y l_3 l_4^2 l_6 + 64D_xF_y l_3 l_5^2 l_6 - 64D_xF_y l_3 l_6^3 + 32D_xF_y l_4^2 l_6^2 + \\
& 16D_y^4F_y l_6 - 32D_y^3F_x^2 l_3 - 16D_y^3F_x^2 l_6 - 64D_y^3F_x l_3 l_6 - 32D_y^3F_x l_6^2 - 32D_y^3F_y^2 l_3 - 48D_y^3F_y^2 l_6 - 16D_y^3 l_2^2 l_6 - \\
& - 32D_y^3 l_3 l_6^2 + 16D_y^3 l_5^2 l_6 - 16D_y^3 l_6^3 + 48D_y^2F_x^2F_y l_3 + 32D_y^2F_x^2F_y l_6 + 128D_y^2F_xF_y l_3 l_6 + 64D_y^2F_xF_y l_6^2 + 48D_y^2F_y^3 l_3 \\
& + 32D_y^2F_y^3 l_6 + 48D_y^2F_y l_2^2 l_3 + 64D_y^2F_y l_2^2 l_6 + 32D_y^2F_y l_3^2 l_6 - 48D_y^2F_y l_3 l_5^2 + 80D_y^2F_y l_3 l_6^2 - 32D_y^2F_y l_4^2 l_6 - 32D_y^2F_y l_5^2 l_6 \\
& + 32D_y^2F_y l_6^3 - 16D_yF_x^4 l_3 - 32D_yF_x^3 l_3^2 - 64D_yF_x^3 l_3 l_6 - 32D_yF_x^2F_y^2 l_3 - 16D_yF_x^2 l_2^2 l_6 - 32D_yF_x^2 l_3^3 - 112D_yF_x^2 l_3^2 l_6 \\
& + 32D_yF_x^2 l_3 l_4^2 + 32D_yF_x^2 l_3 l_5^2 - 96D_yF_x^2 l_3 l_6^2 + 16D_yF_x^2 l_4^2 l_6 - 32D_yF_xF_y^2 l_3^2 - 64D_yF_xF_y^2 l_3 l_6 - 32D_yF_x l_2^2 l_3^2 - 64D_yF_x l_2^2 l_3 l_6 \\
& - 32D_yF_x l_2^2 l_6^2 - 64D_yF_x l_3^3 l_6 + 32D_yF_x l_3^2 l_5^2 - 128D_yF_x l_3^2 l_6^2 + 64D_yF_x l_3 l_4^2 l_6 + 64D_yF_x l_3 l_5^2 l_6 - 64D_yF_x l_3 l_6^3 + 32D_yF_x l_4^2 l_6^2 \\
& - 16D_yF_y^4 l_3 - 64D_yF_y^2 l_2^2 l_3 - 48D_yF_y^2 l_2^2 l_6 - 32D_yF_y^2 l_3^3 - 80D_yF_y^2 l_3^2 l_6 + 32D_yF_y^2 l_3 l_4^2 + 32D_yF_y^2 l_3 l_5^2 - 32D_yF_y^2 l_3 l_6^2 \\
& + 48D_yF_y^2 l_4^2 l_6 - 16D_y l_2^4 l_3 - 16D_y l_2^4 l_6 - 48D_y l_2^2 l_3^2 l_6 + 32D_y l_2^2 l_3 l_5^2 - 64D_y l_2^2 l_3 l_6^2 + 16D_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 16D_y l_2^2 l_5^2 l_6 \\
& - 16D_y l_2^2 l_6^3 - 32D_y l_3^3 l_6^2 + 48D_y l_3^2 l_5^2 l_6 - 48D_y l_3^2 l_6^3 + 32D_y l_3 l_4^2 l_6^2 - 16D_y l_3 l_5^2 l_6^2 + 16D_y l_3 l_6^4 - 16D_y l_4^2 l_5^2 l_6 \\
& + 16D_y l_4^2 l_6^3 + 16F_x^2F_y l_2^2 l_3 + 16F_x^2F_y l_3^3 + 32F_x^2F_y l_3^2 l_6 - 16F_x^2F_y l_3 l_4^2 + 64F_xF_y l_2^2 l_3^2 + 64F_xF_y l_2^2 l_3 l_6 + 64F_xF_y l_3^3 l_6 \\
& + 64F_xF_y l_3^2 l_6^2 - 64F_xF_y l_3 l_4^2 l_6 + 16F_y^3 l_2^2 l_3 + 16F_y^3 l_3^3 + 32F_y^3 l_3^2 l_6 - 16F_y^3 l_3 l_4^2 + 16F_y l_4^2 l_3 + 16F_y l_4^2 l_6 + 16F_y l_2^2 l_3^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 64F_y l_2^2 l_3^2 l_6 - 16F_y l_2^2 l_3 l_4^2 - 16F_y l_2^2 l_3 l_5^2 + 48F_y l_2^2 l_3 l_6^2 - 32F_y l_2^2 l_4^2 l_6 + 16F_y l_3^4 l_6 - 16F_y l_3^3 l_5^2 + 48F_y l_3^3 l_6^2 \\
& - 32F_y l_3^2 l_4^2 l_6 - 32F_y l_3^2 l_5^2 l_6 + 32F_y l_3^2 l_6^3 + 16F_y l_3 l_4^2 l_5^2 - 48F_y l_3 l_4^2 l_6^2 + 16F_y l_4^4 l_6 . \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Annexe B

Coefficients des équations matricielles 3.91

Les équations matricielles 3.91 de Kane pour deux corps actionnés par roues d'inertie au chapitre 3 sont écrites avec les coefficients :

$$A_1 = -m_b(-r_y^{A,1} \cos(\phi_A) - r_x^{A,1} \sin(\phi_A)) \quad (\text{B.1})$$

$$B_1 = -m_b(r_y^{B,1} \cos(\phi_B) + r_x^{B,1} \sin(\phi_B)) \quad (\text{B.2})$$

$$C_1 = m_b(-r_x^{A,1} \cos(\phi_A) \omega_A^2 + r_y^{A,1} \sin(\phi_A) \omega_A^2 + r_x^{B,1} \cos(\phi_B) \omega_B^2 - r_y^{B,1} \sin(\phi_B) \omega_B^2) \quad (\text{B.3})$$

$$A_2 = -m_b(-r_y^{A,1} \sin(\phi_A) + r_x^{A,1} \cos(\phi_A)) \quad (\text{B.4})$$

$$B_2 = -m_b(r_y^{B,1} \sin(\phi_B) - r_x^{B,1} \cos(\phi_B)) \quad (\text{B.5})$$

$$C_2 = m_b(-r_x^{A,1} \sin(\phi_A) \omega_A^2 - r_y^{A,1} \cos(\phi_A) \omega_A^2 + r_x^{B,1} \sin(\phi_B) \omega_B^2 + r_y^{B,1} \cos(\phi_B) \omega_B^2) \quad (\text{B.6})$$

$$A_3 = -m_b(-r_x^{A,1} \sin(\phi_A) - r_y^{A,1} \cos(\phi_A)) \quad (\text{B.7})$$

$$B_3 = -m_b(r_x^{A,1} \cos(\phi_A) - r_y^{A,1} \sin(\phi_A)) \quad (\text{B.8})$$

$$C_3 = I_a + \frac{1}{m_b} A_3 A_1 + \frac{1}{m_b} B_3 B_1 \quad (\text{B.9})$$

$$D_3 = \frac{1}{m_b} A_3 A_2 + \frac{1}{m_b} B_3 B_2 \quad (\text{B.10})$$

$$E_4 = \frac{1}{m_b} A_3 C_1 + \frac{1}{m_b} B_3 C_2 \quad (\text{B.11})$$

$$A_4 = -m_b(r_x^{B,1} \sin(\phi_B) + r_y^{B,1} \cos(\phi_B)) \quad (\text{B.12})$$

$$B_4 = -m_b(-r_y^{B,1} \cos(\phi_B) + r_x^{B,1} \sin(\phi_B)) \quad (\text{B.13})$$

$$C_4 = I_a + \frac{1}{m_b} A_4 A_1 + \frac{1}{m_b} B_4 B_1 \quad (\text{B.14})$$

$$D_4 = \frac{1}{m_b} A_4 A_2 + \frac{1}{m_b} B_4 B_2 \quad (\text{B.15})$$

$$E_4 = \frac{1}{m_b} A_4 C_1 + \frac{1}{m_b} B_4 C_2 \quad (\text{B.16})$$

Annexe C

Coefficients des équations matricielles 3.113

Les équations matricielles 3.113 de Kane pour un mécanisme plan fermé à 4 barres actionné par roues d'inertie sont écrites avec ces coefficients :

$$\begin{aligned}
 A_1 = & -m_B(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - m_C(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
 & + \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) - m_D(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} + \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} \\
 & + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) - \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,3} + \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) + \gamma_3(\sin(\phi_D)r_x^{D,3} + \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 = & -m_B(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) - m_C(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) \\
 & + \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) - m_D(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
 & - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} + \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) - \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,3} + \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
 & + \gamma_4(\sin(\phi_D)r_x^{D,3} + \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -m_B(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) - m_C(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
 & - m_D(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} \\
 & - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = & -m_B(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - m_C(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) \\
 & - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) - m_D(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} \\
 & - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
 & - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

$$A_3 = -(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1})m_B - (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_D$$

$$\begin{aligned}
& -(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3})) \\
& \quad - \gamma_3(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D \quad (C.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & -(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1})m_B - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C \\
& - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3})) \\
& \quad - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D \quad (C.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & -Ia - (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1})m_B(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& \quad - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1})m_B(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) - (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} \\
& \quad + \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} \\
& - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) - (\gamma_1^2 Ic) \\
& - (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3})) \\
& - \gamma_3(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} + \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
& - \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,3} + \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) + \gamma_3(\sin(\phi_D)r_x^{D,3} + \cos(\phi_D)r_y^{D,3}) - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} \\
& - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(\cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& \quad - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
& \quad - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) - (\gamma_3^2 Id) \quad (C.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = & -(-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1})m_B(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \sin(\phi_A)r_y^{A,1})m_B(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} \\
& - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} + \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} \\
& - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) - (\gamma_1 Ic \gamma_2) - (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3})) \\
& - \gamma_3(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} + \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) - \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,3} + \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
& + \gamma_4(\sin(\phi_D)r_x^{D,3} + \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) - (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} \\
& - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
& \quad - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) - (\gamma_3 Id \gamma_4) \quad (C.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & -(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1}))m_B - (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C - (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D \quad (C.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & -(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1}))m_B - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D \quad (C.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -(\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1}))m_B - (\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1}))m_B (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) - \\
& (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} + \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} \\
& - \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) - (\gamma_1 Ic \gamma_2) - (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} + \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) \\
& - \gamma_1(\sin(\phi_C)r_x^{C,3} + \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) + \gamma_3(\sin(\phi_D)r_x^{D,3} + \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) \\
& + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
& - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) - (\gamma_3 Id \gamma_4) \quad (C.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 = & -Ib - (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1}))m_B (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& + \sin(\phi_B)r_y^{B,1}))m_B (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} + \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) - (\gamma_2^2 Ic) - (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} \\
& - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} \\
& - \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} + \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,2} + \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) - \gamma_2(\sin(\phi_C)r_x^{C,3} + \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
& + \gamma_4(\sin(\phi_D)r_x^{D,3} + \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) - (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} \\
& - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) \\
& - (\gamma_4^2 Id) \quad (C.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & m_B(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1})) + m_C(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
& + m_D(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A \\
& + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,3} \\
& - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) + (\gamma_3\dot{\phi}_A + \gamma_4\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_D \cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \dot{\phi}_D \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & m_B(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1})) + m_C(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) + \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
& + m_D(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) + \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A \\
& + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A \\
& + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) - (\gamma_3\dot{\phi}_A \\
& + \gamma_4\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_D \sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \dot{\phi}_D \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 = & (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1})m_B(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1})) + (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1})m_B(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1})) \\
& + (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
& + (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) + \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
& + (-\sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \cos(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_1(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_3(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) \\
& \quad + (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A \\
& \quad + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) + (\gamma_3\dot{\phi}_A + \gamma_4\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_D \cos(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \dot{\phi}_D \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) + (\cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \sin(\phi_A)r_y^{A,1} - \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) \\
& + \gamma_1(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_3(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) + \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,2} \\
& - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,3} \\
& - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) - (\gamma_3\dot{\phi}_A + \gamma_4\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_D \sin(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \dot{\phi}_D \cos(\phi_D)r_y^{D,3})) \quad (C.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_4 = & (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1})m_B(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1})) + (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} \\
& + \sin(\phi_B)r_y^{B,1})m_B(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1})) + (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} \\
& - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) - \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,2} \\
& - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,2})) + (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}))m_C(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) \\
& - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) + \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,2} \\
& - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_y^{C,2})) \\
& + (\sin(\phi_B)r_x^{B,1} + \cos(\phi_B)r_y^{B,1} - \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \cos(\phi_B)r_y^{B,2} - \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,2} - \cos(\phi_C)r_y^{C,2}) \\
& + \gamma_2(-\sin(\phi_C)r_x^{C,3} - \cos(\phi_C)r_y^{C,3}) - \gamma_4(-\sin(\phi_D)r_x^{D,3} - \cos(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(-\dot{\phi}_A(\dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_y^{A,1}) + \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,1}) \\
& - \dot{\phi}_B(\dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_y^{B,2}) + (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,2} \\
& - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A + \gamma_2\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_C \cos(\phi_C)r_x^{C,3} \\
& - \dot{\phi}_C \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) + (\gamma_3\dot{\phi}_A + \gamma_4\dot{\phi}_B)(\dot{\phi}_D \cos(\phi_D)r_x^{D,3} \\
& - \dot{\phi}_D \sin(\phi_D)r_y^{D,3})) + (-\cos(\phi_B)r_x^{B,1} + \sin(\phi_B)r_y^{B,1} + \cos(\phi_B)r_x^{B,2} - \sin(\phi_B)r_y^{B,2} \\
& - \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,2} - \sin(\phi_C)r_y^{C,2}) + \gamma_2(\cos(\phi_C)r_x^{C,3} - \sin(\phi_C)r_y^{C,3}) \\
& - \gamma_4(\cos(\phi_D)r_x^{D,3} - \sin(\phi_D)r_y^{D,3}))m_D(\dot{\phi}_A(-\dot{\phi}_A \sin(\phi_A)r_x^{A,1} \\
& - \dot{\phi}_A \cos(\phi_A)r_y^{A,1}) - \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,1} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,1}) \\
& + \dot{\phi}_B(-\dot{\phi}_B \sin(\phi_B)r_x^{B,2} - \dot{\phi}_B \cos(\phi_B)r_y^{B,2}) - (\gamma_1\dot{\phi}_A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_2 \dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C) r_x^{C,2} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C) r_y^{C,2}) + (\gamma_1 \dot{\phi}_A \\
& + \gamma_2 \dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_C \sin(\phi_C) r_x^{C,3} - \dot{\phi}_C \cos(\phi_C) r_y^{C,3}) - (\gamma_3 \dot{\phi}_A \\
& \quad + \gamma_4 \dot{\phi}_B)(-\dot{\phi}_D \sin(\phi_D) r_x^{D,3} - \dot{\phi}_D \cos(\phi_D) r_y^{D,3}) \quad (\text{C.16})
\end{aligned}$$

Annexe D

Modèle *SimMechanics* du mécanisme à quatre barres plan

Au chapitre 3 est introduit un mécanisme plan à quatre barres dont les équations matricielles sont développées. Pour valider leur dérivation, elles sont simulées et comparées à une simulation d'un modèle *Simscape Multibody* détaillé à la figure suivante.

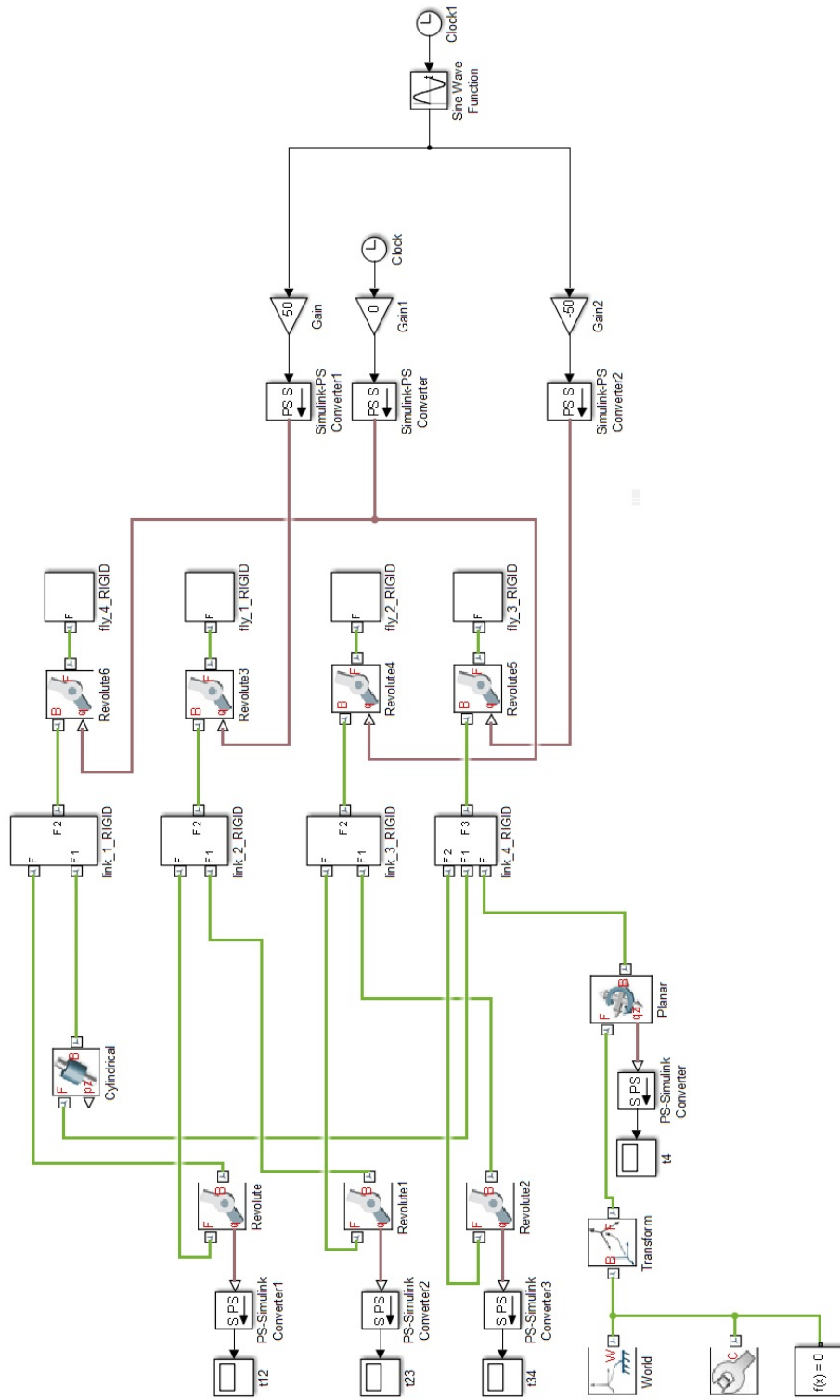


FIGURE D.1 – Modèle *Simscape Multibody* du mécanisme plan flottant à 4 barres.

Annexe E

Modèle *SimMechanics* du mécanisme à quatre barres sphérique

Au chapitre 3 est introduit un mécanisme sphérique à quatre barres dont les équations matricielles sont développées. Pour valider leur dérivation, elles sont simulées et comparées à une simulation d'un modèle *Simscape Multibody* détaillé à la figure suivante.

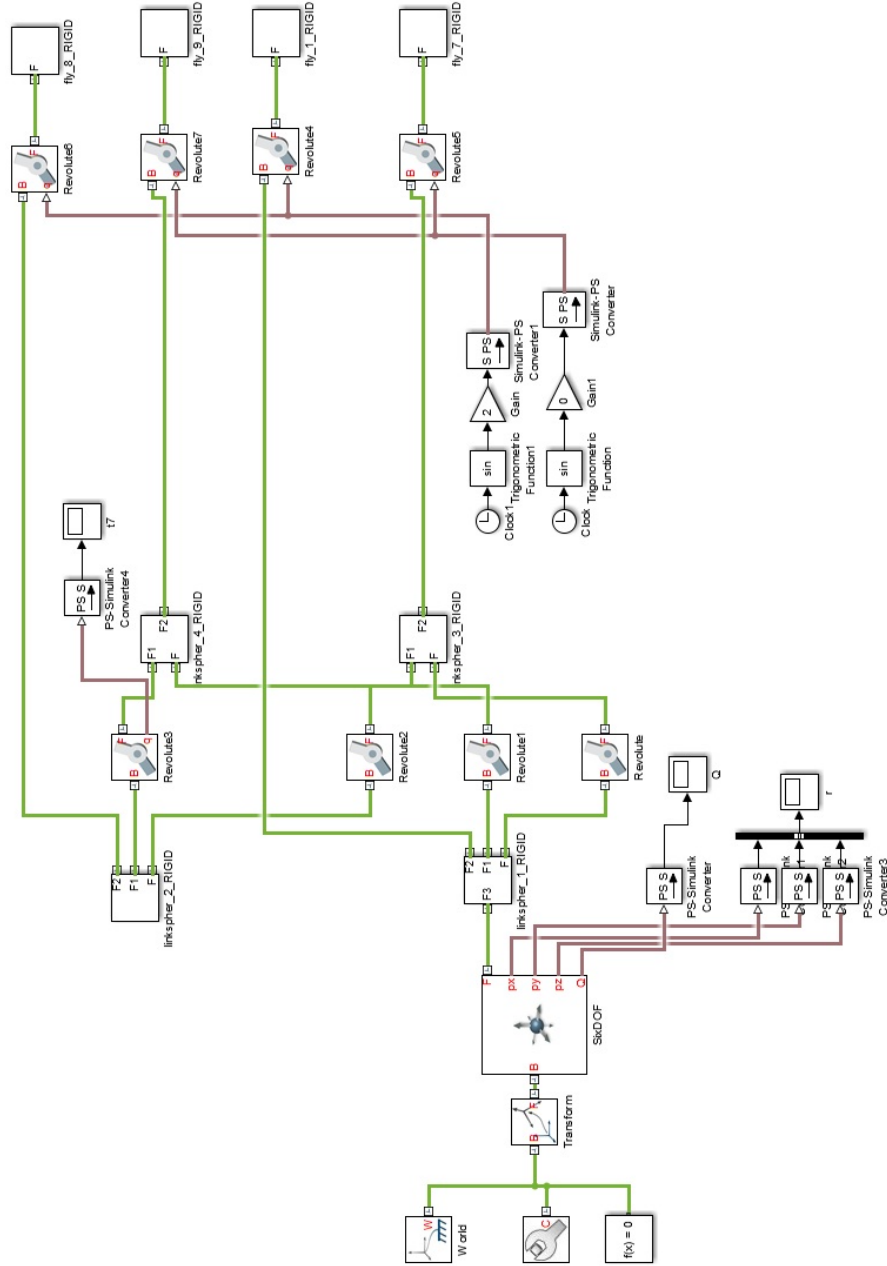


FIGURE E.1 – Modèle *Simscape Multibody* du mécanisme sphérique à quatre barres.

Annexe F

Expressions des équations de Kane pour le mécanisme sphérique à quatre barres

Afin de bâtir l'expression matricielle des équations dynamiques pour le mécanisme à quatre barres sphérique du chapitre 3, les équations de Kane pour chaque vitesse généralisée sont détaillées :

$$F_1^* = \mathbf{e}_x \cdot (-\mathbf{a}_A m_A - \mathbf{a}_B m_B - \mathbf{a}_C m_C - \mathbf{a}_D m_D) \quad (\text{F.1})$$

$$F_2^* = \mathbf{e}_y \cdot (-\mathbf{a}_A m_A - \mathbf{a}_B m_B - \mathbf{a}_C m_C - \mathbf{a}_D m_D) \quad (\text{F.2})$$

$$F_3^* = \mathbf{e}_z \cdot (-\mathbf{a}_A m_A - \mathbf{a}_B m_B - \mathbf{a}_C m_C - \mathbf{a}_D m_D) \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} F_4^* = & (\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_{cmA}) \cdot (-\mathbf{a}_A m_A) + (\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_{cmB}) \cdot (-\mathbf{a}_B m_B) + (\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_{cmC}) \cdot (-\mathbf{a}_C m_C) \\ & + (\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_{cmD}) \cdot (-\mathbf{a}_D m_D) + \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{I}_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}_A + \mathbf{r}_A \times m_A \mathbf{v}_A) \\ & + \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{r}_B \times m_B \mathbf{v}_B) \\ & + \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_C + \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C) \\ & + \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{I}_D \dot{\boldsymbol{\omega}}_D + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{I}_D \boldsymbol{\omega}_D + \mathbf{r}_D \times m_D \mathbf{v}_D) . \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

$$\begin{aligned} F_5^* = & (\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}_{cmA}) \cdot (-\mathbf{a}_A m_A) + (\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}_{cmB}) \cdot (-\mathbf{a}_B m_B) + (\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}_{cmC}) \cdot (-\mathbf{a}_C m_C) \\ & + (\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}_{cmD}) \cdot (-\mathbf{a}_D m_D) + \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{I}_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}_A + \mathbf{r}_A \times m_A \mathbf{v}_A) \\ & + \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{r}_B \times m_B \mathbf{v}_B) \\ & + \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_C + \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C) \\ & + \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{I}_D \dot{\boldsymbol{\omega}}_D + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{I}_D \boldsymbol{\omega}_D + \mathbf{r}_D \times m_D \mathbf{v}_D) . \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned}
F_6^* &= (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{cmA}) \cdot (-\mathbf{a}_A m_A) + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{cmB}) \cdot (-\mathbf{a}_B m_B) + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{cmC}) \cdot (-\mathbf{a}_C m_C) \\
&\quad + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{cmD}) \cdot (-\mathbf{a}_D m_D) + \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{I}_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}_A + \mathbf{r}_A \times m_A \mathbf{v}_A) \\
&\quad + \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{r}_B \times m_B \mathbf{v}_B) \\
&\quad + \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_C + \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C) \\
&\quad + \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{I}_D \dot{\boldsymbol{\omega}}_D + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{I}_D \boldsymbol{\omega}_D + \mathbf{r}_D \times m_D \mathbf{v}_D) . \quad (\text{F.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_7^* &= (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{cmB}) \cdot (-\mathbf{a}_B m_B) + [(\mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2) \times \mathbf{r}_{cmC}] \cdot (-\mathbf{a}_C m_C) \\
&\quad + [(\mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{r}_{cmD}] \cdot (-\mathbf{a}_D m_D) + \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{r}_B \times m_B \mathbf{v}_B) \\
&\quad + (\mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_C + \mathbf{r}_C \times m_C \mathbf{v}_C) \\
&\quad + (\mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{I}_D \dot{\boldsymbol{\omega}}_D + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{I}_D \boldsymbol{\omega}_D + \mathbf{r}_D \times m_D \mathbf{v}_D) . \quad (\text{F.7})
\end{aligned}$$

$$F_1 = 0 \quad (\text{F.8})$$

$$F_2 = 0 \quad (\text{F.9})$$

$$F_3 = 0 \quad (\text{F.10})$$

$$F_4 = \mathbf{e}_x \cdot (I_{fa} \alpha_{fa} \frac{\mathbf{r}_A}{r_s}) + \mathbf{e}_x \cdot (I_{fb} \alpha_{fb} \frac{\mathbf{r}_B}{r_s}) + \mathbf{e}_x \cdot (I_{fc} \alpha_{fc} \frac{\mathbf{r}_C}{r_s}) + \mathbf{e}_x \cdot (I_{fd} \alpha_{fd} \frac{\mathbf{r}_D}{r_s}) \quad (\text{F.11})$$

$$F_5 = \mathbf{e}_y \cdot (I_{fa} \alpha_{fa} \frac{\mathbf{r}_A}{r_s}) + \mathbf{e}_y \cdot (I_{fb} \alpha_{fb} \frac{\mathbf{r}_B}{r_s}) + \mathbf{e}_y \cdot (I_{fc} \alpha_{fc} \frac{\mathbf{r}_C}{r_s}) + \mathbf{e}_y \cdot (I_{fd} \alpha_{fd} \frac{\mathbf{r}_D}{r_s}) \quad (\text{F.12})$$

$$F_6 = \mathbf{e}_z \cdot (I_{fa} \alpha_{fa} \frac{\mathbf{r}_A}{r_s}) + \mathbf{e}_z \cdot (I_{fb} \alpha_{fb} \frac{\mathbf{r}_B}{r_s}) + \mathbf{e}_z \cdot (I_{fc} \alpha_{fc} \frac{\mathbf{r}_C}{r_s}) + \mathbf{e}_z \cdot (I_{fd} \alpha_{fd} \frac{\mathbf{r}_D}{r_s}) \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned}
F_7 &= \mathbf{e}_1 \cdot (I_{fb} \alpha_{fb} \frac{\mathbf{r}_B}{r_s}) + (\mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2) \cdot (I_{fc} \alpha_{fc} \frac{\mathbf{r}_C}{r_s}) + \\
&\quad (\mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3) \cdot (I_{fd} \alpha_{fd} \frac{\mathbf{r}_D}{r_s}) \quad (\text{F.14})
\end{aligned}$$

Bibliographie

- ADELI, S. Nasir, Vaios J. LAPPAS et Bong WIE (2011). « A scalable bus-based attitude control system for Solar Sails ». *Advances in Space Research* 48.11, p. 1836–1847.
- AGHILI, Farhad (2012). « Active Orbital Debris Removal Using Space Robotics ». *International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space*. Turin, p. 1–9.
- AGRAWAL, Sunil K, Saravana KUMAR et Mark YIM (2002). « Polyhedral Single Degree-of-freedom Expanding Structures Design and Prototypes.pdf ». *Journal of Mechanical Design* 124.September, p. 473–478.
- AHERN, James et Lester FREDERICK (1912). « UMBRELLA », US1033651.
- AKGÜN, Yenal, Charis J. GANTES, Konstantinos E. KALOCHAIRETIS et Gökhan KIPER (2010). « A novel concept of convertible roofs with high transformability consisting of planar scissor-hinge structures ». *Engineering Structures* 32.9, p. 2873–2883.
- AKKOUICHE, Samir et Eric GALIN (2001). « Adaptive implicit surface polygonization using marching triangles ». *Computer Graphics Forum* 20.2, p. 67–80.
- BALLI, Shrinivas S. et Satish CHAND (2002). « Transmission angle in mechanisms (Triangle in mech) ». *Mechanism and Machine Theory* 37.2, p. 175–195.
- BARBEE, Brent W, Salvatore ALFANO, Elfego PIÑON, Kenn GOLD et David GAYLOR (2012). « Design of Spacecraft Missions to Remove Multiple Orbital Debris Objects ». *35th Annual AAS Guidance and Control Conference*. Breckenridge, p. 1–19.
- BARKER, RJP et SD GUEST (2000). « Inflatable triangulated cylinders ». *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures : Theory and Applications*. Cambridge, p. 17–26.
- BARNES, John (2012). *Gems of Geometry*. Berlin : Springer, p. xiii–325.
- BETTEZ-BOUCHARD, Jean-Alexandre et Clément M GOSSELIN (2016). « Development and experimental validation of a reorientation algorithm for a free-floating serial manipulator ». *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Stockholm, p. 2733 –2738.
- BIRGLEN, L., T. LALIBERTÉ et C.M. GOSSELIN (2008). *Underactuated robotic hands*. T. 40. Springer-Verlag Wien, p. 244.
- BOCCIA, Luigi et Olav BREINBJERG (2012). « Antenna Basics ». *Space Antenna Handbook*. John Wiley & Sons, Ltd, p. 1–35.
- BONNAL, Christophe, Jean-marc RUAULT et Marie-christine DESJEAN (2013). « Active debris removal : Recent progress and current trends ». *Acta Astronautica* 85, p. 51–60.

- BOUDERBALA, M et R MOTRO (2000). « Folding tensegrity systems ». *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures : Theory and Applications*.
- BRERETON, Anthony Paul (2001). « POP-UP TENT », US6257263B1.
- BRITVEC, S J (1995). *Stability and Optimization of flexible space structures*. Basel, Germany : Birkhauser.
- CARPENTER, Michele Deanne (2009). « Dynamics and control of gyroscopically actuated space-robotic systems ». Thèse de doct. Cornell University.
- CHRISTIANSEN, E (2003). *Meteoroid/Debris Shielding*. Rapp. tech. August. Houston : NASA, p. 114.
- CHRISTIANSEN, Eric L. (1993). « Design and performance equations for advanced meteoroid and debris shields ». *International Journal of Impact Engineering* 14.1-4, p. 145–156.
- CHRISTOFOROU, Eftychios G., Andreas MÜLLER, Marios C. PHOCAS, Maria MATHEOU et Socrates ARNOS (2015). « Design and Control Concept for Reconfigurable Architecture ». *Journal of Mechanical Design* 137.April, p. 042302.
- DEV, Krishna et An-min ZOU (2013). « A novel single thruster control strategy for spacecraft attitude stabilization ». *Acta Astronautica* 86, p. 55–67.
- EICHLER, P. et A. BADE (1993). « Strategy for the economical removal of numerous larger debris objects from Earth orbits ». *Acta Astronautica* 29.1, p. 29–36.
- FELTON, Samuel M., Michael T. TOLLEY, Cagdas D. ONAL, Daniela RUS et Robert J. WOOD (2013). « Robot self-assembly by folding : A printed inchworm robot ». *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe, p. 277–282.
- FERNANDES, C, L GURVITS et Li ZEXIANG (1994). « Attitude control of a space platform/manipulator system using internal motion ». *International Journal of Robotics Research* 13.4, p. 289–304.
- GANGULI, Gurudas, Christopher CRABTREE, Leonid RUDAKOV et Scott CHAPPIE (2011). « A Concept For Elimination Of Small Orbital Debris ». *Nature* 473.7346, p. 221–225. arXiv : 1104.1401.
- GANTES, Charis J. (2001). *Deployable Structure : Analysis and Design*, p. 353.
- GATES (2009). *Polychain GT Carbon Belt Drive Design Manual*. Rapp. tech. Denver : Gates Corporation.
- GE, Xincheng et Zhengxiong GUO (2012). « Nonholonomic motion planning for a free-falling cat using spline approximation ». *Science China : Physics, Mechanics and Astronomy* 55.11, p. 2100–2105.
- GOGU, G (2005). « Chebychev-Grübler-Kutzbach’s criterion for mobility calculation of multi-loop mechanisms revisited via theory of linear transformations ». *European Journal of Mechanics A/Solids* 24, p. 427–441.
- GOSSELIN, C M et D GAGNON-LACHANCE (2006). « Expandable Polyhedral Mechanisms Based on Polygonal One-Degree-of-Freedom Faces ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science* 220.7, p. 1011–1018.

- GOSSELIN, C M, J SEFRIQUI et M J RICHARD (1992). « Solutions polynomiales au problème de la cinématique directe des manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté ». *Mechanism and Machine Theory* 27 i2, p. 107–119.
- GOSSELIN, Clément et Martin GAGNÉ (1995). « Dynamic models for spherical parallel manipulators ». *9th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress*. Milan, p. 2032–2036.
- GUEST, S. D. et P. W. FOWLER (2005). « A symmetry-extended mobility rule ». *Mechanism and Machine Theory* 40.9, p. 1002–1014.
- GUI, Haichao, Lei JIN et Shijie XU (2013). « Attitude maneuver control of a two-wheeled spacecraft with bounded wheel speeds ». *Acta Astronautica* 88, p. 98–107.
- GUO, Hongwei, Jing ZHANG, Rongqiang LIU et Zongquan DENG (2013). « Effects of joint on dynamics of space deployable structure ». *Chinese Journal of Mechanical Engineering* 26.5, p. 861–872.
- HAMILTON, Brian J et Mason A PECK (2015). *Spacecraft Momentum Control Systems*.
- HANSEN, Nikolaus et Andreas OSTERMEIER (1996). « Adapting Arbitrary Normal Mutation Distributions in Evolution Strategies : The Covariance Matrix Adaptation ». *IEEE Intern. Conf. on Evolutionary Computation*, p. 312–317.
- HARKNESS, Patrick, Malcolm MCROBB, Paul LÜTZKENDORF, Ross MILLIGAN, Andrew FEE-NEY et Craig CLARK (2014). « Development status of AEOLDOS - A deorbit module for small satellites ». *Advances in Space Research* 54.1, p. 82–91.
- HARTENBERG, R S et J DENAVIT (1964). *Kinematic synthesis of Linkages*. New-York : McGraw-Hill.
- HIRZINGER, Gerd, Klaus LANDZETTEL, Bernhard BRUNNER, Max FISCHER, Carsten PREUSCHE, Detlef REINTSEMA, Alin ALBU-SCHÄFFER, Günter SCHREIBER et Bernhard-Michael STEINMETZ (2004). « DLR's robotics technologies for on-orbit servicing ». *Advanced Robotics* 18.2, p. 139–174.
- HOBERMAN, Charles (1991). *Radial expansion/retraction truss structures*.
- HONEYWELL (2013). *Honeywell Spectra ® Fiber Capability Guide*. Rapp. tech. Honeywell.
- IADC (2007). « IADC Space Debris Mitigation Guidelines ». Revision 1, p. 1–10.
- ISHIGE, Yuuki, Satomi KAWAMOTO et Seishiro KIBE (2004). « Study on electrodynamic tether system for space debris removal ». *Acta Astronautica* 55.11, p. 917–929.
- J.DUNN, Michael (2012). « Space Debris Removal », US 2012/0241562 A1.
- JENKINS, Christopher H M (2001). *Gossamer spacecraft : membrane and inflatable structures technology for space applications*. Progress in astronautics and aeronautics. Reston : American Institute of Aeronautics et Astronautics, p. xvii –586.
- JIN, Minghe, Cheng ZHOU, Yechao LIU et Hong LIU (2015). « Cartesian Path Planning for Base Attitude Adjustment of Space Robot ». *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. 1. Beijing, p. 582–587.

- KANE, T R et M P SCHER (1969). « A dynamical explanation of the falling cat phenomenon ». *International Journal of Solids and Structures* 5, p. 663–670.
- KANE, Thomas R. et David A. LEVINSON (1985). *Dynamics Theory and Applications*. Ithaca : The Internet-First University Press This, p. 402.
- KEARSLEY, A. T., G. A. GRAHAM, M. J. BURCHELL, E. A. TAYLOR, G. DROLSHAGEN, R. J. CHATER et D. MCPHAIL (2005). « MULPEX : A compact multi-layered polymer foil collector for micrometeoroids and orbital debris ». *Advances in Space Research* 35.7, p. 1270–1281.
- KESSLER, Donald J. et B. G. COUR-PALAIS (1978). « Collision frequency of artificial satellites - The creation of a debris belt ». *Journal of Geophysical Research* 83.A6, p. 2637–2646.
- KIPER, Gökhan, Eres SÖYLEMEZ et A. U O KIŞISEL (2008). « A family of deployable polygons and polyhedra ». *Mechanism and Machine Theory* 43.5, p. 627–640.
- KOLMANOVSKY, I., N. H. MCCLAMROCH et V. T. COPPOLA (1995). « New results on control of multibody systems which conserve angular momentum ». *Journal of Dynamical and Control Systems* 1.4, p. 447–462.
- KOVÁCS, F., T. TARNAI, P. W. FOWLER et S. D. GUEST (2004). « A class of expandable polyhedral structures ». *International Journal of Solids and Structures* 41.3-4, p. 1119–1137.
- KRAG, H, H KLINKRAD, M OSWALD, S STABROTH et C WIEDEMANN (2007). « Analysing the risk increase in LEO due to recent major fragmentation events ». *2nd IAASS Conference : Space Safety in a Global World* SP-645.
- KUO, Yong Lin et Tsung Liang WU (2012). « Open-loop and closed-loop attitude dynamics and controls of miniature spacecraft using pseudowheels ». *Computers and Mathematics with Applications* 64.5, p. 1282–1290.
- LALIBERTÉ, T, C GOSSELIN et G CÔTÉ (2001). « A rapid prototyping framework for fast and cost-effective design of robotic mechanism prototypes ». *IEEE Robotics and Automation Magazine* 8, p. 43–52.
- LAPPAS, Vaios, Nasir ADELI, Lourens VISAGIE, Juan FERNANDEZ, Theodoros THEODOROU, Willem STEYN et Matthew PERREN (2011). « CubeSail : A low cost CubeSat based solar sail demonstration mission ». *Advances in Space Research* 48.11, p. 1890–1901.
- LEE, Kunwoo (1999). *Principles of CAD/CAM/CAE Systems*. T. 32, p. 227–228.
- LEVIN, Eugene, Jerome PEARSON et Joseph CARROLL (2012). « Wholesale debris removal from LEO ». *Acta Astronautica* 73, p. 100–108.
- LI, J., S. YAN, F. GUO et P. GUO (2012). « Effects of damping, friction, gravity, and flexibility on the dynamic performance of a deployable mechanism with clearance ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science* 227.8, p. 1791–1803.
- LIAPI, K A (2005). « A novel portable and collapsible tensegrity unit for the rapid assembly of tensegrity networks ». *Space Structures* 5. Chap. 5, 1 : 39–46.

- LINDBERG, Robert E., Richard W. LONGMAN et Michael F. ZEDD (1993). « Kinematic and Dynamic Properties of an Elbow Manipulator Mounted on a Satellite ». *Space Robotics : Dynamics and Control*. Springer, p. 1–25.
- LIOU, J-C (2011a). « A Note on Active Debris Removal ». *Orbital Debris - Quarterly News*.
- LIOU, J. C. (2011b). « An active debris removal parametric study for LEO environment remediation ». *Advances in Space Research* 47.11, p. 1865–1876.
- LIOU, J.-C. et N. L. JOHNSON (2014). « Risk in space from orbiting debris ». *Science* 311.5759, p. 340–341.
- LIOU, J. C., N. L. JOHNSON et N. M. HILL (2010). « Controlling the growth of future LEO debris populations with active debris removal ». *Acta Astronautica* 66.5-6, p. 648–653.
- LOEB, A (1991). *Space Structures*. Basel, Germany : Birkhauser.
- LOKCU, E et R L ASH (2011). « A de-orbit system design for CubeSat payloads ». *Recent Advances in Space Technologies (RAST), 2011 5th International Conference on*, p. 470–474.
- MASON, James, Jan STUPL, William MARSHALL et Creon LEVIT (2011). « Orbital debris-debris collision avoidance ». *Advances in Space Research* 48.10, p. 1643–1655.
- MCCARTHY, J. Michael et Gim Song SOH (2010). *Geometric Design of Linkages*. Sous la dir. de S.S. ANTMAN, J.E. MARSDEN et L. SIROVICH. Springer.
- MCCONNAUGHEY, Paul K., Mark G. FEMMININEO, Syri J. KOELFGEN, Roger A. LEPSCH, Richard M. RYAN et Steven A. TAYLOR (2015). *NASA'S launch propulsion systems technology roadmap*. Rapp. tech. NASA.
- MELTON, Robert G. (1998). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, p. 1–120.
- MERMERTAŞ, Vahit (2004). « Optimal design of manipulator with four-bar mechanism ». *Mechanism and Machine Theory* 39.5, p. 545–554.
- MIURA, K et K TNAZAWA (2000). « Tension truss antenna - concept, reality and future ». *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures : Theory and Applications*, p. 291–300.
- MOE, Kenneth et Mildred M. MOE (2005). « Gas-surface interactions and satellite drag coefficients ». *Planetary and Space Science* 53.8, p. 793–801.
- MOE, Mildred M., Steven D WALLACE et K. MOE (1995). « Recommended Drag Coefficients for Aeronomic Satellites ». *The Upper Mesosphere and Lower Thermosphere : A Review of Experiment and Theory* 87, p. 349–356.
- MOTRO, R (2005). « Tensegrity : the state of the art ». *Space Structures* 5. Chap. 11, 1 : 97–106.
- MOUSSI, A., G. DROLSHAGEN, J. A M McDONNELL, J. C. MANDEVILLE, A. T. KEARSLEY et H. LUDWIG (2005). « Hypervelocity impacts on HST solar arrays and the debris and meteoroids population ». *Advances in Space Research* 35.7, p. 1243–1253.
- MUÑOZ-SALINAS, Rafael, Francisco J MADRID-CUEVAS, Manuel J MARÍN-JIMÉNEZ et R MU (2014). « Automatic generation and detection of highly reliable fiducial markers under oc-

- clusion Automatic generation and detection of highly reliable fiducial markers under occlusion ». *Pattern Recognition* 47.6, p. 2280–2292.
- MUROTSU, Yoshishada, Kei SENDA, Akira MITSUYA, Hidefumi KAWANO et Akihiro ANDO (1996). « Control experiments of a docking mechanism composed of a planar variable geometry truss ». *7th international conference on adaptive structures technology*. Rome, p. 784–791.
- NATORI, M C, Nobuhisa KATSUMATA, Hiroshi YAMAKAWA, Hiraku SAKAMOTO et Naoko KISHIMOTO (2013). « Conceptual model study using origami for membrane space structure ». *Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2013*. Portland, Oregon, USA, p. 1–12.
- NENCHEV, D.N et M UCHIYAMA (1998). « PARA-Arm : A five-bar parallel manipulator with singularity-perturbed design ». *Mechanism and Machine Theory* 33.5, p. 453–462.
- NGUYEN-HUYNH, Thai Chau et Inna SHARF (2013). « Adaptive Reactionless Motion and Parameter Identification in Postcapture of Space Debris ». *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 36.2, p. 404–414.
- NISHIDA, S. et T. YOSHIKAWA (2003). « Space debris capture by a joint compliance controlled robot ». *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. T. 1. Kobe, p. 496–502.
- NISHIDA, Shin-Ichiro, Satomi KAWAMOTO, Yasushi OKAWA, Fuyuto TERUI et Shoji KITAMURA (2009). « Space debris removal system using a small satellite ». *Acta Astronautica* 65.1-2, p. 95–102.
- NOCK, Kerry T., Angus D. McRONALD et Kim Maynard AARON (2003). « Balloon device for lowering space object orbits », US6830222B1.
- PAPADOPOULOS, Steven et Evangelos DUBOWSKY (1993). « The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9.5, p. 531–543.
- PELLEGRINO, Sergio (2001). *Deployable Structures*. Sous la dir. de S. PELLEGRINO. Vienna : Springer Vienna.
- PEREZ, Edouard (2011). *Ariane 5 User's Manual*. Rapp. tech. 5r1. Ariane Space Service & Solutions.
- PHILLIPS, Jack (2007). *Freedom in machinery*. Cambridge : Cambridge University Press, p. 448.
- PILTAN, Farzin, M MIRZAIIE et F SHAHRIYARI (2012). « Design Baseline Computed Torque Controller ». *International Journal of Engineering* 6.3, p. 129–141.
- POSAMENTIER, Alfred S (2011). *The glorious golden ratio*. English PP - Amherst, N.Y. Sous la dir. d'Ingmar. LEHMANN. Prometheus Books YR - 2012 UL - <https://www.library.yorku.ca/find/Record/2871368> OP - 363 CN - QA466, p. 363.
- PRUSSING, J E et B A CONWAY (1993). *Orbital Mechanics*. Oxford University Press.

- QUADRELLI, Marco B. et John WEST (2009). « Sensitivity studies of the deployment of a square inflatable solar sail with vanes ». *Acta Astronautica* 65.7-8, p. 1007–1027.
- RAMOHALLI, Kumar (1992). « Economical in situ processing for orbital debris removal ». *Acta Astronautica* 26.1, p. 55–60.
- REYHANOGLU, M et N McCLAMROCH (1991). « Reorientation of space multibody systems maintaining zero angular momentum ». *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. T. 1. Portland, p. 1330.
- REYHANOGLU, Mahmut et N Harris McCLAMROCH (1992). « Planar reorientation maneuvers of space multibody systems using internal controls ». *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 15.6, p. 1475–1480.
- REYNOLDS, Whitney D, Sungeun K JEON, Jeremy A BANIK et Thomas W MURPHEY (2013). « Advanced Folding Approaches for Deployable Spacecraft Payloads ». *ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE*. Portland, p. 1–10.
- RÖSCHEL, O (2000). « Möbius Mechanisms ». *Advances in Robot Kinematics*. Sous la dir. de J LENARČIČ et M M STANIŠIĆ. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 375–382.
- RYAN, S. et E. L. CHRISTIANSEN (2011). « A ballistic limit analysis programme for shielding against micrometeoroids and orbital debris ». *Acta Astronautica* 69.5-6, p. 245–257.
- RYAN, S., T. HEDMAN et E. L. CHRISTIANSEN (2010). « Honeycomb vs. foam : Evaluating potential upgrades to ISS module shielding ». *Acta Astronautica* 67.7-8, p. 818–825.
- SADRAEY, Mohammad (2009). « Drag Force and Drag Coefficient ». *Aircraft Performance Analysis*. VDM Verlag Dr. Müller, p. 1–16.
- SCHONBERG, William P. (2010). « Protecting Earth-orbiting spacecraft against micro-meteoroid/orbital debris impact damage using composite structural systems and materials : An overview ». *Advances in Space Research* 45.6, p. 709–720.
- SHARF, Inna, M S PERSSON, David ST-ONGE et Nicolas REEVES (2011). « Development of Aerobots for Satellite Emulation, Architecture and Art. » *Proceedings of the 13th International Symposium on Experimental Robotics*. Heidelberg, p. 167–181.
- SHAYLER, David J. et David M. HARLAND (2016). *The Hubble space Telescope*. Sous la dir. de David M. HARLAND. Springer, p. 438.
- SHEN, Jinglai (2002). « Nonlinear Control of Multibody Systems With Symmetries Via Shape Change ». Thèse de doct. University of Michigan, p. 176.
- SHEWCHUCK, Jonathan Richard (2002). « Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. » *Computational Geometry* 22, p. 21–74.
- SHIBLI, Murad (2011). « Unified Modeling Approach of Kinematics, Dynamics and Control of a Free-Flying Space Robot Interacting with a Target Satellite ». *Intelligent Control and Automation* 02.01, p. 8–23.

- SHIGEMATSU, Hiroki, Naoko KISHIMOTO et Katsuyoshi TSUJITA (2014). « Development of a Gravity Compensation System for Prototype Tests of Deployable Space Structures by using Multi Mobile Robots ». *65th International Astronautical congress*. Toronto.
- SHIROMA, N., H. ARAI et K. TANIE (2002). « Nonholonomic Motion Planning for Coupled Planar Rigid Bodies with Passive Revolute Joints ». *The International Journal of Robotics Research* 21.5-6, p. 563–574.
- SILANI, Enrico et Marco LOVERA (2005). « Magnetic spacecraft attitude control : A survey and some new results ». *Control Engineering Practice* 13.3, p. 357–371.
- SNELSON, Kenneth D. (1965). « Continuous tension, discontinuous compression structures », US3169611.
- SPACE.COM (2013). *Will China Launch an Anti-Satellite Test Soon ?*
- SPILLANTINI, P., M. CASOLINO, M. DURANTE, R. MUELLER-MELLIN, G. REITZ, L. ROSSI, V. SHURSHAKOV et M. SORBI (2007). « Shielding from cosmic radiation for interplanetary missions : Active and passive methods ». *Radiation Measurements* 42.1, p. 14–23.
- SREENATH, N. (1992). « Nonlinear control of planar multibody systems in shape space ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 5.4, p. 343–363.
- ST-ONGE, David et Clément GOSSELIN (2016a). « Synthesis and Design of a One Degree-of-Freedom Planar Deployable Mechanism With a Large Expansion Ratio ». *Journal of Mechanisms and Robotics* 8.2, p. 021025.
- ST-ONGE, David et Clément M GOSSELIN (2014). « Deployable Mechanisms for Small to Medium-Sized Space Debris Removal ». *64th International Astronautical Congress*. Toronto, p. 1–10.
- ST-ONGE, David et C.M. GOSSELIN (2016b). « Dynamic modelling of a four-bar free floating mechanism with passive joints and flywheel actuators ». *International Symposium on multibody system dynamics*. Montreal, p. 1–10.
- STRAUBEL, Marco et Michael SINAPIUS (2013). « Adaptive, tolerant and efficient composite structures ». Sous la dir. de Martin WIEDEMANN et Michael SINAPIUS. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. Chap. Boom Conce, p. 237–250.
- T. NOCK, Kerry, Angus D. MCRONALD et Kim MAYNARD AARON (2004). *Balloon device for lowering space object orbits*.
- TABARROK, B et K BEHDINAN (2000). « Dynamics of spacecraft antenna during deployment ». *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures : Theory and Applications*, p. 415–424.
- TACHI, Tomohiro (2010). « Geometric Considerations for the Design of Rigid Origami Structures ». *International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2010*. Shanghai, p. 1–12.
- TAO, D C (1964). *Applied Linkage Synthesis*. MA : Addison-Wesley.
- TAYLOR, Robert, Ian GRAVSETH, Dana TURSE, Philip KELLER, Mike HULSE et Doug RICHARDSON (2013). « Method for removing orbital objects from orbit using a capture net for momentum transfer », US 2013/0075534 A1.

- VERHEYEN, H F (1989). « The complete set of Jitterbug transformers and the analysis of their motion ». *Computers and Mathematics with Applications* 17.1-3, p. 203–250.
- VOTEL, Ronny et Doug SINCLAIR (2012). « Comparison of Control Moment Gyros and Reaction Wheels for Small Earth-Orbiting Satellites ». *26th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*, p. 1–7.
- WANG, B et Y LI (2005). « AP & ATP Grids - Bridging the Tensegrity to cable-strut ». *Space Structures* 5.
- WANG, Dong Xia, Ying Hong JIA, Lei JIN, Hai Chao GUI et Shi Jie XU (2012). « Controllability of an underactuated spacecraft with one thruster under disturbance ». *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao* 28.3, p. 838–847.
- WEI, G et J DAI (2014). « Reconfigurable and Deployable Platonic Mechanisms with a Variable Revolute Joint ». *Advances in Robot Kinematics*. Springer, p. 485–495.
- WEI, X Z, Y A YAO, Y B TIAN et R FANG (2006). « A new method of creating expandable structure for spatial objects ». *Proceedings Of the Institution Of Mechanical Engineers Part C-Journal Of Mechanical Engineering Science* 220.12, p. 1813–1818.
- WILLIAMSEN, J. E., W. P. SCHONBERG, H. EVANS et S. EVANS (2008). « A comparison of NASA, DoD, and hydrocode ballistic limit predictions for spherical and non-spherical shapes versus dual- and single-wall targets, and their effects on orbital debris penetration risk ». *International Journal of Impact Engineering* 35.12, p. 1870–1877.
- WOHLHART, Karl (1995). « New overconstrained Spheroidal Linkages ». *Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, p. 149–153.
- (2001). « Regular polyhedral linkages ». *2nd Workshop on Computational Kinematics, Sophia Antipolis, France, September*, p. 4–6.
- (2003). « Irregular Polyhedral Linkages ». *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*. Tianjin.
- (2008). « Double-Ring Polyhedral Linkages ». January, p. 9–11.
- YE, Dong, Zhaowei SUN et Shunan WU (2012). « Hybrid thrusters and reaction wheels strategy for large angle rapid reorientation with high precision ». *Acta Astronautica* 77, p. 149–155.
- ZARCHAN, P. et H. MUSOFF (2005). *Fundamentals of Kalman filtering : a practical approach*. T. 190.
- ZHAI, Guang et Jing Rui ZHANG (2012). « Space tether net system for debris capture and removal ». *4th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*. T. 1. Nanchang, p. 257–261.
- ZHANG, Ketao et Jian S. DAI (2013). « Realtime Rigid Folding Algorithm for Quadrilateral-Based 1-DOF Tessellations ». *37th Mechanisms and Robotics International Conference, IDETC-CIE ASME*, p. 1–11.
- ZHAO, Jing Shan, Fulei CHU et Zhi Jing FENG (2009). « The mechanism theory and application of deployable structures based on SLE ». *Mechanism and Machine Theory* 44.2, p. 324–335.

ZIMMERMANN, K (2013). « Vibration-Driven Mobile Robots Based on Single Actuated Tensegrity Structures ». *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Karlsruhe, p. 5455–5460.