

MARC ARSENAULT

DÉVELOPPEMENT ET ANALYSE DE MÉCANISMES DE TENSÉGRITÉ

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en génie mécanique
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Docteur (Ph.D.)

Faculté des sciences et de génie
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2006

©Marc Arsenault, 2006

Résumé

Un système de tenségrité correspond à un assemblage de composants qui sont chargés de manière axiale. Ce faisant, des câbles ou des ressorts peuvent être utilisés pour les composants en tension ce qui réduit la masse et l'inertie du système. Par conséquent, des mécanismes de tenségrité sont introduits dans cette thèse comme des alternatives aux mécanismes plus conventionnels pour certains types d'application.

Les objectifs principaux de la thèse sont le développement et l'analyse de nouveaux mécanismes. La nécessité pour les mécanismes de tenségrité de toujours se retrouver dans des configurations où leurs câbles et leurs ressorts sont soumis à des forces de tension complique passablement leur développement. Par conséquent, une approche novatrice fondée sur l'utilisation de ressorts est proposée pour surmonter cette difficulté. Pour faciliter l'utilisation de cette approche, des règles qui s'appliquent à la quantité de ressorts utilisée dans une architecture sont présentées. À partir de ces règles et en s'inspirant de systèmes de tenségrité existants, deux mécanismes plans, trois mécanismes spatiaux et deux mécanismes modulaires sont développés.

Chaque mécanisme est modélisé dans le but d'analyser sa cinématique, sa statique et sa dynamique. Étant donné la présence de degrés de liberté non contraints dans les architectures des mécanismes, les relations entre leurs variables d'entrée et de sortie dépendent des chargements externes, gravitationnels et inertiels qui leur sont appliqués. En supposant un régime quasi-statique, de telles relations peuvent être calculées avec une approche numérique. Toutefois, pour le cas spécifique où les mécanismes ne sont pas soumis à des chargements, des solutions analytiques sont trouvées. Ces solutions sont ensuite exploitées dans le calcul des frontières des espaces atteignables des mécanismes.

Les degrés de liberté non contraints des mécanismes de tenségrité leur permettent de se déformer sous l'application de chargements externes. Une attention particulière est alors portée au calcul de la raideur des mécanismes ainsi que des limites des chargements pouvant être résistés sans perte de stabilité ou de tension dans les câbles. Des observations sont également faites concernant l'amortissement des vibrations des mécanismes dans les directions des degrés de liberté non contraints.

Abstract

A tensegrity system corresponds to an assembly of components that are subjected only to axial loads. As a consequence, cables or springs can be used for the tensile components thus considerably reducing the mass and inertia of the system. With the goal of benefiting from these interesting properties, this thesis introduces tensegrity mechanisms as alternatives to more conventional type mechanisms for certain types of applications.

The main objectives of the thesis are the development and analysis of novel mechanisms. The need for tensegrity mechanisms to remain in configurations where their cables and springs are subjected to tensile loads complicates their development significantly. Consequently, a new approach based on the use of springs is proposed to overcome this difficulty. In order to facilitate the use of this approach, certain rules pertaining to the quantity of springs used in a given architecture are formulated. Based on these rules, two planar mechanisms, three spatial mechanisms and two modular mechanisms are developed using existing tensegrity systems.

Each new mechanism is modeled with the goal of analyzing its kinematics, statics and dynamics. Due to the presence of unconstrained degrees of freedom in the mechanisms' architectures, relations between their input and output variables are influenced by any external, gravitational or inertial loads that might be acting. By assuming a quasi-static regime, such relations can be computed using a numerical approach. However, for the specific case where the mechanisms are not subjected to any loads, analytical solutions are found. These solutions are then exploited in order to compute the boundaries to the mechanisms' workspaces.

The mechanisms' unconstrained degrees of freedom allow them to deform under the application of external loads. Special attention is thus given to the stiffness of the mechanisms as well as the limits of the external loads that they may resist without losing their stability or the tension in their cables. Observations are also made regarding the damping of the mechanisms' vibrations along the unconstrained degrees of freedom.

Avant-propos

Je suis très reconnaissant envers le professeur Clément Gosselin pour ses conseils et sa disponibilité tout au long de mes études de doctorat. Je le remercie également de m'avoir confié la tâche d'étudier les mécanismes de tensegrité. L'habileté du professeur Gosselin à guider les étudiants dans leurs projets de recherche tout en encourageant leur indépendance est digne de reconnaissance. Sa connaissance exceptionnelle de la mécanique ainsi que sa réserve infinie d'idées novatrices ne cessent d'impressionner tous ceux qui ont la chance de le connaître.

Je serai toujours redevable au professeur Roger Boudreau pour avoir été celui qui m'a premièrement convaincu de poursuivre des études supérieures. Son dévouement au succès académique de ses étudiants ainsi qu'à leur succès professionnel en font un directeur de recherche exemplaire.

Je remercie sincèrement les professeurs Marc J. Richard, Juan A. Carretero et Luc Baron pour avoir accepté de faire partie de mon comité de thèse. Leurs commentaires enrichissants provenant de différents points de vue ont contribué à la qualité de cette thèse.

Je souhaite dire un merci spécial aux membres du laboratoire de robotique de l'Université Laval qui ont rendu mon séjour ici très agréable. L'esprit de coopération et d'amitié qui existe au sein du laboratoire en font un environnement de recherche optimal.

Finalement, je souhaite remercier mes parents et mon épouse pour leur support et leur encouragement tout au long de mes études graduées.

À mon épouse

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Avant-propos	iv
Table des matières	vi
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xii
Liste des symboles	xvi
1 Introduction	1
1.1 Problématique	1
1.2 Terminologie	3
1.3 Objectifs et contributions	4
1.4 Sommaire des résultats	6
2 Systèmes de tenségrité : une introduction	8
2.1 Historique	8
2.2 Définition	9
2.3 Avantages des systèmes de tenségrité	16
2.4 État des connaissances	18
2.4.1 Développement de systèmes de tenségrité	18
2.4.2 Recherche des configurations de tenségrité	20
2.4.3 Stabilité des configurations de tenségrité	27
2.4.4 Systèmes de tenségrité soumis à des chargements externes	30
2.4.5 Modélisation et simulation dynamique	32
2.4.6 Structures adaptatives et mécanismes de tenségrité	34
3 Développement de mécanismes de tenségrité	35
3.1 Approche générale	35

3.2	Actionnement	37
3.3	Ressorts	38
3.3.1	Limite minimale	39
3.3.2	Limite maximale	40
3.3.2.1	Cas où $n > \mathcal{D}_G$	42
3.3.3	Systèmes de tenségrité avec $n_R > n_{R_{\max}}$	48
3.4	Résumé	56
4	Développement et analyse de mécanismes de tenségrité plans	58
4.1	Mécanisme de tenségrité plan à un degré de liberté	58
4.1.1	Description du mécanisme	58
4.1.2	Analyse cinématique et statique	60
4.1.2.1	Problème statique direct	60
4.1.2.2	Problème statique inverse	61
4.1.2.3	Configurations singulières	62
4.1.2.4	Espace atteignable	63
4.1.2.5	Forces internes	63
4.1.3	Application de chargements externes	63
4.1.3.1	Problème statique direct avec chargements externes	63
4.1.3.2	Problème statique inverse avec chargements externes	67
4.1.3.3	Espace des chargements externes admissibles	67
4.1.3.4	Analyse de la raideur	70
4.1.4	Analyse dynamique	72
4.1.4.1	Modélisation	72
4.1.4.2	Simulation	73
4.2	Mécanisme de tenségrité plan à deux degrés de liberté	74
4.2.1	Description du mécanisme	74
4.2.2	Analyse cinématique et statique	77
4.2.2.1	Problème statique direct	77
4.2.2.2	Problème statique inverse	78
4.2.2.3	Configurations singulières	79
4.2.2.4	Espace atteignable articulaire	82
4.2.2.5	Espace atteignable cartésien	83
4.2.2.6	Modes de fonctionnement	85
4.2.2.7	Stabilité	88
4.2.2.8	Forces internes	89
4.2.3	Application de chargements externes	90
4.2.3.1	Problème statique direct avec chargements externes	91
4.2.3.2	Problème statique inverse avec chargements externes	92
4.2.3.3	Espace des chargements externes admissibles	92
4.2.3.4	Analyse de la raideur	94

4.2.4	Analyse dynamique	95
4.2.4.1	Modélisation	96
4.2.4.2	Simulation	97
4.3	Résumé	98
5	Développement et analyse de mécanismes de tenségrité spatiaux	100
5.1	Mécanisme de tenségrité spatial à trois degrés de liberté avec actionnement des extrémités inférieures de ses barres	101
5.1.1	Description du mécanisme	101
5.1.2	Analyse cinématique et statique	103
5.1.2.1	Problème statique direct	103
5.1.2.2	Problème statique inverse	105
5.1.2.3	Configurations singulières	105
5.1.2.4	Espace atteignable articulaire	109
5.1.2.5	Espace atteignable cartésien	110
5.1.2.6	Stabilité	110
5.1.2.7	Forces internes	112
5.1.3	Application de chargements externes	113
5.1.3.1	Problème statique direct avec chargements externes	113
5.1.3.2	Problème statique inverse avec chargements externes	114
5.1.3.3	Espace des chargements externes admissibles	115
5.1.3.4	Analyse de la raideur	115
5.1.4	Analyse dynamique	118
5.1.4.1	Modélisation	118
5.1.4.2	Simulation	119
5.2	Mécanismes de tenségrité spatiaux à trois degrés de liberté avec actionnement des longueurs des barres	120
5.2.1	Description des mécanismes	122
5.2.1.1	Mécanisme de tenségrité 3-PUPS	122
5.2.1.2	Mécanisme de tenségrité 3-PURS	125
5.2.2	Analyse cinématique et statique	129
5.2.2.1	Problème statique direct	129
5.2.2.2	Problème statique inverse	132
5.2.2.3	Configurations singulières	132
5.2.2.4	Espace atteignable articulaire	135
5.2.2.5	Espace atteignable cartésien	137
5.2.2.6	Stabilité	137
5.2.2.7	Forces internes	142
5.2.3	Application de chargements externes	143
5.2.3.1	Problème statique direct avec chargements externes	143
5.2.3.2	Problème statique inverse avec chargements externes	144

5.2.3.3	Espace des chargements externes admissibles	145
5.2.3.4	Analyse de la raideur	146
5.2.4	Analyse dynamique	151
5.2.4.1	Modélisation	151
5.2.4.2	Simulation de systèmes contraints	154
5.2.4.3	Résultats de simulation	156
5.3	Résumé	159
6	Développement et analyse de mécanismes de tenségrité modulaires	161
6.1	Mécanisme de tenségrité modulaire plan à deux degrés de liberté	161
6.1.1	Description du mécanisme	161
6.1.2	Analyse cinématique et statique	164
6.1.2.1	Problème statique direct	165
6.1.2.2	Problème statique inverse	168
6.1.2.3	Configurations singulières	169
6.1.2.4	Espace atteignable articulaire	172
6.1.2.5	Espace atteignable cartésien	172
6.1.2.6	Stabilité	175
6.1.2.7	Forces internes	177
6.1.3	Application de chargements externes	178
6.1.3.1	Problème statique direct avec chargements externes	178
6.1.3.2	Problème statique inverse avec chargements externes	179
6.1.3.3	Analyse de la raideur	179
6.1.4	Analyse dynamique	181
6.1.4.1	Modélisation	181
6.1.4.2	Simulation	182
6.1.5	Prototype	183
6.2	Mécanisme de tenségrité modulaire spatial à trois degrés de liberté	185
6.2.1	Description du mécanisme	185
6.2.2	Analyse cinématique et statique	190
6.2.2.1	Problème statique direct	191
6.2.2.2	Problème statique inverse	198
6.2.2.3	Espace atteignable articulaire	205
6.2.2.4	Espace atteignable cartésien	208
6.2.2.5	Forces internes	210
6.2.3	Application de chargements externes	212
6.2.3.1	Problème statique direct avec chargements externes	212
6.2.3.2	Problème statique inverse avec chargements externes	214
6.2.3.3	Analyse de la raideur	215
6.2.4	Analyse dynamique	218
6.2.4.1	Modélisation	218

6.2.4.2	Simulation	220
6.3	Résumé	221
7	Conclusion	224
7.1	Contributions principales	225
7.2	Travaux futurs et directions potentielles de recherche	229
7.3	Applications potentielles	231
	Bibliographie	233
A	Méthode d'élimination de Dixon	242
B	Éléments des matrices D_i	245

Liste des tableaux

3.1	Limites minimale et maximale sur les quantités de ressorts utilisés dans les systèmes de tensegrité.	57
5.1	Paramètres pour la i^{e} patte du mécanisme.	129

Liste des figures

1.1	Types de mécanismes conventionnels.	1
2.1	Needle Tower II.	10
2.2	Architecture de tensegrité simple.	12
2.3	Exemples d'architectures de tensegrités.	15
2.4	Systèmes de tensegrité antiprismatiques.	19
2.5	Système de tensegrité antiprismatique triangulaire.	21
3.1	Exemple d'un mécanisme simple.	36
3.2	Agencements possibles des actionneurs pour un mécanisme symétrique fondé sur le système de tensegrité en forme de X.	38
3.3	Exemple d'un système nécessitant une permutation de la matrice hessienne.	46
3.4	Système de tensegrité en forme de X avec ressorts.	49
3.5	Système de tensegrité antiprismatique triangulaire avec ressorts.	52
4.1	Mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté.	59
4.2	Mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté soumis à un charge- ment externe.	64
4.3	Configurations associées aux points critiques de μ	66
4.4	Courbes de μ et de f_e en fonction de y	67
4.5	Identification des catastrophes.	69
4.6	Raideur du mécanisme en fonction de ρ	71
4.7	Coordonnée y de l'effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée.	75
4.8	Mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.	76
4.9	Espaces atteignables du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.	83
4.10	Espaces atteignables articulaire et cartésien du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.	86
4.11	Correspondance des régions associées aux modes de fonctionnement dans les espaces atteignables articulaire et cartésien.	87
4.12	Quantités de modes de fonctionnement dans les différentes régions de l'espace atteignable cartésien.	88

4.13	Distribution des couples externes minimaux et maximaux dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.	94
4.14	Distribution de la raideur K_θ dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.	95
4.15	Résultat de la simulation dynamique du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.	98
4.16	Trajectoires du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté pendant la simulation dynamique.	99
5.1	Système de tensegrité antiprismatique triangulaire renforcé.	100
5.2	Mécanisme de tensegrité spatial à trois degrés de liberté avec actionnement des positions des extrémités inférieures de ses barres.	101
5.3	Espace atteignable articulaire du mécanisme.	109
5.4	Espace atteignable cartésien du mécanisme.	110
5.5	Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme.	117
5.6	Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée.	121
5.7	Mécanisme de tensegrité 3-PUPS.	122
5.8	Vue détaillée de l'actionneur prismatique du mécanisme de tensegrité 3-PUPS.	124
5.9	Graphe de mobilité du mécanisme de tensegrité 3-PUPS.	125
5.10	Mécanisme de tensegrité 3-PURS.	126
5.11	Définition des repères attachés à la i^e patte du mécanisme.	128
5.12	Espace atteignable articulaire théorique du mécanisme 3-PUPS.	136
5.13	Tranches de l'espace atteignable cartésien du mécanisme 3-PUPS pour différentes valeurs de z	138
5.14	Schéma du mécanisme 3-PURS à l'intérieur de son espace atteignable cartésien.	138
5.15	Projection de l'espace atteignable articulaire du mécanisme 3-PURS dans le plan $\rho_1 - \rho_2$ et courbe associée à l'équation $G_4 = 0$	141
5.16	Ensemble des forces \mathbf{f}_V admissibles pour le mécanisme 3-PUPS.	147
5.17	Ensemble des forces \mathbf{f}_V admissibles pour le mécanisme 3-PURS.	147
5.18	Distribution de la raideur du mécanisme 3-PUPS au nœud C_1	148
5.19	Distribution de la raideur du mécanisme 3-PURS au nœud C_1	149
5.20	Distribution et directions principales de la raideur au nœud C_1 pour le mécanisme 3-PURS.	150
5.21	Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme 3-PUPS en fonction du temps pour la trajectoire simulée.	158
5.22	Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme 3-PURS en fonction du temps pour la trajectoire simulée.	158

6.1	Mécanisme de tenségrité modulaire plan à deux degrés de liberté.	162
6.2	Graphe de mobilité du mécanisme pour N modules.	164
6.3	Mécanisme de tenségrité modulaire plan à deux degrés de liberté avec $N = 1$	165
6.4	Diagramme de fermeture vectorielle illustrant la relation entre \mathbf{p}_N et α pour le mécanisme modulaire plan.	169
6.5	Configuration singulière <i>iv</i> du mécanisme ($N = 4$).	172
6.6	Espace atteignable articulaire du mécanisme de tenségrité modulaire plan à deux degrés de liberté.	173
6.7	Espace atteignable cartésien du mécanisme de tenségrité modulaire plan à deux degrés de liberté.	174
6.8	Comportement du mécanisme lorsqu'il s'approche de la configuration singulière <i>iii</i> sans toutefois l'atteindre.	174
6.9	Représentation graphique de la courbe $G_1 = 0$ ainsi que de l'espace atteignable articulaire du mécanisme ($N = 1$).	176
6.10	Distribution de la raideur d'un mécanisme avec $N = 2$	180
6.11	Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée.	183
6.12	Prototype du mécanisme de tenségrité modulaire plan à deux degrés de liberté.	184
6.13	Simulation de ressorts à longueurs libres nulles.	184
6.14	Module du mécanisme de tenségrité modulaire spatial à trois degrés de liberté.	186
6.15	Mécanisme de tenségrité modulaire spatial à trois degrés de liberté.	187
6.16	Graphe de mobilité du mécanisme.	189
6.17	Mécanisme avec $N = 1$	191
6.18	Construction d'un module spatial à partir de modules plans.	193
6.19	Exemple de l'intersection des cylindres elliptiques.	194
6.20	Démonstration de l'existence d'une seule solution pour laquelle $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$ et $\xi_3 > 0$	194
6.21	Illustration des angles d'inclinaison et de torsion.	199
6.22	Plan de symétrie du module spatial.	201
6.23	Diagramme de fermeture vectorielle illustrant la relation entre \mathbf{p}_N et α pour le mécanisme modulaire spatial.	202
6.24	Espace atteignable articulaire du mécanisme modulaire spatial.	208
6.25	Espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial pour $N = 1$	210
6.26	Espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial pour $N = 2$	211
6.27	Espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial pour $N = 3$	211
6.28	Architecture de l'effecteur du mécanisme.	214

6.29	Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 2$ et $z = 1$	216
6.30	Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 2$ et $z = 2$	216
6.31	Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 3$ et $z = 1$	216
6.32	Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 3$ et $z = 3$	217
6.33	Mouvement général d'une barre.	219
6.34	Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée	221
7.1	Stratégies disponibles pour le développement de mécanismes de tensegrité.	230

Liste des symboles

$\mathbf{1}_d$	Matrice identité de dimension $d \times d$.
$\alpha, \beta, \gamma, \theta$	Angles divers.
$\vartheta, \iota, \nu, \varpi$	
Γ	Matrice des dérivées partielles des contraintes par rapport au vecteur de coordonnées \mathbf{u} .
Γ_q	Matrice des dérivées partielles des contraintes par rapport aux coordonnées généralisées.
Γ_ψ	Matrice des dérivées partielles des contraintes par rapport aux positions des actionneurs.
ε	Quantité de barres dans un système de tensegrité antiprismatique.
ζ	Indicateur de signe (c.-à-d. $\zeta = \pm 1$).
η, μ	Fonctions diverses.
κ, σ	Distances diverses.
Λ	Matrice effectuant la transformation de l'espace des actionneurs à l'espace des coordonnées de \mathbf{u} .
λ	Vecteur de multiplicateurs de Lagrange.
λ_0	Vecteur de multiplicateurs de Lagrange associé à une configuration de référence.
λ^*	Vecteur de multiplicateurs de Lagrange associé à un point critique.
λ	Multiplicateur de Lagrange.
ν	Vecteur de valeurs propres.
ξ_i	Position d'une liaison prismatique passive.
π_i	Indice de permutation.
ρ	Position d'un actionneur prismatique.
ϱ	Densité de force associé à un composant.
ς	Ratio des raideurs des ressorts du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté.
τ	Vecteur des forces ou des couples dans les actionneurs d'un mécanisme de tensegrité.
τ_i	Couple dans un actionneur rotoïde.
τ_φ	Couple externe appliqué à l'une des faces d'un système de tensegrité antiprismatique triangulaire.

τ_e	Couple externe.
Υ	Matrices associées à un problème de valeurs et de vecteurs propres.
ϕ	Vecteur de contraintes géométriques.
ϕ	Contrainte géométrique.
φ	Angle de rotation entre les faces opposées d'un système de tenségrité antiprismatique.
Ψ	Matrice de projection des équations de mouvement.
ψ	Vecteur des positions des actionneurs d'un mécanisme de tenségrité.
Ω	Matrice découplée des densités de force.
$\tilde{\Omega}$	Matrice découplée et augmentée des densités de force.
ω	Vecteur de vitesse angulaire d'un corps.
\mathbf{A}	Matrice d'équilibre.
A_{ij}	Élément de la matrice \mathbf{A} .
A, B, C, D	Noeuds d'un système de tenségrité.
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$	Vecteurs positions des noeuds A, B, C et D .
a_x, a_y, a_z	Coordonnées cartésiennes du noeud A , etc.
\mathbf{B}	Matrice qui projette dans le noyau de Γ_q .
C_A	Nombre d'agencements possibles des actionneurs dans un mécanisme de tenségrité.
\mathbf{C}_s	Matrice d'incidence.
$\tilde{\mathbf{C}}_s$	Matrice d'incidence augmentée.
$C_{s_{ij}}$	Élément de la matrice d'incidence.
c_d	Coefficient d'amortissement.
\mathcal{D}	Degrés de liberté contraints.
\mathcal{D}_G	Degrés de liberté globaux.
\mathcal{D}_i	Degrés de liberté de la liaison i .
\mathcal{D}_{NC}	Degrés de liberté non contraints.
\mathcal{D}_S	Degrés de liberté superflus.
\mathbf{D}	Matrice de Dixon.
d_C	Dimension de l'espace considéré.
d_F	Degré de liberté de l'espace considéré.
E	Énergie d'un système de tenségrité.
$\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{J}$	Matrices jacobiennes d'un mécanisme de tenségrité.
E_i, F_i, G_i, H_i	Coefficients ou expressions divers.
\mathbf{e}	Vecteur unitaire.
\mathbf{f}	Vecteur des forces externes appliquées aux noeuds.
\mathbf{f}_c	Vecteur des forces internes associées aux contraintes géométriques.
\mathbf{f}_d	Vecteur de forces dissipatives.
\mathbf{f}_i	Force externe appliquée à un noeud.
\mathbf{f}_q	Vecteur des forces généralisées.

f_ρ, f_b, f_c	Forces internes dans un actionneur, une barre et un câble, respectivement.
$\hat{\mathbf{G}}$	Matrice des raideurs axiales modifiées.
$\mathbf{g}(\mathbf{u})$	Vecteur de forces généralisées associées à l'énergie potentielle et aux forces externes.
g	Accélération gravitationnelle.
g_i	Raideur axiale.
\hat{g}_i	Raideur axiale modifiée.
\mathbf{H}	Matrice hessienne d'un système de tenségrité.
\mathbf{H}_{π_i}	Matrice hessienne permutée.
\mathbf{H}_i	Mineur principal croissant de \mathbf{H} .
\mathbf{I}	Matrice d'inertie associée à un corps.
I_s	Moment d'inertie d'un corps autour d'un axe spécifique.
i, j, k, I, J	Indices.
\mathbf{J}	Matrice jacobienne.
\mathbf{K}	Matrice de raideur.
K	Raideur d'un composant.
K_x, K_y, K_z, K_θ	Raideurs d'un mécanisme dans les directions des axes X, Y et Z et de l'angle θ .
L, L_p, L_s	Longueurs de composants non déformables dans des mécanismes de tenségrité.
\mathbf{l}	Vecteur des longueurs des composants.
l	Longueur d'un composant.
l_0	Longueur libre d'un composant.
\mathbf{M}	Matrice d'inertie généralisée.
m	Masse d'un composant.
m_I	Nombre de mécanismes infinitésimaux.
N	Nombre de modules dans un mécanisme.
N_s	Nombre de côtés dans un polygone.
n	Nombre de coordonnées généralisées.
n_ϕ	Nombre de contraintes.
n_A	Nombre de composants actionnés.
n_B	Nombre de corps.
n_C	Nombre de composants en compression.
n_E	Nombre de composants.
n_J	Nombre de liaisons.
n_N	Nombre de noeuds.
n_R	Nombre de ressorts.
$n_{R_{\min}}, n_{R_{\max}}$	Limites minimum et maximum du nombre de ressorts dans un système de tenségrité.

n_T	Nombre de composants en tension.
n_u	Dimension du vecteur \mathbf{u} .
O	Noeud associé à l'origine d'un repère.
\mathbf{o}	Vecteur reliant les origines de deux repères.
\mathbf{P}	Matrice de permutation.
$\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{U}$	Symboles associés aux liaisons prismatiques, rotoïdes, sphériques et de cardan, respectivement.
\mathbf{p}	Vecteur position de l'effecteur d'un mécanisme de tenségrité.
\mathbf{p}_{CG}	Vecteur position du centre de masse d'un composant.
\mathbf{Q}	Matrice de rotation.
\mathbf{q}	Vecteur de coordonnées généralisées.
\mathbf{q}_0	Vecteur de coordonnées généralisées associé à une configuration de référence.
\mathbf{q}^*	Vecteur de coordonnées généralisées associé à un point critique.
\mathbf{q}_{π_i}	Vecteur de coordonnées généralisées permuté.
q	Coordonnée généralisée.
\mathbf{R}	Transformation linéaire.
\mathbf{r}	Translation.
$r_{\mathbf{A}}$	Rang de \mathbf{A} .
$r_{\mathbf{H}_C}$	Rang de \mathbf{H}_C .
\mathbf{S}	Matrice des densités de force.
s	Nombre d'états de précontrainte.
T	Énergie cinétique d'un système.
T_a	Transformation affine.
\mathbf{t}	Vecteur des forces axiales dans les composants.
t_i	Force axiale dans un composant.
t	Temps.
$\mathbf{U}_{\Gamma}, \mathbf{\Xi}_{\Gamma}, \mathbf{V}_{\Gamma}$	Matrices associées à la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{\Gamma}_q$.
U	Énergie potentielle d'un système.
\mathbf{u}	Vecteurs de coordonnées qui combine les coordonnées généralisées avec les positions des actionneurs.
\mathbf{u}_c	Portion du vecteur \mathbf{u} qui est compatible avec les contraintes.
\mathbf{u}_v	Portion du vecteur \mathbf{u} qui n'est pas compatible avec les contraintes.
$\mathbf{v}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u})$	Vecteur d'effets non linéaires et de forces dissipatives.
W	Travail effectué dans un système.
\mathbf{w}_i	Vecteur propre.
\mathbf{w}'_i	Portion d'un vecteur propre.
X, Y, Z	Axes de repères cartésiens fixes.
X', Y', Z'	Axes de repères cartésiens mobiles.

\mathbf{x}	Vecteur contenant les positions de tous les noeuds d'un système de tensegrité.
\mathbf{x}_i	Vecteur position d'un noeud d'un système de tensegrité.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur d'un mécanisme de tensegrité.

Pour leur part, les mécanismes parallèles sont formés par des chaînes cinématiques fermées ce qui permet habituellement de fixer leurs actionneurs à la base. Il en résulte une performance dynamique améliorée ainsi qu'une augmentation significative du rapport de la charge utile sur la masse propre de ces mécanismes par rapport à leurs homologues sériels. Les mécanismes parallèles ont toutefois des espaces atteignables relativement petits et, de surcroît, leur analyse est plus complexe [2].

Dans un mécanisme entraîné par câbles, un effecteur mobile est relié à une base fixe par un ensemble de câbles. En modifiant les longueurs de ces câbles avec des treuils actionnés par des moteurs, la pose (position et orientation) du corps peut être contrôlée. Étant donné la faible masse des câbles, les propriétés dynamiques de ces mécanismes sont très intéressantes. De plus, puisque de grandes longueurs de câble peuvent être enroulées sur des treuils, les mécanismes entraînés par câbles peuvent théoriquement opérer dans de très grands espaces. Toutefois, l'utilisation de câbles présente également certaines difficultés puisqu'ils doivent toujours être soumis à des forces de tension. En fait, pour modifier la pose d'un effecteur avec n degrés de liberté, l'utilisation de $n + 1$ câbles est généralement nécessaire [3] ce qui complique la commande de ces mécanismes. De plus, pour résister à un chargement externe général appliqué sur l'effecteur sans pouvoir pousser sur ce dernier, les points d'attache des câbles à la base du mécanisme doivent habituellement englober l'effecteur ce qui peut être encombrant pour certains types d'applications.

Il peut être constaté que les catégories de mécanismes décrites ci-haut ont toutes des forces et des faiblesses. Il devient donc intéressant d'envisager le développement de mécanismes pouvant englober certaines de ces forces tout en n'étant pas assujettis à toutes les faiblesses correspondantes. En ce sens, les mécanismes fondés sur les principes de tenségrité peuvent être perçus comme une solution alternative pour certains types d'applications. Dans des systèmes de tenségrité, qui seront décrits en détail dans le prochain chapitre, chaque composant est toujours soumis à un seul type de force axiale (tension ou compression). Il est alors possible d'utiliser des câbles ou des ressorts pour les composants en tension. Les mécanismes de tenségrité profitent de cette utilisation de câbles et de ressorts pour diminuer leur inertie et pour accroître la taille de leur espace atteignable. De plus, lorsque des ressorts y sont intégrés, ces mécanismes ne nécessitent pas une redondance d'actionnement comme c'est le cas pour les mécanismes entraînés par câbles. De manière similaire aux mécanismes parallèles, les actionneurs des mécanismes de tenségrité peuvent également dans bien des cas être fixés à la base pour améliorer leurs propriétés dynamiques. Ces mécanismes ne sont toutefois pas sans leurs propres faiblesses. En conséquence, les mécanismes de tenségrité doivent bien être perçus comme des alternatives aux mécanismes plus conventionnels dans certaines situations et non pas comme des solutions de rechange.

Comme il sera démontré dans les prochains chapitres, l'analyse des mécanismes de tenségrité est relativement complexe. De plus, la littérature disponible sur ce type de mécanisme est limitée. Il existe alors un potentiel important pour des recherches portant sur le développement et l'analyse de mécanismes de tenségrité ainsi que sur les méthodes utilisées à ces fins.

1.2 Terminologie

Le mot *tenségrité* est une traduction directe du mot anglais *tensegrity* qui a été obtenu en combinant les mots *tension* et *integrity* [4]. Ce mot a été créé par Fuller [5] pour représenter des systèmes dans lesquels un certain nombre de principes sont respectés. Ces principes seront dorénavant nommés *principes de tenségrité* et seront définis à la section 2.2. Dans cette thèse, l'expression *système de tenségrité* fera référence à tout système qui fonctionne selon les principes de tenségrité peu importe son utilité. De même, *structure de tenségrité* sera utilisé pour désigner toute charpente construite de manière à demeurer statique dans une configuration choisie tout en respectant les principes de tenségrité. Pour sa part, la locution *mécanisme de tenségrité* représentera désormais une machine dont la configuration peut être contrôlée à l'aide d'actionneurs et qui ne viole pas les principes de tenségrité. Cette définition sera également élargie pour inclure certains mécanismes qui ne respectent pas complètement les principes de tenségrité mais qui se comportent comme des mécanismes de tenségrité. Finalement, l'expression *architecture de tenségrité* sera utilisée pour représenter tout assemblage de composants en tension et en compression qui, lorsque positionnés dans des configurations qui respectent certains critères (ci-après nommées *configurations de tenségrité*), forment un système de tenségrité.

En général, tout système de tenségrité consiste en un assemblage de composants en compression (barres) et de composants en tension (câbles et ressorts). Dans cet ouvrage, les barres et les câbles seront toujours considérés comme étant parfaitement rigides (c.-à-d. ayant des raideurs infinies). Au contraire, les ressorts auront des raideurs finies et seront alors considérés comme étant déformables sous l'action de chargements externes. Ces hypothèses sont justifiables dans le contexte considéré puisque les raideurs des ressorts seront toujours considérablement inférieures à celles des barres et des câbles.

Pour décrire un mécanisme, il est commun de faire référence à ses *degrés de liberté*. Pour un mécanisme de type conventionnel, les degrés de liberté correspondent aux paramètres indépendants devant être fixés (habituellement par des actionneurs) pour complètement définir sa configuration. Dans le contexte des mécanismes de tenségrité,

il sera nécessaire de distinguer parmi différents types de degrés de liberté. Ainsi, la définition commune donnée ci-haut sera associée à l'appellation *degrés de liberté globaux* (\mathcal{D}_G). Dans un mécanisme de tenségrité, le nombre d'actionneurs sera toujours inférieur au nombre de degrés de liberté globaux tel que seulement un sous-ensemble des paramètres indépendants devant être fixés pour définir la configuration du mécanisme seront contraints. Les paramètres indépendants qui ne seront pas contraints par des actionneurs seront nommés simplement *degrés de liberté non contraints* (\mathcal{D}_{NC}). Finalement, les paramètres dont les valeurs sont fixées par des actionneurs seront connus comme les *degrés de liberté* (\mathcal{D}) du mécanisme. La relation suivante sera alors toujours satisfaite :

$$\mathcal{D}_G = \mathcal{D} + \mathcal{D}_{NC} \quad (1.1)$$

Les significations de tous ces types de degrés de liberté seront clarifiées dans les chapitres subséquents.

Pendant l'analyse cinématique de mécanismes de types conventionnels, il est habituellement souhaité de calculer des solutions aux *problèmes géométriques direct et inverse*. Le problème géométrique direct consiste à calculer la pose de l'effecteur du mécanisme pour des positions données de ses actionneurs tandis que le problème géométrique inverse, comme son nom l'indique, correspond au calcul inverse. Pour des mécanismes conventionnels, ces calculs reposent entièrement sur leur géométrie et architecture. Cependant, pour un mécanisme de tenségrité, il sera démontré que la pose de l'effecteur dépend à la fois de la géométrie, de l'architecture et des forces présentes dans le mécanisme. Pour cette raison, les problèmes géométriques direct et inverse seront remplacés par les *problèmes statiques direct et inverse*.

1.3 Objectifs et contributions

Comme il a déjà été mentionné, il existe peu de recherches portant sur le développement et l'analyse de mécanismes de tenségrité. De plus, la plupart des chercheurs qui se sont penchés sur le sujet se spécialisent dans le domaine des structures reconfigurables. Le but principal de cette thèse est donc de contribuer à l'introduction des bienfaits des mécanismes de tenségrité à la communauté de chercheurs dans le domaine des mécanismes et de la robotique. Il est alors souhaité de susciter l'intérêt des chercheurs dans ces domaines pour qu'ils puissent ainsi participer à l'avancement des connaissances reliées à ce nouveau type de mécanisme.

Comme premier objectif, cet ouvrage vise le développement de nouveaux mécanismes de tenségrité. Plus spécifiquement, il est souhaité de modifier des systèmes de

tenségrité existants tout en y intégrant des actionneurs pour les transformer en mécanismes. Les travaux précédents qui portent sur le développement de mécanismes de tenségrité utilisent tous sensiblement la même approche. En ce sens, cette thèse se distingue par son approche novatrice fondée sur l'utilisation de ressorts. Un ensemble de règles à respecter pendant l'intégration d'actionneurs et de ressorts aux systèmes de tenségrité est présenté. Ces règles sont ensuite mises en pratique pour développer sept nouveaux mécanismes.

Une fois le développement des nouveaux mécanismes terminé, il est souhaité d'en faire l'analyse pour évaluer leurs performances. L'analyse présentée dans cette thèse est de nature théorique et porte sur plusieurs aspects reliés à la cinématique, la statique et la dynamique. Dans la première étape de l'analyse, des solutions aux problèmes statiques direct et inverse de chaque mécanisme sont trouvées. Les solutions de ces problèmes sont fondées sur une méthode énergétique qui permet d'accentuer les comportements physiques des mécanismes. Pour des conditions générales dans lesquelles les mécanismes sont soumis à des chargements externes, les problèmes statiques direct et inverse nécessitent l'utilisation de méthodes numériques.

En raison de la présence de ressorts dans leurs architectures, les mécanismes de tenségrité ne sont pas rigides. Ils conservent donc une certaine souplesse leur permettant de se déformer sous l'action de chargements externes. Il devient alors important d'évaluer les comportements des mécanismes de tenségrité en présence de chargements externes. Cela est effectué à partir d'une analyse de la raideur. De plus, une attention particulière est portée à la perte de stabilité des mécanismes dans certaines situations.

Dans la plupart des ouvrages traitant de mécanismes de tenségrité, les solutions aux problèmes statiques direct et inverse sont obtenues de manière numérique. Toutefois, pour acquérir une connaissance plus approfondie de ces mécanismes, des solutions analytiques sont fortement préférées. Dans la littérature, les seuls résultats analytiques disponibles sont associés à des mécanismes plans simples [6] ou à des mécanismes avec des configurations assujetties à des contraintes strictes de symétrie [7]. Dans cette thèse, des résultats analytiques sont obtenus pour les problèmes statiques direct et inverse lorsque les mécanismes de tenségrité ne sont pas soumis à des chargements externes.

L'espace atteignable d'un mécanisme est défini comme la région dans laquelle son effecteur peut se déplacer. Pour tous les types de mécanismes, la taille et la forme de l'espace atteignable se retrouvent parmi les critères de performance les plus utilisés. Toutefois, à la connaissance de l'auteur, il n'existe aucun résultat dans la littérature qui porte sur l'espace atteignable de mécanismes de tenségrité. Dans cet ouvrage, les solutions analytiques aux problèmes statiques direct et inverse sont exploitées pour

calculer les frontières de ces espaces dans les domaines articulaire et Cartésien.

Lorsqu'un mécanisme de tenségrité contenant des ressorts se déplace, les effets inertiels de ses composants exercent une influence sur sa configuration en raison des degrés de liberté non contraints. Il est donc très important d'analyser la dynamique de ces mécanismes. Pour chacun des nouveaux mécanismes, un modèle dynamique est alors développé à partir de la formulation lagrangienne. Par la suite, les modèles sont utilisés pour simuler la dynamique des mécanismes en mouvement. Dans tous les cas, les résultats des simulations sont validés en utilisant un logiciel de simulation dynamique commercial. Quoique les résultats de simulation présentés dans la thèse peuvent être obtenus plus facilement en utilisant un logiciel commercial, le développement de modèles dynamiques se justifie puisque de tels modèles permettent de faire l'analyse des différentes quantités qui influencent les comportements des mécanismes en mouvement. De plus, dans un contexte pratique, les modèles dynamiques des mécanismes pourraient être utilisés pour résoudre le problème dynamique inverse à l'intérieur d'un algorithme de commande.

À la section 1.1, les mécanismes de tenségrité ont été introduits comme des alternatives aux mécanismes de types conventionnels. Il ne sera toutefois pas question dans cette thèse de comparer directement les différentes catégories de mécanismes. D'ailleurs, il doit être reconnu que, comme c'est le cas pour les autres types de mécanismes, certains comportements des mécanismes de tenségrité ne sont pas nécessairement souhaitables. Ces mécanismes ne doivent donc pas être perçus comme étant supérieurs aux autres types de mécanismes mais plutôt comme étant leurs égaux (selon, bien-sûr, l'application visée).

1.4 Sommaire des résultats

La présente thèse est structurée en cinq parties principales. Au chapitre 2, une introduction complète aux systèmes de tenségrité est fournie. Ces systèmes sont alors définis de manière formelle et leur historique est présenté. Les aspects qui caractérisent ces systèmes sont ensuite discutés et une revue littéraire des ouvrages les plus pertinents est présentée. Le chapitre 3, pour sa part, présente les règles qui doivent être suivies pendant le développement de nouveaux mécanismes selon l'approche utilisée dans la thèse. Une discussion sur la stabilité des configurations d'équilibre de ces mécanismes sera alors abordée.

Les chapitres suivants présentent en détail le développement et l'analyse de nou-

veaux mécanismes. Pour chaque mécanisme, le cas où aucun chargement externe n'est appliqué est considéré en premier. Dans un tel cas, il est généralement possible de trouver des solutions analytiques aux problèmes statiques direct et inverse des mécanismes. Ces solutions peuvent ensuite être exploitées pour calculer les frontières des espaces atteignables des mécanismes. Les chargements externes sont ensuite considérés et leur effet sur les configurations d'équilibre des mécanismes est évalué. Finalement, des modèles dynamiques des mécanismes sont développés et sont utilisés pour simuler leur mouvement.

Le chapitre 4 porte sur les mécanismes plans. Les deux mécanismes qui y sont présentés ont servi à l'éclosion de techniques pouvant ensuite être utilisées pour l'analyse de mécanismes plus complexes. Les architectures de ces mécanismes sont relativement simples. Toutefois, comme il pourra en être témoin, leurs analyses présentent tout de même certains éléments relativement complexes.

Le chapitre 5 se concentre, pour sa part, sur le développement de mécanismes spatiaux. Les trois mécanismes qui sont introduits dans ce chapitre sont tous développés à partir du même système de tensegrité. De plus, ils ont tous comme tâche le positionnement de leur effecteur dans un espace cartésien tridimensionnel.

Finalement, le chapitre 6 traite du développement de mécanismes de tensegrité modulaires. Il s'agit alors de créer des mécanismes en procédant à l'assemblage en série de modules qui eux-mêmes correspondent à des mécanismes de tensegrité. Les deux mécanismes qui sont obtenus possèdent des comportements très intéressants. De plus, à la section 6.1.5, il sera question d'un prototype qui a été construit dans le cadre de la thèse pour démontrer le fonctionnement de l'un des mécanismes modulaires.

Chapitre 2

Systemes de tensegrité : une introduction

Le concept de tensegrité est encore peu connu dans le domaine des mécanismes et de la robotique. Pour cette raison, le présent chapitre a comme objectif de définir ces systèmes de manière formelle, de donner un bref aperçu de leurs origines et de faire un survol de la littérature existante à ce sujet.

2.1 Historique

L'origine des systèmes de tensegrité est un sujet quelque peu controversé. Selon Motro [8], qui fait référence à une publication d'Emmerich [9], le premier exemple de système de tensegrité aurait apparu à Moscou en 1921 sous la forme d'une sculpture du nom de *Gleichgewichtskonstruktion*¹ créée par le constructiviste Karl Ioganson. Cependant, cette sculpture ne possède pas la capacité d'être autocontrainte qui est inhérente aux systèmes de tensegrité (voir section 2.2) et alors sa considération à titre du premier système de tensegrité n'est pas acceptée de manière unanime. Ce n'est qu'en 1962 que le mot *tensegrity* fut introduit par Buckminster Fuller dans le cadre du premier brevet portant sur ce type de système [11]. Pour cette raison, Fuller est généralement reconnu comme étant l'inventeur des systèmes de tensegrité. Cette reconnaissance n'est toutefois pas entièrement justifiée. En fait, l'intérêt de Fuller pour les systèmes de ce genre est apparu suite à sa découverte d'une sculpture faite par l'artiste Kenneth Snelson en 1948 [12]. À cette époque, Snelson était un étudiant de Fuller au Black Mountain

¹Terme allemand qui se traduit par *construction d'équilibre* [10].

College en Caroline du Nord (É.-U.). La sculpture en question, qui est considérée ici comme le premier système de tensegrité, avait intrigué Fuller grâce à son apparence transparente et ses composants « flottants ». Ce sont d'ailleurs ces caractéristiques qui ont mené à la popularité de ces systèmes auprès d'architectes et d'ingénieurs civils. Snelson a éventuellement obtenu lui aussi un brevet pour son invention en 1965 [13]. Il est intéressant de noter que malgré les trois années qui séparent l'obtention des brevets de Fuller et de Snelson, ce dernier n'a déposé sa demande de brevet que six mois après la demande de Fuller. À cette même époque et de manière complètement indépendante, l'architecte français David Georges Emmerich a également développé le concept de tensegrité sous le nom de *réseaux autotendants*, obtenant éventuellement deux brevets à ce sujet [14, 15].

À partir du moment où les systèmes de tensegrité ont été découverts, Fuller et Emmerich (ainsi que de nombreux autres chercheurs) se sont penchés sur les aspects scientifiques de ces systèmes. Pour sa part, Snelson a créé de nombreuses sculptures fondées sur les principes de tensegrité. Un exemple d'une de ces sculptures est montré à la Figure 2.1. Plus de détails sur l'historique des systèmes de tensegrité sont donnés par Motro [8, 16].

2.2 Définition

Un système de tensegrité correspond de manière très générale à un assemblage de composants en compression et de composants en tension où la nature de la force dans chaque composant est constante pour toutes configurations. Pour bien distinguer les systèmes de tensegrité des autres types de systèmes, une définition plus élaborée doit toutefois être fournie. De telles définitions existent dans la littérature mais elles diffèrent un peu selon les points de vue de leurs auteurs. La définition donnée par Fuller dans son brevet est la suivante :

The essence of my invention consists in the discovery of how to progressively reduce the aspect of compression in a structure so that, to a greater extent than has been found possible before, the structure will have the aspect of continuous tension throughout and the compression will be subjugated so that the compression elements become small islands in a sea of tension.
(Fuller [11], p.1)

tandis que celle donnée par Snelson prend la forme suivante :

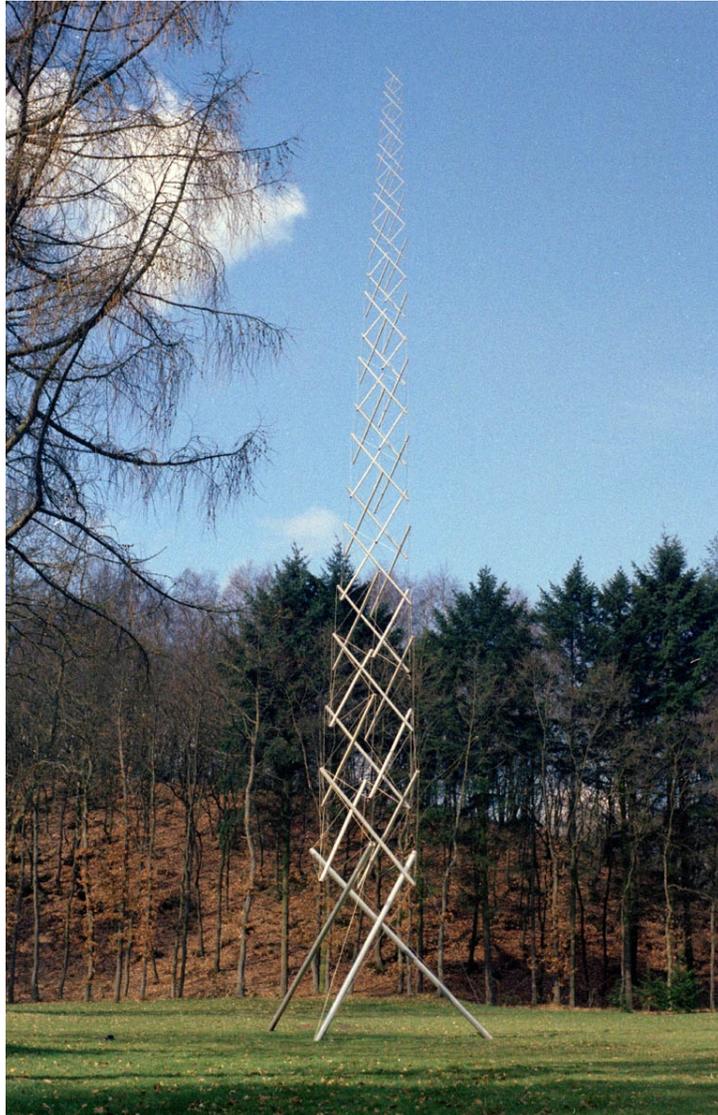


FIG. 2.1 – Needle Tower II, Kenneth Snelson, 1969. Aluminium et acier inoxydable, $30 \times 6 \times 6$ m. Kröller Müller Musuem, Otterlo, Hollande (photo courtoisie de Kenneth Snelson).

The present invention relates to structural framework and more particularly, to a novel and improved structure of elongate members which are separately placed either in tension or in compression to form a lattice, the compression members being separated from each other and the tension members being interconnected to form a continuous tension network. (Snelson [13], p.1)

Dans chacune de ces définitions, il est question de systèmes où les composants sont chargés soit en tension ou en compression. De plus, il est spécifié dans les deux cas que les composants en compression forment un réseau discontinu, n'étant pas attachés les uns aux autres. Ces deux aspects apparaissent encore dans la définition suivante qui est très citée dans la littérature :

A tensegrity system is established when a set of discontinuous compressive components interacts with a set of continuous tensile components to define a stable volume in space. (Pugh [17], p.3)

Pour mieux illustrer sa définition des systèmes de tenségrité, Pugh [17] fait une analogie avec un ballon. L'air dans le ballon (composants en compression) exerce une force dirigée vers l'extérieur tandis que sa membrane (composants en tension) exerce une force de rappel pour maintenir l'équilibre du système.

Un aspect qui n'a pas encore été mentionné mais qui est implicite aux définitions données ci-haut est la capacité des systèmes de tenségrité d'être autocontraints (c.-à-d. la capacité de ces systèmes d'être prétendus sans nécessiter de forces de réaction sur l'environnement). En effet, un système de tenségrité n'exerce pas d'efforts de réaction sur son environnement et ce en dépit des forces de tension et de compression qui sont introduites dans ses composants. Pour un système de tenségrité donné, un tel comportement n'est toutefois possible que s'il se retrouve dans des configurations de tenségrité. À la Figure 2.2, une barre en compression est utilisée pour lier les nœuds A et C tandis que des câbles en tension lient les paires de nœuds AB et BC . Le système ne peut pas être en équilibre dans la configuration de la Figure 2.2(a) lorsque des forces sont introduites dans ses composants (force de compression dans la barre et forces de tension dans les câbles) à moins d'exercer des forces de réaction sur son environnement. Par contre, cela est possible pour la configuration de la Figure 2.2(b) qui correspond alors à une configuration de tenségrité. La motivation principale du développement de systèmes de tenségrité est leur utilisation importante de composants en tension. Il est bien connu que le flambage doit être considéré pendant la conception d'un composant soumis à une force de compression. Il en résulte une pièce relativement massive. Au contraire, un composant qui n'est soumis qu'à des forces de tension peut être conçu

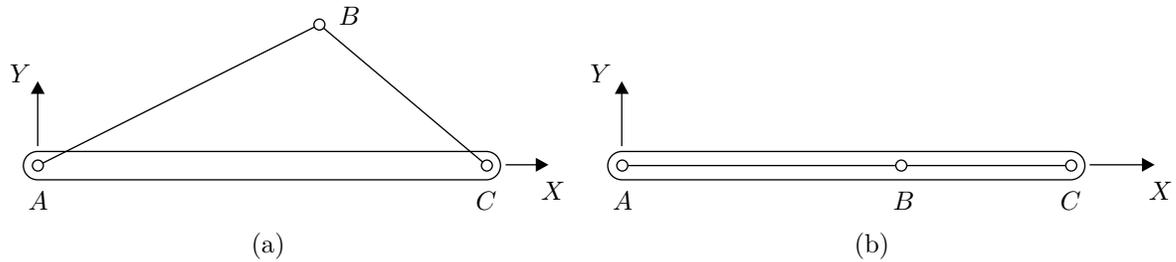


FIG. 2.2 – Architecture de tensegrité simple : (a) configuration générale (b) configuration de tensegrité.

de manière très efficace pour en réduire la masse. En conséquence du nombre élevé de composants en tension dans les systèmes de tensegrité, ceux-ci sont donc en général plus légers.

Certains chercheurs questionnent la condition stipulant que les composants en compression doivent former un réseau discontinu. En ce sens, Motro observe :

[...] the discontinuity of the compression elements [...] has been described to date as one of the characteristics of tensegrity systems. Should therefore constructions in which compressed elements connect be excluded [...]? The reply varies according to the author and it would be pointless to rule that one of them is right. (Motro [16], pp. 76–77)

D'ailleurs, Snelson fait déjà allusion dans son brevet à la possibilité de joindre les composants en compression dans certains cas :

[...] the arrangement may be such [...] as to bring the ends of the compression members in both planes into engagement [...]. This described engagement possesses considerable rigidity since the compression members form a continuous network rather than being entirely separated from one another. However, the use of a supporting, interconnecting tension network is retained with its commensurate advantages [...]. (Snelson [13], pp. 6–7)

Les situations où des composants en compression sont attachés les uns aux autres de manière à ne pas permettre la transmission de couples seront donc permises dans la définition des systèmes de tensegrité qui est adoptée dans cette thèse. L'ensemble des principes de tensegrité se résume alors comme suit :

- Tous les composants sont chargés de manière axiale.

- Chaque composant est soumis soit à une force de tension ou une force de compression dans toutes les configurations mais pas les deux.
- Le système a une capacité d'être autocontraint.
- Les composants en tension forment un réseau continu.
- Les composants en compression forment généralement un réseau discontinu. Si ce n'est pas le cas, les liaisons qui attachent les composants en compression les uns aux autres ne doivent pas transmettre de couples.

Comme il a été illustré à la Figure 2.2, un système de tenségrité doit être disposé dans une configuration de tenségrité pour avoir la capacité d'être autocontraint. Cette condition sera maintenant définie avec plus de détail. Dans le domaine de l'ingénierie structurale, la règle de Maxwell [18] est souvent utilisée pour déterminer si un assemblage de composants chargés de manière axiale est parfaitement rigide (selon Maxwell, un assemblage est rigide s'il ne peut pas se déformer sans changements dans les longueurs de ses composants). Cette règle stipule qu'un assemblage de n_E composants de longueurs fixes avec n_N nœuds qui est soumis à n_ϕ contraintes sera rigide si :

$$n_E - d_C n_N + n_\phi = 0 \quad (2.1)$$

où d_C est la dimension de l'espace dans lequel se retrouve l'assemblage (c.-à-d. $d_C = 2$ dans le plan et $d_C = 3$ dans l'espace). Pour le cas de la Figure 2.2(a), s'il est supposé que le nœud A coïncide avec l'origine du repère XY et que le nœud B est contraint de se déplacer le long de l'axe X , alors $d_C = 2$, $n_E = n_N = n_\phi = 3$ et la règle de Maxwell est satisfaite. Toutefois, il peut être constaté que dans la configuration illustrée à la Figure 2.2(b) cet assemblage n'est pas parfaitement rigide puisqu'une force appliquée sur le nœud B dans la direction de l'axe Y va engendrer un déplacement infinitésimal de ce nœud sans nécessiter de changements dans les longueurs des composants. Sans en faire un traitement rigoureux, Maxwell a noté l'existence de telles exceptions à sa règle. Au-delà d'un siècle plus tard, Calladine [19] a généralisé la règle de Maxwell pour permettre de traiter tous les cas possibles. Pour ce faire, il écrit les équations de statique d'un assemblage sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{f} \quad (2.2)$$

où \mathbf{A} est la matrice d'équilibre de dimension $(d_C n_N - n_\phi) \times n_E$, \mathbf{t} est un vecteur de forces axiales dans les composants et \mathbf{f} est un vecteur de forces appliquées aux nœuds de l'assemblage. De plus, les équations de cinématique de l'assemblage (en supposant de petites déformations) peuvent s'écrire comme suit :

$$\mathbf{A}^T \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{l} \quad (2.3)$$

où $\delta\mathbf{x}$ est un vecteur de déplacements des nœuds et $\delta\mathbf{l}$ est un vecteur de déformations des composants. La méthode de Calladine nécessite le calcul du rang de \mathbf{A} ($r_{\mathbf{A}} = \text{rang}(\mathbf{A})$). Les quantités $s = n_E - r_{\mathbf{A}}$ et $m_I = d_C n_N - n_\phi - r_{\mathbf{A}}$ sont ensuite définies comme les dimensions des noyaux des matrices \mathbf{A} et \mathbf{A}^T , respectivement. Si $s > 0$ le noyau de \mathbf{A} n'est pas vide et il existe alors une infinité d'ordre s (∞^s) d'ensembles de forces internes \mathbf{t} qui ne nécessitent pas de réactions aux nœuds de l'assemblage (c.-à-d. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$). L'assemblage a donc la capacité d'être autocontraint et il est considéré avoir s états de précontrainte. De manière analogue, si $m_I > 0$ le noyau de \mathbf{A}^T n'est pas vide et il existe ∞^{m_I} ensembles de déplacements infinitésimaux des nœuds de l'assemblage qui ne nécessitent pas de changements dans les longueurs des composants (c.-à-d. $\delta\mathbf{l} = \mathbf{0}$). De tels déplacements seront dorénavant nommés *mécanismes infinitésimaux*. Pour tenir compte des états de précontrainte et des mécanismes infinitésimaux, la règle de Maxwell est réécrite sous la forme suivante :

$$n_E - d_C n_N + n_\phi = s - m_I \quad (2.4)$$

Pour l'exemple de la Figure 2.2, la matrice \mathbf{A} est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & (b_x - c_x)/l_{BC} & 0 \\ 0 & -(b_x - c_x)/l_{BC} & -b_x/l_{AC} \\ 0 & -b_y/l_{BC} & -b_y/l_{AC} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où b_x et b_y représentent les coordonnées en X et Y du nœud B , respectivement, et l_{BC} représente la longueur du composant qui relie les nœuds B et C , etc. Pour une configuration générale de l'assemblage (par exemple (p. ex.) Figure 2.2(a)), $r_{\mathbf{A}} = 3$ et $s = m_I = 0$ ce qui indique que l'assemblage est rigide. La condition pour que $r_{\mathbf{A}} < 3$ est :

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{b_y c_x}{l_{BC} l_{AC}} = 0 \quad (2.6)$$

S'il est supposé que $c_x \neq 0$ (c.-à-d. le composant qui rejoint les nœuds A et C a une longueur non nulle puisque le nœud C est contraint à l'axe X) alors cette expression est nulle seulement si $b_y = 0$. Dans ce cas, on se retrouve avec la configuration illustrée à la Figure 2.2(b) pour laquelle $r_{\mathbf{A}} = 2$ ce qui mène à $s = m_I = 1$. Il est donc possible d'introduire une précontrainte dans les composants de l'assemblage (c.-à-d. force de compression dans la barre et forces de tension dans les câbles) sans générer des forces de réaction sur l'environnement. De plus, la quantité de précontrainte peut être fixée de manière arbitraire selon un paramètre unique dorénavant nommé le *niveau de précontrainte* (il y a ∞^s niveaux possibles de précontrainte dans un système). Il existe également une déformation infinitésimale de l'assemblage (déplacement du nœud B dans la direction de l'axe Y) qui ne nécessite pas de changement dans les longueurs des composants. Il peut toutefois être constaté à partir de la Figure 2.2(b) qu'il est possible, en augmentant le niveau de précontrainte, d'augmenter la raideur de l'assemblage dans la direction de cette déformation.

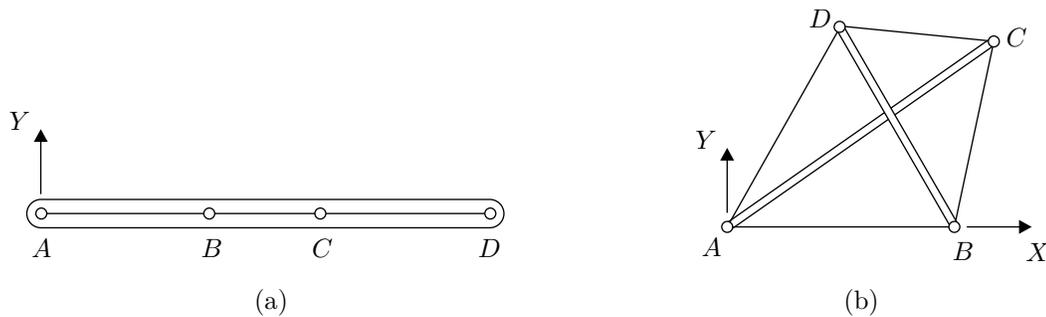


FIG. 2.3 – Exemples d’architectures de tensegrités : (a) mécanisme à quatre barres (b) système de tensegrité en forme de X de Snelson.

Selon les principes de tensegrité énumérés précédemment, il doit toujours exister au moins un niveau de précontrainte dans l’assemblage (c.-à-d. $s > 0$) pour lui permettre d’être autocontraint. Quoiqu’il n’y a pas de condition imposée à la valeur de m_I , il est important que dans les situations où $m_I > 0$ les déformations correspondantes soient stabilisées par la précontrainte. Il est intéressant de noter qu’il existe des assemblages avec $m_I > s$ pour lesquels ces conditions sont satisfaites. Un exemple d’un tel assemblage est illustré à la Figure 2.3(a). Dans ce cas l’assemblage correspond à un mécanisme à quatre barres conventionnel avec $d_C = 2$, $n_E = n_N = 4$ et $n_\phi = 3$ où les composants rejoignant les paires de nœuds AB , BC et CD sont des câbles en tension tandis que le composant qui rejoint la paire de nœuds AD est une barre en compression. Dans la configuration montrée (où les nœuds se situent tous sur une droite), il peut être démontré que $s = 1$ et $m_I = 2$. Dans ce cas, les déformations infinitésimales correspondent aux déplacements des nœuds B et C dans la direction de l’axe Y et leurs raideurs sont augmentées par l’état de précontrainte.

Contrairement aux exemples discutés jusqu’ici, il n’est pas toujours nécessaire pour une architecture de tensegrité de se retrouver dans une configuration particulière pour correspondre à un système de tensegrité. La première architecture de tensegrité créée par Snelson [13] peut agir à titre d’exemple. Cette architecture, qui est illustrée à la Figure 2.3(b), consiste en quatre câbles qui relient les paires de nœuds AB , BC , CD et AD ainsi qu’en deux barres qui relient les paires de nœuds AC et BD (il est supposé que les deux barres se croisent sans se toucher). Dans ce cas, $d_C = 2$, $n_E = 6$, $n_N = 4$ et $n_\phi = 3$. En autant que les quatre câbles forment un quadrilatère convexe avec les nœuds dans l’ordre illustré et qu’aucun trio de nœuds n’est colinéaire alors $s = 1$ et $m_I = 0$ et un système de tensegrité est obtenu.

En plus d'avoir noté l'existence de cas spéciaux pour lesquels sa règle ne pouvait pas s'appliquer directement, Maxwell [18] a également observé que dans de tels cas le système en question se retrouve toujours à sa frontière d'assemblage (c.-à-d. la limite de la région dans laquelle son assemblage est possible). L'exemple de la Figure 2.2 peut être utilisé pour comprendre ce concept. Étant donné les longueurs des deux câbles et de la barre dans la Figure 2.2(a), il est clair que l'assemblage du système est possible (c.-à-d. les connexions entre les composants aux nœuds A , B et C peuvent être effectuées). Si la barre AC est allongée progressivement une fois l'assemblage complété, une configuration similaire à celle qui est illustrée à la Figure 2.2(b) sera éventuellement atteinte. Si la longueur de la barre est encore augmentée, il ne sera plus possible d'assembler les composants puisque la barre sera plus longue que la somme des longueurs des câbles. Évidemment, une situation analogue se produit si la longueur d'un des deux câbles est réduite. Le système tel qu'il est illustré à la Figure 2.2(b) se retrouve alors à sa frontière d'assemblage. Pour une architecture de tenségrité donnée, il peut être vérifié que les configurations de tenségrité se retrouvent toujours sur la frontière d'assemblage. Pour un système de tenségrité, cela correspond à une situation où la longueur d'au moins une barre est maximale ou la longueur d'au moins un câble est minimale pour des longueurs fixes des autres composants.

2.3 Avantages des systèmes de tenségrité

Ce qui distingue un mécanisme de tenségrité des autres types de mécanismes plus conventionnels est l'agencement spécial de ses composants qui permet à chacun d'entre eux d'être soumis soit à une force de tension ou de compression pour toutes configurations. Il s'agit là d'un atout important menant à une utilisation plus efficace des matériaux. En effet, la présence de composants en tension rend possible l'utilisation de câbles ou de ressorts ce qui mène à des réductions importantes dans la masse et l'inertie des parties mobiles du mécanisme. Cela constitue la motivation principale derrière le développement de mécanismes de tenségrité. De plus, puisque les composants d'un mécanisme de tenségrité sont habituellement chargés de manière axiale, ils peuvent être modélisés avec une plus grande précision.

Comme il a été expliqué à la section 2.2, chaque mécanisme de tenségrité a la capacité d'être autocontraint. Il est donc possible d'introduire une précontrainte dans les composants de ces mécanismes sans nécessiter d'efforts de réaction sur l'environnement. Cela s'avère utile puisque le niveau de précontrainte peut être ajusté en fonction du comportement souhaité du mécanisme. Par exemple, lorsqu'un mécanisme doit supporter des chargements externes importants, son niveau de précontrainte peut être augmenté

pour lui donner une plus grande raideur et ainsi résister aux déformations. Au contraire, si le mécanisme doit entrer en contact avec son environnement, il peut être souhaité de réduire son niveau de précontrainte pour augmenter sa compliance. Évidemment, de tels ajustements auront des conséquences directes sur le comportement dynamique du mécanisme ainsi que sur la taille de ses actionneurs. De plus, selon l'architecture du mécanisme en question, il peut ne pas être évident d'ajuster le niveau de précontrainte sans remplacer certains de ses composants.

Contrairement aux mécanismes parallèles, l'espace atteignable d'un mécanisme de tenségrité est souvent relativement grand par rapport à sa taille physique. Cela peut être expliqué en partie par l'utilisation importante de câbles et de ressorts. En fait, l'actionnement par câbles mène généralement à de plus grands espaces atteignables puisque de grandes longueurs de câble peuvent être enroulées autour de treuils. Certains mécanismes de tenségrité ont également une capacité de déploiement [20, 21, 22, 23]. Lorsqu'un tel mécanisme n'est pas utilisé (p. ex. pendant son transport) il est possible de le replier dans un très petit volume. Par la suite, le mécanisme peut être déployé à sa taille d'opération. Cette capacité de déploiement couplée avec la masse réduite des mécanismes de tenségrité en font des candidats potentiels pour des applications spatiales.

Comme c'est le cas pour les mécanismes parallèles, il est souvent possible de placer les actionneurs d'un mécanisme de tenségrité près de sa base ce qui réduit l'inertie de ses parties mobiles. Pour plusieurs architectures de mécanismes de tenségrité, une redondance d'actionnement est nécessaire ce qui peut entraîner des difficultés au niveau de la commande. Par contre, comme il sera expliqué à la section 3.1, l'utilisation de ressorts dans les mécanismes de tenségrité permet d'éviter cette complication.

Les mécanismes de tenségrité présentent également quelques inconvénients. D'une part, l'analyse (cinématique, statique et dynamique) de ces mécanismes est généralement plus complexe que pour des mécanismes plus conventionnels. Cela peut être attribué principalement à la nécessité des mécanismes de tenségrité de se retrouver dans des configurations de tenségrité. D'autre part, lorsque des ressorts sont utilisés dans un mécanisme de tenségrité, ce dernier peut subir des déformations d'ordre non négligeable lorsque soumis à des chargements externes. De plus, dans de tels cas, des amortisseurs doivent être intégrés aux mécanismes pour dissiper l'énergie des ressorts pendant le mouvement. Finalement, malgré le fait que les composants des mécanismes de tenségrité sont fondamentalement simples, la construction de ces mécanismes peut ne pas toujours être évidente.

2.4 État des connaissances

La recherche sur les systèmes de tensegrité a pris son envol au milieu du 20^e siècle avec les ouvrages de Snelson, Fuller et Emmerich. Dans cette section, un aperçu de la littérature portant sur ces systèmes est fourni. Quoique la plupart des chercheurs qui ont étudié ces systèmes se sont surtout intéressés à leur utilisation comme structure, beaucoup de leurs résultats sont pertinents pour le développement et à l'analyse de mécanismes de tensegrité.

2.4.1 Développement de systèmes de tensegrité

Tout système de tensegrité consiste en un ensemble de barres chargées en compression et de câbles chargés en tension qui sont assemblés et positionnés de manière à obtenir un équilibre. Un tel équilibre ne peut être obtenu que pour certaines topologies nommées architectures de tensegrité. La recherche de ces architectures a fait l'objet de plusieurs travaux. Dans son brevet [13], Snelson décrit en premier lieu un système de tensegrité plan construit avec deux barres en compression qui se croisent en forme de X sans se toucher et qui sont reliées entre elles par quatre câbles (voir Figure 2.3(b)). Snelson y décrit également le système de tensegrité antiprismatique triangulaire, illustré à la Figure 2.4(a), qui est sans aucun doute le système de tensegrité le plus étudié dans la littérature. Ce système, également mentionné dans les brevets de Fuller [11] et d'Emmerich [14, 15], contient $\varepsilon = 3$ barres qui sont maintenues en équilibre par un réseau de neuf câbles. Les extrémités inférieures et supérieures des barres forment deux faces parallèles triangulaires, soit des polygones de ε côtés. En se référant à la section 2.2, il peut être démontré que $s = m_I = 1$ pour ce système où le mécanisme infinitésimal correspond à un mouvement de vissage entre les deux faces triangulaires le long d'un axe qui leur est perpendiculaire. Dans leurs brevets, Snelson et Fuller ont également proposé des systèmes plus complexes formés par l'assemblage de plusieurs systèmes simples. Emmerich, pour sa part, a généralisé le système de tensegrité antiprismatique triangulaire en lui ajoutant des barres (c.-à-d. $\varepsilon > 3$, voir Figure 2.4(b), (c) et (d)).

Dans un ouvrage de nature mathématique, Connelly et Back [24] développent un inventaire de systèmes de tensegrité en utilisant la théorie des groupes et des représentations. Ils discutent également des conditions à satisfaire pour la stabilité de ces systèmes. Quoique leur travail résulte en une liste impressionnante de nouveaux systèmes de tensegrité, plusieurs de ceux-ci n'ont aucun intérêt pratique puisque leurs architectures nécessitent l'intersection d'un nombre élevé de barres. En s'inspirant des

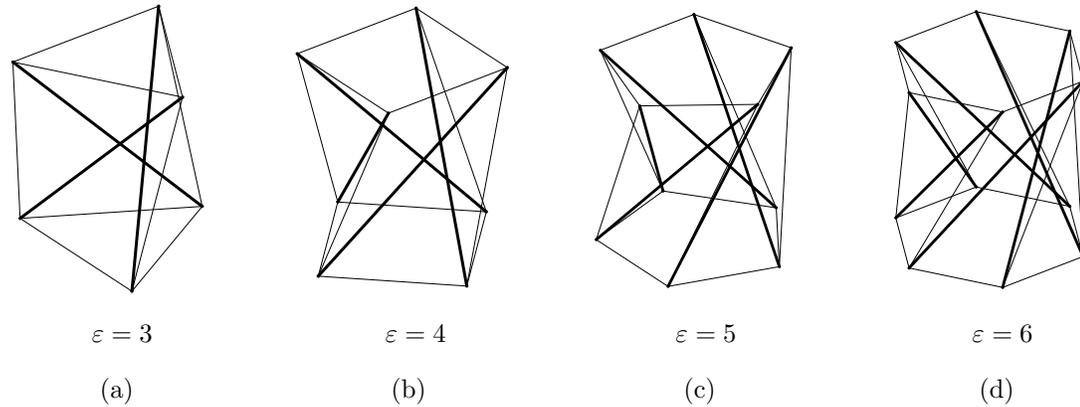


FIG. 2.4 – Systèmes de tenségrité antiprismatiques.

travaux de Fuller, Pugh [17] documente également un éventail considérable de systèmes de tenségrité qu'il répartit en catégories selon le motif dans lequel sont placées les barres. De plus, il fournit des instructions détaillées pour la construction de modèles de ces systèmes.

La génération de nouveaux systèmes de tenségrité en utilisant un algorithme génétique est suggérée par Paul *et al.* [25]. Pour une quantité fixe de barres, cette méthode optimise la topologie du système de manière à maximiser le volume du prisme rectangulaire de dimension minimale qui englobe tous ses nœuds. Une approche alternative consiste à maximiser les volumes de tétraèdres formés par des groupes de nœuds. Les systèmes de tenségrité obtenus avec la méthode sont généralement non symétriques. De plus, l'utilisation d'une fonction objective définie à partir du volume occupé par le système, qui permet d'éviter les systèmes où tous les composants se retrouvent sur un plan ou sur une droite, risque également d'éliminer plusieurs architectures valides.

Finalement, une méthode permettant le développement de nouveaux systèmes de tenségrité sans nécessiter des connaissances techniques approfondies est proposée par Sakantamis et Larsen [26]. Leur approche consiste à insérer des barres dans une membrane en tension pour obtenir la topologie souhaitée. Une fois l'insertion des barres terminée, les lieux où des câbles sont requis pour maintenir l'équilibre apparaissent comme des régions tendues dans la membrane. Des câbles peuvent alors être ajoutés à ces endroits ce qui permet ainsi de retirer la membrane et d'obtenir un système de tenségrité.

2.4.2 Recherche des configurations de tensegrité

Les travaux portant sur le développement d'architectures de tensegrité, décrits ci-haut, servent à identifier les assemblages de barres et de câbles qui, lorsque placés dans des configurations de tensegrité, ont une capacité d'être autocontraints. Toutefois, l'identification des configurations de tensegrité pour une architecture donnée est une tâche difficile qui a fait l'objet de nombreux travaux. Un résumé des différentes méthodes qui sont disponibles pour accomplir cette tâche est dressé par Tibert et Pellegrino [27]. Dans ce qui suit, un aperçu de ces méthodes sera fourni.

Kenner [28] a obtenu une solution analytique simple pour le calcul des configurations de tensegrité de systèmes de tensegrité antiprismatiques en utilisant une approche purement cinématique. Cette solution est valide seulement lorsque les longueurs des composants du système sont choisies de manière à donner à ce dernier une symétrie de rotation autour d'un axe perpendiculaire aux polygones formés par les extrémités inférieures et supérieures de ses barres. En fait, dans un tel cas, ces polygones sont parallèles et sont pivotés l'un par rapport à l'autre d'un angle φ autour de l'axe de symétrie. Cela est illustré à la Figure 2.5 pour le système de tensegrité antiprismatique triangulaire. Il a déjà été établi qu'un système de tensegrité doit se retrouver à sa frontière d'assemblage pour être en équilibre. La recherche de la frontière d'assemblage peut s'effectuer selon deux scénarios différents. Soit la longueur d'un câble du système est minimisée ou bien la longueur d'une barre du système est maximisée tout en gardant les longueurs des autres composants fixes et en assurant que l'assemblage demeure possible. Avec cette approche, Kenner a trouvé le résultat suivant pour la rotation relative des deux polygones opposés :

$$\varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\varepsilon} \right) \quad (2.7)$$

Cette équation illustre le fait que pour une architecture de tensegrité donnée une capacité d'être autocontraint ne soit généralement possible que dans certaines configurations précises. Il est également noté que ce résultat peut aussi bien être obtenu en utilisant une approche statique [27]. De plus, un résultat similaire a été obtenu par Connelly et Terrell [29] ainsi que par Chassagnoux *et al.* [30].

Le principe de la frontière d'assemblage est également à la base d'une méthode plus générale introduite par Pellegrino [31] qui est fondée sur la programmation non linéaire [27]. Il s'agit de formuler un problème d'optimisation sous contraintes où la fonction objective à optimiser correspond, par exemple, à la longueur d'un câble ou d'une barre et où les contraintes sont définies à partir des longueurs fixes des autres composants. La solution du problème se calcule à partir d'une configuration d'équilibre connue (p. ex. la configuration d'équilibre du système symétrique donnée par la

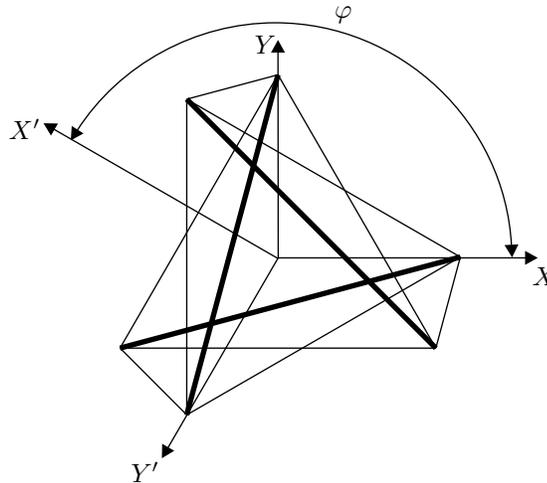


FIG. 2.5 – Vue de dessus du système de tenségrité antiprismatique triangulaire de la Figure 2.4(a).

solution de Kenner [28]) en utilisant une approche numérique. Quoique l’approche de la programmation non linéaire puisse théoriquement s’appliquer de manière générale à tout système de tenségrité, l’augmentation du nombre de contraintes à satisfaire avec le nombre de composants du système peut rapidement mener à une détérioration de la performance de cette approche.

Une approche très similaire est également proposée par Whittier [32]. En fait, ce dernier est le seul à se référer de manière explicite au fait que l’équilibre d’un système de tenségrité correspond à sa frontière d’assemblage. Plutôt que de formuler le problème comme une optimisation sous contraintes, l’approche de Whittier consiste à résoudre un système d’équations non linéaires formulées à partir de contraintes sur les longueurs des composants. L’objectif est de varier la longueur d’un ou de plusieurs composants (agrandir des barres ou raccourcir des câbles) jusqu’à ce que le système d’équations n’admette plus une solution réelle. Lorsque cela se produit, la configuration du système se retrouve sur sa frontière d’assemblage. De manière fondamentale, l’approche demeure la même que celle de Pellegrino [31]. Cependant, sa performance numérique semble être plus faible.

Les méthodes décrites ci-haut pour la recherche des configurations de tenségrité sont toutes de nature cinématique. C’est-à-dire qu’elles sont fondées sur la satisfaction de contraintes associées aux longueurs fixes d’un ensemble de composants tout en minimisant les longueurs d’un ou de plusieurs câbles et/ou en maximisant les longueurs d’une ou de plusieurs barres. Par conséquent, que ce soit de manière explicite ou implicite, les approches cinématiques cherchent toujours des configurations qui se situent sur les frontières d’assemblage des systèmes de tenségrité où ces derniers développent

une capacité d'être autocontraints. Dans ce qui suit, des méthodes de nature statique seront présentées. Ces méthodes sont fondées, de manière directe ou indirecte, sur les équations d'équilibre statique des systèmes de tenségrité.

La méthode des densités de force a premièrement été proposée par Schek [33] pour le calcul des configurations d'équilibre de réseaux de composants (avec une emphase sur les réseaux de câbles). La méthode consiste à linéariser les équations d'équilibre statique aux nœuds d'un réseau par l'introduction d'une nouvelle variable nommée *densité de force*. De manière générale, l'équation d'équilibre à un nœud i peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_j t_{ij} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{l_{ij}} = \mathbf{f}_i \quad (2.8)$$

où t_{ij} et l_{ij} sont la force interne et la longueur, respectivement, du composant reliant les nœuds i et j , \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j sont les vecteurs associés aux positions des nœuds i et j , \mathbf{f}_i est la force externe appliquée au nœud i et la somme est prise sur tous les composants qui sont attachés au nœud i . En dépit de son apparence, l'équation (2.8) est à priori non linéaire en fonction des positions des nœuds en raison de la présence du terme l_{ij} qui dépend de \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . La méthode consiste alors à définir la densité de force comme la force interne par unité de longueur d'un composant, soit :

$$\rho_{ij} = \frac{t_{ij}}{l_{ij}} \quad (2.9)$$

Cette substitution permet de linéariser les équations d'équilibre ce qui permet ensuite de calculer les positions des nœuds du système avec des techniques simples d'algèbre linéaire. Il est toutefois nécessaire de spécifier les valeurs des densités de force avant de solutionner les équations. Pour un système général formé par n_E composants et n_N nœuds, les positions des nœuds peuvent être représentées par le vecteur suivant :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_{n_N}^T]^T \quad (2.10)$$

De manière analogue, l'ensemble des forces externes appliquées aux nœuds sont représentées comme suit :

$$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T, \dots, \mathbf{f}_{n_N}^T]^T \quad (2.11)$$

Avec ces définitions, les équations d'équilibre statique de tous les nœuds du système sont données par l'expression suivante :

$$\tilde{\mathbf{C}}_s^T \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{C}}_s \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.12)$$

Dans cette expression, $\tilde{\mathbf{C}}_s$ et $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ sont obtenues comme suit :

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \mathbf{C}_s \otimes \mathbf{1}_{d_C} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{1}_{d_C} \quad (2.13)$$

où $\mathbf{1}_{d_C}$ est une matrice identité de dimension d_C et le symbole \otimes correspond au produit de Kronecker. La matrice $\mathbf{\Omega}$ est une matrice diagonale de dimension $n_E \times n_E$ qui contient les densités de force (ϱ_{ij}) de chaque composant. Pour sa part, \mathbf{C}_s est la matrice d'incidence du système de dimension $n_E \times n_N$ pour laquelle $C_{s_{ij}} = -1$ si le nœud j est le premier nœud du composant i , $C_{s_{ij}} = 1$ si le nœud j est le deuxième nœud du composant i (la sélection du premier nœud dans un composant est arbitraire) et $C_{s_{ij}} = 0$ si le composant i n'est pas attaché au nœud j ($C_{s_{ij}}$ est l'élément situé sur la i^e ligne et la j^e colonne de \mathbf{C}_s). Connaissant les valeurs des densités de force ainsi que des forces externes, l'équation (2.12) peut être résolue pour les positions des nœuds si l'inverse de $\tilde{\mathbf{C}}_s^T \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{C}}_s$ existe. Pour des systèmes construits entièrement avec des câbles, les densités de force sont toutes positives (c.-à-d. $\varrho_{ij} > 0$) ce qui signifie que la matrice $\tilde{\mathbf{C}}_s^T \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{C}}_s$ est définie positive et donc inversible. Une solution unique est alors obtenue pour \mathbf{x} . Toutefois, dans le cas des systèmes de tenségrité, une approche différente est requise. En fait, puisque les configurations de tenségrité sont celles où les systèmes ont la capacité d'être autocontraints, les forces externes correspondantes sont nulles (c.-à-d. $\mathbf{f} = \mathbf{0}$). L'équation (2.12) peut alors se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

où $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{C}}_s^T \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{C}}_s$ est la matrice des densités de force. Cette équation peut être satisfaite seulement lorsque le noyau de \mathbf{S} n'est pas vide. De plus, pour obtenir une configuration d'équilibre qui appartient à l'espace de dimension d_C (ce qui est habituellement souhaité), la dimension du noyau de \mathbf{S} doit respecter la condition suivante [34] :

$$\dim[\mathcal{N}(\mathbf{S})] \geq d_C(d_C + 1) \quad (2.15)$$

Si cette condition n'est pas respectée la configuration d'équilibre du système, si elle existe, appartient à un sous-espace de dimension inférieure à d_C [27]. La première étape dans la solution de l'équation (2.14) est de choisir un ensemble de densités de force qui satisfait la condition de l'équation (2.15). Ce choix des densités de force n'est pas évident et représente la plus grande difficulté avec l'application de cette méthode aux systèmes de tenségrité. Vassart et Motro [35] citent trois approches pouvant être utilisées à cette fin : la méthode intuitive, la méthode itérative et la méthode analytique. La méthode intuitive ne peut être utilisée que pour des systèmes simples avec peu de composants. Pour sa part, la méthode itérative est de nature numérique ce qui la rend plus ou moins attrayante. Finalement, la méthode analytique, qui consiste à évaluer \mathbf{S} de manière symbolique pour ensuite développer les conditions requises pour la satisfaction de l'équation (2.15), nécessite habituellement des hypothèses de symétrie lorsqu'elle est appliquée à des systèmes plus complexes. Une fois qu'un ensemble de densités de force acceptable est trouvé, il existe une infinité de solutions qui peuvent être choisies pour les positions des nœuds (c.-à-d. \mathbf{x}). Mise à part les difficultés associées au choix des ϱ_{ij} , la méthode des densités de force ne permet pas de manière évidente l'application de contraintes aux longueurs de composants.

L'équation (2.14) a également été obtenue par Connelly [36] en utilisant une approche énergétique. En considérant chaque composant d'un système de tenségrité comme un ressort linéaire, l'énergie du système est exprimée comme suit :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \varrho_{ij} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \quad (2.16)$$

Pour que le système soit en équilibre, son énergie doit être minimale ce qui implique :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

d'où il est clair que l'approche énergétique correspond identiquement à la méthode des densités de force.

Une transformation affine est une transformation linéaire qui conserve la colinéarité et les ratios des distances [37] (p. ex. dilatation, rotation, translation, réflexion et cisaillement). De manière générale, une transformation affine d'un vecteur position \mathbf{x}_i , notée $T_a(\mathbf{x}_i)$, peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$T_a(\mathbf{x}_i) = \mathbf{R} \mathbf{x}_i + \mathbf{r} \quad (2.18)$$

où \mathbf{R} est une matrice de dimension $d_C \times d_C$ qui correspond à une transformation linéaire tandis que \mathbf{r} est un vecteur de dimension $d_C \times 1$ qui représente une translation. Il existe alors $d_C(d_C + 1)$ transformations affines indépendantes. Soit maintenant un système de tenségrité qui se retrouve dans une configuration d'équilibre pour laquelle l'équation (2.14) est satisfaite. Il a été démontré par Connelly [38] que cette équation sera également satisfaite pour tous les systèmes obtenus en appliquant des transformations affines au système initial. De plus, les densités de force dans les composants demeurent constantes sous l'action de transformations affines. Cela vient clarifier un peu l'observation faite précédemment concernant la dimension du noyau de la matrice \mathbf{S} . En fait, il doit y avoir au moins $d_C(d_C + 1)$ transformations affines indépendantes dans le noyau de \mathbf{S} pour que le système de tenségrité se retrouve dans une configuration d'équilibre qui occupe l'espace de dimension d_C .

Masic *et al.* [39] proposent quelques améliorations pour la méthode des densités de force. En particulier, ils suggèrent d'exploiter la symétrie des systèmes de tenségrité pour réduire la taille du système de l'équation (2.14). De plus, ils utilisent le résultat de Connelly [38] pour générer des nouvelles configurations de tenségrité à partir de la configuration d'équilibre d'un système hautement symétrique en lui appliquant des transformations affines. Pour leur part, Williamson *et al.* [40] utilisent l'algorithme de décomposition en valeurs singulières pour résoudre les équations d'équilibre statique de systèmes de tenségrité.

Avec la méthode des densités de force, la configuration générale d'un système de tenségrité est représentée par les coordonnées cartésiennes de ses nœuds. Lorsqu'il est souhaité d'imposer des longueurs fixes à certains composants (c.-à-d. les barres), des contraintes géométriques doivent donc être introduites à la formulation des équations d'équilibre. La méthode des coordonnées réduites [7, 41] permet d'éviter cette étape puisqu'elle consiste à représenter la configuration du système avec un nombre minimal de paramètres associés aux positions et aux orientations de ses barres (tout en supposant les longueurs de celles-ci comme étant constantes). Soit un système de tenségrité pour lequel les vecteurs \mathbf{t}_T et \mathbf{l}_T représentent les forces et les longueurs des composants en tension, respectivement, et pour lequel la configuration générale est représentée par un vecteur de coordonnées généralisées \mathbf{q} . Puisque les forces internes dans les barres ne peuvent pas effectuer de travail (étant donné que les barres sont supposées rigides), la méthode des travaux virtuels permet d'écrire :

$$\delta W = \mathbf{t}_T^T \delta \mathbf{l}_T \quad (2.19)$$

où δW est le travail virtuel dans le système lorsque ce dernier effectue un déplacement virtuel d'ordre infinitésimal caractérisé par $\delta \mathbf{q}$ et $\delta \mathbf{l}_T$ correspond aux élongations virtuelles des n_T composants en tension. Les élongations virtuelles peuvent être calculées en fonction des déplacements virtuels des n coordonnées généralisées comme suit :

$$\delta l_{T_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial l_{T_j}}{\partial q_i} \delta q_i \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n_T \quad (2.20)$$

Sous forme matricielle, cette équation s'écrit :

$$\delta \mathbf{l}_T = \mathbf{A}_T^T \delta \mathbf{q} \quad (2.21)$$

où les éléments de la matrice \mathbf{A}_T , qui est de dimension $n \times n_T$, sont définis comme :

$$A_{T_{ij}} = \frac{\partial l_{T_j}}{\partial q_i} \quad (2.22)$$

Il peut être noté ici que la matrice \mathbf{A}_T est équivalente à la matrice \mathbf{A} décrite à la section 2.2 pour le cas où les barres sont considérées rigides. En substituant l'équation (2.21) dans l'équation (2.19), on obtient :

$$\delta W = (\mathbf{A}_T \mathbf{t}_T)^T \delta \mathbf{q} \quad (2.23)$$

Puisque le travail virtuel doit être nul pour tout choix arbitraire de $\delta \mathbf{q}$, la condition suivante est obtenue :

$$\mathbf{A}_T \mathbf{t}_T = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

Cette condition est nécessaire mais non suffisante pour que le système se retrouve dans une configuration de tenségrité. En fait, puisqu'il est nécessaire que les éléments en tension soient toujours soumis à des forces en tension, la condition suivante doit également être respectée :

$$t_{T_i} \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_T \quad (2.25)$$

Le problème est donc celui de trouver un ensemble de coordonnées généralisées \mathbf{q} pour lequel les équations (2.24) et (2.25) sont satisfaites. À partir de l'équation (2.24), il est évident que la solution doit faire en sorte que le noyau de \mathbf{A}_T ne soit pas vide. Pour des systèmes de tenségrité hautement symétriques, Sultan *et al.* [7] ont obtenu des solutions analytiques pour les configurations d'équilibre. Par contre, dans un contexte général, l'utilisation d'une approche numérique doit être envisagée.

Le principe des travaux virtuels est également utilisé par Crane *et al.* [42] pour le calcul des configurations de tenségrité de systèmes antiprismatiques. En considérant les barres comme étant rigides et les câbles comme des ressorts linéaires, les auteurs retrouvent le système de l'équation (2.24). Une méthode numérique (p. ex. l'algorithme de Newton-Raphson [43]) est ensuite utilisée pour trouver la configuration d'équilibre d'un système pour lequel les longueurs libres des ressorts ont été modifiées à partir d'une configuration de référence connue comme étant dans un équilibre stable. Une fois l'équilibre obtenu, les résultats sont vérifiés avec les équations d'équilibre statique aux nœuds du système. Le problème qui existe avec cette approche est qu'il n'est jamais vérifié que les câbles sont en tension. La méthode ne converge donc pas assurément vers une configuration de tenségrité.

Selon les définitions fournies à la section 1.2, la recherche des configurations de tenségrité d'un mécanisme de tenségrité est connue dans ce texte comme le problème statique direct. Comme il a été mentionné brièvement à la section 1.3, des ressorts seront toujours intégrés aux mécanismes développés dans cet ouvrage. Il est donc supposé en tout temps que les raideurs des barres et des câbles sont infinies par rapport à celles des ressorts (c.-à-d. les barres et les câbles sont considérés rigides). Il devient alors avantageux de représenter la configuration générale d'un système de tenségrité, lorsque cela convient, par un ensemble minimal de coordonnées généralisées. Toutefois, contrairement à la méthode des coordonnées réduites, les équations d'équilibre ne seront pas développées ici avec la méthode des travaux virtuels mais plutôt en effectuant une minimisation de l'énergie potentielle des mécanismes. En effet, de manière générale, l'énergie potentielle d'un mécanisme, qui correspond dans ce cas à l'énergie qui est emmagasinée dans ses n_R ressorts, peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$U = f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_R} K_{R_i} (l_{R_i} - l_{R_{0i}})^2 \quad (2.26)$$

où K_{R_i} , l_{R_i} et $l_{R_{0i}}$ sont la raideur, la longueur et la longueur libre du i^e ressort, respectivement. Pour un minimum de U , la condition suivante doit être satisfaite :

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n_R} K_{R_i} (l_{R_i} - l_{R_{0i}}) \frac{\partial l_{R_i}}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

ce qui se traduit sous forme matricielle à l'expression suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A}_R \mathbf{t}_R = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

où les éléments de \mathbf{t}_R sont donnés par $t_{R_i} = K_{R_i}(l_{R_i} - l_{R_{0i}})$ et où :

$$A_{R_{ij}} = \frac{\partial l_{R_j}}{\partial q_i} \quad (2.29)$$

Cette expression, qui correspond à l'équation (2.24) mais en considérant les câbles comme étant rigides, est résolue en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson couplé avec une procédure de continuation [44] qui est définie à partir d'une configuration de référence. À priori, cette approche souffre de la même déficience que l'approche proposée par Crane *et al.* [45]. C'est-à-dire que dans les configurations d'équilibre il n'est pas assuré que les câbles et les ressorts sont en tension. Toutefois, comme il sera expliqué au chapitre 3, les ressorts utilisés dans cette thèse seront toujours supposés avoir des longueurs libres nulles (c.-à-d. $l_{R_{0i}} = 0$). Il devient donc impossible pour ces derniers d'être chargés autrement qu'en tension. Dans le cas des câbles, la présence de tension doit être vérifiée avec les équations d'équilibre statique lorsque des forces externes et/ou gravitationnelles sont appliquées sur le mécanisme. Par contre, en l'absence de forces externes et gravitationnelles, il peut être démontré (voir les chapitres subséquents) que les câbles sont toujours soumis à des forces en tension.

2.4.3 Stabilité des configurations de tenségrité

Les méthodes qui permettent l'identification des configurations de tenségrité d'un système (voir section 2.4.2) n'offrent aucune garantie sur la stabilité des équilibres résultants. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question de la stabilité de systèmes articulés (dont les systèmes de tenségrité représentent un cas spécifique) ce qui a mené à l'établissement de différentes notions de stabilité. Étant donné l'étendue des travaux portant sur le sujet, il n'est pas souhaitable d'en faire ici un résumé exhaustif. Quelques-unes des approches proposées dans la littérature seront plutôt décrites afin de faire le lien entre ces approches et la méthode qui sera utilisée dans cette thèse pour vérifier la stabilité des mécanismes de tenségrité.

Peu importe la notion de stabilité qui est adoptée, la question consiste toujours à évaluer le comportement d'un système qui est perturbé par rapport à sa configuration d'équilibre par des forces et/ou couples externes. De manière générale, des forces appliquées aux nœuds d'un système vont engendrer des changements dans sa configuration. Si le système retourne à sa configuration d'équilibre initiale lorsque les forces sont remises à zéro, il est considéré comme étant stable. Soit \mathbf{f} le vecteur des forces externes

appliquées aux nœuds d'un système et soit \mathbf{x} un vecteur contenant les positions cartésiennes des nœuds. Pour déterminer si le système est stable, une relation entre des forces perturbatrices et les petites déformations correspondantes est établie comme suit :

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{K} \delta \mathbf{x} \quad (2.30)$$

où \mathbf{K} est une matrice de raideur. Il existe différentes formulations de la matrice de raideur dans la littérature qui, lorsqu'elles sont basées sur les mêmes hypothèses, génèrent le même résultat (p. ex. [46, 47, 39]). En dérivant les équations d'équilibre statique d'un composant par rapport aux positions de ses nœuds et en combinant les expressions résultantes pour tous les composants, Guest [48] obtient la forme suivante pour la matrice de raideur :

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{A}^T + \mathbf{S} \quad (2.31)$$

Dans cette expression, \mathbf{A} est la matrice d'équilibre décrite à la section 2.2 tandis que \mathbf{S} est la matrice des densités de force décrite à la section 2.4.2. De plus, $\hat{\mathbf{G}}$ prend la forme de la matrice diagonale suivante :

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 & & & \\ & \hat{g}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{g}_{n_E} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

où les \hat{g}_i , définies par Guest comme les raideurs axiales modifiées des composants, sont données par :

$$\hat{g}_i = g_i - \varrho_i \quad (2.33)$$

ϱ_i étant la densité de force associée au composant i et g_i sa raideur axiale. Donc, pour un composant qui se comporte comme un ressort linéaire de raideur K_i avec une longueur l_i et une longueur libre l_{0i} :

$$g_i = K_i, \quad \varrho_i = \frac{K_i(l_i - l_{0i})}{l_i}, \quad \hat{g}_i = \frac{K_i l_{0i}}{l_i} \quad (2.34)$$

Pour qu'un système retourne à sa configuration d'équilibre suite à une perturbation externe, la déformation du système à partir de cette configuration sous l'effet de la perturbation doit nécessiter un apport de travail positif. C'est-à-dire que la condition suivante doit être respectée :

$$\delta W = \delta \mathbf{x}^T \delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{x} > 0 \quad (2.35)$$

d'où la nécessité que la matrice de raideur soit définie positive. Ce constat repose sur l'hypothèse que le système ne peut pas se déplacer librement en translation ou en rotation dans son espace. Pour un cas où le système n'est pas contraint dans son espace la matrice de raideur doit plutôt être semi-définie positive et les vecteurs $\delta \mathbf{x}$ qui

se retrouvent dans le noyau de \mathbf{K} doivent correspondre aux translations et rotations libres du système (c.-à-d. les mouvements qui ne nécessitent aucune déformation de ce dernier).

Il est noté ici que des travaux importants portant sur la stabilité de systèmes articulés ont été effectués par Calladine et Pellegrino [49, 50, 51] en se basant sur une linéarisation des équations constitutives. Connelly [52], Connelly et Whiteley [53] ainsi que Roth et Whiteley [54], pour leur part, ont effectué des travaux sur ce même sujet en utilisant une approche purement mathématique. Finalement, Knight *et al.* [55] ont étudié la stabilité des systèmes de tenségrité antiprismatiques par l'entremise d'un indice de qualité fondé sur le déterminant de la jacobienne du système. Ils observent la présence de mécanismes infinitésimaux dans les architectures de ces systèmes et mentionnent qu'il est possible d'éliminer ces mécanismes, tel qu'il a été proposé par Gabriel [56], en ajoutant des câbles ou des ressorts aux systèmes.

Dans cette thèse, il est toujours supposé que les barres et les câbles sont parfaitement rigides. À partir de l'équation (2.3) il est donc clair que les déformations des mécanismes sous l'action de forces perturbatrices ($\delta\mathbf{x}$), lorsque substituées dans le produit $\mathbf{A}^T\delta\mathbf{x}$, doivent générer des élongations nulles pour les éléments de $\delta\mathbf{l}$ qui sont associés aux barres et aux câbles. De plus, puisque les ressorts sont toujours supposés avoir des longueurs libres nulles (c.-à-d. $l_{0i} = 0$), les raideurs axiales modifiées correspondantes (c.-à-d. \hat{g}_i) sont nulles (équation (2.34)). Il en résulte que le terme $\mathbf{A}\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A}^T\delta\mathbf{x}$ est toujours nul et alors l'équation (2.30) peut s'écrire $\delta\mathbf{f} = \mathbf{S}\delta\mathbf{x}$. En utilisant la matrice de raideur de Guest [48], la condition devant être satisfaite pour la stabilité des mécanismes de tenségrité étudiés dans cet ouvrage est donc que la matrice \mathbf{S} soit définie positive. Cette approche ne sera toutefois pas utilisée ici. En fait, étant donné l'hypothèse de barres et de câbles rigides ainsi que les contraintes qui peuvent s'appliquer sur les positions de certains nœuds des mécanismes étudiés, la matrice de raideur de Guest devient difficilement applicable puisqu'elle repose sur une représentation d'un système à partir des coordonnées cartésiennes de ses nœuds. La stabilité des mécanismes sera alors évaluée dans cette thèse à partir de la méthode de la minimisation de l'énergie potentielle décrite à la section 2.4.2. Il était question dans cette section de l'équilibre d'un mécanisme en absence de chargements externes. Pour intégrer des chargements externes dans la formulation, l'équation (2.26) est remplacée par l'expression suivante :

$$\mu = U - \mathbf{f}_q^T \mathbf{q} \quad (2.36)$$

où le terme $\mathbf{f}_q^T \mathbf{q}$ correspond à une fonction potentielle associée aux chargements externes agissant sur le mécanisme qui sont dirigés dans les directions définies par les coordonnées

généralisées (\mathbf{q}). La dérivée de cette expression par rapport à \mathbf{q} permet d'obtenir :

$$\mathbf{f}_q = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.37)$$

ce qui donne une expression pour les chargements généralisés en fonction des coordonnées généralisées. Une relation analogue à celle de l'équation (2.30) est obtenue en dérivant de nouveau par rapport à \mathbf{q} ce qui mène à l'expression suivante :

$$\delta \mathbf{f}_q = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2} \delta \mathbf{q} = \mathbf{H} \delta \mathbf{q} \quad (2.38)$$

où \mathbf{H} est la matrice de raideur qui doit être définie positive pour que l'équilibre du mécanisme soit stable. Cette matrice correspond tout simplement à la matrice hessienne de l'énergie potentielle du mécanisme.

2.4.4 Systèmes de tenségrité soumis à des chargements externes

À la section 2.4.2, des méthodes ont été présentées pour la recherche des configurations de tenségrité de systèmes de tenségrité. Il était alors toujours supposé que les systèmes n'étaient pas assujettis à des chargements externes. Toutefois, pour de nombreuses applications auxquelles pourraient servir les mécanismes de tenségrité, ces derniers doivent pouvoir supporter de tels chargements. Dans cette section, certaines méthodes pouvant être utilisées pour étudier le comportement de systèmes de tenségrité soumis à des chargements externes sont décrites. En particulier, les aspects suivants sont considérés :

- Calcul des configurations d'équilibre de systèmes de tenségrité soumis à des chargements externes.
- Détermination de la raideur des systèmes de tenségrité (c.-à-d. résistance aux déformations sous l'effet de chargements externes).
- Évolution des forces internes des composants des systèmes de tenségrité sous l'action de chargements externes.

Quelques-unes des méthodes décrites à la section 2.4.2 pour la recherche des configurations de tenségrité peuvent être adaptées assez facilement pour considérer les effets de chargements externes. C'est le cas, par exemple, pour la méthode de Crane III *et al.* [42]. Ils utilisent le principe des travaux virtuels pour développer un système d'équations à

résoudre dans lequel les chargements externes sont intégrés. Ce système est résolu numériquement avec l'algorithme de Newton-Raphson tout en appliquant les chargements externes par incréments à partir d'une configuration de référence. Les résultats sont ensuite vérifiés avec les équations d'équilibre statique.

Pour un système de tenségrité antiprismatique triangulaire assujéti à des hypothèses de symétrie tant au niveau de ses paramètres géométriques que des forces externes qui y sont appliquées, Oppenheim et Williams [57] ont obtenu des résultats analytiques reliant les chargements externes aux déformations correspondantes. En raison de sa symétrie, le système peut être complètement représenté par un seul paramètre soit, par exemple, l'angle φ entre ses deux faces triangulaires (voir la figure 2.5). En exprimant l'énergie potentielle du système en fonction de φ , la relation entre un couple pur appliqué au triangle supérieur (par l'entremise de forces appliquées sur ses nœuds) et φ est obtenue comme suit :

$$\tau_\varphi(\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (2.39)$$

En traçant cette courbe pour différents niveaux de précontrainte du système dans le voisinage de sa configuration d'équilibre en absence de chargements externes, des observations sont faites concernant sa raideur (c.-à-d. la pente de la courbe $\tau_\varphi(\varphi)$). Lorsqu'il n'y a aucune précontrainte dans les composants du système, il est démontré que la raideur dans la direction de son mécanisme infinitésimal est nulle. En fait, ce résultat est applicable à tous les systèmes de tenségrité pour lesquels $m_I > 0$. Puisque $\mathbf{A}^T \delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ dans la direction d'un mécanisme infinitésimal et que l'absence de précontrainte implique $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, ce résultat est cohérent avec l'équation (2.31). D'ailleurs, ce résultat a également été observé par Murakami [47]. De plus, puisque la matrice \mathbf{S} est directement proportionnelle au niveau de précontrainte du système, la raideur de ce dernier dans la direction de son mécanisme infinitésimal lorsqu'il se retrouve dans une configuration de tenségrité (c.-à-d. où le chargement externe est nul) sera linéaire. Malgré le fait qu'Oppenheim et Williams démontrent que la raideur du système antiprismatique triangulaire augmente toujours de manière non linéaire lorsque le système subit des déformations sous l'application d'un couple externe, ce résultat ne peut pas être généralisé pour tous les systèmes de tenségrité et pour tous les types de chargements.

Kebiche *et al.* [58] utilisent une approche numérique fondée sur l'utilisation de la matrice de raideur (voir section 2.4.3) pour calculer les configurations d'équilibre de systèmes de tenségrité soumis à des chargements externes. Avec cette méthode, ils étudient les relations entre les chargements externes et les déformations correspondantes pour différents types de chargements (p. ex. traction, compression, flexion et torsion). À partir des courbes chargements-déformations qui sont obtenues, certaines observations sont faites concernant la raideur des systèmes. Des résultats similaires sont obtenus par Skelton *et al.* [59] où les effets des paramètres géométriques des systèmes de tenségrité

sont également considérés.

Dans cette thèse, les configurations d'équilibre des systèmes de tenségrité soumis à des chargements externes seront calculées en intégrant ces chargements à l'équation (2.28). Quoique cela ne pose aucune difficulté additionnelle, l'application de couples sur les mécanismes ne sera pas considérée ici (c.-à-d. que seulement des forces seront considérées). Pour les mécanismes plans simples, il sera possible d'obtenir des expressions analytiques reliant les chargements externes aux déformations des mécanismes. Pour les mécanismes plus complexes, une méthode numérique similaire à celle proposée par Crane III *et al.* [42] devra être utilisée. Puisque l'application de chargements externes influence les forces internes des composants d'un système de tenségrité, ces forces sont vérifiées pendant le calcul de la configuration d'équilibre. Cela est nécessaire pour assurer le bon fonctionnement du système puisqu'il est clair que des forces en tension (en compression) doivent toujours être maintenues dans les câbles (les barres). En pratique, il devrait également être vérifié que les forces internes ne peuvent pas mener à la rupture d'un câble ou au flambage d'une barre. Cette vérification ne sera toutefois pas effectuée dans cette thèse puisqu'il est supposé que les composants peuvent être conçus pour résister aux chargements auxquels ils sont soumis. Finalement, il a été observé par Crane III *et al.* [42] qu'il est possible, lorsqu'un chargement externe est appliqué à un système de tenségrité de manière progressive et continue, pour le système de se déformer de manière discontinue dans certaines situations. C'est-à-dire lorsque le chargement externe dépasse un certain seuil le système se déplace brusquement à un nouvel équilibre. Ce type de comportement, qui peut s'expliquer à l'aide de la théorie des catastrophes [60, 61, 62] et qui correspond à une situation où la raideur du système dans la direction du chargement externe devient négative, doit être considéré pendant l'analyse de systèmes de tenségrité.

2.4.5 Modélisation et simulation dynamique

De manière générale, un système de tenségrité contient plusieurs nœuds où se rencontrent ses composants. Pendant l'analyse dynamique d'un tel système, il n'est souvent pas souhaité de calculer les forces de contraintes aux nœuds. Puisque la formulation lagrangienne ne considère pas ces forces de manière explicite, elle est souvent préférée pour le développement des modèles dynamiques de ce genre de système. En utilisant cette formulation, les équations du mouvement d'un système sont obtenues avec l'expression générale suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_q \quad (2.40)$$

où T et U sont les énergies cinétique et potentielle du système, respectivement. La formulation lagrangienne a déjà été utilisée par plusieurs auteurs pour modéliser la dynamique de systèmes de tenségrité [46, 47, 41]. En particulier, Sultan *et al.* [63] ont développé des modèles dynamiques linéaires pour certains systèmes de tenségrité spatiaux autour de configurations de tenségrité définies au préalable. Pour des systèmes hautement symétriques, ces modèles ont ensuite été utilisés pour simuler la réponse des systèmes à des perturbations externes. Il a été observé, entre autre, que la fréquence naturelle d'un système est proportionnelle au niveau de précontrainte dans ses composants.

Oppenheim et Williams [64, 65] utilisent également une formulation lagrangienne pour obtenir le modèle dynamique d'un système de tenségrité antiprismatique triangulaire symétrique. Il est supposé que les composants déformables sont amortis linéairement en fonction de leurs vitesses de déformation longitudinales. Les auteurs observent que ce type d'amortissement n'est pas efficace pour supprimer les oscillations du système autour de configurations d'équilibre. Cela peut être associé à la présence du mécanisme infinitésimal dans l'architecture du système. Lorsque le système subit des petites déformations dans la direction de ce mécanisme, les changements correspondants aux longueurs de ses composants sont négligeables ce qui rend l'amortissement insuffisant. Il est alors suggéré par les auteurs d'amortir les déplacements angulaires relatifs entre des paires de composants puisque cela mène à une dissipation exponentielle des vibrations.

Quelques chercheurs se sont également penchés sur la commande des systèmes de tenségrité. Djouadi *et al.* [66] ont conçu un algorithme de commande pour un assemblage de plusieurs modules de tenségrité avec l'objectif d'en réduire les vibrations. Pour leur part, Aldrich *et al.* [67] ont effectué la commande d'un système avec l'objectif de modifier sa configuration dans un temps minimal. Il existe également quelques travaux qui se concentrent sur la conception de l'architecture d'un système de tenségrité en parallèle avec la conception de son algorithme de commande. Il est alors souhaité de déterminer l'arrangement optimal des actionneurs et des capteurs parmi les composants des systèmes dans le but de satisfaire différents critères. En ce sens, de Jager *et al.* cherchent d'une part à améliorer la raideur d'un système [68] et d'autre part à isoler ses vibrations [69] tandis que Sultan et Skelton [70] souhaitent minimiser l'énergie nécessaire pour la commande.

Dans cette thèse, les mécanismes qui sont étudiés ont toujours des degrés de liberté non contraints qui peuvent être attribués à la présence de ressorts dans leurs architectures (des explications seront fournies au chapitre 3). La configuration d'un mécanisme à un instant donné lorsqu'il est en mouvement ne peut donc pas être connue sans que sa dynamique soit prise en considération. Il n'est pas souhaité dans cet ouvrage de

faire une analyse substantielle de la dynamique des mécanismes étudiés. Pour chaque mécanisme, un modèle dynamique est développé avec la formulation lagrangienne. Par la suite, ce modèle est utilisé pour simuler le mouvement du mécanisme le long d'une certaine trajectoire. La trajectoire utilisée est choisie de manière à représenter le mouvement typique du mécanisme dans son espace atteignable. À partir des résultats de la simulation, certaines observations sont faites concernant l'efficacité de l'amortissement présent dans le mécanisme en ce qui a trait à la dissipation de ses vibrations.

2.4.6 Structures adaptatives et mécanismes de tenségrité

À priori, l'étude des systèmes de tenségrité est habituellement axée sur leur utilisation comme structures. Toutefois, plus récemment, certains chercheurs ont abordé la question de leur utilisation comme structures adaptatives ou encore comme mécanismes. Oppenheim et Williams [71] se retrouvent parmi les premiers à avoir suggéré la modification active des configurations des systèmes de tenségrité pour obtenir des treillis à géométrie variable. Ils notent la facilité avec laquelle de tels systèmes peuvent être actionnés en modifiant les longueurs des câbles. Pour leur part, Skelton et Sultan [72] mentionnent dans un article que les systèmes de tenségrité pourraient être utilisés comme structures intelligentes où chaque composant peut agir comme actionneur ou comme capteur. Sultan *et al.* proposent l'utilisation d'un système de tenségrité comme télescope adaptatif [73] et comme simulateur de vol [74]. De plus, Sultan et Skelton [75] développent un capteur de forces et de couples à six degrés de liberté qui est basé sur un système de tenségrité. Un prototype d'une structure adaptative qui est obtenue par l'assemblage de modules de tenségrité a été développé par Fest *et al.* [76, 77]. Il est démontré de manière expérimentale que la structure peut se modifier en fonction de son environnement (p. ex. forces externes variables). Un système de tenségrité est également utilisé comme élément de base pour le développement d'un robot marcheur [78, 79]. Finalement, Marshall et Crane III [80] développent un mécanisme à six degrés de liberté fondé sur l'architecture du système de tenségrité antiprismatique triangulaire. Le mécanisme dévie toutefois considérablement de cette architecture ce qui permet de questionner s'il se comporte effectivement comme un système de tenségrité. Les auteurs décrivent le calcul des longueurs requises des actionneurs pour une position et une orientation spécifiée de l'effecteur. Puisque l'architecture du mécanisme ne lui permet pas nécessairement d'être autocontraint, une force externe doit toujours être appliquée à l'effecteur pour équilibrer les forces internes dans les composants. De plus, il n'est pas vérifié que les câbles sont toujours en tension et les barres en compression.

Chapitre 3

Développement de mécanismes de tenségrité

Habituellement, le développement d'un mécanisme s'effectue en visant une application spécifique. Dans un tel cas, la conception du mécanisme peut être adaptée en fonction des besoins de l'application. Dans cet ouvrage, la philosophie qui est adoptée est légèrement différente. En fait, puisque l'étude des mécanismes de tenségrité constitue un domaine de recherche encore très peu développé, il est surtout souhaité d'en évaluer le potentiel. Pour cette raison, l'approche privilégiée sera de développer des mécanismes avec des objectifs très généraux. La motivation derrière une telle approche est de ne pas imposer de contraintes sur la nature des mécanismes développés, ce qui pourrait limiter les options envisagées. Ensuite, selon les caractéristiques et les performances des mécanismes obtenus, il sera possible d'énumérer certains types d'applications pour lesquelles ces mécanismes sont plus appropriés. Dans ce chapitre, la procédure utilisée pour développer des mécanismes de tenségrité à partir de systèmes de tenségrité existants est décrite. De plus, des critères qui doivent être respectés pendant la mise en pratique de cette procédure sont présentés.

3.1 Approche générale

En général, tout mécanisme de tenségrité est obtenu en apportant des modifications à un système de tenségrité existant. Ces modifications consistent principalement en l'ajout d'actionneurs et, dans certains cas, en la substitution de câbles par des ressorts. Ainsi, en changeant les positions des actionneurs, la configuration du système peut être

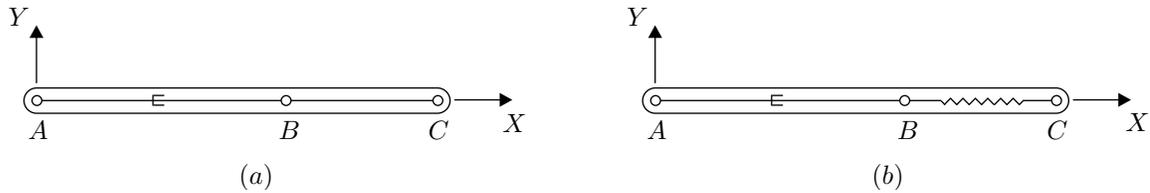


FIG. 3.1 – Exemple d'un mécanisme simple : (a) sans ressort (b) avec ressort.

contrôlée et un mécanisme est obtenu.

Comme le démontre la plupart des travaux portant sur les mécanismes de tenségrité (p. ex. [73, 74, 72]), l'utilisation de ressorts n'est pas très courante. En général, la commande de mécanismes sans ressorts est plus complexe puisque les actionneurs peuvent travailler de manière antagoniste. Pour illustrer cela, il suffit d'imaginer un mécanisme développé à partir du système de la Figure 2.2(b) où la longueur du câble qui relie les nœuds A et B est actionnée (Figure 3.1(a)). En modifiant la longueur de ce câble avec des longueurs fixes des autres composants, deux situations sont possibles. D'une part, si la longueur du câble est diminuée, il devient impossible d'assembler le mécanisme. Au contraire, si la longueur du câble est augmentée, le mécanisme ne se retrouve plus dans une configuration de tenségrité et il y a une perte de tension dans le câble reliant les nœuds B et C . Pour rendre un tel mécanisme fonctionnel, il serait nécessaire d'actionner les longueurs d'au moins deux de ses composants. De plus, pour maintenir le mécanisme dans une configuration de tenségrité en tout temps, les actionneurs devraient être synchronisés pour faire en sorte que le mécanisme se situe toujours à la frontière de sa région d'assemblage. Il est clair qu'une telle situation n'est pas souhaitable.

Tel qu'il fut initialement observé par Oppenheim et Williams [71], les problèmes décrits ci-haut peuvent facilement être évités en intégrant des ressorts dans les mécanismes de tenségrité. En effet, la substitution de câbles par des ressorts fournit aux mécanismes des degrés de liberté non contraints. Il est alors possible pour les mécanismes de se déformer automatiquement de manière à demeurer dans des configurations de tenségrité en tout temps. Pour le mécanisme de la Figure 3.1(a), le câble qui relie les nœuds B et C peut être remplacé par un ressort tel qu'il est illustré à la Figure 3.1(b). Dans ce cas, lorsque la longueur du câble reliant les nœuds A et B est modifiée, le ressort va se déformer pour prendre la longueur minimale permettant l'assemblage du mécanisme et ainsi demeurer dans une configuration de tenségrité.

Dans cette thèse, des ressorts sont toujours intégrés aux mécanismes de tenségrité. L'avantage principal associé à l'utilisation de ressorts est que les mécanismes convergent automatiquement à des configurations de tenségrité sans intervention externe. Toutefois, la présence de ressorts mène également à une réduction de la raideur des mécanismes.

Dans les chapitres subséquents, le développement de mécanismes de tenségrité se fera en posant les hypothèses suivantes :

- Les ressorts ont tous des longueurs libres nulles.
- Les paramètres géométriques (c.-à-d. raideurs des ressorts, longueurs des barres, etc.) sont choisis de manière symétrique (à l'exception du mécanisme de la section 4.2).
- Les composants en compression sont toujours rigides (c.-à-d. des ressorts sont utilisés pour les composants en tension seulement).
- Les configurations d'équilibre des mécanismes doivent être stables (des clarifications à ce sujet seront fournies à la section 3.3).

En ce qui concerne la première de ces hypothèses, il est à noter que des ressorts de longueur libre nulle peuvent être obtenus en pratique en utilisant l'une des diverses méthodes décrites dans la littérature [81, 82]. Le choix symétrique des paramètres géométriques des mécanismes, pour sa part, est justifié puisque, ne visant pas des applications spécifiques, il n'y a aucune raison de préférer des mécanismes non symétriques.

Avant de présenter les règles devant être respectées pendant le développement de mécanismes de tenségrité, il est utile de définir quelques paramètres relatifs aux types et aux quantités de composants qui s'y retrouvent. En ce sens, un mécanisme sera dorénavant supposé avoir un total de n_E composants soit n_C composants en compression et n_T composants en tension tel que $n_E = n_C + n_T$. Parmi les n_E composants, n_A composants seront actionnés. De plus, parmi les n_T composants en tension, n_R composants seront des ressorts. Dans les prochaines sections, des critères portant sur les choix de n_A et de n_R sont établis.

3.2 Actionnement

Pour un mécanisme de tenségrité donné, le nombre d'actionneurs est contraint à la gamme définie par $1 \leq n_A \leq n_E - n_R$. L'agencement des n_A actionneurs parmi les $n_E - n_R$ composants pouvant être actionnés peut s'effectuer de différentes manières. En fait, le nombre d'agencements possibles des actionneurs dans un mécanisme se calcule comme suit :

$$\mathcal{C}_A = \sum_{i=1}^{n_E - n_R} \frac{(n_E - n_R)!}{i!(n_E - n_R - i)!} \quad (3.1)$$

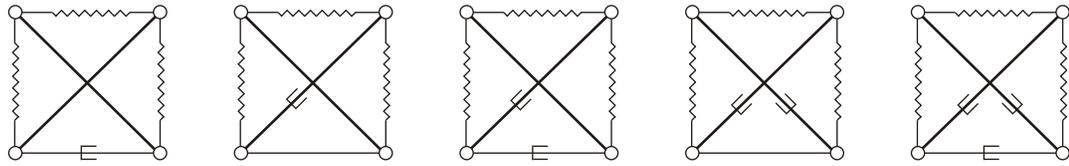


FIG. 3.2 – Agencements possibles des actionneurs pour un mécanisme symétrique fondé sur le système de tensegrité en forme de X pour lequel $n_E = 6$ et $n_R = 3$.

En pratique, grâce à la symétrie des paramètres géométriques, certains de ces agencements seront équivalents. Par exemple, pour un mécanisme développé à partir du système de tensegrité de la Figure 2.3(b) en utilisant trois ressorts, on a $n_E = 6$, $n_R = 3$ et $\mathcal{C}_A = 7$. Toutefois, lorsque les agencements équivalents sont éliminés, il ne reste que les cinq possibilités illustrées à la Figure 3.2. Quoi qu’il en soit, le concepteur aura intérêt à choisir la quantité et l’emplacement des actionneurs de manière judicieuse pour optimiser la performance du mécanisme. En ce sens, il est recommandé d’utiliser seulement autant d’actionneurs que de degrés de liberté de mouvement voulant être fournis à l’effecteur du mécanisme. De plus, le placement des actionneurs se fera préférentiellement de manière symétrique.

3.3 Ressorts

Le choix du nombre de ressorts à inclure dans l’architecture d’un mécanisme doit se faire en considérant certains facteurs. Un nombre élevé de ressorts donnera au mécanisme plusieurs degrés de liberté non contraints ce qui mène à une plus grande flexibilité de ce dernier pour demeurer dans une configuration de tensegrité. De plus, cela peut également permettre au mécanisme d’opérer dans un espace plus grand. Quoi qu’il en soit, il existe des limites minimale et maximale quant au nombre de ressorts pouvant être utilisés dans un mécanisme de tensegrité. Le calcul de ces limites est décrit dans les prochaines sections. Avant de procéder, la conjecture suivante est faite concernant le placement des ressorts :

Conjecture 3.1 *Dans le système de tensegrité en forme de X ainsi que le système de tensegrité antiprismatique triangulaire, le placement des n_R ressorts parmi les n_T composants en tension n’a pas d’influence sur les valeurs limites de n_R (c.-à-d. $n_{R_{\min}}$ et $n_{R_{\max}}$) pour assurer le bon fonctionnement des mécanismes résultants.*

Quoique cette déclaration ne soit pas prouvée explicitement ici, elle a été vérifiée de manière expérimentale pour les mécanismes mentionnés. En ce qui concerne le système de tenségrité antiprismatique triangulaire renforcé (voir le chapitre 5), il correspond à un assemblage de trois systèmes de tenségrité en forme de X de Snelson. De plus, lorsque ce système est en équilibre, il n’y a aucune force d’interaction entre les systèmes en forme de X qui le compose. Ce faisant, les limites du nombre de ressort pouvant être utilisés pour le développement de mécanismes à partir du système renforcé peuvent être établies à partir des limites correspondantes pour le système en forme de X.

Finalement, il peut être observé que les limites de n_R ne dépendent pas de la configuration d’un mécanisme. Ces limites ne sont donc pas influencées par les positions des actionneurs. En conséquence, le calcul des limites se fera dans les prochaines sections à partir de systèmes de tenségrité (qui, selon leur définition, ne contiennent pas d’actionneurs). De cette manière, les résultats seront applicables à tous les agencements possibles d’actionneurs associés à un système de tenségrité donné.

3.3.1 Limite minimale

La motivation derrière l’utilisation de ressorts dans des mécanismes de tenségrité consiste à permettre à ceux-ci de converger dans des configurations de tenségrité peu importe les positions de leurs actionneurs. Pour que cela soit possible, les mécanismes doivent avoir au moins un degré de liberté non contraint (c.-à-d. $\mathcal{D}_{NC} \geq 1$). Pour un système de tenségrité, cette condition s’écrit $\mathcal{D}_G \geq 1$ puisque, étant donné l’absence d’actionneurs, $\mathcal{D}_G = \mathcal{D}_{NC}$. Dans ce qui suit, cette condition est exploitée pour déterminer la limite minimale du nombre de ressorts devant être utilisés dans un système de tenségrité pour le transformer en mécanisme. Pour un système de tenségrité donné, la mobilité peut être analysée avec la formule de Tchebyshev-Grübler-Kutzbach [83], soit :

$$\mathcal{D}_G = d_F(n_B - n_J - 1) + \left(\sum_{i=1}^{n_J} \mathcal{D}_i \right) - \mathcal{D}_S \quad (3.2)$$

où d_F est le degré de liberté d’un corps non contraint dans l’espace dans lequel le système doit opérer (c.-à-d. $d_F = 3$ pour le cas plan et $d_F = 6$ pour le cas spatial), n_B est le nombre de corps, n_J est le nombre de liaisons et \mathcal{D}_i est le degré de liberté de la i^e liaison. Le terme \mathcal{D}_S a été ajouté pour représenter la quantité de degrés de liberté superflus dans le système (p. ex. le mouvement de vrillage d’un corps attaché à ses extrémités par deux liaisons sphériques). Sans exception, un système de tenségrité dans lequel il n’y a pas de ressorts aura une mobilité nulle ou négative (c.-à-d. $\mathcal{D}_G \leq 0$). Le processus consiste alors à remplacer progressivement des câbles du système par des

ressorts jusqu'à ce que $\mathcal{D}_G = 1$. Lorsque cela se produit, le nombre de ressorts dans le système correspond à la limite minimale requise.

Le système de la Figure 2.3(b) est utilisé comme premier exemple ici. En modélisant un ressort comme une liaison prismatique passive, on a $d_F = 3$, $n_B = 6 + n_R$, $n_J = 8 + n_R$, $\sum \mathcal{D}_i = 8 + n_R$ et $\mathcal{D}_S = 0$ ce qui, en substituant dans l'équation (3.2), donne $\mathcal{D}_G = n_R - 1$. Il est donc clair que la limite minimale du nombre de ressort de ce système est $n_{R_{\min}} = 2$. Lorsque $n_R = 2$, ce système a un degré de liberté non contraint lui permettant de converger vers des configurations de tenségrité. Cependant, puisqu'il n'est pas nécessaire pour ce système de se retrouver dans une configuration spéciale pour être autocontraint, il serait possible d'utiliser un seul ressort pour lui introduire un niveau de précontrainte. Ce système représente donc une exception aux règles présentées dans cette section pour le calcul de $n_{R_{\min}}$. Dans le cas du système de tenségrité antiprismatique triangulaire illustré à la Figure 2.4(a), on a, à priori, $d_F = 6$, $n_B = 12$, $n_J = 18$, $\sum \mathcal{D}_i = 3 \cdot 18 = 54$ et $\mathcal{D}_s = 12$. Lorsqu'un câble est remplacé par un ressort, ce dernier peut être considéré comme une liaison prismatique passive. Par conséquent, pour n_R ressorts, on a $n_B = 12 + n_R$, $n_J = 18 + n_R$, $\sum \mathcal{D}_i = 54 + n_R$ et $\mathcal{D}_s = 12$. Il en résulte que $\mathcal{D}_G = n_R$ et $n_{R_{\min}} = 1$. Comme il fut déjà mentionné, le système de tenségrité antiprismatique triangulaire renforcé peut être considéré comme un assemblage de trois systèmes de tenségrité en forme de X de Snelson. Ce faisant, il peut être constaté que le système de tenségrité antiprismatique triangulaire renforcé aura au moins un degré de liberté non contraint si au moins l'un de ses sous systèmes en forme de X contient deux ressorts ou plus. Dans l'éventualité où il serait souhaité de pouvoir modifier les configurations de chaque sous système en forme de X pendant l'opération d'un mécanisme construit à partir du système antiprismatique triangulaire renforcé, un minimum de six ressorts devraient être utilisés (deux par sous système).

3.3.2 Limite maximale

Selon les développements de la section précédente, un mécanisme de tenségrité doit toujours avoir au moins un degré de liberté non contraint. Pour des positions données de ses actionneurs, cela permet au mécanisme de toujours se retrouver dans une configuration de tenségrité. Il peut être observé d'un point de vue énergétique que les configurations de tenségrité correspondent toujours à des minimums de l'énergie potentielle du mécanisme. Pour assurer le bon fonctionnement de ce dernier, ces minimums doivent être stables (c.-à-d. toute déviation par rapport à la configuration de tenségrité doit être accompagnée d'une augmentation correspondante de l'énergie potentielle du mécanisme). La limite maximale du nombre de ressorts utilisés dans un mécanisme est établie à partir de cette condition.

De manière générale, la configuration d'un système peut être représentée par un vecteur \mathbf{q} contenant n coordonnées généralisées ($n \geq \mathcal{D}_G$). L'énergie potentielle du système peut alors être exprimée en fonction de ces coordonnées (c.-à-d. $U = f(\mathbf{q})$). Pour le cas où $n = \mathcal{D}_G$ (le cas où $n > \mathcal{D}_G$ sera discuté plus tard), l'énergie potentielle sera minimale lorsque son gradient calculé par rapport à \mathbf{q} est nul, soit :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Les valeurs de \mathbf{q} pour lesquelles cette condition est satisfaite, notées \mathbf{q}^* , correspondent à des points critiques de U . Chacun de ces points critiques peut être associé soit à un minimum, un maximum, un point d'inflexion ou un point selle de U . Pour vérifier la nature des points critiques, une analyse de la matrice hessienne de U est effectuée. Cette matrice, formée par les dérivées secondes de U par rapport à \mathbf{q} , prend la forme suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Pour un minimum stable de U , la matrice hessienne évaluée à \mathbf{q}^* doit être définie positive (voir section 2.4.3). La vérification de cette condition se fait à partir des signes des déterminants des mineurs principaux croissants de \mathbf{H} où le i^{e} mineur principal croissant, noté \mathbf{H}_i , est défini comme la sous-matrice obtenue en ne conservant que les i premières lignes et colonnes de \mathbf{H} . La condition de Sylvester pour une matrice définie positive (*Sylvester's test for definiteness*) stipule que les déterminants des mineurs principaux croissants doivent tous être strictement positifs, c.-à-d. $\det \mathbf{H}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ [84].

En raison de la complexité du système de l'équation (3.3) et ce même pour des systèmes de tenségrité relativement simples, il est souvent difficile d'obtenir les points critiques de U de manière symbolique. De plus, il est encore plus difficile de vérifier de manière symbolique la nature de ces points avec la matrice hessienne. Il est donc très difficile dans bien des cas de vérifier la stabilité globale d'un système de tenségrité. Heureusement, chaque système de tenségrité est développé à partir d'une configuration de base qui est connue comme étant dans un équilibre stable. De plus, la substitution de câbles par des ressorts dans un système de tenségrité n'a pas d'influence sur l'existence de cet équilibre puisque cela n'a pour effet que d'introduire une précontrainte dans le système (des explications additionnelles sur ce comportement seront données à la

Section 3.3.3). C'est donc dire que peu importe le nombre de ressorts dans un système de tenségrité, la configuration de base correspond toujours à un équilibre. Cependant, lorsque le nombre de ressorts dépasse un certain seuil (c.-à-d. la limite maximale) cet équilibre n'est plus stable. Le calcul de la limite maximale du nombre de ressorts pouvant être utilisés dans un système de tenségrité se fera alors à partir de la configuration de base qui sera dorénavant représentée par le vecteur \mathbf{q}_0 . Si la configuration de base ne correspond pas à un minimum stable de U pour un système de tenségrité donné alors le nombre de ressorts utilisés dans ce système est supérieur à la limite permise. Pour établir cette limite, la procédure suivante est utilisée :

1. Substitution de tous les câbles du système de tenségrité par des ressorts.
2. Vérification de l'équation (3.3) pour \mathbf{q}_0 (pour confirmer la présence d'un point critique dans la configuration de base).
3. Calcul de la matrice hessienne du système pour \mathbf{q}_0 et calcul des déterminants de ses n mineurs principaux croissants.
 - i. Si les signes de ces déterminants sont tous positifs, le nombre de ressorts dans le système correspond à la limite maximale (c.-à-d. $n_{R_{\max}}$).
 - ii. Si les signes de ces déterminants ne sont pas tous positifs, l'un des ressorts est remplacé par un câble et le processus recommence à partir de l'étape 2.

En guise d'exemple, l'application de cette procédure au système de tenségrité en forme de X (voir Figure 2.3(b)) mène à $n_{R_{\max}} = 3$.

3.3.2.1 Cas où $n > \mathcal{D}_G$

Il n'est pas toujours possible de représenter les configurations de systèmes plus complexes par un nombre minimal de coordonnées généralisées. Lorsqu'une quantité non minimale de coordonnées est utilisée (c.-à-d. $n > \mathcal{D}_G$), un ensemble de n_ϕ contraintes géométriques de la forme $\phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ doivent également être considérées pour complètement représenter le système. Dans une telle situation, la minimisation de U consiste en un problème d'optimisation sous contraintes et les méthodes présentées à la section précédente doivent être modifiées. Une nouvelle fonction est alors définie comme suit :

$$\eta = U + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\phi} \quad (3.5)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange de dimension $n_\phi \times 1$ utilisé pour appliquer les contraintes [85]. Les configurations du système pour lesquelles l'énergie

potentielle est minimisée tout en satisfaisant les contraintes géométriques correspondent à des points critiques de η . Ces points critiques, représentés par $\boldsymbol{\lambda}^*$ et \mathbf{q}^* , sont obtenus à partir des conditions suivantes :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

d'où il est clair que la première de ces conditions correspond aux contraintes géométriques originales. Pour assurer la validité de cette formulation, les contraintes géométriques doivent être mutuellement indépendantes. Cela est vérifié lorsque $\det(\boldsymbol{\Gamma}_q \boldsymbol{\Gamma}_q^T) \neq 0$ où $\boldsymbol{\Gamma}_q = \partial \boldsymbol{\phi} / \partial \mathbf{q}$. Une fois un point critique de η obtenu, sa nature doit être déterminée pour identifier s'il s'agit bien d'un minimum de U assujéti aux contraintes (c.-à-d. minimum de $\{U \mid \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}\}$). Pour ce faire, une matrice hessienne tenant compte des contraintes géométriques est développée. Le développement en série de Taylor de η autour de $\boldsymbol{\lambda}^*$ et \mathbf{q}^* s'écrit :

$$\eta(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) \approx \eta(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) + \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^* \\ \mathbf{q}=\mathbf{q}^*}} d\boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\substack{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^* \\ \mathbf{q}=\mathbf{q}^*}} d\mathbf{q} + \frac{1}{2} [d\boldsymbol{\lambda}^T, d\mathbf{q}^T] \mathbf{H}(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\lambda} \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

où $d\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*$, $d\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*$ et :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \boldsymbol{\lambda}^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \boldsymbol{\lambda} \partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\lambda}} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{q}^2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

En substituant le résultat des équations (3.6) dans l'équation (3.7), on obtient :

$$d\eta = \eta(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) - \eta(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) \approx \frac{1}{2} [d\boldsymbol{\lambda}^T, d\mathbf{q}^T] \mathbf{H}(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\lambda} \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

où, en observant la forme de l'équation (3.5), la matrice hessienne peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_\phi \times n_\phi} & (\boldsymbol{\Gamma}_q)_{n_\phi \times n} \\ (\boldsymbol{\Gamma}_q^T)_{n \times n_\phi} & (\mathbf{H}_0)_{n \times n} \end{bmatrix}_{(n_\phi+n) \times (n_\phi+n)} \quad (3.10)$$

avec :

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}^2} + \sum_{i=1}^{n_\phi} \lambda_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \mathbf{q}^2} \quad (3.11)$$

Il est important d'observer qu'une configuration associée à un minimum de $\{U \mid \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}\}$ ne correspond pas de manière générale à un minimum de η dans l'espace défini par les

vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ et \mathbf{q} . Il n'est donc pas possible de déterminer la nature des points critiques de η vis-à-vis la minimisation de l'énergie potentielle en vérifiant si la matrice hessienne associée à η est définie positive (c.-à-d. en utilisant la même approche que dans le cas où $n = \mathcal{D}_G$). Pour cette raison, la condition à satisfaire pour qu'un point critique représenté par $\boldsymbol{\lambda}^*$ et \mathbf{q}^* corresponde à un minimum de $\{U \mid \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}\}$ est que les signes des déterminants des $n - n_\phi$ derniers mineurs principaux croissants de $\mathbf{H}(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*)$ soient égales à $(-1)^{n_\phi}$ [86]. Cette condition peut être réécrite comme suit :

$$\det \mathbf{H}_i = (-1)^{n_\phi} \quad i = n_\phi + 1, \dots, n \quad (3.12)$$

où \mathbf{H}_i est le mineur principal croissant de \mathbf{H} obtenu en ne conservant que les i premières lignes et colonnes de \mathbf{H}_0 , les i premières colonnes de $\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{q}$ et les i premières lignes de $\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{q}^T$.

Selon l'ordre des coordonnées généralisées dans le vecteur \mathbf{q} , il est possible que la condition de l'équation (3.12) ne soit pas satisfaite malgré le fait que le point critique en question soit associé à un minimum de $\{U \mid \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}\}$. Dans un tel cas, certains des déterminants des $n - n_\phi$ derniers mineurs principaux croissants de \mathbf{H} sont nuls. Pour illustrer comment cela peut se produire, il doit premièrement être constaté à partir de l'équation (3.10) que les n_ϕ premières lignes de \mathbf{H}_i sont données par $[\mathbf{0}_{n_\phi \times n_\phi} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i}]$ où $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i}$ correspond aux i premières colonnes de $\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{q}$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial q_1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial q_i} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Il devient alors clair que si les lignes de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i}$ sont linéairement dépendantes alors $\det \mathbf{H}_i = 0$. Cette situation est évitée lorsque :

$$\det (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i}^T) \neq 0 \quad i = n_\phi + 1, \dots, n \quad (3.14)$$

De plus, il peut être démontré que l'équation (3.14) sera satisfaite pour toute valeur de i lorsque :

$$\det (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}}^T) \neq 0 \quad (3.15)$$

Si cette dernière condition est satisfaite, les signes des déterminants des mineurs principaux croissants de la matrice hessienne ne sont pas influencés par l'ordre des coordonnées généralisées dans le vecteur \mathbf{q} . De plus, puisque les contraintes sont toujours supposées être indépendantes (c.-à-d. $\det (\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{q} \boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{q}^T) \neq 0$), il doit toujours être possible de satisfaire l'équation (3.15) en effectuant un choix judicieux de l'ordre des coordonnées de \mathbf{q} . Si le vecteur \mathbf{q} initialement choisi ne permet pas de satisfaire l'équation (3.15), il peut être modifié en faisant appel au théorème suivant [87] :

Théorème 3.1 Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux matrices carrées et soient leurs formes quadratiques respectives $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ et $\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y}$. Les matrices \mathbf{C} et \mathbf{D} sont dites congruentes et leurs formes quadratiques sont dites équivalentes s'il existe une matrice de permutation \mathbf{P} telle que $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ et $\mathbf{D} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$.

Pour modifier l'ordre des coordonnées dans le vecteur \mathbf{q} , une matrice de permutation $\mathbf{P}_{\mathbf{q}_{\pi_i}}$ est utilisée telle que $\mathbf{q} = \mathbf{P}_{\mathbf{q}_{\pi_i}} \mathbf{q}_{\pi_i}$ où π_i est un indice utilisé pour faire la distinction entre les différentes permutations possibles. Par la suite, la permutation de la matrice hessienne est obtenue comme $\mathbf{H}_{\pi_i} = \mathbf{P}_{\pi_i}^T \mathbf{H} \mathbf{P}_{\pi_i}$ où \mathbf{P}_{π_i} est la matrice de permutation augmentée suivante :

$$\mathbf{P}_{\pi_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_\phi \times n_\phi} & \mathbf{0}_{n_\phi \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n_\phi} & (\mathbf{P}_{\mathbf{q}_{\pi_i}})_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Cette matrice de permutation augmentée est nécessaire puisque la matrice hessienne est calculée à partir du vecteur $[\boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{q}^T]^T$ plutôt qu'à partir de \mathbf{q} seulement. Puisqu'il existe $n!$ permutations possibles de la matrice hessienne, la recherche d'une permutation pour laquelle la condition de l'équation (3.15) est satisfaite peut être onéreuse. Cependant, il existe une méthode simple qui permet d'éviter ce problème dans la plupart des cas. En fait, à partir de la définition de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_i}$ (équation (3.13)), il peut être constaté que si la contrainte géométrique ϕ_j n'est pas fonction d'au moins une des premières $n_\phi + 1$ coordonnées de \mathbf{q} alors la j^{e} ligne de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}}$ sera nulle ce qui implique que les lignes de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}}$ sont linéairement dépendantes et $\det(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}}^T) = 0$. En se basant sur cette observation, le théorème suivant peut être établi :

Théorème 3.2 Pour satisfaire l'équation (3.15), la permutation \mathbf{P}_{π_i} doit être choisie telle que toutes les contraintes géométriques contenues dans $\boldsymbol{\phi}$ soient fonction d'au moins une des $n_\phi + 1$ premières coordonnées du vecteur \mathbf{q}_{π_i} .

Cette condition est nécessaire mais non suffisante pour la satisfaction de l'équation (3.15). Dans le cas où cette condition n'est pas suffisante, une nouvelle matrice de permutation doit être choisie par inspection des équations de contraintes tout en respectant le critère énoncé au Théorème 3.2. L'utilisation d'une permutation de la matrice hessienne pour éviter les problèmes de formulation est illustrée dans ce qui suit à l'aide d'un exemple simple.

À la Figure 3.3, un bloc auquel est attaché un pendule de masse m se déplace sans frottement sur une surface plane. Le bloc est relié à un point fixe par un ressort de raideur K et de longueur libre l_0 . Un repère XY est défini comme étant attaché à

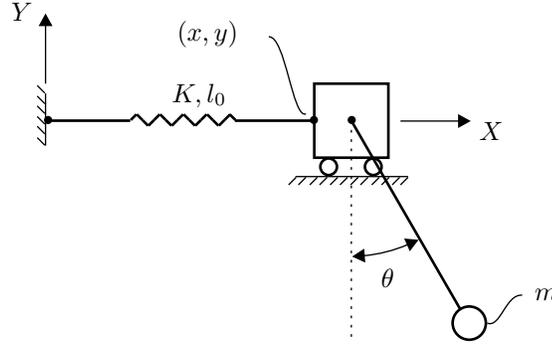


FIG. 3.3 – Exemple d'un système nécessitant une permutation de la matrice hessienne.

ce point fixe et la position du point d'attache du ressort au bloc dans ce repère est représentée par les coordonnées (x, y) . Finalement, l'angle que forme le pendule avec la droite verticale est représenté par θ . La configuration du système, qui n'a que deux degrés de liberté, est représentée ici par le vecteur $\mathbf{q} = [\theta, x, y]^T$. Ce choix (intentionnel) d'un ensemble superflu de coordonnées nécessite l'utilisation de la contrainte géométrique $\phi = y = 0$. Le problème d'optimisation sous contrainte d'égalité consiste alors à minimiser U tout en respectant la contrainte ϕ où :

$$U = \frac{1}{2}K \left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right)^2 - mgL \cos \theta \quad (3.17)$$

À partir des conditions de l'équation (3.6), les deux points critiques de $\eta = U + \lambda\phi$ sont identifiés comme $\mathbf{q}^* = [0 \text{ ou } \pi, l_0, 0]^T$ et $\lambda^* = 0$. De plus, il peut être facilement observé que le point critique pour lequel $\theta = 0$ est celui qui correspond à un minimum stable de U . La matrice hessienne du système calculée à partir de l'équation (3.10) et évaluée à ce point critique s'écrit :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & mgL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Pour un minimum de $\{U \mid \phi = 0\}$, les signes des déterminants des $n - n_\phi = 2$ derniers mineurs principaux croissants de \mathbf{H} doivent être égaux à $(-1)^{n_\phi} = -1$ ($n = 3$ et $n_\phi = 1$). Il peut toutefois être vérifié dans ce cas que $\det \mathbf{H}_2 = 0$ et $\det \mathbf{H}_3 = \det \mathbf{H} = -mgLK$. D'ailleurs, la condition de l'équation (3.15) n'est pas respectée dans ce cas puisque $\Gamma_{\mathbf{q}_{n_\phi+1}} = \Gamma_{\mathbf{q}_2} = [0, 0]$ et $\det(\Gamma_{\mathbf{q}_2} \Gamma_{\mathbf{q}_2}^T) = 0$. Soit maintenant la matrice de permutation suivante qui modifie le vecteur \mathbf{q} tel que $\mathbf{q}_{\pi_1} = [y, \theta, x]^T$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{q}_{\pi_1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La matrice hessienne permutée correspondante est :

$$\mathbf{H}_{\pi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mgL & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Dans ce cas, $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{q}_{\pi_1}} = [1, 0, 0]$ et $\det [(\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{q}_{\pi_1}})_2 (\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{q}_{\pi_1}})_2^T] = 1$ ce qui satisfait l'équation (3.15). Il est également possible d'observer que $\det [(\mathbf{H}_{\pi_1})_2] = -mgL$ et $\det [(\mathbf{H}_{\pi_1})_3] = \det \mathbf{H}_{\pi_1} = -mgLK$. Puisque ces deux déterminants sont toujours négatifs et puisque, selon le Théorème 3.1, les matrices \mathbf{H} et \mathbf{H}_{π_1} sont équivalentes, les conditions requises pour un minimum de $\{U \mid \phi = 0\}$ sont respectées.

La procédure utilisée pour le calcul de la limite maximale du nombre de ressorts dans un système de tenségrité doit être modifiée pour le cas de l'optimisation sous contraintes. Selon les observations faites dans cette section, la vérification s'effectue toujours uniquement pour la configuration de base du système de tenségrité qui est maintenant représentée par \mathbf{q}_0 et $\boldsymbol{\lambda}_0$. Les étapes de la procédure sont les suivantes :

1. Substitution de tous les câbles du système de tenségrité par des ressorts.
2. Vérification de l'équation (3.6) pour \mathbf{q}_0 et $\boldsymbol{\lambda}_0$ (pour confirmer la présence d'un point critique à la configuration de base).
3. Calcul d'une matrice de permutation $\mathbf{P}_{\mathbf{q}_{\pi_i}}$ pour laquelle la condition de l'équation (3.15) est respectée.
4. Calcul de la matrice hessienne permutée du système (\mathbf{H}_{π_i}) évaluée au point critique (c.-à-d. \mathbf{q}_0 et $\boldsymbol{\lambda}_0$) ainsi que des déterminants de ses $n - n_\phi$ derniers mineurs principaux croissants.
 - i. Si les signes de ces déterminants sont tous égaux à $(-1)^{n_\phi}$, le nombre de ressorts dans le mécanisme correspond à la limite maximale (c.-à-d. $n_{R_{\max}}$).
 - ii. Si les signes de ces déterminants ne sont pas tous égaux à $(-1)^{n_\phi}$, l'un des ressorts est remplacé par un câble et le processus recommence à partir de l'étape 2.

À titre d'exemple, l'application de cette procédure au système de tenségrité antiprismatique triangulaire mène à $n_{R_{\max}} = 6$.

3.3.3 Systèmes de tenségrité avec $n_R > n_{R_{\max}}$

À la section précédente, il a été établi que le nombre de ressorts utilisés dans un système de tenségrité ne doit pas dépasser un certain seuil s'il est souhaité que ses configurations de tenségrité soient stables. Cependant, il n'y a eu aucune discussion concernant le comportement de systèmes pour lesquels $n_R > n_{R_{\max}}$. Ce cas spécial fait l'objet de cette section.

Pour débiter, il est utile de rappeler qu'un système de tenségrité a la capacité d'être autocontraint (voir section 2.2). Il est donc possible, dans une configuration de tenségrité, d'introduire une précontrainte dans les composants du système sans nécessiter de réactions externes sur l'environnement. Soit alors un système de tenségrité qui se retrouve dans une configuration de tenségrité (p. ex. la configuration de base) et qui ne contient pas de ressorts. En supposant les câbles et les barres comme étant parfaitement rigides, il peut être conclu que les forces internes dans les composants du système sont nulles et que ce dernier n'est pas précontraint. Si l'un des câbles, de longueur l_1 , est substitué par un ressort de raideur K_1 et de longueur libre nulle, ce dernier aura une force interne $t_1 = K_1 l_1$. En fait, le ressort doit avoir la même longueur que le câble puisque la configuration de tenségrité se retrouve sur la frontière d'assemblage du système (voir section 2.2). Puisque la force interne du ressort doit être équilibrée par des forces internes dans les autres composants du système, ce dernier est maintenant précontraint. Soit maintenant t_2 la force interne de tension qui est introduite dans un des câbles restants et soit l_2 la longueur de ce câble. Si ce câble est remplacé par un ressort de raideur $K_2 = t_2/l_2$, il est clair que l'équilibre du système sera maintenu. Cela demeure vrai si les autres câbles du système sont substitués de la même manière par des ressorts. Il est donc constaté que le système obtenu en remplaçant tous les câbles par des ressorts est en équilibre dans la configuration de tenségrité initiale tant et aussi longtemps que les raideurs des ressorts sont choisies de manière adéquate (ce choix est généralement simple en raison de la symétrie des systèmes). Il reste maintenant à vérifier la nature de cet équilibre. Logiquement, il peut être supposé que l'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle du système puisque c'est le cas pour le même système dans la même configuration lorsque $n_R \leq n_{R_{\max}}$. Toutefois, la preuve de cette hypothèse s'avère une tâche difficile dans plusieurs cas. Les prochains paragraphes traitent du système de tenségrité en forme de X pour lequel la preuve est obtenue de manière analytique. Ensuite, la démonstration de la preuve pour des cas plus complexes sera discutée.

Soit le système de tenségrité en forme de X illustré à la Figure 3.4. Tous les câbles du système ont été remplacés par des ressorts de raideur K et de longueurs libres nulles. De plus, il est supposé que les barres qui lient les paires de nœuds A_1A_3 et A_2A_4 ont des

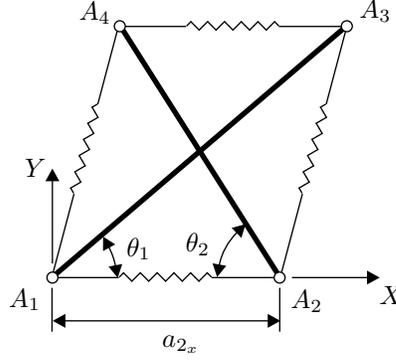


FIG. 3.4 – Système de tenségrité en forme de X avec ressorts.

longueurs variables ρ_1 et ρ_2 , respectivement. La configuration du système est représentée par le vecteur de coordonnées généralisées $\mathbf{q} = [a_{2x}, \theta_1, \theta_2]^T$. Les positions des nœuds A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) s'expriment en fonction de ces coordonnées comme suit :

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{2x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \rho_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 + \rho_2 \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Les longueurs des ressorts peuvent donc être calculées en utilisant l'expression suivante :

$$l_i = \sqrt{(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})} \quad (3.22)$$

où $i + 1 = 1$ lorsque $i = 4$. L'énergie potentielle du système est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} K \sum_{i=1}^4 l_i^2 \quad (3.23)$$

Pour que le système se retrouve dans un équilibre, le gradient de U par rapport à \mathbf{q} doit être nul, soit :

$$\frac{\partial U}{\partial a_{2x}} = 2K(2a_{2x} - \rho_1 \cos \theta_1 - \rho_2 \cos \theta_2) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = K\rho_1 [2a_{2x} \sin \theta_1 - \rho_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = K\rho_2 [2a_{2x} \sin \theta_2 - \rho_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)] = 0 \quad (3.26)$$

La solution de l'équation (3.24) pour a_{2x} donne :

$$a_{2x} = \frac{1}{2}(\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2) \quad (3.27)$$

En substituant ce résultat dans les équations (3.25) et (3.26), on obtient :

$$K\rho_1 \cos \theta_1 (\rho_1 \sin \theta_1 - \rho_2 \sin \theta_2) = 0 \quad (3.28)$$

$$K\rho_2 \cos \theta_2 (\rho_1 \sin \theta_1 - \rho_2 \sin \theta_2) = 0 \quad (3.29)$$

Pour un cas général où $\cos \theta_1$ et $\cos \theta_2$ ne sont pas nuls, il est clair que ces deux conditions sont équivalentes et qu'elles seront satisfaites de manière simultanée lorsque :

$$\theta_2 = \arcsin \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \theta_1 \right) \quad (3.30)$$

Il peut alors être constaté que, dans les cas où les conditions exprimées par les équations (3.27) et (3.30) sont respectées, le système se retrouve à un point critique de U peu importe la valeur de θ_1 . En substituant les équations (3.27) et (3.30) dans l'équation (3.23), on obtient :

$$U = \frac{1}{2}K(\rho_1^2 + \rho_2^2) \quad (3.31)$$

d'où il est clair que, pour des longueurs données des barres, l'énergie potentielle est constante peu importe la valeur de θ_1 . Pour vérifier si cette valeur de l'énergie potentielle constitue un minimum dans l'espace défini par \mathbf{q} , un algorithme génétique a été utilisé pour calculer le minimum global de U pour différentes valeurs de ρ_1 et ρ_2 . Pour chaque cas vérifié, la valeur minimale de U obtenue correspond à celle donnée par l'équation (3.31). Lorsque les conditions exprimées par les équations (3.27) et (3.30) sont respectées, l'énergie potentielle du système est donc à un minimum. De plus, pour toute configuration du système qui satisfait les conditions exprimées par ces équations, il existe des configurations avoisinantes pour lesquelles les conditions sont également satisfaites et dans lesquelles l'énergie potentielle demeure inchangée. En fait, il existe une infinité d'ordre unitaire (∞^1) de telles configurations qui se retrouvent sur la courbe paramétrique donnée par les équations (3.27) et (3.30). Lorsque le système en question se retrouve sur cette courbe, il est possible de le déformer avec un degré de liberté sans devoir lui fournir de l'énergie. Les configurations d'équilibre du système sont alors considérées comme des *minimums instables*. C'est-à-dire que, lorsque le système est déplacé à partir de sa configuration d'équilibre dans une direction qui respecte les conditions exprimées par les équations (3.27) et (3.30), il n'a pas tendance à retourner à son équilibre initial comme ce serait le cas pour un minimum stable.

Étant donné l'objectif de cette thèse d'avoir des configurations d'équilibre discrètes pour des positions données des actionneurs d'un mécanisme de tenségrité, il est choisi d'éviter les systèmes ayant des minimums instables. C'est ainsi que la limite maximale du nombre de ressorts devient pertinente. Toutefois, pour certains types d'applications, cette propriété des systèmes de tenségrité de se déformer sans apport énergétique pourrait s'avérer utile.

Il vient d'être démontré de manière explicite que les configurations d'équilibre du système de tenségrité en forme de X pour lequel $n_R > n_{R_{\max}}$ correspondent à des minimums instables. Pour un système plus complexe, il n'est toutefois pas possible d'effectuer une démonstration de ce genre. Dans ce qui suit, une approche alternative servant à démontrer de manière générale le manque de stabilité des configurations d'équilibre de systèmes de tenségrité avec $n_R > n_{R_{\max}}$ est décrite. Les explications fournies sont développées à partir d'un système de tenségrité pour lequel les configurations sont représentées par un vecteur \mathbf{q} contenant un ensemble non minimal de coordonnées généralisées auxquelles s'ajoutent certaines contraintes géométriques (la démonstration pour le cas où $n = \mathcal{D}_G$ étant plus simple, elle ne sera pas discutée ici). Selon les développements de la section précédente, le système est en équilibre lorsque les conditions de l'équation (3.6) sont satisfaites. De plus, puisqu'il est supposé ici que $n_R > n_{R_{\max}}$, un tel équilibre, représenté par les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}^*$ et \mathbf{q}^* , doit correspondre à un minimum instable de l'énergie potentielle du système (selon l'hypothèse qu'il est souhaité démontrer). Dans un tel cas, il est clair que si le système est légèrement déplacé hors de sa configuration d'équilibre son énergie potentielle ne doit pas diminuer mais peut demeurer constante. Maintenant, selon le modèle mathématique utilisé, la déviation du système par rapport à une configuration d'équilibre donnée peut être représentée par $d\boldsymbol{\lambda}$ et $d\mathbf{q}$. Pour des valeurs données de $d\boldsymbol{\lambda}$ et $d\mathbf{q}$, le changement correspondant de la fonction η est donné par la forme quadratique de l'équation (3.9). S'il est supposé que la déviation du système par rapport à son équilibre s'effectue en respectant les contraintes géométriques alors $\eta = U$. Dans un tel cas, l'existence d'un minimum instable de U implique que $d\eta = dU \geq 0$. L'approche qui est utilisée ici pour prouver l'existence de minimums instables dans les configurations d'équilibre de systèmes de tenségrité généraux pour lesquels $n_R > n_{R_{\max}}$ consiste alors à démontrer que la forme quadratique associée à η est strictement non négative lorsque les contraintes géométriques sont respectées (les développements de la section précédente assurent déjà que cette forme quadratique n'est pas strictement positive).

De manière générale, la preuve qu'une forme quadratique est strictement non négative consiste à démontrer que la matrice hessienne correspondante est strictement semi-définie positive. Par contre, le cas traité ici est un peu spécial puisque les contraintes géométriques limitent l'ensemble des vecteurs $[d\boldsymbol{\lambda}^T, d\mathbf{q}^T]^T$ qui peuvent être considérés dans l'équation (3.9). Quoiqu'il en soit, la présence d'une matrice semi-définie positive n'est pas, de manière générale, une condition suffisante pour assurer l'existence d'un minimum instable. À titre d'exemple, la fonction $x^4 + y^4$ a un minimum stable au point $(x, y) = (0, 0)$ mais les éléments de sa matrice hessienne évaluée à ce point sont tous nuls (ce qui implique que la matrice est semi-définie positive). Pour un système général, une matrice hessienne semi-définie positive est donc une condition nécessaire mais non suffisante pour l'existence d'un minimum instable. Toutefois, comme il sera maintenant

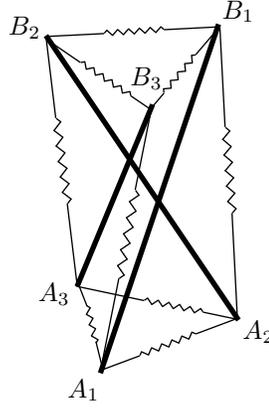


FIG. 3.5 – Système de tenségrité antiprismatique triangulaire avec ressorts.

démonstré, cette condition devient suffisante dans le cas des systèmes de tenségrité.

Tout système de tenségrité consiste en un ensemble de nœuds auxquels se rencontrent des barres, des câbles et des ressorts. Une méthode simple pouvant être utilisée pour la représentation de la configuration d'un système arbitraire consiste à utiliser les coordonnées cartésiennes de ses nœuds mesurées par rapport à un certain repère. Si une telle représentation est choisie, des contraintes géométriques associées aux longueurs des barres et des câbles doivent également être utilisées. Le système de tenségrité antiprismatique triangulaire (voir Figure 2.4(a)) est utilisé ici comme exemple. Lorsque les câbles de ce système sont tous remplacés par des ressorts, l'architecture résultante est celle illustrée à la Figure 3.5. Selon l'approche décrite ci-dessus, la configuration du système est représentée par les vecteurs associés aux positions des nœuds A_i et B_i soient \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i ($i = 1, 2, 3$), respectivement, tel que $\mathbf{q} = [\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T, \mathbf{b}_1^T, \mathbf{b}_2^T, \mathbf{b}_3^T]^T$. Un vecteur de contraintes géométriques associées aux longueurs des barres (L) est défini comme $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]^T$ où :

$$\phi_i = (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i) - L^2 \quad (3.32)$$

De plus l'énergie potentielle du système est :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^9 K_j l_j^2 \quad (3.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} l_j^2 &= (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1}) \quad , \quad j = 1, 2, 3 \\ l_j^2 &= (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{b}_i) \quad , \quad j = 4, 5, 6 \\ l_j^2 &= (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1})^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1}) \quad , \quad j = 7, 8, 9 \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $i + 1 = 1$ si $i = 3$. Il peut alors être constaté que U ainsi que les éléments de ϕ sont des formes quadratiques de \mathbf{q} . Selon la structure de la matrice hessienne donnée à

l'équation (3.10), les termes $\partial^2 U / \partial \mathbf{q}^2$ et $\partial^2 \phi_i / \partial \mathbf{q}^2$ sont alors constants en fonction de \mathbf{q} tandis que $\mathbf{\Gamma}_q$ est linéaire. À partir de ces observations, le théorème suivant peut être établi :

Théorème 3.3 *Soit un système de tenségrité qui se retrouve dans une configuration correspondant à un point critique de η . Si la forme quadratique associée à la matrice hessienne du système, lorsqu'elle est évaluée au point critique tout en imposant la satisfaction des contraintes géométriques, est strictement non négative (c.-à-d. qu'elle n'est pas strictement positive), le point critique correspond à un minimum instable.*

Ce théorème est valide puisque, selon les observations faites ci-dessus, la matrice hessienne est linéaire en terme des vecteurs \mathbf{q} et $\boldsymbol{\lambda}$. Il n'est donc pas possible pour des systèmes de tenségrité d'avoir des minimums stables pour lesquels la forme quadratique n'est pas strictement positive comme c'est le cas pour la fonction $x^4 + y^4$. Pour cette raison, le fait que la forme quadratique associée à la matrice hessienne d'un système de tenségrité soit strictement non négative lorsque les contraintes géométriques sont respectées est une condition nécessaire et suffisante pour prouver l'existence d'un minimum instable de l'énergie potentielle de ce système.

Pour un système avec $n_R > n_{R_{\max}}$ qui se retrouve dans une configuration de tenségrité, l'existence d'un minimum instable est alors établie en vérifiant que la forme quadratique associée à sa matrice hessienne est strictement non négative. Cette vérification sera effectuée ici pour une seule configuration (la configuration de base) et il sera supposé que le résultat peut être généralisé pour toutes les configurations de tenségrité du système. Cette hypothèse peut facilement être vérifiée de manière expérimentale pour une configuration de tenségrité aléatoire.

La tâche consiste maintenant à démontrer que la forme quadratique donnée par l'équation (3.9) est strictement non négative lorsque les contraintes géométriques sont respectées. Puisqu'il est suffisant d'effectuer la vérification dans une région infinitésimale entourant le point critique représenté par $\boldsymbol{\lambda}^*$ et \mathbf{q}^* , $d\boldsymbol{\lambda}$ et $d\mathbf{q}$ peuvent être remplacés par $\delta\boldsymbol{\lambda}$ et $\delta\mathbf{q}$, respectivement. Il va de soit que $d\eta$ peut être remplacé par $\delta\eta$. Pour une déviation à partir de l'équilibre qui est donnée par $\delta\boldsymbol{\lambda}$ et $\delta\mathbf{q}$ et qui respecte les contraintes géométriques, l'existence d'un minimum instable implique donc $\delta\eta \geq 0$. En effectuant les substitutions décrites ci-haut dans l'équation (3.9) et en développant la forme quadratique tout en tenant compte de la forme de la matrice hessienne donnée à l'équation (3.10), on obtient :

$$\delta\eta \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\lambda}^T & \delta\mathbf{q}^T \end{bmatrix} \mathbf{H}(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\lambda} \\ \delta\mathbf{q} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[2\delta\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{\Gamma}_q \delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}^T \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) \delta\mathbf{q} \right] \quad (3.35)$$

Les contraintes géométriques qui s'appliquent sur le système sont données par $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$. Cette relation peut être dérivée par rapport au temps pour obtenir l'expression des contraintes au niveau des vitesses, soit $\boldsymbol{\Gamma}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Pour une déviation infinitésimale du système à partir de sa configuration de base, cette expression peut être réécrite comme suit :

$$\boldsymbol{\Gamma}_q \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

Pour satisfaire les contraintes, la déviation du système par rapport à sa configuration d'équilibre, donnée par $\delta \mathbf{q}$, doit respecter l'équation (3.36). La substitution de ce résultat dans l'équation (3.35) donne :

$$\delta \eta \approx \frac{1}{2} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{H}_0(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{q}^*) \delta \mathbf{q} \quad (3.37)$$

Le vecteur $\delta \mathbf{q}$ apparaissant dans cette expression ne respecte toujours pas nécessairement les contraintes. En fait, il existe par définition un ensemble de n_ϕ éléments superflus parmi les n éléments du vecteur $\delta \mathbf{q}$ ($n_\phi = n - \mathcal{D}_G$). En conséquence, il est théoriquement possible, en utilisant les équations de contraintes (c.-à-d. $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$), de trouver des expressions pour un ensemble de n_ϕ éléments superflus en fonction d'un ensemble de $n - n_\phi$ éléments indépendants. Si une telle approche est utilisée, le respect des contraintes est assuré peu importe les valeurs des éléments indépendants. Cependant, puisque les équations de contraintes ne sont généralement pas linéaires, une telle décomposition des éléments de $\delta \mathbf{q}$ n'est pas possible. Par contre, étant donné que la déviation du système par rapport à sa configuration de tenségrité est supposée être d'ordre infinitésimal, les équations de contraintes au niveau des vitesses (c.-à-d. équation (3.36)), qui elles sont linéaires, peuvent être exploitées. Il est donc possible, dans le voisinage immédiat de la configuration de tenségrité, de projeter le vecteur $\delta \mathbf{q}$ dans un vecteur $\delta \mathbf{q}_C$ de dimension $n - n_\phi$ qui représente la déviation du système avec un ensemble minimal de coordonnées (indépendantes) et qui, de plus, est toujours compatible avec les contraintes. Soit une matrice \mathbf{B} de dimension $n \times (n - n_\phi)$ qui assure la transformation entre les vecteurs $\delta \mathbf{q}$ et $\delta \mathbf{q}_C$ telle que $\delta \mathbf{q} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}_C$. Il est clair que si $\delta \mathbf{q}_C$ est compatible avec les contraintes alors $\delta \mathbf{q} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}_C$ l'est également ce qui implique que $\boldsymbol{\Gamma}_q \mathbf{B} \delta \mathbf{q}_C = \mathbf{0}$. Pour un $\delta \mathbf{q}_C$ arbitraire, il est donc nécessaire pour \mathbf{B} de projeter dans le noyau de $\boldsymbol{\Gamma}_q$. C'est donc dire que \mathbf{B} est un complément orthogonal de $\boldsymbol{\Gamma}_q$. Dans ce qui suit, la matrice \mathbf{B} est calculée à partir de la méthode de la décomposition en valeurs singulières [88, 89]. Selon cette méthode, la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_q$ de dimension $n_\phi \times n$ admet une décomposition de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Gamma}_q = \mathbf{U}_\Gamma \boldsymbol{\Xi}_\Gamma \mathbf{V}_\Gamma^T \quad (3.38)$$

où \mathbf{U}_Γ et \mathbf{V}_Γ sont des matrices orthogonales de dimensions $n_\phi \times n_\phi$ et $n \times n$, respectivement, et $\boldsymbol{\Xi}_\Gamma$ est une matrice diagonale de dimension $n_\phi \times n$ qui contient les valeurs singulières. Si la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_q$ est supposée être de plein rang (cette condition, qui correspond à $\det(\boldsymbol{\Gamma}_q \boldsymbol{\Gamma}_q^T) \neq 0$, a déjà été vérifiée) alors la décomposition peut se réécrire sous

la forme suivante :

$$\Gamma_q = \mathbf{U}_\Gamma \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_\Gamma & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\Gamma_1}^T \\ \mathbf{V}_{\Gamma_2}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_\Gamma \bar{\mathbf{E}}_\Gamma \mathbf{V}_{\Gamma_1}^T \quad (3.39)$$

où $\bar{\mathbf{E}}_\Gamma$ est de dimension $n_\phi \times n_\phi$ et où les matrices \mathbf{V}_{Γ_1} et \mathbf{V}_{Γ_2} correspondent aux n_ϕ premières et aux $n - n_\phi$ dernières colonnes de \mathbf{V}_Γ , respectivement. Puisque \mathbf{V}_Γ est une matrice orthogonale, il en découle que $\mathbf{V}_{\Gamma_1}^T \mathbf{V}_{\Gamma_2} = \mathbf{0}$ ce qui implique que :

$$\Gamma_q \mathbf{V}_{\Gamma_2} = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

Il est donc constaté que \mathbf{V}_{Γ_2} est un complément orthogonal de Γ_q et $\mathbf{B} = \mathbf{V}_{\Gamma_2}$. D'ailleurs, les colonnes de \mathbf{V}_{Γ_2} représentent une base pour le noyau de Γ_q . Ce faisant, la substitution de $\delta \mathbf{q} = \mathbf{V}_{\Gamma_2} \delta \mathbf{q}_C$ dans l'équation (3.37) donne :

$$\delta \eta \approx \frac{1}{2} \delta \mathbf{q}_C^T \mathbf{V}_{\Gamma_2}^T \mathbf{H}_0 \mathbf{V}_{\Gamma_2} \delta \mathbf{q}_C = \frac{1}{2} \delta \mathbf{q}_C^T \mathbf{H}_C \delta \mathbf{q}_C \quad (3.41)$$

où $\mathbf{H}_C = \mathbf{V}_{\Gamma_2}^T \mathbf{H}_0 \mathbf{V}_{\Gamma_2}$ est une matrice carrée de dimension $n - n_\phi$ ce qui correspond au nombre minimal de coordonnées requises pour représenter la configuration du système. En conséquence, la forme quadratique de l'équation (3.41) (et ainsi celle de l'équation (3.9) évaluée en respectant les contraintes) sera strictement non négative lorsque la matrice \mathbf{H}_C est strictement semi-définie positive. Pour une telle situation, il est prouvé que la configuration d'équilibre d'un système de tenségrité correspond à un minimum instable de son énergie potentielle. Numériquement, la nature de \mathbf{H}_C peut être vérifiée en calculant ses valeurs propres. Lorsque les valeurs propres sont toutes positives ou nulles, \mathbf{H}_C sera semi-définie positive [84].

Soit maintenant un système de tenségrité avec $n_R > n_{R_{\max}}$ pour lequel il a été démontré que les configurations d'équilibre correspondent à des minimums instables de l'énergie potentielle. Dans un tel cas, il a été expliqué que le système peut se déplacer dans certaines configurations avoisinantes sans changement à son énergie potentielle. Pour le système de tenségrité en forme de X, ce déplacement peut s'effectuer selon un seul degré de liberté qui peut être représenté par l'angle θ . Il devient maintenant intéressant de déterminer, pour d'autres systèmes de tenségrité, s'il existe un lien entre le degré de liberté de ce déplacement et le nombre de ressorts utilisés.

En se référant à l'équation (3.41), il est connu que dans un minimum instable $\delta \eta \geq 0$. Pour qu'un système de tenségrité puisse se déformer sans apport énergétique, la déformation doit s'effectuer dans une direction définie par $\delta \mathbf{q}_C$ pour laquelle $\delta \eta$ est nul. Cela n'est possible que si $\delta \mathbf{q}_C$ se retrouve dans le noyau de \mathbf{H}_C . La dimension de ce noyau, donnée par :

$$\dim[\mathcal{N}(\mathbf{H}_C)] = n - n_\phi - r_{\mathbf{H}_C} \quad (3.42)$$

où $r_{\mathbf{H}_C} = \text{rang}(\mathbf{H}_C)$, correspond au degré de liberté de la déformation. Une base pour le noyau de \mathbf{H}_C peut être obtenue avec la décomposition en valeurs singulières de la même manière que pour la matrice $\mathbf{\Gamma}_q$ ci-haut. Un système de tenségrité pour lequel $n_R > n_{R_{\max}}$ aura donc une infinité de configurations d'équilibre pour des longueurs données de ses barres et (s'il y a lieu) de ses câbles. De plus, l'ordre de cette infinité correspondra à la dimension du noyau de \mathbf{H}_C . Une analyse de quelques systèmes de tenségrité (système en forme de X, système antiprismatique triangulaire et système antiprismatique triangulaire renforcé) pour lesquels $n_R > n_{R_{\max}}$ permet d'établir la conjecture suivante :

Conjecture 3.2 *Soit un système de tenségrité pour lequel $n_R > n_{R_{\max}}$. Pour un ensemble arbitraire des longueurs de ses barres et de ses câbles, les configurations de tenségrité de ce système correspondent à des minimums instables de son énergie potentielle. De plus, il existe une infinité d'ordre $n_R - n_{R_{\max}}$ (c.-à-d. $\infty^{n_R - n_{R_{\max}}}$) de configurations de tenségrité avoisinantes pour lesquelles l'énergie potentielle demeure inchangée. Le système de tenségrité peut alors être déformé sans apport énergétique avec $n_R - n_{R_{\max}}$ degrés de liberté.*

Il est alors constaté que chaque ressort qui est ajouté à un système de tenségrité au-delà de la limite maximale ($n_{R_{\max}}$) fournit au système un degré de liberté additionnel lui permettant de se déformer sans apport énergétique pour des longueurs données de ses composants.

Suite à la rédaction de ce chapitre, l'auteur a découvert l'existence d'un travail récent portant sur l'équilibrage statique de systèmes de tenségrité [90]. Pour qu'un système soit équilibré statiquement, son énergie potentielle doit être constante pour l'ensemble des configurations d'intérêt. L'objectif du travail en question va donc à l'inverse de ce qui est visé dans cette thèse puisqu'il est souhaité de développer des systèmes qui ont des configurations d'équilibre instables permettant des déformations sans apport énergétique. Quoiqu'il en soit, les résultats et les observations qui s'y retrouvent supportent les développements de la section 3.3.3 de cette thèse.

3.4 Résumé

Dans les prochains chapitres, le développement de mécanismes de tenségrité à partir de systèmes de tenségrité existants est présenté. Les mécanismes en question sont obtenus en ajoutant de l'actionnement aux systèmes et en remplaçant certains de leurs

câbles par des ressorts. Quoiqu'il n'y ait aucune limite qui s'applique au nombre d'actionneurs dans un mécanisme (autre que les limites triviales), certains critères doivent être respectés concernant l'utilisation de ressorts. Le tableau suivant résume certains des paramètres des systèmes qui seront utilisés dans cette thèse ainsi que les critères correspondants qui s'appliquent à l'intégration de ressorts.

TAB. 3.1 – Limites minimale et maximale sur les quantités de ressorts utilisés dans les systèmes de tenségrité.

	n_E	n_C	n_T	$n_{R_{\min}}$	$n_{R_{\max}}$
Système en forme de X	6	2	4	2	3
Système antiprismatique triangulaire	12	3	9	1	6
Système antiprismatique triangulaire renforcé	15	3	12	2	9 ¹

¹Il ne peut y avoir plus de trois ressorts à l'intérieur d'un même sous système de tenségrité en forme de X.

Chapitre 4

Développement et analyse de mécanismes de tensegrité plans

Dans ce chapitre, deux mécanismes de tensegrité plans sont analysés, chacun des mécanismes étant développé à partir du système de tensegrité en forme de X de Snelson (Figure 2.3(b)). L'étude de ces mécanismes permet d'identifier les comportements généraux des mécanismes de tensegrité et de développer des méthodes qui pourront ensuite servir à l'analyse de mécanismes plus complexes. Toutefois, comme on pourra le constater, ces mécanismes possèdent des caractéristiques très intéressantes malgré leur simplicité apparente.

4.1 Mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté

4.1.1 Description du mécanisme

Un schéma du mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté est montré à la Figure 4.1(a). Il consiste de deux composants en compression et de quatre composants en tension. Les composants en compression sont des barres de longueur L qui lient les paires de nœuds A_1A_3 et A_2A_4 . Trois des composants en tension sont des ressorts qui rejoignent les paires de nœuds A_1A_4 , A_2A_3 et A_3A_4 . Les ressorts sont supposés avoir des raideurs K , des longueurs l_i ($i = 1, 2, 3$) et des longueurs libres nulles. Finalement, le quatrième composant en tension correspond à un câble dont la longueur ρ est actionnée

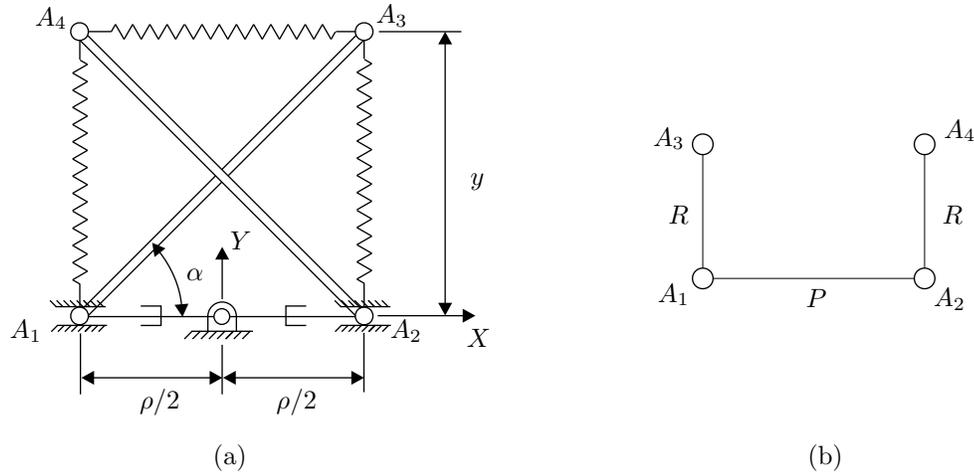


FIG. 4.1 – Mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté : (a) géométrie (b) graphe de mobilité.

par un treuil. Toutes les connexions entre les composants sont effectuées avec des liaisons rotoïdes. De plus, pour éviter l'interférence des barres, il est possible de doubler l'une d'entre elles créant ainsi un espace dans lequel l'autre peut glisser librement.

La mobilité du mécanisme est calculée à partir de l'équation (3.2) en se référant au graphe de mobilité de la Figure 4.1(b). Les ressorts ne sont pas considérés dans cette analyse puisqu'ils ne contraignent pas le mécanisme. De plus, on suppose que le mécanisme est contraint dans son espace ce qui signifie qu'il ne peut pas se déplacer librement en translation ou en rotation sans subir de déformations. À partir du graphe de mobilité et sachant que le mécanisme opère dans le plan, il peut être établi que $d_F = 3$, $n_B = 4$, $n_J = 3$, $\sum \mathcal{D}_i = 3$ et $\mathcal{D}_S = 0$. La substitution de ces paramètres dans l'équation (3.2) donne $\mathcal{D}_G = 3$. Le mécanisme a alors trois degrés de liberté dont un qui est contraint en fixant la longueur du câble. Cela laisse au mécanisme deux degrés de liberté non contraints (c.-à-d. les rotations des barres autour des liaisons rotoïdes des nœuds A_1 et A_2) qui lui permettent de converger vers des configurations de tensegrité. Toutefois, il est supposé dans cet ouvrage que le mécanisme est symétrique. Cela implique que l'angle formé par les nœuds A_2 , A_1 et A_3 , représenté par α , est toujours égal à celui qui est formé par les nœuds A_1 , A_2 et A_4 . Dans le modèle théorique, le mécanisme n'a donc qu'un degré de liberté non contraint. De plus, ce modèle reflète la réalité tant et aussi longtemps que des forces perturbatrices non symétriques ne sont pas appliquées aux nœuds du mécanisme.

Un repère fixe XY est défini comme étant attaché au centre du câble avec son axe X dirigé vers le nœud A_2 . En modifiant la longueur du câble, il est possible de contrôler la coordonnée en Y des nœuds A_3 et A_4 qui, en raison des hypothèses de symétrie,

est la même pour les deux nœuds. La variable d'entrée du mécanisme est ρ tandis que sa variable de sortie est y . La coordonnée y sert également de coordonnée généralisée utilisée pour représenter le degré de liberté non contraint du mécanisme (c.-à-d. $\mathbf{q} = y$). À partir de ρ et de y , les positions des nœuds du mécanisme sont données par les vecteurs suivants :

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -\rho/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \rho/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -\rho/2 + L \cos \alpha \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} \rho/2 - L \cos \alpha \\ y \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ avec $\sin \alpha = y/L$. On suppose que $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ ce qui doit toujours être le cas pour permettre au mécanisme de conserver sa forme générale. Les positions des centres de masse des barres, pour leur part, sont données par :

$$\mathbf{p}_{CG_1} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3}{2}, \quad \mathbf{p}_{CG_2} = \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4}{2} \quad (4.2)$$

De plus, une fois les positions des nœuds connues, les longueurs des ressorts sont facilement obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_4)^T (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_4)} \\ l_2 &= \sqrt{(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^T (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)} \\ l_3 &= \sqrt{(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4)^T (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $l_1 = l_2$ en raison de la symétrie du mécanisme.

4.1.2 Analyse cinématique et statique

Dans les prochains paragraphes, il est supposé qu'aucun chargement externe n'est appliqué sur les nœuds du mécanisme et que celui-ci est toujours en équilibre statique. Pour un tel cas, on souhaite développer des relations entre les variables d'entrée et de sortie du mécanisme et d'exploiter ces relations pour calculer les frontières de son espace atteignable.

4.1.2.1 Problème statique direct

Le problème statique direct consiste à développer une expression pour la variable de sortie du mécanisme en fonction de sa variable d'entrée. Selon la méthode décrite à la section 2.4.2, une telle expression s'obtient à partir d'une minimisation de l'énergie

potentielle qui est emmagasinée dans les ressorts du mécanisme. Cette énergie s'exprime comme suit :

$$U = \frac{1}{2}K \sum_{i=1}^3 l_i^2 = K \left(\frac{3}{2}\rho^2 + 3L^2 - 2y^2 - 4\rho\sqrt{L^2 - y^2} \right) \quad (4.4)$$

Pour une longueur donnée du câble, l'énergie potentielle sera minimale lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{dU}{dy} = \frac{4K(\rho - \sqrt{L^2 - y^2})y}{\sqrt{L^2 - y^2}} = 0 \quad (4.5)$$

À partir de cette expression, il est possible d'identifier les trois points critiques suivants de U :

$$y_1^* = 0 \quad , \quad y_2^* = -\sqrt{L^2 - \rho^2} \quad , \quad y_3^* = \sqrt{L^2 - \rho^2} \quad (4.6)$$

Pour déterminer les points critiques qui correspondent à des minimums de U , la matrice hessienne de U , qui dans ce cas est tout simplement un scalaire, est évaluée comme suit :

$$H = \frac{d^2U}{dy^2} = 4K \left[\frac{\rho L^2}{(L^2 - y^2)^{3/2}} - 1 \right] \quad (4.7)$$

La substitution de y_1^* dans cette expression donne :

$$H_{y=y_1^*} = 4K \left(\frac{\rho}{L} - 1 \right) \quad (4.8)$$

tandis que la substitution de y_2^* ou de y_3^* donne :

$$H_{y=y_2^*} = H_{y=y_3^*} = 4K \left(\frac{L^2}{\rho^2} - 1 \right) \quad (4.9)$$

En supposant que $\rho < L$ (il sera démontré prochainement que cela est toujours le cas), on peut constater que $H_{y=y_1^*} < 0$ ce qui implique que y_1^* est associé à un maximum de U . Au contraire, $H_{y=y_2^*}$ et $H_{y=y_3^*}$ sont toujours positifs ce qui indique qu'ils correspondent à des minimums de U . La configuration associée à y_2^* est une image miroir (réflexion) par rapport à l'axe X de celle qui est associée y_3^* . De plus, pour que le mécanisme puisse passer d'une configuration à l'autre, il doit être démonté. Puisqu'un tel scénario n'est pas envisageable, il est dorénavant supposé que $y \geq 0$ ce qui permet d'obtenir la solution du problème statique direct comme suit :

$$y = \sqrt{L^2 - \rho^2} \quad (4.10)$$

4.1.2.2 Problème statique inverse

La solution au problème statique inverse du mécanisme est tout simplement obtenue en solutionnant l'équation (4.10) pour ρ comme suit :

$$\rho = \sqrt{L^2 - y^2} \quad (4.11)$$

où, pour le moment, $\rho \geq 0$.

4.1.2.3 Configurations singulières

En supposant un régime quasi-statique, il est possible d'établir une relation entre des changements infinitésimaux des variables d'entrée et de sortie du mécanisme (c.-à-d. $\delta\rho$ et δy). Cette relation prend la forme $\delta y = J\delta\rho$ où J est la jacobienne du mécanisme et peut être calculée à partir de l'équation (4.10) comme suit :

$$J = \frac{dy}{d\rho} = -\frac{\rho}{\sqrt{L^2 - \rho^2}} \quad (4.12)$$

Les configurations singulières du mécanisme correspondent à des situations où la transformation entre δy et $\delta\rho$ dégénère. Pour faciliter l'identification de ces configurations, il est préférable de décomposer la jacobienne telle que $E\delta y = F\delta\rho$ avec :

$$E = \sqrt{L^2 - \rho^2} \quad , \quad F = -\rho \quad (4.13)$$

Avec cette formulation, les configurations singulières correspondent aux situations où $E = 0$ ou $F = 0$ ce qui, à partir de l'équation (4.13), se produit lorsque $\rho = 0$ ou $\rho = L$. Lorsque $\rho = 0$, il peut être observé à partir de l'équation (4.10) que $y = L$. Physiquement, ce cas correspond à une situation où les barres sont superposées et verticales. Dans une telle configuration, il n'est pas possible pour le mécanisme de générer des mouvements infinitésimaux des nœuds A_3 et A_4 dans la direction de l'axe Y . Le mécanisme est alors considéré avoir perdu un degré de liberté. Vue autrement, cette configuration singulière permet au mécanisme de résister à des forces externes appliquées aux nœuds A_3 et A_4 dans la direction de l'axe Y sans que ces forces soient ressenties au niveau de son actionneur. Dans la deuxième configuration singulière, qui correspond à $\rho = L$, il peut être constaté que $y = 0$. Dans ce cas tous les composants du mécanisme se retrouvent sur l'axe X . Il est donc possible pour les nœuds A_3 et A_4 de subir des mouvements infinitésimaux dans la direction de l'axe Y sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs. Puisque le mécanisme n'offre aucune résistance à ces mouvements, il est considéré comme ayant acquis un degré de liberté supplémentaire. De plus, dans cette configuration, des forces externes appliquées sur les nœuds A_3 et A_4 dans la direction de l'axe Y ne peuvent pas être reprises par le mécanisme. De manière générale, le comportement d'un mécanisme de tenségrité change lorsque ce dernier se retrouve dans une configuration singulière. Puisque de tels changements influencent habituellement de manière négative la performance du mécanisme, il est généralement souhaitable d'éviter les configurations singulières pendant son opération. Par conséquent, la longueur du câble du mécanisme est limitée à la gamme $0 < \rho < L$.

4.1.2.4 Espace atteignable

L'espace atteignable du mécanisme correspond à la région dans laquelle il peut opérer. Pour le mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté, l'espace atteignable articulaire correspond tout simplement à la gamme $0 < \rho < L$ qui a été établie à la section précédente pendant l'analyse des configurations singulières. L'espace atteignable cartésien, pour sa part, est donné par $0 < y < L$.

4.1.2.5 Forces internes

Puisqu'il est essentiel pour le câble de toujours être soumis à une force de tension, il devient important de calculer les forces internes dans les composants du mécanisme lorsqu'il se retrouve dans une configuration d'équilibre. Cela s'effectue à partir des équations d'équilibre statique évaluées aux nœuds du mécanisme. Il est alors trouvé que pour toutes les configurations dans l'espace atteignable du mécanisme la force de tension dans le câble est $f_\rho = K\rho$ tandis que la force de compression dans les barres (qui est la même pour les deux barres en raison de la symétrie du mécanisme) est $f_b = KL$. Le câble demeure donc en tension lorsque $\rho > 0$ ce qui est toujours le cas dans l'espace atteignable du mécanisme. De plus, la force de compression dans les barres est constante.

4.1.3 Application de chargements externes

Pour conserver la symétrie du mécanisme, il est supposé ici que les chargements externes correspondent à des forces $f_e/2$ appliquées aux nœuds A_3 et A_4 dans la direction de l'axe Y tel qu'il est illustré à la Figure 4.2. Quoiqu'en pratique de telles forces ne seraient assurément pas exactement égales ni parfaitement parallèles à l'axe Y , cela est considéré être vrai ici pour simplifier l'analyse et ainsi permettre le développement de solutions analytiques. Une telle approche est justifiée ici puisque le mécanisme en question est surtout utilisé pour accroître les connaissances dans le domaine des mécanismes de tensegrité.

4.1.3.1 Problème statique direct avec chargements externes

En raison de la présence d'un degré de liberté non contraint dans son architecture, le mécanisme se déforme lorsqu'il est soumis à un chargement externe. Pour calculer

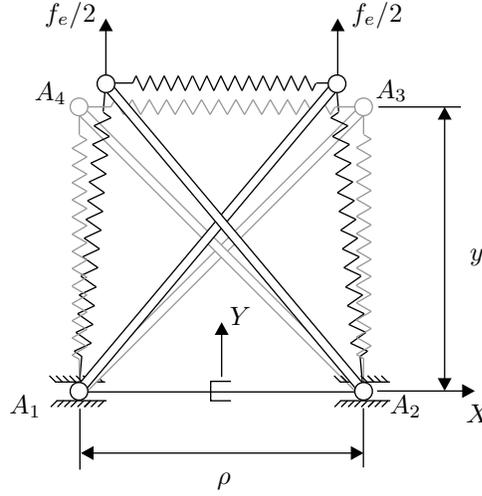


FIG. 4.2 – Mécanisme de tensegrité plan à un degré de liberté soumis à un chargement externe.

la configuration d'équilibre du mécanisme dans un tel cas, une nouvelle fonction est définie comme suit :

$$\mu = U - f_e y \quad (4.14)$$

où $f_e y$ est une fonction potentielle associée à la force externe. L'équilibre du mécanisme est obtenu lorsque la fonction μ est minimale. En substituant l'expression de U donnée à l'équation (4.4) dans l'équation (4.14), en dérivant par rapport à y et en exploitant le fait que $y < L$, l'expression suivante est obtenue :

$$\frac{d\mu}{dy} = E_4 y^4 + E_3 y^3 + E_2 y^2 + E_1 y + E_0 = 0 \quad (4.15)$$

où :

$$\begin{aligned} E_4 &= 16K^2 \\ E_3 &= 8Kf_e \\ E_2 &= 16K^2(\rho^2 - L^2) + f_e^2 \\ E_1 &= -8KL^2f_e \\ E_0 &= -L^2f_e^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Les solutions de ce polynôme, qui correspondent aux points critiques de μ , sont données par l'expression suivante :

$$y = -\frac{E_3}{4E_4} + \frac{1}{12E_4}(\zeta_1\sqrt{F_1} + \zeta_2\sqrt{F_2}) \quad (4.17)$$

où $\zeta_1 = \pm 1$, $\zeta_2 = \pm 1$ et :

$$F_1 = \sqrt{3G_2} \quad (4.18)$$

$$F_2 = \left\{ \frac{6}{G_1^{1/3} G_2^{1/2}} \left[(3E_3^2 - 8E_2E_4)G_1^{1/3}G_2^{1/2} - E_4G_1^{2/3}G_2^{1/2} + (12E_1E_3E_4 - 48E_0E_4^2 - 4E_2^2E_4)G_2^{1/2} - \sqrt{3}(24E_1E_4^2 + 3E_3^3 - 12E_2E_3E_4)G_1^{1/3} \right] \right\}^{1/2} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} G_1 = & -36(E_1E_2E_3 + 8E_0E_2E_4 - 3E_1^2E_4 - 3E_0E_3^2) + 8E_2^3 \\ & + 36(-16E_0E_4^2E_4 - E_1^2E_2^2E_3^2 + 128E_0^2E_2^2E_4^2 + 6E_0E_1^2E_3^2E_4 \\ & + 192E_0^2E_1E_3E_4^2 - 18E_1^3E_2E_3E_4 - 18E_0E_1E_2E_3^3 - 144E_0E_1^2E_2E_4^2 \\ & - 144E_0^2E_2E_3^2E_4 + 4E_1^3E_3^3 - 256E_0^3E_4^3 + 27E_0^2E_3^4 + 4E_1^2E_2^3E_4 \\ & + 4E_0E_2^3E_3^2 + 27E_1^4E_4^2 + 80E_0E_1E_2^2E_3E_4)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$G_2 = \frac{1}{G_1^{1/3}} \left[(3E_3^2 - 8E_2E_4)G_1^{1/3} + 2E_4G_1^{2/3} - 24E_1E_3E_4 + 96E_0E_4^2 + 8E_2^2E_4 \right] \quad (4.21)$$

Dans le but d'identifier les points critiques qui correspondent à des équilibres stables du mécanisme, il est utile ici de faire l'analyse d'un cas spécifique. Les valeurs suivantes sont alors attribuées aux paramètres qui apparaissent dans les coefficients E_i : $K = 10$, $L = \sqrt{2}$, $\rho = 1$ et $f_e = -3$. Les points critiques de μ pour ce cas sont trouvés à partir de l'équation (4.17) comme suit :

$$y_1^{**} = 0.90 \quad , \quad y_2^{**} = 0.27 \quad , \quad y_3^{**} = -1.06 \quad (4.22)$$

La quatrième solution de l'équation (4.15) est une solution parasite qui est générée pendant le développement du polynôme et qui ne correspond pas à un point critique de μ . En fait, la solution parasite appartient à une expression pour U où le signe du terme radical à l'équation (4.4) est positif (ce qui ne peut pas être le cas en pratique). Pendant le développement du polynôme de l'équation (4.15), l'équation (4.14) est élevée au carré ce qui élimine le terme radical mais génère la solution parasite. Les configurations du mécanisme qui sont associées à chacun des points critiques sont illustrées à la Figure 4.3. De plus, les courbes de μ et de f_e en fonction de y sont montrées à la Figure 4.4. À partir de ces figures, les observations suivantes peuvent être faites tout en tenant compte que la configuration d'équilibre du mécanisme avec les mêmes paramètres mais avec une force externe nulle (c.-à-d. $f_e = 0$) correspond à $y = 1$:

$$\square y_1^{**} = 0.90 \quad (\zeta_1 = 1 \text{ et } \zeta_2 = 1)$$

- Le mécanisme est comprimé par la force externe à partir de sa configuration d'équilibre initiale.

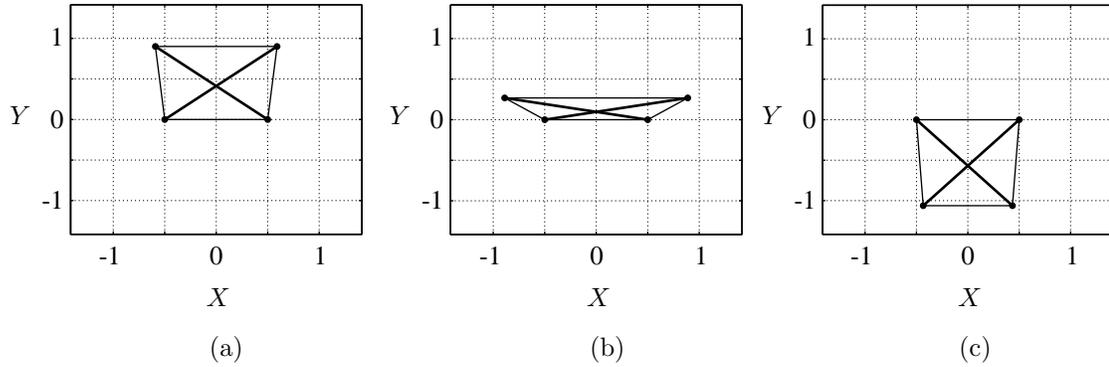


FIG. 4.3 – Configurations associées aux points critiques de μ pour $K = 10$, $L = \sqrt{2}$, $\rho = 1$ et $f_e = -3$: (a) $y_1^{**} = 0.90$ ($\zeta_1 = 1$ et $\zeta_2 = 1$) (b) $y_2^{**} = 0.27$ ($\zeta_1 = 1$ et $\zeta_2 = -1$) (c) $y_3^{**} = -1.06$ ($\zeta_1 = -1$ et $\zeta_2 = -1$).

- Correspond à un minimum stable de μ .
- Correspond à la solution recherchée.

□ $y_2^{**} = 0.27$ ($\zeta_1 = 1$ et $\zeta_2 = -1$)

- Le mécanisme est comprimé par la force externe à partir de sa configuration d'équilibre initiale.
- Correspond à un maximum de μ (c.-à-d. un équilibre instable).
- Si, à partir de cet équilibre, la force externe est réduite telle que $f_e < -3$, le mécanisme converge brusquement vers un nouvel équilibre pour lequel $y < 0$. Ce comportement sera expliqué avec plus de détails dans les prochains paragraphes.

□ $y_3^{**} = -1.06$ ($\zeta_1 = -1$ et $\zeta_2 = -1$)

- Le mécanisme est étiré par la force externe à partir de la configuration d'équilibre initiale pour laquelle $y < 0$ (la configuration qui correspond au point critique y_2^* de la section 4.1.2).
- Correspond à un minimum stable de μ .

Il est noté que la présence d'une force de tension dans le câble doit être vérifiée pour chaque configuration d'équilibre du mécanisme lorsque ce dernier est soumis à une force externe.

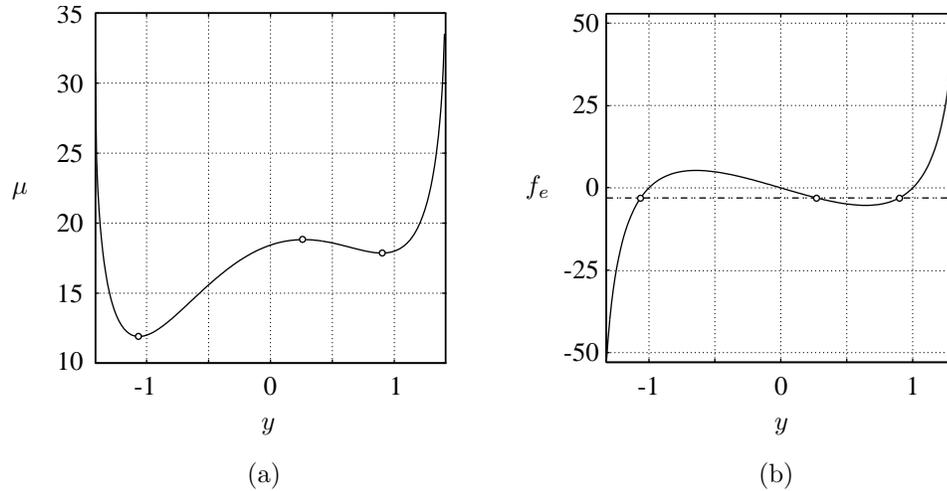


FIG. 4.4 – Courbes de μ et de f_e en fonction de y pour $K = 10$, $L = \sqrt{2}$, $\rho = 1$: (a) μ ($f_e = -3$) (b) f_e .

4.1.3.2 Problème statique inverse avec chargements externes

Pour le cas où il est souhaité de donner au mécanisme une sortie spécifique lorsqu'il est soumis à une force externe f_e , la longueur requise du câble est obtenue à partir de l'équation (4.15) comme suit :

$$\rho = \sqrt{L^2 - y^2} \left(1 + \frac{f_e}{4Ky} \right) \quad (4.23)$$

4.1.3.3 Espace des chargements externes admissibles

Il a été vu que le degré de liberté non contraint du mécanisme lui permet de se déformer lorsque soumis à des forces externes. Il existe toutefois des limites qui s'appliquent aux amplitudes des forces externes auxquelles le mécanisme peut résister. Ces limites sont établies à partir des conditions suivantes :

- Les ressorts et les câbles sont en tension.
- L'application graduelle d'un chargement externe sur le mécanisme le déforme de manière graduelle et stable.

La nécessité de satisfaire la première de ces conditions est évidente puisque la présence dans le mécanisme de câbles ou de ressorts qui ne sont pas en tension peut avoir des

effets néfastes sur son comportement. Puisqu'il est supposé que les ressorts ont des longueurs libres nulles, ils doivent être en tension en tout temps sauf lorsque leurs longueurs sont nulles. En ce qui concerne le câble, le calcul de sa force interne pour une configuration donnée s'effectue à partir des équations d'équilibre statique évaluées aux nœuds du mécanisme. Une fois que la force interne est connue, la vérification de la présence de tension devient triviale. Par contre, pour identifier la limite minimale (maximale) de f_e pour une valeur donnée de ρ , cette vérification doit être répétée pour des valeurs décroissantes (croissantes) de f_e tout en observant l'évolution de la force dans le câble. Si la force externe tend à réduire la tension dans le câble, une limite de f_e est obtenue lorsque cette tension est nulle. Ce processus doit ensuite être répété pour tout l'espace atteignable du mécanisme. Avec cette approche, il est trouvé que des forces externes négatives (c.-à-d. $f_e < 0$) ont tendance à augmenter progressivement la force de tension dans le câble peu importe la valeur de ρ . En ce qui a trait à la présence de tension dans le câble, il n'existe donc pas de borne inférieure pour l'amplitude de la force externe à laquelle le mécanisme peut résister. Par contre, lorsqu'une force externe positive d'amplitude suffisamment élevée est appliquée au mécanisme, ce dernier se déforme jusqu'à ce que les nœuds A_3 et A_4 soient coïncidents. Dans une telle situation, il peut être vérifié que la force dans le câble est nulle. À partir de la géométrie du mécanisme, il est trouvé que la valeur de y qui correspond à cette situation est :

$$y_{\max} = \sqrt{L^2 - \frac{\rho^2}{4}} \quad (4.24)$$

La force externe correspondante, obtenue comme suit :

$$f_{e_{\max}} = \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=y_{\max}} = 2K\sqrt{4L^2 - \rho^2} \quad (4.25)$$

représente la borne supérieure de l'amplitude de la force externe à laquelle le mécanisme peut résister.

Habituellement, lorsque f_e est modifiée de manière graduelle, le mécanisme se déforme également de manière graduelle et stable. En fait, le changement de f_e n'a pour effet que de modifier la position du minimum de μ (équation (4.14)) auquel correspond l'équilibre du mécanisme. Toutefois, dans certaines situations, il est possible pour ce minimum de disparaître ce qui oblige le mécanisme de converger brusquement vers un nouveau minimum de μ . La fonction μ est tracée pour différentes valeurs de f_e à la Figure 4.5(a) pour le cas où $K = 10$, $L = \sqrt{2}$ et $\rho = 1$. À partir de la courbe $f_e = 0$, il est possible d'observer que le minimum dans lequel se retrouve le mécanisme correspond à $y = 1$. Lorsqu'une force externe négative est appliquée au mécanisme, ce minimum se déplace vers des valeurs plus petites de y (c.-à-d. que le mécanisme est comprimé vers le bas). Cela se poursuit jusqu'à ce que $f_e = f_{e_{\min}}$. Lorsque la force externe atteint ce seuil, le minimum dans lequel se trouve le mécanisme se confond avec un maximum de μ pour

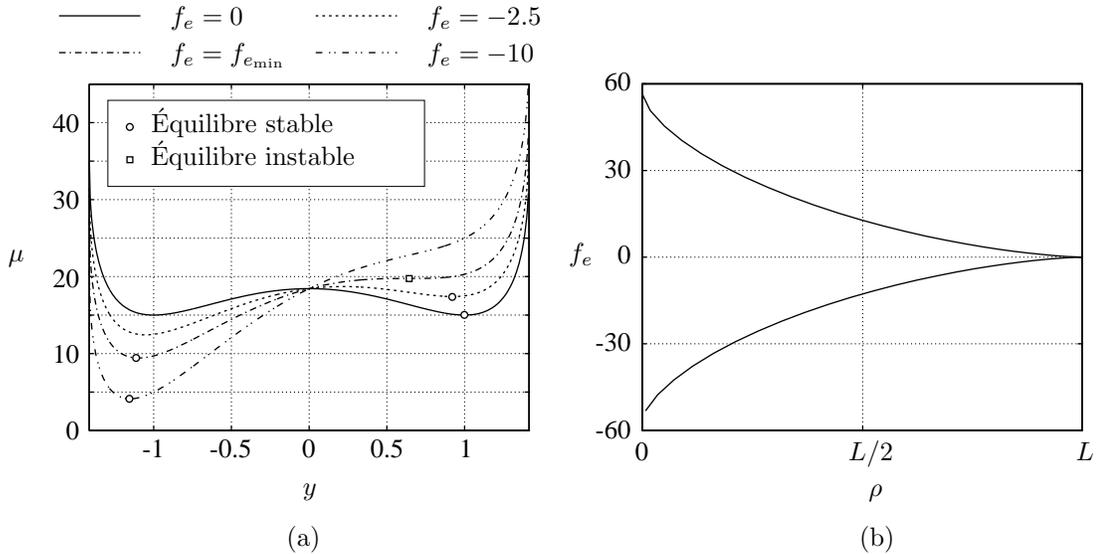


FIG. 4.5 – Identification des catastrophes pour le cas où $K = 10$, $L = \sqrt{2}$ et $\rho = 1$: (a) évolution de la forme de μ pour différentes valeurs de f_e (b) lieux des catastrophes dans l'espace des paramètres ρ et f_e .

généraliser un point d'inflexion. Tant et aussi longtemps que la force externe est égale à $f_{e_{\min}}$, le mécanisme demeure dans un équilibre instable à ce point d'inflexion. Toutefois, aussitôt que $f_e < f_{e_{\min}}$, le mécanisme se déplace brusquement vers un nouveau minimum pour lequel $y < 0$. Physiquement, si les interférences mécaniques du mécanisme l'empêchent de se placer dans des configurations associées à des valeurs négatives de y , il va s'effondrer jusqu'à ce que ces interférences soient atteintes. Il est clair qu'un tel comportement doit être évité pendant l'opération du mécanisme. Par conséquent, $f_{e_{\min}}$ représente une borne inférieure aux forces externes auxquelles peut résister le mécanisme. La tâche consiste maintenant à calculer $f_{e_{\min}}$ en fonction des paramètres du mécanisme.

Selon la théorie des catastrophes [61, 62, 91, 92], le comportement discontinu d'un système suite à des modifications continues (ou graduelles) de ses paramètres correspond à une catastrophe. Le traitement complet des principes de la théorie des catastrophes et des outils qui lui sont associés dépasse l'étendue de cette thèse. Par contre, il est possible de s'inspirer de cette théorie pour le calcul de $f_{e_{\min}}$. En fait, il est souhaité d'identifier la valeur de $f_{e_{\min}}$ pour des valeurs données de K , L et ρ . Lorsque K et L sont supposés être constants, la forme de la courbe de μ en fonction de y dépend seulement de ρ et de f_e . D'après les discussions du paragraphe précédent, il est connu qu'une catastrophe se produit lorsque le minimum auquel est associée la configuration d'équilibre du mécanisme se transforme en un point d'inflexion. Par définition, cette situation se produit lorsque les dérivées première et seconde de μ par rapport à y

s'annulent, soit :

$$\frac{d\mu}{dy} = 4Ky \left(\frac{\rho}{\sqrt{L^2 - y^2}} - 1 \right) - f_e = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2\mu}{dy^2} = 4K \left[\frac{\rho L^2}{(L^2 - y^2)^{3/2}} - 1 \right] = 0 \quad (4.27)$$

L'équation (4.27) peut être solutionnée pour ρ comme suit :

$$\rho = \frac{(L^2 - y^2)^{3/2}}{L^2} \quad (4.28)$$

Ensuite, la substitution de ce résultat dans l'équation (4.26) permet d'obtenir une solution pour la valeur de f_e qui correspond à la catastrophe, soit :

$$f_{e_{\min}} = -\frac{4Ky^3}{L^2} \quad (4.29)$$

Les équations (4.28) et (4.29) définissent une courbe paramétrique dans l'espace (ρ, f_e) qui est illustrée pour $-L \leq y \leq L$ à la Figure 4.5(b). Dans cette figure, la partie supérieure de la courbe (pour laquelle $f_e > 0$) n'a pas besoin d'être considérée puisqu'elle correspond aux valeurs négatives de y . Pour une valeur donnée de ρ , il est alors facile, à partir du graphique, d'obtenir la valeur de f_e pour laquelle l'équilibre du mécanisme devient instable (c.-à-d. $f_{e_{\min}}$). Cette information peut ensuite être utilisée pour éviter les catastrophes pendant l'opération du mécanisme.

Maintenant que la gamme des forces externes pouvant être appliquées au mécanisme a été établie, il est possible de noter que si les forces externes sont limitées à cette gamme alors la solution de l'équation (4.15) qui correspond au minimum stable de μ pour lequel $y > 0$ est obtenue lorsque $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$.

4.1.3.4 Analyse de la raideur

La raideur d'un mécanisme est définie comme sa capacité à résister aux déformations lorsque soumis à des chargements externes. Pour une configuration donnée, la raideur est quantifiée à partir d'une expression qui relie un ensemble de forces perturbatrices aux déformations correspondantes. Pour le mécanisme en question, une expression pour f_e en fonction de y peut facilement être obtenue à partir de l'équation (4.26) comme suit :

$$f_e = 4Ky \left(\frac{\rho}{\sqrt{L^2 - y^2}} - 1 \right) \quad (4.30)$$

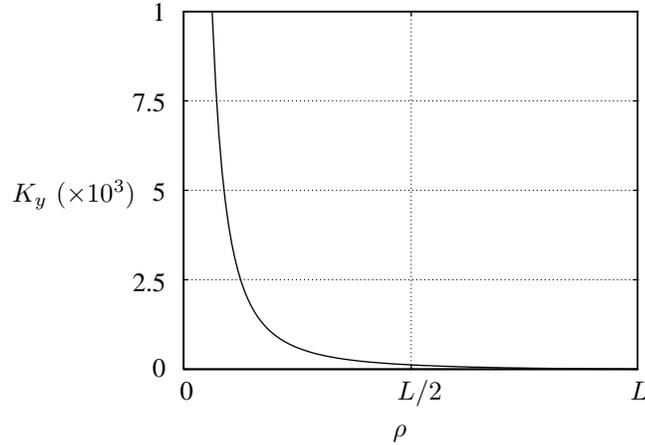


FIG. 4.6 – Raideur du mécanisme en fonction de ρ pour $K = 10$, $L = \sqrt{2}$ et $f_e = 0$.

En dérivant cette expression par rapport à y , une relation du type $\delta f_e = H\delta y$ est obtenue (de manière analogue à l'équation (2.38)) où H est l'hessienne associée à l'énergie potentielle du mécanisme. Puisque l'hessienne est un scalaire dans le cas considéré ici, sa valeur peut être utilisée directement pour quantifier la raideur dans la direction de l'axe Y (K_y) :

$$K_y = H = 4K \left[\frac{\rho L^2}{(L^2 - y^2)^{3/2}} - 1 \right] \quad (4.31)$$

Il est clair à partir de cette équation que la raideur dépend de la configuration du mécanisme telle que définie par ρ et y . De plus, puisque l'application d'une force externe déforme le mécanisme (c.-à-d. que y dépend de f_e), la raideur est également fonction de f_e . Dans cet ouvrage, il est souhaité de faire l'analyse de la raideur pour le cas où aucun chargement externe agit sur le mécanisme. À la section 4.1.2.1, il a été trouvé que $y = \sqrt{L^2 - \rho^2}$ dans ce cas. En substituant ce résultat dans l'équation (4.31), l'expression suivante est obtenue pour K_y en fonction de ρ :

$$K_y = \frac{4K}{\rho^2}(L^2 - \rho^2) \quad (4.32)$$

La courbe de K_y en fonction de ρ peut alors être tracée tel qu'il est illustré à la Figure 4.6. Dans cette figure, il est observé que la raideur diminue de manière monotone pour des valeurs croissantes de ρ . De plus, $K_y \rightarrow \infty$ lorsque $\rho \rightarrow 0$ tandis que $K_y = 0$ lorsque $\rho = L$. Ces cas extrêmes correspondent aux configurations singulières du mécanisme (section 4.1.2.3). En ne considérant que la raideur, il est donc plus avantageux d'opérer dans la section de l'espace atteignable du mécanisme pour laquelle les valeurs de ρ sont plus petites.

4.1.4 Analyse dynamique

Il a été supposé jusqu'ici que le mécanisme se retrouve toujours dans une configuration d'équilibre statique. Lorsque cela est le cas, sa configuration est complètement définie par la position de son actionneur à laquelle est associée une valeur connue de y . Toutefois, lorsque le mécanisme est en mouvement entre deux configurations d'équilibre, les relations qui ont été établies entre ρ et y ne sont plus valides. En fait, la position du degré de liberté non contraint, représentée par y , dépend maintenant à la fois de ρ et des forces inertielles qui sont présentes dans le mécanisme. C'est donc avec l'objectif de déterminer le comportement du mécanisme en mouvement qu'une analyse dynamique est présentée dans cette section.

4.1.4.1 Modélisation

Les hypothèses suivantes sont effectuées dans le cadre du développement du modèle dynamique du mécanisme :

- Chaque barre a une masse m et un moment d'inertie $mL^2/12$ autour d'un axe qui est perpendiculaire au plan XY et qui passe par son centre de masse.
- Les ressorts et le câble ont des masses négligeables.
- Il n'y a pas de frottement dans les liaisons passives et les actionneurs.
- Il n'y a pas d'amortissement dans les ressorts.
- Les débattements angulaires des barres autour des nœuds A_1 et A_2 sont amortis linéairement avec un coefficient c_d .
- Les forces gravitationnelles ne sont pas considérées.

Puisque les variables ρ et y sont nécessaires pour complètement représenter la configuration du mécanisme en mouvement, un nouveau vecteur $\mathbf{u} = [\rho, y]^T$ est introduit pour le développement du modèle dynamique. Ce dernier est obtenu à partir de la formulation lagrangienne qui prend ici la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_q + \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\tau} \quad (4.33)$$

Dans cette expression, l'énergie potentielle du mécanisme a déjà été définie à l'équation (4.4) tandis que son énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^2 \dot{\mathbf{p}}_{CG_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_i} + \frac{1}{12}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (4.34)$$

où $\dot{\alpha} = \dot{y}/\sqrt{L^2 - y^2}$. Le vecteur \mathbf{f}_d , qui correspond aux forces dissipatives des amortisseurs, prend la forme suivante :

$$\mathbf{f}_d = \left[0, -\frac{2c_d\dot{y}}{L^2 - y^2} \right]^T \quad (4.35)$$

Pour sa part, le vecteur \mathbf{f}_q , qui correspond aux forces externes généralisées qui agissent dans les directions définies par les éléments de \mathbf{u} , est donné par $\mathbf{f}_q = [0, f_e]^T$. Finalement, $\boldsymbol{\tau} = f_\rho$ est la force dans l'actionneur et $\boldsymbol{\Lambda} = [1, 0]^T$ est une matrice utilisée pour effectuer la transformation de l'espace des actionneurs à l'espace des coordonnées de \mathbf{u} . En substituant ces expressions dans l'équation (4.33), l'équation de mouvement du mécanisme est obtenue comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\tau} \quad (4.36)$$

où \mathbf{M} est la matrice d'inertie généralisée de dimension $n_u \times n_u$, $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u})$ est le vecteur d'effets non linéaires et de forces dissipatives de dimension $n_u \times 1$ et $\mathbf{g}(\mathbf{u})$, qui est également de dimension $n_u \times 1$, est le vecteur de forces généralisées associées à l'énergie potentielle (n_u correspond à la quantité de coordonnées dans le vecteur \mathbf{u}).

4.1.4.2 Simulation

Il est souhaité ici de simuler le comportement du mécanisme lorsqu'il se déplace d'une configuration d'équilibre à une autre de manière à observer l'effet de son degré de liberté non contraint. Pour cette raison, une trajectoire est définie en imposant directement la position, la vitesse et l'accélération de l'actionneur plutôt qu'en imposant sa force. Dans un tel cas, l'équation de mouvement du mécanisme est modifiée comme suit :

$$\boldsymbol{\Psi} \left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \right] = 0 \quad (4.37)$$

où $\boldsymbol{\Psi} = [0, 1]$ est une matrice qui est utilisée pour éliminer de l'équation de mouvement originale la portion qui correspond à la coordonnée ρ . Dans ce qui suit, un exemple du comportement dynamique du mécanisme est présenté et discuté. Les paramètres du mécanisme utilisés pour l'exemple sont : $m = 2.5$ kg, $L = \sqrt{2}$ m, $K = 1000$ N/m et $c_d = 30$ N · m · s/rad. Il est également supposé qu'il n'y a aucune force externe

qui agit sur le mécanisme (c.-à-d. $f_e = 0$). La trajectoire imposée amène le mécanisme d'une configuration initiale où $y_I = 1$ m à une configuration finale où $y_F = 0.25$ m au temps $t_F = 1$ s. Tel qu'il est mentionné ci-haut, la simulation s'effectue à partir d'une trajectoire dans le domaine articulaire. En utilisant la solution au problème statique inverse du mécanisme pour le cas où $f_e = 0$ (équation (4.11)), les valeurs de ρ qui correspondent au début et à la fin de la trajectoire sont trouvées comme $\rho_I = 1$ m et $\rho_F = \sqrt{31}/4$ m, respectivement. Une trajectoire lisse est alors obtenue pour la position de l'actionneur à partir de l'expression suivante :

$$\rho = \rho_I - \left(\frac{\rho_F - \rho_I}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{t}{t_F} \pi \right) - 1 \right] \quad (4.38)$$

Cette expression est fondée sur une fonction demi sinus versus (*haversine function*) pour laquelle $0 \leq t \leq t_F$. Lorsque $t > t_F$ la trajectoire est tout simplement $\rho = \rho_F$. Les trajectoires correspondantes pour la vitesse et l'accélération de l'actionneur correspondent aux dérivées première et seconde de l'équation (4.38) par rapport au temps. L'évolution de la coordonnée y pendant la simulation est illustrée à la Figure 4.7. Il peut être supposé de manière générale que les paramètres m et K sont choisis pendant la conception du mécanisme à partir de sa taille, de la raideur désirée, des forces internes ainsi que des matériaux utilisés. Le coefficient d'amortissement c_d peut ensuite être choisi de manière à obtenir le comportement souhaité. Il peut être observé à partir de la Figure 4.7 que $y \neq y_F$ lorsque $t = t_F$. Ce comportement est associé à la présence d'un degré de liberté non contraint dans l'architecture du mécanisme. En fait, il n'est pas possible de contrôler de manière explicite la coordonnée y par l'entremise de l'actionneur. Par contre, il serait possible de commander la longueur du câble en fonction de l'erreur sur y de manière à réduire celle-ci. Dans un tel cas, la trajectoire du mécanisme serait plutôt définie dans le domaine cartésien.

4.2 Mécanisme de tenségrité plan à deux degrés de liberté

4.2.1 Description du mécanisme

Un schéma du mécanisme de tenségrité plan à deux degrés de liberté est illustré à la Figure 4.8(a). Comme c'était le cas pour le mécanisme décrit à la section précédente, ce mécanisme consiste de deux composants en compression et de quatre composants en tension. Les composants en compression sont des barres de longueur L qui lient les paires de nœuds A_1A_3 et A_2A_4 . Deux des composants en tension sont des ressorts qui

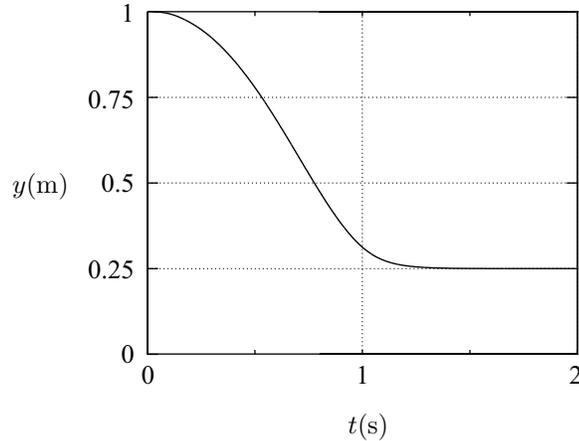


FIG. 4.7 – Coordonnée y de l'effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée.

relient les paires de nœuds A_3A_4 et A_1A_4 . Ces ressorts sont supposés avoir des raideurs K_1 et K_2 , respectivement, et des longueurs libres nulles. Les composants en tension qui relient les paires de nœuds A_1A_2 et A_2A_3 sont des câbles pour lesquels les longueurs, représentées par ρ_1 et ρ_2 , sont actionnées. Encore une fois, toutes les connexions entre les composants sont effectuées avec des liaisons rotoïdes passives et l'interférence entre les barres peut être évitée avec la méthode décrite à la section 4.1.1.

En posant les mêmes hypothèses que celles présentées à la section 4.1.1, la mobilité du mécanisme peut être analysée à partir de l'équation (3.2). En se référant au graphe de mobilité du mécanisme qui est illustré à la Figure 4.8(b), il est trouvé que $d_F = 3$, $n_B = n_J = 6$, $\sum \mathcal{D}_i = 6$ et $\mathcal{D}_S = 0$ ce qui donne $\mathcal{D}_G = 3$. Le mécanisme a alors un total de trois degrés de liberté dont deux sont contraints en fixant les longueurs des câbles. Il reste alors un degré de liberté non contraint au mécanisme lui permettant de se positionner automatiquement dans des configurations de tensegrité. En fait, lorsque les longueurs des câbles sont fixées et en supposant que ces derniers sont en tension, le triangle formé par les nœuds $A_1A_2A_3$ est complètement défini. Le degré de liberté non contraint du mécanisme correspond alors au débattement angulaire de la barre A_2A_4 autour de la liaison rotoïde du nœud A_2 .

Un repère fixe XY est défini comme étant attaché au nœud A_1 avec son axe X dirigé vers le nœud A_2 . Le vecteur des variables d'entrée du mécanisme, qui correspondent aux longueurs des câbles, est $\boldsymbol{\psi} = [\rho_1, \rho_2]^T$. En modifiant les longueurs des câbles, la configuration d'équilibre du mécanisme peut être contrôlée avec deux degrés de liberté qui sont choisis ici comme les coordonnées cartésiennes de la position du nœud A_4 . Les variables de sortie sont alors données par le vecteur $\boldsymbol{p} = [x, y]^T$. La coordonnée généralisée θ , qui correspond à l'angle entre l'horizontale et la barre qui rejoint les nœuds

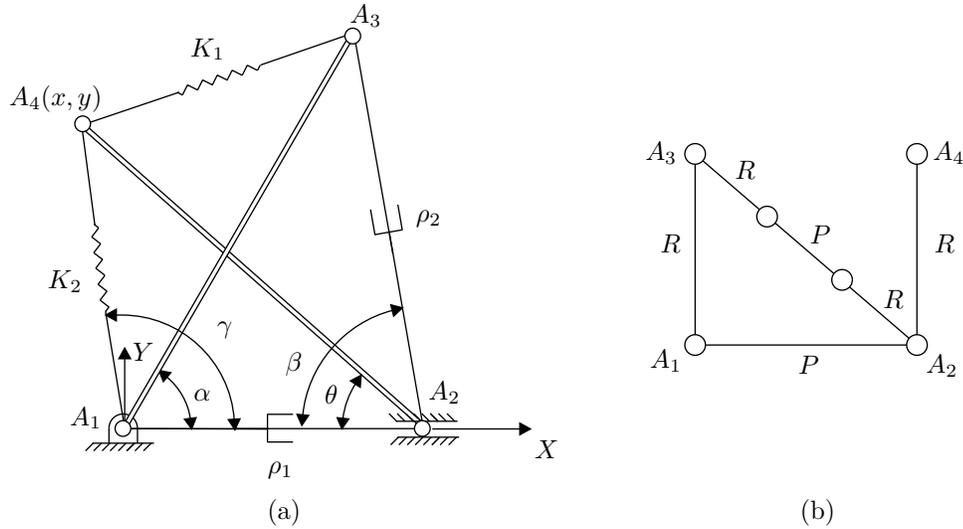


FIG. 4.8 – Mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté : (a) géométrie (b) graphe de mobilité.

A_2 et A_4 , est utilisée pour complètement représenter la configuration du mécanisme (c.-à-d. $\mathbf{q} = \theta$).

À partir de la Figure 4.8(a), l'angle mesuré de l'axe X jusqu'à la barre qui relie les nœuds A_1 et A_3 est représenté par α tandis que l'angle mesuré de l'axe X jusqu'au ressort qui lie les nœuds A_1 et A_4 est représenté par γ . De plus, l'angle mesuré de l'horizontale jusqu'au deuxième câble est représenté par β . Dans cet ouvrage, il est toujours considéré que la coordonnée y du nœud A_4 est positive. Par conséquent, pour conserver la forme générale du mécanisme, il est nécessaire que $0 \leq \alpha, \gamma, \theta, \beta \leq \pi$. De plus, il est supposé pour le moment que $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$. Les cas où l'un ou l'autre des câbles à une longueur nulle seront traités ultérieurement.

Les positions des nœuds A_i peuvent être exprimées en fonction des coordonnées ρ_1 , ρ_2 et θ comme suit :

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \rho_1 - L \cos \theta \\ L \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

où :

$$\cos \alpha = \frac{\rho_1^2 + L^2 - \rho_2^2}{2L\rho_1} \quad (4.40)$$

et $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ en raison de la gamme imposée à α . À partir de ces expressions, les longueurs des ressorts sont :

$$l_1 = \sqrt{(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4)^T (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4)}, \quad l_2 = \sqrt{(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_4)^T (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_4)} \quad (4.41)$$

Finalement, les positions des centres de masse des barres sont données par l'équation (4.2).

4.2.2 Analyse cinématique et statique

4.2.2.1 Problème statique direct

Pour des longueurs fixes des câbles, la configuration d'équilibre du mécanisme en absence de forces externes est trouvée en minimisant l'énergie potentielle emmagasinée dans ses ressorts par rapport à la position du degré de liberté non contraint (θ). L'énergie potentielle est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} K_i l_i^2 \\
 &= \frac{-1}{2\rho_1} \left\{ K_1 L \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + L \left[K_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - L^2) + 2K_2\rho_1^2 \right] \cos \theta - K_1\rho_1(L^2 + \rho_2^2) - K_2\rho_1(L^2 + \rho_1^2) \right\} \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Les points critiques de U sont obtenus à partir de la condition suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{d\theta} &= - \frac{L}{2\rho_1} \left\{ K_1 \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - \left[(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2 \right] \sin \theta \right\} = 0 \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Cette équation peut être manipulée pour obtenir l'expression suivante :

$$\tan \theta = \frac{K_1 \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)}}{(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2} \quad (4.44)$$

d'où une solution unique au problème statique direct est obtenue puisque θ est limité aux deux premiers quadrants du cercle trigonométrique. En substituant la valeur de θ ainsi obtenue dans l'expression du vecteur \mathbf{p} donnée à l'équation (4.39), le problème statique direct est résolu. Il demeure toutefois nécessaire de vérifier que cette solution correspond à un minimum stable de U . Cette vérification sera présentée suite au calcul des frontières de l'espace atteignable du mécanisme.

4.2.2.2 Problème statique inverse

Le problème statique inverse du mécanisme consiste au calcul des longueurs des câbles qui sont requises pour placer le nœud A_4 dans une position définie par \mathbf{p} . À partir de la Figure 4.8(a), l'expression suivante est obtenue :

$$\cos \gamma = \frac{\rho_1^2 + x^2 + y^2 - L^2}{2\rho_1 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.45)$$

La solution de cette équation pour ρ_1 est :

$$\rho_1 = x + \zeta_1 \sqrt{L^2 - y^2} \quad (4.46)$$

où $\zeta_1 = \pm 1$. En général, pour un vecteur \mathbf{p} donné, deux solutions sont alors possibles pour ρ_1 . Il peut être observé à partir de la Figure 4.8(a) que :

$$\cos \theta = \frac{\rho_1^2 + L^2 - x^2 - y^2}{2\rho_1 L} \quad (4.47)$$

De plus, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ en raison de la gamme imposée à l'angle θ . La tangente de θ peut alors être obtenue comme suit :

$$\tan \theta = \frac{\left[4\rho_1^2 L^2 - (x^2 + y^2 - \rho_1^2 - L^2)^2\right]^{1/2}}{\rho_1^2 + L^2 - x^2 - y^2} \quad (4.48)$$

Si cette expression est maintenant combinée avec celle trouvée à l'équation (4.44), l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{-4\rho_1^2(E_2\rho_2^4 + E_1\rho_2^2 + E_0)}{\left[(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2\right]^2 (\rho_1^2 + L^2 - x^2 - y^2)^2} = 0 \quad (4.49)$$

où :

$$\begin{aligned} E_0 &= \left[K_1 K_2 (L - \rho_1)(L + \rho_1) - K_2^2 \rho_1^2 \right] \left[x^2 + y^2 - (L + \rho_1)^2 \right] \left[x^2 + y^2 - (L - \rho_1)^2 \right] \\ &\quad + K_1^2 L^2 (L - \rho_1)^2 (L + \rho_1)^2 \\ E_1 &= -K_1 \left\{ K_2 \left[x^2 + y^2 - (L + \rho_1)^2 \right] \left[x^2 + y^2 - (L - \rho_1)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + K_1 \left[(x^2 + y^2)^2 + \rho_1^4 + 3L^4 - 2(x^2 + y^2)(\rho_1^2 + L^2) \right] \right\} \\ E_2 &= K_1^2 L^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Il sera démontré que les deux expressions apparaissant au dénominateur de l'équation (4.49), soit :

$$(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 = K_1L^2 \quad (4.51)$$

$$\rho_1^2 + L^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (4.52)$$

correspondent à des frontières de l'espace atteignable du mécanisme sur lesquelles ce dernier ne peut pas opérer. Par conséquent, ces expressions ne s'annulent jamais. Pour obtenir une solution pour ρ_2 en fonction de x , y et ρ_1 , il suffit donc de solutionner le polynôme qui apparaît au numérateur de l'équation (4.49). Ce polynôme génère quatre solutions pour ρ_2 pour chacune des valeurs de ρ_1 données par l'équation (4.46), ce qui donne un total de huit solutions. Parmi ces solutions, quatre peuvent être éliminées à partir de la condition $\rho_2 \geq 0$. Les quatre autres solutions sont obtenues comme suit :

$$\rho_2 = \left[\frac{-E_1 + \zeta_2(E_1^2 - 4E_0E_2)^{1/2}}{2E_2} \right]^{1/2} \quad (4.53)$$

où $\zeta_2 = \pm 1$ et où l'équation (4.53) doit être évaluée pour chacune des deux valeurs de ρ_1 . Le problème statique inverse du mécanisme a donc (théoriquement) quatre solutions. Vue autrement, il existe en théorie quatre ensembles des longueurs des actionneurs (c.-à-d. ρ_1 et ρ_2) qui permettent au nœud A_4 de se retrouver à une position donnée par \mathbf{p} . Ces solutions au problème statique inverse, qui seront discutées plus en détail à la section 4.2.2.6, sont connues comme les *modes de fonctionnement* du mécanisme.

4.2.2.3 Configurations singulières

En supposant un régime quasi-statique, il est possible d'établir une relation entre des changements infinitésimaux des variables d'entrée ($\delta\boldsymbol{\psi}$) et de sortie ($\delta\mathbf{p}$). Cette relation prend la forme $\delta\mathbf{p} = \mathbf{J}\delta\boldsymbol{\psi}$ où :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\rho_1 & \partial x/\partial\rho_2 \\ \partial y/\partial\rho_1 & \partial y/\partial\rho_2 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Les éléments de \mathbf{J} peuvent être calculés à partir de l'équation (4.39) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\rho_1} &= 1 + L \sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} \\ \frac{\partial x}{\partial\rho_2} &= L \sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho_1} &= L \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho_2} &= L \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} = \cos^2 \theta \frac{\partial(\tan \theta)}{\partial \rho_i} \quad (4.56)$$

et où le terme $\partial(\tan \theta)/\partial \rho_i$ est calculé à partir de l'équation (4.44). Pour alléger le texte, les éléments de \mathbf{J} ne sont pas présentés ici.

Les configurations singulières du mécanisme correspondent aux situations où la relation entre $\delta \boldsymbol{\psi}$ et $\delta \mathbf{p}$ dégénère. Mathématiquement, cela correspond aux cas où le déterminant de la matrice jacobienne est nul, tend vers l'infini ou est indéterminé. Le déterminant de \mathbf{J} est donné par :

$$\det \mathbf{J} = \frac{F_1}{F_2} \quad (4.57)$$

où :

$$F_1 = 4K_1L \cos^3 \theta \rho_1^2 \rho_2 \left[(K_1 + K_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) - (K_1 - K_2)L^2 \right] \quad (4.58)$$

$$F_2 = \left[(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L) \right]^{1/2} \quad (4.59)$$

$$\left[(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2 \right]^2$$

Il est possible, en observant les équations (4.58) et (4.59), d'extraire les expressions associées aux configurations singulières. Celles-ci sont énumérées dans la liste suivante qui fournit également certaines observations concernant les influences des configurations singulières sur le comportement du mécanisme.

i. $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = L$

- $F_1 = 0$.
- Le nœud A_1 est coïncident avec le nœud A_2 tandis que le nœud A_3 est coïncident avec le nœud A_4 .
- Tous les composants du mécanisme se retrouvent sur une même droite.
- Des rotations finies du mécanisme autour du nœud A_1 (ou de manière équivalente autour du nœud A_2) sont possibles sans changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.
- Le mécanisme ne peut résister à une force externe appliquée au nœud A_4 dans une direction perpendiculaire à la droite définie par les composants.
- Il est impossible de générer des mouvements infinitésimaux du nœud A_4 dans une direction parallèle à la droite définie par les composants.
- Le mécanisme peut résister à une force externe appliquée au nœud A_4 dans une direction parallèle à la droite définie par les composants mais cette force n'est pas ressentie au niveau des actionneurs.

ii. $\rho_2 = 0$ et $\rho_1 = L$

- $F_1 = 0$.
- Le nœud A_1 est coïncident avec le nœud A_4 tandis que le nœud A_2 est coïncident avec le nœud A_3 .
- Tous les composants du mécanisme se retrouvent sur l'axe X .
- Des mouvements infinitésimaux du nœud A_4 dans la direction de l'axe Y sont possibles sans changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.
- Le mécanisme ne peut résister à une force externe appliquée au nœud A_4 dans la direction de l'axe Y .

iii. $\rho_2 = \pm L \pm \rho_1$

- $F_2 = 0$.
- Tous les composants du mécanisme se retrouvent sur l'axe X .
- Des mouvements infinitésimaux du nœud A_4 dans la direction de l'axe Y sont possibles sans changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.
- Le mécanisme ne peut résister à une force externe appliquée au nœud A_4 dans la direction de l'axe Y .

iv. $(K_1 + K_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = (K_1 - K_2)L^2$

- $F_1 = 0$.
- Des mouvements infinitésimaux du nœud A_4 dans une direction perpendiculaire à une certaine courbe du domaine cartésien ne peuvent pas être générés. Cette courbe sera présentée en détail ultérieurement.

v. $(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 = K_1L^2$ et $\cos \theta = 0$

- $F_1 = F_2 = 0$.
- La barre qui rejoint les nœuds A_2 et A_4 est parallèle à l'axe Y .
- Des mouvements infinitésimaux du nœud A_4 dans la direction de l'axe Y ne peuvent pas être générés.
- Le mécanisme peut résister à une force infinie externe appliquée au nœud A_4 dans une direction parallèle à l'axe Y mais cette force n'est pas ressentie au niveau des actionneurs.

4.2.2.4 Espace atteignable articulaire

Les configurations singulières décrites ci-haut correspondent à des courbes ou à des points dans l'espace articulaire. Pour un ensemble connu des paramètres du mécanisme, il est possible de représenter graphiquement ces entités géométriques. De plus, à partir de cette représentation, les frontières de l'espace atteignable articulaire peuvent être identifiées. Un exemple de cela est illustré à la Figure 4.9(a) pour le cas où $K_1 = 1000$, $K_2 = 200$ et $L = \sqrt{2}$. Dans cette figure, chaque courbe est étiquetée selon la configuration singulière à laquelle elle est associée. Il peut toutefois être constaté que la courbe vi et le point vii n'ont pas de configurations singulières correspondantes. En fait, ces entités géométriques sont obtenues à partir de la condition stipulant que les câbles et les ressorts doivent être chargés en tension. Puisque cette condition n'est pas considérée pendant la solution du problème statique direct du mécanisme, il va de soit que les entités géométriques correspondantes ne se retrouvent pas parmi les configurations singulières. Il peut être démontré géométriquement que les câbles sont toujours en tension lorsque le mécanisme conserve sa forme générale où les nœuds A_i , dans l'ordre montré à la Figure 4.8(a), forment un quadrilatère convexe. Cela n'est toutefois plus le cas lorsque $\alpha = \gamma$. En raison des gammes imposées à ces angles, cette condition peut être écrite comme $\cos \alpha = \cos \gamma$. En se référant à la Figure 4.8(a), l'équation suivante est alors obtenue :

$$\cos \alpha = \frac{\rho_1^2 + L^2 - \rho_2^2}{2\rho_1 L} = \frac{\rho_1^2 + l_2^2 - L^2}{2\rho_1 l_2} = \cos \gamma \quad (4.60)$$

Lorsque $\alpha = \gamma$, le nœud A_4 ainsi que les deux ressorts se retrouvent sur une droite passant par les nœuds A_1 et A_3 . Dans une telle situation, le mécanisme est en équilibre statique lorsque :

$$K_1 l_1 = K_2 l_2 \quad (4.61)$$

En combinant cette condition avec la nécessité que $l_1 + l_2 = L$, la longueur l_2 est obtenue comme suit :

$$l_2 = \frac{K_1 L}{K_1 + K_2} \quad (4.62)$$

La substitution de ce résultat dans le numérateur de l'équation (4.60) mène à l'expression suivante :

$$\frac{K_2(K_1 + K_2)}{L^2 [K_1 K_2 + (K_1 + K_2)^2]} \rho_1^2 + \frac{K_1(K_1 + K_2)}{L^2 [K_1 K_2 + (K_1 + K_2)^2]} \rho_2^2 = 1 \quad (4.63)$$

qui correspond à l'ellipse auquel appartient la courbe vi de la Figure 4.9(a). Parmi les configurations du mécanisme où il y a un changement de sa forme générale (qui mène à une perte de tension dans les câbles) celles qui peuvent se produire en absence de chargements externes sont prises en considération par l'entremise des entités géométriques i à vi . Pour sa part, le point vii se retrouve sur la droite $\rho_1 + \rho_2 = L$ sur laquelle la barre

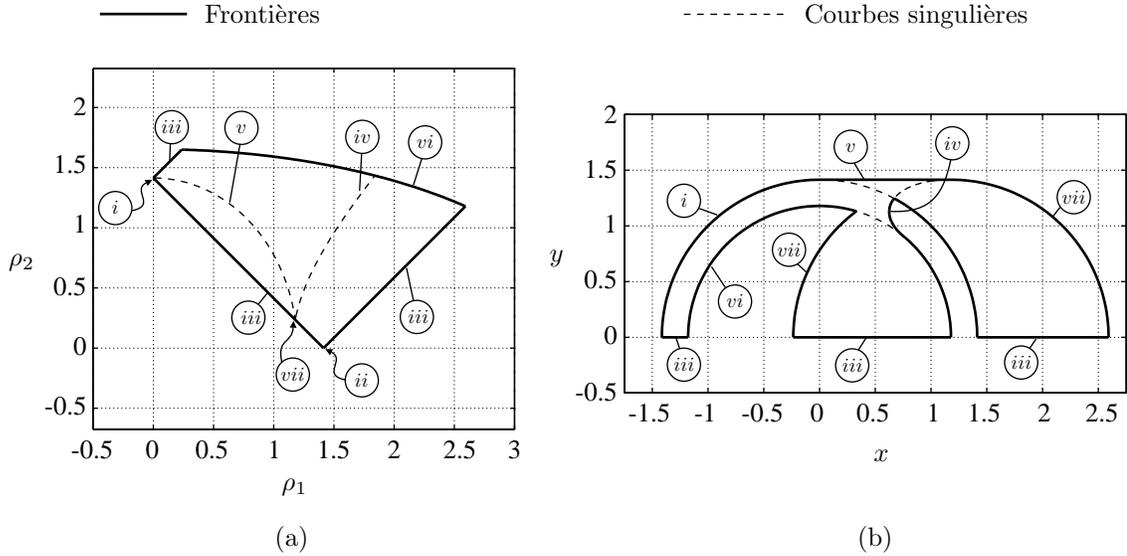


FIG. 4.9 – Espaces atteignables du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté pour $K_1 = 1000$, $K_2 = 200$ et $L = \sqrt{2}$: (a) espace atteignable articulaire (b) espace atteignable cartésien.

qui relie les nœuds A_1 et A_3 est alignée avec l'axe X (c.-à-d. la configuration singulière iii). Lorsque :

$$\rho_1 = \frac{K_1 L}{K_1 + K_2} \quad , \quad \rho_2 = \frac{K_2 L}{K_1 + K_2} \quad (4.64)$$

ce qui correspond au point vii , il peut toutefois être démontré que l'énergie potentielle du mécanisme ne dépend plus de θ . Le point vii est donc considéré de manière indépendante puisqu'il représente un cas particulier ayant des répercussions importantes sur l'espace atteignable cartésien du mécanisme.

4.2.2.5 Espace atteignable cartésien

Pour générer les frontières de l'espace atteignable cartésien, les entités géométriques qui ont été définies dans le domaine articulaire doivent maintenant être transformées au domaine cartésien. Cette tâche est décrite dans ce qui suit.

- i.* La substitution de $\rho_1 = 0$ dans l'équation (4.39) donne $x = -L \cos \theta$ et $y = L \sin \theta$. La combinaison de ces expressions permet d'obtenir :

$$x^2 + y^2 = L^2 \quad (4.65)$$

- ii.* En substituant $\rho_1 = L$ et $\rho_2 = 0$ dans l'équation (4.44), il est trouvé que $\tan \theta = 0$. De plus, l'équation (4.39) évaluée à ces valeurs de ρ_1 et ρ_2 mène à $x = L(1 - \cos \theta)$

et $y = L \sin \theta$. Il est clair que puisque la combinaison de ces deux expressions donne $\tan \theta = y/(L - x)$ alors :

$$y = 0 \quad (4.66)$$

iii. Il peut être observé que $\tan \theta = 0$ lorsque le mécanisme se retrouve sur les droites singulières $\rho_2 = \pm L \pm \rho_1$ (voir équation (4.44)). De plus, à partir des expressions pour x et y (équation (4.39)) il est vu que $\tan \theta = y/(\rho_1 - x)$. Il en résulte que :

$$y = 0 \quad (4.67)$$

iv. La solution de l'expression de la courbe singulière *iv* pour ρ_2^2 est :

$$\rho_2^2 = \frac{(K_1 + K_2)\rho_1^2 - (K_1 - K_2)L^2}{K_1 + K_2} \quad (4.68)$$

De plus, il est connu à partir des équations (4.39) et (4.44) que :

$$\frac{y}{\rho_1 - x} = \frac{K_1 \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)}}{(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2} \quad (4.69)$$

En élevant au carré les deux côtés de cette équation, en substituant la solution obtenue ci-haut pour ρ_2^2 ainsi que la solution pour ρ_1 donnée à l'équation (4.46) et en effectuant quelques manipulations, la courbe singulière *iv* exprimée dans le domaine cartésien est obtenue comme suit :

$$(K_1 + K_2)^2(y^4 + x^2y^2 - L^2y^2) - 2L^2K_1(K_1 + K_2)xy + K_1^2L^4 = 0 \quad (4.70)$$

v. Il peut facilement être vérifié que l'expression de la courbe singulière *v* dans le domaine articulaire apparaît au dénominateur de $\tan \theta$ (équation (4.44)). Il en résulte que $\tan \theta \rightarrow \infty$ et :

$$y = L \quad (4.71)$$

vi. Lorsque $\cos \alpha = \cos \gamma$, le nœud A_4 se retrouve sur la barre A_1A_3 à une distance l_2 du nœud A_1 (ou, de manière équivalente, de l'origine du repère XY). Puisqu'il a déjà été démontré que $l_2 = K_1L/(K_1 + K_2)$ dans cette situation, il est possible de déduire que la courbe correspondante dans le domaine cartésien s'exprime comme suit :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{K_1L}{K_1 + K_2} \right)^2 \quad (4.72)$$

vii. La substitution de $\rho_1 = K_1L/(K_1 + K_2)$ dans l'équation (4.39) mène à :

$$x = \frac{K_1L}{K_1 + K_2} - L \cos \theta \quad , \quad y = L \sin \theta \quad (4.73)$$

La combinaison de ces deux équations pour éliminer θ permet de trouver l'expression suivante :

$$\left(x - \frac{K_1L}{K_1 + K_2} \right)^2 + y^2 = L^2 \quad (4.74)$$

À la Figure 4.9(b), l'espace atteignable cartésien du mécanisme est illustré pour le cas où $K_1 = 1000$, $K_2 = 200$ et $L = \sqrt{2}$. Il peut être constaté que la forme de cet espace est un peu inhabituelle. Dans cette thèse, le mécanisme faisant l'objet de cette section est le seul pour lequel la forme de l'espace atteignable est influencée par le choix des paramètres géométriques. Cela s'explique en observant que les raideurs des ressorts ne sont pas forcément égales. Il est alors intéressant d'étudier l'évolution de la forme des espaces atteignables articulaire et cartésien du mécanisme en fonction du ratio $\varsigma = K_2/K_1$. L'effet de ce ratio sur les espaces est montré à la Figure 4.10. Finalement, il est noté que le mécanisme gagne un degré de liberté lorsqu'il se retrouve sur les frontières associées aux entités géométriques *i*, *ii*, *iii* et *vii*. Puisque ce gain de mobilité complique de manière considérable la commande du mécanisme, ces frontières ne sont pas considérées comme faisant partie de l'espace atteignable.

4.2.2.6 Modes de fonctionnement

Il a déjà été démontré que le problème statique inverse du mécanisme a en théorie quatre solutions (c.-à-d. quatre ensembles des longueurs des câbles qui génèrent la même position du nœud A_4). Toutefois, en pratique, la quantité de modes de fonctionnement (c.-à-d. les solutions réelles du problème statique inverse) sera souvent inférieure à quatre. De plus, cette quantité varie d'une région à une autre de l'espace atteignable cartésien du mécanisme. Chaque mode de fonctionnement du mécanisme est associé à une région spécifique de son espace atteignable articulaire. Dans les prochains paragraphes, ces régions sont identifiées et leurs régions correspondantes dans l'espace atteignable cartésien sont identifiées.

La solution du problème statique inverse comprend deux parties, soit les équations (4.46) et (4.53). À partir de ces équations, il est constaté qu'une rencontre de deux solutions du problème statique inverse se produit lorsque l'équation (4.46) génère une valeur unique pour ρ_1 ou lorsque l'équation (4.53) génère une valeur unique pour ρ_2 . En observant l'équation (4.46), il est constaté qu'une solution unique pour ρ_1 est obtenue lorsque $y = L$ ou, de manière équivalente, lorsque le mécanisme se retrouve à la configuration singulière *v*. Pour sa part, l'équation (4.53) mène à une seule solution pour ρ_2 lorsque le discriminant du polynôme apparaissant au numérateur de l'équation (4.49) est nul, soit lorsque :

$$E_1^2 - 4E_0E_2 = 0 \quad (4.75)$$

Quoique cela ne soit pas démontré ici, il est possible de manipuler cette expression de manière à retrouver l'équation de la courbe singulière *iv* exprimée dans le domaine articulaire. Les régions de l'espace atteignable articulaire associées aux différents modes de

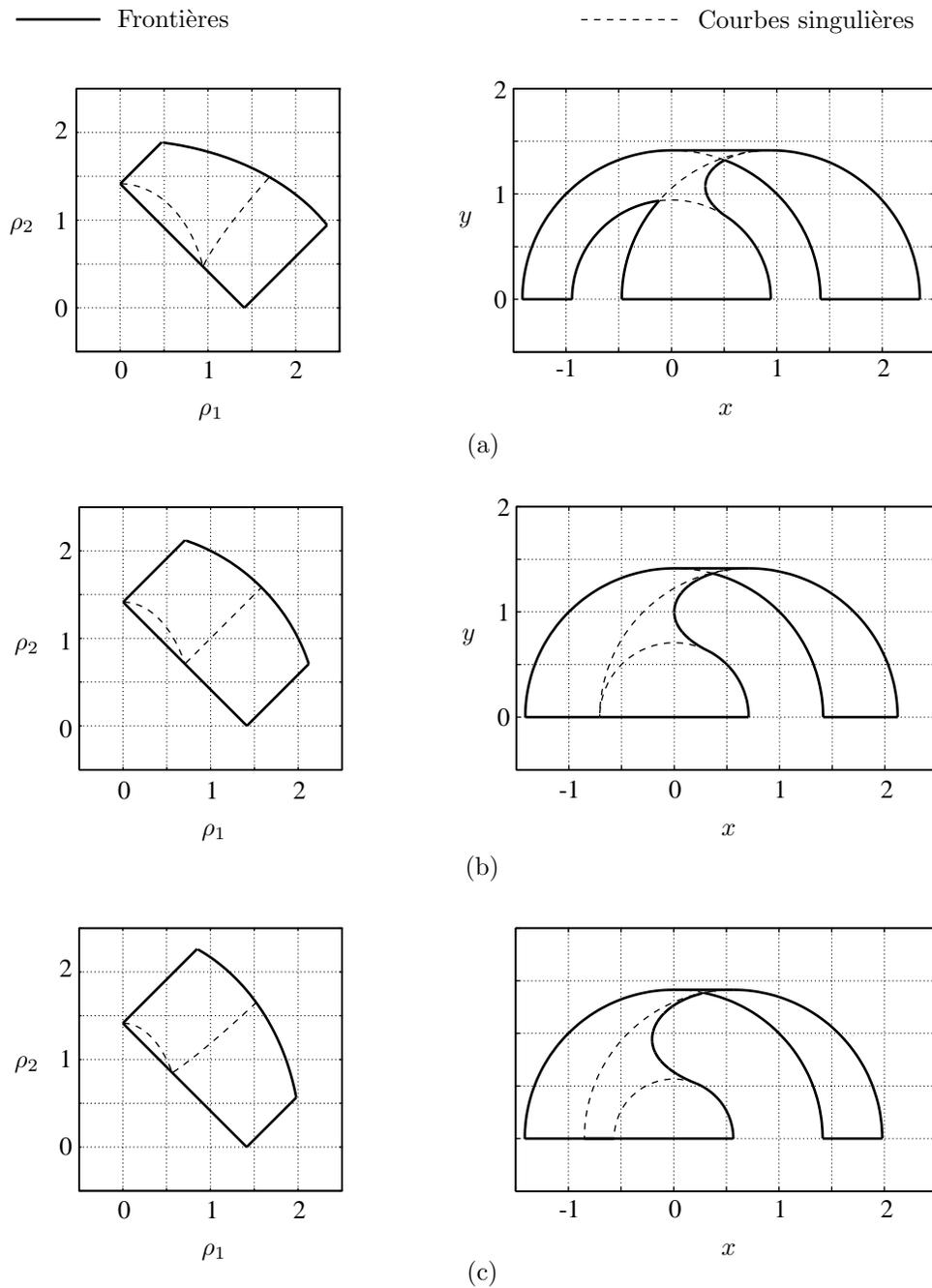


FIG. 4.10 – Espaces atteignables articulaire et cartésien du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté : (a) $\zeta = 0.5$ (b) $\zeta = 1$ (c) $\zeta = 1.5$.

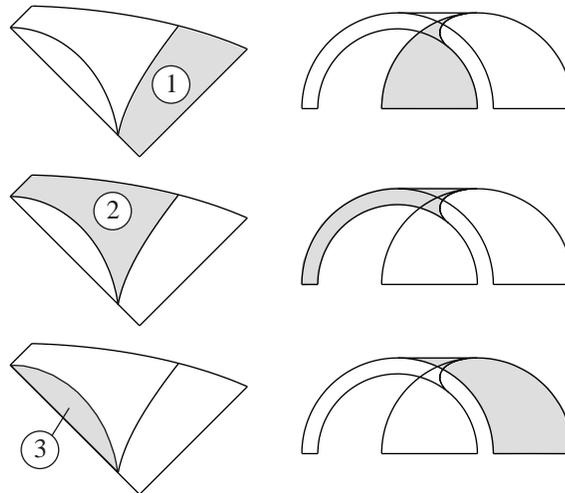


FIG. 4.11 – Correspondance des régions associées aux modes de fonctionnement dans les espaces atteignables articulaire et cartésien pour le cas où $\varsigma = 0.2$.

fonctionnement sont alors délimitées par les configurations singulières iv et v . L'espace atteignable articulaire du mécanisme peut alors être divisé en trois régions tel qu'il est illustré à la Figure 4.11.

Dans le but de déterminer la distribution des modes de fonctionnement dans le domaine cartésien, une approche graphique est utilisée qui consiste à projeter numériquement les trois régions de l'espace atteignable articulaire à leurs régions correspondantes dans l'espace cartésien. Cette projection est illustrée à la Figure 4.11. À partir de cette figure, il est observé que les régions de l'espace atteignable cartésien associées aux différents modes de fonctionnement se chevauchent. Dans les régions où il y a un chevauchement, il existe plus d'une solution au problème statique inverse du mécanisme. À la Figure 4.12, les régions de l'espace atteignable cartésien qui ont des quantités de modes de fonctionnement différentes sont illustrées. Il peut alors être constaté que le nombre maximum de modes de fonctionnement dans une même région est trois malgré l'existence de quatre solutions théoriques au problème statique inverse. Finalement, en observant la forme de l'espace atteignable articulaire, il peut être noté que le point vii , qui appartient à la fois aux courbes singulières iv et v , correspond à la rencontre de trois modes de fonctionnement.

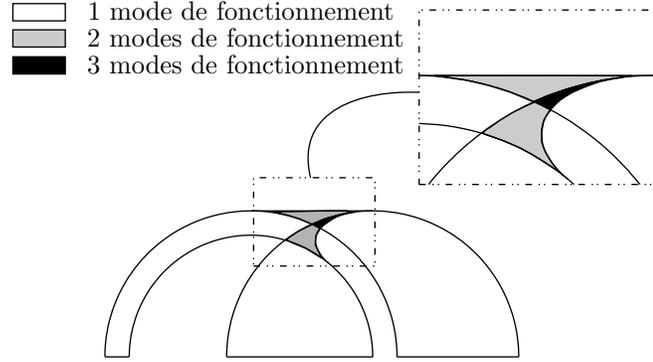


FIG. 4.12 – Quantités de modes de fonctionnement dans les différentes régions de l'espace atteignable cartésien pour le cas où $\varsigma = 0.2$.

4.2.2.7 Stabilité

Pendant le calcul de la solution au problème statique direct du mécanisme, il n'a pas été vérifié que l'équation (4.44) correspond toujours à un minimum de l'énergie potentielle. Pour que cela soit le cas, la condition suivante doit être satisfaite partout dans l'espace atteignable du mécanisme :

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{L}{2\rho_1} \left\{ \left[(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2 \right] \cos \theta + K_1 \sin \theta \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \right\} > 0 \quad (4.76)$$

Si le mécanisme est supposé demeurer à l'intérieur de son espace atteignable sans toucher ses frontières, alors $\rho_1 > 0$ et $\sin \theta \neq 0$. En tenant compte de ces constats, il est possible de manipuler l'équation (4.76) de manière à obtenir la condition équivalente suivante :

$$\left[(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2 \right] / \tan \theta + K_1 \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} > 0 \quad (4.77)$$

En exploitant le résultat de l'équation (4.44), l'équation (4.77) peut alors être réécrite comme suit :

$$\frac{-4\rho_1^2 \left[K_1K_2L^2 - (K_2^2 + K_1K_2)\rho_1^2 - (K_1^2 + K_1K_2)\rho_2^2 \right]}{K_1 \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)}} > 0 \quad (4.78)$$

Il peut facilement être observé que le dénominateur de cette expression correspond à la courbe singulière *iii* qui ne fait pas partie de l'espace atteignable du mécanisme.

Sachant que $\rho_1 > 0$, la condition pour la stabilité de la solution au problème statique direct devient alors :

$$K_1 K_2 L^2 - (K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 - (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 < 0 \quad (4.79)$$

Ce qui signifie que l'ellipse suivante doit se retrouver complètement à l'extérieur de l'espace atteignable articulaire du mécanisme :

$$\left(\frac{K_2^2 + K_1 K_2}{K_1 K_2 L^2} \right) \rho_1^2 + \left(\frac{K_1^2 + K_1 K_2}{K_1 K_2 L^2} \right) \rho_2^2 = 1 \quad (4.80)$$

Puisque cette ellipse est centrée à l'origine de l'espace articulaire, elle ne peut se retrouver dans l'espace atteignable que si elle croise la droite $\rho_2 = -\rho_1 + L$ à deux reprises (voir la Figure 4.9(a)). La substitution de l'équation de la droite dans celle de l'ellipse donne :

$$\frac{\left[K_1 L - (K_1 + K_2) \rho_1 \right]^2}{K_1 K_2 L^2} = 0 \quad (4.81)$$

Il peut alors être constaté que cette dernière équation n'est satisfaite que si $\rho_j = K_j L / (K_1 + K_2)$ où $j = 1, 2$ ce qui correspond au point singulier *vii*. Puisqu'il n'y a qu'une intersection entre la droite et l'ellipse, il peut être conclu que l'ellipse ne pénètre pas dans l'espace atteignable du mécanisme. Par conséquent, la solution au problème statique direct correspond toujours à un minimum stable de l'énergie potentielle du mécanisme.

4.2.2.8 Forces internes

Les forces internes dans les composants du mécanisme lorsqu'il se retrouve dans une configuration d'équilibre peuvent être calculées à partir des équations d'équilibre statique évaluées à ses nœuds. De cette manière, les forces dans les barres sont trouvées comme suit :

$$f_{b_1} = \frac{K_1 K_2 L^2}{\sqrt{(K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 + (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 - K_1 K_2 L^2}} \quad (4.82)$$

$$f_{b_2} = (K_1 + K_2) L - \sqrt{(K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 + (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 - K_1 K_2 L^2} \quad (4.83)$$

tandis que les forces dans les câbles sont :

$$f_{\rho_1} = \frac{K_2 \rho_1 \left[(K_1 + K_2) L - \sqrt{(K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 + (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 - K_1 K_2 L^2} \right]}{\sqrt{(K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 + (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 - K_1 K_2 L^2}} \quad (4.84)$$

$$f_{\rho_2} = \frac{K_1 \rho_2 \left[(K_1 + K_2) L - \sqrt{(K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 + (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 - K_1 K_2 L^2} \right]}{\sqrt{(K_2^2 + K_1 K_2) \rho_1^2 + (K_1^2 + K_1 K_2) \rho_2^2 - K_1 K_2 L^2}} \quad (4.85)$$

où une force positive dans une barre (un câble) correspond à une force de compression (de tension). Dans ces expressions, le terme qui apparaît dans les radicaux correspond à l'ellipse de l'équation (4.80). Puisque cette ellipse se retrouve complètement à l'extérieur de l'espace atteignable du mécanisme, les expressions données ci-haut génèrent toujours des valeurs réelles pour les forces internes. Il peut également être observé, d'une part, que $f_{b_1} > 0$ en tout temps et, d'autre part, que si $f_{b_2} > 0$ alors $f_{\rho_1} > 0$ et $f_{\rho_2} > 0$ (en supposant $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$ ce qui est le cas à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme). Lorsque le mécanisme se retrouve dans une configuration de référence pour laquelle $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2}/2L$, la force dans la deuxième barre est :

$$f_{b_2} = \left[K_1 + K_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \right] L \quad (4.86)$$

Cette expression est positive si :

$$\frac{2(K_1 + K_2)^2}{K_1^2 + K_2^2} > 1 \quad (4.87)$$

ce qui est toujours le cas. Dans la configuration de référence, la force interne f_{b_2} est alors positive (ce qui indique la présence d'une force de compression dans la barre). Pour prouver que cela est le cas partout dans l'espace atteignable, il suffit de démontrer que f_{b_2} ne s'annule pas dans cet espace. La condition $f_{b_2} = 0$ peut s'écrire, après quelques manipulations, comme suit :

$$\frac{K_2(K_1 + K_2)}{L^2 [K_1 K_2 + (K_1 + K_2)^2]} \rho_1^2 + \frac{K_1(K_1 + K_2)}{L^2 [K_1 K_2 + (K_1 + K_2)^2]} \rho_2^2 = 1 \quad (4.88)$$

ce qui correspond à l'ellipse vi qui agit comme une frontière de l'espace atteignable. Puisque cette frontière ne fait pas partie de l'espace atteignable, il peut être conclu que les barres sont toujours en compression et les câbles sont toujours en tension.

4.2.3 Application de chargements externes

Puisque le degré de liberté non contraint du mécanisme, représenté par θ , correspond à une rotation de la barre A_2A_4 autour du nœud A_2 , il est choisi ici d'appliquer le chargement externe sous la forme d'un couple τ_e qui agit sur cette barre. Si, en pratique, il est plutôt souhaité d'appliquer une force externe \mathbf{f}_e au nœud A_4 , il suffit alors de calculer le couple correspondant comme $\tau_e = \mathbf{f}_e \times (\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_2)$ où τ_e est défini ici comme étant positif lorsqu'il tend à accroître l'angle θ (dans le sens horaire).

4.2.3.1 Problème statique direct avec chargements externes

Pour calculer la configuration d'équilibre du mécanisme en considérant τ_e , la fonction suivante est utilisée :

$$\mu = U - \tau_e \theta \quad (4.89)$$

où $\tau_e \theta$ est une fonction potentielle associée au couple externe. Le mécanisme est en équilibre statique lorsque μ est à un minimum ce qui ne peut se produire que si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{1}{2\rho_1} & \left\{ K_1 L \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \cos \theta \right. \\ & \left. - L \left[(K_1 + 2K_2)\rho_1^2 + K_1\rho_2^2 - K_1L^2 \right] \sin \theta + 2\tau_e \rho_1 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Cette équation peut être manipulée pour obtenir un polynôme de la forme suivante :

$$G_2 \cos^2 \theta + G_1 \cos \theta + G_0 = 0 \quad (4.91)$$

où :

$$\begin{aligned} G_0 &= -\left\{ 2\rho_1 \tau_e + L \left[K_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - L^2) + 2K_2\rho_1^2 \right] \right\} \left\{ 2\rho_1 \tau_e \right. \\ & \quad \left. - L \left[K_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - L^2) + 2K_2\rho_1^2 \right] \right\} \\ G_1 &= -4K_1 L \rho_1 \tau_e \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \\ G_2 &= 4L^2 \rho_1^2 \left[K_1 K_2 (L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2) - K_1^2 \rho_2^2 - K_2^2 \rho_1^2 \right] \end{aligned} \quad (4.92)$$

Deux solutions sont alors obtenues pour $\cos \theta$ comme suit :

$$\cos \theta = \frac{-G_1 + \zeta_3 \sqrt{G_1^2 - 4G_0G_2}}{2G_2} \quad (4.93)$$

où $\zeta_3 = \pm 1$. De plus, cela se traduit à deux solutions pour θ en raison de la gamme imposée à cet angle. De manière expérimentale, il est trouvé que l'équilibre stable du mécanisme est obtenu avec $\zeta_3 = -1$ lorsque $\theta < \pi/2$ et avec $\zeta_3 = 1$ lorsque $\theta > \pi/2$. Le discriminant du polynôme de l'équation (4.91) est :

$$\begin{aligned} \Delta = G_1^2 - 4G_0G_2 &= -16L^2 \rho_1^2 \left[K_1 L^2 - (K_1 + 2K_2)\rho_1^2 - K_1\rho_2^2 \right]^2 \\ & \quad \left\{ \tau^2 + L^2 \left[K_1 K_2 (L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2) - K_1^2 \rho_2^2 - K_2^2 \rho_1^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$

d'où il peut être observé que $\Delta = 0$ lorsque le mécanisme se retrouve sur la courbe singulière v qui correspond à $\theta = \pi/2$. La valeur qui est attribuée à ζ_3 n'est donc pas pertinente dans ce cas.

4.2.3.2 Problème statique inverse avec chargements externes

L'objectif ici consiste à calculer ρ_1 et ρ_2 en fonction de valeurs connues de x , y et τ_e . Il devient alors possible, à l'intérieur d'une certaine gamme, pour le mécanisme de supporter un chargement externe tout en positionnant son effecteur à un endroit spécifié et ce même en présence du degré de liberté non contraint. Comme première étape, ρ_1 est calculé à partir de l'équation (4.46). Comme c'était le cas pour le problème statique inverse sans chargements externes, deux solutions sont obtenues lorsque $y \neq L$. Une fois ρ_1 connu, θ est calculé avec l'équation (4.47) tout en sachant que $0 \leq \theta \leq \pi$. La condition à satisfaire pour que le mécanisme soit en équilibre sous l'action d'un couple externe est encore donnée par l'équation (4.90). Toutefois, dans le contexte considéré ici, l'inconnue dans cette équation est ρ_2 . En effectuant quelques manipulations, le polynôme suivant est généré :

$$H_2\rho_2^4 + H_1\rho_2^2 + H_0 = 0 \quad (4.95)$$

où :

$$\begin{aligned} H_0 &= -4K_2L^2\rho_1^2 \left[K_1(L^2 - \rho_1^2) - K_2\rho_1^2 \right] \cos^2 \theta - 4L\rho_1\tau_e \left[K_1(L^2 - \rho_1^2) \right. \\ &\quad \left. - 2K_2\rho_1^2 \right] \sin \theta - 4\rho_1^2\tau_e^2 - L^2 \left[K_1(L^2 - \rho_1^2) - 2K_2\rho_1^2 \right]^2 \\ H_1 &= 2K_1L \left\{ 2L\rho_1^2(K_1 + K_2) \cos^2 \theta + 2\rho_1\tau_e \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + L \left[K_1(L^2 - \rho_1^2) - 2K_2\rho_1^2 \right] \right\} \\ H_2 &= -K_1^2L^2 \end{aligned} \quad (4.96)$$

Avec ce polynôme, deux valeurs positives pour ρ_2 sont obtenues pour chaque valeur de ρ_1 ce qui donne un total de quatre solutions théoriques. Ces solutions doivent ensuite être validées en les substituant dans la solution du problème statique direct avec chargements externes.

4.2.3.3 Espace des chargements externes admissibles

Lorsque le couple externe τ_e est appliqué sur le mécanisme, ce dernier se déforme dans la direction de son degré de liberté non contraint de manière à retrouver un équilibre statique. L'amplitude du couple externe auquel le mécanisme peut résister est limitée par les conditions décrites à la section 4.1.3.3. Dans ce qui suit, les limites de τ_e sont calculées pour des valeurs données de ρ_1 et ρ_2 .

La première condition à satisfaire est associée au maintien de tension dans les câbles. Tel qu'il est mentionné à la section 4.2.2.4, il peut être démontré géométriquement que les câbles du mécanisme sont en tension tant et aussi longtemps que sa forme générale demeure inchangée, ce qui signifie que les nœuds du mécanisme doivent former un quadrilatère convexe autour duquel l'ordre des nœuds est donné par $A_1A_2A_3A_4$ (dans le sens antihoraire). Pour des valeurs de ρ_1 et ρ_2 appartenant à l'espace atteignable articulaire du mécanisme, cette condition sera satisfaite lorsque :

- $0 < \theta < \pi$
- $\theta < \beta$
- $\alpha < \gamma$ (où γ peut facilement être exprimé en fonction de θ).

La gamme de θ à l'intérieur de laquelle la tension est maintenue dans les câbles peut alors être déduite à partir de ces critères. Par la suite, la deuxième condition de la section 4.1.3.3 doit être considérée. Celle-ci stipule que l'application graduelle d'un chargement externe au mécanisme doit déformer celui-ci de manière graduelle et stable. Comme il a été vu à la section 4.1.3.3, le chargement externe a pour effet de déplacer le minimum de la fonction d'énergie potentielle. Lorsque ce minimum disparaît, l'équilibre du mécanisme devient instable et ce dernier se déforme brusquement pour atteindre un nouvel équilibre. Mathématiquement, cela se produit lorsque $d\mu/d\theta = 0$ (voir équation (4.90)) et :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mu}{d\theta^2} &= \frac{1}{2\rho_1} \left\{ K_1 L \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + L \left[K_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - L^2) + 2K_2\rho_1^2 \right] \cos \theta - K_1\rho_1(L^2 + \rho_2^2) - K_2\rho_1(L^2 + \rho_1^2) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Puisque cette équation ne dépend pas de τ_e , elle peut être résolue pour θ ce qui génère deux solutions possibles puisque $0 \leq \theta \leq \pi$. Un ensemble de valeurs associées à des minimums ou des maximums potentiels de θ est alors obtenu à partir des conditions devant être satisfaites pour que le mécanisme demeure dans un équilibre stable avec des forces de tension dans ses câbles. Ces valeurs sont ensuite triées pour identifier la gamme de θ ($\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$) dans laquelle le mécanisme peut être déformé par un chargement externe tout en étant capable d'y résister. Finalement, la gamme correspondante de τ_e , soit $\tau_{e_{\min}} \leq \tau_e \leq \tau_{e_{\max}}$, est facilement obtenue à partir de l'équation (4.90). En répétant le processus pour un grillage de points de l'espace atteignable articulaire, la distribution

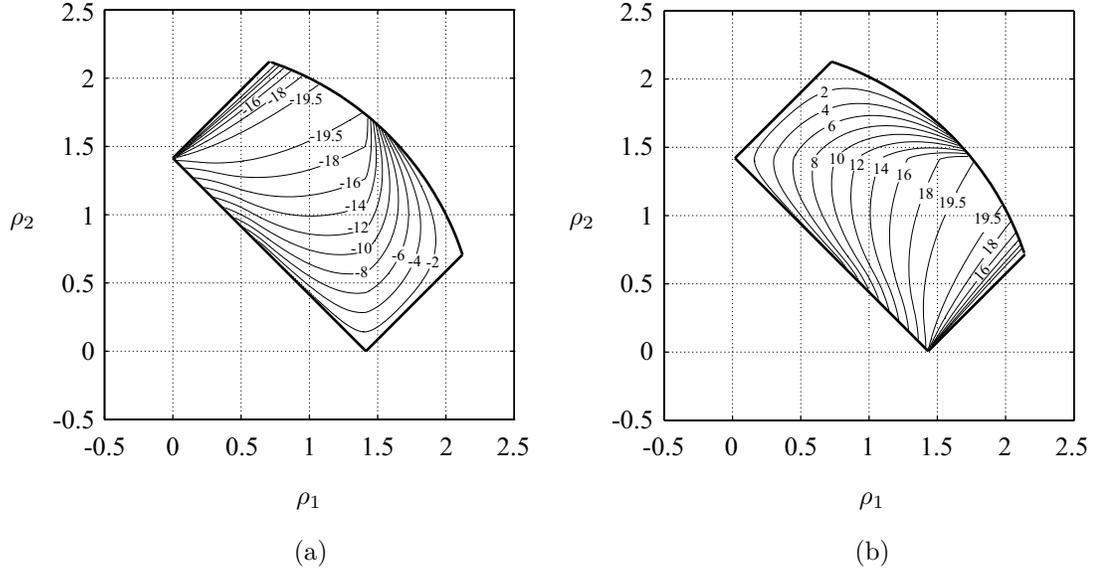


FIG. 4.13 – Distribution des couples externes minimaux et maximaux dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté pour $K_1 = K_2 = 10$ et $L = \sqrt{2}$: (a) $\tau_{e_{\min}}$ (b) $\tau_{e_{\max}}$.

des couples externes minimaux et maximaux dans cet espace est obtenue tel qu'il est illustrée à la Figure 4.13. Il peut être observé dans cette figure que le choix symétrique des paramètres du mécanisme est reflété dans l'espace des chargements externes admissibles (la distribution de $\tau_{e_{\min}}$ étant une image miroir négative par rapport à la droite $\rho_1 = \rho_2$ de la distribution de $\tau_{e_{\max}}$).

4.2.3.4 Analyse de la raideur

La raideur du mécanisme, définie comme sa résistance à la rotation de la barre A_2A_4 lorsqu'un couple externe τ_e lui est appliqué, est quantifiée à partir d'une relation de la forme $\delta\tau_e = H\delta\theta$ où H est l'hessienne de l'énergie potentielle du mécanisme en fonction de θ , soit :

$$\begin{aligned}
 H = K_\theta &= \frac{d\tau_e}{d\theta} = \frac{d^2U}{d\theta^2} \\
 &= \frac{1}{2\rho_1} \left\{ K_1 L \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + L \left[K_1(\rho_1^2 + \rho_2^2 - L^2) + 2K_2\rho_1^2 \right] \cos \theta - K_1\rho_1(L^2 + \rho_2^2) - K_2\rho_1(L^2 + \rho_1^2) \right\} \quad (4.98)
 \end{aligned}$$

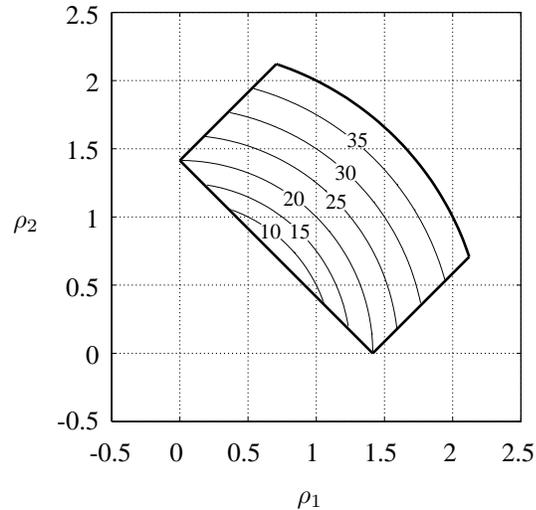


FIG. 4.14 – Distribution de la raideur K_θ dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté pour $K_1 = K_2 = 10$, $L = \sqrt{2}$ et $\tau_e = 0$.

Puisque H est un scalaire, sa valeur peut être utilisée directement pour quantifier la raideur du mécanisme dans la direction θ (K_θ). La raideur dépend de la configuration dans laquelle se retrouve le mécanisme ainsi que du couple externe qui lui est appliqué. À la Figure 4.14, la distribution de la raideur dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme est illustrée pour le cas où $\tau_e = 0$. Il est préférable d'utiliser l'espace atteignable articulaire dans ce cas puisque l'espace cartésien contient des zones à modes de fonctionnement multiples. Il est observé que la raideur est distribuée de manière symétrique par rapport à la droite $\rho_1 = \rho_2$ ce qui s'explique par le choix symétrique des paramètres géométriques (c.-à-d. $K_1 = K_2$). Il peut également être constaté que la raideur est proportionnelle aux longueurs des câbles.

4.2.4 Analyse dynamique

Lorsque le mécanisme est en mouvement entre deux configurations d'équilibre, les relations qui ont été établies entre les longueurs de ses câbles et la position de son effecteur ne sont plus valides puisque sa configuration est influencée par les efforts inertiels qui s'y retrouvent. L'analyse dynamique présentée dans cette section cherche à déterminer le comportement du mécanisme en mouvement.

4.2.4.1 Modélisation

Les hypothèses suivantes sont utilisées pour le développement du modèle dynamique du mécanisme :

- Chaque barre a une masse m et un moment d'inertie $mL^2/12$ autour d'un axe qui est perpendiculaire au plan XY et qui passe par son centre de masse.
- Les ressorts et les câbles ont des masses négligeables.
- Il n'y a pas de frottement dans les liaisons passives et les actionneurs.
- Il n'y a pas d'amortissement dans les ressorts.
- Le débattement angulaire de la barre A_2A_4 autour du nœud A_2 est amorti linéairement avec un coefficient c_d .
- Les forces gravitationnelles ne sont pas considérées.

La configuration du mécanisme est représentée par les variables ρ_1 , ρ_2 et θ qui sont placées dans le vecteur $\mathbf{u} = [\rho_1, \rho_2, \theta]^T$. Le modèle dynamique est obtenu à partir de la formulation lagrangienne sous la forme de l'équation (4.33). L'énergie potentielle du mécanisme a déjà été définie à l'équation (4.42) tandis que son énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^2 \dot{\mathbf{p}}_{CG_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_i} + \frac{1}{24}mL^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2) \quad (4.99)$$

où l'expression :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{-1}{\sin \alpha} \cdot \frac{d(\cos \alpha)}{dt} \\ &= \frac{(L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2)\dot{\rho}_1 + 2\rho_1\rho_2\dot{\rho}_2}{\rho_1 \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + L)(\rho_1 - \rho_2 + L)(\rho_1 + \rho_2 - L)(-\rho_1 + \rho_2 + L)}} \end{aligned} \quad (4.100)$$

est obtenue à partir de l'équation (4.40). Le vecteur \mathbf{f}_d , qui correspond à la force dissipative de l'amortisseur, prend la forme $\mathbf{f}_d = [0, 0, -c_d\dot{\theta}]^T$. Pour sa part, le vecteur \mathbf{f}_q correspond aux forces externes généralisées qui agissent selon les directions définies par \mathbf{u} et est donné par $\mathbf{f}_q = [0, 0, \tau_e]^T$. Finalement, $\boldsymbol{\tau} = [f_{\rho_1}, f_{\rho_2}]^T$ est le vecteur contenant les forces dans les actionneurs et :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

est une matrice utilisée pour effectuer la transformation de l'espace des actionneurs à l'espace des coordonnées de \mathbf{u} . En substituant ces expressions dans l'équation (4.33), l'équation de mouvement du mécanisme est obtenue sous la forme donnée à l'équation (4.36).

4.2.4.2 Simulation

Pour analyser le comportement du mécanisme en mouvement, une trajectoire est définie dans le domaine articulaire en imposant les positions, les vitesses et les accélérations des actionneurs. Ce faisant, l'équation de mouvement utilisé pour la simulation prend la forme donnée à l'équation (4.37) où, dans ce cas :

$$\Psi = [0, 0, 1] \quad (4.102)$$

Les valeurs des paramètres du mécanisme qui sont utilisées pour la simulation sont : $m = 2.5$ kg, $L = \sqrt{2}$ m, $K_1 = K_2 = 1000$ N/m et $c_d = 60$ N · m · s/rad. Il est également supposé que le couple externe est nul (c.-à-d. $\tau_e = 0$). Pendant la trajectoire, le mécanisme quitte une configuration initiale où $\mathbf{p}_I = [0, 0.5]^T$ m au temps $t = 0$ s pour se rendre à une configuration finale où $\mathbf{p}_F = [1.5, 1]^T$ m au temps $t_F = 1$ s. Les positions des actionneurs qui correspondent à ces positions de l'effecteur, obtenues à l'aide de la solution au problème statique inverse, sont $\boldsymbol{\psi}_I = [\rho_{1_I}, \rho_{2_I}]^T = [1.32, 0.5]^T$ m et $\boldsymbol{\psi}_F = [\rho_{1_F}, \rho_{2_F}]^T = [0.5, 0.94]^T$ m. Les positions des actionneurs le long de la trajectoire sont alors obtenues à partir de l'expression suivante :

$$\rho_i = \rho_{i_I} - \left(\frac{\rho_{i_F} - \rho_{i_I}}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{t}{t_F} \pi \right) - 1 \right] \quad (4.103)$$

où la forme de la trajectoire est la même que celle de l'équation (4.38) et où les trajectoires en vitesse et en accélération sont obtenues par la dérivation de l'équation (4.103) par rapport au temps. Les courbes de θ , x et y en fonction du temps pour cette trajectoire sont montrées à la Figure 4.15. Il peut être observé que le mécanisme atteint rapidement sa configuration d'équilibre finale une fois la trajectoire articulaire terminée. Étant donné l'absence d'un contrôle direct sur la position du degré de liberté non contraint, un tel comportement n'est toutefois pas assuré pour toutes les trajectoires. Il peut également être constaté à partir des courbes de x et de y que la trajectoire cartésienne de l'effecteur ne correspond pas à un passage direct de ce dernier de sa configuration initiale à sa configuration finale. Quoique cela soit relié au fait que la trajectoire est définie dans l'espace articulaire, il est également fondamentalement impossible dans le cas considéré ici de suivre une trajectoire linéaire dans l'espace atteignable cartésien en raison de la forme de ce dernier. Cela est bien visible à partir de la Figure 4.16(b) où la trajectoire est illustrée à l'intérieur de l'espace atteignable cartésien. Finalement,

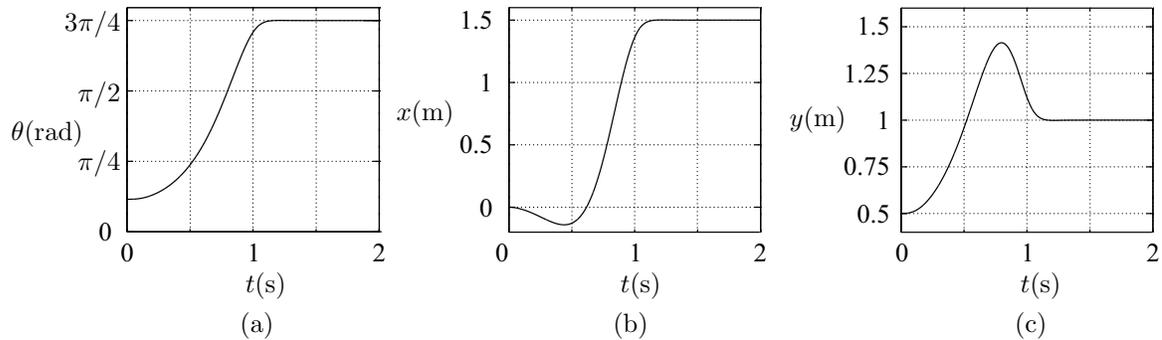


FIG. 4.15 – Résultat de la simulation dynamique du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté : (a) θ (b) x (c) y .

il peut également être observé dans cette figure que le mécanisme doit traverser deux courbes singulières (les courbes iv et v) pendant la suivie de trajectoire. Cela ne représente toutefois pas un problème puisque le contrôle du mécanisme n'en est pas affecté.

4.3 Résumé

Il est clair que le potentiel des mécanismes étudiés dans ce chapitre est limité (surtout dans le cas du mécanisme à un degré de liberté présenté à la section 4.1). Par contre, la motivation derrière l'étude de ces mécanismes est de permettre l'identification des comportements particuliers des mécanismes de tensegrité dans un contexte où la complexité de ces derniers n'est pas un obstacle. En ce sens, les développements de ce chapitre ont permis de faire plusieurs observations qui peuvent être généralisées pour les mécanismes étudiés dans les chapitres subséquents.

Le mécanisme plan à deux degrés de liberté présenté à la section 4.2 représente un cas unique parmi les mécanismes étudiés dans cette thèse. En fait, il s'agit du seul mécanisme pour lequel un choix non symétrique des paramètres géométriques est considéré (c.-à-d. lorsque $K_1 \neq K_2$). Cette absence de symétrie a des effets importants sur le comportement du mécanisme, notamment en ce qui concerne la forme de son espace atteignable qui dépend du ratio des raideurs de ses ressorts. Une autre particularité intéressante de ce mécanisme est qu'il a moins de degrés de liberté non contraints que d'actionneurs (c.-à-d. $n_A > \mathcal{D}_{NC}$) ce qui lui permet d'avoir des configurations à modes de fonctionnement multiples.

Il a été visé dans ce chapitre de bien décrire tous les aspects des mécanismes de tense-

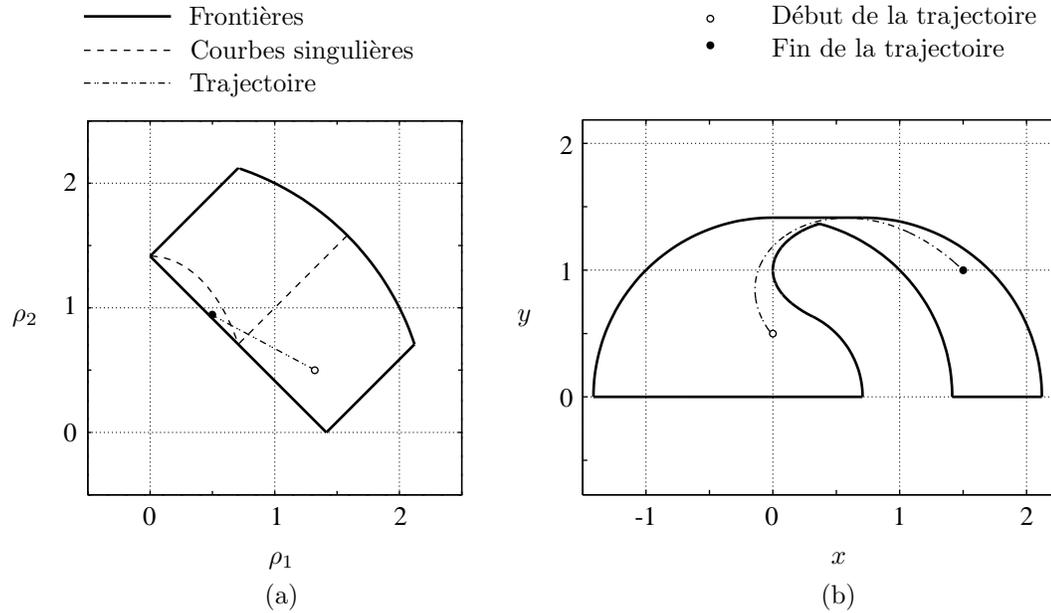


FIG. 4.16 – Trajectoires du mécanisme de tensegrité plan à deux degrés de liberté pendant la simulation dynamique : (a) trajectoire articulaire (b) trajectoire cartésienne.

grité en se servant principalement du mécanisme à un degré de liberté comme exemple. Quoique les méthodes spécifiques utilisées pour l'analyse de chaque mécanisme doivent être adaptées à ce dernier, l'approche générale présentée dans ce chapitre demeure toujours valide. Par conséquent, pendant la description et l'analyse des mécanismes plus complexes, certaines parties de ce chapitre seront utilisées comme références dans le but d'éviter la répétition.

Chapitre 5

Développement et analyse de mécanismes de tensegrité spatiaux

Ce chapitre vise le développement et l'analyse de trois mécanismes de tensegrité spatiaux. Parmi ces mécanismes, il y en a un qui est développé à partir du système de tensegrité antiprismatique triangulaire (Figure 2.4(a)) tandis que les deux autres sont générés à partir d'une version renforcée [56] de ce même système. Le système de tensegrité antiprismatique triangulaire renforcé, illustré à la Figure 5.1, est obtenu en ajoutant trois câbles au système original. Les câbles additionnels ont pour effet de supprimer le mécanisme infinitésimal qui est présent dans l'architecture du système antiprismatique triangulaire (voir section 2.4.1). Par contre, en se référant à la Figure 2.5, il peut être démontré que la configuration de référence du système renforcé correspond à $\varphi = \pi$. Dans un tel cas, les barres se croisent au centre du système ce qui n'est pas physiquement possible en raison des interférences résultantes entre les barres. L'évitement de ces interférences doit alors être considéré pendant le développement du mécanisme à partir du système renforcé.

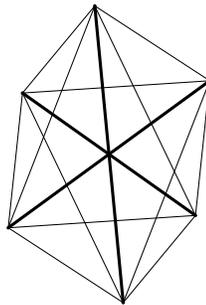


FIG. 5.1 – Système de tensegrité antiprismatique triangulaire renforcé.

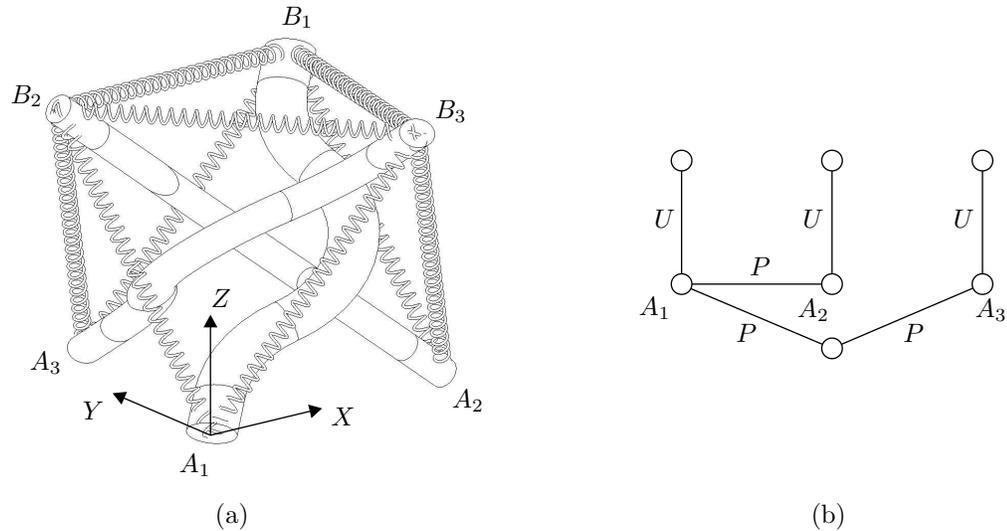


FIG. 5.2 – Mécanisme de tensegrité spatial à trois degrés de liberté avec actionnement des positions des extrémités inférieures de ses barres : (a) géométrie (b) graphe de mobilité.

Les mécanismes présentés dans ce chapitre ont tous le même objectif, soit de positionner un effecteur dans l'espace. Toutefois, ils diffèrent par leurs méthodes d'actionnement. En fait, le premier mécanisme qui est analysé utilise des actionneurs prismatiques pour modifier les positions des extrémités inférieures de ses barres. Au contraire, les deux autres mécanismes sont actionnés en modifiant les longueurs de leurs barres. Ces différences dans les stratégies d'actionnement des mécanismes mènent à des différences correspondantes dans leurs comportements.

5.1 Mécanisme de tensegrité spatial à trois degrés de liberté avec actionnement des extrémités inférieures de ses barres

5.1.1 Description du mécanisme

Un schéma du mécanisme de tensegrité spatial à trois degrés de liberté avec actionnement des positions des extrémités inférieures de ses barres est illustré à la Figure 5.2(a). Le mécanisme est formé par trois composants en compression et neuf composants en tension. Les composants en compression sont des barres de masse m qui lient les paires de nœuds $A_i B_i$ tandis que les composants en tension sont des ressorts qui rejoignent

les paires de nœuds $A_i B_{i+1}$, $A_i B_{i-1}$ et $B_i B_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$ avec $i + 1 = 1$ lorsque $i = 3$ et $i - 1 = 3$ lorsque $i = 1$). Les ressorts sont supposés avoir des raideurs K , des longueurs l_j ($j = 1, 2, \dots, 9$) et des longueurs libres nulles. Les barres, pour leur part, sont courbées afin d'éviter de se croiser au centre du mécanisme. Il est clair que l'utilisation de barres courbées signifie que ces dernières sont soumises à des efforts en flexion. Par contre, puisque les barres sont supposées être rigides cela n'a aucun effet sur les configurations d'équilibre du mécanisme. D'ailleurs il sera dorénavant supposé, pour les fins de l'analyse du mécanisme, que les barres sont droites. Par conséquent, leurs longueurs effectives sont données par l'expression suivante :

$$L = \sqrt{(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)} \quad (5.1)$$

Un repère fixe XYZ est attaché au nœud A_1 avec son axe X dirigé vers le nœud A_2 et son axe Z perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_1 , A_2 et A_3 . La position du nœud A_2 sur l'axe X ainsi que celle du nœud A_3 dans le plan XY sont fixées par des actionneurs prismatiques de longueurs ρ_i (ces actionneurs ne sont pas illustrés à la Figure 5.2(a)). Les vecteurs associés aux positions de ces nœuds, exprimés dans le repère fixe, sont alors donnés par les expressions suivantes :

$$\mathbf{a}_1 = [0, 0, 0]^T \quad \mathbf{a}_2 = [\rho_1, 0, 0]^T \quad \mathbf{a}_3 = [\rho_2, \rho_3, 0]^T \quad (5.2)$$

où il est toujours supposé que les positions des actionneurs sont positives (c.-à-d. $\rho_i > 0$). Les barres sont attachées aux nœuds A_i avec des liaisons de cardan. Pour représenter la position angulaire d'une barre, il est supposé qu'elle est initialement parallèle à l'axe Y après quoi elle subit des rotations successives autour des axes X et Z d'un repère qui lui est attaché (c.-à-d. un repère qui pivote avec la barre). La position angulaire de la barre est alors donnée par des angles d'Euler XZ pour lesquels les rotations sont représentées par les angles α_i et β_i . À partir de ces angles, une expression pour un vecteur unitaire dirigé le long de la barre i (du nœud A_i vers le nœud B_i) est trouvée comme suit :

$$\mathbf{e}_i = [-\sin \beta_i, \cos \alpha_i \cos \beta_i, \sin \alpha_i \cos \beta_i]^T \quad (5.3)$$

Les positions des nœuds B_i sont alors données par l'expression suivante :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + L \mathbf{e}_i \quad (5.4)$$

Le graphe de mobilité du mécanisme est montré à la Figure 5.2(b). À partir de ce graphe, il est trouvé que $d_F = 6$, $n_B = 7$, $n_J = 6$, $\sum \mathcal{D}_i = 9$ et $\mathcal{D}_S = 0$. En substituant ces valeurs dans l'équation (3.2), il est trouvé que $\mathcal{D}_G = 9$. Par conséquent, le mécanisme a neuf degrés de liberté dont trois sont contraints lorsque les positions des actionneurs sont fixées. Cela laisse au mécanisme six degrés de liberté non contraints (c.-à-d. $\mathcal{D}_{NC} = 6$) qui sont associés aux rotations des barres par rapport aux nœuds A_i .

Pour des positions données des actionneurs, le mécanisme est alors libre de converger vers une configuration de tensegrité. De plus, en modifiant les positions des actionneurs, cette configuration peut être contrôlée avec trois degrés de liberté. Les variables d'entrée du mécanisme sont données par le vecteur $\boldsymbol{\psi} = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^T$ tandis que ses variables de sortie, qui correspondent aux coordonnées cartésiennes du nœud B_3 , sont données par $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}_3 = [x, y, z]^T$. Le nœud B_3 est alors considéré être l'effecteur du mécanisme. Le vecteur de coordonnées généralisées qui est utilisé pour représenter les positions des degrés de liberté non contraints du mécanisme est :

$$\boldsymbol{q} = [\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3]^T \quad (5.5)$$

Les positions des centres de masse des barres sont données par :

$$\boldsymbol{p}_{CG_i} = \frac{\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i}{2} \quad (5.6)$$

où encore une fois les barres sont supposées être droites. Finalement, les longueurs des ressorts sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}_{i+1})^T (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}_{i+1})} \\ l_{i+3} &= \sqrt{(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}_{i-1})^T (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}_{i-1})} \\ l_{i+6} &= \sqrt{(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_{i+1})^T (\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_{i+1})} \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.1.2 Analyse cinématique et statique

Comme c'était le cas pour les mécanismes plans présentés au chapitre 4, la situation pour laquelle aucun chargement externe est appliqué au mécanisme est considérée en premier. Pour ce cas, des relations entre les variables d'entrée et de sortie du mécanisme sont développées et sont ensuite exploitées pour calculer les frontières de ses espaces atteignables articulaire et cartésien.

5.1.2.1 Problème statique direct

Pour des positions données des actionneurs, la configuration d'équilibre du mécanisme correspond à un minimum de l'énergie potentielle qui est emmagasinée dans ses ressorts. Cette énergie s'exprime comme suit :

$$U = \frac{1}{2} K \sum_{j=1}^9 l_j^2 \quad (5.8)$$

Pour un minimum de U , la condition suivante est nécessaire mais non suffisante :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Cette expression correspond à un système de six équations non linéaires couplées en terme de six inconnues (c.-à-d. les coordonnées généralisées). La complexité de ce système est telle qu'une solution analytique au problème statique direct ne peut pas être trouvée directement. Par contre, en utilisant la méthode numérique décrite à la section 5.1.3.1 il est relativement facile de calculer la configuration d'équilibre du mécanisme pour des positions données de ses actionneurs. En répétant cet exercice tout en variant les positions des actionneurs, un phénomène intéressant est observé. En fait, en absence de chargements externes, les configurations d'équilibre du mécanisme correspondent toujours à une situation où les centres de masse de ses barres sont confondus (c.-à-d. $\mathbf{p}_{CG} = \mathbf{p}_{CG_1} = \mathbf{p}_{CG_2} = \mathbf{p}_{CG_3}$ où \mathbf{p}_{CG} représente la position commune des centres de masse). En supposant que ce comportement demeure toujours valide, une solution analytique au problème statique direct peut être obtenue à partir de l'intersection de trois sphères de rayon $L/2$ centrées aux nœuds A_i . Les équations des sphères sont données par :

$$(\mathbf{p}_{CG} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{p}_{CG} - \mathbf{a}_i) = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (5.10)$$

En solutionnant ces équations pour \mathbf{p}_{CG} et en substituant le résultat dans l'équation suivante :

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}_3 = 2\mathbf{p}_{CG} - \mathbf{a}_3 \quad (5.11)$$

la solution au problème statique direct est obtenue comme suit :

$$x = \rho_1 - \rho_2 \quad (5.12)$$

$$y = \frac{\rho_2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_3} \quad (5.13)$$

$$z = \frac{\zeta_1 \left\{ \rho_3^2 L^2 - (\rho_2^2 + \rho_3^2) [(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_3^2] \right\}^{1/2}}{\rho_3} \quad (5.14)$$

où $\zeta_1 = \pm 1$ est un indicateur qui fait la distinction entre les deux solutions du problème qui sont symétriques par rapport au plan XY . Dans cette thèse, la solution pour laquelle $z \geq 0$ est toujours choisie et alors $\zeta_1 = 1$. Pendant le développement des équations (5.12) – (5.14), il a implicitement été supposé que $\rho_1 > 0$. Lorsque $\rho_1 = 0$, la solution au problème statique direct n'est donc plus valide. De plus, il peut facilement être observé que cela est également le cas lorsque $\rho_3 = 0$. Puisque, par définition, les positions des actionneurs sont supposées être positives, cela ne pose pas de problème. Finalement, il sera prouvé à la section 5.1.2.6 que la solution au problème statique direct donnée ci-haut satisfait toujours l'équation (5.9) et, de surcroît, correspond toujours à un minimum stable de U .

5.1.2.2 Problème statique inverse

La solution au problème statique inverse du mécanisme est obtenue en solutionnant les équations (5.12) – (5.14) pour ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 ce qui mène aux expressions suivantes :

$$\rho_1 = x + \zeta_2 y \left[\frac{L^2 - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2} \right]^{1/2} \quad (5.15)$$

$$\rho_2 = \zeta_2 y \left[\frac{L^2 - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2} \right]^{1/2} \quad (5.16)$$

$$\rho_3 = -\zeta_2 x \left[\frac{L^2 - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2} \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

où, pour obtenir des valeurs positives pour ρ_2 et ρ_3 , il est nécessaire que $\zeta_2 = 1$ si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ et $\zeta_2 = -1$ autrement. En fait, comme il peut être déduit à partir des équations (5.16) – (5.17), la condition $\rho_i > 0$ implique que le signe de x n'est jamais égal au signe de y , ou, de manière équivalente, que le mouvement du nœud B_3 est limité aux premier et troisième octants de l'espace cartésien.

5.1.2.3 Configurations singulières

Étant donné la présence de degrés de liberté non contraints dans l'architecture du mécanisme, les solutions aux problèmes statiques direct et inverse données ci-haut ne sont valides que si le mécanisme se retrouve dans un équilibre statique. Si un régime quasi-statique est supposé, il est possible de développer des expressions qui assurent le lien entre des changements d'ordre infinitésimal des positions des actionneurs ($\delta\boldsymbol{\psi}$) et de la position de l'effecteur ($\delta\boldsymbol{p}$). De telles expressions peuvent ensuite être analysées pour identifier les configurations singulières du mécanisme.

Dans cette section, des matrices jacobiennes directe et inverse qui assurent le lien entre $\delta\boldsymbol{\psi}$ et $\delta\boldsymbol{p}$ sont calculées à partir des solutions aux problèmes statiques direct et inverse, respectivement. La matrice jacobienne directe (\mathbf{J}_D) permet d'établir une relation de la forme $\delta\boldsymbol{p} = \mathbf{J}_D \delta\boldsymbol{\psi}$ et est calculée comme $\mathbf{J}_D = \partial\boldsymbol{p}/\partial\boldsymbol{\psi}$ à partir des équations (5.12) – (5.14). Les éléments de \mathbf{J}_D sont alors exprimés en fonction des positions des actionneurs. Pour simplifier l'analyse des configurations singulières, \mathbf{J}_D peut être décomposée dans les matrices \mathbf{E}_D et \mathbf{F}_D telles que $\mathbf{E}_D \delta\boldsymbol{p} = \mathbf{F}_D \delta\boldsymbol{\psi}$. Pour sa part, la matrice jacobienne inverse (\mathbf{J}_I) mène à une expression de la forme $\delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{J}_I \delta\boldsymbol{p}$ et est calculée comme $\mathbf{J}_I = \partial\boldsymbol{\psi}/\partial\boldsymbol{p}$ à partir des équations (5.15) – (5.17). Les éléments de \mathbf{J}_I sont alors exprimés en terme des coordonnées cartésiennes de l'effecteur. Comme c'est le cas pour la matrice jacobienne directe, il est utile de décomposer \mathbf{J}_I dans les matrices

\mathbf{E}_I et \mathbf{F}_I telles que $\mathbf{E}_I \delta \mathbf{p} = \mathbf{F}_I \delta \boldsymbol{\psi}$.

Les configurations singulières du mécanisme correspondent aux situations où les relations entre $\delta \boldsymbol{\psi}$ et $\delta \mathbf{p}$ dégénèrent. Selon les définitions données ci-haut, cela se produit dans le domaine articulaire lorsque les déterminants de \mathbf{E}_D et/ou \mathbf{F}_D sont nuls. Ces déterminants sont exprimés comme suit :

$$\det \mathbf{E}_D = \rho_3^4 \left\{ L^2 \rho_3^2 - (\rho_2^2 + \rho_3^2) \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_3^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (5.18)$$

$$\det \mathbf{F}_D = \rho_3^3 (\rho_1 - \rho_2) (\rho_2^2 + \rho_3^2) \quad (5.19)$$

De même, les configurations singulières dans l'espace cartésien correspondent aux situations où les déterminants de \mathbf{E}_I et/ou \mathbf{F}_I sont nuls. Les expressions de ces déterminants sont :

$$\det \mathbf{E}_I = xz(x^2 + y^2)^{1/2}(L^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{3/2} \quad (5.20)$$

$$\det \mathbf{F}_I = \left[(x^2 + y^2)(L^2 - x^2 - y^2 - z^2) \right]^{3/2} \quad (5.21)$$

Il peut être noté ici que les matrices \mathbf{E}_D et \mathbf{E}_I ainsi que les matrices \mathbf{F}_D et \mathbf{F}_I sont fondamentalement équivalentes, leur seule différence étant l'espace (articulaire ou cartésien) dans lequel elles sont exprimées. Il demeure tout de même utile de pouvoir calculer les matrices jacobiniennes directe et inverse puisque cela permet d'obtenir des expressions pour les surfaces, les droites ou les points singuliers à la fois dans les espaces articulaire et cartésien.

Comme il a déjà été mentionné à la section 5.1.2.1, la solution au problème statique direct suppose que $\rho_1 > 0$. Le cas spécial où $\rho_1 = 0$ correspond à une configuration singulière (voir ci-dessous) et doit être ajouté aux conditions singulières qui découlent des équations (5.18) – (5.21). L'expression cartésienne correspondante est obtenue en posant l'équation (5.15) égale à zéro et en manipulant le résultat de manière à éliminer ζ_2 (sachant que $\zeta_2^2 = 1$) ce qui donne :

$$\frac{(x^2 + y^2)^2 + y^2(z^2 - L^2)}{x^2 + y^2} = 0 \quad (5.22)$$

Avant de procéder à l'analyse des configurations singulières, il doit également être observé que la situation où $\rho_3 = 0$ ne peut se produire que si certaines conditions sont satisfaites. En fait, lorsque $\rho_3 = 0$, les nœuds A_1 , A_2 et A_3 sont tous situés sur l'axe X . Dans un tel cas, il ne peut y avoir une intersection entre les sphères de rayon $L/2$ associées aux trois barres que si au moins deux d'entre elles sont concentriques. Cela se produit lorsque $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$ ou $\rho_1 = \rho_2$.

À partir des équations (5.18) – (5.21) ainsi que des conditions additionnelles qui ont été décrites ci-haut, les configurations singulières suivantes peuvent être identifiées :

i. $L^2\rho_3^2 - (\rho_2^2 + \rho_3^2)\left[(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_3^2\right] = 0 \mid z = 0$

- Tous les composants du mécanisme se retrouvent dans le plan XY .
- Des mouvements infinitésimaux de l'effecteur dans la direction de l'axe Z sont possibles sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.
- Le mécanisme ne peut résister à une force externe appliquée à l'effecteur dans la direction de l'axe Z même avec les actionneurs bloqués.
- Les deux solutions au problème statique direct du mécanisme se rencontrent.

ii. $\rho_1 = \rho_2 \mid x = y = 0$

- Des mouvements infinitésimaux de l'effecteur ne peuvent pas être générés dans certaines directions de l'espace cartésien. Cela est une conséquence du fait que le mécanisme ne peut opérer que dans les octants de l'espace cartésien pour lesquels $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$.
- Le problème statique inverse du mécanisme a une infinité de solutions.

iii. $\rho_3 = 0$ et $\rho_1 = \rho_2 \mid x = 0$ et $y^2 + z^2 = L^2 - \rho_1^2$

- Les nœuds A_2 et A_3 sont coïncidents.
- Les composants du mécanisme sont coplanaires.
- L'intersection des trois sphères est un cercle (puisque deux des sphères sont confondues).
- Le problème statique direct du mécanisme a une infinité de solutions.
- Le mécanisme peut pivoter librement autour de l'axe X sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.

iv. $\rho_3 = 0$ et $\rho_2 = 0 \mid x = \rho_1$ et $y^2 + z^2 = L^2 - \rho_1^2$

- Les nœuds A_1 et A_3 sont coïncidents.
- Les composants du mécanisme sont coplanaires.
- L'intersection des trois sphères est un cercle (puisque deux des sphères sont confondues).
- Le problème statique direct du mécanisme a une infinité de solutions.
- Le mécanisme peut pivoter librement autour de l'axe X sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.

v. $\rho_3 = 0$ et $\rho_1 = 0 \mid x = 0$ et $y^2 + z^2 = L^2 - \rho_2^2$

- Les nœuds A_1 et A_2 sont coïncidents.
- Les composants du mécanisme sont coplanaires.
- L'intersection des trois sphères est un cercle (puisque deux des sphères sont confondues).
- Le problème statique direct du mécanisme a une infinité de solutions.
- Le mécanisme peut pivoter librement autour de l'axe X sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.

vi. $\rho_1 = 0 \mid \left[(x^2 + y^2)^2 + y^2(z^2 - L^2) \right] / (x^2 + y^2) = 0$

- Les nœuds A_1 et A_2 sont coïncidents.
- Les composants du mécanisme sont coplanaires.
- Le mécanisme peut pivoter librement autour d'un axe passant par les nœuds A_1 et A_3 sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.

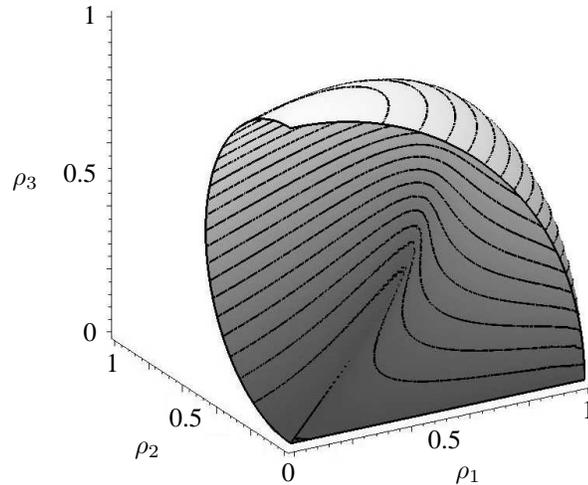
vii. $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0 \mid x^2 + y^2 + z^2 = L^2$

- Les nœuds A_1, A_2 et A_3 sont coïncidents.
- Les composants du mécanisme sont colinéaires.
- Le mécanisme peut pivoter librement autour du nœud A_1 . L'effecteur peut alors se déplacer sur la surface d'une sphère de rayon L centrée au nœud A_1 .

L'existence d'une infinité de solutions au problème statique inverse du mécanisme lorsque ce dernier se retrouve dans la configuration singulière *ii* peut être démontrée en substituant $\rho_1 = \rho_2$ dans les équations (5.12) – (5.14). Il peut alors être constaté que $x = y = 0$ et :

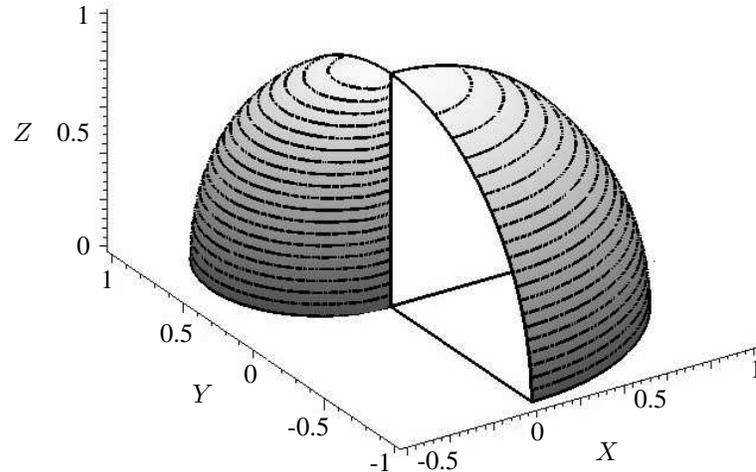
$$z = \sqrt{L^2 - \rho_1^2 - \rho_3^2} \tag{5.23}$$

d'où il peut être observé qu'il existe une infinité de combinaisons possibles de ρ_1 et ρ_3 qui génèrent la même valeur de z . En ce qui concerne le comportement du mécanisme lorsqu'il se retrouve dans les configurations singulières *iii, iv, v* et *vi*, il peut être expliqué avec une perspective géométrique. En fait, puisque la solution du problème statique direct est obtenue par l'intersection de trois sphères, il est clair que, dans le cas où deux des nœuds A_i sont coïncidents, l'intersection de ces sphères est un cercle et il y a une infinité de solutions possibles au problème statique direct. Un résultat similaire est trouvé lorsque les nœuds A_i sont tous coïncidents ce qui implique que l'intersection des sphères est encore une sphère.

FIG. 5.3 – Espace atteignable articulaire du mécanisme pour $L = 1$.

5.1.2.4 Espace atteignable articulaire

L'espace atteignable articulaire du mécanisme correspond à un volume dont les frontières sont associées aux configurations singulières énumérées à la section précédente. Un exemple de cet espace est montré à la Figure 5.3. La surface illustrée dans cette figure correspond à la configuration singulière i . En plus de cette surface, l'espace atteignable du mécanisme est également limité par les plans $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = 0$. À partir de l'illustration de l'espace atteignable, il peut être observé que $\rho_3 = 0$ seulement lorsque $\rho_2 = 0$ ou $\rho_1 = \rho_2$. Toutefois, selon la configuration singulière v , ρ_3 peut également être nul lorsque $\rho_1 = 0$. Ce désaccord peut être attribué à l'hypothèse $\rho_1 \neq 0$ qui a été faite (de manière implicite) pendant le développement de la solution du problème statique direct. Lorsque $\rho_1 = 0$, les nœuds A_1 et A_2 sont coïncidents et les sphères correspondantes sont confondues. Puisque l'intersection de ces sphères est encore une sphère de rayon $L/2$, l'espace atteignable articulaire dans le plan $\rho_1 = 0$ correspond à tous les points qui se situent sur et à l'intérieur d'un quart de cercle de rayon L centré au point $(\rho_2, \rho_3) = (0, 0)$. Par contre, lorsque $\rho_1 \rightarrow 0$, les nœuds A_1 et A_2 ne sont pas parfaitement coïncidents et l'intersection des sphères qui sont centrées sur ces nœuds est (approximativement) un cercle de rayon $L/2$ qui se situe dans le plan YZ et est centré à l'origine du repère XYZ . Dans ce cas, l'espace atteignable articulaire dans le plan $\rho_1 = 0$ correspond à tous les points situés sur et à l'intérieur d'un demi cercle de rayon $L/2$ centré au point $(\rho_2, \rho_3) = (0, L/2)$. La représentation de l'espace atteignable donnée à la Figure 5.3 est alors valide lorsque $\rho_1 \rightarrow 0$ et non pour le cas $\rho_1 = 0$. Puisque le mécanisme ne doit jamais opérer sur les frontières de son espace atteignable articulaire en raison de la perte de contrôle résultante (c.-à-d. apparition de degrés de liberté additionnels), le cas où $\rho_1 = 0$ n'est jamais atteint.

FIG. 5.4 – Espace atteignable cartésien du mécanisme pour $L = 1$.

5.1.2.5 Espace atteignable cartésien

Comme c'était le cas pour l'espace atteignable articulaire, les frontières de l'espace atteignable cartésien correspondent à des configurations singulières. La Figure 5.4 illustre cet espace pour un mécanisme avec $L = 1$. Il peut être observé que l'espace est divisé en deux sections. La première section, qui se retrouve dans le premier octant de l'espace cartésien où $x \geq 0$, $y \leq 0$ et $z \geq 0$, est limitée par la surface associée à la configuration singulière *vii* ainsi que par les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. La deuxième section de l'espace atteignable se situe dans le troisième octant où $x \leq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. Cette section est limitée par la surface associée à la configuration singulière *vi* ainsi que par les plans $x = 0$ et $z = 0$. Il peut être constaté que pour une valeur de z donnée, la surface singulière *vi* est un cercle de rayon $\sqrt{L^2 - z^2}/2$ qui est centré au point $(0, \sqrt{L^2 - z^2}/2, 0)$ de l'espace cartésien. Finalement, il peut être observé que pour passer d'une section à l'autre de son espace atteignable cartésien, l'effecteur du mécanisme doit obligatoirement passer par l'axe Z .

5.1.2.6 Stabilité

Les solutions aux problèmes statiques direct et inverse qui ont été calculées aux sections 5.1.2.1 et 5.1.2.2 supposent qu'en absence de chargements externes les centres des barres du mécanisme sont coïncidents. Pour démontrer la validité de cette hypothèse, il suffit de vérifier que les solutions ainsi obtenues correspondent toujours à des minimums stables de l'énergie potentielle du mécanisme. Une telle vérification s'effectue à partir de la matrice hessienne de U qui, telle que définie à l'équation (2.38), est

donnée par $\mathbf{H} = \partial^2 U / \partial \mathbf{q}^2$. Pour avoir un minimum stable de l'énergie potentielle, les déterminants de tous les mineurs principaux croissants de \mathbf{H} doivent être positifs [84] (c.-à-d. $\det \mathbf{H}_i > 0$ avec $i = 1, 2, \dots, n$). Cette condition doit être vérifiée de manière générale pour la solution analytique du problème statique direct. Pour ce faire, des expressions pour les éléments de \mathbf{q} sont développées à partir de cette solution. Par exemple, une expression pour le vecteur unitaire dirigé du nœud A_i vers le nœud B_i est obtenue comme suit :

$$\mathbf{e}_i = \frac{2}{L}(\mathbf{p}_{CG} - \mathbf{a}_i) \quad (5.24)$$

à partir de la solution du problème statique direct où les éléments du vecteur \mathbf{p}_{CG} peuvent être exprimés en fonction des ρ_i à partir des équations (5.2) et (5.11) – (5.14). En égalisant ce résultat avec celui donné à l'équation (5.3), il est possible d'obtenir des expressions pour les sinus et cosinus de α_i et β_i . Une fois ces expressions obtenues, elles peuvent être substituées dans la matrice hessienne du mécanisme. Les déterminants des mineurs principaux croissants de cette matrice sont alors trouvés comme suit :

$$\det \mathbf{H}_1 = 2K(L + \rho_1)(L - \rho_1) \quad (5.25)$$

$$\det \mathbf{H}_2 = 4K^2 L^2 (L + \rho_1)(L - \rho_1) \quad (5.26)$$

$$\det \mathbf{H}_3 = 6K^3 L^2 (L + \rho_1)^2 (L - \rho_1)^2 \quad (5.27)$$

$$\det \mathbf{H}_4 = 3K^4 (L + \rho_1)^2 (L - \rho_1)^2 (L^2 + 2\rho_1^2)(3L^2 - 2\rho_1^2) \quad (5.28)$$

$$\det \mathbf{H}_5 = 75K^5 (L + \rho_1)^2 (L - \rho_1)^2 (L^2 + 2\rho_1^2) E_1 \quad (5.29)$$

$$\det \mathbf{H}_6 = 432K^6 \rho_1^2 (L + \rho_1)^2 (L - \rho_1)^2 (L - \rho_1 + 2\rho_2)(L + \rho_1 - 2\rho_2) E_1 \quad (5.30)$$

où :

$$E_1 = L^2 \rho_3^2 - (\rho_2^2 + \rho_3^2) \left[(\rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_3^2 \right] \quad (5.31)$$

La tâche consiste maintenant à démontrer que ces déterminants sont toujours positifs à l'intérieur de l'espace atteignable articulaire du mécanisme. Puisqu'il est connu que $\rho_1 < L$ dans cet espace, les quatre premiers déterminants sont forcément positifs. Ensuite, il est observé que E_1 correspond tout simplement à l'expression de la configuration singulière i qui agit comme une frontière de l'espace atteignable articulaire. Il n'est alors pas possible pour E_1 de changer de signe à l'intérieur de l'espace atteignable. Puisqu'il peut facilement être vérifié que E_1 est positif à un point arbitraire situé à l'intérieur de cet espace, le déterminant de \mathbf{H}_5 est toujours positif. Encore une fois en choisissant un point arbitraire dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme, il est vérifié que le déterminant de \mathbf{H}_6 est a priori positif. De plus, sachant que $\rho_1 < L$, il est constaté à partir de l'équation (5.30) que les seuls termes du $\det \mathbf{H}_6$ qui peuvent changer de signe sont les suivants :

$$E_2 = L - \rho_1 + 2\rho_2 \quad (5.32)$$

$$E_3 = L + \rho_1 - 2\rho_2 \quad (5.33)$$

Ces expressions, qui sont vérifiées comme étant positives à un point arbitraire de l'espace atteignable, représentent des plans dans l'espace articulaire. Leurs intersections avec la surface définie par E_1 sont toutes deux données par :

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = -\frac{1}{16}(L^2 - \rho_1^2 - 4\rho_3^2)^2 \quad (5.34)$$

d'où il est clair que E_1 ne peut jamais être positif lorsqu'il est évalué à des points situés sur les plans E_2 et E_3 . Puisque E_1 a été vérifié comme étant positif à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme, il en résulte que les plans définis par E_2 et E_3 ne pénètrent pas à l'intérieur de cet espace. Il peut alors être conclu que les signes de E_2 et E_3 ne changent pas dans l'espace atteignable articulaire du mécanisme et que, par conséquent, le déterminant de \mathbf{H}_6 y est toujours positif. Les solutions aux problèmes statiques direct et inverse sont donc toujours valides dans l'espace atteignable du mécanisme.

5.1.2.7 Forces internes

Les forces internes dans les composants du mécanisme dans une configuration d'équilibre quelconque peuvent être calculées à partir des équations d'équilibre statique. Avec cette approche, il est trouvé que les forces de compression dans les barres sont :

$$f_{b_i} = 2KL \quad (5.35)$$

Puisque ces forces sont constantes, la conception des barres peut être faite de manière optimale pour en réduire la masse (si le mécanisme doit être soumis à des chargements externes leurs effets doivent toutefois être considérés). Les forces dans les actionneurs, pour leur part, sont :

$$\begin{aligned} f_{\rho_1} &= K(2\rho_1 - \rho_2) \\ f_{\rho_2} &= K(2\rho_2 - \rho_1) \\ f_{\rho_3} &= 2K\rho_3 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Il peut être observé à partir de ces expressions que les deux premiers actionneurs (c.-à-d. ρ_1 et ρ_2) ne sont pas toujours soumis à des forces de tension. Pour cette raison, il n'est pas possible pour ce mécanisme d'utiliser des câbles comme actionneurs. Cela ne représente toutefois pas un inconvénient de taille puisque les actionneurs sont attachés à la base du mécanisme.

5.1.3 Application de chargements externes

Il est supposé dans cette section qu'un chargement externe est appliqué au mécanisme sous la forme d'une force \mathbf{f}_{B_3} qui agit sur l'effecteur (c.-à-d. le nœud B_3). De plus, les poids des barres sont considérés en supposant que leurs centres de masse se situent sur les droites définies par les paires de nœuds $A_i B_i$ (voir l'équation (5.6)). Quoique cette supposition ne soit pas entièrement correcte en raison de la forme courbée des barres, les couples générés autour des droites $A_i B_i$ sont résistés par les liaisons de cardan et n'influencent donc pas le comportement du mécanisme.

5.1.3.1 Problème statique direct avec chargements externes

La solution du problème statique direct du mécanisme en présence de chargements externes s'obtient toujours par une minimisation de son énergie potentielle. Par contre, dans le cas considéré ici, la force externe \mathbf{f}_{B_3} ainsi que les poids des barres doivent également être considérés. Une nouvelle fonction est alors définie comme suit :

$$\mu = U - m g e_g^T \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_{CG_i} - \mathbf{f}_{B_3}^T \mathbf{b}_3 \quad (5.37)$$

où \mathbf{e}_g est un vecteur parallèle à la direction du champ gravitationnelle (c.-à-d. l'axe Z négatif) et où $\mathbf{f}_{B_3}^T \mathbf{b}_3$ est une fonction potentielle associée à la force externe. Il peut être noté que U ne représente plus l'énergie potentielle totale du mécanisme mais seulement la portion de cette énergie qui est emmagasinée dans les ressorts. Une condition nécessaire mais non suffisante pour l'équilibre statique stable du mécanisme est que le gradient de μ par rapport à \mathbf{q} soit nul, soit :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

Comme c'était le cas avec l'équation (5.9), ce système correspond à six équations non linéaires et couplées en terme de six inconnues. Toutefois, contrairement au cas sans chargements externes, il n'est pas possible ici d'observer un phénomène géométrique permettant le développement d'une solution analytique. Pour cette raison, le système est résolu pour \mathbf{q} avec l'algorithme de Newton-Raphson [43]. La solution trouvée avec cet algorithme satisfait l'équation (5.38) mais ne correspond pas nécessairement à un minimum stable de μ . En fait, la solution obtenue dépend de l'estimation initiale qui est fournie à l'algorithme. Dans la plupart des cas, l'algorithme de Newton-Raphson réussit à trouver la solution recherchée si l'estimation en est suffisamment rapprochée. Il est alors souhaitable, dans le but de guider l'algorithme vers un minimum stable de

μ , d'utiliser un processus de continuation [93]. Pour utiliser un tel processus, une configuration de référence dans laquelle il a été établi que μ se retrouve dans un minimum stable doit premièrement être choisie. Dans cet ouvrage, cette configuration est toujours définie à partir d'un cas où il n'y a aucun chargement externe appliqué au mécanisme et où la gravité est négligée. La configuration peut alors être identifiée par les positions des actionneurs ($\boldsymbol{\psi}_0$) et le vecteur de coordonnées généralisées correspondant (\mathbf{q}_0). Le processus de continuation est décrit par les étapes suivantes :

1. La droite de l'espace articulaire qui rejoint les points définis par $\boldsymbol{\psi}_0$ et $\boldsymbol{\psi}$ est discrétisée dans un ensemble de points $\boldsymbol{\psi}_i$. Ici $\boldsymbol{\psi}$ représente les positions des actionneurs pour lesquelles une solution du problème statique direct est recherchée.
2. En utilisant l'algorithme de Newton-Raphson, l'équation (5.38) est solutionnée pour le vecteur de coordonnées généralisées \mathbf{q}_i qui est associé à $\boldsymbol{\psi}_i$ en utilisant \mathbf{q}_{i-1} comme estimation initiale (débutant par \mathbf{q}_0). Cette étape est répétée avec tous les points discrétisés $\boldsymbol{\psi}_i$ jusqu'à $\boldsymbol{\psi}$. Dans tous les cas $\mathbf{f}_{B_3} = \mathbf{0}$ et $g = 0$.
3. Une fois le problème statique direct résolu pour les positions désirées des actionneurs, la force externe \mathbf{f}_{B_3} et l'accélération gravitationnelle sont appliquées par incréments à partir de zéro jusqu'à leurs valeurs finales. L'algorithme de Newton-Raphson est alors utilisé pour solutionner l'équation (5.38) à chaque incrément en utilisant comme estimation initiale les coordonnées généralisées trouvées à l'incrément précédent.

Le principe général du processus de continuation est de diviser le problème statique direct en une série de sous problèmes qui sont suffisamment rapprochés les uns des autres pour que la solution d'un sous problème, lorsqu'elle est utilisée comme estimation initiale pour le sous problème subséquent, permet à l'algorithme de Newton-Raphson de converger vers un minimum stable de μ . Quoiqu'une telle approche réussit presque toujours à trouver la configuration de tensegrité recherchée, il est préférable de valider le résultat obtenu en vérifiant que la matrice hessienne de μ est définie positive à la configuration finale.

5.1.3.2 Problème statique inverse avec chargements externes

Les solutions du problème statique inverse du mécanisme doivent également satisfaire l'équation (5.38). De plus, pour contraindre l'effecteur du mécanisme à la position désirée qui est représentée par le vecteur \mathbf{p} , la condition suivante est imposée :

$$\mathbf{p} - \mathbf{b}_3 = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

Lorsque cette condition est combinée avec le système de l'équation (5.38), un système de neuf équations et de neuf inconnues est obtenu puisque les positions des actionneurs sont maintenant considérées comme des variables inconnues. Ce système peut être solutionné avec une approche numérique similaire à celle qui a été décrite à la section précédente. En fait, la seule modification nécessaire à cette approche est de remplacer la discrétisation de la droite de l'espace articulaire rejoignant les points ψ_0 et ψ par une discrétisation de la droite de l'espace cartésien rejoignant les points \mathbf{p}_0 et \mathbf{p} où \mathbf{p}_0 correspond à la position de l'effecteur dans la configuration de référence.

5.1.3.3 Espace des chargements externes admissibles

Lorsque la force externe \mathbf{f}_{B_3} est appliquée sur le mécanisme, celui-ci se déforme pour retrouver un équilibre statique. Comme c'est le cas pour les autres mécanismes vus jusqu'ici, il existe des limites à l'amplitude de la force externe qui peut être appliquée au mécanisme sans nuire à son fonctionnement. Habituellement, ces limites sont établies à partir des conditions qui ont été décrites à la section 4.1.3.3. Par contre, lorsque des chargements externes sont appliqués au mécanisme faisant l'objet de cette section, il va dans bien des cas y avoir des interférences entre ses composants avant même que ces conditions puissent être violées. Pour cette raison, il n'est pas recommandé d'utiliser le mécanisme dans un contexte où les forces externes qui lui sont appliquées vont le déformer de manière substantielle. En ce sens, s'il est connu que le mécanisme doit supporter certaines charges dans le cadre d'une application spécifique, les raideurs des ressorts doivent être choisies en conséquence pour éviter les grandes déformations.

5.1.3.4 Analyse de la raideur

La raideur du mécanisme correspond à sa résistance au déplacement de son effecteur ($\delta\mathbf{p}$) sous l'action d'une force externe perturbatrice ($\delta\mathbf{f}_{B_3}$). Cette propriété dépend à la fois de la configuration du mécanisme, de la force externe qui lui est appliquée (\mathbf{f}_{B_3}) et de la direction de la force perturbatrice. Dans cette section, il est souhaité d'établir la distribution de la raideur du mécanisme à l'intérieur de son espace atteignable cartésien pour le cas où $\mathbf{f}_{B_3} = \mathbf{0}$. De plus, les directions considérées de $\delta\mathbf{f}_{B_3}$ sont celles définies par les axes X , Y et Z . À titre d'exemple, la raideur dans la direction X pour une configuration donnée est obtenue comme $K_x = \delta f_{B_{3x}} / \delta b_{3x}$. Le calcul de K_x pour une configuration représentée par \mathbf{p} s'effectue avec une approximation numérique qui se résume par les étapes suivantes :

1. Les positions des actionneurs (c.-à-d. ψ) associées au vecteur \mathbf{p} sont obtenues à partir de la solution analytique du problème statique inverse (équations (5.15) – (5.17)).
2. Une force perturbatrice $\Delta f_{B_{3x}}$ est appliquée dans les directions négative et positive de l'axe X . Pour chaque direction, la position correspondante de l'effecteur est calculée avec la solution au problème statique direct du mécanisme (section 5.1.3.1).
3. Le déplacement de l'effecteur dans la direction de l'axe X à partir de la configuration d'équilibre associée au cas $-\Delta f_{B_{3x}}$ jusqu'à celle qui est associée au cas $+\Delta f_{B_{3x}}$, représenté par Δb_{3x} , est obtenu à partir des résultats de l'étape précédente.
4. Une approximation de la raideur du mécanisme dans la direction X à la configuration donnée est obtenue comme $K_x \approx 2\Delta f_{B_{3x}}/K\Delta b_{3x}$ où le résultat est normalisé en fonction de la raideur des ressorts du mécanisme.

Évidemment, les raideurs K_y et K_z sont obtenues avec un processus similaire. À la Figure 5.5, les raideurs du mécanisme dans les directions des axes X , Y et Z sont illustrées pour des tranches de son espace atteignable cartésien associées à des valeurs fixes de z . À partir de cette figure, quelques observations peuvent être faites. Premièrement, il est vu que la raideur du mécanisme est en général plus élevée dans la section de son espace atteignable pour laquelle $x \geq 0$ et $y \leq 0$. Il pourrait alors être intéressant de limiter l'opération du mécanisme à cette partie de son espace atteignable. Il peut également être constaté que la raideur en Z est proportionnelle à z tandis que l'inverse est vrai pour les raideurs en X et Y . Physiquement, une force perturbatrice appliquée au nœud B_3 dans une direction parallèle à la barre A_3B_3 ne déforme pas le mécanisme puisqu'elle est tout simplement équilibrée par les forces dans les actionneurs qui sont utilisés pour le positionnement du nœud A_3 . Dans la direction parallèle à la barre A_3B_3 , la raideur est alors infinie peu importe la configuration du mécanisme. Selon ce raisonnement, il est logique que la raideur en Z soit plus grande pour des valeurs élevées de z puisque cela signifie que la barre A_3B_3 s'approche d'une orientation parallèle à l'axe Z . En fait, à la limite lorsque $z = L$ la barre est parallèle à l'axe Z et $K_z \rightarrow \infty$. De manière similaire, les raideurs K_x et K_y ont tendance à augmenter lorsque z diminue puisque la barre A_3B_3 s'approche du plan XY .

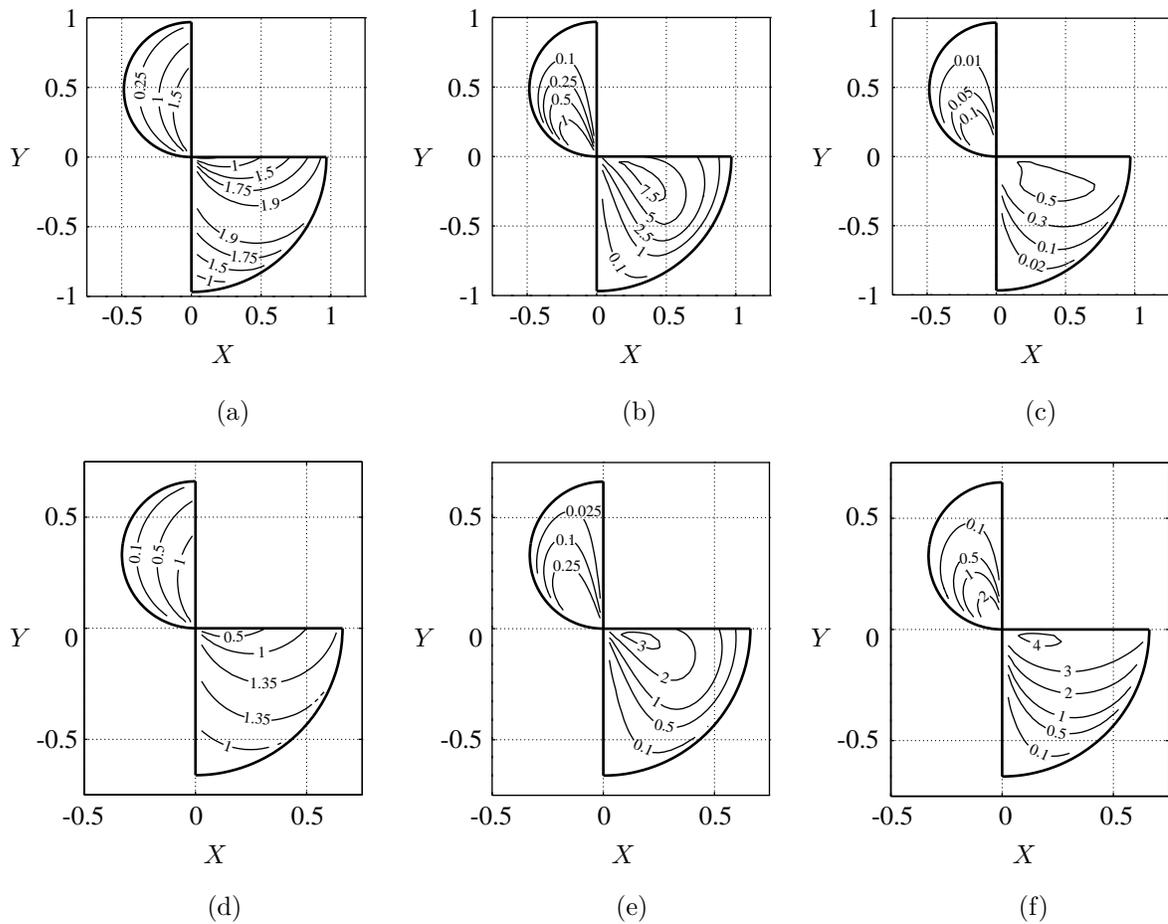


FIG. 5.5 – Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour le cas où $L = 1$: (a) K_x ($z = 0.25$) (b) K_y ($z = 0.25$) (c) K_z ($z = 0.25$) (d) K_x ($z = 0.75$) (e) K_y ($z = 0.75$) (f) K_z ($z = 0.75$).

5.1.4 Analyse dynamique

5.1.4.1 Modélisation

Les hypothèses utilisées pour le développement du modèle dynamique du mécanisme sont les suivantes :

- Chaque barre a des moments d'inertie $I_s = mL^2/12$ autour d'axes perpendiculaires à son axe longitudinal et passant par son centre de masse ainsi qu'un moment d'inertie nul autour de son axe longitudinal.
- Les ressorts ont des masses négligeables.
- Il n'y a pas de frottement dans les liaisons passives et les actionneurs.
- Des amortisseurs visqueux de coefficient c_d sont montés en parallèle avec les ressorts.
- Les forces gravitationnelles ne sont pas considérées.

La configuration du mécanisme est représentée par le vecteur $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\psi}^T, \mathbf{q}^T]^T$ et son modèle dynamique est obtenu à partir de l'équation (4.33). Dans cette équation, l'énergie potentielle du mécanisme a déjà été définie à l'équation (5.8) tandis que son énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{p}}_{CG_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i \quad (5.40)$$

où $\boldsymbol{\omega}_i$, qui correspond au vecteur de vitesse angulaire de la i^e barre exprimé dans un repère qui lui est attaché avec son axe Y dirigé du nœud A_i au nœud B_i , est exprimé comme suit :

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\cos \beta_i \dot{\alpha}_i, -\sin \beta_i \dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i]^T \quad (5.41)$$

De plus, \mathbf{I} est la matrice d'inertie de la barre, soit :

$$\mathbf{I} = I_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Les éléments du vecteur \mathbf{f}_d , qui est associé à l'amortissement du mécanisme, ont la forme suivante :

$$f_{d_j} = -c_d \sum_{k=1}^9 \dot{l}_k \frac{\partial l_k}{\partial u_j} \quad (5.43)$$

tandis que le vecteur \mathbf{f}_q , qui contient les forces externes généralisées qui agissent dans les directions définies par \mathbf{u} , est donné par :

$$\mathbf{f}_q = \frac{\partial(\mathbf{f}_{B_3}^T \mathbf{b}_3)}{\partial \mathbf{u}} \quad (5.44)$$

Finalement, $\boldsymbol{\tau} = [f_{\rho_1}, f_{\rho_2}, f_{\rho_3}]^T$ est le vecteur contenant les forces dans les actionneurs et :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

est une matrice utilisée pour effectuer la transformation de l'espace des actionneurs à l'espace des coordonnées de \mathbf{u} . En substituant ces expressions dans l'équation (4.33), l'équation de mouvement du mécanisme est obtenue sous la forme donnée à l'équation (4.36).

5.1.4.2 Simulation

Comme c'était le cas pour les mécanismes plans, une trajectoire est définie dans le domaine articulaire pour faciliter l'analyse des effets des degrés de liberté non contraints sur le mouvement du mécanisme. Par conséquent, l'équation de mouvement utilisée pour la simulation prend la forme de l'équation (4.37) où :

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{1}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Les paramètres du mécanisme utilisés pour la simulation sont : $m = 2.5$ kg, $L = 1$ m, $K = 1000$ N/m et $c_d = 100$ N · s/m. De plus, la force externe \mathbf{f}_{B_3} est supposée être nulle. Au début de la trajectoire, soit au temps $t = 0$ s, l'effecteur se retrouve à une position $\mathbf{p}_I = [0.1, -0.3, 0.25]^T$ m. Il est souhaité de déplacer l'effecteur à une nouvelle position $\mathbf{p}_F = [0.5, -0.1, 0.7]^T$ m au temps $t_F = 1$ s. En utilisant la solution au problème statique inverse du mécanisme, les positions des actionneurs qui correspondent à \mathbf{p}_I et \mathbf{p}_F sont obtenues comme $\boldsymbol{\psi}_I = [\rho_{1_I}, \rho_{2_I}, \rho_{3_I}]^T = [0.97, 0.87, 0.29]^T$ m et $\boldsymbol{\psi}_F = [\rho_{1_F}, \rho_{2_F}, \rho_{3_F}]^T = [0.60, 0.10, 0.49]^T$ m. Pour l'intervalle $0 \leq t \leq t_F$, la trajectoire articulaire en position est définie par l'équation (4.103) et les trajectoires en vitesse et en accélération sont obtenues en dérivant cette équation par rapport au temps. Lorsque $t > t_F$ la trajectoire articulaire est donnée par $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_F$ et $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \ddot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0}$. Les résultats de la simulation sont présentés à la Figure 5.6. Encore une fois il peut être constaté que l'utilisation d'une trajectoire articulaire mène à une trajectoire cartésienne non linéaire. Pour faire en sorte que le mécanisme se déplace de manière plus efficace entre deux positions cartésiennes, il est possible de lui imposer une trajectoire cartésienne et de commander ses actionneurs avec un algorithme défini en fonction des

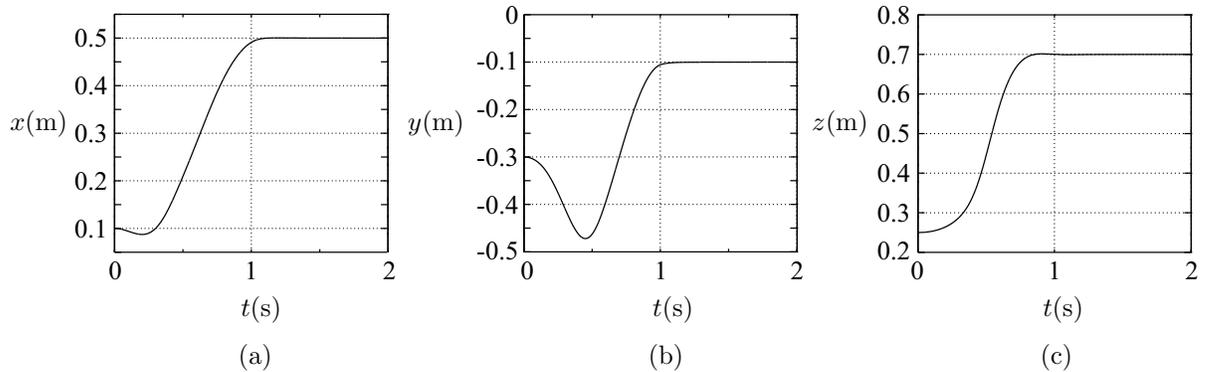


FIG. 5.6 – Coordonnées cartésiennes de la position de l’effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée : (a) x (b) y (c) z .

erreurs cartésiennes. De manière alternative, il est également possible de discrétiser une trajectoire cartésienne linéaire en un ensemble de points pour lesquels les positions correspondantes des actionneurs peuvent être obtenues à partir de la solution du problème statique inverse. Une série de points dans l’espace articulaire est alors obtenue à partir de laquelle une trajectoire articulaire qui génère le mouvement cartésien souhaité peut être définie. Finalement, il a été supposé dans le développement du modèle dynamique que des amortisseurs sont utilisés en parallèle avec chaque ressort du mécanisme. Cette approche n’est pas idéale puisque l’ajout d’amortisseur augmente l’inertie des pièces mobiles du mécanisme. Il peut alors être envisagé d’amortir les débattements angulaires des barres autour des nœuds A_i plutôt que les changements dans les longueurs des ressorts. De cette manière, les amortisseurs sont fixés plus près de la base du mécanisme. De plus, comme il sera vu à la prochaine section, il est toujours souhaitable d’amortir directement les degrés de liberté non contraints des mécanismes de tensegrité (qui, pour le mécanisme en question, correspondent aux débattements angulaires des barres).

5.2 Mécanismes de tensegrité spatiaux à trois degrés de liberté avec actionnement des longueurs des barres

Contrairement au mécanisme présenté à la section 5.1 pour lequel les positions des extrémités inférieures des barres étaient actionnées, les deux mécanismes étudiés dans cette section sont actionnés en modifiant les longueurs de leurs barres. Ces mécanismes sont regroupés dans la même section puisque leurs comportements sont en général très

similaires. Toutefois, leurs architectures sont différentes, le premier étant fondé sur le système de tenségrité antiprismatique triangulaire tandis que le second est développé à partir de la version renforcée de ce même système. Dans le but d’abrégier la nomenclature associée à ces mécanismes, ils seront dorénavant nommés mécanismes de tenségrité 3-PUPS et 3-PURS, respectivement. Ces appellations font référence aux quantités de chaînes cinématiques ouvertes (ou de pattes) qui lient les bases et les effecteurs des mécanismes ainsi que des types de liaisons qui s’y retrouvent. Les symboles R, P, U et S représentent des liaisons rotoïdes, prismatiques, de cardan et sphériques, respectivement, et un symbole souligné représente une liaison actionnée (p. ex. R correspond à un actionneur rotoïde).

5.2.1 Description des mécanismes

5.2.1.1 Mécanisme de tenségrité 3-PUPS

Un schéma du mécanisme de tenségrité 3-PUPS est illustré à la Figure 5.7(a). Il est constitué de trois composants en compression et de neuf composants en tension. Les composants en compression sont des actionneurs prismatiques utilisés pour varier les distances entre les paires de nœuds $A_i C_i$. Les positions de ces actionneurs sont représentées par ρ_i . Trois des composants en tension sont des câbles de longueur L qui rejoignent les paires de nœuds $C_i C_{i+1}$ (dans ce chapitre $i = 1, 2, 3$ avec $i - 1 = 3$ lorsque $i = 1$ et $i + 1 = 1$ lorsque $i = 3$). Parmi les six autres composants en tension, trois sont des ressorts qui lient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$ (ressorts de la base) et trois sont des ressorts qui lient les paires de nœuds $A_i C_{i-1}$ (ressorts transversaux). Les ressorts de la base ont des raideurs $\sqrt{3}K/3$ tandis que la raideur des ressorts transversaux est K . Ce choix des raideurs est fait pour permettre aux longueurs des ressorts de la base d’être égales à celles des câbles lorsque le mécanisme se retrouve dans une configuration d’équilibre sans chargements externes. Les longueurs des ressorts sont représentées par l_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) et leurs longueurs libres sont nulles.

Tel qu’il est illustré à la Figure 5.7(b), les nœuds A_i se déplacent sur des liaisons prismatiques passives qui sont positionnées de manière symétrique dans le plan formé par ces nœuds. Un repère fixe XYZ est défini comme ayant son origine située au point de rencontre des trois liaisons prismatiques passives avec son axe Y dirigé vers le nœud A_3 et son axe Z perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_i . L’origine de ce repère agit comme la base du mécanisme. De plus, un repère mobile $X'Y'Z'$ est attaché au centre géométrique des nœuds C_i avec son axe Y' dirigé vers le nœud C_3 et son axe Z' perpendiculaire au plan formé par les nœuds C_i . L’origine de ce repère, pour sa

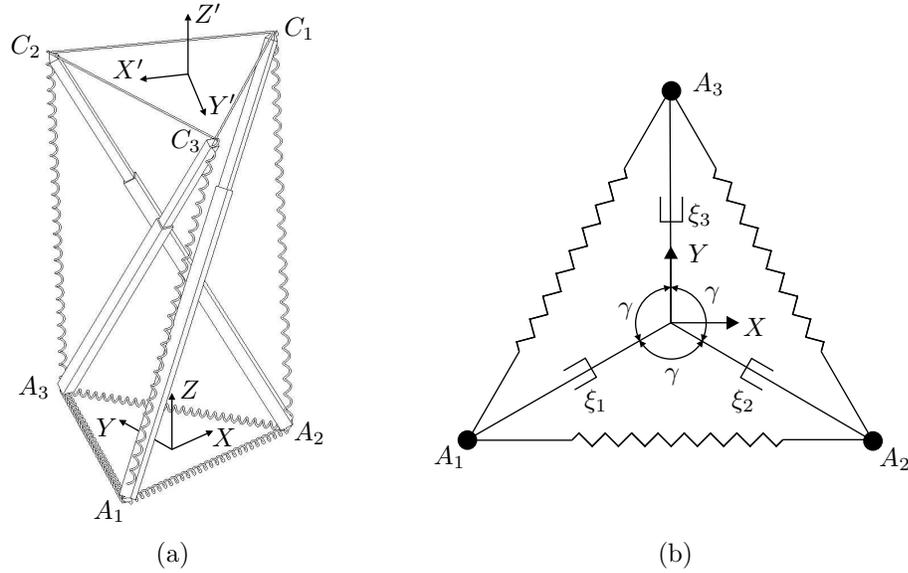


FIG. 5.7 – Mécanisme de tensegrité 3-PUPS : (a) géométrie (b) architecture de la base.

part, agit comme l'effecteur du mécanisme. La position de la i^e liaison prismatique passive, mesurée de l'origine du repère XYZ jusqu'au nœud A_i , est donnée par ξ_i . Les actionneurs prismatiques, pour leur part, sont attachés aux nœuds A_i avec des liaisons de cardan et aux câbles (nœuds C_i) par des liaisons sphériques (quoiqu'en pratique ces dernières ne sont pas nécessaires en raison de la flexibilité des câbles). En se référant encore une fois à la Figure 5.7(b), les vecteurs associés aux positions des nœuds A_i exprimés dans le repère XYZ sont :

$$\mathbf{a}_1 = \xi_1 \begin{bmatrix} -\sin(\gamma/2) \\ -\cos(\gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \xi_2 \begin{bmatrix} \sin(\gamma/2) \\ -\cos(\gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \xi_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

avec $\gamma = 2\pi/3$. Dans le but de calculer les vecteurs associés aux positions des nœuds C_i , les orientations des actionneurs prismatiques sont représentées par des angles d'Euler XZ . L'approche utilisée ici est la même que celle décrite à la section 5.1.1 où les actionneurs prismatiques sont supposés être initialement parallèles à l'axe Y . Les vecteurs unitaires dirigés le long des axes longitudinaux des actionneurs (c.-à-d. des nœuds A_i aux nœuds C_i) sont alors donnés par l'équation (5.3) où α_i et β_i correspondent aux angles d'Euler. Avec cette définition, les positions des nœuds C_i sont obtenues comme suit :

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \rho_i \mathbf{e}_i \quad (5.48)$$

Il est supposé que les manchons et les pistons des actionneurs prismatiques ont des longueurs L_p et des masses m avec les positions de leurs centres de masse données par

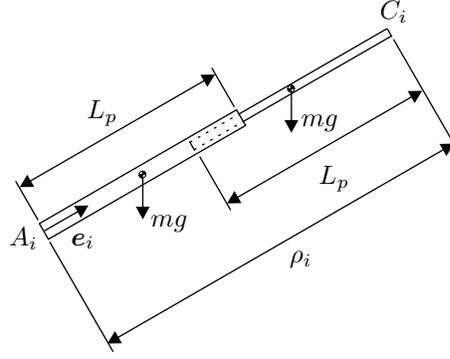


FIG. 5.8 – Vue détaillée de l'actionneur prismatique du mécanisme de tenségrité 3-PUPS.

(voir la Figure 5.8) :

$$\mathbf{p}_{CG_{M_i}} = \mathbf{a}_i + \frac{L_p}{2} \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{p}_{CG_{PI_i}} = \mathbf{a}_i + \left(\rho_i - \frac{L_p}{2} \right) \mathbf{e}_i \quad (5.49)$$

où la gravité agit dans la direction négative de l'axe Z . De plus, les longueurs des ressorts sont données par :

$$l_i = \sqrt{(\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)} \quad , \quad l_{i+3} = \sqrt{(\mathbf{c}_{i-1} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{c}_{i-1} - \mathbf{a}_i)} \quad (5.50)$$

La mobilité du mécanisme peut être analysée avec l'équation (3.2). Pour faciliter cette analyse, il est utile de remplacer les câbles qui lient les nœuds $C_i C_{i+1}$ avec une plate-forme triangulaire à laquelle les actionneurs prismatiques sont attachés avec des liaisons sphériques. En fait, cette substitution n'a aucun effet sur le comportement du mécanisme en autant que les câbles soient en tension puisque dans un tel cas la taille et la forme du triangle formé par les nœuds C_i doivent être constantes. De plus, il peut être démontré que l'utilisation d'une plate-forme rigide n'a aucune influence sur la mobilité du mécanisme. Le graphe de mobilité du mécanisme avec la plate-forme est illustré à la Figure 5.9. À partir de cette figure, il est trouvé que $d_F = 6$, $n_B = 11$, $n_J = 12$, $\sum \mathcal{D}_i = 21$ et $\mathcal{D}_S = 0$ ce qui, en substituant dans l'équation (3.2), donne $\mathcal{D}_G = 9$. Le mécanisme a alors neuf degrés de liberté dont trois sont contraints lorsque les positions des actionneurs sont fixes. Les six degrés de liberté non contraints du mécanisme lui permettent, pour des positions données de ses actionneurs, de se déformer pour trouver un équilibre statique. En modifiant les positions des actionneurs, il est possible de contrôler cet équilibre avec trois degrés de liberté. Ceux-ci sont représentés ici par les coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur. C'est donc dire que le vecteur de variables de sortie du mécanisme correspond au vecteur qui relie les origines des repères XYZ et $X'Y'Z'$, soit :

$$\mathbf{p} = [x \ , \ y \ , \ z]^T \quad (5.51)$$

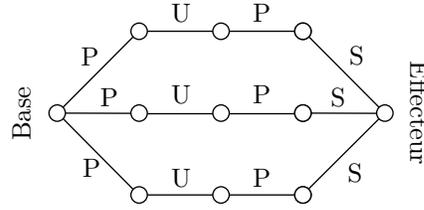


FIG. 5.9 – Graphe de mobilité du mécanisme de tensegrité 3-PUPS.

tandis que les variables d'entrée correspondent aux positions des actionneurs :

$$\boldsymbol{\psi} = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^T \quad (5.52)$$

Pour représenter les positions des degrés de liberté non contraints du mécanisme, les coordonnées généralisées suivantes sont utilisées :

$$\boldsymbol{q} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3]^T \quad (5.53)$$

Puisque cet ensemble de coordonnées n'est pas minimal (c.-à-d. qu'il y a plus de coordonnées généralisées que de degrés de liberté non contraints), les contraintes géométriques suivantes, associées aux longueurs des câbles, doivent également être considérées pour complètement définir la configuration du mécanisme :

$$\phi_i = (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i+1})^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i+1}) - L^2 = 0 \quad (5.54)$$

Ces contraintes sont placées dans le vecteur $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]^T$.

5.2.1.2 Mécanisme de tensegrité 3-PURS

Le mécanisme de tensegrité 3-PURS, illustré à la Figure 5.10(a), est développé à partir d'un système de tensegrité antiprismatique triangulaire renforcé tel qu'il est illustré à la Figure 5.1. Il comprend trois composants en compression et douze composants en tension dont neuf sont des ressorts qui rejoignent les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$, $A_i C_{i-1}$ et $A_i C_{i+1}$. Les ressorts ont des raideurs K , des longueurs l_j ($j = 1, 2, \dots, 9$) et des longueurs libres nulles. Les trois autres composants en tension sont des câbles de longueur L qui relient les paires de nœuds $C_i C_{i+1}$.

Comme dans le cas du mécanisme de tensegrité 3-PUPS, le mécanisme 3-PURS est actionné en modifiant les distances entre les nœuds A_i et C_i . Par contre, comme il est expliqué au début de ce chapitre, l'addition de ressorts au système de tensegrité antiprismatique triangulaire dans le but de le renforcer mène à l'intersection des droites qui relient les nœuds A_i et C_i . Pour éviter les interférences qui se produiraient si des

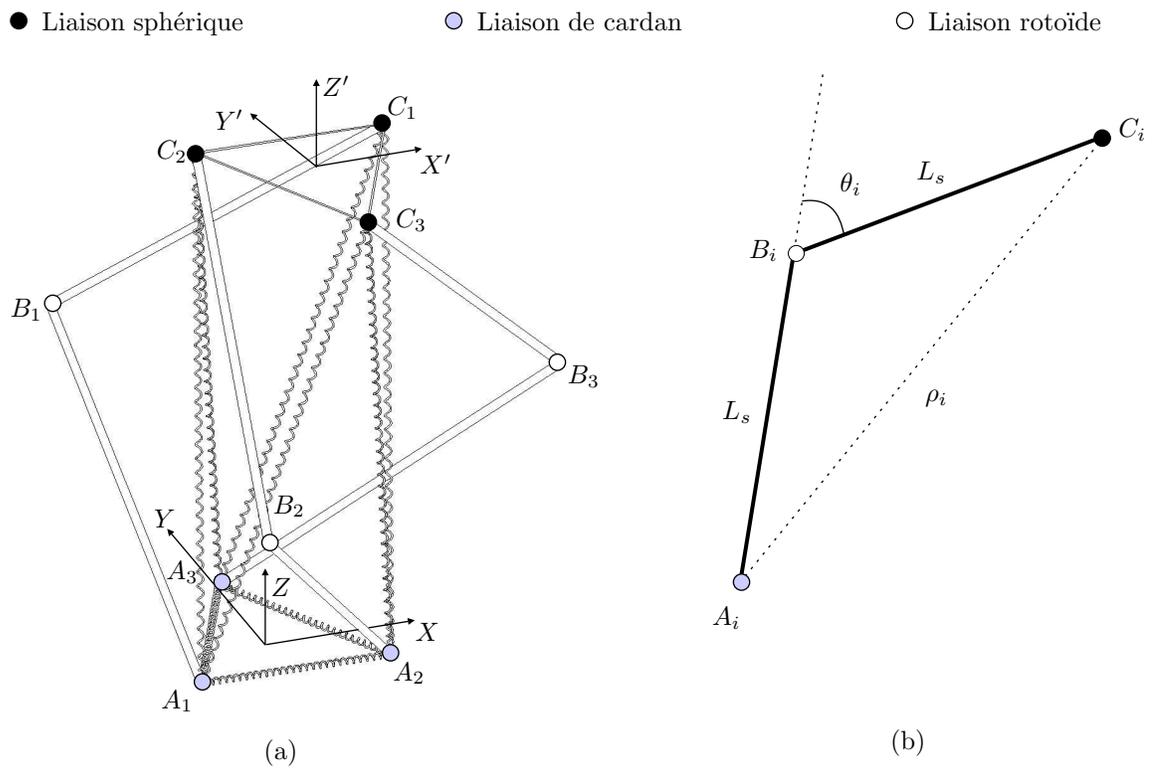


FIG. 5.10 – Mécanisme de tensegrité 3-PURS : (a) géométrie (b) actionneur prismatique virtuel.

actionneurs prismatiques conventionnels étaient utilisés, il est plutôt choisi d'utiliser des actionneurs prismatiques virtuels (voir la Figure 5.10(b)). Le nœud A_i est alors relié au nœud C_i avec une chaîne cinématique formée par deux barres de longueur L_s et de masse m . La barre proximale est attachée au nœud A_i avec une liaison de cardan tandis que les barres proximale et distale sont attachées l'une à l'autre au nœud B_i par un actionneur rotoïde. De plus, des liaisons sphériques sont utilisées pour attacher les câbles au nœud C_i de la barre distale (tel qu'il est mentionné à la section 5.2.1.1, de telles liaisons ne sont pas nécessaires en pratique en raison de la flexibilité des câbles). En modifiant la position de l'actionneur rotoïde, la distance entre les nœuds A_i et C_i , représentée par ρ_i , peut être modifiée. La relation entre θ_i et ρ_i peut facilement être obtenue en utilisant la loi du cosinus, ce qui donne :

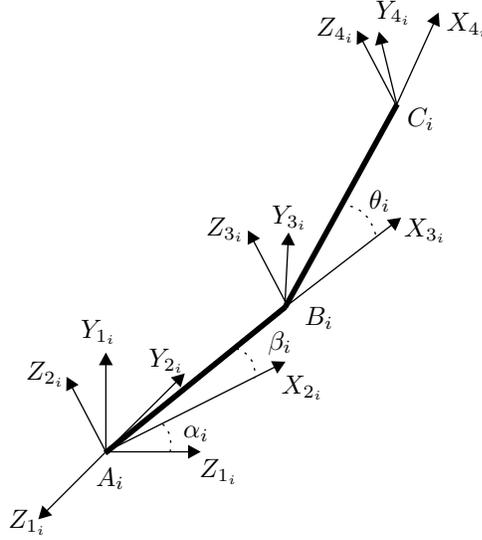
$$\rho_i = \sqrt{2}L_s\sqrt{1 + \cos\theta_i} \quad (5.55)$$

La relation inverse, pour sa part, est :

$$\theta_i = \cos^{-1} \left(\frac{\rho_i^2}{2L_s^2} - 1 \right) \quad (5.56)$$

où $0 \leq \theta_i \leq \pi$. En utilisant un système de câbles et de poulies, il est possible de déplacer l'actionneur rotoïde au nœud A_i ce qui permet de réduire l'inertie des pièces mobiles du mécanisme. Il peut être noté qu'en raison de l'architecture des actionneurs prismatiques virtuels le mécanisme ne satisfait pas complètement les principes de tenségrité (voir la section 2.2) puisque les barres sont chargées en flexion. Toutefois, si les actionneurs prismatiques virtuels sont considérés comme des sous systèmes du mécanisme, il est constaté que ceux-ci sont soumis à des forces de compression pures dirigées le long des droites reliant les nœuds A_i et C_i . Par conséquent, il peut être affirmé que le comportement du mécanisme n'est pas influencé par l'utilisation des actionneurs prismatiques virtuels.

Des repères fixe (XYZ) et mobile $(X'Y'Z')$ qui représentent la base et l'effecteur du mécanisme, respectivement, sont définis de la même manière que pour le mécanisme de tenségrité 3-PUPS. De plus, les nœuds A_i sont encore une fois attachés à la base du mécanisme par des liaisons prismatiques passives tel qu'il est illustré à la Figure 5.7(b). Les vecteurs associés aux positions des nœuds A_i sont donc les mêmes que ceux donnés à l'équation (5.47). Pour développer des expressions pour les positions des nœuds B_i et C_i , des repères $X_{ki}Y_{ki}Z_{ki}$ sont définis comme étant attachés à la i^e patte du mécanisme tel qu'il est illustré à la Figure 5.11 ($k = 1, 2, 3, 4$). La matrice de rotation qui amène

FIG. 5.11 – Définition des repères attachés à la i^e patte du mécanisme.

le repère $(k)_i$ dans une orientation parallèle au repère $(k+1)_i$ est :

$$\mathbf{Q}_{k_i} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{k_i} & -\cos \nu_{k_i} \sin \vartheta_{k_i} & \sin \nu_{k_i} \sin \vartheta_{k_i} \\ \sin \vartheta_{k_i} & \cos \nu_{k_i} \cos \vartheta_{k_i} & -\sin \nu_{k_i} \cos \vartheta_{k_i} \\ 0 & \sin \nu_{k_i} & \cos \nu_{k_i} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

tandis que le vecteur qui relie l'origine du repère $(k)_i$ à l'origine du repère $(k+1)_i$ est exprimé comme suit :

$$\mathbf{o}_{k_i} = [\sigma_{k_i} \cos \vartheta_{k_i}, \sigma_{k_i} \sin \vartheta_{k_i}, \kappa_{k_i}]^T \quad (5.58)$$

Les paramètres apparaissant dans les équations (5.57) et (5.58) sont définis dans le Tableau 5.1 pour la i^e patte du mécanisme. Les angles α_i et β_i correspondent aux rotations de la barre proximale autour des axes de la liaison de cardan située au nœud A_i . En se référant à la Figure 5.10(a), les vecteurs \mathbf{b}_i et \mathbf{c}_i , qui représentent les positions des nœuds B_i et C_i dans le repère XYZ , sont obtenus à partir des définitions fournies aux équations (5.57) et (5.58) comme suit :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{Q}_0(\mathbf{o}_{1_i} + \mathbf{Q}_{1_i}\mathbf{o}_{2_i}) \quad (5.59)$$

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{Q}_0 \left[\mathbf{o}_{1_i} + \mathbf{Q}_{1_i}(\mathbf{o}_{2_i} + \mathbf{Q}_{2_i}\mathbf{o}_{3_i}) \right] \quad (5.60)$$

où \mathbf{Q}_0 , la matrice de rotation qui amène le repère fixe XYZ dans une orientation

k	σ_{k_i}	κ_{k_i}	ν_{k_i}	ϑ_{k_i}
1	0	0	$-\pi/2$	α_i
2	L_s	0	0	β_i
3	L_s	0	0	θ_i

 TAB. 5.1 – Paramètres pour la i^e patte du mécanisme.

parallèle au repère $X_{1i}Y_{1i}Z_{1i}$, est :

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \cos \iota_i & 0 & \sin \iota_i \\ \sin \iota_i & 0 & -\cos \iota_i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

avec $\iota_1 = \pi/6$, $\iota_2 = 5\pi/6$ et $\iota_3 = -\pi/2$. Maintenant que les positions des nœuds du mécanisme sont connues, des expressions pour les centres de masse des barres sont obtenues comme suit :

$$\mathbf{p}_{CG_{P_i}} = \frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i}{2} \quad \mathbf{p}_{CG_{D_i}} = \frac{\mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i}{2} \quad (5.62)$$

De plus, les longueurs des ressorts sont données par :

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)} \\ l_{i+3} &= \sqrt{(\mathbf{c}_{i-1} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{c}_{i-1} - \mathbf{a}_i)} \\ l_{i+6} &= \sqrt{(\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{a}_i)} \end{aligned} \quad (5.63)$$

En utilisant la même approche qui fut utilisée à la section 5.2.1.1 pour le mécanisme de tenségrité 3-PUPS, il peut être démontré que le mécanisme 3-PURS a neuf degrés de liberté dont trois sont contraints en fixant les positions des actionneurs rotoïdes. Les six degrés de liberté non contraints sont utilisés par le mécanisme pour se positionner dans des configurations d'équilibre. Ces configurations dépendent des positions des actionneurs et peuvent alors être contrôlées avec trois degrés de liberté. Les variables de sortie, choisies comme les coordonnées cartésiennes de la position de l'origine du repère $X'Y'Z'$ par rapport à l'origine du repère XYZ , sont encore une fois données par le vecteur \mathbf{p} (équation (5.51)). Les variables d'entrée, pour leur part, correspondent aux positions des actionneurs rotoïdes :

$$\boldsymbol{\psi} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T \quad (5.64)$$

Un vecteur qui contient les positions des actionneurs prismatiques virtuels est également défini comme suit :

$$\boldsymbol{\psi}_v = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^T \quad (5.65)$$

Les degrés de liberté non contraints du mécanisme sont représentés par le vecteur de coordonnées généralisées suivant :

$$\mathbf{q} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3]^T \quad (5.66)$$

À ce vecteur s'ajoutent les contraintes géométriques de l'équation (5.54) pour permettre, de concert avec ψ , de complètement représenter la configuration du mécanisme.

5.2.2 Analyse cinématique et statique

Dans cette section, les différents aspects de l'analyse cinématique et statique des mécanismes sont présentés en ne considérant pas les chargements externes ou les forces gravitationnelles. Puisque les développements sont presque identiques pour les deux mécanismes, ils seront illustrés dans bien des cas en utilisant un des mécanismes comme exemple, les résultats pour le deuxième mécanisme étant alors fournis sans explications.

5.2.2.1 Problème statique direct

Les configurations d'équilibre des mécanismes pour des positions données de leurs actionneurs correspondent à des minimums de l'énergie potentielle emmagasinée dans leurs ressorts. Pour le mécanisme 3-PUPS, cette énergie potentielle s'exprime comme suit :

$$U = \frac{1}{2}K \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{j=1}^3 l_j^2 + \sum_{j=4}^6 l_j^2 \right) \quad (5.67)$$

tandis que pour le mécanisme 3-PURS cette énergie s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}K \sum_{j=1}^9 l_j^2 \quad (5.68)$$

Dans chaque cas, la minimisation de U doit s'effectuer par rapport à \mathbf{q} tout en assurant le respect des contraintes géométriques ϕ . Pour ce faire, la fonction suivante est introduite :

$$\eta = U + \boldsymbol{\lambda}^T \phi \quad (5.69)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange utilisé pour imposer les contraintes. À partir de η , les conditions nécessaires mais non suffisantes pour un minimum de U sont données par :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (5.70)$$

Ces conditions, qui, lorsque résolues, mènent aux points critiques de η , correspondent à un système de 12 équations non linéaires et couplées exprimées en fonction de 12 inconnues. La complexité de ce système rend sa résolution par une méthode analytique impossible. Par contre, lorsque le système est résolu de manière expérimentale en utilisant une approche numérique similaire à celle qui est décrite à la section 5.2.3.1, il est observé que, peu importe les positions des actionneurs, les configurations d'équilibre des mécanismes correspondent toujours à des translations pures de leurs effecteurs par rapport à leurs bases. De plus, les nœuds A_i sont toujours positionnés tels que $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \sqrt{3}L/3$ ce qui implique que les distances entre les paires de nœuds A_iA_{i+1} sont toujours égales à L , soit aux longueurs des câbles qui relient les nœuds C_iC_{i+1} . En supposant ces observations comme étant valides pour tout vecteur $\boldsymbol{\psi}$ (cela sera démontré à la section 5.2.2.6), des solutions analytiques aux problèmes statiques directs des mécanismes peuvent être développées. En fait, pour chaque mécanisme, les vecteurs associés aux positions des nœuds C_i sont donnés par :

$$\mathbf{c}'_1 = \begin{bmatrix} -L/2 \\ -\sqrt{3}L/6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_2 = \begin{bmatrix} L/2 \\ -\sqrt{3}L/6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}L/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

où le symbole ' signifie que le vecteur en question est exprimé dans le repère mobile $X'Y'Z'$. De plus, puisqu'il a été observé que les triangles formés par les nœuds $A_1A_2A_3$ et $C_1C_2C_3$ sont congruents, il est connu que $\mathbf{a}_i = \mathbf{c}'_i$. Les problèmes statiques directs des mécanismes peuvent alors être résolus en calculant l'intersection de trois sphères de rayon ρ_i données par :

$$(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_e \mathbf{c}'_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{Q}_e \mathbf{c}'_i - \mathbf{a}_i) - \rho_i^2 = 0 \quad (5.72)$$

où :

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

avec $\varphi = 5\pi/6$ pour le mécanisme 3-PUPS et $\varphi = \pi$ pour le mécanisme 3-PURS (voir la section 2.4.2). La solution du système de l'équation (5.72) pour le mécanisme 3-PUPS est :

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6L} \left[\rho_1^2 + (1 - \sqrt{3})\rho_2^2 + (\sqrt{3} - 2)\rho_3^2 \right] \quad (5.74)$$

$$y = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6L} \left[\rho_1^2 + (1 + \sqrt{3})\rho_2^2 - (2 + \sqrt{3})\rho_3^2 \right] \quad (5.75)$$

$$z = \frac{\sqrt{3(2 - \sqrt{3})}E_1}{3L} \quad (5.76)$$

avec :

$$E_1 = (2 + \sqrt{3})L^2 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \sum_{i=1}^3 \rho_i^4 + \rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2 - (7 + 4\sqrt{3})L^4 \quad (5.77)$$

tandis que sa solution pour le mécanisme 3-PURS est :

$$x = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{4L} \quad (5.78)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{12L}(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_3^2) \quad (5.79)$$

$$z = \frac{\sqrt{3E_2}}{6L} \quad (5.80)$$

avec :

$$E_2 = 4L^2 \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \sum_{i=1}^3 \rho_i^4 + \rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2 - 16L^4 \quad (5.81)$$

Dans les équations (5.78) – (5.81), les longueurs des actionneurs prismatiques virtuels (ρ_i) peuvent être obtenues à partir des positions des actionneurs rotoïdes (θ_i) par l'entremise de l'équation (5.55). Il peut être observé à partir des équations (5.76) et (5.80) que les problèmes statiques directs des mécanismes ont théoriquement deux solutions qui sont symétriques par rapport au plan XY . Toutefois, il est noté que la coordonnée z est toujours choisie comme étant positive. Finalement, il est supposé pour le moment que les solutions données ici correspondent toujours à des minimums stables de l'énergie potentielle des mécanismes. Une preuve de cette hypothèse sera fournie à la section 5.2.2.6.

5.2.2.2 Problème statique inverse

À partir de l'équation (5.72), une solution au problème statique inverse du mécanisme 3-PURS est obtenue comme suit :

$$\rho_1 = \sqrt{\left[x + \left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{6}\right)L\right]^2 + \left[y + \frac{\sqrt{3}}{6}L\right]^2 + z^2} \quad (5.82)$$

$$\rho_2 = \sqrt{\left[x - \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{6}\right)L\right]^2 + \left[y + \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{6}\right)L\right]^2 + z^2} \quad (5.83)$$

$$\rho_3 = \sqrt{\left[x - \frac{\sqrt{3}}{6}L\right]^2 + \left[y - \left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{6}\right)L\right]^2 + z^2} \quad (5.84)$$

tandis qu'une solution pour le mécanisme 3-PURS est donnée par :

$$\rho_1 = \sqrt{(x+L)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}L\right)^2 + z^2} \quad (5.85)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x-L)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}L\right)^2 + z^2} \quad (5.86)$$

$$\rho_3 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\right)^2 + z^2} \quad (5.87)$$

où, pour le mécanisme 3-PURS, les positions des actionneurs (θ_i) peuvent être obtenues à partir des positions des actionneurs prismatiques virtuels (ρ_i) en utilisant l'équation (5.56).

5.2.2.3 Configurations singulières

En supposant un régime quasi-statique, des matrices jacobiennes peuvent être définies pour établir des relations entre des changements d'ordre infinitésimal des positions des actionneurs ($\delta\boldsymbol{\psi}$) et les mouvements infinitésimaux correspondants de l'effecteur ($\delta\boldsymbol{p}$). Les expressions résultantes peuvent ensuite être analysées pour identifier les situations où elles dégénèrent qui correspondent aux configurations singulières. Dans ce qui suit, les solutions analytiques aux problèmes statiques direct et inverse des mécanismes 3-PUPS et 3-PURS sont utilisées pour calculer des matrices jacobiennes directes et inverses (\mathbf{J}_D et \mathbf{J}_I). Avant de procéder, il doit être mentionné que, dans cette section ainsi que dans les sections 5.2.2.4 et 5.2.2.5, le mécanisme 3-PURS est analysé à partir des positions de ses actionneurs prismatiques virtuels (c.-à-d. $\boldsymbol{\psi}_v$) plutôt que celles de ses actionneurs rotoïdes. Cette approche est préférée d'une part pour simplifier les développements mais également pour faciliter la comparaison des deux mécanismes. Quoiqu'il en soit, le lien entre ρ_i et θ_i est facilement accessible à partir des équations (5.55) et (5.56).

Pour le mécanisme 3-PUPS, la matrice jacobienne directe \mathbf{J}_D fournit un lien entre $\delta\boldsymbol{p}$ et $\delta\boldsymbol{\psi}$ de la forme $\delta\boldsymbol{p} = \mathbf{J}_D\delta\boldsymbol{\psi}$ et peut être calculée comme $\mathbf{J}_D = \partial\boldsymbol{p}/\partial\boldsymbol{\psi}$ à partir des équations (5.74) – (5.76). Les éléments de \mathbf{J}_D sont alors exprimés en fonction des positions des actionneurs. Pour faciliter l'identification et l'analyse des configurations singulières, \mathbf{J}_D est décomposée dans des matrices \mathbf{E}_D et \mathbf{F}_D telles que $\mathbf{E}_D\delta\boldsymbol{p} = \mathbf{F}_D\delta\boldsymbol{\psi}$. Pour sa part, la matrice jacobienne inverse \mathbf{J}_I permet d'effectuer le lien entre $\delta\boldsymbol{\psi}$ et $\delta\boldsymbol{p}$ de la forme $\delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{J}_I\delta\boldsymbol{p}$ et est calculée comme $\mathbf{J}_I = \partial\boldsymbol{\psi}/\partial\boldsymbol{p}$ à partir des équations (5.82) – (5.84). Les éléments de \mathbf{J}_I sont alors exprimés en fonction de la position de l'effecteur. Comme c'était le cas avec la matrice jacobienne directe, \mathbf{J}_I peut être décomposée dans

des matrices \mathbf{E}_I et \mathbf{F}_I telles que $\mathbf{E}_I \delta \mathbf{p} = \mathbf{F}_I \delta \boldsymbol{\psi}$. Les développements donnés ici s'appliquent également au mécanisme 3-PURS. Toutefois, dans ce cas, $\boldsymbol{\psi}$ doit être remplacé par $\boldsymbol{\psi}_v$. La matrice jacobienne directe est alors obtenue à partir des équations (5.78) – (5.80) tandis que la matrice inverse est obtenue avec les équations (5.85) – (5.87). Dans le but d'alléger le texte, les éléments des matrices jacobiennes directe et inverse ne seront pas présentés ici.

Les configurations singulières d'un mécanisme de tensegrité correspondent aux situations où les relations entre $\delta \mathbf{p}$ et $\delta \boldsymbol{\psi}$ (ou $\delta \boldsymbol{\psi}_v$) dégénèrent. Lorsqu'une telle situation se produit, la contrôlabilité du mécanisme en question est habituellement affectée. Pour cette raison, il est généralement souhaité, lorsque possible, d'éviter les configurations singulières pendant l'opération du mécanisme. Les configurations singulières dans l'espace articulaire correspondent aux situations où $\det \mathbf{E}_D = 0$ et/ou $\det \mathbf{F}_D = 0$ tandis que celles dans l'espace cartésien sont données par $\det \mathbf{E}_I = 0$ et/ou $\det \mathbf{F}_I = 0$. En exploitant ces conditions pour le mécanisme 3-PUPS, les expressions associées aux configurations singulières dans l'espace articulaire sont :

$$\det \mathbf{E}_D = 27(\sqrt{3} - 1)L^3 \sqrt{E_1} = 0 \quad (5.88)$$

$$\det \mathbf{F}_D = 54\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})L^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 = 0 \quad (5.89)$$

De manière similaire, les expressions associées aux configurations singulières dans l'espace cartésien sont :

$$\det \mathbf{E}_I = \frac{27}{2}(2\sqrt{3} + 3)L^2 z = 0 \quad (5.90)$$

$$\det \mathbf{F}_I = F_1 F_2 F_3 = 0 \quad (5.91)$$

où les coefficients F_1 , F_2 et F_3 correspondent aux côtés droits des équations (5.82), (5.83) et (5.84), respectivement. En terme de signification physique, il peut être noté, comme c'était le cas à la section 5.1.2.3, que les conditions données aux équations (5.88) et (5.90) sont équivalentes comme le sont également celles données aux équations (5.89) et (5.91). En fait, la seule différence entre ces paires de conditions est l'espace dans lequel elles sont exprimées (c.-à-d. l'espace articulaire ou cartésien). À partir des équations (5.88) – (5.91), les configurations singulières suivantes peuvent être identifiées pour le mécanisme 3-PUPS :

i. $E_1 = 0 \mid z = 0$

- Tous les composants du mécanisme se retrouvent dans le plan XY .
- Des mouvements infinitésimaux des nœuds C_i dans la direction de l'axe Z sont possibles sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.

- Le mécanisme ne peut résister à des forces externes appliquées aux nœuds C_i dans la direction de l'axe Z même avec les actionneurs bloqués.
 - Les deux solutions au problème statique direct du mécanisme se rencontrent.
- ii.* $\rho_1 = 0, \rho_2 = \rho_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})L \mid x = -\frac{(2\sqrt{3}+3)}{6}L, y = -\frac{\sqrt{3}}{6}L, z = 0 (F_1 = 0)$
- Tous les composants du mécanisme se retrouvent dans le plan XY .
 - Les nœuds A_1 et C_1 sont coïncidents.
 - Des mouvements infinitésimaux des nœuds C_2 et C_3 dans la direction de l'axe Z sont possibles sans nécessiter de changements aux longueurs des composants ni aux positions des actionneurs.
 - Le mécanisme ne peut résister à des forces externes appliquées aux nœuds C_2 et C_3 dans la direction de l'axe Z même avec les actionneurs bloqués.
 - $E_1 = 0$.
 - Les deux solutions au problème statique direct du mécanisme se rencontrent.
- iii.* $\rho_2 = 0, \rho_1 = \rho_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})L \mid x = \frac{(\sqrt{3}+3)}{6}L, y = -\frac{(\sqrt{3}+3)}{6}L, z = 0 (F_2 = 0)$
- Comportement identique à la configuration singulière *ii* en effectuant les changements appropriés aux indices.
- iv.* $\rho_3 = 0, \rho_1 = \rho_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})L \mid x = \frac{\sqrt{3}}{6}L, y = \frac{(2\sqrt{3}+3)}{6}L, z = 0 (F_3 = 0)$
- Comportement identique à la configuration singulière *ii* en effectuant les changements appropriés aux indices.

Pour le mécanisme 3-PURS, les configurations singulières dans l'espace des actionneurs prismatiques virtuels sont obtenues à partir des conditions suivantes :

$$\det \mathbf{E}_D = 24L^3 \sqrt{E_2} = 0 \quad (5.92)$$

$$\det \mathbf{F}_D = 24L^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 = 0 \quad (5.93)$$

tandis que celles dans l'espace cartésien correspondent aux expressions suivantes :

$$\det \mathbf{E}_I = 2\sqrt{3}L^2 z = 0 \quad (5.94)$$

$$\det \mathbf{F}_I = F_4 F_5 F_6 = 0 \quad (5.95)$$

où F_4, F_5 et F_6 correspondent aux côtés droits des équations (5.85), (5.86) et (5.87), respectivement. Encore une fois, les équations (5.92) et (5.94) ainsi que les équations (5.93) et (5.95) sont physiquement équivalentes. À partir de ces conditions, les configurations singulières suivantes peuvent être identifiées :

$$i. E_2 = 0 \mid z = 0$$

$$ii. \rho_1 = 0, \rho_2 = \rho_3 = 2L \mid x = -L, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}L, z = 0 (F_4 = 0)$$

$$iii. \rho_2 = 0, \rho_1 = \rho_3 = 2L \mid x = L, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}L, z = 0 (F_5 = 0)$$

$$iv. \rho_3 = 0, \rho_1 = \rho_2 = 2L \mid x = 0, y = \frac{2\sqrt{3}}{3}L, z = 0 (F_6 = 0)$$

Les descriptions des comportements du mécanisme associés à ces configurations singulières sont les mêmes que celles des configurations singulières correspondantes du mécanisme 3-PUPS (où E_2 remplace E_1 dans la configuration singulière *ii*).

5.2.2.4 Espace atteignable articulaire

Pour le mécanisme 3-PUPS, la frontière de l'espace atteignable articulaire théorique correspond à la configuration singulière *i*. Cet espace est dit théorique puisqu'il considère que les actionneurs prismatiques du mécanisme ont des gammes d'opération infinies. Dans un tel cas, l'espace atteignable du mécanisme prend la forme montrée à la Figure 5.12. Il peut être constaté que l'espace, dont la frontière correspond à la surface $E_1 = 0$, est un tube dont l'une des extrémités, soit celle qui n'est pas très visible dans la figure, est ouverte. Théoriquement, l'espace atteignable du mécanisme est donc infini. Par contre, les gammes d'opération des actionneurs prismatiques sont, en pratique, limitées par des bornes minimales et maximales telles que $\rho_{i,\min} \leq \rho_i \leq \rho_{i,\max}$. Dans l'espace articulaire, ces bornes sont représentées par les faces d'un cube. Par conséquent, l'espace atteignable articulaire réel du mécanisme correspond à l'intersection de ce cube avec le tube qui est associé à la configuration singulière *i*. En se référant de nouveau à la Figure 5.12, il peut également être constaté que l'extrémité inférieure du tube contient trois points. Ces points correspondent aux configurations singulières *ii*, *iii* et *iv* de la section 5.2.2.3.

En ne considérant pas la géométrie des actionneurs prismatiques virtuels du mécanisme 3-PURS, son espace atteignable articulaire théorique, dont la frontière correspond à l'expression $E_2 = 0$, est presque identique à celui du mécanisme 3-PUPS. Pour cette raison, cet espace n'est pas illustré ici. De toute manière, il est clair à partir de la Figure 5.10(b) que l'opération de l'actionneur prismatique virtuel est limitée à la gamme donnée par $\rho_{i,\min} \leq \rho_i \leq \rho_{i,\max}$ où $\rho_{i,\min} = 0$ lorsque $\theta_i = \pi$ et $\rho_{i,\max} = 2L_s$ lorsque $\theta_i = 0$. De plus, en pratique, la gamme sera choisie comme étant plus petite de manière à éviter les interférences qui se manifestent entre les composants du mécanisme lorsque ce dernier s'approche des cas extrêmes mentionnés ci-haut (c.-à-d. $\rho_i = 0$

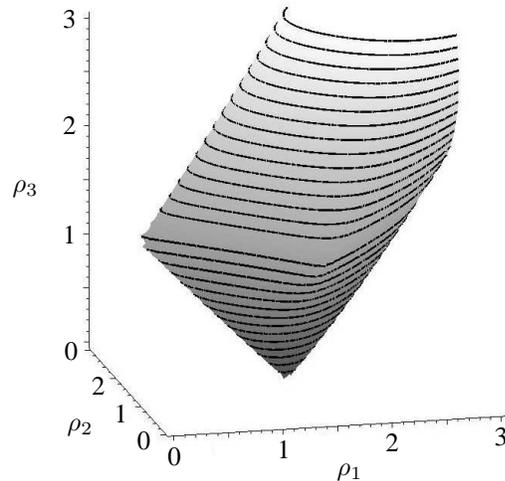


FIG. 5.12 – Espace atteignable articulaire théorique du mécanisme 3-PUPS pour le cas où $L = \sqrt{2}/2$.

ou $2L_s$). En fait, les bornes de ρ_i seront dorénavant choisies comme étant les mêmes pour les mécanismes 3-PUPS et 3-PURS.

5.2.2.5 Espace atteignable cartésien

À partir de la définition de la configuration singulière i donnée à la section 5.2.2.3, il peut être constaté que la transformation à l'espace cartésien de la surface définie par $E_1 = 0$ dans l'espace articulaire du mécanisme 3-PUPS mène tout simplement au plan XY (c.-à-d. $z = 0$). Cela est également le cas pour la surface $E_2 = 0$ du mécanisme 3-PURS. Il en résulte que les espaces atteignables cartésiens théoriques des deux mécanismes correspondent à l'espace cartésien entier à l'exception du plan XY où les mécanismes se retrouvent dans des configurations singulières. Cela n'est évidemment pas le cas en pratique puisque les actionneurs prismatiques (réels ou virtuels) ont des limites mécaniques. Lorsque ces limites sont prises en considération, les frontières des espaces atteignables cartésiens des mécanismes peuvent être calculées avec l'approche proposée par Gosselin [94, 95] pour le calcul de l'espace atteignable à orientation constante de la plate-forme de Gough-Stewart. Pour ce faire, dans le cas du mécanisme 3-PUPS, les ρ_i qui apparaissent dans les équations (5.82) – (5.84) sont remplacés successivement par les valeurs spécifiées de $\rho_{i,\min}$ et de $\rho_{i,\max}$. Ces substitutions mènent à trois paires de sphères concentriques. L'espace atteignable cartésien du mécanisme est ensuite calculé comme l'intersection de trois régions où chaque région correspond au volume qui se situe entre deux sphères concentriques. Ce processus peut être répété pour le mécanisme 3-PURS en utilisant les équations (5.85) – (5.87). La Figure 5.13 donne un aperçu de

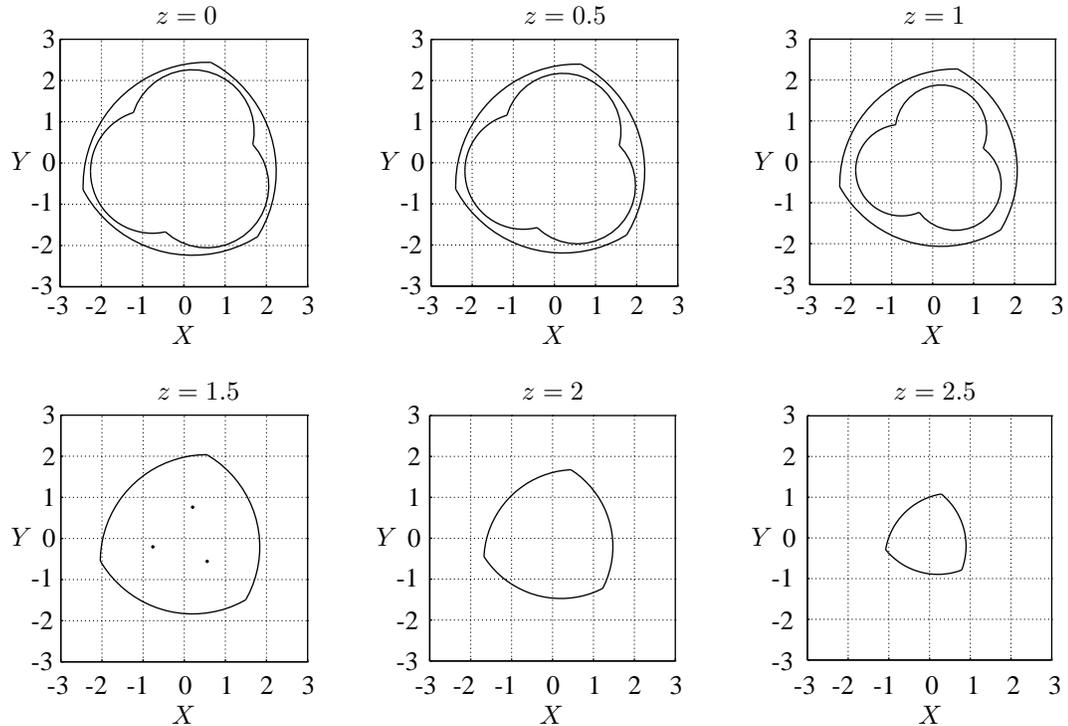


FIG. 5.13 – Tranches de l'espace atteignable cartésien du mécanisme 3-PUPS pour différentes valeurs de z avec $L = \sqrt{2}/2$, $\rho_{i,\min} = 1.5$ et $\rho_{i,\max} = 3$.

la forme générale de l'espace atteignable cartésien du mécanisme 3-PUPS par l'entremise de tranches de cet espace qui sont associées à différentes valeurs de z . L'aire de l'espace atteignable pour une tranche donnée peut être calculée avec le théorème de la divergence de Gauss [94]. Par la suite, le volume de l'espace peut être estimé en prenant la somme des produits des aires de chaque tranche avec les Δz qui les séparent. En utilisant $\Delta z = 0.01$, cela donne un volume approximatif de 70 unités cubiques pour l'exemple montré à la Figure 5.13. Puisque les câbles du mécanisme ont des longueurs égales à $\sqrt{2}/2$ unités, il peut être affirmé que l'espace atteignable est relativement grand par rapport à la taille du mécanisme. Cela est encore plus visible à la Figure 5.14 où le mécanisme 3-PURS, pour lequel des résultats similaires sont obtenus, est montré à l'intérieur de son espace atteignable cartésien.

5.2.2.6 Stabilité

Les solutions analytiques aux problèmes statiques directs des mécanismes, présentées à la section 5.2.2.1, sont fondées sur l'hypothèse stipulant qu'en absence de chargements externes les configurations d'équilibre des mécanismes correspondent à des translations pures de leurs effecteurs où les triangles formés par les nœuds A_i sont congruents à ceux

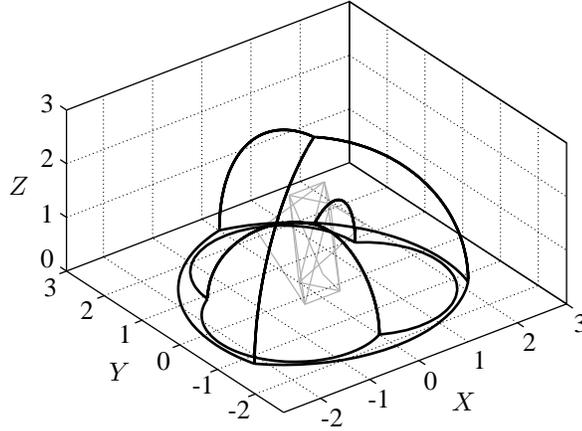


FIG. 5.14 – Schéma du mécanisme 3-PURS à l'intérieur de son espace atteignable cartésien pour le cas où $L = \sqrt{2}/2$, $L_s = 1.5$, $\rho_{i,\min} = 1.5$ et $\rho_{i,\max} = 3$.

formés par les nœuds C_i . Dans les prochains paragraphes, il est démontré que la solution du problème statique direct du mécanisme 3-PURS correspond toujours à un minimum stable de son énergie potentielle. Quoique les développements ne soient pas donnés ici, une approche similaire peut être utilisée pour effectuer la même démonstration dans le cas du mécanisme 3-PUPS.

Tel qu'il est mentionné ci-haut, la validation de la solution au problème statique direct du mécanisme 3-PURS s'effectue en démontrant que les configurations résultantes correspondent toujours à des minimums stables de l'énergie potentielle du mécanisme. En ce sens, il est plus facile, lorsque possible, d'exprimer cette énergie en fonction d'une quantité minimale de coordonnées généralisées permettant ainsi d'éviter l'utilisation de contraintes géométriques. Dans le cas considéré ici, cela est possible si le mécanisme est imaginé comme étant inversé. C'est-à-dire que l'effecteur, défini par les nœuds C_i , agit maintenant comme la base du mécanisme. Cette inversion a l'avantage de donner une base de géométrie constante au mécanisme puisque les nœuds C_i , attachés ensemble par des câbles de longueurs fixes, ne se déplacent pas les uns par rapport aux autres. Le mécanisme peut alors être perçu comme ayant six degrés de liberté non contraints qui sont associés aux rotations de chaque patte autour des nœuds C_i . Ce faisant, la configuration générale du mécanisme est complètement représentée par les longueurs des actionneurs prismatiques virtuels ainsi que par le nouveau vecteur de coordonnées généralisées suivant :

$$\mathbf{q}_m = [\alpha_{1m}, \beta_{1m}, \alpha_{2m}, \beta_{2m}, \alpha_{3m}, \beta_{3m}]^T \quad (5.96)$$

où les angles α_{im} et β_{im} représentent les orientations des pattes. Un nouveau repère $X''Y''Z''$ est introduit pour le mécanisme inversé avec son origine au centre géométrique des nœuds C_i , son axe Y'' dirigé vers le nœud C_3 et son axe Z'' perpendiculaire au

plan formé par les nœuds C_i et dirigé vers les nœuds A_i . Dans ce repère, des vecteurs unitaires dirigés des nœuds C_i vers les nœuds A_i sont exprimés en fonction des nouvelles coordonnées généralisées comme suit :

$$\mathbf{e}_{im} = [-\sin \beta_{im}, \cos \alpha_{im} \cos \beta_{im}, \sin \alpha_{im} \cos \beta_{im}]^T \quad (5.97)$$

Les positions des nœuds A_i peuvent alors être obtenues à partir de l'expression suivante :

$$\mathbf{a}_{im} = \mathbf{c}_{im} + \rho_i \mathbf{e}_{im} \quad (5.98)$$

où :

$$\mathbf{c}_{1m} = \begin{bmatrix} -L/2 \\ -\sqrt{3}L/6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{2m} = \begin{bmatrix} L/2 \\ -\sqrt{3}L/6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{3m} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}L/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

L'énergie potentielle du mécanisme est calculée à partir de l'équation (5.68). Les points critiques de l'énergie potentielle en fonction de \mathbf{q}_m doivent satisfaire la condition suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_m} = \mathbf{0} \quad (5.100)$$

De plus, pour que ces points critiques soient associés à des minimums stables de U , la matrice hessienne du mécanisme doit être définie positive. En utilisant les nouvelles coordonnées généralisées, cette matrice s'écrit comme suit :

$$\mathbf{H}_m = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}_m^2} \quad (5.101)$$

Comme il a déjà été expliqué à la section 3.3.2, la matrice hessienne sera définie positive lorsque les déterminants de tous ses mineurs principaux croissants sont strictement positifs [84]. Pour vérifier cette condition dans le cas de la solution du problème statique direct, cette solution est utilisée pour développer des expressions pour les sinus et cosinus des angles α_{im} et β_{im} en fonction des positions des actionneurs prismatiques virtuels. Les déterminants des mineurs principaux croissants de \mathbf{H}_m sont alors exprimés comme suit :

$$\det \mathbf{H}_1 = -\frac{K(\rho_1 + \rho_2 + 2L)G_1G_2G_3}{8L^2} \quad (5.102)$$

$$\det \mathbf{H}_2 = -\frac{K^2(\rho_1 + \rho_2 + 2L)\rho_1^2G_1G_2G_3}{4L^2} \quad (5.103)$$

$$\det \mathbf{H}_3 = \frac{3K^3(\rho_1 + \rho_2 + 2L)^2\rho_1^2G_1^2G_2^2G_3^2}{128L^4} \quad (5.104)$$

$$\det \mathbf{H}_4 = -\frac{3K^4(\rho_1 + \rho_2 + 2L)^2G_1^2G_2^2G_3^2G_4}{1024L^4} \quad (5.105)$$

$$\det \mathbf{H}_5 = -\frac{9K^5(\rho_1 + \rho_2 + 2L)^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 4L^2)G_1^2G_2^2G_3^2G_5}{1024L^4} \quad (5.106)$$

$$\det \mathbf{H}_6 = -\frac{27K^6(\rho_1 + \rho_2 + 2L)^2G_1^2G_2^2G_3^2G_5G_6}{4096L^4} \quad (5.107)$$

où :

$$G_1 = -\rho_1 + \rho_2 + 2L \quad (5.108)$$

$$G_2 = -\rho_1 - \rho_2 + 2L \quad (5.109)$$

$$G_3 = \rho_1 - \rho_2 + 2L \quad (5.110)$$

$$G_4 = \left[-(\rho_1 + \rho_2)^2 + 6\rho_1\rho_2 + 4L^2 \right] \left[-(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 + 4L^2 \right] \quad (5.111)$$

$$G_5 = -E_2 \quad (5.112)$$

$$G_6 = (4L\rho_3 + \rho_1^2 - \rho_2^2)(4L\rho_3 - \rho_1^2 + \rho_2^2) \quad (5.113)$$

En observant l'équation (5.80), il est clair que $E_2 > 0$ à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme (à la section 5.2.2.4 il est vu que $E_2 = 0$ correspond à la frontière de l'espace atteignable articulaire sur laquelle le mécanisme ne peut pas opérer). Il peut alors être conclu que $G_5 < 0$. L'évaluation de l'équation (5.113) à une configuration arbitraire située à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme donne une valeur positive pour G_6 . Pour que G_6 puisse changer de signe à l'intérieur de l'espace atteignable, la condition $G_6 = 0$ doit y être satisfaite. La solution de l'équation $G_6 = 0$ pour ρ_3 est :

$$\rho_3 = \frac{\zeta(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{4L} \quad (5.114)$$

où $\zeta = \pm 1$. La substitution de ce résultat dans G_5 donne :

$$G_5 = \frac{1}{256L^4} \left[(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2 - 8L^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 8L^2) \right]^2 \quad (5.115)$$

ce qui ne peut clairement pas être négatif. En vertu de ce résultat et sachant que G_5 est toujours négatif dans l'espace atteignable, il peut être déduit que G_6 ne peut pas être nul dans cet espace. En utilisant cette même approche, il peut être démontré que $G_1 > 0$, $G_2 < 0$ et $G_3 > 0$ dans l'espace atteignable du mécanisme. En évaluant maintenant l'équation (5.111) à une configuration à l'intérieur de l'espace atteignable, une valeur négative est obtenue pour G_4 . Pour prouver que le signe de G_4 ne change pas à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme, la projection de cet espace dans le plan $\rho_1 - \rho_2$ est tracée sur un même graphique avec la courbe $G_4 = 0$ tel qu'il est illustré à la Figure 5.15. Il peut être constaté dans cette figure que la courbe $G_4 = 0$ ne pénètre pas dans l'espace atteignable ce qui implique que le signe de G_4 est constant dans cet espace.

Selon les démonstrations faites jusqu'ici dans cette section, les inégalités suivantes sont valides à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme :

$$G_1 > 0 \quad , \quad G_2 < 0 \quad , \quad G_3 > 0 \quad , \quad G_4 < 0 \quad , \quad G_5 < 0 \quad , \quad G_6 > 0 \quad (5.116)$$

En combinant ces résultats avec les équations (5.102) – (5.107) tout en sachant que $\rho_i > 0$ par définition, il est démontré que \mathbf{H}_m est définie positive dans tout l'espace

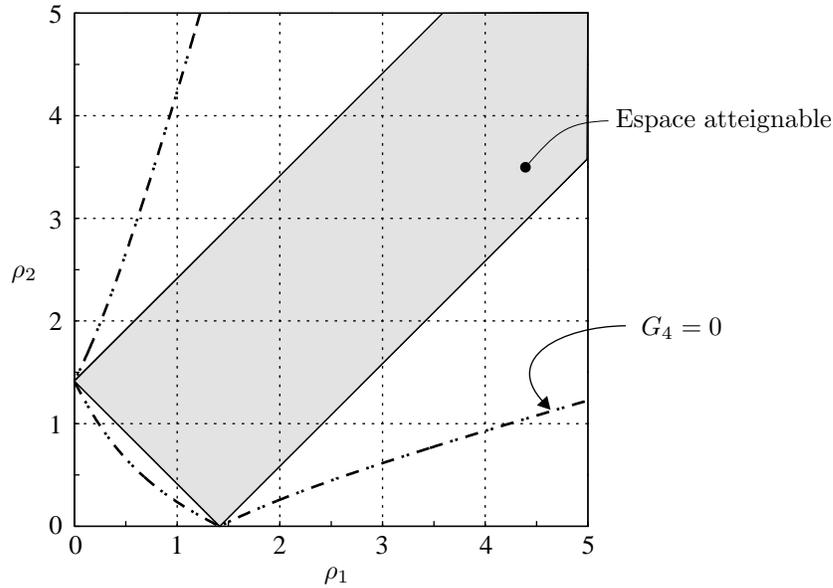


FIG. 5.15 – Projection de l'espace atteignable articulaire du mécanisme 3-PURS dans le plan $\rho_1 - \rho_2$ et courbe associée à l'équation $G_4 = 0$ pour $L = \sqrt{2}/2$.

atteignable du mécanisme et que, par conséquent, la solution analytique au problème statique direct de ce dernier mène toujours à un minimum stable de son énergie potentielle.

5.2.2.7 Forces internes

En absence de chargements externes et de forces gravitationnelles, les forces internes dans les composants des mécanismes peuvent être calculées relativement facilement. Pour ce faire, les coordonnées cartésiennes des nœuds A_i et C_i doivent premièrement être obtenues pour chaque mécanisme à partir des solutions analytiques de leurs problèmes statiques directs. Les forces internes sont ensuite calculées avec les équations d'équilibre statique évaluées aux nœuds des mécanismes. En utilisant cette approche, il est trouvé que les forces de compression dans les actionneurs prismatiques du mécanisme 3-PUPS sont :

$$f_{\rho_i} = K \rho_i \quad (5.117)$$

tandis que les forces de tension dans ses câbles sont :

$$f_{c_i} = \frac{\sqrt{3}}{3} K L \quad (5.118)$$

Dans le cas du mécanisme 3-PURS, les forces de compression qui agissent sur les actionneurs prismatiques virtuels sont :

$$f_{\rho_i} = 2K\rho_i \quad (5.119)$$

et les forces de tension dans les câbles sont :

$$f_{c_i} = KL \quad (5.120)$$

Deux observations importantes peuvent être faites à partir de ces résultats. Premièrement, il est constaté que les forces dans les actionneurs prismatiques (réels ou virtuels) dépendent linéairement à la fois de la raideur des ressorts ainsi que des longueurs des actionneurs prismatiques. De plus, il est observé que les forces de tension dans les câbles sont toujours constantes. Il peut alors être confirmé que si les mécanismes opèrent dans leurs espaces atteignables les câbles sont toujours en tension et les actionneurs prismatiques sont toujours en compression. Finalement, une expression peut être développée pour relier les forces de compression dans les actionneurs prismatiques virtuels du mécanisme 3-PURS aux couples résistés par ses actionneurs rotoïdes. Cette expression prend la forme suivante :

$$\tau_i = K\rho_i\sqrt{4L_s^2 - \rho_i^2} = 2KL_s^2 \sin \theta_i \quad (5.121)$$

5.2.3 Application de chargements externes

Dans cette section, il est supposé (à l'exception de la section 5.2.3.3 où un scénario différent sera étudié) que des forces externes \mathbf{f}_{C_i} sont appliquées aux nœuds C_i . Les poids des composants à masses non négligeables sont également considérés. Sous de telles conditions, les solutions aux problèmes statiques directs et inverses des mécanismes s'obtiennent avec des méthodes numériques.

5.2.3.1 Problème statique direct avec chargements externes

L'approche utilisée ici est très similaire à celle qui a été décrite à la section 5.1.3.1. En ce sens, la fonction suivante est définie pour le mécanisme 3-PUPS :

$$\mu = \eta - \sum_{i=1}^3 \left[mge_g^T (\mathbf{p}_{CG_{M_i}} + \mathbf{p}_{CG_{PI_i}}) + \mathbf{f}_{C_i}^T \mathbf{c}_i \right] \quad (5.122)$$

où \mathbf{e}_g est un vecteur dirigé dans la direction du champ gravitationnel (c.-à-d. dans la direction négative de l'axe Z). De même, la fonction suivante est définie pour le

mécanisme 3-PURS :

$$\mu = \eta - \sum_{i=1}^3 \left[mg e_g^T (\mathbf{p}_{CG_{P_i}} + \mathbf{p}_{CG_{D_i}}) + \mathbf{f}_{C_i}^T \mathbf{c}_i \right] \quad (5.123)$$

Pour que les mécanismes se retrouvent dans des configurations d'équilibre stables pour des positions données de leurs actionneurs ainsi que des forces externes connues, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (5.124)$$

Comme c'était le cas à l'équation (5.70), ces conditions correspondent à un système de 12 équations non linéaires qui doivent être solutionnées pour \mathbf{q} et $\boldsymbol{\lambda}$. Lorsque les charge-ments externes et la gravité sont considérés, il n'est toutefois plus possible d'obtenir une solution analytique pour ce système. L'algorithme de Newton-Raphson est alors utilisé en parallèle avec un processus de continuation tel qu'il est décrit à la section 5.1.3.1. La configuration de référence, qui est connue comme étant un équilibre stable du méca-nisme, est représentée par $\boldsymbol{\psi}_0$, \mathbf{q}_0 et $\boldsymbol{\lambda}_0$ ainsi que par $\mathbf{f}_{C_i} = \mathbf{0}$ et $g = 0$. La méthode consiste à partir de cette configuration et de procéder par incréments jusqu'à la confi-guration finale. Les étapes de la procédure, presque identiques à celles décrites à la section 5.1.3.1, sont les suivantes :

1. La droite de l'espace articulaire qui rejoint les points définis par $\boldsymbol{\psi}_0$ et $\boldsymbol{\psi}$ est discrétisée dans un ensemble de points $\boldsymbol{\psi}_i$. Ici $\boldsymbol{\psi}$ représente les positions des actionneurs pour lesquelles une solution au problème statique direct est recherchée.
2. En utilisant l'algorithme de Newton-Raphson, le système de l'équation (5.124) est solutionné pour le vecteur de coordonnées généralisées \mathbf{q}_i ainsi que le vecteur de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_i$ qui sont associés à $\boldsymbol{\psi}_i$ en utilisant \mathbf{q}_{i-1} et $\boldsymbol{\lambda}_{i-1}$ comme estimations initiales (débutant par \mathbf{q}_0 et $\boldsymbol{\lambda}_0$). Cette étape est répétée avec tous les points discrétisés $\boldsymbol{\psi}_i$ jusqu'à $\boldsymbol{\psi}$. Dans tous les cas $\mathbf{f}_{C_i} = \mathbf{0}$ et $g = 0$.
3. Une fois le problème statique direct résolu avec les positions désirées des action-neurs, les forces externes \mathbf{f}_{C_i} et gravitationnelles sont appliquées par incréments jusqu'à leurs valeurs finales. L'algorithme de Newton-Raphson est alors utilisé pour solutionner l'équation (5.124) à chaque incrément en utilisant comme esti-mation initiale les coordonnées généralisées trouvées à l'incrément précédent.

Une fois que les valeurs des coordonnées généralisées sont obtenues pour la configuration finale, la position de l'effecteur est calculée comme suit :

$$\mathbf{p} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}_i \quad (5.125)$$

Quoique le processus de continuation tend à maintenir les mécanismes dans des configurations d'équilibre stables pendant la solution de leurs problèmes statiques directs, il devrait tout de même être vérifié que la matrice hessienne associée à la fonction μ respecte les conditions de l'équation (3.12).

5.2.3.2 Problème statique inverse avec chargements externes

Dans le cas du problème statique inverse, les conditions de l'équation (5.124) doivent encore être respectées. Toutefois, puisque les positions des actionneurs sont maintenant inconnues, l'équation suivante, qui impose la position de l'effecteur, est ajoutée au système :

$$\mathbf{p} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}_i = \mathbf{0} \quad (5.126)$$

où \mathbf{p} est la position désirée de l'effecteur. La combinaison des équations (5.124) et (5.126) mène à un système de 15 équations et de 15 inconnues. La solution de ce système est obtenue avec l'approche décrite à la section précédente où les incréments du processus de continuation sont maintenant générés à partir d'une discrétisation de la droite qui relie les points \mathbf{p}_0 et \mathbf{p} de l'espace cartésien.

5.2.3.3 Espace des chargements externes admissibles

Lorsque des chargements externes sont appliqués aux mécanismes, ceux-ci se déforment pour demeurer dans des configurations d'équilibre statique. Cependant, comme il a été expliqué à la section 4.1.3.3, il existe des limites aux chargements externes auxquels peut résister un mécanisme de tenségrité. Ces limites sont établies à partir du besoin de tension dans les câbles ainsi que de la déformation stable du mécanisme sous l'application graduelle de chargements externes. Dans cette section, il est souhaité de calculer l'ensemble des chargements externes pouvant être appliqués aux mécanismes 3-PUPS et 3-PURS tout en respectant ces conditions.

Aux sections 5.2.3.1 et 5.2.3.2, il a été supposé que des forces externes étaient appliquées directement aux nœuds C_i . Dans un tel cas, neuf variables sont requises pour représenter l'état du chargement externe ce qui rend le calcul et la représentation de l'espace des chargements externes admissibles très complexes. En guise de simplification, il est supposé ici que des trépieds sont ajoutés aux effecteurs des mécanismes. Chaque trépied est formé par trois barres de longueur L qui sont attachées aux nœuds C_i ainsi que les unes aux autres avec des liaisons sphériques. Il est alors supposé qu'une seule

force \mathbf{f}_V est appliquée au point où les barres du trépied se rencontrent. Pour une force \mathbf{f}_V donnée, les forces \mathbf{f}_{C_i} équivalentes peuvent être calculées à partir de la géométrie du trépied et de la configuration du mécanisme. Ces forces peuvent ensuite être utilisées dans la solution du problème statique direct pour trouver la configuration d'équilibre correspondante du mécanisme. Le problème est donc celui du calcul de l'ensemble des forces \mathbf{f}_V pouvant être résistées par les mécanismes. Les angles ϖ_1 et ϖ_2 sont utilisés pour définir la direction de \mathbf{f}_V tandis que $\|\mathbf{f}_V\|$ représente son amplitude. Le vecteur \mathbf{f}_V est donc exprimé comme suit :

$$\mathbf{f}_V = \|\mathbf{f}_V\| \begin{bmatrix} \cos \varpi_1 \cos \varpi_2 \\ \sin \varpi_1 \cos \varpi_2 \\ \sin \varpi_2 \end{bmatrix} \quad (5.127)$$

La première étape dans le calcul des forces admissibles consiste à discrétiser l'espace tri-dimensionnel défini par ϖ_1 , ϖ_2 et $\|\mathbf{f}_V\|$. Pour des positions données des actionneurs, la valeur maximale admissible de $\|\mathbf{f}_V\|$ est calculée dans chacune des directions définies par ϖ_1 et ϖ_2 . Cela s'effectue en augmentant $\|\mathbf{f}_V\|$ par incréments à partir d'une valeur nulle jusqu'à ce que l'une des deux conditions listées à la section 4.1.3.3 soit violée. Pour chaque incrément de $\|\mathbf{f}_V\|$, la solution au problème statique direct du mécanisme est calculée. La présence de tension dans les câbles peut alors être vérifiée avec les équations d'équilibre statique évaluées aux nœuds du mécanisme. Pour sa part, la condition associée à la stabilité de la déformation du mécanisme sous l'application graduelle du chargement externe (voir section 4.1.3.3) est violée lorsque l'algorithme de solution du problème statique direct ne réussit pas à converger vers une solution. La frontière de l'espace des chargements externes admissibles est obtenue en traçant les valeurs maximales admissibles de $\|\mathbf{f}_V\|$ pour chacune des directions définies par ϖ_1 et ϖ_2 . Des exemples de ces frontières pour les mécanismes 3-PUPS et 3-PURS sont montrés aux Figures 5.16 et 5.17 pour $-\pi < \varpi_1 \leq \pi$ et $-\pi/2 < \varpi_2 \leq \pi/2$ où $\|\mathbf{f}_V\|$ a été normalisé par rapport à K . Il peut être constaté que les forces externes pouvant être appliquées aux mécanismes sont en général plus grandes dans la direction positive de l'axe Z (c.-à-d. lorsque $\varpi_2 \rightarrow \pi/2$). De plus, pour chaque mécanisme, les surfaces sont symétriques par rapport aux directions des liaisons prismatiques passives sur lesquelles se déplacent les nœuds A_i (c.-à-d. $\varpi_1 = -5\pi/6, -\pi/6$ et $\pi/2$). Il peut également être constaté que le cas où $\varpi_2 = -\pi/2$ n'a pas été inclus dans les figures. En fait, des valeurs de $\|\mathbf{f}_V\|/K \approx 3.3$ pour le mécanisme 3-PUPS et de $\|\mathbf{f}_V\|/K \approx 5.4$ pour le mécanisme 3-PURS peuvent théoriquement être reprises dans la direction négative de l'axe Z . Par contre, pour les positions des actionneurs qui sont considérées dans ces figures, les mécanismes deviennent instables lorsque de telles forces leur sont appliquées (une déviation infinitésimale dans la direction de \mathbf{f}_V menant à un effondrement des mécanismes). Finalement, il peut être noté que le mécanisme 3-PURS résiste, de manière générale, à des forces externes plus grandes que le mécanisme 3-PUPS. Cela s'explique par la présence de ressorts additionnels dans l'architecture du mécanisme 3-PURS.

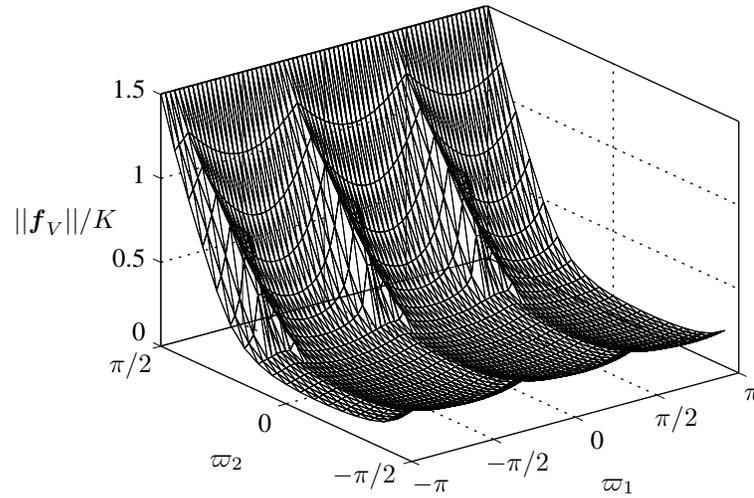


FIG. 5.16 – Ensemble des forces \mathbf{f}_V admissibles pour le mécanisme 3-PUPS avec $L = \sqrt{2}/2$ et $\boldsymbol{\psi} = [2, 2, 2]^T$.

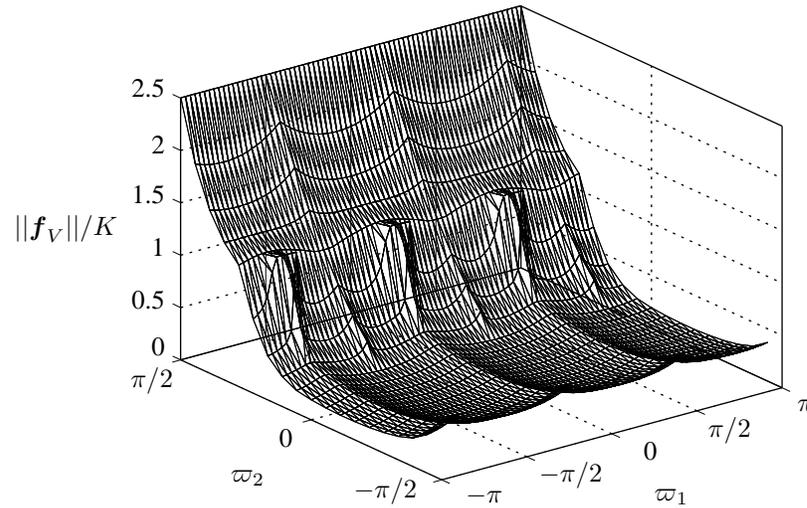


FIG. 5.17 – Ensemble des \mathbf{f}_V admissibles pour le mécanisme 3-PURS avec $L = \sqrt{2}/2$, $L_s = \sqrt{2}$ et $\boldsymbol{\psi} = [\pi/2, \pi/2, \pi/2]^T$.

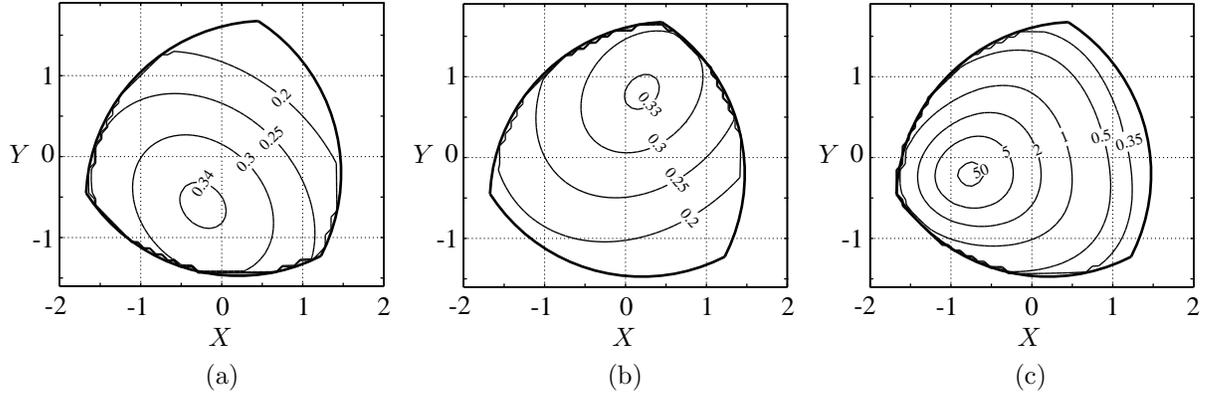


FIG. 5.18 – Distribution de la raideur du mécanisme 3-PUPS au nœud C_1 pour $z = 2$, $L = \sqrt{2}/2$, $\rho_{i,\min} = 1.5$ et $\rho_{i,\max} = 3$: (a) $K_{C_{1x}}$ (b) $K_{C_{1y}}$ (c) $K_{C_{1z}}$.

5.2.3.4 Analyse de la raideur

Dans cette section, il est de nouveau supposé que des forces externes \mathbf{f}_{C_i} sont appliquées directement aux nœuds C_i . Ce faisant, la raideur est définie comme la résistance d'un mécanisme au déplacement du nœud C_i ($\delta \mathbf{c}_i$) sous l'action d'une force perturbatrice $\delta \mathbf{f}_{C_i}$. Par conséquent, la raideur doit être calculée de manière indépendante pour chaque nœud. De plus, comme à la section 5.1.3.4, la raideur est calculée pour des configurations spécifiques des mécanismes ainsi que pour des directions spécifiques des forces perturbatrices choisies comme étant associées aux axes du repère XYZ de chaque mécanisme (c.-à-d. $K_{C_{ix}}$, $K_{C_{iy}}$ et $K_{C_{iz}}$). Puisqu'il est souhaité d'établir les distributions des raideurs des mécanismes à l'intérieur de leurs espaces atteignables cartésiens, il est toujours supposé que $\mathbf{f}_{C_i} = \mathbf{0}$. Une approximation numérique de la raideur est utilisée telle que, par exemple, $K_{C_{ix}} \approx 2\Delta f_{C_{ix}}/K\Delta c_{ix}$. Dans cette expression, Δc_{ix} peut être calculé avec un processus similaire à celui qui est décrit à la section 5.1.3.4. Le calcul des raideurs $K_{C_{iy}}$ et $K_{C_{iz}}$ s'effectue de la même manière.

Les distributions des raideurs des mécanismes à l'intérieur de leurs espaces atteignables cartésiens sont illustrées aux Figures 5.18 et 5.19 pour des valeurs fixes de z . Quoique cela n'est pas fait ici, la valeur de z peut facilement être variée pour générer une série de graphiques qui représentent la raideur dans les espaces atteignables entiers des mécanismes. Les résultats présentés aux Figures 5.18 et 5.19 s'appliquent seulement au nœud C_1 de chaque mécanisme. Toutefois, en raison de la symétrie de ces derniers, des résultats qualitativement équivalents sont obtenus pour les nœuds C_2 et C_3 .

En observant les Figures 5.18 et 5.19, il est constaté que la raideur du mécanisme 3-PURS est généralement supérieure à celle du mécanisme 3-PUPS. Encore une fois,

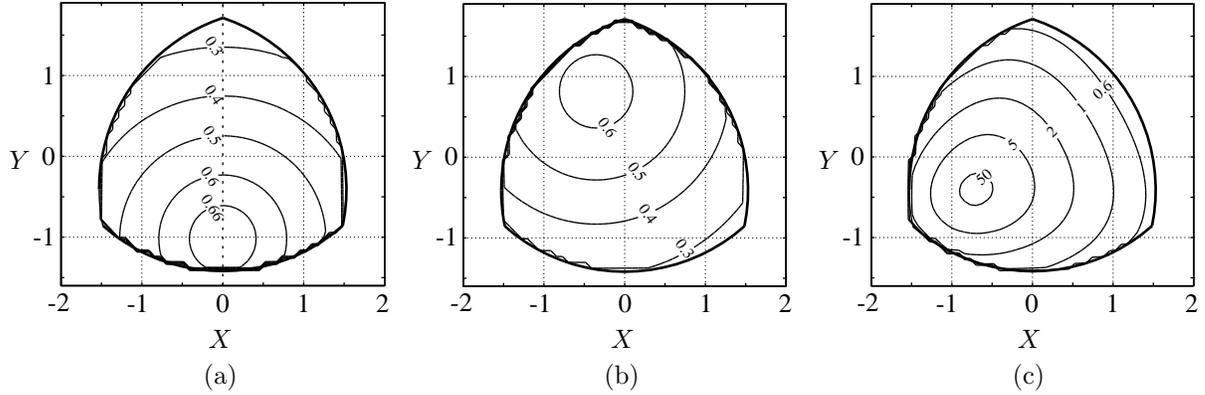


FIG. 5.19 – Distribution de la raideur du mécanisme 3-PURS au nœud C_1 pour $z = 2$, $L = \sqrt{2}/2$, $\rho_{i,\min} = 1.5$ et $\rho_{i,\max} = 3$: (a) $K_{C_{1x}}$ (b) $K_{C_{1y}}$ (c) $K_{C_{1z}}$.

cela peut s'expliquer par l'utilisation de ressorts additionnels dans l'architecture du mécanisme 3-PURS qui supprime le mécanisme infinitésimal associé au système de tensegrité antiprismatique triangulaire. Il peut également être observé dans les figures qu'il y a des configurations spécifiques où les raideurs sont maximales. Pour comprendre ces configurations, une justification physique doit être trouvée pour expliquer pourquoi une configuration donnée est plus raide qu'une autre. Avec cet objectif en tête, il est utile de calculer les raideurs des mécanismes dans toutes les directions possibles (de la même manière que la valeur maximale de $\|\mathbf{f}_V\|$ a été calculée pour toutes les directions possibles à la section 5.2.3.3) pour un nœud spécifique et pour une configuration donnée. La distribution résultante de la raideur peut être représentée par un volume qui englobe le nœud en question. Un exemple d'une telle représentation est fourni à la Figure 5.20 pour le mécanisme 3-PURS où la raideur au nœud C_1 est calculée pour le cas où $\boldsymbol{\psi} = [\pi/2, \pi/2, \pi/2]^T$ et $\mathbf{p} = [0, 0, 2]^T$. À partir de cette figure, les directions principales de raideur peuvent être identifiées. Celles-ci correspondent aux directions de raideur maximale (\mathbf{e}_{\max}) et de raideur minimale (\mathbf{e}_{\min}) ainsi que la direction de raideur intermédiaire (\mathbf{e}_{int}) qui est définie comme étant perpendiculaire au plan défini par \mathbf{e}_{\min} et \mathbf{e}_{\max} . La droite qui relie les nœuds A_1 et C_1 , qui correspond à l'axe de l'actionneur prismatique virtuel, est également illustrée ($\mathbf{e}_{A_1-C_1}$). En dressant de tels graphiques pour différentes configurations du mécanisme ainsi que pour tous les nœuds C_i , certains liens peuvent être identifiés entre les directions de raideurs principales et l'arrangement des composants du mécanisme. En fait, pour une configuration donnée, la raideur au nœud C_i est maximale (minimale) dans une direction qui tend à minimiser (maximiser) deux quantités. La première de ces quantités correspond au couple qui est généré sur l'actionneur prismatique virtuel autour du nœud A_i par une force externe appliquée au nœud C_i (ce couple est nul lorsque la force externe est parallèle au vecteur $\mathbf{e}_{A_i C_i}$). La deuxième quantité, pour sa part, correspond à la composante de cette même force externe qui est parallèle à l'axe de la liaison prismatique passive sur laquelle le

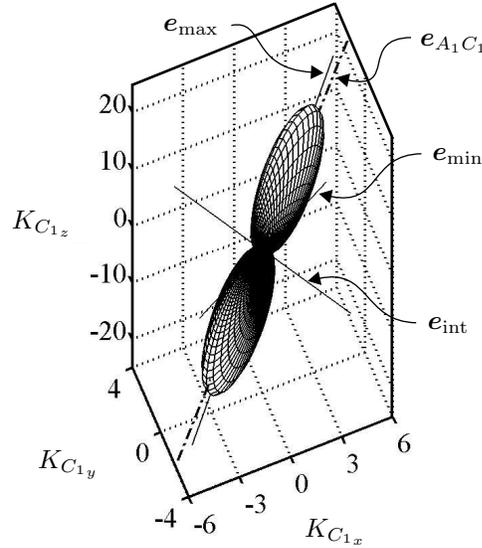


FIG. 5.20 – Distribution et directions principales de la raideur au nœud C_1 pour le mécanisme 3-PURS avec $\boldsymbol{\psi} = [\pi/2, \pi/2, \pi/2]^T$, $\boldsymbol{p} = [0, 0, 2]^T$ et $L = \sqrt{2}/2$.

nœud A_i se déplace librement. La direction de raideur maximale (minimale) correspond à un compromis entre les directions qui minimisent (maximisent) ces deux quantités où une emphase plus importante est accordée à la première quantité. En fait, tel qu'il est illustré à la Figure 5.20, les vecteurs unitaires \boldsymbol{e}_{\max} et $\boldsymbol{e}_{A_1C_1}$ sont presque parallèles.

En se basant sur les développements du paragraphe précédent, les configurations de raideur maximale dans la direction de l'axe Z (K_{C1z}) pour les deux mécanismes (voir les Figures 5.18(c) et 5.19(c)) peuvent être expliquées de manière relativement simple. En fait, ces configurations correspondent aux situations où la droite qui relie les nœuds A_1 et C_1 est parallèle à l'axe Z . Lorsque cela est le cas, une force perturbatrice appliquée au nœud C_1 dans la direction de l'axe Z ne génère pas de couple sur l'actionneur prismatique virtuel autour du nœud A_1 . De plus, la composante d'une telle force dans la direction de la liaison prismatique passive associée au nœud A_1 est nulle puisque cette liaison se retrouve dans le plan XY . Il en résulte que, dans une telle configuration, les raideurs des mécanismes au nœud C_1 dans la direction de l'axe Z sont infinies.

Les observations qui ont été faites jusqu'ici concernant les raideurs des mécanismes 3-PUPS et 3-PURS sont fondées sur le cas spécifique où $z = 2$. Lorsque la coordonnée z est variée, les aspects qualitatifs des distributions des raideurs des mécanismes demeurent inchangés (c.-à-d. qu'il existe toujours une configuration spécifique de raideur maximale). Par contre, lorsque z diminue, les raideurs des mécanismes dans la direction de l'axe Z diminuent globalement jusqu'au point où elles sont nulles lorsque $z = 0$. Il doit toutefois être noté que, localement, la raideur des mécanismes au nœud C_i dans

la direction de l'axe Z est toujours infinie lorsque la droite qui relie les nœuds A_i et C_i est parallèle à l'axe Z . Dans le cas des raideurs des mécanismes dans les directions des axes X et Y , elles augmentent de manière générale lorsque z diminue puisque la droite qui relie les nœuds A_i et C_i s'approche ainsi progressivement du plan XY .

5.2.4 Analyse dynamique

Pour la première fois dans cette thèse, un ensemble non minimal de coordonnées généralisées a été utilisé pour représenter la configuration d'un mécanisme. Ce faisant, des contraintes géométriques ont dû être introduites pour compléter la modélisation. Dans cette section, la même représentation est utilisée pour le développement des modèles dynamiques des mécanismes ainsi que la simulation de leurs mouvements. Par conséquent, une méthode est introduite pour assurer la satisfaction des contraintes pendant la simulation.

5.2.4.1 Modélisation

Les hypothèses suivantes sont effectuées pour permettre le développement de modèles dynamiques pour les mécanismes 3-PUPS et 3-PURS :

- Les manchons et les pistons des actionneurs du mécanisme 3-PUPS sont modélisés comme des barres longues et minces ayant des moments d'inertie $I_s = mL_p^2/12$ autour d'axes perpendiculaires à leurs axes longitudinaux et passant par leurs centres de masse (les inerties du manchon et du piston autour de leurs axes longitudinaux sont considérées être nulles).
- Les barres proximale et distale du mécanisme 3-PURS sont modélisées comme des barres longues et minces ayant des moments d'inertie $I_s = mL_s^2/12$ autour d'axes perpendiculaires à leurs axes longitudinaux et passant par leurs centres de masse (les inerties des barres autour de leurs axes longitudinaux sont considérées être nulles).
- Les ressorts et les câbles ont des masses négligeables.
- Il n'y a pas de frottement dans les liaisons passives et les actionneurs.
- Des amortisseurs visqueux de coefficient c_d sont montés en parallèle avec les ressorts.

□ Les forces gravitationnelles ne sont pas considérées.

Les configurations des mécanismes sont représentées par le vecteur $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\psi}^T, \mathbf{q}^T]^T$ où les définitions des vecteurs $\boldsymbol{\psi}$ et \mathbf{q} , fournies à la section 5.2.1, sont différentes pour chaque mécanisme. Comme il a été vu aux sections 5.2.1.1 et 5.2.1.2, des contraintes géométriques associées aux longueurs des câbles (équation (5.54)) doivent également être considérées. Ces contraintes peuvent être intégrées dans les modèles dynamiques des mécanismes en utilisant l'une de deux approches générales. La première approche consiste à développer le modèle dynamique selon la méthode habituelle avec l'ensemble non minimal de coordonnées généralisées pour ensuite utiliser les équations de contraintes pour projeter ce modèle dans un ensemble minimal d'équations de mouvement. Cette tâche peut toutefois s'avérer très difficile en raison de la non linéarité des contraintes. De plus, les équations de mouvement résultantes dépendent toujours au niveau des positions (et, dans certains cas, au niveau des vitesses) de l'ensemble non minimal de coordonnées. La deuxième approche, pour sa part, consiste à simuler la dynamique en utilisant l'ensemble non minimal de coordonnées tout en assurant de manière simultanée la satisfaction des contraintes. Plusieurs méthodes sont disponibles pour implanter cette approche dans un algorithme de simulation [96]. Parmi celles-ci, l'une des plus simples et mieux connues est fondée sur l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange pour développer des expressions explicites pour les forces internes associées aux contraintes géométriques du mécanisme [97], soit :

$$\mathbf{f}_c = \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (5.128)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange et $\boldsymbol{\Gamma}$ est obtenu à partir des contraintes comme suit :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \quad (5.129)$$

Cette expression peut être utilisée directement dans la formulation lagrangienne comme suit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_c + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\tau} \quad (5.130)$$

où T et U correspondent aux énergies cinétique et potentielle des mécanismes, respectivement. De plus, \mathbf{f}_d est un vecteur de forces dissipatives associées aux amortisseurs et \mathbf{f}_q est le vecteur de forces externes généralisées. Finalement, $\boldsymbol{\tau}$ est soit un vecteur de forces dans les actionneurs prismatiques du mécanisme 3-PUPS ou un vecteur de couples dans les actionneurs rotoïdes du mécanisme 3-PURS tandis que la matrice $\boldsymbol{\Lambda}$, qui est utilisée pour effectuer la transformation de l'espace des actionneurs vers l'espace des coordonnées de \mathbf{u} , est définie comme suit :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_{9 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Les quantités apparaissant dans l'équation (5.130) seront maintenant définies pour chaque mécanisme.

L'énergie potentielle du mécanisme 3-PUPS a déjà été définie à l'équation (5.67). Son énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 (\dot{\mathbf{p}}_{CGM_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CGM_i} + \dot{\mathbf{p}}_{CGPI_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CGPI_i}) + \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i \quad (5.132)$$

où $\boldsymbol{\omega}_i$, qui correspond au vecteur de vitesse angulaire du manchon et du piston du i^e actionneur prismatique et qui est exprimé dans un repère ayant son axe Y parallèle à l'axe longitudinal de l'actionneur, s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\cos \beta_i \dot{\alpha}_i, -\sin \beta_i \dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i]^T \quad (5.133)$$

De plus, \mathbf{I} est la matrice d'inertie du manchon et du piston, soit :

$$\mathbf{I} = I_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

Les éléments de \mathbf{f}_d , pour leur part, sont donnés par :

$$f_{d_j} = -\frac{\sqrt{3}}{3} c_d \sum_{k=1}^3 \dot{l}_k \frac{\partial l_k}{\partial u_j} - c_d \sum_{k=4}^6 \dot{l}_k \frac{\partial l_k}{\partial u_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u \quad (5.135)$$

Il peut être observé que l'amortissement est réduit d'un facteur $\sqrt{3}/3$ pour les ressorts qui relient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$. Cette réduction est appliquée pour refléter les différences équivalentes entre les raideurs des ressorts. Finalement, les forces externes généralisées sont calculées comme suit :

$$\mathbf{f}_q = \frac{\partial(\sum_{i=1}^3 \mathbf{f}_{C_i}^T \mathbf{c}_i)}{\partial \mathbf{u}} \quad (5.136)$$

Dans le cas du mécanisme 3-PURS, l'énergie potentielle est définie à l'équation (5.68) tandis que l'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 (\dot{\mathbf{p}}_{CGP_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CGP_i} + \dot{\mathbf{p}}_{CGD_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{CGD_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\omega}_{p_i}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{p_i} + \boldsymbol{\omega}_{d_i}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{d_i}) \quad (5.137)$$

où $\boldsymbol{\omega}_{p_i}$ et $\boldsymbol{\omega}_{d_i}$, qui représentent les vitesses angulaires des i^e barres proximale et distale dans des repères ayant leurs axes X parallèles aux axes longitudinaux des barres, sont exprimés comme suit :

$$\boldsymbol{\omega}_{p_i} = [\sin \beta_i \dot{\alpha}_i, \cos \beta_i \dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i]^T \quad (5.138)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{d_i} = \left[\sin(\beta_i + \theta_i)\dot{\alpha}_i, \cos(\beta_i + \theta_i)\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i + \dot{\theta}_i \right]^T \quad (5.139)$$

De plus, \mathbf{I} est la matrice d'inertie des barres, soit :

$$\mathbf{I} = I_s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

Pour ce mécanisme, les éléments du vecteur \mathbf{f}_d sont :

$$f_{d_j} = -c_d \sum_{k=1}^9 \dot{l}_k \frac{\partial l_k}{\partial u_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u \quad (5.141)$$

et le vecteur \mathbf{f}_q est encore une fois donné par l'équation (5.136).

En substituant ces définitions dans l'équation (5.130), les équations de mouvement des mécanismes sont obtenues sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\tau} \quad (5.142)$$

Pour chaque mécanisme, ce système correspond à 12 équations scalaires qui doivent être solutionnées pour 15 inconnues (c.-à-d. les éléments des vecteurs $\ddot{\mathbf{u}}$ et $\boldsymbol{\lambda}$) pour simuler le mouvement du mécanisme. À ces équations s'ajoutent les contraintes géométriques exprimées au niveau des accélérations, soit :

$$\boldsymbol{\Gamma}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\Gamma}}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (5.143)$$

Cette expression est obtenue en dérivant l'équation (5.54) deux fois par rapport au temps tout en considérant l'équation (5.129).

5.2.4.2 Simulation de systèmes contraints

La simulation de la dynamique de systèmes assujettis à des contraintes géométriques nécessite la solution des équations (5.142) et (5.143) pour les accélérations des coordonnées à un temps t_I , soit $\ddot{\mathbf{u}}_I$, où les positions et les vitesses des coordonnées sont connues au même instant (c.-à-d. \mathbf{u}_I et $\dot{\mathbf{u}}_I$). Par après, les accélérations sont intégrées pour obtenir \mathbf{u}_{I+1} et $\dot{\mathbf{u}}_{I+1}$ à l'incrément de temps subséquent t_{I+1} . Tel qu'il est noté par Kővecses *et al.* [96], il est relativement facile d'obtenir une valeur exacte de $\ddot{\mathbf{u}}_I$ si les valeurs de \mathbf{u}_I et de $\dot{\mathbf{u}}_I$ sont exactes. Toutefois, des erreurs numériques qui mènent à une violation des contraintes géométriques peuvent apparaître pendant l'intégration des accélérations. Une méthode est alors requise pour assurer la satisfaction des contraintes

pendant le calcul par intégration de \mathbf{u}_{I+1} et $\dot{\mathbf{u}}_{I+1}$. Dans cet ouvrage, l'approche utilisée a été proposée par Kövecses *et al.* [96] et est fondée sur le filtrage des vitesses et la correction des positions pendant l'intégration des accélérations.

Lorsque les accélérations sont intégrées pour obtenir les vitesses, il peut être supposé de manière générale que ces dernières violent les contraintes du mécanisme (exprimées au niveau des vitesses) en raison des imprécisions numériques. Il est toutefois possible de décomposer les vitesses obtenues par intégration comme suit [96] :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_v + \dot{\mathbf{u}}_c \quad (5.144)$$

où $\dot{\mathbf{u}}_v$ est la portion de $\dot{\mathbf{u}}$ qui viole les contraintes tandis que $\dot{\mathbf{u}}_c$ est compatible avec celles-ci. L'expression des contraintes géométriques au niveau des vitesses prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (5.145)$$

En prémultipliant les deux côtés de l'équation (5.144) par $\mathbf{\Gamma}$ et en notant que l'expression $\mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{u}}_c$ doit être nulle par définition puisqu'elle correspond aux contraintes au niveau des vitesses évaluées avec un ensemble compatible de vitesses ($\dot{\mathbf{u}}_c$), le résultat suivant est obtenu :

$$\dot{\mathbf{u}}_v = \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{u}} \quad (5.146)$$

où $\mathbf{\Gamma}^\dagger$ représente une inverse généralisée de $\mathbf{\Gamma}$. De plus, sachant que $\dot{\mathbf{u}}_c$ doit se retrouver dans le noyau de $\mathbf{\Gamma}$, il est constaté que :

$$\dot{\mathbf{u}}_c = (\mathbf{1}_{n_u} - \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{\Gamma}) \dot{\mathbf{u}} \quad (5.147)$$

Dans cette décomposition, l'inverse généralisée qui est utilisée prend la forme suivante :

$$\mathbf{\Gamma}^\dagger = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Gamma}^T (\mathbf{\Gamma} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Gamma}^T)^{-1} \quad (5.148)$$

ce qui lui donne une signification physique puisqu'elle est fondée sur l'utilisation de la matrice d'inertie généralisée comme matrice de pondération dans le calcul de la norme du vecteur $\dot{\mathbf{u}}$ [96]. Il est alors possible de filtrer les vitesses des coordonnées obtenues par intégration pour ne conserver que la portion qui est compatible avec les contraintes. Cela assure que les contraintes sont satisfaites au niveau des vitesses. En ce qui a trait aux contraintes exprimées au niveau des positions, il peut être supposé qu'elles sont violées pendant l'intégration des vitesses. De plus, il n'est pas possible d'utiliser un filtrage comme celui décrit ci-haut puisque les expressions des contraintes au niveau des positions sont non linéaires. Pour obtenir un ensemble de positions qui sont compatibles avec les contraintes, il est toutefois possible d'utiliser la correction suivante qui est appliquée de manière itérative en boucle ouverte [96] :

$$\mathbf{u}_{I+1}^{J+1} = \mathbf{u}_{I+1}^J - \mathbf{\Gamma}^\dagger (\mathbf{u}_{I+1}^J) \phi^J \quad (5.149)$$

où l'indice J représente l'itération et $\mathbf{\Gamma}^\dagger(\mathbf{u}_{I+1}^J)$ est l'inverse généralisée de $\mathbf{\Gamma}$ évaluée à \mathbf{u}_{I+1}^J . En utilisant cette méthode de correction pour une quantité fixe d'itérations, les contraintes géométriques au niveau des positions sont satisfaites de manière adéquate. Le processus de simulation est donc résumé par les étapes suivantes :

1. Les équations (5.142) et (5.143) sont solutionnées pour $\ddot{\mathbf{u}}_I$ au temps t_I en supposant que $\dot{\mathbf{u}}_I$ et \mathbf{u}_I sont connus de manière exacte.
2. $\dot{\mathbf{u}}_{I+1}$ est calculé par intégration des accélérations.
3. Le filtrage des vitesses est utilisé pour éliminer la portion de $\dot{\mathbf{u}}_{I+1}$ qui viole les contraintes au niveau des vitesses : $\dot{\mathbf{u}}_{I+1} = \left[\mathbf{1}_{n_u} - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_I)^\dagger \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_I) \right] \dot{\mathbf{u}}_{I+1}$.
4. \mathbf{u}_{I+1} est calculé par intégration des vitesses filtrées.
5. La méthode de correction itérative (équation (5.149)) est appliquée à \mathbf{u}_{I+1} pour dix itérations.
6. Les vitesses sont filtrées une deuxième fois mais dans ce cas les positions des coordonnées au temps t_{I+1} sont utilisées : $\dot{\mathbf{u}}_{I+1} = \left[\mathbf{1}_{n_u} - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_{I+1})^\dagger \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_{I+1}) \right] \dot{\mathbf{u}}_{I+1}$.

À la section suivante, la simulation est effectuée en imposant une trajectoire dans l'espace articulaire comme ce fut le cas avec les autres mécanismes de cette thèse. Une telle approche nécessite toutefois quelques modifications à la méthode de simulation. En fait, puisque $\boldsymbol{\psi}$ et ses dérivées sont maintenant imposés, seulement la partie du modèle dynamique associée au vecteur \mathbf{q} doit être considérée dans l'équation (5.142). Les équations (5.147) et (5.149), qui sont utilisées pendant la simulation pour assurer la satisfaction des contraintes géométriques, doivent alors être modifiées en conséquence. Les contraintes géométriques au niveau des vitesses peuvent être réécrites comme suit :

$$\mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{u}} = \left[\mathbf{\Gamma}_\psi, \mathbf{\Gamma}_q \right] \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\psi}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.150)$$

La valeur de $\dot{\mathbf{q}}$ qui satisfait ces contraintes pour une valeur donnée de $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ est calculée comme suit :

$$\dot{\mathbf{q}}_c = (\mathbf{1}_N - \mathbf{\Gamma}_q^\dagger \mathbf{\Gamma}_q) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Gamma}_q^\dagger \mathbf{\Gamma}_\psi \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (5.151)$$

avec :

$$\mathbf{\Gamma}_q^\dagger = \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{\Gamma}_q^T (\mathbf{\Gamma}_q \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{\Gamma}_q^T)^{-1} \quad (5.152)$$

où \mathbf{M}_q correspond à la portion de \mathbf{M} qui est associée au vecteur \mathbf{q} . Finalement, l'équation (5.149) est remplacée par :

$$\mathbf{q}_{I+1}^{J+1} = \mathbf{q}_{I+1}^J - \mathbf{\Gamma}_q^\dagger(\mathbf{u}_{I+1}^J) \boldsymbol{\phi}^J \quad (5.153)$$

5.2.4.3 Résultats de simulation

Dans cette section, des exemples de la simulation des mécanismes sont présentés et commentés. Pour faciliter la comparaison des mécanismes, leurs paramètres sont autant que possible attribués les mêmes valeurs. Ce faisant, $m = 2.5$ kg, $K = 1000$ kg, $c_d = 250$ N · s/m et $L = \sqrt{2}/2$ m pour les deux mécanismes. De plus, $L_p = 1.5$ m pour le mécanisme 3-PUPS tandis que $L_s = \sqrt{2}$ m pour le mécanisme 3-PURS. Finalement, il est supposé que les forces externes appliquées sur les mécanismes sont nulles (c.-à-d. $\mathbf{f}_{C_i} = 0$). Au début de la trajectoire qui est imposée aux mécanismes, leurs effecteurs se retrouvent à une position $\mathbf{p}_I = [0, 0, 1.5]^T$ m. Il est alors souhaité amener les effecteurs à une position finale $\mathbf{p}_F = [0.75, 0.75, 2]^T$ m au temps $t_F = 3$ s. La trajectoire équivalente imposée dans l'espace des actionneurs prismatiques du mécanisme 3-PUPS est donnée par l'expression suivante :

$$\rho_i = \rho_{i_I} - \left(\frac{\rho_{i_F} - \rho_{i_I}}{2} \right) \left\{ \cos \left[\left(\frac{t - t_I}{t_F - t_I} \right) \pi \right] - 1 \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_F \quad (5.154)$$

où $\boldsymbol{\psi}_I = [1.695, 1.695, 1.695]^T$ m et $\boldsymbol{\psi}_F = [2.683, 2.397, 2.073]^T$ m sont obtenus à partir de la solution au problème statique inverse. De la même manière, la trajectoire imposée dans l'espace des actionneurs rotoïdes du mécanisme 3-PURS est donnée par l'expression suivante :

$$\theta_i = \theta_{i_I} - \left(\frac{\theta_{i_F} - \theta_{i_I}}{2} \right) \left\{ \cos \left[\left(\frac{t - t_I}{t_F - t_I} \right) \pi \right] - 1 \right\}, \quad t_I \leq t \leq t_F \quad (5.155)$$

où $\boldsymbol{\psi}_I = [105.7, 105.7, 105.7]^T$ degrés et $\boldsymbol{\psi}_F = [29.98, 70.37, 81.85]^T$ degrés. Les trajectoires correspondantes aux niveaux des vitesses et des accélérations sont obtenues en dérivant les équations (5.154) et (5.155) par rapport au temps.

Les évolutions des positions des effecteurs des mécanismes pendant la trajectoire sont montrées aux Figures 5.21 et 5.22. Dans ces figures, il peut être observé que les mécanismes oscillent autour de leurs configurations d'équilibre finales lorsque $t > t_F$. Cela est rendu possible par les degrés de liberté non contraints des mécanismes. Dans le cas du mécanisme 3-PUPS, en raison du mécanisme infinitésimal qui est présent dans son architecture, l'amplitude moyenne et la durée de ses oscillations sont plus grandes que pour le mécanisme 3-PURS.

Il est possible d'éliminer les oscillations des mécanismes en augmentant le niveau d'amortissement. Toutefois, une attention particulière doit être portée à la relation entre l'amortissement et les degrés de liberté non contraints des mécanismes auxquels sont associées les oscillations. Il a été observé par Oppenheim et Williams [64, 65] que l'utilisation d'amortisseurs en parallèle avec les composants d'un système de tensegrité n'est

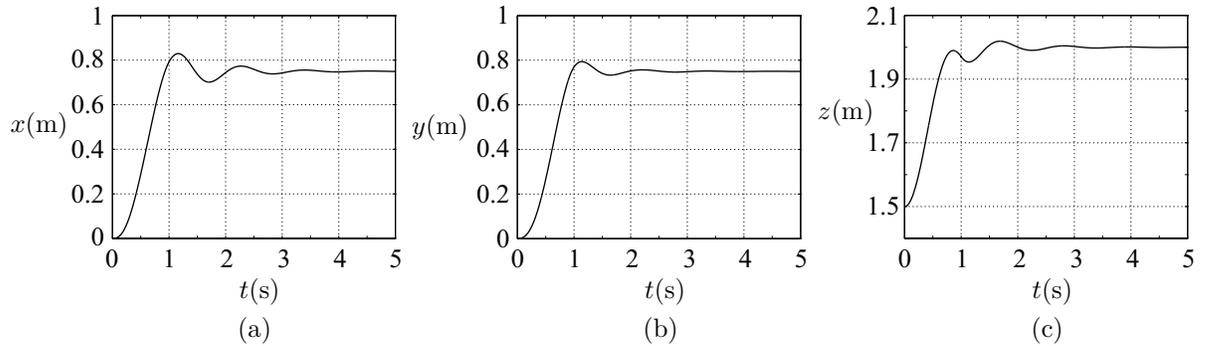


FIG. 5.21 – Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme 3-PUPS en fonction du temps pour la trajectoire simulée : (a) x (b) y (c) z .

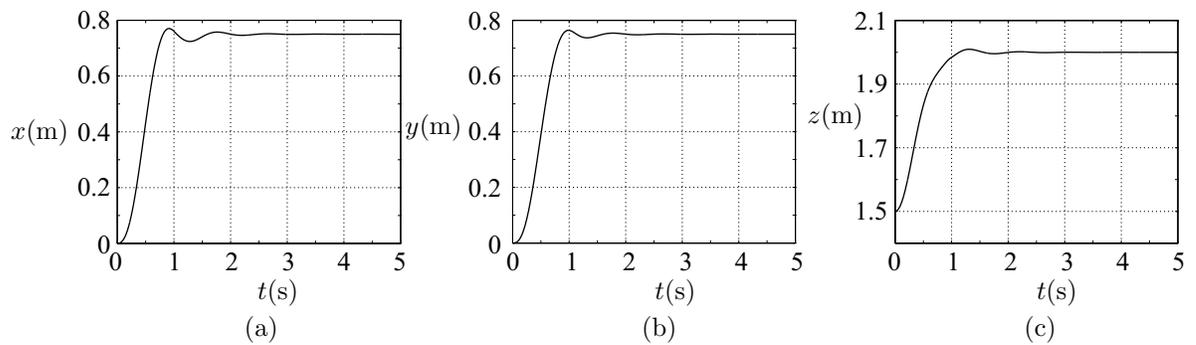


FIG. 5.22 – Coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur du mécanisme 3-PURS en fonction du temps pour la trajectoire simulée : (a) x (b) y (c) z .

pas toujours efficace pour supprimer ses vibrations. Cette observation est particulièrement vraie dans le cas des systèmes de tensegrité antiprismatiques (dont le mécanisme 3-PUPS est un exemple) où la présence d'un mécanisme infinitésimal mène à des vibrations autour des configurations d'équilibre pour lesquelles les changements requis aux longueurs des composants ne sont pas significatifs. Il est connu que les mécanismes 3-PUPS et 3-PURS ont chacun six degrés de liberté non contraints. Parmi ceux-ci, il y en a trois qui sont associés aux déplacements des nœuds A_i le long des liaisons prismatiques passives. Pour supprimer les vibrations dans ces liaisons, il peut être supposé que l'amortissement parallèle aux ressorts qui lient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$ est suffisant. Pour ce qui est des trois autres degrés de liberté non contraints, ils sont associés aux six rotations des liaisons de cardan (deux rotations par liaison) qui sont utilisées pour attacher les actionneurs prismatiques (mécanisme 3-PUPS) ou les barres proximales (mécanisme 3-PURS) aux nœuds A_i (en raison des longueurs fixes des câbles dans les mécanismes, seulement trois de ces six rotations sont indépendantes). Les vibrations dans les directions de ces degrés de liberté non contraints sont amorties par des amortisseurs montés en parallèle avec les ressorts qui relient les paires de nœuds $A_i C_{i-1}$ et, dans le cas du mécanisme 3-PURS, les paires de nœuds $A_i C_{i+1}$. Toutefois, en raison des architectures des mécanismes, cet amortissement n'est pas efficace pour supprimer les vibrations. Par conséquent, tel qu'il est suggéré par Oppenheim et Williams [64, 65], il serait plus avantageux d'amortir directement les rotations associées aux liaisons de cardan. En plus d'être beaucoup plus efficace en ce qui concerne l'amortissement des vibrations, une telle approche a l'avantage de ne pas augmenter l'inertie des pièces mobiles des mécanismes. Pour terminer, il peut être noté que la méthode de simulation décrite à la section 5.2.4.2 a permis de satisfaire les contraintes géométriques pendant la simulation d'un ordre de 10^{-14} au niveau des positions et de 10^{-16} au niveau des vitesses.

5.3 Résumé

Dans ce chapitre, trois mécanismes de tensegrité spatiaux ont été développés et analysés. Parmi ces mécanismes, il y en a un qui découle du système de tensegrité antiprismatique triangulaire tandis que les deux autres sont des produits de la version renforcée de ce même système. Tel qu'il est décrit au tout début du chapitre, l'ajout de ressorts au système de tensegrité antiprismatique triangulaire permet d'éliminer le mécanisme infinitésimal qui est présent dans son architecture. Les bienfaits résultants peuvent être identifiés en comparant les performances des mécanismes 3-PUPS et 3-PURS. En se référant aux sections 5.2.3 et 5.2.4, il est constaté que les ressorts additionnels permettent au mécanisme 3-PURS d'avoir une raideur plus élevée, une plus grande capacité pour

résister aux chargements externes ainsi que des propriétés dynamiques améliorées. Par contre, la version renforcée du système de tensegrité antiprismatique triangulaire n'est pas sans ses faiblesses. En fait, des mesures ont dû être prises pendant le développement des mécanismes fondés sur le système renforcé pour éviter les interférences entre leurs composants en compression. Des barres courbées ont été utilisées à cette fin pour le mécanisme de la section 5.1 tandis que dans le cas du mécanisme 3-PURS la solution proposée a été d'utiliser des actionneurs prismatiques virtuels. Dans chaque cas, les mécanismes résultants ne respectent pas complètement les propriétés de tensegrité présentés au chapitre 2 puisque leurs barres sont chargées en flexion. De plus, la présence de flexion mène à une conception plus massive des barres ce qui augmente l'inertie des pièces mobiles de ces mécanismes.

Il peut être constaté que les performances des mécanismes 3-PUPS et 3-PURS sont en général plus intéressantes que celles du mécanisme de la section 5.1. D'une part, la forme de l'espace atteignable du mécanisme de la section 5.1 n'est pas très attrayante puisqu'il se divise en deux régions distinctes (quoiqu'il est possible pour le mécanisme de passer d'une région à l'autre pendant son opération). De plus, l'utilisation de câbles pour les triangles supérieurs des mécanismes 3-PUPS et 3-PURS rend possible l'utilisation de plates-formes à titre d'effecteur ce qui peut être utile pour certaines applications. Finalement, le mécanisme de la section 5.1 est également désavantagé en raison des interférences mécaniques imminentes de ses barres qui réduisent sa capacité de déformation sous l'application de chargements externes.

Pour terminer, il est noté qu'un mécanisme équivalent à celui de la section 5.1 mais fondé sur le système de tensegrité antiprismatique triangulaire (la version qui n'est pas renforcée) pourrait également être développé. Il est possible de prévoir que le comportement d'un tel mécanisme serait très similaire au mécanisme de la section 5.1 (comme c'est le cas pour le mécanisme 3-PUPS par rapport au mécanisme 3-PURS).

Chapitre 6

Développement et analyse de mécanismes de tensegrité modulaires

Dans ce chapitre, deux mécanismes de tensegrité modulaires sont introduits. Chaque mécanisme est obtenu par un assemblage en série de modules de tensegrité qui sont développés à partir du système de tensegrité en forme de X de Snelson [13]. L'actionnement des mécanismes leur permet d'avoir une capacité de déploiement ainsi que des espaces atteignables relativement grands.

6.1 Mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté

6.1.1 Description du mécanisme

Le mécanisme modulaire plan à deux degrés de liberté est obtenu par un assemblage en série de N modules de tensegrité qui sont tous identiques. La section centrale de la Figure 6.1 correspond à l'un de ces modules qui est formé par deux composants en compression et quatre composants en tension. Les composants en compression sont des barres de masse m et de longueur L qui relient les paires de nœuds $A_i B_{i+1}$ et $B_i A_{i+1}$. Deux des composants en tension sont des ressorts qui relient les paires de nœuds $A_i B_i$ et $A_{i+1} B_{i+1}$ tandis que les deux autres sont des câbles qui relient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$ et $B_i B_{i+1}$. Les ressorts ont des raideurs K , des longueurs l_i ($i = 0, 1, \dots, N$) et des longueurs libres nulles.

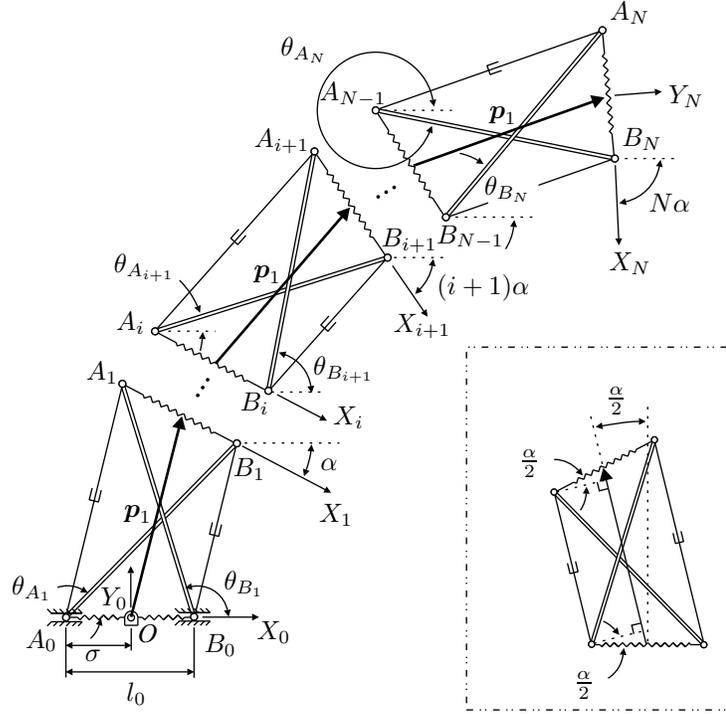


FIG. 6.1 – Mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté.

Le mécanisme modulaire est obtenu à partir de l'assemblage en série de N modules tel qu'il est illustré à la Figure 6.1 où les connexions entre les modules sont effectuées avec des liaisons rotoïdes. Ce concept a déjà été proposé par Aldrich *et al.* [67]. Toutefois, le mécanisme étudié ici innove par sa stratégie d'actionnement ainsi que son utilisation de ressorts. La base du mécanisme correspond à l'origine du repère X_0Y_0 , soit le nœud O . Les nœuds A_0 et B_0 peuvent se déplacer librement sur l'axe X_0 à l'aide de liaisons prismatiques passives. De plus, ces nœuds sont attachés au nœud O par des ressorts de raideur $2K$. Un repère mobile X_NY_N est défini comme étant attaché au centre géométrique des nœuds A_N et B_N avec son axe X_N dirigé vers le nœud B_N . Selon la définition du module de tensegrité donnée ci-haut, les nœuds A_N et B_N sont reliés par un ressort de raideur K . Par contre, toutes les autres paires de nœuds A_iB_i (c.-à-d. à l'exception des paires de nœuds A_0B_0 et A_NB_N) sont reliées par des ressorts de raideur $2K$ puisqu'à ces endroits l'assemblage des modules mène à la combinaison en parallèle de deux ressorts de raideur K . À partir de la Figure 6.1, des vecteurs associés aux positions des nœuds A_0 et B_0 dans le repère X_0Y_0 peuvent s'écrire comme $\mathbf{a}_0 = [-\sigma, 0]^T$ et $\mathbf{b}_0 = [l_0 - \sigma, 0]^T$, respectivement, tandis que les positions des autres nœuds sont données par :

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_{i-1} + Le_{B_i} \quad , \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{a}_{i-1} + Le_{A_i} \quad (6.1)$$

où :

$$\mathbf{e}_{A_i} = [\cos \theta_{A_i}, \sin \theta_{A_i}]^T \quad , \quad \mathbf{e}_{B_i} = [\cos \theta_{B_i}, \sin \theta_{B_i}]^T \quad (6.2)$$

sont des vecteurs unitaires dirigés le long des barres et où les angles θ_{A_i} et θ_{B_i} sont mesurés à partir de l'axe X_0 jusqu'aux barres correspondantes. Finalement, les centres de masse des barres du i^e module sont donnés par :

$$\mathbf{p}_{CG_{i_1}} = \frac{\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{b}_i}{2} \quad \mathbf{p}_{CG_{i_2}} = \frac{\mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{a}_i}{2} \quad (6.3)$$

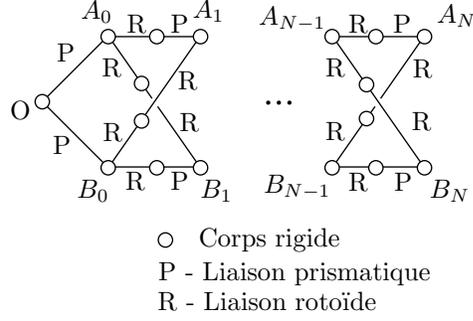
et les longueurs des ressorts sont obtenues comme suit :

$$l_i = \sqrt{(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)} \quad (6.4)$$

où $i = 1, 2, \dots, N$ dans les équations (6.1)–(6.3) tandis que $i = 0, 1, \dots, N$ dans l'équation (6.4).

Le mécanisme est actionné en modifiant les longueurs des câbles qui relient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$ et $B_i B_{i+1}$. Pour des raisons qui seront expliquées à la section 6.1.2.1, il est choisi d'effectuer cet actionnement de manière à ce que les longueurs des câbles qui relient les nœuds A_i soient toutes égales (cette condition s'applique également aux câbles qui relient les nœuds B_i). Il existe différentes approches qui permettent la réalisation d'une telle stratégie d'actionnement. Par exemple, il est possible d'utiliser des treuils actionnés pour modifier de manière individuelle les longueurs de chaque câble tout en assurant, par l'entremise d'un algorithme de commande, que les positions des treuils qui sont associés aux câbles devant avoir les mêmes longueurs soient synchronisées. Une telle approche nécessite toutefois l'installation des $2N$ actionneurs (c.-à-d. deux actionneurs par module) sur les parties mobiles du mécanisme ce qui peut nuire à sa performance dynamique. Il est également possible de remplacer les câbles du mécanisme avec des fils fabriqués à partir d'alliages à mémoire de forme. Cette méthode a l'avantage de ne pas augmenter l'inertie du mécanisme. Toutefois, la gamme d'opération réduite de ce type d'actionneur mène à un espace atteignable plus petit pour le mécanisme. Peu importe la méthode d'actionnement utilisée, il est dorénavant supposé que les distances qui séparent les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$ sont toutes égales à ρ_1/N et que leur somme est ρ_1 . De même, les distances qui séparent les paires de nœuds $B_i B_{i+1}$ sont supposées être égales à ρ_2/N , la somme de ces distances étant égale à ρ_2 .

Le graphe de mobilité du mécanisme pour N modules est illustré à la Figure 6.2. À partir de cette figure, il est possible de déduire les quantités suivantes : $d_F = 3$, $n_B = 6N + 3$, $n_J = \sum \mathcal{D}_i = 8N + 2$ et $\mathcal{D}_S = 0$. En substituant ces valeurs dans l'équation (3.2), il est trouvé que $\mathcal{D}_G = 2N + 2$. Le mécanisme a alors $2N + 2$ degrés de liberté dont $2N$ sont contraints lorsque les longueurs des câbles sont fixes. Peu importe la quantité de modules, cela laisse au mécanisme deux degrés de liberté non contraints, associés aux variables σ et l_0 (voir la Figure 6.1), lui permettant de toujours demeurer dans une configuration d'équilibre. De plus, en modifiant les longueurs des câbles tout en respectant les conditions énumérées au paragraphe précédent, il est possible


 FIG. 6.2 – Graphe de mobilité du mécanisme pour N modules.

de contrôler la position de cet équilibre avec deux degrés de liberté qui sont choisis ici comme les coordonnées cartésiennes de la position du repère $X_N Y_N$ par rapport au repère $X_0 Y_0$. Le vecteur des variables de sortie correspond alors au vecteur qui relie les origines des repères $X_0 Y_0$ et $X_N Y_N$, soit $\mathbf{p}_N = [x_N, y_N]^T$. Pour sa part, le vecteur des variables d'entrée du mécanisme contient les sommes des longueurs des câbles associés aux nœuds A_i et B_i , soit $\boldsymbol{\psi} = [\rho_1, \rho_2]^T$. Le vecteur de coordonnées généralisées suivant, de dimension $(2N + 2) \times 1$, est utilisé de concert avec le vecteur $\boldsymbol{\psi}$ pour représenter la configuration du mécanisme :

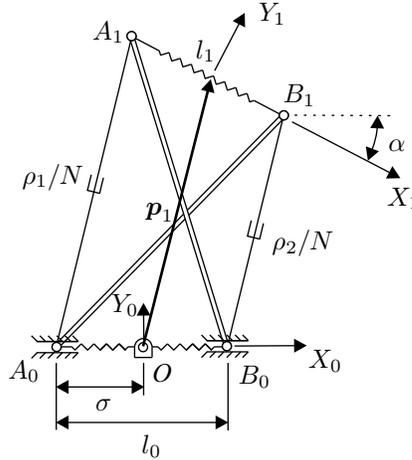
$$\mathbf{q} = [\sigma, l_0, \theta_{A_1}, \theta_{B_1}, \dots, \theta_{A_i}, \theta_{B_i}, \dots, \theta_{A_N}, \theta_{B_N}]^T \quad (6.5)$$

De plus, les contraintes géométriques suivantes, associées aux longueurs des câbles, doivent être considérées :

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)^T (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) - (\rho_1/N)^2 \\ (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) - (\rho_2/N)^2 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i) - (\rho_1/N)^2 \\ (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) - (\rho_2/N)^2 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_N - \mathbf{a}_{N-1})^T (\mathbf{a}_N - \mathbf{a}_{N-1}) - (\rho_1/N)^2 \\ (\mathbf{b}_N - \mathbf{b}_{N-1})^T (\mathbf{b}_N - \mathbf{b}_{N-1}) - (\rho_2/N)^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

6.1.2 Analyse cinématique et statique

Dans cette section, une analyse cinématique et statique du mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté est présentée pour le cas où aucun chargement externe n'est appliqué au mécanisme. Dans la mesure du possible, les résultats sont


 FIG. 6.3 – Mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté avec $N = 1$.

développés pour une quantité arbitraire de modules (c.-à-d. les résultats sont exprimés en fonction de N). De plus, certains résultats associés à des quantités spécifiques de modules sont tout de même exprimés en fonction de N pour faire ressortir les expressions qui sont communes à tous les mécanismes (p. ex. les configurations singulières).

6.1.2.1 Problème statique direct

Selon la définition du mécanisme, les modules sont tous construits avec les mêmes composants. La seule exception à cette règle est le premier module où deux ressorts de raideur $2K$ sont montés en série pour donner un ressort équivalent de raideur K tels que ceux utilisés dans les autres modules (voir la Figure 6.3). En utilisant la méthode d'actionnement proposée à la section 6.1.1, les distances qui séparent les nœuds A_i et A_{i+1} ainsi que les nœuds B_i et B_{i+1} dans chaque module sont données par ρ_1/N et ρ_2/N , respectivement. À partir de ces affirmations, il est possible de constater que les configurations d'équilibre des modules, lorsque ceux-ci sont traités séparément, doivent être les mêmes. Dans ce qui suit, le problème statique direct du mécanisme est alors résolu pour un seul module et le résultat est ensuite généralisé pour tous les modules.

En se référant à la Figure 6.3, la configuration du mécanisme avec un seul module est complètement déterminée par les longueurs des câbles ainsi que les paramètres σ et l_0 . Des expressions en fonction de ces paramètres pour les sinus et cosinus des angles θ_{A_1} et θ_{B_1} apparaissant dans l'équation (6.2) sont trouvées comme suit :

$$\cos \theta_{A_1} = \frac{L^2 + l_0^2 - \rho_2^2}{2Ll_0}, \quad \cos \theta_{B_1} = \frac{\rho_1^2 - L^2 - l_0^2}{2Ll_0} \quad (6.7)$$

avec $\sin \theta_{A_1} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{A_1}}$ et $\sin \theta_{B_1} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{B_1}}$ puisque $0 \leq \theta_{A_1}, \theta_{B_1} \leq \pi$. Les

positions des nœuds du mécanisme étant maintenant connues, son énergie potentielle pour le cas où $N = 1$ est obtenue comme suit :

$$U_1 = \frac{1}{2}K \left[2\sigma^2 + 2(l_0 - \sigma)^2 + l_1^2 \right] \quad (6.8)$$

où la longueur l_1 est obtenue à partir de l'équation (6.4). Les points critiques de U_1 sont obtenus à partir des conditions $\partial U_1 / \partial \sigma = 0$ et $\partial U_1 / \partial l_0 = 0$. La première de ces conditions mène à $2K(2\sigma - l_0) = 0$ d'où il est clair que $\sigma = l_0/2$ pour qu'un point critique de U_1 soit possible. La deuxième condition, pour sa part, mène à l'expression suivante :

$$\frac{\partial U_1}{\partial l_0} = \frac{E_1}{E_2} = 0 \quad (6.9)$$

où :

$$E_2 = 2l_0^3 \left[(l_0 + L + \rho_1)(l_0 + L - \rho_1)(l_0 - L + \rho_1)(l_0 - L - \rho_1)(l_0 + L + \rho_2)(l_0 + L - \rho_2)(l_0 - L + \rho_2)(l_0 - L - \rho_2) \right]^{1/2} \quad (6.10)$$

Il peut être observé que E_2 est nul lorsque $l_0 = 0$, $l_0 = \pm L \pm \rho_1$ ou $l_0 = \pm L \pm \rho_2$. En se référant à la section 6.1.2.4, il peut toutefois être démontré que ces situations ne peuvent pas se produire à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme. Par conséquent, il peut être affirmé que $E_2 \neq 0$ et que la condition de l'équation (6.9) se simplifie à $E_1 = 0$. La substitution de $\sigma = l_0/2$ dans E_1 et l'élimination de ses termes radicaux donne :

$$E_1 = -4K^2 L^2 l_0^4 (\rho_1 - \rho_2)^2 (\rho_1 + \rho_2)^2 (l_0^2 - L^2 - \rho_1 \rho_2) (l_0^2 - L^2 + \rho_1 \rho_2) (2l_0^2 + 2L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2) = 0 \quad (6.11)$$

En supposant que $l_0 > 0$, les valeurs de l_0 pour lesquelles cette condition est satisfaite sont :

$$l_{0I} = \sqrt{L^2 - \rho_1 \rho_2} \quad (6.12)$$

$$l_{0II} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2L^2 \right)^{1/2} \quad (6.13)$$

Il peut également être observé que $E_1 = 0$ lorsque $\rho_1 = \rho_2$ ou $l_0 = \sqrt{L^2 + \rho_1 \rho_2}$. Par contre, il peut être vérifié que ces solutions correspondent à des racines de E_1 qui apparaissent pendant l'élimination des termes radicaux et qui, par conséquent, ne doivent pas être considérées. Les équations (6.12)–(6.13), lorsque combinées avec $\sigma = l_0/2$, correspondent aux points critiques de U_1 . Il reste maintenant à identifier les points critiques qui sont associés à des minimums stables de U_1 . Pour le cas où $N = 1$ et $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2}L/2$, la solution donnée par l'équation (6.12) mène à $l_0 = \sqrt{2}L/2$. Dans ce cas, le mécanisme est dans une configuration où ses barres forment les diagonales d'un carré dont le périmètre est défini par les câbles et les ressorts. Puisqu'une telle configuration est reconnue comme étant dans un équilibre stable, la solution au problème

statique direct du mécanisme pour N modules est supposée être donnée par $\sigma = l_0/2$ avec :

$$l_0 = \frac{\sqrt{N^2 L^2 - \rho_1 \rho_2}}{N} \quad (6.14)$$

Il ne peut toutefois pas être affirmé, pour le moment, que cette solution est toujours valide et que la solution donnée par l'équation (6.13) ne l'est pas. Une preuve formelle de ces hypothèses sera fournie à la section 6.1.2.6.

En substituant $\sigma = l_0/2$ et l'équation (6.14) dans l'équation (6.7) et en substituant par la suite le résultat dans les équations (6.1) – (6.2), les positions des nœuds A_1 et B_1 sont obtenues. La solution au problème statique direct du mécanisme avec un seul module est alors calculée comme :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1}{2} \quad (6.15)$$

avec :

$$x_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)}{4N\sqrt{N^2 L^2 - \rho_1 \rho_2}} \quad (6.16)$$

$$y_1 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{4N} \left[\frac{(2LN + \rho_1 + \rho_2)(2LN - \rho_1 - \rho_2)}{N^2 L^2 - \rho_1 \rho_2} \right]^{1/2} \quad (6.17)$$

Il est également possible de trouver les expressions suivantes pour le sinus et le cosinus de α :

$$\sin \alpha = \frac{(\rho_2 - \rho_1) \left[\frac{(2LN + \rho_1 + \rho_2)(2LN - \rho_1 - \rho_2)}{N^2 L^2 - \rho_1 \rho_2} \right]^{1/2}}{2(N^2 L^2 - \rho_1 \rho_2)} \quad (6.18)$$

$$\cos \alpha = \frac{2N^2 L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2}{2(N^2 L^2 - \rho_1 \rho_2)}$$

De plus, il peut facilement être vérifié que $l_1 = l_0$. En fait, il aurait pu être déduit de manière intuitive que les ressorts doivent avoir des longueurs égales lorsque le mécanisme est en équilibre puisqu'ils ont la même raideur. Le mécanisme adopte alors la forme d'un trapèze avec les barres comme ses diagonales et où les câbles sont parallèles. Finalement, les équations (6.16) – (6.18) sont valides pour toutes valeurs de N à condition que les valeurs de ρ_1 et ρ_2 soient choisies en conséquence.

Dans les développements précédents, il a été supposé (sans preuve) que les modules sont indépendants les uns des autres et que leurs configurations d'équilibre, qui sont identiques pour chaque module, peuvent être calculées séparément. Ces hypothèses sont maintenant justifiées. Il est bien connu que tous les systèmes de tensegrité ont la capacité

d'être autocontraints. En absence de chargements externes et de forces gravitationnelles, il est donc possible pour un système de demeurer en équilibre sans nécessiter de forces de réaction sur son environnement même lorsque des forces internes sont introduites dans ses composants. Dans le cas du module de tenségrité étudié ici, les forces internes présentes dans les ressorts sont alors en équilibre avec les forces dans les barres et les câbles. Pour cette raison, et sachant que $l_i = l_0$, il peut être constaté qu'il n'y a pas de forces d'interaction entre deux modules voisins lorsqu'ils sont assemblés avec des liaisons rotoïdes passives tel qu'il est décrit à la section 6.1.1. Il en résulte que le comportement de chaque module de tenségrité n'est pas influencé par les modules voisins. Ces observations ne sont valides que dans les cas où les longueurs des câbles de chaque module sont les mêmes ce qui explique la stratégie d'actionnement qui a été proposée à la section 6.1.1.

Puisque les configurations d'équilibre de tous les modules sont les mêmes, le vecteur qui relie les centres géométriques des paires de nœuds $A_i B_i$ et $A_{i+1} B_{i+1}$, lorsqu'il est exprimé dans le repère $X_i Y_i$, est donné par \mathbf{p}_1 pour tous les modules (voir la Figure 6.1). De plus, le repère $X_{i+1} Y_{i+1}$ est pivoté d'un angle α par rapport au repère $X_i Y_i$ autour d'un axe perpendiculaire au plan du mécanisme. À partir de ces observations, si le vecteur \mathbf{p}_1 et l'angle α sont connus en fonction des positions des actionneurs et des paramètres du mécanisme, la solution au problème statique direct du mécanisme pour N modules est obtenue tout simplement en prenant la somme des vecteurs \mathbf{p}_1 , soit :

$$\mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^{i-1} \mathbf{p}_1 \quad (6.19)$$

où \mathbf{Q} , qui est une matrice de rotation qui amène le repère $X_i Y_i$ parallèle au repère $X_{i+1} Y_{i+1}$, est donnée par :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

6.1.2.2 Problème statique inverse

Pour solutionner le problème statique inverse d'un mécanisme avec N modules, la solution du problème pour le cas où $N = 1$ doit premièrement être calculée. La solution des équations (6.16) et (6.17) pour ρ_1 et ρ_2 donne :

$$\rho_j = N \cdot \left(\frac{y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \zeta x_1 \sqrt{L^2 - x_1^2 - y_1^2}}{y_1} \right) \quad (6.21)$$

où $\zeta = 1$ lorsque $j = 1$ et $\zeta = -1$ lorsque $j = 2$. Cette expression correspond à la solution au problème statique inverse pour un seul module. Lorsque $N > 1$, l'équation (6.19) doit

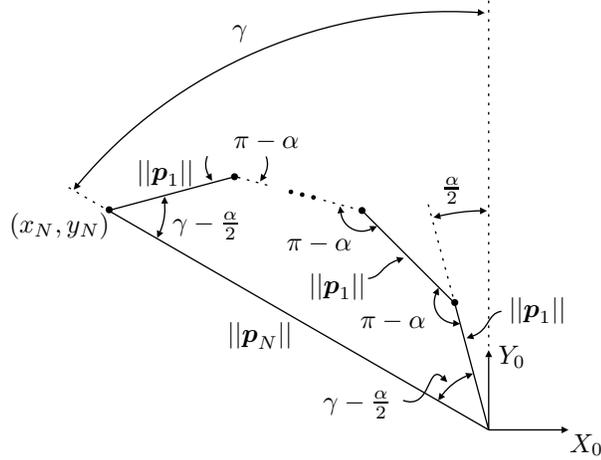


FIG. 6.4 – Diagramme de fermeture vectorielle illustrant la relation entre \mathbf{p}_N et α pour le mécanisme modulaire plan.

premièrement être résolue pour \mathbf{p}_1 en fonction de \mathbf{p}_N comme suit :

$$\mathbf{p}_1 = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^{i-1} \right)^{-1} \mathbf{p}_N \quad (6.22)$$

Ensuite, en substituant les valeurs résultantes de x_1 et y_1 dans l'équation (6.21), la solution au problème statique inverse est obtenue. Il reste toutefois à trouver une expression pour l'angle α , sur lequel dépend la matrice \mathbf{Q} dans l'équation (6.22), en fonction de \mathbf{p}_N . À partir du diagramme en médaillon de la Figure 6.1, le diagramme montré à la Figure 6.4 est obtenu. Cette figure illustre l'équation de fermeture vectorielle de l'équation (6.19) où il peut être constaté que $\gamma = \mathbf{A} \tan 2(-x_N, y_N)$ est l'angle mesuré à partir de l'axe Y_0 jusqu'au vecteur \mathbf{p}_N . La série de vecteurs \mathbf{p}_1 ainsi que le vecteur \mathbf{p}_N forment un polygone de $N + 1$ côtés. Pour un polygone de N_s côtés, il est connu que la somme des angles intérieurs est $(N_s - 2)\pi$. En exploitant ce fait et en se référant à la Figure 6.4, l'expression suivante est trouvée :

$$2 \left(\gamma - \frac{\alpha}{2} \right) + (N - 1)(\pi - \alpha) = (N - 1)\pi \quad (6.23)$$

La solution de cette équation est $\alpha = 2\gamma/N$ ce qui exprime α en fonction de \mathbf{p}_N . En combinant ce résultat avec les équations (6.21) et (6.22), la solution au problème statique inverse d'un mécanisme avec N modules est obtenue.

6.1.2.3 Configurations singulières

En supposant un régime quasi-statique, il est possible de calculer des matrices jacobiniennes qui assurent le lien entre des mouvements infinitésimaux des actionneurs du

mécanisme ($\delta\boldsymbol{\psi}$) et des mouvements correspondants de son effecteur ($\delta\boldsymbol{p}_N$). Ce lien peut ensuite être analysé pour identifier les situations dans lesquelles il dégénère. Comme c'était le cas pour les autres mécanismes étudiés dans cette thèse, ces situations correspondent à des configurations singulières et, dans certains cas, sont également associées aux frontières de l'espace atteignable du mécanisme.

La matrice jacobienne directe du mécanisme avec N modules fournit une expression pour $\delta\boldsymbol{p}_N$ en fonction de $\delta\boldsymbol{\psi}$ telle que $\delta\boldsymbol{p}_N = \mathbf{J}_{D_N}\delta\boldsymbol{\psi}$ et peut être calculée comme $\mathbf{J}_{D_N} = \partial\boldsymbol{p}_N/\partial\boldsymbol{\psi}$ à partir de la solution analytique au problème statique direct. Cette matrice est alors écrite en fonction des longueurs des câbles. D'autre part, la matrice jacobienne inverse exprime $\delta\boldsymbol{\psi}$ en fonction de $\delta\boldsymbol{p}_N$ telle que $\delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{J}_{I_N}\delta\boldsymbol{p}_N$ et peut être calculée comme $\mathbf{J}_{I_N} = \partial\boldsymbol{\psi}/\partial\boldsymbol{p}_N$ à partir de la solution analytique au problème statique inverse. La matrice \mathbf{J}_{I_N} est alors écrite en fonction de x_N et y_N .

Avec l'équation (6.19), la matrice jacobienne directe du mécanisme peut être calculée pour une quantité arbitraire de modules. Toutefois, en raison de l'inversion matricielle qui apparaît à l'équation (6.22), il est plus difficile d'obtenir la matrice jacobienne inverse sous forme symbolique lorsque $N > 1$. Malgré ce fait, comme il sera démontré à la section suivante, il est quand même possible d'identifier les configurations singulières associées à \mathbf{J}_{I_N} pour $N > 1$.

Mathématiquement, le mécanisme se retrouve dans une configuration singulière dans l'espace articulaire (cartésien) lorsque le $\det \mathbf{J}_{D_N} = 0$ ($\det \mathbf{J}_{I_N} = 0$) et/ou le $\det \mathbf{J}_{D_N} \rightarrow \infty$ ($\det \mathbf{J}_{I_N} \rightarrow \infty$). Pour $N = 1, 2, 3$, les déterminants de la matrice jacobienne directe sont :

$$\det \mathbf{J}_{D_1} = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \left[(2NL + \rho_1 + \rho_2)(2NL - \rho_1 - \rho_2) \right]^{1/2}}{8N^2(N^2L^2 - \rho_1\rho_2)} \quad (6.24)$$

$$\det \mathbf{J}_{D_2} = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \left[(2NL + \rho_1 + \rho_2)(2NL - \rho_1 - \rho_2) \right]^{3/2}}{4N^2(N^2L^2 - \rho_1\rho_2)^2} \quad (6.25)$$

$$\det \mathbf{J}_{D_3} = \frac{3(\rho_1 + \rho_2)}{8N^2(N^2L^2 - \rho_1\rho_2)^3} (3N^2L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1\rho_2)^2 \left[(2NL + \rho_1 + \rho_2)(2NL - \rho_1 - \rho_2) \right]^{1/2} \quad (6.26)$$

où N est écrit sous forme symbolique pour mettre en évidence les configurations singulières qui existent peu importe la quantité de modules. Pour $N = 1$, le déterminant de la matrice jacobienne inverse est :

$$\det \mathbf{J}_{I_1} = \frac{2N^2 \left[(x_N^2 + y_N^2)(L^2 - x_N^2 - y_N^2) \right]^{1/2}}{y_N^2} \quad (6.27)$$

Puisque les déterminants des matrices \mathbf{J}_{D_1} et \mathbf{J}_{I_1} sont connus, il est possible pour le cas $N = 1$ d'établir les correspondances entre les configurations singulières exprimées dans l'espace articulaire avec celles exprimées dans l'espace cartésien. Par contre, cette approche ne peut pas être utilisée lorsque $N > 1$ en raison de la complexité du calcul de la matrice jacobienne inverse. Dans ce cas, la transformation des configurations singulières de l'espace articulaire à l'espace cartésien est effectuée en substituant les expressions résultantes dans la solution au problème statique direct du mécanisme (cette approche n'est pas valide pour la configuration singulière *iii* pour laquelle la transformation à l'espace cartésien sera présentée à la section 6.1.2.5).

À partir des équations (6.24) – (6.27), les configurations singulières suivantes peuvent être identifiées :

i. $2NL - \rho_1 - \rho_2 = 0$ ($N = 1, 2, 3$)

□ $x_N = \pm L$ et $y_N = 0$ ($N = 1, 3$)

□ $x_N = y_N = 0$ ($N = 2$)

ii. $N^2L^2 - \rho_1\rho_2 = 0$ ($N = 1, 2, 3$)

□ Cette condition ne peut être satisfaite qu'à un seul point de la frontière de l'espace atteignable du mécanisme qui correspond à $\rho_1 = \rho_2 = NL$ (voir la section 6.1.2.4 ainsi que la configuration singulière *iii*).

iii. $\rho_1 = \rho_2 = NL$ ($N = 1, 2, 3$)

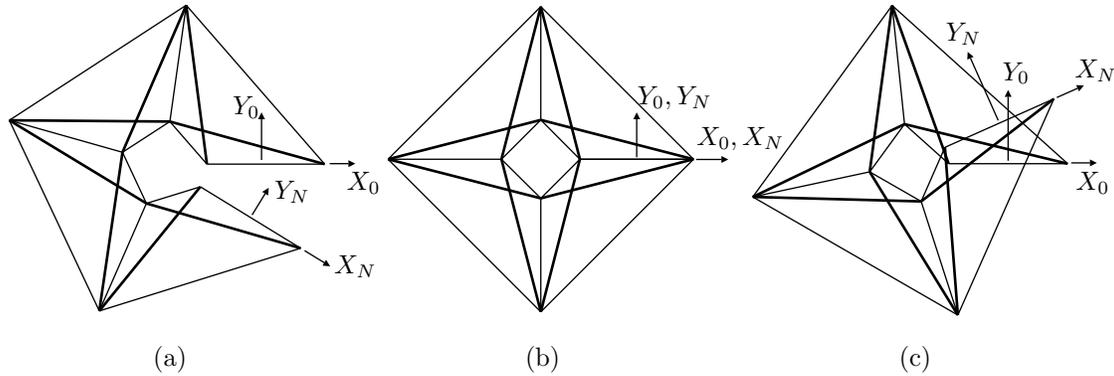
□ $L^2 - x_N^2 - y_N^2 = 0$ ($N = 1$)

□ Pour $N > 1$, la configuration singulière correspondante dans l'espace cartésien sera développée à la section 6.1.2.5.

iv. $3N^2L^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1\rho_2 = 0$ ($N = 3$)

□ $x_N = y_N = 0$

La configuration singulière *iv* existe seulement pour les mécanismes avec $N \geq 3$ (l'expression donnée ci-haut ne s'applique toutefois que pour le cas où $N = 3$). Elle correspond à une situation, illustrée à la Figure 6.5(b) pour le cas $N = 4$, où le mécanisme est replié sur lui-même de manière à ce que son effecteur soit coïncident avec sa base (c.-à-d. $x_N = y_N = 0$). Quoique cette configuration ne représente pas une limite théorique de l'espace atteignable du mécanisme, elle sera considérée comme une frontière de cet espace en raison des interférences mécaniques qui se manifestent entre l'effecteur et la base du mécanisme si ce dernier opère de l'autre côté de la configuration singulière (voir la Figure 6.5(c)).


 FIG. 6.5 – Configuration singulière iv du mécanisme ($N = 4$).

6.1.2.4 Espace atteignable articulaire

Les espaces atteignables articulaires du mécanisme pour les cas où $N = 1, 2, 3$ sont illustrés à la Figure 6.6. Dans tous ces cas, les espaces sont limités au premier quadrant du plan articulaire puisque des longueurs négatives des câbles ne sont pas possibles. À l'exception des droites $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = 0$, les frontières des espaces atteignables proviennent des configurations singulières définies à la section précédente. Pour le cas où $N < 3$, la dernière frontière de l'espace atteignable correspond à la configuration singulière i . Quoique cette droite représente toujours une frontière potentielle de l'espace atteignable lorsque $N \geq 3$, elle est plutôt remplacée par la courbe associée à la configuration singulière iv dans ces cas pour éviter les interférences mécaniques qui ont été décrites à la section 6.1.2.3. Il peut être noté que la seule intersection des courbes singulières i et ii (ainsi que de la courbe singulière iv lorsque $N \geq 3$) se produit au point $\rho_1 = \rho_2 = NL$ qui est associé à la configuration singulière iii . Ce point constitue une situation spéciale qui joue un rôle important dans le calcul des frontières de l'espace atteignable cartésien du mécanisme (voir la section 6.1.2.5).

6.1.2.5 Espace atteignable cartésien

Les espaces atteignables cartésiens du mécanisme pour les cas où $N = 1, 2, 3$ sont illustrés à la Figure 6.7 où l'espace atteignable associé à une quantité donnée de modules englobe les espaces associés aux quantités moindres de modules. Les frontières de l'espace atteignable cartésien correspondent aux transformations à l'espace cartésien des frontières de l'espace atteignable articulaire. Il peut être observé à partir de l'équation (6.14) que $l_0 = L$ lorsque $\rho_1 = 0$ ou $\rho_2 = 0$. De plus, sachant que les longueurs des ressorts d'un module sont égales lorsque ce dernier se retrouve dans une configura-

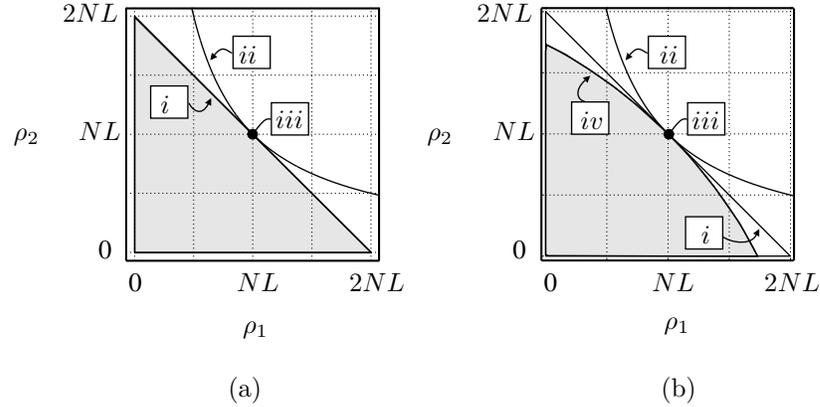


FIG. 6.6 – Espace atteignable articulaire du mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté : (a) $N = 1, 2$ (b) $N = 3$.

tion d'équilibre en absence de chargements externes et que, sous ces mêmes conditions, les configurations d'équilibre des modules d'un mécanisme sont identiques, il peut être constaté que $l_i = L \forall i$. En combinant cette observation avec la condition d'équilibre $\sigma = L/2$, il peut être observé que les frontières associées aux droites $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = 0$ correspondent, dans l'espace cartésien, aux cercles suivants :

$$\left(x_N \pm \frac{L}{2}\right)^2 + y_N^2 = \frac{L^2}{4} \quad (6.28)$$

à l'intérieur desquels il n'est pas possible pour le mécanisme d'opérer. Il a déjà été démontré à la section 6.1.2.3 que les configurations singulières i et iv correspondent à des points dans l'espace cartésien. La dernière frontière de l'espace atteignable cartésien du mécanisme doit alors être associée à la configuration singulière iii . Lorsque le mécanisme se retrouve dans cette configuration singulière, les longueurs des câbles sont égales à celles des barres. Cela implique que les nœuds A_i sont coïncidents avec les nœuds B_i correspondants et que les composants associés à un module donné sont superposés sur une droite. Le comportement du mécanisme ressemble alors à celui d'une chaîne cinématique ouverte formée par N corps de longueur L qui sont attachés les uns aux autres par des liaisons rotoïdes passives. Par conséquent, le mécanisme gagne N degrés de liberté et sa contrôlabilité est perdue. Par contre, lorsque le mécanisme approche cette configuration singulière sans toutefois s'y retrouver de manière exacte, les nœuds A_i et B_i ne sont pas parfaitement superposés et, en vertu de la solution au problème statique direct du mécanisme (voir la section 6.1.2.1), les angles qui séparent deux ressorts consécutifs doivent être égaux à α . Selon cette observation, le comportement du mécanisme est tel qu'il est illustré à la Figure 6.8. En se basant sur cette figure, il est trouvé que la courbe sur laquelle se déplace l'effecteur du mécanisme à l'approche

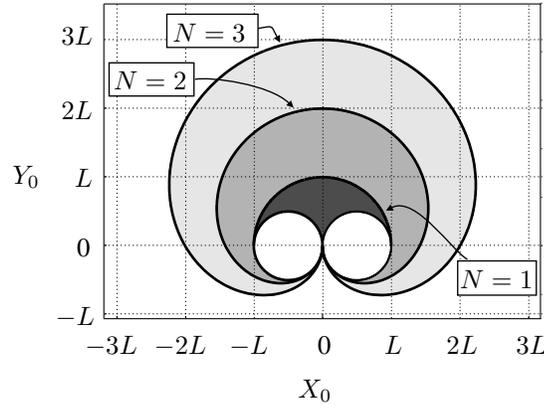


FIG. 6.7 – Espace atteignable cartésien du mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté pour $N = 1, 2, 3$.

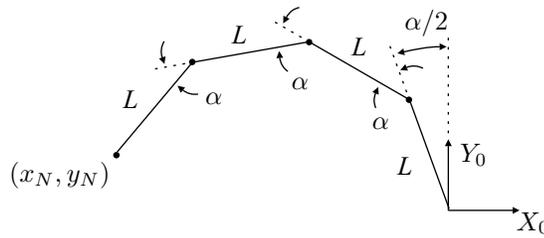


FIG. 6.8 – Comportement du mécanisme lorsqu'il s'approche de la configuration singulière *iii* sans toutefois l'atteindre ($N = 4$).

de la configuration singulière *iii* est définie de manière paramétrique comme suit :

$$x_N = -L \sum_{i=1}^N \sin \left[\alpha \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] , \quad y_N = L \sum_{i=1}^N \cos \left[\alpha \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (6.29)$$

où $0 \leq \alpha \leq \pi$ lorsque $N = 1$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi/N$ autrement. Lorsque $N = 1$, cette courbe correspond à un cercle de rayon L centré à l'origine du plan X_0Y_0 . En combinant la courbe de l'équation (6.29) avec les cercles de l'équation (6.28), la frontière de l'espace atteignable cartésien du mécanisme est complètement définie. Tandis que les cercles qui définissent la frontière intérieure du mécanisme sont les mêmes peu importe la quantité de modules utilisée, l'ajout de modules a pour effet d'agrandir la frontière externe de l'espace. Cela constitue un comportement très intéressant de ce mécanisme puisqu'en y ajoutant des modules son espace atteignable peut être agrandi au besoin tout en lui permettant de conserver sa capacité d'opérer dans la région de l'espace cartésien qui est située près de sa base.

6.1.2.6 Stabilité

À la section 6.1.2.1, les points critiques de U_1 ont été trouvés comme $\sigma = l_0/2$ combiné avec une des valeurs de l_0 données par les équations (6.12) et (6.13). Il avait alors été observé que la solution donnée par l'équation (6.12) correspond à un minimum stable de U_1 lorsque $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2}L/2$ puisque, dans ce cas, le mécanisme prend la forme habituelle d'un carré avec les barres comme ses diagonales. Dans cette section, il est souhaité prouver que l'équation (6.12) est toujours associée à un minimum stable de U_1 dans l'espace atteignable du mécanisme et, de même, que la solution donnée par l'équation (6.13) n'y est pas. L'approche utilisée consiste à faire l'analyse de la matrice hessienne du mécanisme. En fait, un point critique de U_1 correspond à un minimum stable seulement lorsque la matrice hessienne, évaluée à ce point critique, est définie positive. La matrice hessienne du mécanisme prend la forme suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 U_1}{\partial \sigma \partial l_0} \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial l_0 \partial \sigma} & \frac{\partial^2 U_1}{\partial l_0^2} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Pour que \mathbf{H} soit définie positive, les déterminants de ses mineurs principaux croissants doivent tous être strictement positifs. Le premier de ces déterminants est tout simplement $\det \mathbf{H}_1 = \partial^2 U_1 / \partial \sigma^2$ qui, lorsqu'il est évalué en utilisant l'équation (6.8), est trouvé comme étant égal à $4K$ peu importe le point critique considéré. Il reste alors à démontrer que le $\det \mathbf{H}_2 = \det \mathbf{H} > 0$. Cette condition doit être vérifiée pour chacun des points critiques. Dans le cas du point critique associé à l'équation (6.12), la substitution de $\sigma = l_{0r}/2$ et $l_0 = l_{0r}$ dans le déterminant de \mathbf{H} donne :

$$(\det \mathbf{H})_I = \frac{F_1}{F_2} > 0 \quad (6.31)$$

En évaluant F_1 et F_2 à un point arbitraire situé à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme, il est trouvé que $F_1 > 0$ et $F_2 > 0$. Il est alors souhaité de démontrer que F_1 et F_2 ne peuvent pas s'annuler à l'intérieur de l'espace atteignable ce qui implique qu'ils y sont toujours positifs. La manipulation de F_2 pour éliminer ses termes radicaux mène à l'expression suivante :

$$F_2 = \rho_1^3 \rho_2^3 (2L - \rho_1 - \rho_2)^2 (L^2 - \rho_1 \rho_2)^4 (\rho_1 + \rho_2 + 2L)^6 \quad (6.32)$$

Il peut alors être constaté, en se référant à la section 6.1.2.4, qu'il n'est pas possible pour F_2 d'être nul dans l'espace atteignable du mécanisme. En ce qui concerne F_1 , l'élimination de ses termes radicaux donne l'expression suivante :

$$F_1 = 64K^4 L^2 \rho_1 \rho_2 (\rho_1 - \rho_2)^2 (\rho_1 + \rho_2)^2 (L^2 - \rho_1 \rho_2)^3 (\rho_1 + \rho_2 + 2L)^4 \left[4L^2 (L^2 + \rho_1 \rho_2) - \rho_1 \rho_2 (3\rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 + 3\rho_1^2) \right] = 0 \quad (6.33)$$

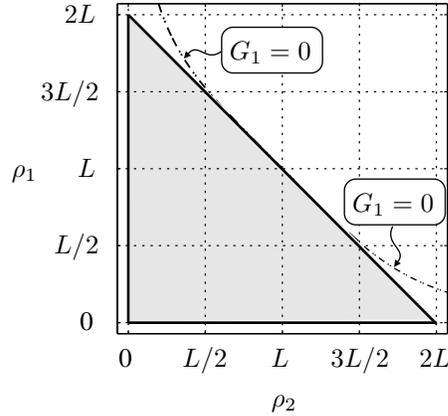


FIG. 6.9 – Représentation graphique de la courbe $G_1 = 0$ ainsi que de l'espace atteignable articulaire du mécanisme ($N = 1$).

Il est clair que, selon la forme que prend F_1 dans cette équation, le cas $\rho_1 = \rho_2$ mène à $F_1 = 0$. Toutefois, il peut facilement être vérifié que ce cas correspond à une solution parasite de l'équation $F_1 = 0$ qui a été créée pendant l'élimination des termes radicaux de F_1 (c.-à-d. que la substitution de $\rho_1 = \rho_2$ dans $(\det \mathbf{H})_I$ ne donne pas une valeur nulle). En prenant note des frontières de l'espace atteignable articulaire du mécanisme (section 6.1.2.4), il est donc constaté que F_1 est nul à l'intérieur de cet espace seulement lorsque :

$$G_1 = 4L^2(L^2 + \rho_1\rho_2) - \rho_1\rho_2(3\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 + 3\rho_1^2) = 0 \quad (6.34)$$

En traçant la courbe $G_1 = 0$ avec les frontières de l'espace atteignable articulaire du mécanisme à la Figure 6.9, il est vérifié que G_1 ne peut pas être nul à l'intérieur de l'espace. Par conséquent, il est vérifié que $(\det \mathbf{H})_I > 0$ dans l'espace atteignable du mécanisme ce qui implique que le point critique donné par l_{0I} et $\sigma = l_{0I}/2$ correspond toujours à une configuration où l'énergie potentielle du module est à un minimum stable.

En ce qui trait au deuxième point critique de U_1 , il est clair à partir de l'équation (6.13) que la condition suivante doit être satisfaite pour qu'une valeur réelle de l_0 soit obtenue :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2L^2 \geq 0 \quad (6.35)$$

Cela implique que la longueur l_{0II} n'est réelle que pour des points de l'espace atteignable articulaire qui se situent sur ou à l'extérieur d'un cercle de rayon $\sqrt{2}L$ centré au point $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Puisque la portion de ce cercle qui appartient au premier quadrant de l'espace articulaire se situe complètement à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme, de tels points existent. Toutefois, les configurations résultantes du mécanisme ne sont pertinentes que si elles respectent également la forme générale du système de tensegrité en forme de X de Snelson [13] (c.-à-d. que les nœuds du mécanisme doivent

former un quadrilatère convexe avec les barres agissant comme ses diagonales). Pour que cela soit possible, il est nécessaire que $|\cos \theta_{A_0}| < 1$ et $|\cos \theta_{B_0}| < 1$ où $|\cdot|$ est utilisé pour représenter la valeur absolue et où les expressions pour $\cos \theta_{A_0}$ et $\cos \theta_{B_0}$ sont données à l'équation (6.7). En choisissant un point arbitraire situé dans la région de l'espace atteignable articulaire du mécanisme pour laquelle l'équation (6.13) génère une valeur réelle de l_0 et en substituant les valeurs correspondantes de ρ_1 et ρ_2 dans l'équation (6.7), il est trouvé que $|\cos \theta_{A_0}| > 1$. Puisque cela ne respecte pas la condition donnée ci-haut, la configuration du mécanisme associée à l'équation (6.13) n'est pas valide à ce point. Pour que le point critique l_{0II} mène à une valeur acceptable de $\cos \theta_{A_0}$ ailleurs dans l'espace atteignable, la condition $|\cos \theta_{A_0}| = 1$ doit alors y être satisfaite. En substituant l'équation (6.13) dans l'équation (6.7), en élevant l'expression résultante au carré et en l'égalant à l'unité, on obtient :

$$(2L + \rho_1 + \rho_2)(2L - \rho_1 - \rho_2)(2L + \rho_1 - \rho_2)(2L - \rho_1 + \rho_2) = 0 \quad (6.36)$$

À partir de la Figure 6.6(a), il est constaté que cette expression ne peut jamais être satisfaite à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme. Il peut alors être conclu que le point critique associé à l'équation (6.13) ne correspond jamais à une valeur réelle de l_0 qui mène à une configuration du mécanisme qui respecte la forme générale du système de tensegrité en forme de X. Par conséquent, le seul point critique qui mène à des configurations d'équilibre stables du mécanisme à l'intérieur de son espace atteignable est celui donné par l'équation (6.12).

6.1.2.7 Forces internes

Lorsque le mécanisme se retrouve dans une configuration de tensegrité en absence de chargements externes, les forces internes dans ses composants peuvent être calculées à partir des équations d'équilibre statique évaluées à ses nœuds. Cela mène aux forces de compression suivantes dans les barres :

$$f_{b_1} = f_{b_2} = KL \quad (6.37)$$

tandis que les forces de tension dans les câbles sont :

$$f_{\rho_1} = \frac{K\rho_2}{N} \quad , \quad f_{\rho_2} = \frac{K\rho_1}{N} \quad (6.38)$$

Ces résultats s'appliquent à tous les modules puisque les configurations d'équilibre de ceux-ci sont toujours les mêmes. Il est constaté que les forces internes sont linéaires par rapport à la raideur des ressorts et que les forces de compression dans les barres sont constantes partout dans l'espace atteignable du mécanisme. De plus, la force de tension dans un câble est directement proportionnelle à la longueur du câble opposé.

6.1.3 Application de chargements externes

Dans cette section, il est supposé que des forces externes \mathbf{f}_{A_N} et \mathbf{f}_{B_N} sont appliquées aux nœuds A_N et B_N , respectivement. Dans un tel cas, il est nécessaire d'utiliser une approche numérique pour le calcul des solutions aux problèmes statiques direct et inverse.

6.1.3.1 Problème statique direct avec chargements externes

Le problème statique direct du mécanisme est résolu par une minimisation de l'énergie potentielle emmagasinée dans ses ressorts tout en considérant les effets des forces externes. L'énergie potentielle d'un mécanisme avec N modules s'écrit :

$$U_N = \frac{1}{2}K \left[2\sigma^2 + 2(l_0 - \sigma)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} l_i^2 + l_N^2 \right] \quad (6.39)$$

Puisqu'une quantité non minimale de coordonnées généralisées est utilisée (voir la section 6.1.1), les contraintes géométriques de l'équation (6.6) doivent également être respectées. Pour ce faire, la fonction suivante est définie :

$$\eta = U_N + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\phi} \quad (6.40)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange utilisé pour appliquer les contraintes. Les forces externes, pour leur part, sont prises en considération dans la fonction suivante :

$$\mu = \eta - \mathbf{f}_{A_N}^T \mathbf{a}_N - \mathbf{f}_{B_N}^T \mathbf{b}_N \quad (6.41)$$

Pour que le mécanisme se retrouve dans une configuration d'équilibre stable pour des positions données de ses actionneurs ainsi que des forces externes connues, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (6.42)$$

Sous forme scalaire, ces conditions correspondent à un système de $4N + 2$ équations exprimées dans un nombre égal d'inconnues. Ce système est résolu en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson couplé avec un processus de continuation. Puisque la procédure utilisée est presque identique à celle qui est décrite à la section 5.1.3.1, aucune explication supplémentaire n'est fournie ici. Les solutions ainsi trouvées correspondent à des points critiques de η mais ne représentent pas nécessairement des configurations d'équilibre stables du mécanisme (cela doit être vérifié ultérieurement à partir de la

matrice hessienne de μ). Finalement, une fois le vecteur de coordonnées généralisées connu, la position de l'effecteur du mécanisme est obtenue comme suit :

$$\mathbf{p}_N = \frac{\mathbf{a}_N + \mathbf{b}_N}{2} \quad (6.43)$$

6.1.3.2 Problème statique inverse avec chargements externes

Les conditions de l'équation (6.42) doivent toujours être respectées pendant la solution du problème statique inverse. Par contre, puisque ρ_1 et ρ_2 correspondent maintenant à des paramètres inconnus, le système résultant contient $4N + 2$ équations et $4N + 4$ inconnues. En ajoutant à ce système l'équation suivante qui impose la position désirée de l'effecteur :

$$\mathbf{p}_N - \frac{\mathbf{a}_N + \mathbf{b}_N}{2} = \mathbf{0} \quad (6.44)$$

il devient possible de le résoudre avec une approche analogue à celle utilisée pour le problème statique direct.

6.1.3.3 Analyse de la raideur

Dans cette section, la raideur du mécanisme est calculée de manière indépendante pour les nœuds A_N et B_N . De cette manière, la raideur est définie comme la résistance du mécanisme à un déplacement du nœud A_N (B_N), soit $\delta\mathbf{a}_N$ ($\delta\mathbf{b}_N$), lorsqu'il est soumis à une force perturbatrice $\delta\mathbf{f}_{A_N}$ ($\delta\mathbf{f}_{B_N}$). Comme à la section 5.1.3.4, la raideur est calculée pour des positions données des actionneurs ainsi que pour des directions données des forces perturbatrices qui correspondent aux axes X_0 et Y_0 . L'objectif visé est d'établir la distribution de la raideur du mécanisme dans son espace atteignable cartésien. Par conséquent, les calculs sont effectués pour le cas où $\mathbf{f}_{A_N} = \mathbf{f}_{B_N} = \mathbf{0}$. Une approximation numérique est utilisée pour le calcul des raideurs telle que la raideur au nœud A_N dans la direction de l'axe X_0 , par exemple, est donnée par $K_{A_Nx} \approx 2\Delta f_{A_Nx} / K\Delta a_{N_x}$. Dans cette expression, Δa_{N_x} est calculé avec une version modifiée de la méthode décrite à la section 5.1.3.4. Le calcul des raideurs K_{A_Ny} , K_{B_Nx} et K_{B_Ny} s'effectue avec la même approche. Puisque la raideur du mécanisme dépend linéairement de la raideur de ses ressorts, les résultats sont normalisés par rapport à celle-ci.

La Figure 6.10 illustre les distributions des raideurs K_{A_Nx} et K_{A_Ny} , respectivement, pour le cas où $N = 2$. Malgré le fait qu'aucun résultat n'est présenté ici concernant les distributions des raideurs K_{B_Nx} et K_{B_Ny} , ces dernières correspondent tout simplement,

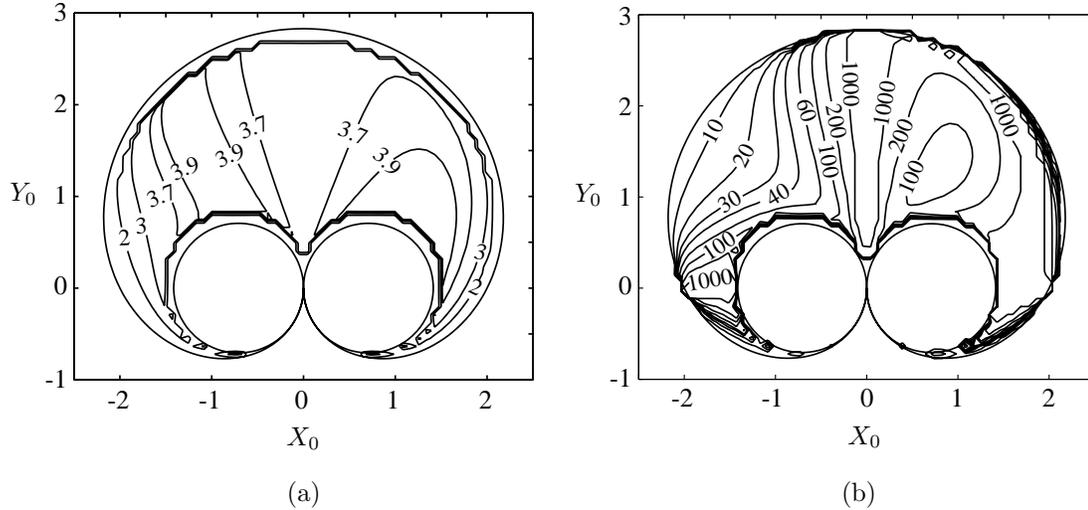


FIG. 6.10 – Distribution de la raideur d'un mécanisme avec $N = 2$ et $L = \sqrt{2}$: (a) $K_{A_N x}$ (b) $K_{A_N y}$.

en raison de la symétrie du mécanisme, à des réflexions par rapport à l'axe Y_0 des raideurs $K_{A_N x}$ et $K_{A_N y}$.

En observant la Figure 6.10(a), il peut être constaté que la raideur dans la direction de l'axe X_0 ne varie pas de manière considérable à l'intérieur de l'espace atteignable du mécanisme. En se référant ensuite à la Figure 6.10(b), il peut être vu que le mécanisme est beaucoup plus raide en général dans la direction de l'axe Y_0 . Cela s'explique, du moins en partie, par le fait que les degrés de liberté non contraints du mécanisme correspondent à des translations dans la direction de l'axe X_0 . Ce faisant, l'application de forces externes aux nœuds A_N et B_N dans la direction de l'axe Y_0 n'entraîne pas d'aussi grandes déformations du mécanisme. Dans les configurations où l'effecteur du mécanisme se retrouve sur l'axe Y_0 , il est vu que $K_{A_N y} \rightarrow \infty$. Dans une telle situation, les câbles du mécanisme, qui sont supposés avoir des raideurs infinies, sont parallèles à l'axe Y_0 . Il va alors de soit que l'application de forces externes dans la direction de l'axe Y_0 n'a pour effet que de modifier les forces internes dans les câbles sans toutefois entraîner des déplacements des nœuds A_N et B_N . Par contre, il doit être noté que si une force suffisamment grande est appliquée au nœud A_N ou au nœud B_N dans la direction négative de l'axe Y_0 , il est possible pour les câbles correspondants de perdre leur tension.

6.1.4 Analyse dynamique

6.1.4.1 Modélisation

Les hypothèses suivantes sont faites pour permettre le développement du modèle dynamique du mécanisme :

- Chaque barre a un moment d'inertie $I_s = mL^2/12$ autour d'un axe perpendiculaire au plan X_0Y_0 et passant par son centre de masse.
- Les ressorts et les câbles ont des masses négligeables.
- Il n'y a pas de frottement dans les liaisons passives et les actionneurs.
- Les liaisons prismatiques passives sur lesquelles se déplacent les nœuds A_0 et B_0 sont amorties linéairement avec un coefficient c_d .
- Les forces gravitationnelles ne sont pas considérées.

La configuration générale du mécanisme est représentée par le vecteur $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\psi}^T, \mathbf{q}^T]^T$ auquel sont ajoutées les contraintes géométriques de l'équation (6.6). Ces contraintes sont intégrées au modèle dynamique à partir d'une expression pour les forces internes qui leur sont associées (voir l'équation (5.128)). Les équations de mouvement du mécanisme sont générées avec la formulation lagrangienne qui prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_N}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial T_N}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial U_N}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_c + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\tau} \quad (6.45)$$

L'énergie potentielle du mécanisme a déjà été définie à l'équation (6.39) tandis que son énergie cinétique s'écrit :

$$T_N = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_1}}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_1}} + \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_2}}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_2}}) + \frac{1}{2} I_s \sum_{i=1}^N (\dot{\theta}_{A_i}^2 + \dot{\theta}_{B_i}^2) \quad (6.46)$$

Pour sa part, le vecteur de forces dissipatives \mathbf{f}_d est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{f}_d = -c_d \left[0, 0, \dot{\sigma}, -\dot{\sigma} + \dot{l}_0, \mathbf{0}_{1 \times 2N} \right]^T \quad (6.47)$$

tandis que \mathbf{f}_q , qui correspond aux forces généralisées générées par l'application des forces externes \mathbf{f}_{A_N} et \mathbf{f}_{B_N} , est :

$$\mathbf{f}_q = \frac{\partial(\mathbf{f}_{A_N}^T \mathbf{a}_N + \mathbf{f}_{B_N}^T \mathbf{b}_N)}{\partial \mathbf{u}} \quad (6.48)$$

Finalement, $\boldsymbol{\tau} = [f_{\rho_1}, f_{\rho_2}]^T$ est le vecteur de forces dans les actionneurs et $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice suivante qui effectue la transformation de l'espace des actionneurs à l'espace des coordonnées de \mathbf{u} :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{0}_{(2N+2) \times 2} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

La substitution de ces définitions dans l'équation (6.45) mène aux équations de mouvement du mécanisme qui prennent la forme donnée à l'équation (5.142). Un système de $2N + 4$ équations scalaires est alors obtenu. Pour simuler la dynamique du mécanisme, ce système doit être solutionné pour ses $4N + 4$ variables inconnues (c.-à-d. les éléments des vecteurs $\ddot{\mathbf{u}}$ et $\boldsymbol{\lambda}$). Pour ce faire, les contraintes géométriques exprimées au niveau des accélérations (c.-à-d. l'équation (5.143)) sont ajoutées aux équations de mouvement pour former un système contenant autant d'équations que d'inconnues. À partir de ce système, la simulation dynamique du mécanisme est possible en utilisant l'approche de Kövecses *et al.* [96] qui est décrite à la section 5.2.4.2.

6.1.4.2 Simulation

La trajectoire du mécanisme pendant la simulation est imposée directement au niveau des positions, des vitesses et des accélérations des actionneurs. Le mécanisme servant d'exemple a les paramètres suivants : $N = 4$, $m = 2$ kg, $L = \sqrt{2}$ m, $K = 1000$ N/m et $c_d = 100$ N · s/m. Il est également supposé que $\mathbf{f}_{A_N} = \mathbf{f}_{B_N} = \mathbf{0}$. Le point initial de la trajectoire correspond à une position de l'effecteur donnée par $\mathbf{p}_{N_I} = [-3, 3]^T$ m. L'objectif visé est de déplacer l'effecteur à une position $\mathbf{p}_{N_F} = [3, 3]^T$ m au temps $t_F = 1$ s. À partir de la solution au problème statique inverse du mécanisme, les positions correspondantes des actionneurs sont calculées comme $\rho_{1_I} = \rho_{2_F} = 4.05$ m et $\rho_{1_F} = \rho_{2_I} = 5.31$ m, respectivement. La trajectoire en position est générée avec l'équation (5.154) tandis que les trajectoires en vitesse et en accélération sont obtenues à partir des dérivées première et seconde par rapport au temps de cette même équation. L'évolution de la position de l'effecteur du mécanisme pendant la simulation est illustrée à la Figure 6.11. Il peut être constaté à la Figure 6.11(a) que le mécanisme est légèrement sous amorti pour le mouvement simulé. Toutefois, de manière générale, l'amortissement du mécanisme est efficace pour supprimer ses vibrations puisque les amortisseurs sont parallèles aux directions des degrés de liberté non contraints. De plus, le niveau d'amortissement peut facilement être ajusté sans nuire à la performance dynamique du mécanisme puisque les amortisseurs sont fixés à la base. À la Figure 6.11(b), il est observé que les oscillations de y_N sont plus petites que celles de x_N . Quoiqu'il n'est pas vérifié ici que ce résultat se manifeste pour toutes les trajectoires possibles du mécanisme, un tel comportement peut s'expliquer en partie par le fait que les degrés de liberté non contraints correspondent à des translations dans la direction de l'axe X_0 . Finalement, il peut être

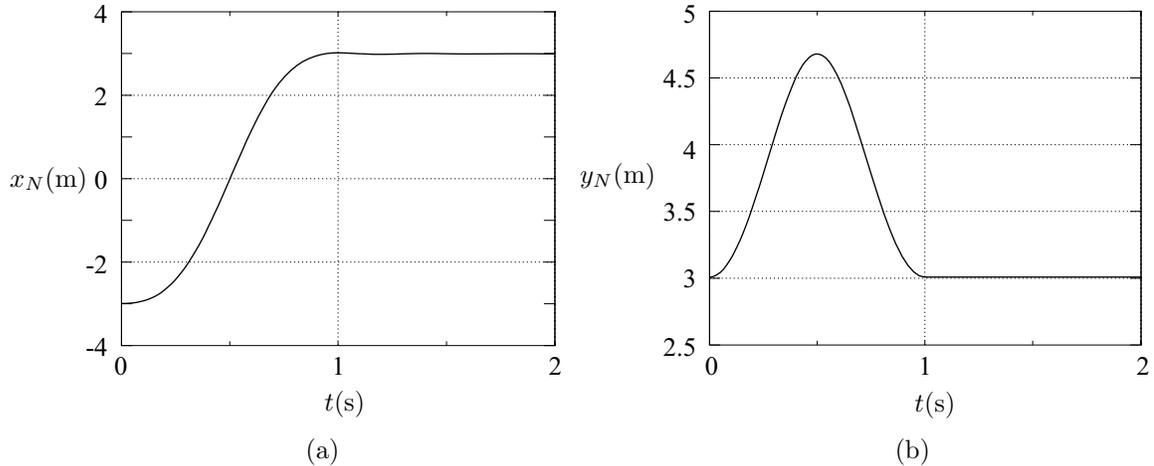


FIG. 6.11 – Coordonnées cartésiennes de la position de l’effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée : (a) x_N (b) y_N .

noté que les contraintes géométriques du mécanisme au niveau des positions ont été satisfaites dans un ordre de 10^{-14} pendant la simulation tandis que les contraintes au niveau des vitesses ont été satisfaites dans un ordre de 10^{-15} .

6.1.5 Prototype

Un prototype a été développé pour valider le concept du mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté. Le prototype, montré à la Figure 6.12, a une base qui est fabriquée à partir d’une plaque de verre acrylique sur laquelle sont attachées des glissières qui permettent aux nœuds A_0 et B_0 de se déplacer en translation sur l’axe X_0 du mécanisme. Les barres du prototype ont des longueurs approximatives de $L = 25$ cm et sont fabriquées à partir de tubes d’aluminium.

Des ressorts à longueurs libres nulles sont simulés en insérant des ressorts en compression dans les barres tel qu’il est illustré à la Figure 6.13. Avec cette approche, le ressort en compression est conçu pour avoir une longueur initiale qui est plus grande que le tube en aluminium (c.-à-d. $l_S = l_{S_0} > L$). Une ficelle est attachée au nœud A_i et passe par le milieu du ressort pour ensuite être attachée à une pièce cylindrique sur laquelle l’extrémité opposée du ressort est appuyée. La longueur de la ficelle est choisie pour faire en sorte que les nœuds A_i et B_i sont coïncidents lorsque le ressort en compression est à sa longueur libre. Puisque les nœuds A_i et B_i sont coïncidents, la longueur du ressort simulé est nulle (c.-à-d. $l_i = 0$) dans cette configuration. Lorsque le ressort en compression est comprimé jusqu’à la longueur de la barre (c.-à-d. $l_S = L$), le ressort

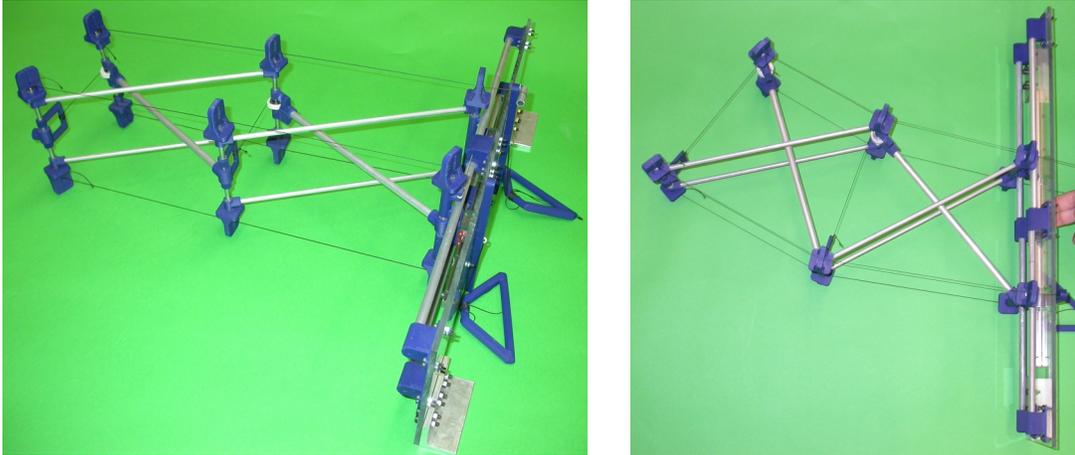


FIG. 6.12 – Prototype du mécanisme de tensegrité modulaire plan à deux degrés de liberté.

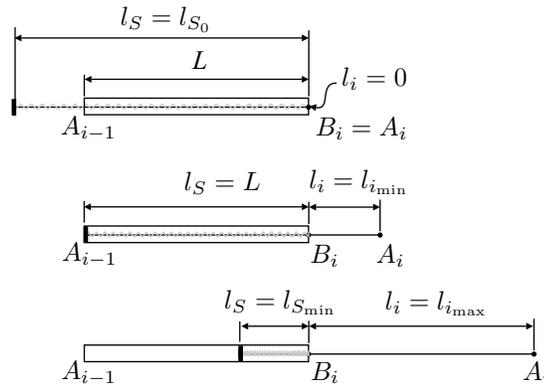


FIG. 6.13 – Simulation de ressorts à longueurs libres nulles.

simulé se retrouve à sa longueur d'opération minimale ($l_i = l_{i_{min}}$). Lorsque le ressort en compression est comprimé d'avantage jusqu'à sa longueur minimale ($l_S = l_{S_{min}}$), la longueur du ressort simulé croît jusqu'à $l_i = l_{i_{max}}$. À l'intérieur de cette gamme d'opération, la force interne dans le ressort en compression (ainsi que dans le ressort simulé) est donnée par $f_S = K_S l_i$ où K_S est la raideur du ressort en compression.

Le prototype est actionné manuellement en ajustant les longueurs de câbles qui sont attachés aux nœuds A_N et B_N et qui passent par des oeillets situés aux nœuds A_i et B_i ($i = 0, 1, \dots, N - 1$). Avec cette méthode d'actionnement, les distances qui séparent deux nœuds A_i (B_i) consécutifs ne sont pas nécessairement égales à ρ_1/N (ρ_2/N) comme c'est le cas avec le modèle théorique. Pour cette raison, le prototype ne reflète pas toujours ce modèle.

6.2 Mécanisme de tensegrité modulaire spatial à trois degrés de liberté

Le mécanisme modulaire spatial qui est étudié dans cette section a été développé à partir du système en forme de X de Snelson. L'utilisation d'un système plan pour le développement d'un mécanisme spatial peut, a priori, paraître illogique. Toutefois, comme il pourra être constaté à partir des résultats de l'analyse du mécanisme, ce dernier démontre des propriétés mécaniques très intéressantes qui ne sont pas possibles pour les mécanismes développés à partir du système de tensegrité antiprismatique triangulaire. De plus, le développement de mécanismes modulaires à partir des mécanismes de la section 5.2 n'est pas très intéressant étant donné le mouvement en translation pure de ces derniers.

6.2.1 Description du mécanisme

Le mécanisme de tensegrité modulaire spatial à trois degrés de liberté est formé par un assemblage de N modules. L'architecture du module est illustrée à la Figure 6.14 et consiste d'un assemblage en parallèle de trois systèmes de tensegrité en forme de X de Snelson [13]. Par conséquent, il contient six composants en compression et neuf composants en tension. Les composants en compression sont des barres de masse m et de longueur L qui lient les paires de nœuds $A_i B_{i+1}$, $A_i C_{i+1}$, $B_i A_{i+1}$, $B_i C_{i+1}$, $C_i A_{i+1}$ et $C_i B_{i+1}$. Ces barres sont attachées les unes aux autres aux différents nœuds par des liaisons sphériques. L'interférence entre deux barres qui se croisent est évitée en doublant l'une des barres créant ainsi une fente dans laquelle l'autre barre peut glisser. En ce qui concerne les composants en tension, il y en a six qui sont des ressorts de raideur K et de longueurs libres nulles qui rejoignent les paires de nœuds $A_i B_i$, $A_i C_i$, $B_i C_i$, $A_{i+1} B_{i+1}$, $A_{i+1} C_{i+1}$ et $B_{i+1} C_{i+1}$ tandis que les trois autres sont des câbles qui lient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$, $B_i B_{i+1}$ et $C_i C_{i+1}$.

Le mécanisme, illustré à la Figure 6.15(a), est obtenu à partir de l'assemblage en série de N modules où les connexions entre les modules sont effectuées avec des liaisons sphériques et où les ressorts situés à la rencontre de deux modules sont combinés pour donner des ressorts de raideur $2K$. Il est constaté qu'un tel assemblage nécessite l'utilisation de plusieurs liaisons sphériques à chaque nœud du mécanisme puisque plusieurs composants s'y rencontrent. En fait, à chaque nœud intermédiaire (c.-à-d. tous les nœuds sauf ceux qui se situent aux extrémités du mécanisme), il y a une rencontre de quatre barres, deux ressorts et deux câbles. Une solution alternative pour remplacer

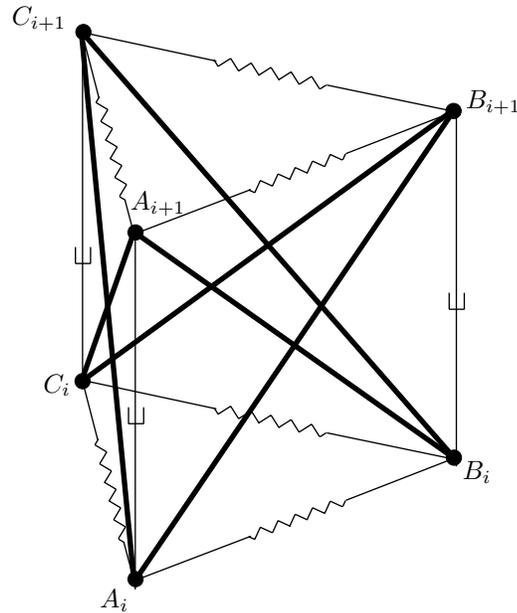


FIG. 6.14 – Module utilisé dans le mécanisme de tensegrité modulaire spatial à trois degrés de liberté.

l'utilisation de liaisons sphériques est donc requise puisque, dans ce cas, il serait nécessaire de superposer sept liaisons sphériques en un seul point. En ce qui a trait aux câbles, ils peuvent être attachés directement aux nœuds tout en profitant de leur flexibilité pour simuler des liaisons sphériques. Cette approche pourrait également être utilisée pour les ressorts selon la méthode qui est utilisée pour les intégrer dans le mécanisme. Quoiqu'il en soit, une alternative potentielle pour remplacer les liaisons sphériques est le *concentric multilink spherical joint* (liaison CMS) de Hamlin et Sanderson [98]. La liaison CMS est en fait un mécanisme à six barres qui impose un mouvement sphérique entre deux corps rigides sans toutefois occuper l'espace dans le voisinage du centre de rotation. Par conséquent, un comportement équivalent à des liaisons sphériques concentriques peut être obtenu en utilisant des liaisons CMS pour relier les différents composants qui se rencontrent à un nœud. Dans leur ouvrage, Hamlin et Sanderson discutent d'un système qui utilise des liaisons CMS pour permettre des mouvements sphériques entre dix composants qui se rencontrent à un seul nœud. Il est alors plausible de prévoir l'utilisation de ce genre de liaison pour le mécanisme modulaire spatial où il y a une rencontre de six composants au maximum.

Un repère fixe $X_0Y_0Z_0$ est défini avec son origine, représentée par le nœud O , agissant comme la base du mécanisme. Tel qu'il est illustré à la Figure 6.15(b), les nœuds A_0 , B_0 et C_0 se déplacent en translation sur des liaisons prismatiques passives qui sont distribuées de manière symétrique dans le plan X_0Y_0 ($\gamma = 2\pi/3$). Le repère fixe se situe à l'intersection des liaisons prismatiques avec son axe Y_0 dirigé vers le nœud C_0 et

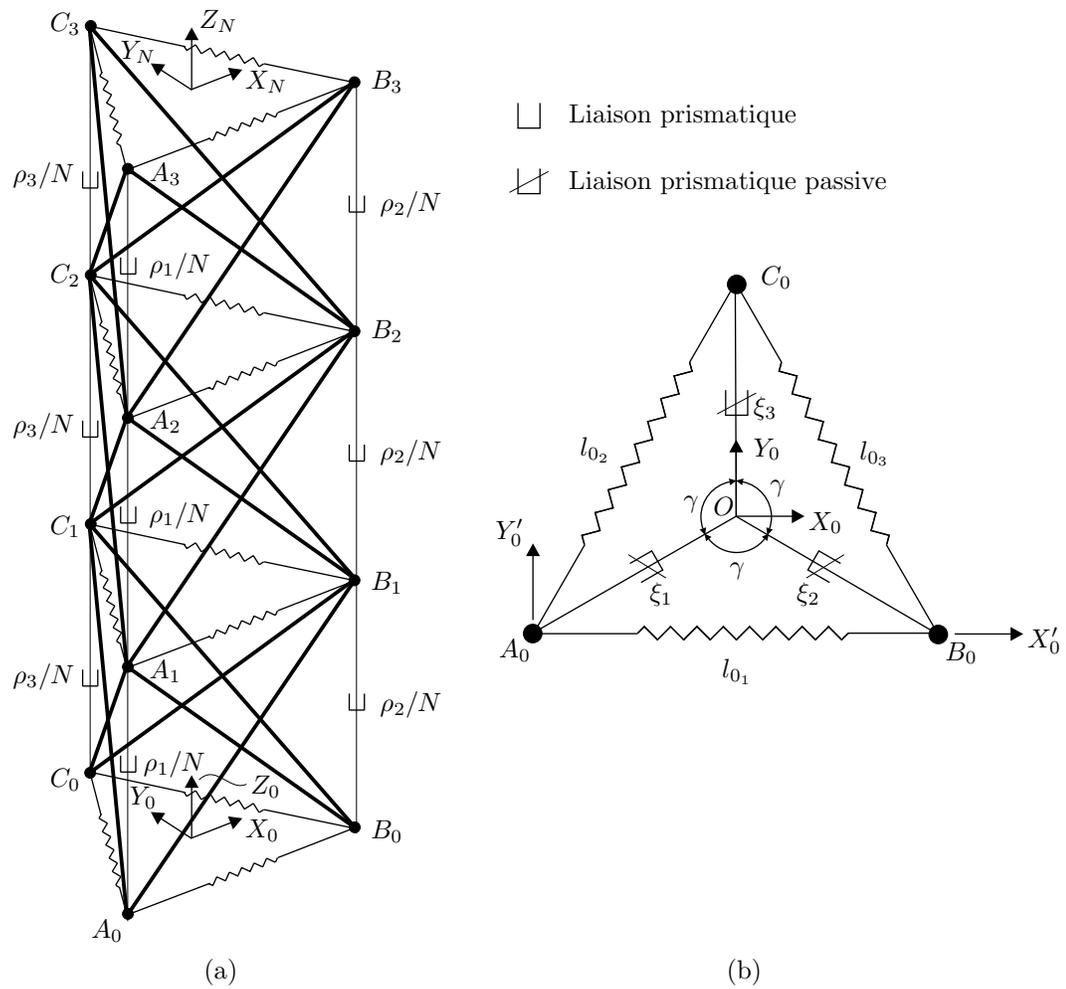


FIG. 6.15 – Mécanisme de tensegrité modulaire spatial à trois degrés de liberté : (a) vue isométrique (b) vue détaillée de la base.

son axe Z_0 perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_0 , B_0 et C_0 . Les positions des liaisons prismatiques passives, mesurées de l'origine O jusqu'aux nœuds A_0 , B_0 et C_0 , sont représentées par ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 , respectivement. L'effecteur du mécanisme correspond à l'origine d'un repère mobile $X_N Y_N Z_N$. Pour conserver une symétrie dans la modélisation du mécanisme, il est supposé que les nœuds A_N , B_N et C_N se déplacent sur des liaisons prismatiques passives virtuelles selon un arrangement similaire à celui de la Figure 6.15(b). Ce faisant, l'origine du repère mobile se retrouve à l'intersection des liaisons prismatiques virtuelles tandis que son axe Y_N est dirigé vers le nœud C_N et son axe Z_N est perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_N , B_N et C_N .

Le mécanisme est actionné en modifiant les longueurs de ses câbles. Comme c'était le cas pour le mécanisme modulaire plan, les câbles qui lient les paires de nœuds $A_i A_{i+1}$ consécutives sont tous supposés être de longueur ρ_1/N (ce qui donne une longueur totale de ρ_1 pour ces câbles). Le même principe s'applique aux câbles qui relient les paires de nœuds $B_i B_{i+1}$ (longueurs égales à ρ_2/N) et $C_i C_{i+1}$ (longueurs égales à ρ_3/N). Cette stratégie d'actionnement peut être réalisée en utilisant différentes approches dont celles qui ont été décrites à la section 6.1.1.

En négligeant les ressorts (puisqu'ils ne contraignent pas le mécanisme) et en modélisant les câbles comme des liaisons prismatiques, la mobilité du mécanisme peut être calculée à partir de son graphe de mobilité qui est illustré à la Figure 6.16 pour une quantité arbitraire de modules. À partir de ce graphe, il est possible de constater que : $d_F = 6$, $n_B = 12N + 4$, $n_J = 18N + 3$, $\sum \mathcal{D}_i = 48N + 3$ et $\mathcal{D}_S = 9N$. Lorsque combinées avec l'équation (3.2), ces valeurs permettent de trouver que $\mathcal{D}_G = 3N + 3$. Le mécanisme a alors un total de $3N + 3$ degrés de liberté. Par contre, lorsque les longueurs de ses $3N$ câbles sont fixes, cela ne lui laisse que trois degrés de liberté non contraints lui permettant de demeurer dans une configuration de tensegrité et ce peu importe sa quantité de modules.

Les positions des nœuds A_0 , B_0 et C_0 sont données par :

$$\mathbf{a}_0 = \xi_1 \mathbf{e}_1 \quad , \quad \mathbf{b}_0 = \xi_2 \mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{c}_0 = \xi_3 \mathbf{e}_3 \quad (6.50)$$

avec :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\gamma/2) \\ -\cos(\gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\gamma/2) \\ -\cos(\gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Il est choisi d'utiliser directement les coordonnées cartésiennes des autres nœuds comme paramètres pour représenter la configuration du mécanisme. Le vecteur de coordonnées généralisées s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{q} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}_i^T, \mathbf{c}_i^T, \dots, \mathbf{a}_N^T, \mathbf{b}_N^T, \mathbf{c}_N^T]^T \quad (6.52)$$

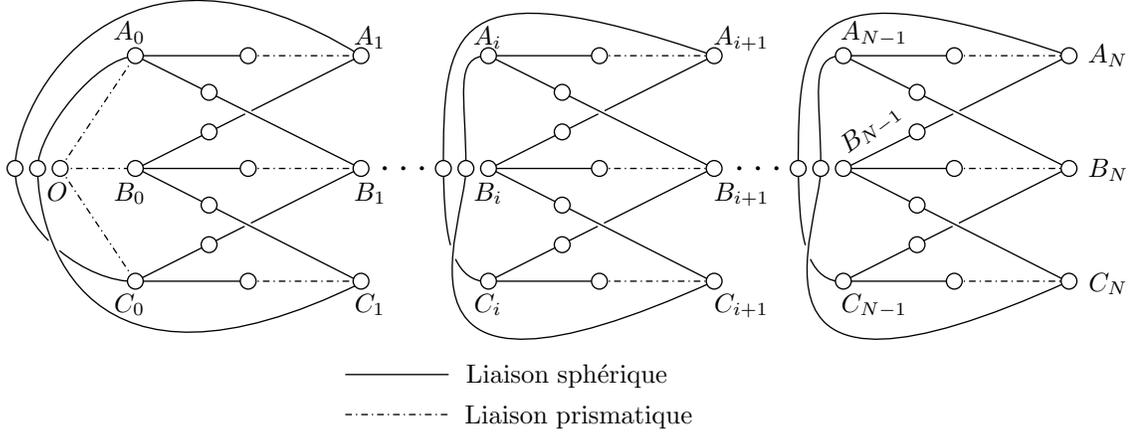


FIG. 6.16 – Graphe de mobilité du mécanisme.

Par conséquent, à l'exception des nœuds A_0 , B_0 et C_0 , les expressions des positions des nœuds en fonction des coordonnées généralisées sont triviales. Les centres de masse des barres, pour leur part, sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{CG_{i_1}} &= \frac{\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{b}_i}{2} & , & & \mathbf{p}_{CG_{i_2}} &= \frac{\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{c}_i}{2} \\
 \mathbf{p}_{CG_{i_3}} &= \frac{\mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{a}_i}{2} & , & & \mathbf{p}_{CG_{i_4}} &= \frac{\mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{c}_i}{2} \\
 \mathbf{p}_{CG_{i_5}} &= \frac{\mathbf{c}_{i-1} + \mathbf{a}_i}{2} & , & & \mathbf{p}_{CG_{i_6}} &= \frac{\mathbf{c}_{i-1} + \mathbf{b}_i}{2}
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

où $i = 1, 2, \dots, N$ tandis que les longueurs des ressorts sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 l_{i_1} &= \sqrt{(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)} \\
 l_{i_2} &= \sqrt{(\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i)^T (\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i)} \\
 l_{i_3} &= \sqrt{(\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_i)^T (\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_i)}
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

où, dans ce cas, $i = 0, 1, \dots, N$.

Les variables d'entrée du mécanisme correspondent aux longueurs de ses câbles, soit $\boldsymbol{\psi} = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^T$. Ses variables de sortie sont choisies comme les coordonnées cartésiennes de son effecteur qui correspondent aux éléments du vecteur qui relie les origines des repères $X_0Y_0Z_0$ et $X_NY_NZ_N$, soit $\mathbf{p}_N = [x_N, y_N, z_N]^T$. En raison de la quantité superflue de coordonnées généralisées utilisées pour représenter les positions des degrés de liberté non contraints du mécanisme, des contraintes géométriques associées aux longueurs des barres et des câbles doivent également être satisfaites. Ces contraintes sont

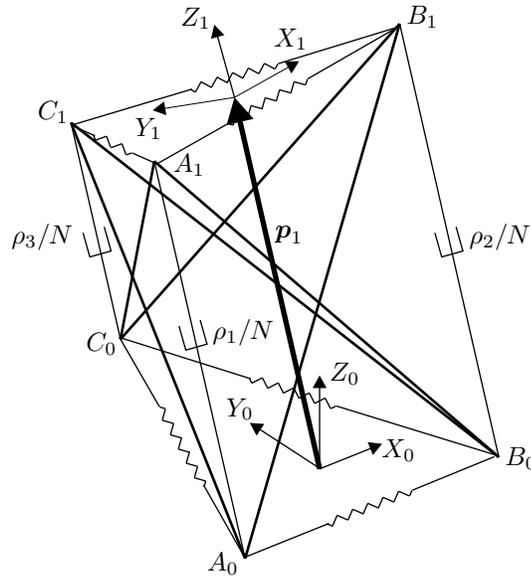
données sous forme vectorielle comme suit :

$$\phi = \begin{bmatrix}
 (\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_1) - L^2 \\
 (\mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_1)^T(\mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_1) - L^2 \\
 (\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_1) - L^2 \\
 (\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_1)^T(\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_1) - L^2 \\
 (\mathbf{c}_0 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{c}_0 - \mathbf{a}_1) - L^2 \\
 (\mathbf{c}_0 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{c}_0 - \mathbf{b}_1) - L^2 \\
 (\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1) - (\rho_1/N)^2 \\
 (\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1) - (\rho_2/N)^2 \\
 (\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1)^T(\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1) - (\rho_3/N)^2 \\
 \vdots \\
 (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_{i+1})^T(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_{i+1}) - L^2 \\
 (\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_{i+1})^T(\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_{i+1}) - L^2 \\
 (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_{i+1})^T(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_{i+1}) - L^2 \\
 (\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_{i+1})^T(\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_{i+1}) - L^2 \\
 (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_{i+1})^T(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_{i+1}) - L^2 \\
 (\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_{i+1})^T(\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_{i+1}) - L^2 \\
 (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})^T(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1}) - (\rho_1/N)^2 \\
 (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1})^T(\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1}) - (\rho_2/N)^2 \\
 (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i+1})^T(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i+1}) - (\rho_3/N)^2 \\
 \vdots \\
 (\mathbf{a}_{N-1} - \mathbf{b}_N)^T(\mathbf{a}_{N-1} - \mathbf{b}_N) - L^2 \\
 (\mathbf{a}_{N-1} - \mathbf{c}_N)^T(\mathbf{a}_{N-1} - \mathbf{c}_N) - L^2 \\
 (\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{a}_N)^T(\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{a}_N) - L^2 \\
 (\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{c}_N)^T(\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{c}_N) - L^2 \\
 (\mathbf{c}_{N-1} - \mathbf{a}_N)^T(\mathbf{c}_{N-1} - \mathbf{a}_N) - L^2 \\
 (\mathbf{c}_{N-1} - \mathbf{b}_N)^T(\mathbf{c}_{N-1} - \mathbf{b}_N) - L^2 \\
 (\mathbf{a}_{N-1} - \mathbf{a}_N)^T(\mathbf{a}_{N-1} - \mathbf{a}_N) - (\rho_1/N)^2 \\
 (\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{b}_N)^T(\mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{b}_N) - (\rho_2/N)^2 \\
 (\mathbf{c}_{N-1} - \mathbf{c}_N)^T(\mathbf{c}_{N-1} - \mathbf{c}_N) - (\rho_3/N)^2
 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.55)$$

où ϕ est un vecteur de dimension $9N \times 1$.

6.2.2 Analyse cinématique et statique

Cette section vise en premier lieu le développement de solutions aux problèmes statiques direct et inverse du mécanisme pour le cas où les chargements externes et les forces gravitationnelles sont négligés. Malgré ces hypothèses simplificatrices, il sera constaté que les solutions de ces problèmes sont relativement complexes.


 FIG. 6.17 – Mécanisme avec $N = 1$.

6.2.2.1 Problème statique direct

Dans ce qui suit, le problème statique direct est résolu pour un mécanisme construit avec un seul module. Par la suite, de manière similaire à ce qui a été fait à la section 6.1.2.1, ce résultat est exploité dans le développement d'une solution pour un mécanisme à N modules. Un schéma d'un mécanisme avec $N = 1$ positionné dans une configuration arbitraire est montré à la Figure 6.17. Dans ce cas, le problème statique direct consiste à calculer \mathbf{p}_1 en fonction de ρ_1/N , ρ_2/N et ρ_3/N (l'écriture symbolique de N est utilisée ici pour permettre la généralisation ultérieure des résultats pour un nombre arbitraire de modules).

Calcul des longueurs des ressorts : Il est connu que le module à partir duquel est construit le mécanisme modulaire spatial est formé par un assemblage en parallèle de trois modules plans tel que celui illustré à la section centrale de la Figure 6.1. De plus, il a été vu à la section 6.1.2.1 que la configuration d'équilibre d'un module plan correspond toujours (en absence de chargements externes et de forces gravitationnelles) à un trapèze où les longueurs des ressorts sont égales et les câbles sont parallèles. Il est maintenant supposé que les trois modules plans qui forment le module spatial sont détachés tel qu'il est illustré à la Figure 6.18(a). Les modules plans peuvent alors être considérés comme étant complètement indépendants les uns des autres en ce qui a trait à leurs configurations d'équilibre. Toutefois, les longueurs des câbles qui relient les paires de nœuds A_0A_1 , B_0B_1 ou C_0C_1 doivent être les mêmes dans tous les modules (tel qu'il est

indiqué avec des hachures à la Figure 6.18(a)). Supposons maintenant que les modules i et ii sont attachés ensemble à partir des nœuds B_0 et B_1 qui leurs sont communs (voir Figure 6.18(b)). Puisque les longueurs des câbles qui séparent ces nœuds sont égales, il n'est pas nécessaire de déformer les modules pour permettre l'assemblage. Il n'y a donc pas de force d'interaction à l'interface des modules. De la même manière, le module iii peut être assemblé aux modules i et ii au niveau des nœuds C_0 et C_1 sans que les modules impliqués soient déformés à partir de leurs configurations d'équilibre initiales (voir la Figure 6.18(c)). Pour compléter la construction du module spatial, l'assemblage de modules plans illustré à la Figure 6.18(c) doit être modifié pour faire en sorte que les nœuds A_0 et A_1 qui se situent à ses extrémités soient coïncidents. Pour ce faire, les modules plans sont tout simplement pivotés les uns par rapport aux autres autour des axes définis par les paires de nœuds B_0B_1 et C_0C_1 . Puisque les câbles sont tous parallèles, que leurs points milieux sont tous situés sur une droite (c.-à-d. la droite $c-c$) et que les longueurs des câbles qui relient les deux paires de nœuds A_0A_1 sont égales, il peut être constaté que l'étape finale de l'assemblage du module spatial, comme les deux premières étapes, ne nécessite pas de déformations des modules plans. Il est alors conclu que les configurations d'équilibre des modules plans utilisés dans la construction du module spatial sont identiques aux configurations d'équilibre de ces mêmes modules lorsque traités séparément. À partir de ce fait, la solution au problème statique direct du module plan, donnée par l'équation (6.14), peut être appliquée directement aux différentes faces du module spatial. Ce faisant, les longueurs des ressorts du mécanisme spatial lorsque ce dernier se retrouve dans une configuration d'équilibre sont données par :

$$l_{i_1} = \frac{\sqrt{N^2L^2 - \rho_1\rho_2}}{N} \quad , \quad l_{i_2} = \frac{\sqrt{N^2L^2 - \rho_1\rho_3}}{N} \quad , \quad l_{i_3} = \frac{\sqrt{N^2L^2 - \rho_2\rho_3}}{N} \quad (6.56)$$

En raison de la forme trapézoïdale des modules plans, ces longueurs sont valides pour $i = 0, 1, \dots, N$ ce qui implique que les triangles formés par les trios $A_iB_iC_i$ d'un mécanisme sont tous congruents.

Calcul des ξ_i : Les longueurs des ressorts du mécanisme étant maintenant connues, la prochaine étape consiste à localiser le mécanisme par rapport au repère $X_0Y_0Z_0$. En se référant à la Figure 6.15(b), le triangle formé par les nœuds A_0 , B_0 et C_0 a des côtés de longueurs l_{0_1} , l_{0_2} et l_{0_3} connues. La tâche consiste alors au calcul des positions des liaisons prismatiques, données par ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 , qui sont compatibles avec les longueurs des ressorts. À partir de la Figure 6.15(b) et de l'équation (6.50), les

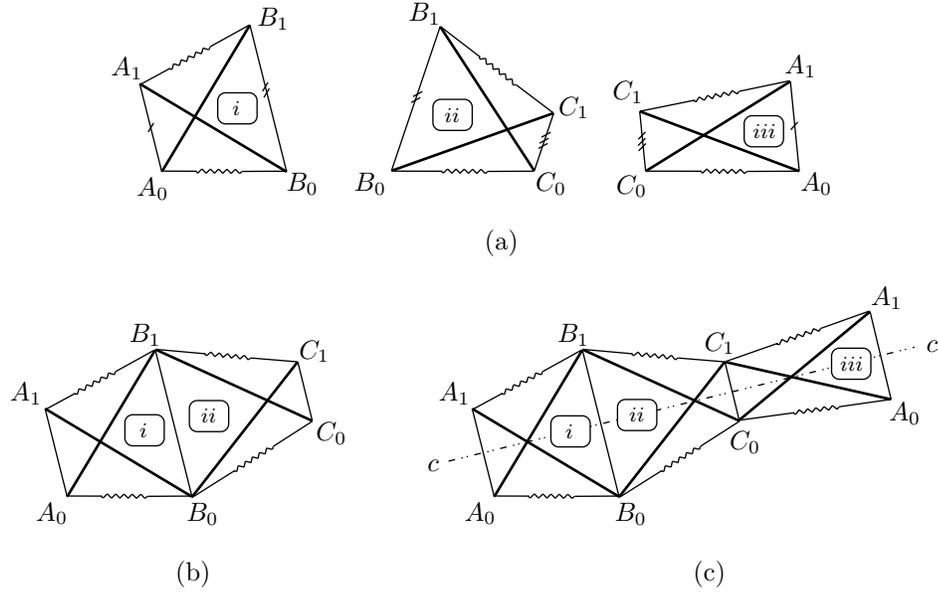


FIG. 6.18 – Construction d'un module spatial à partir de modules plans.

contraintes géométriques qui assurent cette compatibilité sont obtenues comme suit :

$$(\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0)^T(\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0) - l_{0_1}^2 = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - L^2 + \frac{\rho_1\rho_2}{N^2} = 0 \quad (6.57)$$

$$(\mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_0)^T(\mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_0) - l_{0_2}^2 = \xi_1^2 + \xi_1\xi_3 + \xi_3^2 - L^2 + \frac{\rho_1\rho_3}{N^2} = 0 \quad (6.58)$$

$$(\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0)^T(\mathbf{b}_0 - \mathbf{c}_0) - l_{0_3}^2 = \xi_2^2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3^2 - L^2 + \frac{\rho_2\rho_3}{N^2} = 0 \quad (6.59)$$

Le problème devient alors celui de calculer l'intersection de trois surfaces quadriques dans un espace tri-dimensionnel défini par des axes orthogonaux qui correspondent à ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 . Il peut être démontré que les équations (6.57) - (6.59) correspondent à des cylindres elliptiques pour lesquels les axes longitudinaux coïncident avec les axes de l'espace des ξ_i (Figure 6.19(a)). De plus, tel qu'il est illustré à la Figure 6.19(b), les axes majeurs et mineurs des cylindres elliptiques (c.-à-d. ξ'_i et ξ'_j) sont pivotés de $-\pi/4$ radians par rapport aux axes ξ_i et ξ_j (où les axes ξ_i et ξ_j correspondent aux axes de l'espace $\xi_1\xi_2\xi_3$ qui sont perpendiculaires à l'axe longitudinal du cylindre elliptique en question). Pour un cas général, il peut y avoir jusqu'à quatre solutions réelles aux équations (6.57) - (6.59). De plus, pour certains cas spéciaux, une infinité de solutions est possible. Il n'existe toutefois jamais plus d'une solution pour laquelle les valeurs de ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 sont toutes positives (ce qui doit être le cas pour le mécanisme). Cela s'observe facilement à partir de la Figure 6.20 où les nœuds A_0 et B_0 du triangle $A_0B_0C_0$ sont déplacés le long de leurs liaisons prismatiques respectives jusqu'à ce que le nœud C_0 se retrouve sur l'axe de sa liaison prismatique. Pour un cas spécifique où $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, il peut être observé à partir des équations (6.57) - (6.59) que $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$. À partir de

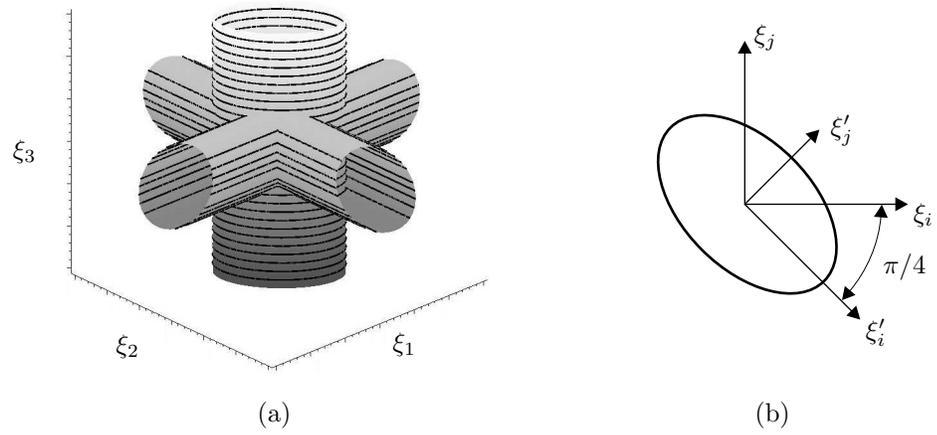


FIG. 6.19 – Exemple de l’intersection des cylindres elliptiques : (a) vue générale (b) vue détaillée d’une section elliptique.

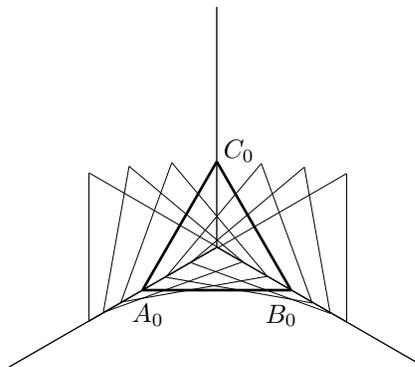


FIG. 6.20 – Démonstration de l’existence d’une seule solution pour laquelle $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$ et $\xi_3 > 0$.

cette constatation, les valeurs des ξ_i sont obtenues de l'équation (6.57), par exemple, comme suit :

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \frac{\sqrt{3}}{3N} \sqrt{N^2 L^2 - \rho^2} \quad (6.60)$$

Pour un autre cas spécifique où $\rho_i = \rho_j$, les équations (6.57) - (6.59) permettent de constater que $\xi_i = \xi_j$. Par exemple, si $\rho_1 = \rho_2$ il est observé à partir des équations (6.58) et (6.59) que $\xi_1 = \xi_2$. Dans ce cas, l'équation (6.57) mène à la solution suivante :

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3N} \sqrt{N^2 L^2 - \rho_1^2} \quad (6.61)$$

Par la suite, la solution pour ξ_3 est obtenue à partir de l'équation (6.58) comme suit :

$$\xi_3 = \frac{-N\xi_1 + \sqrt{N^2(4L^2 - 3\xi_1^2) - 4\rho_1\rho_3}}{2N} \quad (6.62)$$

ou de manière équivalente à partir de l'équation (6.59). La même approche s'applique aux cas où $\rho_1 = \rho_3$ ou $\rho_2 = \rho_3$. Pour un cas général où $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3$, la solution des équations (6.57) - (6.59) est un peu plus complexe. La formulation de Dixon [99] (voir l'annexe A) est utilisée ici pour convertir ces équations dans le polynôme suivant :

$$E_2 \xi_1^4 + E_1 \xi_1^2 + E_0 = 0 \quad (6.63)$$

où :

$$E_0 = - \left\{ L^2 \left[\rho_1(\rho_2 + \rho_3) - 2\rho_2\rho_3 \right] - \rho_1^2\rho_2^2 - \rho_1^2\rho_3^2 - \rho_2^2\rho_3^2 - \rho_1\rho_2\rho_3 \left[\rho_1 - 2(\rho_2 + \rho_3) \right] \right\}^2 \quad (6.64)$$

$$E_1 = 3 \left\{ L^2 \left[\rho_1\rho_2\rho_3(\rho_1 - 5\rho_2 - 5\rho_3) + 2\rho_1^2(\rho_2^2 + \rho_3^2) + 5\rho_2^2\rho_3^2 \right] - 2\rho_1^3(\rho_2^3 + \rho_3^3) + \rho_2^3\rho_3^3 - \rho_1\rho_2\rho_3 \left[\rho_1^2(\rho_2 + \rho_3) - 5\rho_1(\rho_2^2 + \rho_3^2) + 4\rho_2\rho_3(\rho_2 + \rho_3) - 3\rho_1\rho_2\rho_3 \right] \right\} \quad (6.65)$$

$$E_2 = 9 \left(\rho_1\rho_2\rho_3 \sum_{i=1}^3 \rho_i - \rho_1^2\rho_2^2 - \rho_1^2\rho_3^2 - \rho_2^2\rho_3^2 \right) \quad (6.66)$$

Puisque les puissances des équations (6.57) - (6.59) sont toutes identiques, la formulation de Dixon ne génère pas de solutions parasites. En ne conservant que les valeurs positives de ξ_1 , les solutions de l'équation (6.63) sont données par :

$$\xi_1 = \left[\frac{-E_1 + \zeta_1 \sqrt{E_1^2 - 4E_0E_2}}{2E_2} \right]^{1/2} \quad (6.67)$$

où $\zeta_1 = \pm 1$. Pour chaque valeur de ξ_1 ainsi obtenue, les seules solutions positives pour ξ_2 et ξ_3 sont obtenues à partir des équations (6.57) et (6.58) comme suit :

$$\xi_2 = \frac{-N\xi_1 + \sqrt{N^2(4L^2 - 3\xi_1^2) - 4\rho_1\rho_2}}{2N} \quad (6.68)$$

$$\xi_3 = \frac{-N\xi_1 + \sqrt{N^2(4L^2 - 3\xi_1^2) - 4\rho_1\rho_3}}{2N} \quad (6.69)$$

Les équations (6.67) - (6.69) génèrent deux trios de valeurs pour les ξ_i . Par contre, seulement un de ces trios représente une solution valide où ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 sont positifs et où l'équation (6.59) est satisfaite. En filtrant les solutions à partir de ces conditions, la solution recherchée est facilement identifiée.

Calcul des positions des nœuds : Une fois ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 connus, les positions des nœuds A_0 , B_0 et C_0 sont obtenues à partir de l'équation (6.50). Pour des positions données des nœuds A_0 , B_0 et C_0 il peut être constaté en se référant à la Figure 6.17 que le nœud A_1 du module spatial doit être situé sur les surfaces des trois sphères suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) &= (\rho_1/N)^2 \\ (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_0)^T(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_0) &= L^2 \\ (\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_0)^T(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_0) &= L^2 \end{aligned} \quad (6.70)$$

Par conséquent, l'intersection de ces sphères correspond à la position du nœud A_1 . Puisque les centres des sphères se retrouvent dans le plan X_0Y_0 , leur intersection (sauf dans des cas spéciaux) mène à deux points qui sont symétriques par rapport à ce plan. La position du nœud A_1 est choisie comme le point qui a une coordonnée en Z_0 positive. Une fois \mathbf{a}_1 connu, un vecteur unitaire dirigé le long du câble qui relie les nœuds A_0 et A_1 est défini comme suit :

$$\mathbf{e} = \frac{N}{\rho_1}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \quad (6.71)$$

Les positions des nœuds B_1 et C_1 peuvent ensuite être calculées avec les expressions suivantes :

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0 + \left(\frac{\rho_2}{N}\right)\mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_0 + \left(\frac{\rho_3}{N}\right)\mathbf{e} \quad (6.72)$$

où le fait que les trois câbles sont parallèles a été exploité.

Calcul de \mathbf{p}_1 : Il a déjà été démontré dans cette section que les triangles formés par les trios de nœuds $A_iB_iC_i$ du mécanisme sont congruents. De plus, il est connu que les câbles d'un module du mécanisme sont parallèles et que leur direction est donnée par le vecteur unitaire \mathbf{e} . Le triangle $A_1B_1C_1$ du mécanisme est alors obtenu par une

projection du triangle $A_0B_0C_0$ où les distances et les angles sont préservés et où les droites qui projettent les points du triangle $A_0B_0C_0$ aux points correspondants du triangle $A_1B_1C_1$ sont parallèles. À la Figure 6.17, le vecteur \mathbf{p}_1 est défini comme celui qui relie le repère fixe $X_0Y_0Z_0$ au repère mobile $X_1Y_1Z_1$. Tel qu'il est décrit à la section 6.2.1, la localisation du repère $X_1Y_1Z_1$ par rapport aux nœuds A_1 , B_1 et C_1 s'effectue avec des liaisons prismatiques virtuelles qui sont arrangées de la même manière que les liaisons prismatiques qui relient les nœuds A_0 , B_0 et C_0 au repère $X_0Y_0Z_0$ (voir Figure 6.15(b)). Par conséquent, sachant que les triangles $A_0B_0C_0$ et $A_1B_1C_1$ sont congruents, la position relative du repère $X_1Y_1Z_1$ par rapport aux nœuds $A_1B_1C_1$ doit être la même que celle du repère $X_0Y_0Z_0$ par rapport aux nœuds $A_0B_0C_0$. Le vecteur \mathbf{p}_1 peut alors s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{p}_1 = \|\mathbf{p}_1\| \mathbf{e} \quad (6.73)$$

où $\|\mathbf{p}_1\|$ correspond à l'amplitude du vecteur \mathbf{p}_1 qui doit maintenant être calculée. La condition à satisfaire pour le calcul de $\|\mathbf{p}_1\|$ est que l'origine du repère $X_1Y_1Z_1$ se situe dans le plan défini par les nœuds A_1 , B_1 et C_1 . Mathématiquement, cette condition s'écrit [100] :

$$\begin{vmatrix} \|\mathbf{p}_1\| \mathbf{e} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.74)$$

d'où $\|\mathbf{p}_1\|$ peut être obtenue comme suit :

$$\|\mathbf{p}_1\| = \frac{|\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{c}_1|}{|\mathbf{e} \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{c}_1| - |\mathbf{e} \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{c}_1| + |\mathbf{e} \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{b}_1|} \quad (6.75)$$

Le problème statique direct du mécanisme avec un seul module est alors résolu.

Calcul de \mathbf{p}_N : Selon la description du mécanisme donnée à la section 6.2.1, les longueurs des barres et des câbles ainsi que les raideurs des ressorts sont les mêmes pour tous les modules. Lorsque traités indépendamment, les modules doivent alors tous avoir la même configuration d'équilibre. Il est également connu que les triangles $A_iB_iC_i$ et $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ d'un module sont congruents. Il n'est donc pas nécessaire de déformer les modules pour en faire l'assemblage. Il en résulte que les configurations d'équilibre des modules du mécanisme sont les mêmes que celles d'un module indépendant. Ce faisant, la solution au problème statique direct du mécanisme est obtenue de la même manière que pour le mécanisme modulaire plan (voir l'équation (6.19)), soit :

$$\mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^{i-1} \mathbf{p}_1 \quad (6.76)$$

où \mathbf{Q} est une matrice de rotation qui amène le repère $X_iY_iZ_i$ d'un module parallèle au repère $X_{i+1}Y_{i+1}Z_{i+1}$. Cette matrice peut être calculée à partir de la solution au

problème statique direct du mécanisme avec $N = 1$ comme suit :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{Q_1} & \mathbf{e}_{Q_2} & \mathbf{e}_{Q_3} \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

où :

$$\mathbf{e}_{Q_1} = \mathbf{e}_{Q_2} \times \mathbf{e}_{Q_3} \quad , \quad \mathbf{e}_{Q_2} = \frac{\mathbf{c}_1 - \mathbf{p}_1}{\xi_3} \quad , \quad \mathbf{e}_{Q_3} = \frac{(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1)}{\|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1)\|} \quad (6.78)$$

Pendant le développement de la solution au problème statique direct du mécanisme modulaire spatial, il a été démontré géométriquement que les configurations d'équilibre des modules du mécanisme ainsi que des modules plans à partir desquels ils sont construits ne sont pas influencées par l'assemblage du mécanisme. La stabilité des configurations d'équilibre du mécanisme découle alors directement de la stabilité du module plan qui a déjà été prouvée à la section 6.1.2.6. Par conséquent, il peut être affirmé que la solution développée dans cette section est valide pour toutes les positions des actionneurs du mécanisme qui appartiennent à son espace atteignable.

6.2.2.2 Problème statique inverse

Le problème statique inverse correspond au calcul des positions des actionneurs du mécanisme ($\boldsymbol{\psi}$) en fonction de la position de son effecteur (\mathbf{p}_N). L'approche utilisée pour solutionner ce problème est très similaire à celle qui a été utilisée dans le cas du mécanisme modulaire plan (voir la section 6.1.2.2). En ce sens, l'équation (6.76) est premièrement résolue pour \mathbf{p}_1 comme suit :

$$\mathbf{p}_1 = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^{i-1} \right)^{-1} \mathbf{p}_N \quad (6.79)$$

où la matrice de rotation \mathbf{Q} , qui représente la rotation du repère $X_0Y_0Z_0$ au repère $X_1Y_1Z_1$ du module (voir Figure 6.17), doit être exprimée en fonction du vecteur \mathbf{p}_N . Pour ce faire, il est avantageux d'utiliser la convention des angles d'inclinaison et de torsion (*tilt and torsion angles*) pour représenter cette rotation (voir p. ex. Bonev [101]). Selon cette représentation, la matrice \mathbf{Q} peut être décomposée comme suit :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_z(\beta)\mathbf{Q}_y(\alpha)\mathbf{Q}_z(-\beta)\mathbf{Q}_z(\theta) \quad (6.80)$$

où :

$$\mathbf{Q}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

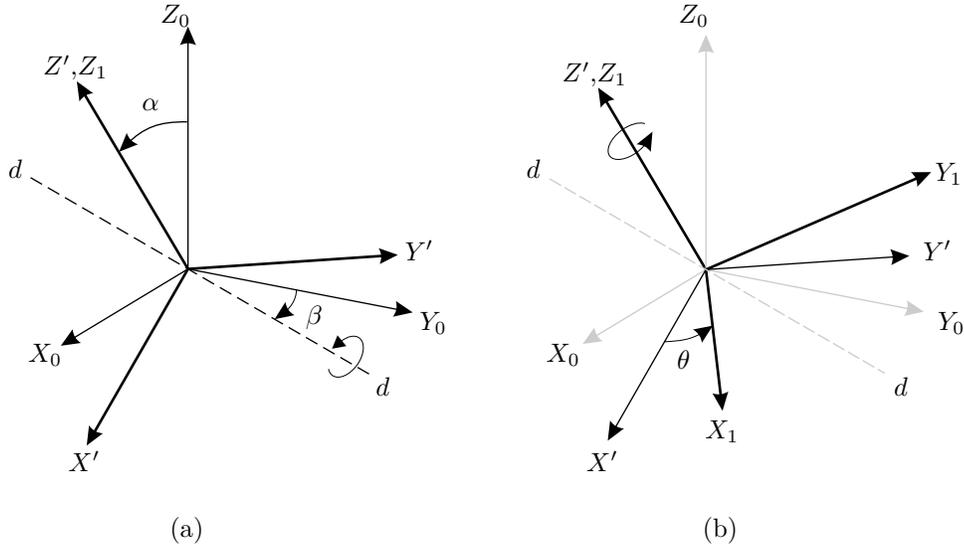


FIG. 6.21 – Illustration des angles d'inclinaison et de torsion : (a) inclinaison de l'axe Z_i jusqu'à l'axe Z_{i+1} (b) torsion jusqu'à l'orientation finale.

$$\mathbf{Q}_z(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

$$\mathbf{Q}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

En se référant à la Figure 6.22, le principe derrière les angles d'inclinaison et de torsion est de rendre le repère $X_0Y_0Z_0$ parallèle au repère $X_1Y_1Z_1$ par l'entremise de deux rotations. La première rotation, illustrée à la Figure 6.21(a), amène directement l'axe Z_0 dans son orientation finale où il est parallèle à l'axe Z_1 . Cela s'effectue par une rotation d'un angle α autour d'une droite $d-d$ pour laquelle la position angulaire dans le plan X_0Y_0 est spécifiée par l'angle β . À la suite de cette première rotation, les axes X_0 et Y_0 se retrouvent dans une nouvelle orientation représentée par X' et Y' . La deuxième étape consiste alors à effectuer une rotation autour de l'axe Z_1 d'un angle θ jusqu'à ce que les axes X' et Y' soient coïncidents avec les axes X_1 et Y_1 .

L'utilisation des angles d'inclinaison et de torsion pour représenter la rotation relative entre les repères d'un module du mécanisme permet de mettre en évidence un comportement intéressant de ce dernier. En fait, lorsque le module spatial est dans une configuration d'équilibre en absence de chargements externes ou gravitationnels, il peut être constaté que l'orientation du repère $X_1Y_1Z_1$ par rapport au repère $X_0Y_0Z_0$ correspond toujours à un cas où il n'y a pas de torsion (c.-à-d. $\theta = 0$). Ce résultat découle du

fait que le triangle $A_1B_1C_1$ est obtenu par une projection par droites parallèles du triangle $A_0B_0C_0$. D'ailleurs, il est connu que les axes Y_0 et Y_1 sont dirigés des origines des repères fixe et mobile vers les nœuds C_0 et C_1 , respectivement. Il est également connu que la droite qui relie les origines des repères $X_0Y_0Z_0$ et $X_1Y_1Z_1$ ainsi que celle qui relie les nœuds C_0 et C_1 sont parallèles (leur direction étant donnée par le vecteur unitaire \mathbf{e}). Il peut alors être observé que ces deux droites ainsi que les droites définies par les axes Y_0 et Y_1 se retrouvent dans le même plan. Une telle situation n'est possible que si l'orientation du repère $X_1Y_1Z_1$ par rapport au repère $X_0Y_0Z_0$ correspond à une inclinaison pure (c.-à-d. une rotation avec une torsion nulle). De plus, ce résultat s'applique tout aussi bien aux repères $X_0Y_0Z_0$ et $X_NY_NZ_N$ d'un mécanisme à N modules.

Sachant que $\theta = 0$, il ne reste maintenant qu'à trouver des expressions pour les angles α et β en fonction de \mathbf{p}_N pour permettre le calcul de \mathbf{Q} . En ce sens, il peut être observé que, dans les cas où $\theta = 0$, le module est parfaitement symétrique par rapport à un plan passant par les points milieux de ses câbles qui a comme vecteur normal \mathbf{e} (voir la Figure 6.22 et également la Figure 6.18(c)). Il est supposé pour le moment que les axes Z_0 et Z_1 sont initialement parallèles avec \mathbf{e} . Pour apporter le vecteur Z_0 dans son orientation finale où il est perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_0 , B_0 et C_0 , le repère $X_0Y_0Z_0$ doit subir une inclinaison d'un certain angle autour d'un axe qui se retrouve dans le plan de symétrie. Les paramètres de l'inclinaison (angle de rotation et position angulaire de l'axe de rotation) dépendent des longueurs des câbles. Puisque ces câbles sont symétriques par rapport au plan de symétrie, il va de soit que l'inclinaison de l'axe Z_1 pour l'apporter dans une orientation perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_1 , B_1 et C_1 est identique à celle de l'axe Z_0 sauf que la rotation s'effectue dans le sens inverse. Il en résulte que les axes Z_0 et Z_1 ainsi que le vecteur \mathbf{e} (ou, de manière équivalente, le vecteur \mathbf{p}_1) se retrouvent dans un même plan. De plus, l'axe de l'inclinaison est perpendiculaire à ce plan. Ce faisant, l'angle β peut se calculer à partir du vecteur \mathbf{p}_1 comme suit :

$$\beta = \text{Atan2}(y_1, x_1) \quad (6.84)$$

Par définition, le cosinus de l'angle α qui apporte l'axe Z_0 parallèle à l'axe Z_1 correspond tout simplement à la projection d'un vecteur unitaire parallèle à Z_0 (\mathbf{e}_{Z_0}) sur un vecteur unitaire parallèle à Z_1 (\mathbf{e}_{Z_1}), soit $\cos \alpha = \mathbf{e}_{Z_0}^T \mathbf{e}_{Z_1}$. Toutefois, puisque les angles entre les axes Z_0 et Z_1 et le vecteur \mathbf{e} sont les mêmes, il est également possible d'écrire $\cos \alpha = (\mathbf{e}_{Z_0} + \mathbf{e}_{Z_1})^T \mathbf{e} = 2\mathbf{e}_{Z_0}^T \mathbf{e}$. À partir de ce résultat, il peut être déduit que l'angle α peut être calculé à partir du vecteur \mathbf{p}_1 comme suit :

$$\alpha = 2 \text{Atan2}(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, z_1) \quad (6.85)$$

Il peut être difficile de visualiser certaines des observations faites aux derniers paragraphes. Par conséquent, il est utile de noter que le comportement du module spatial

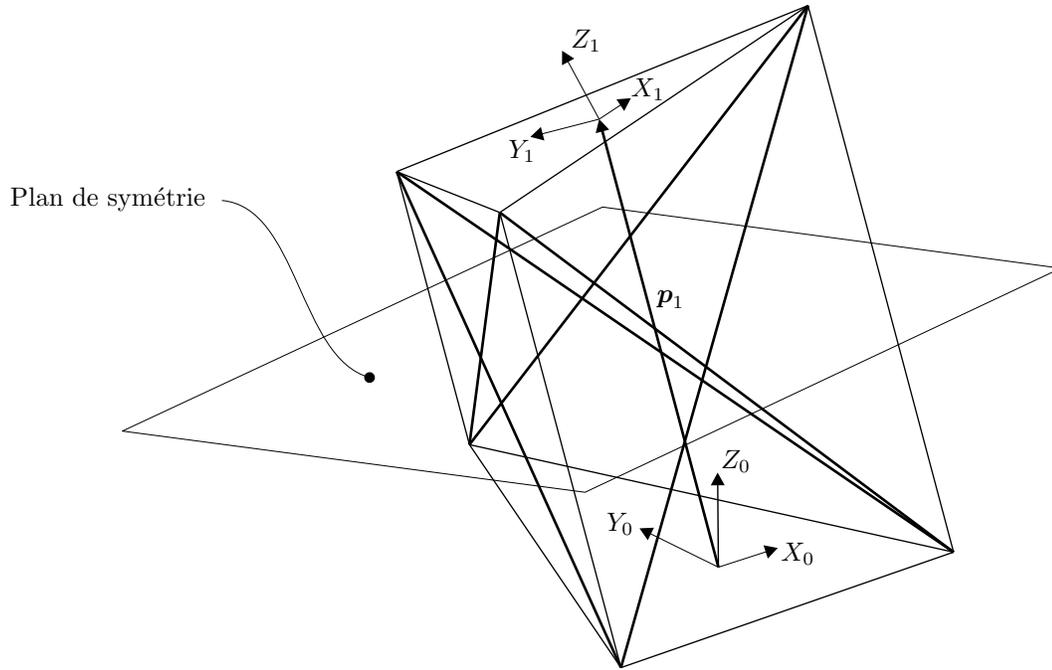


FIG. 6.22 – Plan de symétrie du module spatial.

est très similaire à celui du module plan (voir par exemple le diagramme en médaillon de la Figure 6.1).

Les équations (6.84) et (6.85) permettent le calcul des angles β et α à partir du vecteur \mathbf{p}_1 ce qui n'est pas très utile puisqu'il est présentement souhaité de calculer \mathbf{p}_1 avec l'équation (6.79). Toutefois, les résultats des équations (6.84) et (6.85) peuvent être exploités dans le développement d'expressions pour les angles β et α en fonction de \mathbf{p}_N . En ce qui a trait à l'angle β , il a été observé que les axes Z_0 et Z_1 ainsi que le vecteur \mathbf{p}_1 se retrouvent tous dans un même plan. Dans un mécanisme à N modules, sachant que les modules (ainsi que leurs configurations d'équilibre) sont tous identiques, il est constaté que les axes Z_0 et Z_N ainsi que le vecteur \mathbf{p}_N se retrouvent également dans un même plan. Il en résulte que l'angle β peut, de manière similaire à l'équation (6.84), se calculer comme suit :

$$\beta = \text{Atan2}(y_N, x_N) \quad (6.86)$$

Selon les observations faites ci-dessus, les vecteurs \mathbf{p}_1 associés aux modules du mécanisme ainsi que le vecteur \mathbf{p}_N se retrouvent tous dans un plan qui est obtenu en pivotant le plan X_0Z_0 d'un angle β autour de l'axe Z_0 . Il est alors possible de dresser le diagramme de la Figure 6.23 qui s'inspire du diagramme similaire utilisé pour le mécanisme modulaire plan (voir la Figure 6.4). L'angle ϑ est obtenu à partir des éléments de \mathbf{p}_N comme suit :

$$\vartheta = \text{Atan2}(\sqrt{x_N^2 + y_N^2}, z_N) \quad (6.87)$$

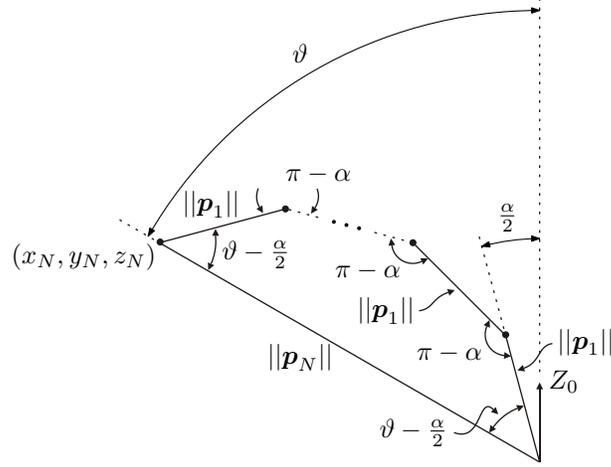


FIG. 6.23 – Diagramme de fermeture vectorielle illustrant la relation entre \mathbf{p}_N et α pour le mécanisme modulaire spatial.

Par la suite, en exploitant les propriétés du polygone (voir les développements de la section 6.1.2.2), il est possible de trouver :

$$\alpha = \frac{2\vartheta}{N} \quad (6.88)$$

En substituant les résultats des équations (6.86) et (6.88) dans l'équation (6.80) et en se rappelant que $\theta = 0$, une expression pour \mathbf{Q} en fonction de \mathbf{p}_N est alors trouvée.

Les développements présentés jusqu'ici permettent le calcul du vecteur \mathbf{p}_1 correspondant à un vecteur \mathbf{p}_N donné. Cela signifie que le problème statique inverse du mécanisme peut maintenant être résolu en ne considérant qu'un seul module. À l'intérieur d'un module, les contraintes géométriques des équations (6.57) - (6.59) doivent toujours être satisfaites. De plus, puisque le vecteur \mathbf{p}_1 est connu, les équations de fermeture vectorielle suivantes doivent également être respectées :

$$\frac{\rho_1}{N} \mathbf{e} = \mathbf{p}_1 + \xi_1(\mathbf{Q} - \mathbf{1})\mathbf{e}_1 \quad (6.89)$$

$$\frac{\rho_2}{N} \mathbf{e} = \mathbf{p}_1 + \xi_2(\mathbf{Q} - \mathbf{1})\mathbf{e}_2 \quad (6.90)$$

$$\frac{\rho_3}{N} \mathbf{e} = \mathbf{p}_1 + \xi_3(\mathbf{Q} - \mathbf{1})\mathbf{e}_3 \quad (6.91)$$

Pour un cas spécifique où $x_1 = y_1 = 0$, il est constaté à partir de l'équation (6.85) que $\alpha = 0$ et $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$. En substituant ce résultat dans les équations (6.89) - (6.91), il est trouvé que :

$$\left(\frac{\rho_i}{N}\right)^2 \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \left(\frac{\rho_i}{N}\right)^2 = \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 = z_1^2 \quad (6.92)$$

ce qui permet de calculer facilement les longueurs des câbles comme $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = Nz_1$. Les positions des liaisons prismatiques passives pour ce cas sont données à l'équation (6.60). Pour un cas général, le produit de la transposée de l'équation (6.89) par l'équation (6.90), par exemple, permet d'obtenir :

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{N^2} = \left[\mathbf{e}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1})^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) \mathbf{e}_2 \right] \xi_1 \xi_2 + \left[\mathbf{p}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) \mathbf{e}_1 \right] \xi_1 + \left[\mathbf{p}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) \mathbf{e}_2 \right] \xi_2 + \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 \quad (6.93)$$

En multipliant l'équation (6.89) par l'équation (6.91) ainsi que l'équation (6.90) par l'équation (6.91), des expressions similaires sont trouvées. Il est ensuite possible de substituer ces expressions dans les équations (6.57) - (6.59) ce qui mène au système d'équations suivant :

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \left[\mathbf{e}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1})^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) \mathbf{e}_2 + 1 \right] \xi_1 \xi_2 + \mathbf{p}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) (\mathbf{e}_1 \xi_1 + \mathbf{e}_2 \xi_2) + \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - L^2 = 0 \quad (6.94)$$

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 + \left[\mathbf{e}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1})^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) \mathbf{e}_3 + 1 \right] \xi_1 \xi_3 + \mathbf{p}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) (\mathbf{e}_1 \xi_1 + \mathbf{e}_3 \xi_3) + \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - L^2 = 0 \quad (6.95)$$

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 + \left[\mathbf{e}_2^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1})^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) \mathbf{e}_3 + 1 \right] \xi_2 \xi_3 + \mathbf{p}_1^T (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) (\mathbf{e}_2 \xi_2 + \mathbf{e}_3 \xi_3) + \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 - L^2 = 0 \quad (6.96)$$

En appliquant la méthode d'élimination de Dixon à ce système d'équations, une matrice \mathbf{D} est générée pour laquelle le déterminant correspond à un polynôme de degré huit en fonction de ξ_3 . Il est possible de calculer les racines de ce polynôme avec une méthode numérique et, par la suite, d'obtenir les valeurs correspondantes de ξ_1 et ξ_2 . Par contre, étant donné la taille et la complexité du polynôme, le calcul de ses racines n'est pas très bien conditionné. Selon Manocha [102], il est toutefois possible de calculer les racines du polynôme directement à partir de la matrice \mathbf{D} en utilisant une formulation en valeurs et vecteurs propres. Cette approche a déjà été utilisée, entre autre, pour la solution du problème géométrique inverse d'un manipulateur sériel à six degrés de liberté [103]. De plus, cette formulation permet d'obtenir presque directement les valeurs correspondantes de ξ_1 et ξ_2 . Pour le système représenté par les équations (6.94)-(6.96), la matrice générée par la formulation de Dixon prend la forme suivante (voir annexe A) :

$$\mathbf{D} = \begin{array}{ccccc} \xi_1^0 \xi_2^0 & \xi_1^1 \xi_2^0 & \xi_1^0 \xi_2^1 & \xi_1^1 \xi_2^1 & \xi_1^0 \xi_2^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{ccccc} G_{0000} & G_{0010} & G_{0001} & G_{0011} & G_{0002} \\ G_{1000} & G_{1010} & G_{1001} & G_{1011} & G_{1002} \\ G_{0100} & G_{0110} & G_{0101} & G_{0111} & G_{0102} \\ G_{1100} & G_{1110} & G_{1101} & G_{1111} & G_{1102} \\ G_{2000} & G_{2010} & G_{2001} & G_{2011} & G_{2002} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow a^0 b^0 \\ \leftarrow a^1 b^0 \\ \leftarrow a^0 b^1 \\ \leftarrow a^1 b^1 \\ \leftarrow a^2 b^0 \end{array} \end{array} \quad (6.97)$$

où, en se référant à l'équation (A.6), les trois dernières lignes et colonnes de \mathbf{D} ont été supprimées puisqu'elles sont nulles. L'approche consiste à exprimer cette matrice sous la forme d'un polynôme matriciel en terme des puissances de ξ_3 comme suit :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_3 \xi_3^3 + \mathbf{D}_2 \xi_3^2 + \mathbf{D}_1 \xi_3 + \mathbf{D}_0 \quad (6.98)$$

où la matrice \mathbf{D}_i est obtenue en ne conservant que les coefficients des éléments de \mathbf{D} qui multiplient ξ_3^i . Les éléments des matrices \mathbf{D}_i sont fournis à l'annexe B. Puisque, dans le cas traité ici, la matrice \mathbf{D}_3 est toujours singulière, le calcul de la solution aux équations (6.94)-(6.96) s'effectue à partir d'un problème de valeurs propres généralisé (*generalized eigenvalue problem*). Selon Manocha [102], les valeurs de ξ_3 pour lesquelles $\det \mathbf{D} = 0$ correspondent à des valeurs propres du système $(v_i \Upsilon_1 - \Upsilon_2) \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ où :

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_5 & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0}_5 \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_5 & \mathbf{1}_5 \\ -\mathbf{D}_0 & -\mathbf{D}_1 & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_5 & \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_5 \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0}_5 \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{0}_5 & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

sont des matrices de dimension 15×15 . Les valeurs et les vecteurs propres de ce système, donnés par les vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w}_i ($i = 1, 2, \dots, 15$), peuvent être calculés, par exemple, avec la commande MATLAB® `eig`(Υ_1, Υ_2). Seulement un sous ensemble des valeurs propres du vecteur \mathbf{v} sont réelles et positives (pour le mécanisme la condition $\xi_3 \geq 0$ doit toujours être satisfaite). Les vecteurs propres ont la forme suivante :

$$\mathbf{w}_i = \left[\mathbf{w}'_i{}^T, \xi_3 \mathbf{w}'_i{}^T, \xi_3^2 \mathbf{w}'_i{}^T \right]^T \quad (6.100)$$

où :

$$\mathbf{w}'_i = \left[1, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \xi_2, \xi_2^2 \right]^T \quad (6.101)$$

Pour chacune des valeurs propres réelles et positives de \mathbf{v} , qui représentent des solutions potentielles pour ξ_3 , les valeurs correspondantes de ξ_1 et ξ_2 peuvent alors être obtenues à partir des vecteurs propres comme suit :

$$\xi_1 = \frac{w'_{i4}}{w'_{i3}} = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_2}, \quad \xi_2 = \frac{w'_{i4}}{w'_{i2}} = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1} \quad \text{ou} \quad \xi_2 = \frac{w'_{i5}}{w'_{i3}} = \frac{\xi_2^2}{\xi_2} \quad (6.102)$$

où w'_{ij} correspond au j^{e} élément de \mathbf{w}'_i et où ce dernier est obtenu à partir des cinq premiers éléments de \mathbf{w}_i (voir l'équation (6.100)). Il n'est pas possible de poser tout simplement $\xi_1 = w'_{i2}$ et $\xi_2 = w'_{i3}$ puisque le vecteur propre \mathbf{w}_i peut avoir deux différentes directions (l'une étant l'inverse de l'autre) ce qui implique que les w'_i peuvent être négatifs même si les valeurs correspondantes de ξ_1 et ξ_2 sont positives. Parmi les trios de valeurs de ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 qui sont ainsi obtenus, seulement ceux pour lesquels les ξ_i sont tous réels et positifs sont conservés. Une fois cette étape terminée, les positions des actionneurs sont obtenues facilement à partir des équations (6.89)-(6.91). Encore une fois, les solutions pour ψ sont filtrées pour éliminer les cas où les ρ_i ne sont pas tous positifs.

6.2.2.3 Espace atteignable articulaire

Il a toujours été possible jusqu'ici d'identifier les frontières des espaces atteignables des mécanismes à partir des configurations singulières associées à leurs matrices jacobiennes. Toutefois, la complexité des solutions présentées aux sections 6.2.2.1 et 6.2.2.2 pour les problèmes statiques direct et inverse du mécanisme modulaire spatial rendent très difficile (voir même impossible) le calcul de matrices jacobiennes. Par conséquent, une approche différente est utilisée pour le calcul des frontières de l'espace atteignable articulaire de ce mécanisme. L'approche consiste à analyser chaque étape de la solution du problème statique direct pour identifier les conditions qui doivent être satisfaites par les positions des actionneurs pour qu'une solution réelle soit obtenue. À partir de ces conditions, celles qui sont les plus restrictives sur l'opération du mécanisme sont identifiées comme les frontières de son espace atteignable articulaire.

Pendant la première étape de la solution du problème statique direct, il est expliqué que le module du mécanisme est construit à partir de trois modules plans. Les longueurs des ressorts du mécanisme sont alors obtenues à partir de la solution du problème statique direct du module plan (voir l'équation (6.56)). L'espace atteignable du module spatial doit alors forcément se retrouver à l'intérieur des espaces atteignables des trois modules plans à partir desquels il est construit. Ce faisant, en se référant à la section 6.1.2.4, il est possible d'identifier les six conditions suivantes qui correspondent à des frontières potentielles de l'espace atteignable du mécanisme :

$$F_1 = \rho_1 = 0 \quad (6.103)$$

$$F_2 = \rho_2 = 0 \quad (6.104)$$

$$F_3 = \rho_3 = 0 \quad (6.105)$$

$$F_4 = 2NL - \rho_1 - \rho_2 = 0 \quad (6.106)$$

$$F_5 = 2NL - \rho_1 - \rho_3 = 0 \quad (6.107)$$

$$F_6 = 2NL - \rho_2 - \rho_3 = 0 \quad (6.108)$$

Une fois les longueurs des ressorts du mécanisme connues, la prochaine étape consiste à calculer les positions des liaisons prismatiques passives. Une solution réelle pour ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 est obtenue seulement si les longueurs l_{01} , l_{02} et l_{03} sont telles que les nœuds A_0 , B_0 et C_0 forment un triangle (voir la Figure 6.15(b)). Cette condition est vérifiée lorsque le discriminant du polynôme de l'équation (6.63) est positif ou nul, soit :

$$\begin{aligned} E_1^2 - 4E_0E_2 = & 27\rho_2^2\rho_3^2(\rho_1 - \rho_2)^2(\rho_1 - \rho_3)^2 \left[3L^4N^4 - 2L^2N^2(\rho_1\rho_2 \right. \\ & \left. + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3) - \rho_1^2\rho_2^2 - \rho_1^2\rho_3^2 - \rho_2^2\rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2\rho_3 \sum_{i=1}^3 \rho_i \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (6.109)$$

Il peut être constaté que cette expression est positive lorsque :

$$F_7 = 3L^4N^4 - 2L^2N^2(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3) - \rho_1^2\rho_2^2 - \rho_1^2\rho_3^2 - \rho_2^2\rho_3^2 + 2\rho_1\rho_2\rho_3 \sum_{i=1}^3 \rho_i \geq 0 \quad (6.110)$$

ce qui constitue une autre frontière potentielle pour l'espace atteignable articulaire du mécanisme. Les positions des nœuds A_0 , B_0 et C_0 et les longueurs des composants étant maintenant connues, la solution du problème statique direct procède au calcul des positions des nœuds A_1 , B_1 et C_1 du mécanisme. À la section 6.2.2.1, cela s'effectue en calculant l'intersection des sphères associées au câble qui relie les nœuds A_0 et A_1 et aux barres qui relient les paires de nœuds B_0A_1 et C_0A_1 . Si cette intersection existe, la position du nœud A_1 est identifiée ce qui permet de calculer les positions des nœuds B_1 et C_1 . Il est alors souhaité de développer une expression qui doit être satisfaite pour qu'une intersection entre les sphères existe et qui n'est fonction que des positions des actionneurs. Le modèle qui a été développé pour le mécanisme rend le développement d'une telle expression difficile puisque les positions des nœuds A_0 , B_0 et C_0 sont données en fonction des variables ξ_i qui eux sont calculées à partir des positions des actionneurs en solutionnant le polynôme de l'équation (6.63). Les expressions du type $\xi_i = f(\rho_i)$ sont donc relativement complexes. Pour contourner ce problème, un nouveau repère $X'_0Y'_0Z'_0$ est défini avec son origine située au nœud A_0 , son axe X'_0 dirigé vers le nœud B_0 et son axe Z'_0 perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_0 , B_0 et C_0 (voir la Figure 6.15(b)). Dans ce repère, les positions des nœuds A_0 , B_0 et C_0 sont les suivantes :

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} l_{01} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} c_{0x} \\ c_{0y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

avec :

$$c_{0x} = \frac{l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{03}^2}{2l_{01}} \quad (6.112)$$

$$c_{0y} = \frac{\sqrt{(l_{01} + l_{02} + l_{03})(l_{01} - l_{02} + l_{03})(l_{01} + l_{02} - l_{03})(-l_{01} + l_{02} + l_{03})}}{2l_{01}}$$

où les longueurs des ressorts (c.-à-d. l_{0i}) sont données à l'équation (6.56). En substituant ces expressions dans l'équation (6.70), la position du nœud A_1 , qui correspond à l'intersection des sphères, est trouvée en fonction des positions des actionneurs comme

$\mathbf{a}_1 = [a_{1_x}, a_{1_y}, a_{1_z}]^T$ avec :

$$\begin{aligned} a_{1_x} &= \frac{\rho_1(\rho_1 - \rho_2)}{2N\sqrt{L^2N^2 - \rho_1\rho_2}} \\ a_{1_y} &= \frac{\rho_1 \left[L^2N^2(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) - (\rho_1 + \rho_2)\rho_1\rho_2 + \rho_3(\rho_1^2 + \rho_2^2) \right]}{2N\sqrt{(L^2N^2 - \rho_1\rho_2)F_7}} \\ a_{1_z} &= \frac{\rho_1}{2N} \sqrt{\frac{F_8}{F_7}} \end{aligned} \quad (6.113)$$

où :

$$F_8 = L^2N^2 \left(3L^2N^2 - \sum_{i=1}^3 \rho_i^2 - \rho_1\rho_2 - \rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_3 \right) + \rho_1\rho_2\rho_3 \sum_{i=1}^3 \rho_i \quad (6.114)$$

Sachant que $F_7 \geq 0$ à partir de l'équation (6.110), il peut alors être constaté que l'intersection des sphères n'est possible que si $F_8 \geq 0$.

Huit conditions devant être satisfaites par les positions des actionneurs sont alors obtenues à partir de la solution du problème statique direct du mécanisme. Parmi celles-ci, il est clair que les conditions F_1 , F_2 et F_3 doivent correspondre à des frontières de l'espace atteignable du mécanisme puisque les câbles sont toujours considérés avoir des longueurs positives. Il reste donc à identifier les autres frontières de cet espace parmi les conditions F_4 à F_8 . Cela peut s'effectuer graphiquement en traçant sur un même graphique dans l'espace articulaire les surfaces associées à ces conditions. Il peut alors être constaté que l'espace atteignable articulaire du mécanisme est borné par la surface F_8 accompagnée des plans $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$ et $\rho_3 = 0$. Un exemple de cet espace est illustré à la Figure 6.24. Cet espace est valide peu importe la valeur de N . Par contre, lorsque $N \geq 3$, il y a une portion de l'espace atteignable articulaire qui correspond à des configurations où le mécanisme forme une boucle sur lui-même de manière analogue au mécanisme modulaire plan (Figure 6.5). Ces configurations n'ont pas d'influence sur l'espace atteignable cartésien du mécanisme puisqu'elles correspondent à des positions de l'effecteur pouvant également être atteintes de manière « conventionnelle » (c.-à-d. sans que le mécanisme forme une boucle sur lui-même). Cela implique que pour certaines positions de l'effecteur il existe plus d'une solution au problème statique inverse. Par contre, en raison des hypothèses faites à la section 6.2.2.2 concernant le calcul de l'angle α (plus spécifiquement la forme du polygone de fermeture vectorielle illustré à la Figure 6.23), seulement la solution « conventionnelle » est calculée. Puisque les configurations où le mécanisme forme une boucle sur lui-même ne contribuent rien à l'espace atteignable cartésien et puisqu'en pratique elles ne peuvent pas être atteintes par le mécanisme en raison d'interférences mécaniques, elles sont généralement exclues de l'espace atteignable articulaire. Par contre, en raison de la complexité du mécanisme,

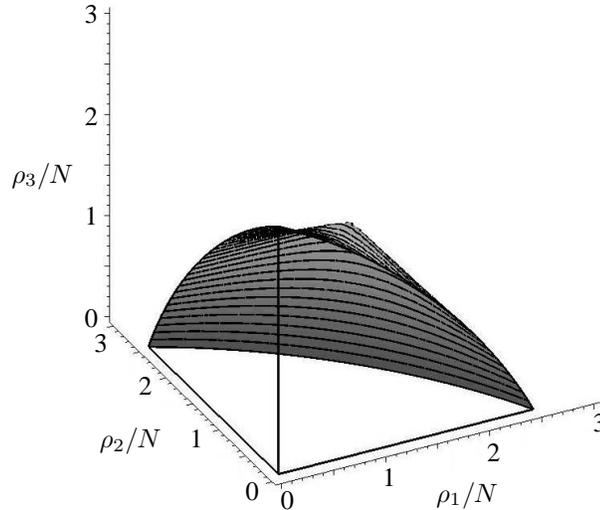


FIG. 6.24 – Espace atteignable articulaire du mécanisme modulaire spatial avec $L = \sqrt{2}$.

la frontière qui divise les deux régions de l'espace atteignable articulaire n'est pas calculée ici comme c'était le cas pour le mécanisme modulaire plan à la section 6.1.2.4.

6.2.2.4 Espace atteignable cartésien

Il va sans dire que le comportement du mécanisme modulaire spatial ressemble beaucoup à celui du mécanisme modulaire plan. En ce sens, l'espace atteignable cartésien du mécanisme ne fait pas exception. En fait, les frontières des espaces atteignables cartésiens des deux mécanismes proviennent des mêmes sources. En premier lieu, pour le mécanisme modulaire plan, il a été vu que les droites $\rho_i = 0$ ($i = 1, 2$) de l'espace articulaire correspondent à des cercles (c.-à-d. équation (6.28)) dans l'espace cartésien. Dans le cas du mécanisme spatial, ce sont les plans $\rho_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) qui se transforment à des surfaces dans l'espace cartésien. Toutefois, au contraire des cercles associés au mécanisme plan, ces surfaces ne sont pas indépendantes de N . En ce qui concerne l'autre frontière de l'espace atteignable cartésien du mécanisme spatial, elle correspond, de manière similaire au mécanisme plan, aux situations où $\rho_i \rightarrow NL$ (voir la configuration singulière *iii* de la section 6.1.2.3). En fait, lorsque $\rho_i = NL$ le mécanisme se retrouve dans une configuration où les composants de chaque module sont colinéaires. Il se comporte alors comme un assemblage en série de N barres de longueur L qui sont liées entre elles par des liaisons sphériques passives. Ce faisant, le mécanisme gagne $3N$ degrés de liberté additionnels et il devient impossible de le contrôler. Lorsque $\rho_i \rightarrow NL$, le mécanisme peut encore être modélisé comme un assemblage en série de N barres même si les composants associés à chacun de ses modules se sont pas parfaitement

colinéaires. Par contre, l'orientation entre deux barres consécutives (c.-à-d. entre deux modules pour lesquels les composants sont colinéaires) doit maintenant être donnée par la matrice de rotation \mathbf{Q} . En variant les angles α et β sur lesquels dépend \mathbf{Q} , la surface qui correspond à la frontière externe de l'espace atteignable du mécanisme est obtenue sous forme paramétrique comme suit :

$$\begin{aligned} x_N &= -L \cos \beta \sum_{i=1}^N \sin \left[\alpha \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] \\ y_N &= -L \sin \beta \sum_{i=1}^N \sin \left[\alpha \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] \\ z_N &= L \sum_{i=1}^N \cos \left[\alpha \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.115)$$

où $0 \leq \alpha \leq \pi$ lorsque $N = 1$ et $0 \leq \alpha 2\pi/N$ autrement tandis que $0 \leq \beta \leq \pi$. Puisque, lorsque $\rho_i \rightarrow NL$, les composants des modules ne sont pas parfaitement colinéaires, il en résulte que le mécanisme ne peut pas atteindre la surface définie à l'équation (6.115). Ce faisant, l'espace atteignable peut être considéré comme étant un ensemble ouvert de l'espace cartésien.

Dans ce qui suit, la représentation des frontières de l'espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial s'effectue avec une méthode numérique. L'approche se résume par les étapes suivantes :

1. Pour une valeur donnée de z_N , une certaine région du plan correspondant de l'espace cartésien est discrétisée de manière à obtenir un grillage de points. La taille de la région doit être choisie pour englober l'espace atteignable cartésien du mécanisme dans ce plan.
2. Pour chacun des points du grillage, le problème statique inverse du mécanisme est résolu de manière à obtenir les positions correspondantes des actionneurs. À partir de ces positions, il est ensuite vérifié si le point en question se retrouve dans l'espace atteignable du mécanisme en utilisant les expressions analytiques des frontières de l'espace atteignable articulaire. Tous les points qui se retrouvent dans l'espace atteignable sont conservés dans une matrice.
3. Des nuages de points qui correspondent à l'espace atteignable cartésien du mécanisme sont alors obtenus. Ces points sont ensuite acheminés à un algorithme qui se charge d'identifier ceux qui se retrouvent sur les frontières de l'espace atteignable. L'algorithme en question est une adaptation du *modified gift wrapper algorithm* [104].

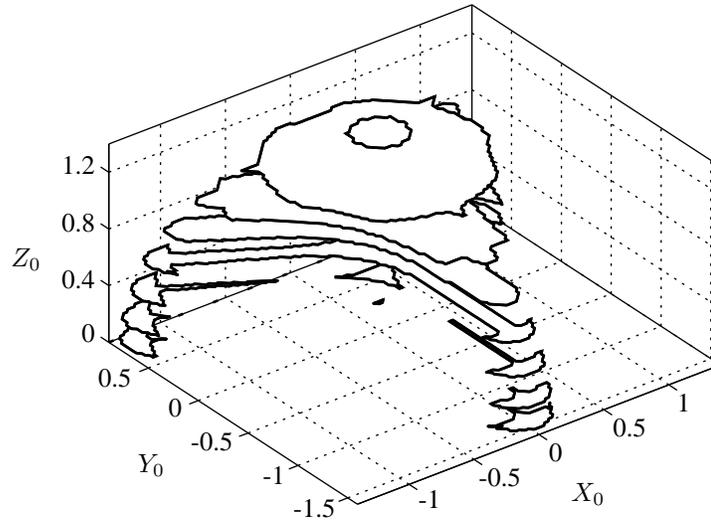


FIG. 6.25 – Espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial pour $N = 1$ et $L = \sqrt{2}$.

4. Les frontières de l'espace atteignable cartésien du mécanisme sont tracées de manière approximative à partir des points qui s'y retrouvent.
5. Les étapes 1 à 4 sont répétées pour différentes valeurs de z_N de manière à obtenir une représentation acceptable de l'espace atteignable du mécanisme.

Les espaces atteignables cartésiens du mécanisme pour $N = 1, 2, 3$ sont illustrés aux Figures 6.25 à 6.27. Le mécanisme spatial bénéficie des mêmes atouts que le mécanisme plan dans le sens que l'ajout de modules tend à agrandir de manière considérable la frontière « externe » (c.-à-d. la frontière qui correspond à $\rho_i \rightarrow NL$) de son espace atteignable cartésien sans toutefois influencer de manière significative sa frontière « interne » (c.-à-d. la frontière qui correspond à $\rho_i = 0$ où $i = 1, 2, 3$).

6.2.2.5 Forces internes

Dans cette thèse, les forces internes dans les composants d'un mécanisme de tensegrité ont, jusqu'ici, été calculées à partir des équations d'équilibre statique évaluées aux nœuds du mécanisme tout en tenant compte de sa configuration d'équilibre (qui est connue à partir de la solution de son problème statique direct). Pour une configuration spécifique du mécanisme modulaire spatial, il est relativement facile de calculer les forces internes. Par contre, le calcul symbolique de ces forces pour une configuration arbitraire n'est pas aussi facile en raison de la complexité de la solution du problème

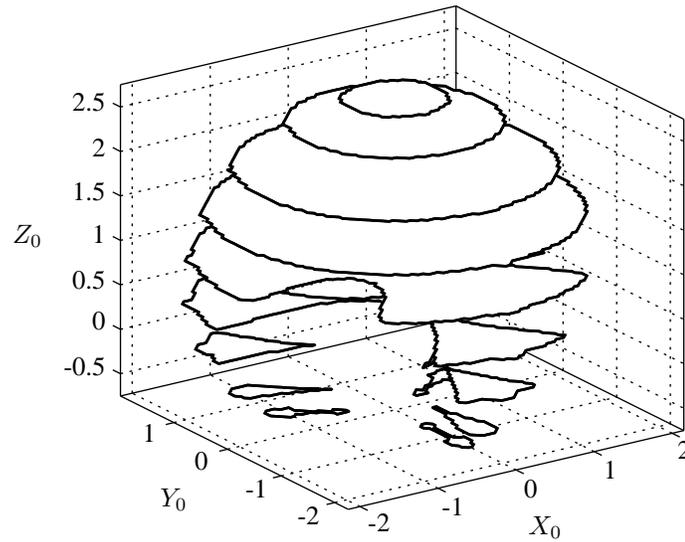


FIG. 6.26 – Espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial pour $N = 2$ et $L = \sqrt{2}$.

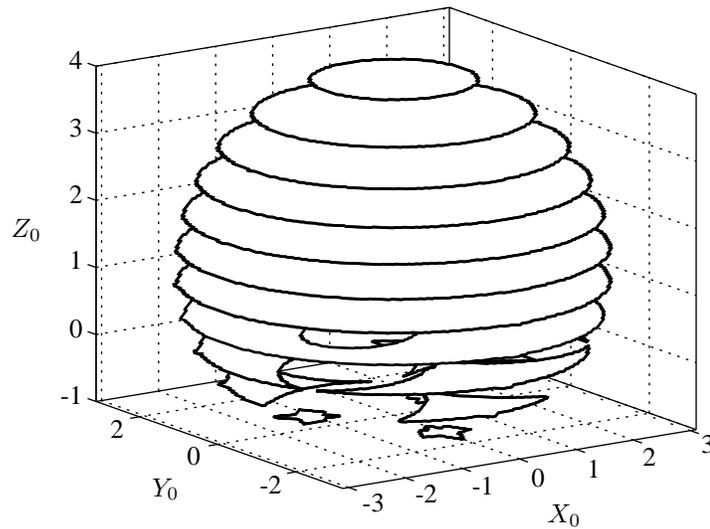


FIG. 6.27 – Espace atteignable cartésien du mécanisme modulaire spatial pour $N = 3$ et $L = \sqrt{2}$.

statique direct du mécanisme. Heureusement, la nature du mécanisme permet le développement d'expressions pour les forces internes à partir des résultats déjà obtenus pour le mécanisme modulaire plan. En fait, il a été démontré à la section 6.2.2.1 que le mécanisme peut être considéré comme un assemblage de modules plans tels que ceux qui sont utilisés dans la construction du mécanisme modulaire plan. De plus, il a été expliqué que l'assemblage de ces modules plans pendant la construction du mécanisme modulaire spatial n'a aucune influence sur leurs configurations d'équilibre. Ce faisant, les forces internes dans chaque module plan sont les mêmes que celles qui ont été calculées à la section 6.1.2.7. Il peut alors être déduit par intuition que les forces dans les barres du mécanisme modulaire spatial sont les suivantes :

$$f_{b_{i_1}} = f_{b_{i_2}} = f_{b_{i_3}} = f_{b_{i_4}} = f_{b_{i_5}} = f_{b_{i_6}} = KL \quad (6.116)$$

où i représente le module ($i = 1, 2, \dots, N$). De plus, les forces dans les câbles sont :

$$f_{\rho_1} = K \frac{(\rho_2 + \rho_3)}{N} \quad , \quad f_{\rho_2} = K \frac{(\rho_1 + \rho_3)}{N} \quad , \quad f_{\rho_3} = K \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{N} \quad (6.117)$$

À partir de ces expressions, les forces dans les barres sont observées comme étant toujours constantes et linéaires en fonction de la raideur des ressorts. De plus, la force dans un câble est directement proportionnelle à la somme des longueurs des deux autres câbles.

6.2.3 Application de chargements externes

Dans cette section, des forces externes \mathbf{f}_{A_N} , \mathbf{f}_{B_N} et \mathbf{f}_{C_N} sont appliquées aux nœuds A_N , B_N et C_N , respectivement. De plus, il est supposé que la gravité agit dans la direction négative de l'axe Z_0 . Ce faisant, une approche numérique doit être utilisée pour solutionner les problèmes statiques direct et inverse du mécanisme.

6.2.3.1 Problème statique direct avec chargements externes

Lorsque le mécanisme est soumis à des chargements externes ou à des forces gravitationnelles, les développements de la section 6.2.2.1 ne sont plus valides. Il devient alors nécessaire de solutionner le problème statique direct du mécanisme à partir d'une minimisation de l'énergie potentielle emmagasinée dans ses ressorts. Cette énergie s'exprime comme suit :

$$U_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^3 K_{i_j} l_{i_j}^2 = \frac{1}{2} K \sum_{j=1}^3 \left(l_{0_j}^2 + l_{N_j}^2 \right) + K \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^3 l_{i_j}^2 \quad (6.118)$$

où les longueurs des ressorts sont données à l'équation (6.54). Pour tenir compte des contraintes géométriques de l'équation (6.55), une nouvelle fonction est définie comme suit :

$$\eta = U_N + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\phi} \quad (6.119)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange de dimension $9N \times 1$ qui est utilisé pour appliquer les contraintes. Finalement, les forces externes et gravitationnelles sont considérées dans le cadre de la fonction suivante :

$$\mu = \eta - \mathbf{f}_{A_N}^T \mathbf{a}_N - \mathbf{f}_{B_N}^T \mathbf{b}_N - \mathbf{f}_{C_N}^T \mathbf{c}_N - m g \mathbf{e}_g^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 \mathbf{p}_{CG_{i,j}} \quad (6.120)$$

où \mathbf{e}_g est un vecteur dirigé dans la direction négative de l'axe Z_0 . Des conditions nécessaires mais non suffisantes pour que le mécanisme soit dans un équilibre statique stable sont que les gradients de μ par rapport aux vecteurs de coordonnées généralisées et de multiplicateurs de Lagrange soient nuls :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (6.121)$$

Ces conditions correspondent à un système de $18N + 3$ équations scalaires qui sont non linéaires et couplées. En utilisant la méthode de Newton-Raphson ainsi qu'un processus de continuation tel qu'il est décrit à la section 5.1.3.1, ce système peut être solutionné pour \mathbf{q} et $\boldsymbol{\lambda}$. La matrice hessienne de μ peut ensuite être utilisée pour vérifier que les solutions obtenues correspondent à des équilibres stables du mécanisme. Une fois le vecteur de coordonnées généralisées connu, les positions des nœuds du mécanisme sont obtenues directement. Il reste ensuite à calculer le vecteur de sortie \mathbf{p}_N . Selon les explications fournies à la section 6.2.1, l'effecteur du mécanisme prend la forme illustrée à la Figure 6.28 où les longueurs des ressorts peuvent être calculées à partir de l'équation (6.54) et où le repère $X'_N Y'_N Z'_N$ est défini comme ayant son origine au nœud A_N avec son axe X'_N dirigé du nœud A_N vers le nœud B_N et son axe Z'_N perpendiculaire au plan formé par les nœuds A_N , B_N et C_N . Pour réussir à calculer \mathbf{p}_N , il est nécessaire de connaître les positions des liaisons prismatiques virtuelles (c.-à-d. ξ_{1_v} , ξ_{2_v} et ξ_{3_v}). Pour ce faire, le système d'équations suivant, analogue aux équations (6.57)-(6.59), doit être solutionné :

$$(\mathbf{a}_N - \mathbf{b}_N)^T (\mathbf{a}_N - \mathbf{b}_N) - l_{N_1}^2 = \xi_{1_v}^2 + \xi_{1_v} \xi_{2_v} + \xi_{2_v}^2 - l_{N_1}^2 = 0 \quad (6.122)$$

$$(\mathbf{a}_N - \mathbf{c}_N)^T (\mathbf{a}_N - \mathbf{c}_N) - l_{N_2}^2 = \xi_{1_v}^2 + \xi_{1_v} \xi_{3_v} + \xi_{3_v}^2 - l_{N_2}^2 = 0 \quad (6.123)$$

$$(\mathbf{b}_N - \mathbf{c}_N)^T (\mathbf{b}_N - \mathbf{c}_N) - l_{N_3}^2 = \xi_{2_v}^2 + \xi_{2_v} \xi_{3_v} + \xi_{3_v}^2 - l_{N_3}^2 = 0 \quad (6.124)$$

Ces équations correspondent à trois cylindres elliptiques mutuellement orthogonaux. Par conséquent, leur solution s'obtient avec la même approche que celle présentée à

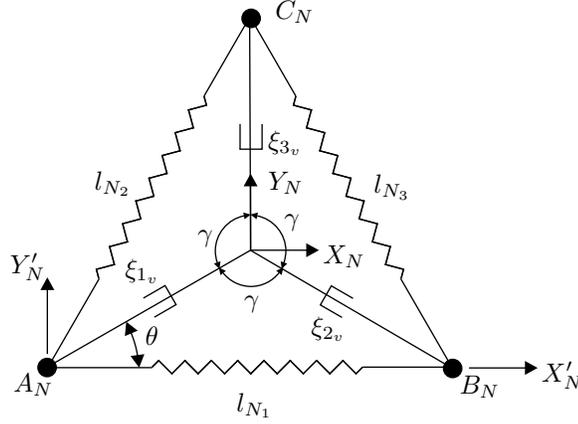


FIG. 6.28 – Architecture de l'effecteur du mécanisme.

la section 6.2.2.1. Une fois ξ_{1v} , ξ_{2v} et ξ_{3v} connus, la position de l'effecteur est obtenue comme suit :

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{a}_N + \xi_{1v} \mathbf{Q}_e \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.125)$$

où :

$$\cos \theta = \frac{\xi_{1v}^2 + l_{N1}^2 - \xi_{2v}^2}{2\xi_{1v}l_{N1}}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (6.126)$$

et où \mathbf{Q}_e , une matrice de rotation qui amène le repère $X_0Y_0Z_0$ parallèle au repère $X'_NY'_NZ'_N$, est donnée par :

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{Q_{e1}} & \mathbf{e}_{Q_{e2}} & \mathbf{e}_{Q_{e3}} \end{bmatrix} \quad (6.127)$$

avec :

$$\mathbf{e}_{Q_{e1}} = \frac{\mathbf{b}_N - \mathbf{a}_N}{\|\mathbf{b}_N - \mathbf{a}_N\|}, \quad \mathbf{e}_{Q_{e2}} = \mathbf{e}_{Q_{e3}} \times \mathbf{e}_{Q_{e1}}, \quad \mathbf{e}_{Q_{e3}} = \frac{(\mathbf{b}_N - \mathbf{a}_N) \times (\mathbf{c}_N - \mathbf{a}_N)}{\|(\mathbf{b}_N - \mathbf{a}_N) \times (\mathbf{c}_N - \mathbf{a}_N)\|} \quad (6.128)$$

6.2.3.2 Problème statique inverse avec chargements externes

Dans le cas du problème statique inverse, il est souhaité de calculer les positions requises des actionneurs pour placer l'effecteur du mécanisme à un endroit donné. Puisque le mécanisme doit toujours être en équilibre pour des positions données de ses actionneurs, les conditions de l'équation (6.121) doivent encore être satisfaites. De plus, par définition, il est nécessaire de respecter l'équation suivante :

$$\mathbf{p}_{N_s} - \mathbf{p}_N = \mathbf{0} \quad (6.129)$$

où \mathbf{p}_{N_s} correspond à la position recherchée de l'effecteur tandis que \mathbf{p}_N est la vraie position de l'effecteur qui est obtenue à partir de l'équation (6.125). En combinant les équations (6.121) et (6.129) et sachant que les positions des actionneurs sont maintenant traitées comme des inconnues, un système de $18N + 6$ équations est généré qui peut être solutionné pour \mathbf{q} , $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\psi}$ avec la méthode de Newton-Raphson.

6.2.3.3 Analyse de la raideur

Dans cette section, la raideur du mécanisme est analysée pour le nœud A_N . C'est donc dire qu'il est souhaité de quantifier la résistance du mécanisme à un déplacement $\delta\mathbf{a}_N$ du nœud A_N qui est causé par une force perturbatrice $\delta\mathbf{f}_{A_N}$. Il est également possible de répéter cette analyse pour les nœuds B_N et C_N . Toutefois, en raison de la symétrie du mécanisme, les résultats correspondants sont qualitativement équivalents à ceux du nœud A_N .

La raideur dépend à la fois de la direction de la force perturbatrice ainsi que de la configuration du mécanisme. Dans ce qui suit, la raideur est calculée pour des configurations spécifiques en ne considérant que des forces perturbatrices qui sont dirigées le long des axes X_0 , Y_0 et Z_0 . En raison de la complexité du mécanisme, une approximation numérique de la raideur est utilisée telle que, par exemple, la raideur au nœud A_N dans la direction de l'axe X_0 est obtenue comme $K_{A_{N_x}} \approx 2\Delta f_{A_{N_x}} / K\Delta a_{N_x}$. Dans cette expression, le terme Δa_{N_x} est calculé avec une version modifiée de l'approche décrite à la section 5.1.3.4 tandis que $\Delta f_{A_{N_x}}$ est choisi de manière empirique. De plus, il peut être constaté que la raideur du mécanisme est normalisée par rapport à la raideur de ses ressorts.

Dans cette section, la gravité est négligée et il est supposé que les forces externes appliquées sur le mécanisme sont nulles (c.-à-d. $\mathbf{f}_{A_N} = \mathbf{f}_{B_N} = \mathbf{f}_{C_N} = \mathbf{0}$). La configuration d'équilibre du mécanisme, sur laquelle dépend la raideur, est donc uniquement influencée par les positions de ses actionneurs. Ce faisant, la distribution de la raideur à l'intérieur de l'espace atteignable cartésien du mécanisme peut être calculée (voir les Figures 6.29 et 6.30 pour $N = 2$ modules et les Figures 6.31 et 6.32 pour $N = 3$ modules). Ces figures sont associées à des valeurs spécifiques de la coordonnée z puisqu'il s'agit d'une représentation plane d'un espace à trois dimensions. En variant z , il est possible d'obtenir une représentation complète de la raideur dans l'espace atteignable.

La complexité du mécanisme et sa quantité élevée de composants rendent très difficile la justification des résultats des Figures 6.29 – 6.32 à partir de son architecture

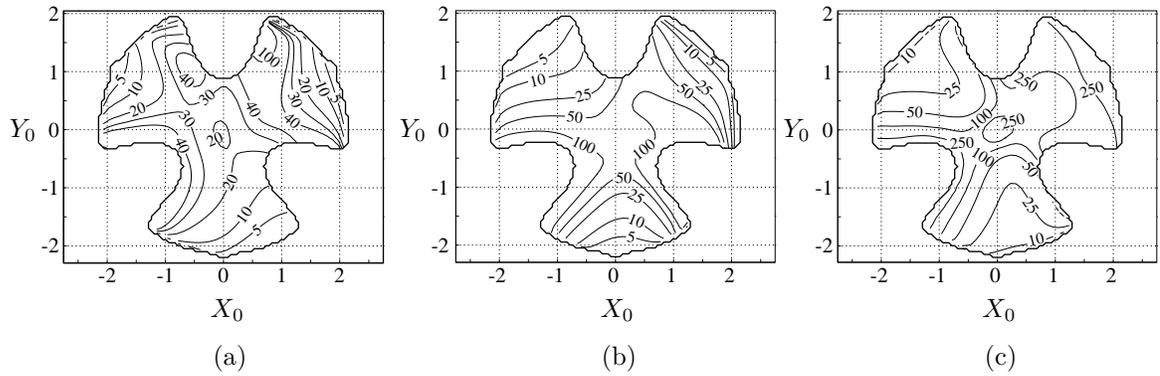


FIG. 6.29 – Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 2$, $L = \sqrt{2}$ et $z = 1$: (a) $K_{A_{N_x}}$ (b) $K_{A_{N_y}}$ (c) $K_{A_{N_z}}$.

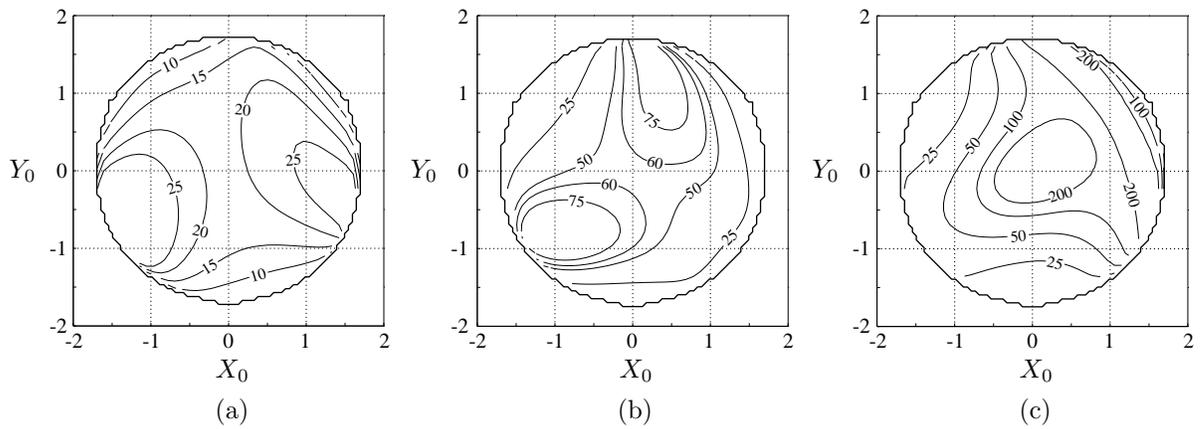


FIG. 6.30 – Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 2$, $L = \sqrt{2}$ et $z = 2$: (a) $K_{A_{N_x}}$ (b) $K_{A_{N_y}}$ (c) $K_{A_{N_z}}$.

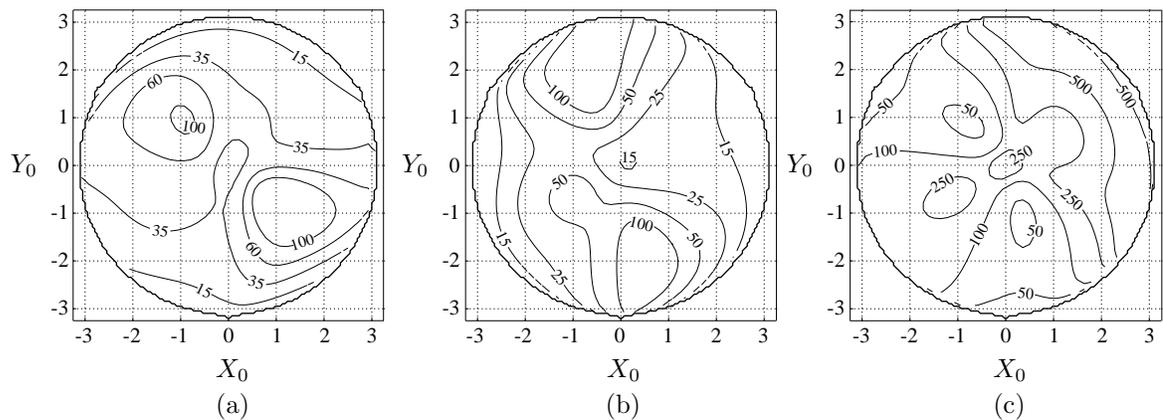


FIG. 6.31 – Distribution de la raideur dans l'espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 3$, $L = \sqrt{2}$ et $z = 1$: (a) $K_{A_{N_x}}$ (b) $K_{A_{N_y}}$ (c) $K_{A_{N_z}}$.

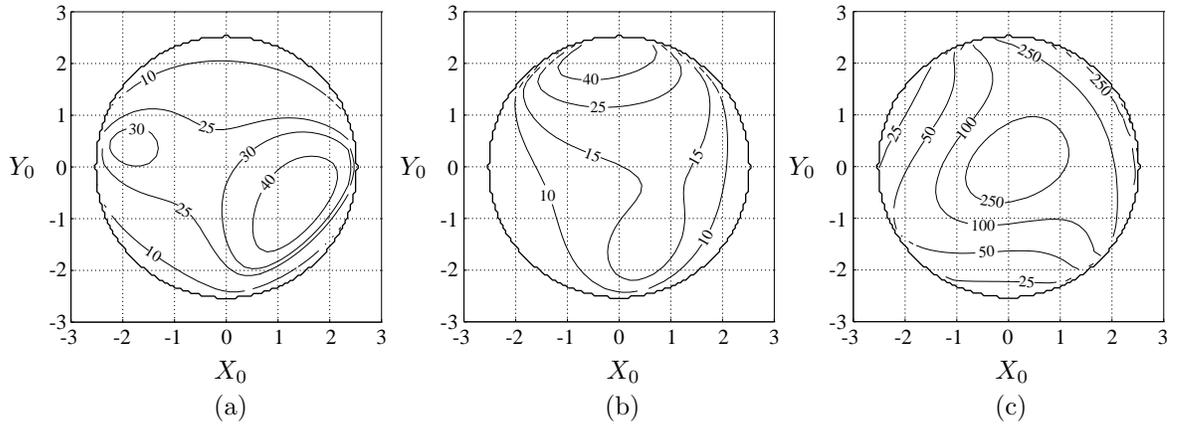


FIG. 6.32 – Distribution de la raideur dans l’espace atteignable cartésien du mécanisme pour $N = 3$, $L = \sqrt{2}$ et $z = 3$: (a) $K_{A_{N_x}}$ (b) $K_{A_{N_y}}$ (c) $K_{A_{N_z}}$.

et de l’agencement géométrique de ses composants. Certaines observations de ce genre peuvent tout de même être faites. En premier lieu, il est vu de manière général que la raideur du mécanisme est plus élevée dans la direction de l’axe Z_0 ($K_{A_{N_z}}$) que dans les directions des axes X_0 ($K_{A_{N_x}}$) et Y_0 ($K_{A_{N_y}}$). Cela s’explique en partie par le fait que les degrés de liberté non contraints du mécanisme se retrouvent dans le plan X_0Y_0 . Puisque la déformation du mécanisme sous l’action d’une force perturbatrice se produit le long de ces degrés de liberté, il va de soit que des forces parallèles au plan X_0Y_0 auront davantage tendance à déformer le mécanisme. Ce phénomène est toutefois beaucoup moins prononcé pour le mécanisme modulaire spatial que pour son homologue plan (voir la section 6.1.3.3). Il peut également être constaté que la raideur $K_{A_{N_z}}$ est, de manière générale, proportionnelle à z tandis que les raideurs $K_{A_{N_x}}$ et $K_{A_{N_y}}$ sont inversement proportionnelles. Cela se justifie en observant que les composants du mécanisme ont tendance à être de plus en plus parallèles avec l’axe Z_0 lorsque z augmente. Finalement, dans les configurations où l’effecteur se retrouve sur l’axe Z_0 (c.-à-d. $x = y = 0$), les câbles du mécanisme sont parallèles à cet axe. Dans un tel cas, il est vu que $K_{A_{N_z}} \rightarrow \infty$ puisqu’une force perturbatrice dirigée le long de l’axe Z_0 ne peut pas déformer le mécanisme (son effet étant transmis directement à la base par les câbles).

6.2.4 Analyse dynamique

6.2.4.1 Modélisation

Les hypothèses utilisées pour la modélisation de la dynamique du mécanisme sont les suivantes :

- Chaque barre est considérée être longue et mince avec des moments d'inertie $I_s = mL^2/12$ autour d'axes perpendiculaires à son axe longitudinal et passant par son centre de masse (l'inertie de la barre autour de son axe longitudinal est considérée être nulle).
- Les ressorts et les câbles ont des masses négligeables.
- Il n'y a pas de frottement dans les liaisons passives et les actionneurs.
- Les liaisons prismatiques passives de la base sont amorties linéairement avec un coefficient c_d .
- Les forces gravitationnelles ne sont pas considérées.

Il peut être noté ici que, dans le cas du mécanisme modulaire spatial ainsi que pour tous les mécanismes étudiés dans cette thèse, les forces gravitationnelles peuvent facilement être intégrées au modèle dynamique. L'exclusion de la gravité des modèles dynamiques est motivée par le désir d'obtenir des trajectoires de simulation pour lesquelles les points de départ et d'arrivée correspondent à des configurations d'équilibre pouvant être calculées avec les solutions analytiques aux problèmes statiques direct et inverse. De toute manière, l'effet du poids des barres sur la configuration d'équilibre du mécanisme peut presque toujours être considéré comme étant négligeable étant donné la raideur relativement élevée des ressorts.

Le vecteur $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\psi}^T, \mathbf{q}^T]^T$ est introduit pour représenter la configuration générale du mécanisme. Évidemment, les contraintes géométriques de l'équation (6.55) doivent également être considérées. Celles-ci sont intégrées au modèle dynamique par l'entremise des forces internes qui leur sont associées (c.-à-d. \mathbf{f}_c) sous la forme de l'équation (5.128). En utilisant la formulation lagrangienne, les équations de mouvement du mécanisme sont obtenues à partir de l'équation (6.45). Dans cette équation, une expression pour l'énergie potentielle du mécanisme a déjà été développée à l'équation (6.118). Son énergie cinétique, pour sa part, correspond à la somme des énergies cinétiques de chacune de ses barres. Le mouvement général d'une barre avec des nœuds A_{i-1} et B_i

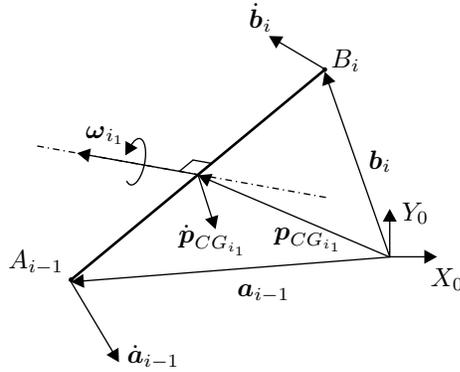


FIG. 6.33 – Mouvement général d'une barre.

à ses extrémités est illustré à la Figure 6.33. L'énergie cinétique de la barre peut être considérée comme la somme de ses énergies cinétiques en translation et en rotation en utilisant son centre de masse comme point de référence. La vitesse du centre de masse, soit $\dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_1}}$, peut être calculée en dérivant l'équation (6.53) par rapport au temps. L'énergie cinétique en translation est donc facilement obtenue. Ensuite, il peut être supposé que la rotation de la barre par rapport à son centre de masse s'effectue autour d'un axe qui est perpendiculaire à son axe longitudinal tel qu'il est illustré à la Figure 6.33. En fait, quoiqu'il soit possible pour la barre de pivoter autour de son axe longitudinal (puisque'elle est attachée à ses deux extrémités par des liaisons sphériques), cela n'a pas d'influence sur son énergie cinétique puisque son inertie est supposée être nulle dans cette direction. Par définition, il est connu que :

$$\dot{\mathbf{b}}_i - \dot{\mathbf{a}}_{i-1} = \boldsymbol{\omega}_{i_1} \times (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_{i-1}) \quad (6.130)$$

où les positions et les vitesses des nœuds A_{i-1} et B_i sont obtenues directement à partir des coordonnées généralisées et de leurs dérivées par rapport au temps. Sachant que $\boldsymbol{\omega}_{i_1}$ est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_{i-1}$, il est vrai que :

$$\|\dot{\mathbf{b}}_i - \dot{\mathbf{a}}_{i-1}\| = \|\boldsymbol{\omega}_{i_1}\| \cdot \|\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_{i-1}\| = \|\boldsymbol{\omega}_{i_1}\| L \quad (6.131)$$

L'amplitude de la rotation de la barre est alors obtenue comme suit :

$$\|\boldsymbol{\omega}_{i_1}\| = \frac{\|\dot{\mathbf{b}}_i - \dot{\mathbf{a}}_{i-1}\|}{L} \quad (6.132)$$

Ce qui permet d'écrire l'énergie cinétique de la barre sous la forme suivante :

$$T_{\text{barre}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_1}}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_1}} + \frac{1}{2} I_s \|\boldsymbol{\omega}_{i_1}\|^2 \quad (6.133)$$

Les énergies cinétiques des autres barres du module i peuvent être obtenues de manière

similaire. Ce faisant, l'énergie cinétique totale du mécanisme est donnée par l'expression suivante :

$$T_N = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_j}}^T \dot{\mathbf{p}}_{CG_{i_j}} + \frac{1}{2}I_s \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^6 \|\boldsymbol{\omega}_{i_j}\|^2 \quad (6.134)$$

En revenant maintenant à la formulation lagrangienne de l'équation (6.45), le vecteur de forces dissipatives, qui correspond tout simplement à l'amortissement dans les liaisons prismatiques passives de la base, prend la forme suivante :

$$\mathbf{f}_d = -c_d \left[\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3, \mathbf{0}_{1 \times 9N} \right]^T \quad (6.135)$$

En ce qui concerne le vecteur de forces généralisées, qui sont associées aux forces externes appliquées aux nœuds A_N , B_N et C_N , il est donné par :

$$\mathbf{f}_q = \frac{\partial(\mathbf{f}_{A_N}^T \mathbf{a}_N + \mathbf{f}_{B_N}^T \mathbf{b}_N + \mathbf{f}_{C_N}^T \mathbf{c}_N)}{\partial \mathbf{u}} \quad (6.136)$$

Finalement, $\boldsymbol{\tau} = [f_{\rho_1}, f_{\rho_2}, f_{\rho_3}]^T$ est le vecteur des forces dans les actionneurs et :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_{(9N+3) \times 3} \end{bmatrix} \quad (6.137)$$

est une matrice qui effectue la transformation de l'espace des actionneurs à l'espace des coordonnées de \mathbf{u} . En substituant ces définitions dans l'équation (6.45), les équations de mouvement du mécanisme sont alors obtenues sous la forme donnée à l'équation (5.142). Le système résultant contient $9N + 6$ équations scalaires en fonction de $18N + 6$ inconnues (c.-à-d. les éléments des vecteurs $\ddot{\mathbf{u}}$ et $\boldsymbol{\lambda}$). Pour compléter le système, les équations de contrainte exprimées au niveau des accélérations, données à l'équation (5.143), sont utilisées. La simulation du mécanisme est alors possible en utilisant la méthode de Kövecses *et al.* [96] qui a déjà été décrite à la section 5.2.4.2.

6.2.4.2 Simulation

La trajectoire de simulation est définie en spécifiant explicitement les positions, les vitesses et les accélérations des actionneurs. Les paramètres du mécanisme utilisés pour la simulation sont : $N = 3$, $m = 2.5$ kg, $L = \sqrt{2}$ m, $K = 1000$ N/m et $c_d = 1000$ N · s/m. Il est également supposé que $\mathbf{f}_{A_N} = \mathbf{f}_{B_N} = \mathbf{f}_{C_N} = \mathbf{0}$. Pendant la trajectoire, il est souhaité apporter l'effecteur d'une position $\mathbf{p}_{N_I} = [0, 0, 3]^T$ m au temps $t = 0$ s jusqu'à une position $\mathbf{p}_{N_F} = [1, 1, 1]^T$ m au temps $t_F = 1$ s. En solutionnant le problème statique inverse du mécanisme pour ces deux positions de l'effecteur, les positions cor-

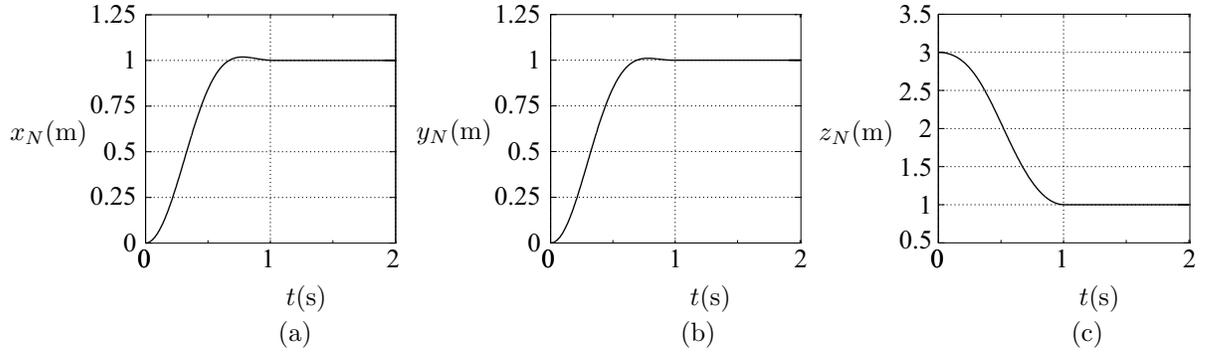


FIG. 6.34 – Coordonnées cartésiennes de la position de l’effecteur du mécanisme en fonction du temps pour la trajectoire simulée : (a) x_N (b) y_N (c) z_N .

respondantes des actionneurs sont trouvées comme :

$$\psi_I = \begin{bmatrix} \rho_{1I} \\ \rho_{2I} \\ \rho_{3I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ m} , \quad \psi_F = \begin{bmatrix} \rho_{1F} \\ \rho_{2F} \\ \rho_{3F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.18 \\ 1.64 \\ 0.872 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (6.138)$$

L’équation (4.103) est utilisée pour générer la trajectoire articulaire en position tandis que les trajectoires en vitesse et en accélération sont obtenues en dérivant cette même équation par rapport au temps. L’évolution de la position de l’effecteur du mécanisme pendant la simulation est illustrée à la Figure 6.34. Quoique cela n’est pas visible dans cette figure, le mécanisme est légèrement sous amorti pour la trajectoire simulée. Il est toutefois possible d’utiliser (au besoin) un niveau d’amortissement plus élevé sans augmenter l’inertie des pièces mobiles du mécanisme. Comme c’était le cas avec le mécanisme modulaire plan, l’amortissement des vibrations est en général très efficace puisque les amortisseurs sont montés en parallèle avec les directions des degrés de liberté non contraints. Il est noté ici que le coefficient d’amortissement utilisé est relativement élevé par rapport aux coefficients utilisés pour les autres mécanismes de cette thèse. Cela s’explique par la petite quantité d’amortisseurs utilisés pour absorber l’énergie emmagasinée dans un nombre élevé de barres et de ressorts du mécanisme. Finalement, il est mentionné que les contraintes géométriques ont été satisfaites pendant la simulation dans un ordre de 10^{-15} au niveau des positions et des vitesses.

6.3 Résumé

Dans ce chapitre, la modularité a été introduite comme un nouvel aspect dans le développement de mécanismes de tenségrité. L’utilisation de modules mène à des mécanismes qui ressemblent quelque peu à des mécanismes sériels. Par contre, les forces

de flexion qui nuisent aux performances de ces derniers ne sont pas présentes dans les mécanismes de tensegrité modulaires. Le chapitre développe et analyse un mécanisme plan et un mécanisme spatial pour lesquels les comportements sont très similaires.

La stratégie d'actionnement utilisée pour les mécanismes modulaires leur permet d'opérer dans des espaces atteignables relativement grands. De plus, l'ajout de modules aux mécanismes tend à agrandir les frontières externes de leurs espaces atteignables sans toutefois avoir un effet significatif sur leurs frontières internes (cet effet est nul dans le cas du mécanisme plan). Par conséquent, les mécanismes ont une capacité de déploiement peu importe la quantité de modules avec lesquels ils sont construits. Évidemment, le calcul des frontières des espaces atteignables dans ce chapitre suppose que la gamme d'opération des actionneurs permet à chaque câble de passer d'une longueur nulle à une longueur égale à celle des barres. Lorsque cela n'est pas le cas (par exemple si les câbles sont remplacés par des fils fabriqués à partir d'alliages à mémoire de forme), la taille des espaces atteignables sera réduite.

Les mécanismes modulaires se distinguent des autres mécanismes de tensegrité présentés dans cette thèse par leur faible quantité de degrés de liberté non contraints par rapport à leur quantité élevée de composants. Cette caractéristique est à la source des raideurs plus élevées pour ce type de mécanisme. De plus, l'amortissement des vibrations dans les mécanismes modulaires est plus efficace puisqu'il est possible d'amortir directement les degrés de liberté non contraints.

Pour terminer, il est noté que pour certaines trajectoires des mécanismes modulaires plan et spatial (p. ex. celles qui s'approchent des frontières des espaces atteignables de ces mécanismes) il y a des instabilités qui se manifestent pendant la simulation dynamique. C'est à dire qu'après avoir atteint leurs configurations finales et après que leurs vibrations sont presque entièrement supprimées, les mécanismes se remettent à osciller avec des vibrations d'amplitudes croissantes. Il est clair que ce comportement, qui nécessite un apport énergétique au mécanisme lorsque les positions de ses actionneurs sont fixes, n'est pas physiquement possible. Il semble alors que les instabilités sont créées par l'algorithme de simulation. Quoique l'identification de la source des instabilités dépasse l'étendue de cet ouvrage, une cause possible est l'étape de correction des positions des coordonnées (voir l'équation (5.149)) où il est supposé que l'intégration des vitesses des coordonnées dans la direction parallèle aux contraintes s'effectue de manière exacte [96] ce qui n'est pas tout à fait le cas. Quoique cette étape est également présente pendant la simulation de la dynamique des mécanismes de tensegrité 3-PUPS et 3-PURS (voir la section 5.2), il est possible que la quantité élevée de coordonnées utilisées pour représenter les configurations des mécanismes modulaires ainsi que les nombreuses contraintes géométriques devant être respectées correspondent aux

éléments déclencheurs qui mènent à l'apparition des instabilités.

Chapitre 7

Conclusion

La recherche existante portant sur les systèmes de tensegrité se limite surtout à leur utilisation comme structure conventionnelle ou encore comme structure active. Malgré le fait que quelques auteurs se soient penchés sur la possibilité de développer des mécanismes à partir de systèmes de tensegrité, leurs travaux ne traitent pas de certains aspects importants dont le calcul de l'espace atteignable. Dans le but de combler ces lacunes ainsi que de contribuer à l'introduction des mécanismes de tensegrité auprès de la communauté de chercheurs en robotique, de nouveaux mécanismes de tensegrité ont été développés et analysés dans cette thèse.

Au chapitre 1, il a été mentionné que les mécanismes de tensegrité peuvent être perçus comme des alternatives aux mécanismes plus conventionnels. L'avantage principal des mécanismes de tensegrité est le fait que leurs composants sont toujours chargés de manière axiale. Ce faisant, ce type de mécanisme fait un usage plus efficace des matériaux notamment en ce qui a trait aux composants en tension pour lesquels des câbles ou des ressorts peuvent être utilisés. Cela rend les mécanismes de tensegrité comparables aux mécanismes entraînés par câbles en ce qui concerne la réduction de l'inertie des pièces mobiles. De plus, contrairement aux mécanismes entraînés par câbles où l'effecteur doit généralement être entouré de câbles pour résister à des chargements externes généraux, les mécanismes de tensegrité ont des architectures qui s'apparentent davantage aux mécanismes sériels ou parallèles où une base est reliée à un effecteur sans encombrer l'espace autour de ce dernier.

Un des aspects qui distingue les mécanismes de tensegrité par rapport à leurs homologues plus conventionnels est leur capacité d'être autocontraints. Cela permet l'introduction de forces internes dans les composants des mécanismes sans nécessiter de forces de réaction sur l'environnement. Par contre, tel qu'il a été expliqué au chapitre 2,

les mécanismes de tenségrité ont seulement une capacité d'être autocontraint lorsqu'ils se retrouvent dans des configurations particulières (c.-à-d. les configurations de tenségrité). Le besoin des mécanismes de se retrouver dans de telles configurations augmente de manière considérable leur complexité.

Comme il a déjà été mentionné à la section 1.1 de cette thèse, les mécanismes de tenségrité ont, comme leurs homologues plus conventionnels, leur part de faiblesses. À titre d'exemple, les degrés de liberté non contraints qui découlent de l'utilisation de ressorts permettent aux mécanismes de se déformer sous l'application de chargements externes ou inertiels. Ce faisant, les mécanismes présentés dans cette thèse ne sont pas de bons candidats pour la manipulation de charges variables ou encore pour la suivie de trajectoires précises.

À la prochaine section, les contributions principales de la thèse sont résumées. Par après, à la section suivante, les travaux qui sont prévus pour faire suite à la thèse sont présentés et certaines directions potentielles de recherche sont énumérées. Finalement, quelques commentaires sont faits concernant les applications possibles des mécanismes de tenségrité.

7.1 Contributions principales

Le fait que les mécanismes de tenségrité doivent toujours se retrouver dans des configurations de tenségrité joue un rôle important dans leur développement. En fait, dans un cas typique où chaque composant d'un mécanisme a une longueur qui est soit constante ou actionnée avec une commande en position (c.-à-d. que le composant est actionné pour lui donner une longueur prescrite), les actionneurs doivent être parfaitement synchronisés pour que le mécanisme demeure dans une configuration de tenségrité. Puisqu'un tel scénario n'est pas souhaitable, il a été proposé au chapitre 3 d'intégrer des ressorts dans les architectures des mécanismes de tenségrité de manière à leur permettre de se positionner automatiquement dans des configurations de tenségrité. Avec l'objectif de guider le concepteur dans l'utilisation de cette approche novatrice, des règles concernant la quantité de ressorts qui doit être utilisée dans une architecture donnée ont été établies. Ces règles s'appuient sur deux critères. D'une part, la quantité minimale de ressorts est établie à partir d'un critère stipulant que le mécanisme doit avoir au moins un degré de liberté non contraint dans son architecture pour lui permettre de se déformer dans des configurations pour lesquelles l'énergie potentielle emmagasinée dans ses ressorts est minimale. D'autre part, la quantité maximale de ressorts est calculée à partir de la condition voulant que les configurations d'équilibre

du mécanisme correspondent à des minimums stables de son énergie potentielle.

En s'inspirant de ces règles, un total de sept nouveaux mécanismes de tenségrité ont été développés. Chaque mécanisme est obtenu en apportant des modifications à un système de tenségrité existant. Au chapitre 4, des mécanismes plans à un et deux degrés de liberté ont été présentés. Quoique le potentiel de ces mécanismes en ce qui a trait à leur utilisation pour des applications réelles est limité, leur simplicité a permis d'identifier plusieurs comportements fondamentaux des mécanismes de tenségrité. Au chapitre 5, le système de tenségrité antiprismatique triangulaire (ou sa version renforcée) est exploité dans le développement de trois mécanismes qui sont tous utilisés pour positionner un effecteur dans un espace tridimensionnel. Parmi ceux-ci, les mécanismes 3-PUPS et 3-PURS sont intéressants puisque leurs effecteurs se déplacent en translation pure. L'analyse de ces mécanismes a également permis de constater les enjeux associés aux mécanismes infinitésimaux qui sont présents dans l'architecture du système de tenségrité antiprismatique triangulaire ainsi que les interférences qui résultent de l'utilisation de la version renforcée de ce système. Finalement, au chapitre 6, deux mécanismes ont été développés à partir d'assemblages de modules qui sont fondés sur le système de tenségrité en forme de X. Les comportements de ces mécanismes sont en général supérieurs à ceux des autres mécanismes étudiés en raison de leur quantité relativement faible de degrés de liberté non contraints. De plus, l'utilisation de plusieurs modules permet aux mécanismes d'opérer dans de grands espaces atteignables.

Motivée par l'émergence récente du domaine des mécanismes de tenségrité, la thèse vise d'abord et avant tout le développement de nouveaux mécanismes ainsi que l'établissement de méthodes d'analyse et la génération de résultats pouvant être utilisés pour juger leur potentiel. Ce faisant, la modélisation des mécanismes dans cet ouvrage s'effectue avec une approche très théorique. En fait, il n'est pas souhaité ici de faire la conception de mécanismes de tenségrité mais plutôt de déterminer si de tels mécanismes méritent d'être conçus. Ainsi, pour chaque nouveau mécanisme présenté, une analyse de la cinématique, de la statique et de la dynamique est effectuée. Quoique cette analyse s'inspire du domaine de la robotique, les méthodes qui y sont utilisées doivent être adaptées aux mécanismes de tenségrité. D'ailleurs, la présence de degrés de liberté non contraints dans les architectures des mécanismes fait en sorte que leurs configurations d'équilibre dépendent à la fois des positions de leurs actionneurs ainsi que des chargements externes, gravitationnels et inertiels qui leur sont appliqués. Contrairement aux mécanismes plus conventionnels, il n'est donc pas possible de calculer la configuration d'un mécanisme de tenségrité uniquement à partir des positions de ses actionneurs et de la géométrie de ses composants.

Pour placer une emphase sur les différences entre les mécanismes de tenségrité et les

mécanismes conventionnels en ce qui concerne les relations entre leurs variables d'entrée et de sortie, les problèmes géométriques direct et inverse, qui sont bien connus dans le domaine de la robotique, ont été remplacés ici par les problèmes statiques direct et inverse. Le calcul de solutions à ces problèmes représente la première étape dans l'analyse des mécanismes. Il est important de noter que de telles solutions sont valides uniquement lorsque les mécanismes sont immobiles puisque, tel que mentionné au paragraphe précédent, les forces inertielles exercent une influence sur leurs configurations d'équilibre. Pour le cas général où des chargements externes et gravitationnels sont appliqués aux mécanismes, leurs configurations d'équilibre sont trouvées à partir d'une minimisation de leur énergie potentielle. La complexité des systèmes d'équations associés à cette minimisation nécessite l'utilisation d'une approche numérique telle que, par exemple, la méthode de Newton-Raphson.

Pour chaque mécanisme étudié, la situation pour laquelle les chargements externes et gravitationnels ne sont pas considérés a également été traitée. Pour certaines applications, selon les paramètres physiques des mécanismes (p. ex. les raideurs des ressorts, la masse des barres, etc.), de telles hypothèses simplificatrices peuvent offrir une bonne approximation de la réalité. De plus, il est possible d'équilibrer statiquement certains mécanismes de tensegrité de manière à compenser le poids de leurs composants [105]. Sous de telles conditions, des solutions analytiques aux problèmes statiques direct et inverse peuvent être trouvées. L'approche utilisée pour le développement de ces solutions est encore, à la base, fondée sur une minimisation de l'énergie potentielle des mécanismes. Pour certains mécanismes, cela mène directement aux solutions recherchées. Pour d'autres, la minimisation de l'énergie potentielle permet d'identifier des comportements de nature géométrique qui sont ensuite exploités dans le développement de solutions aux problèmes statiques direct et inverse. Dans tous les cas, il est prouvé de manière explicite que les solutions trouvées correspondent à des configurations d'équilibre stables des mécanismes.

La taille et la forme de l'espace atteignable d'un mécanisme sont souvent considérées comme des indices importants de sa performance. En ce sens, un avantage notable associé à l'obtention de solutions analytiques aux problèmes statique direct et inverse des mécanismes est la possibilité de calculer de manière analytique les frontières de leurs espaces atteignables. Le calcul de ces frontières constitue d'ailleurs une des contributions les plus importantes de cette thèse. Il est trouvé que les espaces atteignables des mécanismes de tensegrité sont relativement grands par rapport à leur taille physique. Cela est d'autant plus vrai pour les mécanismes modulaires où l'ajout de modules tend à agrandir la frontière externe de l'espace atteignable sans influencer de manière considérable sa frontière interne.

L'étude du comportement d'un mécanisme de tensegrité sous l'application d'un chargement externe est d'une importance primordiale en raison de ses degrés de liberté non contraints. D'ailleurs, il existe des limites aux chargements externes pouvant être appliqués sur un mécanisme sans que la tension dans les câbles de ce dernier soit perdue et sans que sa configuration d'équilibre devienne instable. Au chapitre 4, ces limites ont été calculées de manière analytique en s'inspirant en partie sur les principes de base de la théorie des catastrophes. Il a donc pu être constaté que l'application d'un chargement externe d'amplitude suffisamment élevée sur un mécanisme de tensegrité peut, dans certains cas, entraîner un changement qualitatif de la forme de sa fonction d'énergie potentielle qui résulte dans l'effondrement du mécanisme. En pratique, il est toutefois possible d'ajuster le niveau de précontrainte d'un mécanisme (c.-à-d. augmenter la raideur de ses ressorts) pour faire en sorte que les chargements externes qui lui sont appliqués n'entraînent pas de déformations pouvant nuire à son fonctionnement.

Une fois que les limites des chargements externes pouvant être appliqués sur les mécanismes ont été établies, il devient utile de déterminer la résistance de ces derniers aux déformations causées par de tels chargements. Ce faisant, la raideur des mécanismes a été analysée en supposant leurs éléments comme étant parfaitement rigides à l'exception des ressorts. Pour les mécanismes plus simples, des expressions symboliques ont été dérivées pour la raideur à partir de la fonction d'énergie potentielle. En ce qui concerne les mécanismes des chapitres 5 et 6, la raideur a été approximée numériquement. Il a donc pu être constaté que la raideur des mécanismes modulaires est en général plus élevée. Cela peut être attribué à la faible quantité de degrés de liberté non contraints dans leurs architectures.

Des modèles dynamiques ont été développés pour chaque mécanisme à partir de la formulation Lagrangienne. L'analyse dynamique présentée dans cette thèse ne fait que donner un aperçu du comportement des mécanismes lorsqu'ils sont en mouvement. En effet, cette analyse se limite à la simulation d'une trajectoire unique pour chaque mécanisme. Tout de même, il a été possible de faire des constats importants. En raison des degrés de liberté non contraints des mécanismes ainsi que des ressorts qui s'y retrouvent, ceux-ci ont naturellement tendance à osciller autour de leurs configurations d'équilibre finales une fois les positions de leurs actionneurs fixées. Par conséquent, des amortisseurs doivent être introduits dans les mécanismes afin de dissiper cette énergie. Il a pu être observé que l'efficacité de l'amortissement dépend du positionnement des amortisseurs dans les mécanismes. La dissipation des vibrations des mécanismes modulaires est particulièrement efficace puisqu'il est possible de monter les amortisseurs en parallèle avec les directions des degrés de liberté non contraints. En fait, il est observé qu'il n'est pas toujours souhaité de placer des amortisseurs en parallèle avec les ressorts même si ces derniers représentent une source importante de l'énergie devant

être dissipée. Finalement, il est noté que le frottement dans les liaisons passives, qui n'a pas été considéré dans cette analyse, peut également contribuer à l'amortissement des mécanismes.

7.2 Travaux futurs et directions potentielles de recherche

La complexité associée au maintien des mécanismes de tenségrité dans des configurations de tenségrité a été bien documentée. Dans cet ouvrage, cette difficulté a été surmontée en intégrant des ressorts dans les mécanismes. L'utilisation de ressorts mène (sous certaines conditions) à une présence de degrés de liberté non contraints dans les mécanismes qui leur permettent de se positionner de manière automatique dans des configurations d'équilibre stables. Cependant, ces degrés de liberté non contraints permettent également aux mécanismes de se déformer lorsque soumis à des chargements externes, gravitationnels ou inertiels ce qui, dans bien des cas, n'est pas souhaitable. Par conséquent, l'auteur envisage comme travail futur de développer des mécanismes de tenségrité avec une approche différente qui n'est pas fondée sur l'utilisation de ressorts. L'approche proposée, décrite au prochain paragraphe, cherche plutôt à profiter du fait que les configurations de tenségrité se situent toujours sur la frontière d'assemblage du mécanisme (voir la section 2.2).

À la Figure 2.2(a), un système de tenségrité simple qui consiste d'une barre et de deux câbles est illustré. Pour que ce système se retrouve dans une configuration de tenségrité, il est nécessaire que les nœuds A , B et C soient colinéaires. Quelques stratégies pouvant être envisagées pour le développement d'un mécanisme de tenségrité à partir de ce système sont illustrées à la Figure 7.1. À la Figure 7.1(a), les longueurs des deux câbles qui relient les paires de nœuds AB et BC sont actionnées de manière simultanée pour varier la position du nœud B le long de la droite définie par les composants. Puisque, pour demeurer dans une configuration de tenségrité, la somme des longueurs des câbles doit toujours être égale à la longueur de la barre, les actionneurs doivent être parfaitement synchronisés. Pour éviter cette situation peu enviable, il a été proposé dans cette thèse d'intégrer des ressorts aux mécanismes. Pour le mécanisme en question, le câble qui relie les nœuds B et C peut être remplacé par un ressort tel qu'il est illustré à la Figure 7.1(b). Dans ce cas, lorsque la longueur du câble AB est modifiée par l'actionneur, le ressort se déforme pour faire en sorte que les nœuds A , B et C sont toujours colinéaires. Toutefois, l'application d'une force externe sur le nœud B dans une direction perpendiculaire à la droite AC aura tendance à déformer le mécanisme

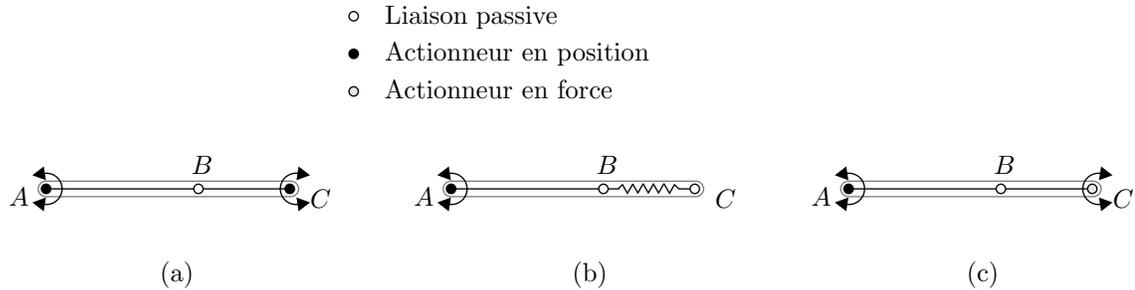


FIG. 7.1 – Stratégies disponibles pour le développement de mécanismes de tensegrité : (a) actionnement synchronisé (b) intégration de ressorts (c) actionnement hybride.

en raison de son degré de liberté non contraint. De manière alternative, une stratégie de commande hybride peut être envisagée (voir la Figure 7.1(c)). Dans ce cas, la position du nœud B est contrôlée en imposant, à l'aide d'un actionneur situé au nœud A , la longueur du premier câble. Par la suite, pour faire en sorte que le mécanisme se retrouve toujours dans une configuration de tensegrité, une commande de force en régulation est appliquée au deuxième câble. C'est à dire que l'actionneur qui se situe au nœud C est utilisé pour maintenir une force constante dans le câble qui relie les nœuds B et C . Ce faisant, le mécanisme est automatiquement placé dans une configuration de tensegrité sans compromettre sa rigidité. De plus, il est facile de modifier au besoin le niveau de précontrainte dans les composants du mécanisme en variant la force qui est générée par l'actionneur. La substitution du ressort par un câble actionné en force n'influence pas de manière considérable le comportement du mécanisme qui est utilisé ici comme exemple. Toutefois, de manière générale, les résultats qui sont présentés dans cette thèse ne s'appliquent plus à cette nouvelle stratégie d'actionnement.

Une difficulté qui n'est pas insurmontable mais qui complique passablement la construction de mécanismes de tensegrité tels que ceux décrits dans cette thèse est l'hypothèse des ressorts à longueurs libres nulles. De tels ressorts peuvent être simulés en pratique avec différentes approches dont celle qui a été présentée à la section 6.1.5. Par contre, cela nécessite souvent une conception plus élaborée où une attention particulière doit être portée à la minimisation du frottement pour ne pas influencer le comportement du mécanisme. Par conséquent, il pourrait être intéressant d'étudier la possibilité de concevoir des mécanismes de tensegrité avec des ressorts à longueurs libres non nulles. De manière générale, l'utilisation de tels ressorts ne permet pas le calcul de solutions analytiques aux problèmes statiques direct et inverse. De plus, l'espace atteignable d'un mécanisme qui utilise ces ressorts a une taille réduite par rapport à celui du même mécanisme construit avec des ressorts à longueurs libres nulles. Par contre, pour certaines applications, les simplifications résultantes en ce qui concerne la conception des mécanismes pourraient être jugées suffisamment attrayantes pour rendre ces

inconvenients acceptables.

Lorsqu'il est supposé qu'aucun chargement externe n'est appliqué sur les mécanismes de cet ouvrage, il n'est généralement pas possible pour leurs composants d'interférer les uns avec les autres. Cela n'est toutefois plus le cas lorsque les mécanismes spatiaux présentés au chapitre 5 sont déformés par des chargements externes. D'ailleurs, un avertissement à cet effet a déjà été donné à la section 5.1.3.3. Pour cette raison, une direction potentielle de recherche consiste à inclure la vérification des interférences entre les composants de mécanismes de tensegrité pendant le calcul de leurs espaces de chargements externes admissibles.

Finalement, il est noté que les mécanismes de cette thèse sont tous développés soit à partir du système de tensegrité en forme de X de Snelson [13] ou encore à partir du système de tensegrité antiprismatique triangulaire. De plus, chaque mécanisme a été conçu de manière à déplacer un effecteur en translation dans l'espace ou dans le plan. Il est alors intéressant d'envisager le développement de mécanismes à partir de nouveaux systèmes de tensegrité. De plus, des architectures permettant des mouvements sphériques ou encore le déplacement d'un effecteur avec six degrés de liberté pourraient être considérées. En fait, puisque l'étude des mécanismes de tensegrité en est encore à ses premiers pas, il existe beaucoup de branches de recherche qui n'ont pas encore été explorées. Il est alors souhaité que cette thèse saura susciter l'intérêt de quelques chercheurs dans le domaine de la robotique pour qu'ils orientent davantage leurs recherches sur ce nouveau type de mécanisme.

7.3 Applications potentielles

Pour terminer, il est jugé bon de discuter un peu de quelques applications potentielles pour lesquelles les mécanismes de tensegrité sont plus susceptibles d'être utilisés. À cet effet, il doit être rappelé que les objectifs de cette thèse ont été définis avec l'intention d'évaluer le potentiel de ce type de mécanisme en ne visant pas des applications spécifiques. Évidemment, les domaines les plus propices pour les mécanismes de tensegrité sont ceux qui sont bien placés pour profiter de leurs avantages principaux. En ce sens, la faible masse des mécanismes ainsi que leur capacité de déploiement en font des alternatives intéressants pour les applications spatiales. Ces mêmes avantages suggèrent la considération des mécanismes de tensegrité comme des solutions viables pour utilisation à titre d'accessoires sur des robots mobiles où il est souhaité de minimiser la consommation de puissance. Les propriétés de tensegrité peuvent également être exploitées dans le cadre d'applications moins conventionnelles. Par exemple, le domaine

des arts visuels pourrait profiter de ces mécanismes pour la construction de plateaux de théâtre reconfigurables ou encore tout simplement comme éléments de scène déformables. Dans le domaine du divertissement, il pourrait être envisagé de construire un manège où les utilisateurs seraient déplacés dans l'espace par un mécanisme modulaire spatial. En raison du grand espace atteignable, de la capacité d'effectuer de grandes accélérations ainsi que de l'apparence « légère » de ce mécanisme, un tel manège risquerait d'être populaire auprès des amateurs de sensations fortes.

Bibliographie

- [1] J.-P. MERLET : *Les robots parallèles*. Hermès, Paris, France, seconde édition, 1997.
- [2] J. ANGELES : *Fundamentals of robotic mechanical systems : Theory, methods and algorithms*. Springer-Verlag, New York, New York, États-Unis, seconde édition, 2003.
- [3] S. KAWAMURA et K. ITO : A new type of master robot for teleoperation using a radial wire drive system. *Comptes rendus - IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 55–60, 1993.
- [4] CANADA. BUREAU DE LA TRADUCTION : *Termium Plus* [En ligne], (<http://www.termiumplus.bureaudelatraduction.gc.ca/>). Consulté le 2 novembre 2005.
- [5] B. FULLER : *Synergetics : The geometry of thinking*. MacMillan Publishing Co., Inc., New York, New York, États-Unis, 1975.
- [6] J. BAYAT et C. D. CRANE III : Closed-form equilibrium analysis of a planar tensegrity structure. *Comptes rendus - 9th International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Liguria, Italie, 2004.
- [7] C. SULTAN, M. CORLESS et R.E. SKELTON : The prestressability problem of tensegrity structures : Some analytical solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 38(30):5223–5252, 2001.
- [8] R. MOTRO : Structural morphology of tensegrity systems. *International Journal of Space Structures*, 11(1-2):233–240, 1996.
- [9] D. G. EMMERICH : Structures tendues et autotendantes. *Monographies de Géométrie Constructive*. Éditions de l'École d'Architecture de Paris La Villette, Paris, France, 1988.

- [10] ALTAVISTA : *Babel Fish Translation* [En ligne], (<http://world.altavista.com/>). Consulté le 8 novembre 2005.
- [11] B. FULLER : *Tensile-integrity structures*, United States Patent No. 3,063,521, 13 novembre 1962.
- [12] K. SNELSON : *Correspondance de K. Snelson à R. Motro concernant l'origine des systèmes de tenségrité* [En ligne], (<http://www.grunch.net/snelson/rmoto.html>). Consulté le 2 juin 2006.
- [13] K. SNELSON : *Continuous tension, discontinuous compression structures*, United States Patent No. 3,169,611, 16 février 1965.
- [14] D.G. EMMERICH : *Construction de réseaux autotendants*, Brevet No. 1,377,290, France, 28 septembre 1964.
- [15] D.G. EMMERICH : *Structures linéaires autotendants*, Brevet No. 1,377,291, France, 28 septembre 1964.
- [16] R. MOTRO : Tensegrity systems : The state of the art. *International Journal of Space Structures*, 7(2):75–83, 1992.
- [17] A. PUGH : *An introduction to tensegrity*. Berkeley : University of California Press, Los Angeles, Californie, États-Unis, première édition, 1976.
- [18] W.D. NIVEN, éditeur. *The scientific papers of James Clerk Maxwell*, volume 1, pages 598–604. Dover Publications, New York, New York, États-Unis, 1965.
- [19] C.R. CALLADINE : Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames. *International Journal of Solids and Structures*, 14(2):161–172, 1978.
- [20] G. TIBERT : *Deployable tensegrity structures for space applications*. Thèse de doctorat, Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède, 2002.
- [21] H. FURUYA : Concept of deployable tensegrity structures in space applications. *International Journal of Space Structures*, 7(2):143–152, 1992.
- [22] J. DUFFY, J. ROONEY, B. KNIGHT et C. D. CRANE III : Review of a family of self-deploying tensegrity structures with elastic ties. *Shock and Vibration Digest*, 32(2):100–106, 2000.
- [23] C. SULTAN et R. E. SKELTON : Tendon control deployment of tensegrity structures. *Comptes rendus SPIE - The International Society for Optical Engineering*, volume 3323, pages 455–466, 1998.

- [24] R. CONNELLY et A. BACK : Mathematics and tensegrity. *American Scientist*, 86(2):142–151, 1998.
- [25] C. PAUL, H. LIPSON et F.J. VALERO-CUEVAS : Evolutionary form-finding of tensegrity structures. *Comptes rendus - Genetic and Evolutionary Computation Conference - GECCO 2005*, pages 3–10, Washington, D.C., États-Unis, 2005.
- [26] K. SAKANTAMIS et O.P. LARSEN : The cocoon method : a physical modelling tool for designing tensegrity systems. *International Journal of Space Structures*, 19(1):11–20, 2004.
- [27] A.G. TIBERT et S. PELLEGRINO : Review of form-finding methods for tensegrity structures. *International Journal of Space Structures*, 18(4):209–223, 2003.
- [28] H. KENNER : *Geodesic math and how to use it*. University of California Press, Berkeley, Californie, États-Unis, première édition, 1976.
- [29] R. CONNELLY et M. TERRELL : Globally rigid symmetry tensegrities. *Structural Topology*, 21:59–78, 1995.
- [30] A. CHASSAGNOUX, A. CHOMARAT et J. SAVEL : A study of morphological characteristics of tensegrity structures. *International Journal of Space Structures*, 7(2):165–172, 1992.
- [31] S. PELLEGRINO : *Mechanics of kinematically indeterminate structures*. Thèse de doctorat, University of Cambridge, Cambridge, Royaume-Unis, 1986.
- [32] W.B. WHITTIER : Kinematic analysis of tensegrity structures. Thèse de maîtrise, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginie, États-Unis, 2002.
- [33] H.-J. SCHEK : The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1):115–134, 1974.
- [34] R. CONNELLY : Tensegrity structures : why are they stable? M.F. THORPE et P.M. DUXBURY, éditeurs : *Rigidity theory and applications*, pages 47–54. Plenum Press, New York, New York, États-Unis, 1999.
- [35] N. VASSART et R. MOTRO : Multiparametered formfinding method : Application to tensegrity systems. *International Journal of Space Structures*, 14(2):147–154, 1999.
- [36] R. CONNELLY et W. WHITELEY : Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9(3):453–491, 1996.

- [37] E.W. WEISSTEIN : *Affine transformation*, Mathworld - a Wolfram web resource [En ligne], (<http://mathworld.wolfram.com/affinetransformation.html>). Consulté le 22 mars 2006.
- [38] R. CONNELLY : Rigidity and energy. *Inventiones Mathematicae*, 66(1):11–33, 1982.
- [39] M. MASIC, R.E. SKELTON et P.E. GILL : Algebraic tensegrity form-finding. *International Journal of Solids and Structures*, 42(16):4833–4858, 2005.
- [40] D. WILLIAMSON, R.E. SKELTON et J. HAN : Equilibrium conditions of a tensegrity structure. *International Journal of Solids and Structures*, 40(23):6347–6367, 2003.
- [41] C. SULTAN : *Modeling, design and control of tensegrity structures with applications*. Thèse de doctorat, Purdue University, West Lafayette, Indiana, États-Unis, 1999.
- [42] C. D. CRANE III, J. DUFFY et J. C. CORREA : Static analysis of prestressed tensegrity structures. *ASME Journal of Mechanical Design*, 127(2):257–268, 2005.
- [43] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING et B.P. FLANNERY : *Numerical recipes in C : The art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Unis, seconde édition, 1992.
- [44] J. ANGELES et A.A ROJAS : On the use of condition-number minimization and continuation in the iterative kinematic analysis of robot manipulators. *Proceedings of the 5th IASTED Symposium on Robotics and Automation*, Nouvelle-Orléans, Louisiane, États-Unis, 1984.
- [45] C. D. CRANE III, J. DUFFY et J. C. CORREA : Static analysis of prestressed tensegrity structures. *Proceedings of the 2002 ASME Design Engineering Technical Conference*, pages 689–695, Montréal, Québec, Canada, octobre 2002.
- [46] H. MURAKAMI : Static and dynamic analyses of tensegrity structures. part 1. nonlinear equations of motion. *International Journal of Solids and Structures*, 38(20):3599–3613, 2001.
- [47] H. MURAKAMI : Static and dynamic analyses of tensegrity structures. part 2. quasi-static analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 38(20):3615–3629, 2001.
- [48] S. GUEST : The stiffness of prestressed frameworks : A unifying approach. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3-4):842–854, 2006.

- [49] S. PELLEGRINO et C.R. CALLADINE : Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 22(4):409–428, 1986.
- [50] S. PELLEGRINO : Analysis of prestressed mechanisms. *International Journal of Solids and Structures*, 26(12):1329–1350, 1990.
- [51] C. R. CALLADINE et S. PELLEGRINO : First-order infinitesimal mechanisms. *International Journal of Solids and Structures*, 27(4):505–515, 1991.
- [52] R. CONNELLY et W. WHITELEY : The stability of tensegrity frameworks. *International Journal of Space Structures*, 7(2):153–163, 1992.
- [53] R. CONNELLY : The rigidity of certain cabled frameworks and the second-order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces. *Advances in Mathematics*, 37(3):272–299, 1980.
- [54] B. ROTH et W. WHITELEY : Tensegrity frameworks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 265(2):419–446, 1981.
- [55] B. KNIGHT, Y. ZHANG, J. DUFFY et C. D. CRANE III : On the line geometry of a class of tensegrity structures. *Comptes rendus - Symposium commemorating the legacy, works, and life of Sir Robert Stawell Ball*, Cambridge, Royaume-Unis, 2000.
- [56] J.F. GABRIEL, éditeur. *Beyond the cube. The architecture of space frames and polyhedra*. John Wiley & Sons, New York, New York, États-Unis, 1997.
- [57] I. J. OPPENHEIM et W. O. WILLIAMS : Geometric effects in an elastic tensegrity structure. *Journal of Elasticity*, 59(1):51–65, 2000.
- [58] K. KEBICHE, M.N. KAZI-AOUAL et R. MOTRO : Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems. *Engineering Structures*, 21(9):864–876, 1999.
- [59] R. E. SKELTON, R. ADHIKARI, J.-P. PINAUD, W. CHAN et J. W. HELTON : An introduction to the mechanics of tensegrity structures. *Comptes rendus - IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 4254–4259, Orlando, Floride, États-Unis, 2001.
- [60] J.P. YIN et D. MARSH : Catastrophe analysis of planar three-spring systems. *Comptes rendus - ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgie, États-Unis, 1998.
- [61] R. HINES, D. MARSH et J. DUFFY : Catastrophe analysis of the planar two-spring mechanism. *The International Journal of Robotics Research*, 17(1):89–101, 1998.

- [62] M. CARRICATO, J. DUFFY et V. PARENTI-CASTELLI : Catastrophe analysis of a planar system with flexural pivots. *Mechanism and Machine Theory*, 37(7):693–716, 2002.
- [63] C. SULTAN, M. CORLESS et R. E. SKELTON : Linear dynamics of tensegrity structures. *Engineering Structures*, 24(6):671–685, 2002.
- [64] I. J. OPPENHEIM et W. O. WILLIAMS : Vibration of an elastic tensegrity structure. *European Journal of Mechanics - Solids*, 20(6):1023–1031, 2001.
- [65] I. J. OPPENHEIM et W. O. WILLIAMS : Vibration and damping in a three-bar tensegrity structure. *Journal of Aerospace Engineering*, 14(3):85–91, 2001.
- [66] S. DJOUADI, R. MOTRO, J.C. PONS et B. CROSNIER : Active control of tensegrity systems. *Journal of Aerospace Engineering*, 11(2):37–44, 1998.
- [67] J.B. ALDRICH, R.E. SKELTON et K. KREUTZ-DELGADO : Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures. *Comptes rendus - American Control Conference*, Denver, Colorado, États-Unis, 2003.
- [68] B. de JAGER, R. E. SKELTON et M. MASIC : Integrated control/structure design for planar tensegrity models. *Comptes rendus - 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, Glasgow, Écosse, Royaume-Unis, 2002.
- [69] B. de JAGER et R.E. SKELTON : Input-output selection for planar tensegrity models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(5):778–785, 2005.
- [70] C. SULTAN et R. E. SKELTON : Integrated design of controllable tensegrity structures. *ASME Adaptive Structures and Material Systems*, 54:27–35, 1997.
- [71] I. J. OPPENHEIM et W. O. WILLIAMS : Tensegrity prisms as adaptive structures. *ASME Adaptive Structures and Material Systems*, 54:113–120, 1997.
- [72] R. E. SKELTON et C. SULTAN : Controllable tensegrity, a new class of smart structures. *Comptes rendus SPIE - The International Society for Optical Engineering*, volume 3039, pages 166–177, 1997.
- [73] C. SULTAN, M. CORLESS et R. E. SKELTON : Peak to peak control of an adaptive tensegrity space telescope. *Comptes rendus SPIE - The International Society for Optical Engineering*, volume 3667, pages 190–201, 1999.
- [74] C. SULTAN et M. CORLESS : Tensegrity flight simulator. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(6):1055–1064, 2000.
- [75] C. SULTAN et R. SKELTON : A force and torque tensegrity sensor. *Sensors and Actuators, A : Physical*, 112(2-3):220–231, 2004.

- [76] E. FEST, K. SHEA, B. DOMER et I.F.C. SMITH : Adjustable tensegrity structures. *Journal of Structural Engineering*, 129(4):515–526, 2003.
- [77] E. FEST, K. SHEA et I.F.C. SMITH : Active tensegrity structure. *Journal of Structural Engineering*, 130(10):1454–1465, 2004.
- [78] C. PAUL, J.W. ROBERTS, H. LIPSON et F. VALERO-CUEVAS : Gait production in a tensegrity based robot. *Comptes rendus - 12th International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*, pages 216–222, Seattle, Washington, États-Unis, 2005.
- [79] C. PAUL, H. LIPSON et F.J. VALERO-CUEVAS : Design and control of tensegrity robots for locomotion. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(5):944–957, 2006.
- [80] M. MARSHALL et C. D. CRANE III : Design and analysis of a hybrid parallel platform that incorporates tensegrity. *Comptes rendus - ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 535–540, Salt Lake City, Utah, États-Unis, 2004.
- [81] D.A. STREIT et B.J. GILMORE : Perfect spring equilibrators for rotatable bodies. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 111(4):451–458, 1989.
- [82] J. HERDER : *Energy-free systems : theory, conception and design of statically balanced spring mechanisms*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, Delft, Pays-Bas, 2001.
- [83] J. PHILLIPS : *Freedom in Machinery : Volume 1, Introducing Screw Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Unis, 1984.
- [84] G. STRANG : *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, San Diego, Californie, États-Unis, troisième édition, 1988.
- [85] H. HANCOCK : *Theory of Maxima and Minima*. Dover Publications, New York, New York, États-Unis, 1960.
- [86] R.E. MILLER : *Optimization : Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, New York, États-Unis, 2000.
- [87] P. LEROUX : *Algèbre linéaire : une approche matricielle*. Modulo Éditeur, Mont-Royal, Québec, Canada, 1983.
- [88] R.P. SINGH et P.W. LIKINS : Singular value decomposition for constrained dynamical systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 52:943–948, 1985.

- [89] N.K. MANI, E.J HAUG et K.E. ATKINSON : Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 107(1):82–87, 1985.
- [90] M. SCHENK : Theory and design of statically balanced tensegrity mechanisms. Thèse de maîtrise, Delft University of Technology, Delft, Pays-Bas, 2006.
- [91] R. GILMORE : *Catastrophe theory for scientists and engineers*. Wiley-Interscience, New York, New York, États-Unis, 1981.
- [92] T. POSTON et I. STEWART : *Catastrophe theory and its applications*. Pitmann, London, Royaume-Unis, 1978.
- [93] J. ANGELES et A.A ROJAS : On the use of condition-number minimization and continuation in the iterative kinematic analysis of robot manipulators. *Comptes rendus - 5th IASTED Symposium on Robotics and Automation*, Nouvelle-Orléans, Louisiane, États-Unis, 1984.
- [94] C. M. GOSSELIN : Determination of the workspace of 6-DoF parallel manipulators. *ASME Journal of Mechanical Design*, 112(3):331–336, 1990.
- [95] C.M. GOSSELIN, E. LAVOIE et P. TOUTANT : An efficient algorithm for the graphical representation of the three-dimensional workspace of parallel manipulators. *ASME Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems*, 45:323–328, 1992.
- [96] J. KÖVECSES, J.-C. PIEDBOEUF et C. LANGE : Dynamics modeling and simulation of constrained robotic systems. *IEEE/ASME Transactions of Mechatronics*, 8(2):165–177, 2003.
- [97] R. M. ROSENBERG : *Analytical Dynamics of Discrete Systems*. Plenum, New York, 1977.
- [98] G.J. HAMLIN et A.C. SANDERSON : A novel concentric multilink spherical joint with parallel robotics applications. *Comptes rendus - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1267–1272, San Diego, Californie, États-Unis, 1994.
- [99] D. KAPUR et Y.N. LAKSHMAN : Elimination methods : an introduction. *Symbolic and numerical computation for artificial intelligence*, chapitre 2. Academic Press, 1992.
- [100] E.W. WEISSTEIN : *Plane*, Mathworld - a Wolfram web resource [En ligne], (<http://mathworld.wolfram.com/plane.html>). Consulté le 31 juillet 2006.
- [101] I. BONEV : *Geometric analysis of parallel mechanisms*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Québec, Canada, 2002.

- [102] D. MANOCHA : Solving systems of polynomial equations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(2):46–55, 1994.
- [103] D. MANOCHA et J.F. CANNY : Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(5):648–657, 1994.
- [104] S. DIBAKAR et T.S. MRUTHYUNJAYA : A computational geometry approach for determination of boundary of workspaces of planar manipulators with arbitrary topology. *Mechanism and Machine Theory*, 34(1):149–169, 1999.
- [105] M. ARSENAULT et C.M. GOSSELIN : Static balancing of tensegrity mechanisms. *Comptes rendus - 2005 ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*, Long Beach, Californie, États-Unis, septembre 2005.
- [106] M. ARSENAULT et C.M. GOSSELIN : Kinematic, static and dynamic analysis of a planar 1-DoF tensegrity mechanism. *ASME Journal of Mechanical Design*, 127(6):1152–1160, 2005.
- [107] M. ARSENAULT et C.M. GOSSELIN : Kinematic, static and dynamic analysis of a planar 2-DoF tensegrity mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 41(9):1072–1089, 2006.
- [108] M. ARSENAULT et C.M. GOSSELIN : Kinematic, static and dynamic analysis of a spatial three-degree-of-freedom tensegrity mechanism. *ASME Journal of Mechanical Design*, 128(5):1061–1069, 2006.
- [109] M. ARSENAULT et C.M. GOSSELIN : Dynamic simulation of a spatial 3-DoF tensegrity mechanism. *Transactions de la Société canadienne de génie mécanique*, 29(4):491–505, 2005.
- [110] M. ARSENAULT et C.M. GOSSELIN : Kinematic and static analysis of a planar modular 2-DoF tensegrity mechanism. *Comptes rendus - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Long Beach, Californie, États-Unis, 2006.

Annexe A

Méthode d'élimination de Dixon

Dans bien des cas, il est nécessaire de solutionner un système de polynômes non linéaires. Dans le cadre de cette thèse, cela se produit à deux reprises au cours de la section 6.2. Les méthodes d'élimination ont comme objectif de générer, à partir du système polynomial initial, un polynôme unique en fonction d'une seule variable dont les racines correspondent aux solutions du système. Cette annexe présente un aperçu de la méthode d'élimination de Dixon [99]. Il n'est pas souhaité de décrire tous les détails de la méthode mais seulement de fournir les informations nécessaires pour la solution des systèmes traités dans la thèse. Pour cette raison, l'illustration de la méthode de Dixon se fait à partir d'un système de trois polynômes de deuxième degré exprimés en fonction de trois variables. Les développements présentés dans cette section sont adaptés du travail de Kapur et Lakshman [99].

Supposons le système polynomial suivant :

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z) &= 0 \\ E_2(x, y, z) &= 0 \\ E_3(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Il est souhaité dans ce cas d'obtenir un polynôme en fonction de x . Les polynômes E_1 , E_2 et E_3 peuvent alors être vus comme des combinaisons linéaires de monômes de la forme $y^i z^j$ où, dans les cas traités dans cette thèse, $0 \leq i, j \leq 2$. La matrice suivante est générée en remplaçant successivement les variables y et z des polynômes par des variables a et b :

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} E_1(x, y, z) & E_2(x, y, z) & E_3(x, y, z) \\ E_1(x, a, z) & E_2(x, a, z) & E_3(x, a, z) \\ E_1(x, a, b) & E_2(x, a, b) & E_3(x, a, b) \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Il a été observé par Dixon que le déterminant de cette matrice doit être nul lorsque $y = a$ ou $z = b$. Il est alors forcément possible de factoriser le terme $(y - a)(z - b)$ du déterminant de manière à obtenir l'expression suivante :

$$\chi(x, y, z, a, b) = \frac{|\mathbf{D}'|(x, y, z, a, b)}{(y - a)(z - b)} \quad (\text{A.3})$$

qui est un polynôme de degré 3 en a et en z et de degré 1 en b et en y pouvant être récrit sous la forme suivante :

$$\chi(x, y, z, a, b) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 F_{ij}(x, y, z) a^i b^j \quad (\text{A.4})$$

Il peut être observé à partir de l'équation (A.2) que χ doit s'annuler lorsque $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$ peu importe les valeurs de a et b (où les coordonnées x_0 , y_0 et z_0 représentent une racine commune des polynômes E_1 , E_2 et E_3). Cela implique que les coefficients $F_{ij}(x, y, z)$ de l'équation (A.4) doivent également s'annuler à cette racine commune (c.-à-d. $F_{ij}(x_0, y_0, z_0) = 0 \forall i, j$). Les coefficients F_{ij} peuvent, à leur tour, être exprimés sous la forme suivante :

$$F_{ij} = \sum_{I=0}^3 \sum_{J=0}^1 G_{ijIJ}(x) y^J z^I \quad (\text{A.5})$$

Il existe théoriquement huit coefficients F_{ij} (c.-à-d. un coefficient pour chaque monôme de la forme $a^i b^j$ où $0 \leq i \leq 3$ et $0 \leq j \leq 1$). De plus, chacun des coefficients F_{ij} correspond à une somme pondérée des huit monômes de la forme $y^J z^I$. La matrice suivante peut alors être écrite à partir des coefficients G_{ijIJ} :

$$\mathbf{D} = \begin{array}{cccccccc} y^0 z^0 & y^1 z^0 & y^0 z^1 & y^1 z^1 & y^0 z^2 & y^1 z^2 & y^0 z^3 & y^1 z^3 \\ \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccccccc} G_{0000} & G_{0010} & G_{0001} & G_{0011} & G_{0002} & G_{0012} & G_{0003} & G_{0013} \\ G_{1000} & G_{1010} & G_{1001} & G_{1011} & G_{1002} & G_{1012} & G_{1003} & G_{1013} \\ G_{0100} & G_{0110} & G_{0101} & G_{0111} & G_{0102} & G_{0112} & G_{0103} & G_{0113} \\ G_{1100} & G_{1110} & G_{1101} & G_{1111} & G_{1102} & G_{1112} & G_{1103} & G_{1113} \\ G_{2000} & G_{2010} & G_{2001} & G_{2011} & G_{2002} & G_{2012} & G_{2003} & G_{2013} \\ G_{2100} & G_{2110} & G_{2101} & G_{2111} & G_{2102} & G_{2112} & G_{2103} & G_{2113} \\ G_{3000} & G_{3010} & G_{3001} & G_{3011} & G_{3002} & G_{3012} & G_{3003} & G_{3013} \\ G_{3100} & G_{3110} & G_{3101} & G_{3111} & G_{3102} & G_{3112} & G_{3103} & G_{3113} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow a^0 b^0 \\ \leftarrow a^1 b^0 \\ \leftarrow a^0 b^1 \\ \leftarrow a^1 b^1 \\ \leftarrow a^2 b^0 \\ \leftarrow a^2 b^1 \\ \leftarrow a^3 b^0 \\ \leftarrow a^3 b^1 \end{array} \end{array} \quad (\text{A.6})$$

La matrice \mathbf{D} tel que décrite ci-haut est théoriquement de dimension 8×8 (pour le cas discuté qui correspond également aux systèmes étudiés à la section 6.2). Par contre, il arrive souvent que certaines des lignes et colonnes de \mathbf{D} soient nulles. Par exemple, il est possible que le monôme $a^3 b^1$ n'apparaisse pas dans le déterminant de \mathbf{D}' . Dans

ce cas, le coefficient F_{31} n'existe pas et, forcément, les coefficients G_{31IJ} non plus. De plus, il peut être démontré que, dans un tel cas, les coefficients F_{ij} où $i \neq 3$ et $j \neq 1$ ne contiennent pas le monôme $y^1 z^3$. C'est donc dire que les coefficients $G_{ij_{13}}$ n'existent pas. La huitième ligne et la huitième colonne de \mathbf{D} sont alors nuls. Lorsque cela se produit, les lignes et colonnes nulles de \mathbf{D} sont tout simplement enlevées de la matrice qui a alors une dimension réduite.

Selon la formulation de Dixon décrite ci-haut, une solution au système original de polynômes n'est possible que si le déterminant de la matrice \mathbf{D} est nul. Puisque les coefficients $G_{ij_{IJ}}$ sont uniquement fonction de x , la condition $|\mathbf{D}| = 0$ correspond à un polynôme en x (c.-à-d. le polynôme recherché). Les racines de ce polynôme sont associées aux solutions du système polynomial original. Une fois les valeurs de x calculées, les valeurs correspondantes de y et de z sont obtenues relativement facilement.

Annexe B

Éléments des matrices \mathbf{D}_i

Pendant la solution du problème statique inverse du mécanisme modulaire spatial à trois degré de liberté, une méthode fondée sur un problème en valeurs propres a été utilisée (voir la section [6.2.2.2](#)). Dans ce qui suit, les éléments des matrices \mathbf{D}_i associées à ce problème, qui sont toutes de dimension 5×5 , sont données en fonction du vecteur \mathbf{p}_1 et des paramètres du mécanisme.

□ Matrice \mathbf{D}_0 :

$$\begin{aligned}
D_{011} &= (-y^2 + 3x^2)(x^2 + y^2 + z^2)^3(x^2 - L^2 + z^2 + y^2) \\
D_{012} &= \frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - L^2 + z^2 + y^2)(-\sqrt{3}y + 3x)(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{013} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - L^2 + z^2 + y^2)(9x^3 - \sqrt{3}yx^2 - 3y^2x + 3\sqrt{3}y^3 \\
&\quad + 2\sqrt{3}z^2y)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{014} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^3(x^2 - L^2 + y^2 + z^2) \\
D_{015} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 - L^2 + y^2 + z^2) \\
D_{021} &= \frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - L^2 + z^2 + y^2)(9x^3 + \sqrt{3}yx^2 - 3y^2x - 3\sqrt{3}y^3 \\
&\quad - 2\sqrt{3}z^2y)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{022} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 - L^2 + z^2 + y^2) \\
D_{023} &= -(7x^4 - x^2z^2 - L^2x^2 - 6x^2y^2 - L^2z^2 - L^2y^2 + 3y^4 \\
&\quad + 3y^2z^2 + z^4)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{024} &= 0 \\
D_{025} &= \frac{\sqrt{3}}{3}(2x^2 - 2y^2 - z^2)(3x + \sqrt{3}y)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{031} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - L^2 + z^2 + y^2)(3x + \sqrt{3}y)(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{032} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^3(x^2 - L^2 + z^2 + y^2) \\
D_{033} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 - L^2 + z^2 + y^2) \\
D_{034} &= D_{035} = 0 \\
D_{041} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^3(x^2 - L^2 + y^2 + z^2) \\
D_{042} &= D_{043} = 0 \\
D_{044} &= -(2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{045} &= 0 \\
D_{051} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 - L^2 + y^2 + z^2) \\
D_{052} &= 0 \\
D_{053} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(2x^2 - 2y^2 - z^2)(-\sqrt{3}y + 3x)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{054} &= 0 \\
D_{055} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2
\end{aligned}$$

□ Matrice \mathbf{D}_1 :

$$\begin{aligned}
D_{111} &= -4y(-y^2 + 3x^2)(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{112} &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{3}y + 3x)y(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{113} &= (2x^6 + 12x^5\sqrt{3}y - 2x^4y^2 + 3x^4z^2 + 8x^3y^3\sqrt{3} + 12z^2x^3\sqrt{3}y \\
&\quad + 6x^2y^4 + 2x^2y^2z^2 - 4y^5\sqrt{3}x - 4z^2y^3\sqrt{3}x + 15z^2y^4 + 4y^2z^4 \\
&\quad + 10y^6 - z^6 - 2L^2x^4 - 4L^2x^3\sqrt{3}y + 4L^2x^2y^2 - L^2x^2z^2 \\
&\quad + 2L^2\sqrt{3}xyz^2 + 4L^2y^3\sqrt{3}x + y^2z^2L^2 - 2y^4L^2 \\
&\quad + L^2z^4)(x^2 + y^2 + z^2) \\
D_{114} &= 4y(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{115} &= -2y(2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{121} &= (2x^6 - 12x^5\sqrt{3}y - 2x^4y^2 + 3x^4z^2 - 8x^3y^3\sqrt{3} - 12z^2x^3\sqrt{3}y \\
&\quad + 6x^2y^4 + 2x^2y^2z^2 + 4y^5\sqrt{3}x + 4z^2y^3\sqrt{3}x + 15z^2y^4 + 4y^2z^4 \\
&\quad + 10y^6 - z^6 - 2L^2x^4 + 4L^2x^3\sqrt{3}y + 4L^2x^2y^2 - L^2x^2z^2 \\
&\quad - 2L^2\sqrt{3}xyz^2 - 4L^2y^3\sqrt{3}x + y^2z^2L^2 - 2y^4L^2 \\
&\quad + L^2z^4)(x^2 + y^2 + z^2) \\
D_{122} &= \frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - 4\sqrt{3}yx + 5y^2 + z^2)(3x + \sqrt{3}y)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{123} &= 2y(x^2 + y^2 + z^2)(4y^4 - 12x^2y^2 + 3y^2z^2 + 16x^4 + z^4 - x^2z^2) \\
D_{124} &= -(x^2 - 2\sqrt{3}yx - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{125} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 - 2\sqrt{3}yx - y^2 + z^2) \\
D_{131} &= \frac{4\sqrt{3}}{3}(3x + \sqrt{3}y)y(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{132} &= 4y(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{133} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 + 4\sqrt{3}yx + 5y^2 + z^2)(-\sqrt{3}y + 3x)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{134} &= -(x^2 + 2\sqrt{3}yx - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{135} &= 0 \\
D_{141} &= 4y(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{142} &= -(x^2 - 2\sqrt{3}yx - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{143} &= -(x^2 + 2\sqrt{3}yx - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{144} &= D_{145} = 0 \\
D_{151} &= -2y(2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{152} &= 0 \\
D_{153} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + 2\sqrt{3}yx - y^2 + z^2) \\
D_{154} &= D_{155} = 0
\end{aligned}$$

□ Matrice \mathbf{D}_2 :

$$\begin{aligned}
D_{2_{11}} &= (x^2 + y^2 + z^2)(7x^6 + 25x^4y^2 + 15x^4z^2 - L^2x^4 + 9z^4x^2 \\
&\quad - 2L^2x^2z^2 + 13x^2y^4 + 26x^2y^2z^2 + 14L^2x^2y^2 + 2y^2z^2L^2 \\
&\quad + y^2z^4 - L^2z^4 - y^4L^2 - 5z^2y^4 + z^6 - 5y^6) \\
D_{2_{12}} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(3x^3 + 9y^2x + 3z^2x - 2\sqrt{3}y^3)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{2_{13}} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}(12x^5 + 2\sqrt{3}x^4y + 15x^3z^2 + 48x^3y^2 + x^2z^2\sqrt{3}y \\
&\quad - 4\sqrt{3}x^2y^3 + 3xy^2z^2 + 3z^4x - 12xy^4 + 10y^5\sqrt{3} \\
&\quad + 5y^3z^2\sqrt{3} - z^4\sqrt{3}y)(x^2 + y^2 + z^2) \\
D_{2_{14}} &= -2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{2_{15}} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{2_{21}} &= \frac{\sqrt{3}}{3}(12x^5 - 2\sqrt{3}x^4y + 15x^3z^2 + 48x^3y^2 - x^2z^2\sqrt{3}y \\
&\quad + 4\sqrt{3}x^2y^3 + 3xy^2z^2 + 3z^4x - 12xy^4 - 10y^5\sqrt{3} \\
&\quad - 5y^3z^2\sqrt{3} + z^4\sqrt{3}y)(x^2 + y^2 + z^2) \\
D_{2_{22}} &= (x^2 + y^2 + z^2)(-3y^4 + 14x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 - 2z^4 + x^4) \\
D_{2_{23}} &= -3z^2y^4 - 6y^2z^4 - 3z^6 - 4y^6 - 3x^4z^2 - 6x^2y^2z^2 - 36x^4y^2 \\
&\quad + 24x^2y^4 - 6z^4x^2 \\
D_{2_{24}} &= D_{2_{25}} = 0 \\
D_{2_{31}} &= -2/3\sqrt{3}(3x^3 + 9y^2x + 3z^2x + 2\sqrt{3}y^3)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{2_{32}} &= -2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{2_{33}} &= (x^2 + y^2 + z^2)(-3y^4 + 14x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 - 2z^4 + x^4) \\
D_{2_{34}} &= D_{2_{35}} = 0 \\
D_{2_{41}} &= -2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\
D_{2_{42}} &= D_{2_{43}} = D_{2_{44}} = D_{2_{45}} = 0 \\
D_{2_{51}} &= (2x^2 - 2y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{2_{52}} &= D_{2_{53}} = D_{2_{54}} = D_{2_{55}} = 0
\end{aligned}$$

□ Matrice \mathbf{D}_3 :

$$\begin{aligned}
D_{3_{11}} &= -2y(7x^2 - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{3_{12}} &= -(-y^2 + 2\sqrt{3}yx + x^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{3_{13}} &= (x^4 + 6x^3\sqrt{3}y - 4x^2y^2 - x^2z^2 - 2y^3\sqrt{3}x + 3y^4 - 2z^4 \\
&\quad - y^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\
D_{3_{14}} &= D_{3_{15}} = 0 \\
D_{3_{21}} &= (x^4 - 6x^3\sqrt{3}y - 4x^2y^2 - x^2z^2 + 2y^3\sqrt{3}x + 3y^4 - y^2z^2 \\
&\quad - 2z^4)(x^2 + y^2 + z^2) \\
D_{3_{22}} &= D_{3_{23}} = D_{3_{24}} = D_{3_{25}} = 0 \\
D_{3_{31}} &= -(x^2 - 2\sqrt{3}yx + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\
D_{3_{32}} &= D_{3_{33}} = D_{3_{34}} = D_{3_{35}} = D_{3_{41}} = D_{3_{42}} = D_{3_{43}} = 0 \\
D_{3_{44}} &= D_{3_{45}} = D_{3_{51}} = D_{3_{52}} = D_{3_{53}} = D_{3_{54}} = D_{3_{55}} = 0
\end{aligned}$$