

MARC GOUTTEFARDE

**ANALYSE DE L'ESPACE DES POSES POLYVALENTES  
DES MÉCANISMES PARALLÈLES ENTRAÎNÉS PAR  
CÂBLES**

Thèse présentée

à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de doctorat en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2005

# Résumé

Cette dissertation propose une analyse de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles. Ces mécanismes sont principalement constitués d'un effecteur mobile, d'une base fixe et de câbles reliant en parallèle l'effecteur à la base. Les câbles de longueurs variables permettent d'entraîner l'effecteur. Les mécanismes parallèles entraînés par câbles se distinguent de nombreux mécanismes par le fait que les câbles ne peuvent que tirer l'effecteur et pas le pousser. Aussi, l'étude de l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles tout torseur peut être équilibré par les câbles est fondamentale. Dans cette thèse, cet ensemble est appelé l'espace des poses polyvalentes. L'objectif principal de cette dissertation est de discuter de la nature et de la détermination de l'espace des poses polyvalentes.

Au chapitre 2, l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté entraînés par quatre câbles est étudié. Des propriétés fondamentales de cet espace y sont présentées, incluant la nature de ses frontières. Puis, une méthode qui détermine les coupes à orientation constante de l'espace des poses polyvalentes en trouvant leurs frontières est discutée. Un exemple illustre l'intérêt de cette méthode.

L'objectif principal du chapitre 3 est de généraliser les résultats et méthodes du chapitre 2 aux mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 4$ . Cette généralisation nécessite l'étude des différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans. Dans cette thèse, cette étude se veut exhaustive. Puis, les relations entre la géométrie du mécanisme et les poses polyvalentes associées aux différents types de configurations polyvalentes sont discutées. Finalement, la méthode de détermination des coupes à orientation constante de l'espace des poses polyvalentes

introduite au chapitre 2 est étendue au cas des mécanismes plans à trois degrés de liberté entraînés par un  $m$  câbles,  $m \geq 4$ .

Le dernier chapitre, le chapitre 4, est consacré à la détermination des coupes à orientation constante de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles à six degrés de liberté entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ . À partir d'une discussion des différents moyens disponibles permettant de caractériser les poses polyvalentes de l'effecteur et à la lumière des résultats obtenus dans le cas des mécanismes plans, nous montrons que la frontière des coupes à orientation constante de l'espace des poses polyvalentes est composée de parties de surfaces cubiques. Ce résultat permet d'obtenir une méthode qui détermine ces coupes à orientation constante par discrétisation de leurs frontières.

# Avant-propos

En guise d'avant propos, je tiens à remercier ceux qui ont contribué à faire de cette thèse une réalité.

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche, le professeur Clément Gosselin, pour avoir rendu ce travail possible par son soutien financier et par sa supervision de grande qualité, éclairée et motivante. Les discussions que nous avons lors de nos rencontres me manqueront beaucoup à de nombreux points de vue.

Mes plus vifs remerciements vont à mes parents qui m'ont permis et toujours encouragé à faire des études supérieures. Ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour sans l'ambiance favorable aux études qu'ils ont su créer depuis mon enfance. La chance qu'ils m'ont donnée est inestimable. Merci !

Je suis très heureux que Cristina, qui m'a admirablement soutenu pendant la rédaction de ma thèse et avec qui la vie est plus belle, apparaisse dans ces remerciements. J'espère que notre aventure se poursuivra bien au-delà de cet épisode québécois.

Je remercie les examinateurs de cette thèse, les professeurs Roger Boudreau, Jean-Pierre Merlet et Yves St-Amant pour avoir évalué avec attention et montré de l'intérêt pour ce travail et, de plus, pour l'avoir fait en respectant un délai serré, particulièrement le professeur Roger Boudreau qui a effectué la prélecture en un temps record.

Je remercie également tous les membres du laboratoire de robotique de l'Université Laval qui m'ont aidé tout au long de mon doctorat et avec qui j'ai travaillé et passé d'innombrables bons moments. Plus particulièrement, je remercie chaleureusement Boris, Bruno, Émilie, Félix, Ilian, Jean-Philippe, Lionel, Marc, Mathieu, Nicolas, Olivier,

Pierre-Luc, Samuel, Simon, Thierry, Yangnian et Xianwen. Je souhaite également bonne chance à Catherine, Cyril, Éric, Frédéric C., Frédéric P., Martin N., Martin O., Mehdi et Simon pour la suite de leurs études. Je tiens aussi à souligner les conditions de travail excellentes du laboratoire de robotique de l'Université Laval, conditions créées et entretenues par le professeur Clément Gosselin et par le travail de grande qualité des professionnels de recherche Boris Mayer-St-Onge, Simon Foucault et Thierry Laliberté.

Enfin, un clin d'oeil à « dans cette ambiance Mao Ze Dong » qui a mis en musique plusieurs soirées des longs hivers québécois.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>x</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Les mécanismes parallèles entraînés par câbles . . . . .	1
1.2 Plusieurs types d'espaces de travail . . . . .	6
1.3 Espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à 2 ddl .	8
1.4 Contributions de la thèse . . . . .	10
<b>2 Espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles</b>	<b>13</b>
2.1 Torseur appliqué par les câbles sur l'effecteur . . . . .	14
2.2 Caractérisation des poses polyvalentes . . . . .	17
2.2.1 Nombre minimal de câbles et théorème fondamental . . . . .	17
2.2.2 Noyau de la matrice des torseurs . . . . .	19
2.3 Propriétés de l'espace des poses polyvalentes à orientation constante . .	21
2.3.1 Un polygone convexe contenant l'espace des poses polyvalentes à orientation constante . . . . .	21
2.3.2 Propriétés . . . . .	25

2.4	Détermination de l'espace des poses polyvalentes . . . . .	31
2.4.1	Détermination par test d'un nuage de points . . . . .	31
2.4.2	Algorithme géométrique . . . . .	33
2.4.3	Intérêts et inconvénients des deux méthodes . . . . .	41
2.5	Exemples d'espaces des poses polyvalentes . . . . .	44
2.5.1	EPP et EPPOC inexistants . . . . .	44
2.5.2	Base et effecteur rectangulaires . . . . .	44
2.6	Conclusion . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de quatre câbles</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	52
3.1.1	Torseur appliqué à l'effecteur par $m \geq 4$ câbles . . . . .	52
3.1.2	Problématique . . . . .	52
3.2	Configurations polyvalentes des torseurs plans . . . . .	55
3.2.1	Quatre torseurs . . . . .	55
3.2.2	Cinq torseurs . . . . .	56
3.2.3	Six torseurs . . . . .	58
3.2.4	Plus de six torseurs . . . . .	59
3.3	Propriétés et nature de l'espace des poses polyvalentes . . . . .	60
3.3.1	Propriétés . . . . .	60
3.3.2	Relation entre les poses de l'effecteur et les configurations polyvalentes . . . . .	64
3.3.2.1	Configurations polyvalentes à quatre torseurs . . . . .	64
3.3.2.2	Configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs . . . . .	67
3.3.2.3	Configurations polyvalentes minimales à six torseurs . . . . .	74
3.3.3	Retour sur la propriété 7 . . . . .	76
3.4	Détermination de l'espace des poses polyvalentes et exemples . . . . .	77
3.4.1	Détermination de la réunion des ensembles $\mathcal{S}_{4i}$ . . . . .	77
3.4.2	Détermination des ensembles $\mathcal{S}_{5i}$ et $\mathcal{S}_{6i}$ . . . . .	83
3.4.3	Détermination de l'EPPOC . . . . .	84
3.4.4	Exemples . . . . .	85
3.4.5	Existence pratique des configurations polyvalentes minimales . . . . .	86
3.5	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Détermination de l'espace des poses polyvalentes à orientation constante des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles</b>	<b>92</b>

4.1	Modèle cinématique et torseur à l'effecteur . . . . .	93
4.1.1	Modèle et notations . . . . .	93
4.1.2	Matrice des torseurs . . . . .	93
4.1.3	Un polyèdre convexe contenant l'EPPOC . . . . .	95
4.2	Caractérisation des poses polyvalentes . . . . .	96
4.2.1	Mécanismes entraînés par sept câbles . . . . .	97
4.2.2	Mécanismes entraînés par $m \geq 7$ câbles . . . . .	100
4.3	Nature de la frontière de l'EPPOC . . . . .	106
4.4	Détermination de la frontière de l'EPPOC . . . . .	110
4.5	Conclusion . . . . .	120
<b>Conclusion</b>		<b>121</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>125</b>
<b>A Expression de vecteurs formant une base du noyau d'une matrice des torseurs</b>		<b>138</b>
A.1	Noyau d'une matrice de dimension $n$ par $n + 1$ . . . . .	139
A.2	Une base du noyau d'une matrice de dimension $n$ par $m$ , $m > n$ . . . . .	140
A.3	Preuve de la propriété 6 . . . . .	141
A.4	Preuve de la nature de la frontière de l'EPPOC . . . . .	143
<b>B Compléments sur les singularités de trois torseurs plans <math>\mathbf{w}_i</math></b>		<b>147</b>
B.1	Définition des vecteurs unitaires $\mathbf{d}_i$ . . . . .	148
B.2	Dégénérescence d'une conique associée aux singularités à orientation constante de trois torseurs $\mathbf{w}_i$ . . . . .	150
B.3	Lieu de dépendance linéaire de deux torseurs $\mathbf{w}_i$ . . . . .	155
<b>C Preuves des théorèmes 6, 7 et 8 du chapitre 3</b>		<b>158</b>
C.1	Preuve du théorème 6 . . . . .	158
C.1.1	Condition nécessaire . . . . .	159
C.1.2	Condition suffisante . . . . .	164
C.2	Configuration polyvalente « minimale » à cinq torseurs . . . . .	165
C.3	Preuve du théorème 7 . . . . .	167
C.3.1	Condition nécessaire . . . . .	167
C.3.2	Condition suffisante . . . . .	177
C.4	Configuration polyvalente « minimale » à six torseurs . . . . .	178
C.5	Preuve du théorème 8 . . . . .	179
C.5.1	Condition nécessaire . . . . .	179



C.5.2	Condition suffisante . . . . .	181
<b>D</b>	<b>Compléments au chapitre 4</b>	<b>183</b>
D.1	De la nature des configurations polyvalentes de huit vecteurs de $\mathbb{R}^6$ . . .	183
D.2	Preuve du théorème 15 . . . . .	187
D.3	Test des poses polyvalentes . . . . .	194
<b>E</b>	<b>Paramètres géométriques des mécanismes</b>	<b>198</b>
E.1	Mécanismes du chapitre 2 . . . . .	198
E.1.1	Mécanisme de la figure 2.3 . . . . .	199
E.1.2	Mécanisme de la figure 2.4 . . . . .	199
E.1.3	Mécanisme de la figure 2.5 . . . . .	200
E.1.4	Mécanisme de la figure 2.8 . . . . .	200
E.1.5	Mécanisme de la figure 2.11 . . . . .	200
E.1.6	Mécanisme de la figure 2.20 . . . . .	201
E.1.7	Mécanisme de la figure 2.23 . . . . .	201
E.1.8	Mécanisme de la figure 2.24 . . . . .	202
E.2	Mécanismes du chapitre 3 . . . . .	202
E.2.1	Mécanisme de la figure 3.5 . . . . .	203
E.2.2	Mécanisme de la figure 3.6 . . . . .	203
E.2.3	Mécanisme de la figure 3.7 . . . . .	204
E.2.4	Mécanisme de la figure 3.11 . . . . .	204
E.2.5	Mécanisme de la figure 3.16 . . . . .	204
E.2.6	Mécanisme de la figure 3.17 . . . . .	205
E.2.7	Mécanisme de la figure 3.18 . . . . .	205
E.2.8	Mécanisme de la figure 3.24 . . . . .	206
E.2.9	Mécanisme de la figure 3.29 . . . . .	206
E.3	Mécanismes du chapitre 4 . . . . .	207
E.3.1	Mécanisme de la figure 4.1 . . . . .	207
E.3.2	Mécanisme de la figure 4.7 . . . . .	208
E.3.3	Mécanisme de la figure 4.9 . . . . .	208

# Liste des tableaux

E.1	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.3. . . . .	199
E.2	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.4. . . . .	199
E.3	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.5. . . . .	200
E.4	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.8. . . . .	200
E.5	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.11. . . . .	201
E.6	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.20. . . . .	201
E.7	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.23. . . . .	202
E.8	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.24. . . . .	202
E.9	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.5 (en mm). . . . .	203
E.10	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.6. . . . .	203
E.11	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.7. . . . .	204
E.12	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.16. . . . .	205
E.13	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.17. . . . .	205
E.14	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.18. . . . .	206
E.15	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.24. . . . .	206
E.16	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.29. . . . .	207
E.17	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 4.1. . . . .	207
E.18	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 4.7. . . . .	208
E.19	Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 4.9. . . . .	208

# Liste des figures

1.1	Un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par huit câbles. . . . .	2
1.2	Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles dont certains sont croisés. . . . .	3
1.3	Un mécanisme parallèle à six ddl dont l'effecteur est suspendu par six câbles. . . . .	4
1.4	EPP de mécanismes parallèles plans à deux ddl entraînés par câbles. . .	9
1.5	Les deux types de configurations polyvalentes des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ . . . .	11
2.1	Principaux éléments d'un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles. . . . .	15
2.2	Modèle cinématique. . . . .	16
2.3	Exemple d'un mécanisme dont l'effecteur est dans une orientation telle que les quatre points $A_i^v$ sont alignés suivant $(L)$ . . . . .	22
2.4	Exemple d'un polygone convexe $\mathcal{P}_{f\phi}$ . . . . .	25
2.5	Mécanisme dont l'EPP est vide. . . . .	26
2.6	Une hyperbole divisant le plan en plusieurs régions. . . . .	29
2.7	Exemple d'un EPPOC composée de deux parties disjointes $\mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ . . . . .	30
2.8	Un mécanisme dont l'effecteur ne possède que deux points d'attache. . .	33
2.9	EPPOC obtenu par test d'un nuage de points. . . . .	34
2.10	Approximation de l'EPP du mécanisme montré à la figure 2.8. . . . .	34
2.11	Un mécanisme plan entraîné par quatre câbles dont l'effecteur a trois points d'attache. . . . .	36
2.12	Les quatre coniques associées au mécanisme et à l'orientation de son effecteur montrés à la figure 2.11. . . . .	37

2.13	Les 16 arcs finis des coniques de la figure 2.12. . . . .	38
2.14	Illustration de la méthode de test d'un arc de conique. . . . .	40
2.15	EPPOC déterminé par l'algorithme géométrique. . . . .	41
2.16	Approximation de l'EPP du mécanisme de la figure 2.11. . . . .	42
2.17	Quatre EPPOC du mécanisme de la figure 2.11 déterminés par l'algorithme géométrique (les orientations $\phi$ sont en degrés). . . . .	42
2.18	Superposition de la frontière de l'EPPOC et des points d'un nuage qui appartiennent à l'EPPOC. . . . .	43
2.19	Mécanisme entraîné par quatre câbles ayant une base et un effecteur rectangulaires. . . . .	45
2.20	Mécanisme dont la base est un carré et l'effecteur un rectangle. . . . .	46
2.21	Approximation de l'EPP du mécanisme montré à la figure 2.20. . . . .	46
2.22	EPP d'un mécanisme dont la base est carrée et dont l'effecteur n'a que deux points d'attache. . . . .	47
2.23	Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles croisés. . . . .	48
2.24	Un mécanisme à câbles croisés et son EPPOC composé de deux parties disjointes. . . . .	48
2.25	L'EPP du mécanisme montré à la figure 2.23. . . . .	49
3.1	Modèle cinématique d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par $m$ câbles. . . . .	53
3.2	Configurations de quatre torseurs dans leur espace à trois dimensions. . . . .	56
3.3	Exemples de configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs. . . . .	57
3.4	Une configuration polyvalente minimale à six torseurs. . . . .	59
3.5	Exemple d'un EPPOC composé de deux parties disjointes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ . . . . .	61
3.6	Exemple d'un polygone convexe $\mathcal{P}_{f\phi}$ d'un mécanisme plan entraîné par six câbles. . . . .	62
3.7	La réunion de cinq EPPOC associés aux mécanismes à quatre câbles obtenus du mécanisme à cinq câbles montré à la figure. . . . .	65
3.8	Une coupe à orientation constante de l'ensemble $\mathcal{S}_{41}$ . . . . .	66
3.9	Une coupe à orientation constante de l'ensemble $\mathcal{S}_{44}$ . . . . .	66
3.10	Une coupe à orientation constante de l'ensemble $\mathcal{S}_{45}$ . . . . .	66
3.11	L'EPPOC et le polygone $\mathcal{P}_{f\phi}$ d'un mécanisme plan entraîné par six câbles. . . . .	68
3.12	La réunion des ensembles $\mathcal{S}_{4i}$ et les ensembles de points $\mathcal{S}_{5i}$ obtenus pour le mécanisme et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 3.11. . . . .	69

3.13	Trois câbles attachés en un même point $B$ de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan. . . . .	70
3.14	Trois câbles tendus à partir d'un même point $A$ de la base d'un mécanisme parallèle plan. . . . .	71
3.15	Un mécanisme parallèle plan à trois câbles dont la base et l'effecteur sont homothétiques. . . . .	72
3.16	Des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs sur un arc de conique $\mathcal{D}$ . . . . .	73
3.17	Des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs dans une partie du plan d'aire non nulle $\mathcal{P}$ . . . . .	73
3.18	Un mécanisme plan à six câbles pour lequel une configuration polyvalente minimale à six torseurs existe. . . . .	76
3.19	Les $n_3 = 20$ coniques $\mathcal{C}_i$ obtenues pour le mécanisme et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 3.6. . . . .	80
3.20	Certains des arcs finis des 20 coniques $\mathcal{C}_i$ montrées à la figure 3.19. . . . .	80
3.21	L'ensemble $\mathcal{S}_4$ d'un mécanisme à six câbles pour une orientation constante de son effecteur. . . . .	81
3.22	L'ensemble $\mathcal{S}_4$ du mécanisme montré à la figure 3.21. . . . .	81
3.23	Frontière de l'ensemble $\mathcal{S}_4$ du mécanisme dont l'effecteur est dans l'orientation montrée à la figure 3.16. . . . .	82
3.24	Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par six câbles croisés. . . . .	86
3.25	L'EPP du mécanisme montré à la figure 3.24. . . . .	87
3.26	Comparaison des EPPOC pour $\phi = 40$ degrés. . . . .	87
3.27	L'EPPOC du mécanisme entraîné par six câbles croisés pour $\phi = 70$ degrés. . . . .	88
3.28	Trois parties disjointes constituant l'EPPOC du mécanisme entraîné par six câbles croisés pour $\phi = 75$ degrés. . . . .	88
3.29	Une géométrie légèrement modifiée pour laquelle il n'existe plus de configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs. . . . .	89
4.1	Un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles. . . . .	94
4.2	Notations. . . . .	94
4.3	Traces des cubiques de singularité $\mathcal{S}_i$ dans le plan $\mathcal{P}_0$ . . . . .	114
4.4	Les points d'intersection $I_i$ entre une droite $\mathcal{D}$ et les cubiques de singularité $\mathcal{S}_i$ dans un plan $\mathcal{P}_z$ . . . . .	115

4.5	L'EPPOC du mécanisme montré à la figure 4.1 pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure (orientation de référence). . . . .	116
4.6	L'EPPOC du mécanisme montré à la figure 4.1 pour une orientation de l'effecteur obtenue de son orientation de référence par rotation de $\pi/12$ autour d'un axe appartenant au plan de l'effecteur. . . . .	117
4.7	L'EPPOC du robot Falcon obtenu pour l'orientation de référence de son effecteur montrée à la figure. . . . .	118
4.8	L'EPPOC du robot Falcon obtenu pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure. . . . .	118
4.9	L'EPPOC d'un mécanisme entraîné par huit câbles obtenu pour l'orientation de référence de son effecteur. . . . .	119
4.10	L'EPPOC d'un mécanisme entraîné par huit câbles obtenu pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure. . . . .	119
B.1	Un cas où la conique $\mathcal{C}$ est une ellipse. . . . .	149
C.1	Trois des quatre $\mathbf{w}_i$ appartenant au plan $\mathcal{P}$ sont dans une configuration polyvalente. . . . .	176
C.2	Une configuration polyvalente minimale dans le plan vectoriel $\mathcal{P}$ . . . . .	177

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Les mécanismes parallèles entraînés par câbles

Un mécanisme parallèle entraîné par câbles est principalement constitué d'un effecteur mobile, d'une base et de câbles qui relient en parallèle l'effecteur à la base. Généralement, la base est fixe, chaque câble est attaché à l'effecteur à une de ses extrémités et s'enroule autour d'une poulie actionnée solidaire de la base à son autre extrémité. Par le contrôle des longueurs de câbles déroulées, les poulies actionnées permettent de contrôler la pose de l'effecteur, c'est-à-dire sa position et son orientation. Une représentation schématique d'un mécanisme parallèle à six ddl (degrés de liberté) entraîné par huit câbles est montrée à la figure 1.1. L'effecteur de ce mécanisme est représenté par un parallélépipède rectangle tandis que sa base est cubique. Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles, dont certains sont croisés,

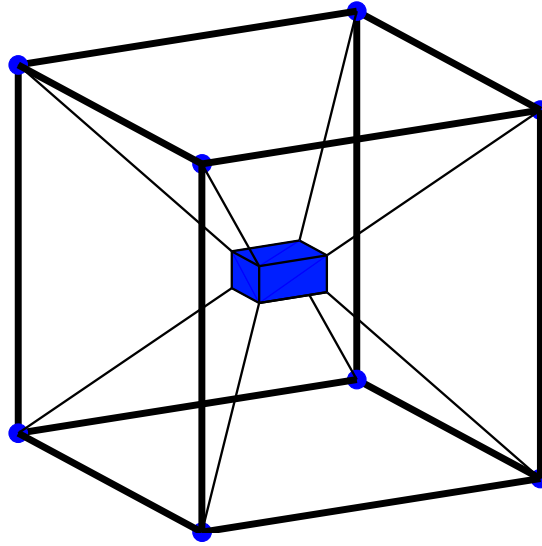


FIG. 1.1 – Un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par huit câbles.

est montré à la figure 1.2. Pour ce type de mécanisme, l'effecteur doit être contraint à évoluer dans un plan, les poulies actionnées permettant, par l'intermédiaire des câbles, de contrôler les degrés de liberté de l'effecteur dans le plan.

Cette thèse concerne les mécanismes dont l'effecteur est relié à la base par des câbles uniquement. De plus, tous les câbles sont actionnés et le nombre de câbles sera toujours supérieur au nombre de ddl de l'effecteur pour des raisons que nous expliquerons à la section 2.2.1. Cependant, l'idée d'étendre à plusieurs ddl le principe d'une grue est une des origines des mécanismes parallèles entraînés par câbles. L'effecteur à  $n$  ddl des mécanismes issus de cette idée est suspendu par  $n$  ou moins de  $n$  câbles. On parle alors de mécanisme suspendu par câbles. Un mécanisme de ce type est montré à la figure 1.3. Remarquons que, à la différence de la figure 1.1, les câbles n'entourent pas l'effecteur et que le poids de l'effecteur et celui de la charge permettent, sous certaines conditions, de garder les câbles en tensions. Basé sur ce principe, le RoboCrane [2] fait partie des premiers robots proposés dans la littérature utilisant un mécanisme parallèle entraîné par câbles. L'effecteur du RoboCrane a six ddl et est suspendu par six câbles. Le RoboCrane a été proposé pour différentes applications telles que celles présentées dans [18, 19, 20]. Dans [120], l'utilisation d'un mécanisme à six ddl suspendu



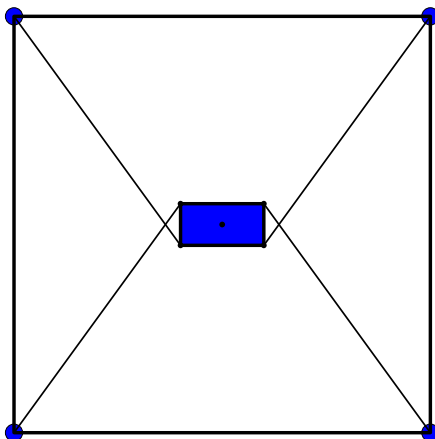


FIG. 1.2 – Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles dont certains sont croisés.

par six câbles (plate-forme de Gough-Stewart suspendu par câbles) dans un système de construction automatisé est discutée. Par ailleurs, la conception et le contrôle des mécanismes parallèles à six ddl suspendus par six câbles sont discutés dans [3] et [92], respectivement. Les références [42] et [71] présentent des stratégies de contrôle d'une grue robotique utilisant trois câbles actionnés indépendamment, les systèmes d'enroulement des trois câbles pouvant se déplacer sur des rails. Notons que les mécanismes dont l'effecteur possède plus de ddl que de câbles qui le suspendent posent des problèmes de cinématique [4, 70, 90, 132], de planification de trajectoire et de contrôle [133]. Finalement, une discussion sur la stabilité des poses de l'effecteur de ce type de mécanisme peut être trouvée dans [17].

Il existe d'autres mécanismes parallèles entraînés par câbles qui ne sont pas directement concernés par le travail présenté dans cette thèse parce que les câbles ne sont pas seuls à relier la base et l'effecteur du mécanisme. Par exemple, l'effecteur peut être entraîné par des câbles et par un ou plusieurs actionneurs linéaires tels que des vérins [5, 47, 66, 67], ces derniers permettant de garder les câbles tendus. Dans [24], l'effecteur est connecté à la base par des câbles et par un joint de cardan et une liaison glissière. La référence [69] présente un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par six câbles de longueurs constantes, le manipulateur WARP. Chaque câble du WARP est attaché à l'effecteur à une de ses extrémités et à un bras actionné à son autre extrémité.

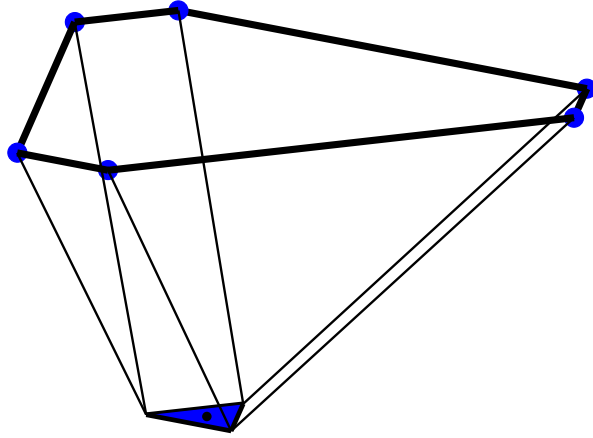


FIG. 1.3 – Un mécanisme parallèle à six ddl dont l’effecteur est suspendu par six câbles.

Dans [9, 10] et [51], les auteurs proposent des mécanismes parallèles entraînés par câbles où les câbles sont utilisés pour entraîner l’effecteur mais également pour contraindre certains de ses ddl. Un vérin reliant la base et l’effecteur par des joints de cardan permet de tendre les câbles. Finalement, notons également l’existence de mécanismes en chaînes cinématiques ouvertes et/ou fermées dont les corps sont reliés à une base fixe par des câbles actionnés [55, 57, 86].

Les mécanismes parallèles entraînés par câbles ont plusieurs avantages par rapport à la plupart des mécanismes parallèles à membres rigides. La masse et l’inertie de la partie mobile du mécanisme sont réduites étant donné que, tant que les dimensions du mécanisme sont raisonnables, les câbles sont légers. Ainsi, les mécanismes parallèles entraînés par câbles peuvent générer de grandes accélérations à l’effecteur ou consommer peu d’énergie. Ils sont plus faciles à construire et à transporter. Leur géométrie (positions des poulies actionnées à la base et positions des points d’attache des câbles sur l’effecteur) peut être plus facilement modifiée. De plus, ils sont généralement moins cher. Les mécanismes parallèles entraînés par câbles ont également le potentiel pour travailler dans un espace important étant donné que de grandes longueurs de câbles peuvent être enroulées sur des poulies. Finalement, l’entraînement par câbles permet d’appliquer ces mécanismes à différentes échelles telles que celles d’un manipulateur industriel, d’une grue ou même d’un radiotélescope géant [28].

Ces avantages font des mécanismes parallèles entraînés par câbles des candidats à de nombreuses applications. Dans [49] et [50], le développement d'un manipulateur parallèle à six ddl, le robot Falcon, ainsi que son application à la robotique ultra rapide sont discutés. Les travaux rapportés dans [109, 110] et [115] proposent d'appliquer des mécanismes parallèles entraînés par câbles à la simulation de mouvement. Ces mécanismes présentent également plusieurs avantages lorsque appliqués à la réalisation de systèmes haptiques ou de systèmes à retour d'efforts [23, 35, 37, 38, 52, 53, 75, 76, 84, 85, 97, 124]. Remarquons que [37, 38] discutent d'une conception particulière pour laquelle les câbles peuvent s'enrouler autour de l'effecteur cylindrique, permettant ainsi de grands débattements en orientation. Les mécanismes parallèles entraînés par câbles ont été proposés et/ou appliqués à un robot maître d'un système maître esclave [48], à une suspension active d'un avion en soufflerie [12, 61, 62, 63], au déplacement de la plate-forme focale de radiotélescopes géants [28, 36, 25, 104], à un système de déminage [114], à des systèmes de réhabilitation [44, 106] et au déplacement de débris suite à un tremblement de terre [108]. Plusieurs brevets existent également, par exemple [1, 6, 66, 74, 113]. En outre, la recherche sur les mécanismes parallèles entraînés par câbles est active et plusieurs travaux ont été publiés récemment [8, 10, 21, 23, 43, 55, 89, 91, 115].

Cependant, les mécanismes parallèles entraînés par câbles ont plusieurs particularités et inconvénients qui sont principalement dus à l'unilatéralité de la transmission permise par les câbles et à la souplesse des câbles. À ce propos, des discussions générales intéressantes peuvent, notamment, être trouvées dans [29, 43, 67, 83, 116]. Le problème géométrique direct (déterminer la pose de l'effecteur connaissant les longueurs des câbles) des mécanismes parallèles entraînés par câbles est complexe comme celui de la majorité des mécanismes parallèles [79]. Notons que, quand le nombre de câbles est supérieur au nombre de ddl de l'effecteur, le problème géométrique direct peut être simplifié par certains choix des positions des points d'attache des câbles sur l'effecteur [34]. De plus, la mesure de la pose d'un corps par résolution du problème géométrique direct d'un mécanisme parallèle à câbles est l'objet des discussions présentées dans [45, 46, 112, 130, 131]. La planification de trajectoire ainsi que le contrôle des mécanismes parallèles entraînés par câbles sont discutés dans [21, 30, 31, 39, 54, 63, 88, 89, 100, 101, 118]. Les interférences ou collisions entre segments d'un mécanisme parallèle peuvent limiter son espace de travail [77]. Ainsi, les interférences entre les câbles peuvent également limiter l'espace de travail d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles, notamment quand les câbles sont nombreux et croisés. Une méthode permettant de déterminer les parties de l'espace de travail dans lesquelles des interfé-

rences entre câbles se produisent a été proposée dans [82]. Notons que des interférences entre les câbles et l'effecteur ainsi que des interférences entre les câbles et l'environnement du mécanisme peuvent également limiter l'espace de travail. Par ailleurs, des analyses de la raideur de mécanismes parallèles entraînés par câbles sont présentées dans [10, 24, 27, 64, 105] tandis que des indices de performances et la dextérité de ces mécanismes sont discutés dans [58, 59, 60, 99, 111, 135]. En outre, quelques publications discutent de la conception des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par plus de six câbles. Par exemple, dans [26, 107, 110], des géométries optimales sont recherchées tandis qu'une démarche de conception par optimisation d'un indice de performance est présentée dans [111]. Finalement, notons que les mécanismes parallèles entraînés par câbles peuvent être sujets à des problèmes de vibration, notamment, lorsqu'ils sont utilisés dans des applications de robotique ultra rapide. Ce problème important ne semble pas avoir été beaucoup traité dans la littérature concernant la robotique et les mécanismes. Nous pouvons néanmoins citer les travaux présentés dans [49, 50, 56].

## 1.2 Plusieurs types d'espaces de travail

L'espace de travail d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles est limité par les longueurs totales des câbles. Cependant, étant donné qu'il est possible d'enrouler un câble très long autour d'une poulie, l'espace de travail sera plutôt limité par le caractère unilatéral des forces appliquées par les câbles sur l'effecteur, c'est-à-dire par le fait que les câbles ne peuvent que tirer l'effecteur et pas le pousser. Aussi, l'espace de travail peut être défini comme l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles certaines conditions sur des torseurs à générer à l'effecteur et sur des tensions minimales et/ou maximales dans les câbles doivent être respectées. Par exemple, l'espace de travail défini comme l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles un torseur particulier peut être équilibré en tirant l'effecteur avec les câbles est étudié dans [7, 8, 117] dans le cas des mécanismes plans à trois ddl et dans [123] dans le cas de mécanismes à trois ddl en orientation dont l'effecteur est relié à la base par des câbles et par une liaison sphérique. Si ce torseur particulier est le poids de l'effecteur et que ce dernier n'est soumis à aucun autre effort extérieur, l'espace de travail précédemment défini correspond à l'ensemble des poses où l'équilibre statique de l'effecteur est possible. Dans [32] et [33], cet espace de travail est considéré afin de choisir la géométrie de mécanismes parallèles plans à trois ddl d'architectures particulières. Une condition qui permet de tester si une pose

appartient à cet espace des équilibres statiques est présentée dans [94] dans le cas des mécanismes à six ddl. Dans [16, 29, 93], un autre espace de travail est défini. Cet espace, appelé « wrench feasible workspace », est l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles tout torseur d'un ensemble de torseurs peut être généré en tendant les câbles tel que les tensions qui en résultent ne dépassent pas certaines valeurs maximales. Ainsi, cette définition est très générale. Par exemple, si l'ensemble de torseurs à générer est réduit à un seul torseur et que les tensions maximales à ne pas dépasser deviennent infinies, on se ramène au cas étudié dans [7, 8, 117, 123]. La détermination du « wrench feasible workspace » dans le cas simple des mécanismes parallèles plans à deux ddl entraînés par deux câbles et pour une géométrie particulière de l'ensemble de torseurs à générer est présentée dans [93]. Dans le cas des mécanismes possédant des ddl en position et en orientation et, surtout, dans le cas des mécanismes possédant plus de câbles que de ddl, la détermination du « wrench feasible workspace » représente un défi important.

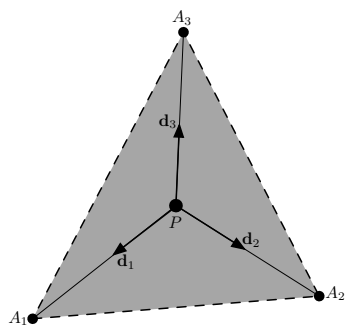
*L'espace de travail des mécanismes parallèles entraînés par câbles étudié dans cette thèse est appelé l'espace des poses polyvalentes (EPP) et correspond à l'ensemble des poses de l'effecteur pour lesquelles n'importe quel torseur peut être généré à l'effecteur en tendant les câbles du mécanisme, les tensions dans les câbles n'étant pas limitées.* À la différence des espaces de travail définis au paragraphe précédent, l'EPP ne dépend pas du choix d'un torseur particulier ou d'un ensemble de torseurs à générer et/ou de tensions maximales à ne pas dépasser. Ainsi, il est une propriété du mécanisme seulement, c'est-à-dire qu'il ne dépend que du nombre de câbles, des positions des poulies actionnées à la base et des positions des points d'attache des câbles sur l'effecteur. En d'autres termes, *l'EPP ne dépend que de la géométrie du mécanisme.* À l'intérieur de l'EPP, l'effecteur du mécanisme est complètement contraint par les câbles. Étant donné que cette propriété est essentielle à de nombreuses applications, la détermination de l'EPP est un outil fondamental à l'analyse et à la conception des mécanismes parallèles entraînés par câbles. Par ailleurs, les câbles ne pouvant que tirer l'effecteur, une condition nécessaire à l'existence de l'EPP est : le nombre de câbles entraînant l'effecteur du mécanisme doit être supérieur à son nombre de ddl [48, 59, 83]. Par exemple, un mécanisme parallèle à six ddl doit être entraîné par au moins sept câbles. Aussi, dans la suite de cette thèse, nous ne considérerons que des mécanismes ayant plus de câbles que de ddl. L'EPP est connu sous différentes appellations dans, par exemple, [7, 29, 38, 50, 94, 103, 119, 127, 129]. Le nom espace des configurations polyvalentes est dû à [7]. Cependant, malgré son importance et au meilleur de notre

connaissance, aucune étude n'a été spécifiquement dédiée à l'analyse des propriétés et à la détermination de l'EPP des mécanismes parallèles entraînés par câbles. Cette thèse tente de combler ce vide, au moins en partie.

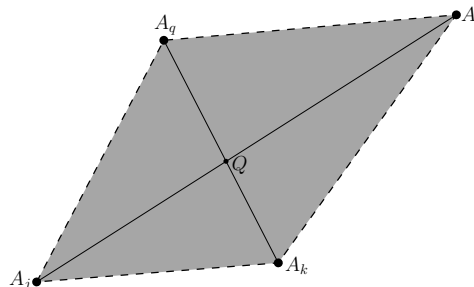
Avant d'introduire l'EPP de façon plus précise en considérant le cas des mécanismes parallèles plans à deux degrés de liberté, notons que les mécanismes parallèles entraînés par câbles et les mains robotiques, dont les points de contact entre doigts et objet saisi sont sans frottement, ont un point commun important. En effet, les câbles ne peuvent que tirer l'effecteur tandis que les doigts ne peuvent que pousser l'objet [48, 59]. Plus de détails concernant ce point commun peuvent être trouvés dans les discussions intéressantes proposées dans [29] et [121].

### 1.3 Espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à 2 ddl

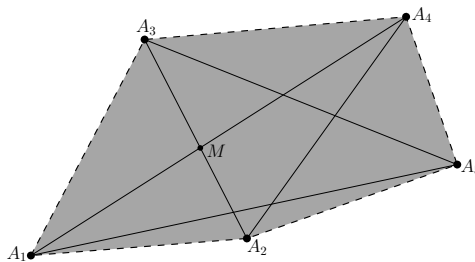
Un exemple permettant d'introduire la notion d'EPP par des considérations géométriques uniquement est celui des mécanismes parallèles plans à deux ddl entraînés par câbles. Un mécanisme de ce type, entraîné par trois câbles, est montré à la figure 1.4 (a). L'effecteur ponctuel  $P$  de ce mécanisme est relié à la base par trois câbles. Les trois câbles sont attachés en  $P$  et s'enroulent aux points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  de la base tel que montré à la figure 1.4 (a). Les câbles permettent ainsi de contrôler les deux ddl du point  $P$ , c'est-à-dire la position du point  $P$  dans le plan du mécanisme. Dans ce cas simple, l'EPP devient l'ensemble des positions du point  $P$  pour lesquelles toute force peut être appliquée au point  $P$  par les câbles. Or, considérons, par exemple, les câbles 1 et 2 dirigés par les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  montrés à la figure 1.4 (a). Ces deux câbles ne pouvant que tirer l'effecteur ponctuel  $P$ , les forces qu'ils sont capables d'appliquer en  $P$  sont celles comprises dans le secteur angulaire  $A_1PA_2$ . De même, les forces que les câbles 1 et 3 peuvent générer en  $P$  sont celles comprises dans le secteur angulaire  $A_1PA_3$  tandis que toutes les forces comprises dans le secteur angulaire  $A_2PA_3$  peuvent être obtenues en tendant les câbles 2 et 3. Ainsi, la position de  $P$  montrée à la figure 1.4 (a) appartient à l'EPP étant donné que, pour cette position de  $P$ , les trois secteurs angulaires  $A_iPA_j$  engendrent tout le plan. De plus, on constate géométriquement que l'EPP est l'intérieur du triangle  $\Delta A_1A_2A_3$  montré en gris à la figure 1.4 (a). Quand  $P$  est situé à



(a) Un mécanisme parallèle plan à deux ddl entraîné par trois câbles.



(b) L'EPP d'un mécanisme entraîné par quatre câbles.



(c) L'EPP d'un mécanisme entraîné par cinq câbles.

FIG. 1.4 – EPP de mécanismes parallèles plans à deux ddl entraînés par câbles.

l'intérieur du triangle  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , c'est-à-dire, quand  $P$  appartient à l'EPP, les vecteurs unitaires  $\mathbf{d}_i$  qui dirigent les câbles sont dans une configuration polyvalente telle que celle montrée à la figure 1.5 (a). Remarquons que dans ce cas simple, il est évident que si seulement un ou deux câbles étaient attachés au point  $P$ , l'EPP n'existerait pas.

À présent, considérons le cas des mécanismes parallèles plans à deux ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m > 3$ . Étant donné que si trois câbles peuvent générer n'importe quelle force, les  $m$  câbles le peuvent également, alors, la réunion de l'intérieur des triangles  $\Delta A_i A_j A_k$  appartient à l'EPP. Ainsi, à la figure 1.4 (b), tous les points situés à l'intérieur du polygone de sommets  $A_j$ ,  $A_k$ ,  $A_l$  et  $A_q$ , excepté le point d'intersection des diagonales  $Q$ , appartiennent à l'EPP du mécanisme parallèle à deux ddl entraînés par quatre câbles s'enroulant aux points  $A_j$ ,  $A_k$ ,  $A_l$  et  $A_q$ . Géométriquement, on constate que tout

point situé sur les côtés ou à l'extérieur du polygone de sommets  $A_j$ ,  $A_k$ ,  $A_l$  et  $A_q$  n'appartient pas à l'EPP. En outre, au point  $Q$ , les quatre vecteurs unitaires  $\mathbf{d}_i$  qui dirigent les câbles du mécanisme sont dans une configuration telle que celle montrée à la figure 1.5 (b). Or, dans une telle configuration, tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  peut être engendré par une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de deux des quatre  $\mathbf{d}_i$ . Aussi, le point  $Q$  appartient à l'EPP des poses polyvalentes qui, par conséquent, est l'intérieur du polygone de sommets  $A_j$ ,  $A_k$ ,  $A_l$  et  $A_q$ . De plus, la configuration polyvalente des vecteurs  $\mathbf{d}_i$  montrée à la figure 1.5 (b) est telle qu'aucune combinaison de trois des  $\mathbf{d}_i$  est dans une configuration polyvalente : les configurations polyvalentes montrées aux figures 1.5 (a) et (b) sont deux types différents de configuration polyvalente. En outre, il peut être prouvé qu'il n'en existe pas d'autre dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . Finalement, l'EPP d'un mécanisme entraîné par cinq câbles est montré à la figure 1.4 (c). Cette fois-ci, cet EPP peut être obtenu par réunion de l'intérieur des triangles  $\Delta A_i A_j A_k$ . En effet, par exemple, le point  $M$  montré à la figure 1.4 (c) est à l'intersection de deux diagonales mais en même temps à l'intérieur du triangle  $\Delta A_1 A_3 A_5$  et ceci est vrai pour les cinq points d'intersection entre diagonales.

En conclusion, l'EPP d'un mécanisme parallèle plan à deux ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m \geq 3$ , est l'intérieur du plus grand polygone convexe dont les sommets sont au moins trois des points  $A_i$  auxquels les câbles s'enroulent à la base. Ce résultat peut être prouvé de façon formelle.

## 1.4 Contributions de la thèse

La contribution principale de cette thèse consiste en une étude détaillée de l'EPP des mécanismes parallèles entraînés par câbles. Cet espace n'existant pas quand le nombre de ddl du mécanisme est supérieur ou égal au nombre de câbles entraînant l'effecteur, cette thèse ne concerne que les mécanismes à  $n$  ddl entraînés par  $m$  câbles où  $m > n$ . De plus, les mécanismes considérés sont ceux dont l'effecteur est relié à la base par des câbles uniquement, au moins  $n + 1$  de ces câbles devant être actionnés.

Dans un premier temps, l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles est étudié. Plus particulièrement, plusieurs propriétés fondamentales de l'EPP sont présentées. Ces propriétés permettent de mieux comprendre sa nature. De



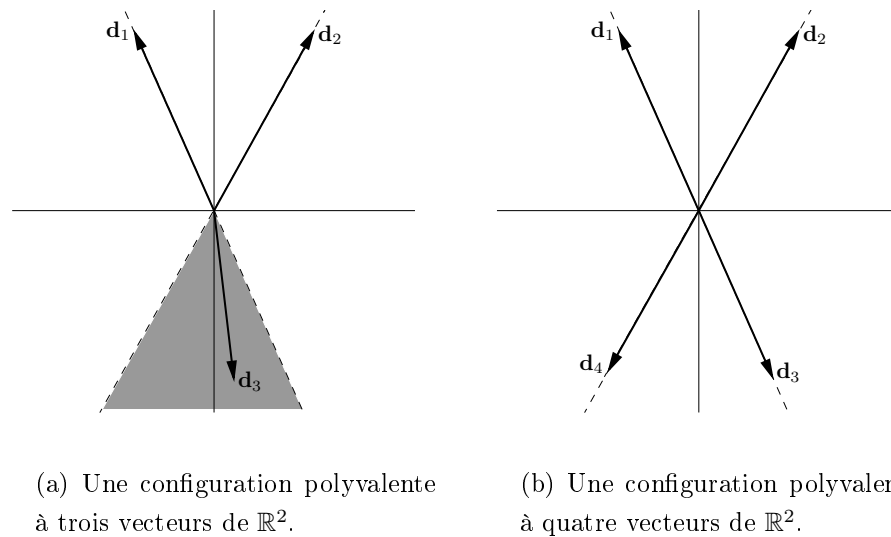


FIG. 1.5 – Les deux types de configurations polyvalentes des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .

plus, certaines d'entre elles sont essentielles à sa détermination. Il est notamment prouvé que les frontières des coupes à orientation constante de l'EPP sont composées d'arcs de coniques. Tirant avantage de ce résultat, une méthode géométrique de détermination des coupes à orientation constante de l'EPP est proposée. Cette méthode permet d'obtenir une bonne approximation de l'EPP de tout mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles.

Puis, l'étude de l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl est généralisée aux mécanismes dont l'effecteur est entraîné par plus de quatre câbles. Étant donné que l'EPP de ces mécanismes est composé de poses polyvalentes du même type que celles étudiées dans le cas des mécanismes entraînés par quatre câbles mais aussi d'autres types de poses polyvalentes n'existant pas quand le mécanisme est entraîné par moins de cinq ou six câbles, une étude exhaustive des différents types de poses polyvalentes est présentée. De plus, l'existence ainsi que la répartition au sein des coupes à orientation constante de l'EPP de ces différents types de poses polyvalentes sont discutées. Une conséquence de cette étude est que les frontières des coupes à orientation constante de l'EPP sont composées d'arcs de coniques de même nature que ceux composant la frontière des coupes à orientation constante de l'EPP des mécanismes entraînés par quatre câbles. Ce résultat permet de généraliser la méthode géométrique à l'approximation de l'EPP de tout mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par au moins quatre câbles.

Dans la troisième et dernière partie de la thèse, l'étude de l'EPP des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ , est abordée. Il y est démontré que les frontières des coupes à orientation constante de l'EPP sont composées de parties de surfaces cubiques. De plus, ces surfaces cubiques sont de même nature que les lieux de singularité à orientation constante des mécanismes parallèles communément appelés plate-formes de Gough-Stewart. Basée sur une méthode connue de détermination des équations de ces surfaces, une méthode qui permet de déterminer les coupes à orientation constante de l'EPP de tout mécanisme parallèle à six ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ , est présentée. Cette méthode consiste à discrétiser les frontières de ces coupes produisant ainsi une représentation graphique de qualité.

Notons que les paramètres géométriques des mécanismes illustrant les chapitres 2, 3 et 4 sont présentés à l'annexe E.

Finalement, notons également que nous avons essayé de ne présenter que des résultats démontrés rigoureusement en annexe de cette thèse ou ailleurs, dans des publications et des livres auxquels nous essayons de faire référence le plus justement possible.

# Chapitre 2

## Espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles

En se basant sur un modèle cinématique simple et sur une caractérisation connue mais sous-exploitée de l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles, ce chapitre présente des propriétés fondamentales de cet espace ainsi qu'une méthode géométrique permettant de déterminer ses coupes à orientation constante. Des exemples sont également présentés.

## 2.1 Torseur appliqué par les câbles sur l'effecteur

Un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles est montré schématiquement à la figure 2.1. Il est principalement constitué de quatre poulies actionnées, de quatre câbles et d'un effecteur. En général, les câbles s'enroulent sur les poulies, fixées à la base du mécanisme, et sont attachés à l'effecteur, chaque câble possédant sa propre poulie. Inversement, les câbles peuvent être attachés à la base et enroulés sur des poulies embarquées dans l'effecteur mais cette deuxième possibilité possède le désavantage important d'augmenter considérablement la masse de la partie mobile du mécanisme. Supposons que le point  $A_i$  auquel un câble s'enroule sur sa poulie est fixe par rapport à la base et supposons également que le point  $B_i$  auquel ce même câble s'attache est fixe par rapport à l'effecteur. Le câble  $i$  est tendu entre les points  $A_i$  et  $B_i$  et est supposé être identique au segment de droite  $[A_i B_i]$ . Les points de contact  $A_i$  et  $B_i$  sont modélisés par des liaisons pivots dont les axes sont perpendiculaires au plan du mécanisme. Ces hypothèses conduisent au modèle cinématique d'un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles montré à la figure 2.2. Le repère de référence d'origine  $O$  et de base orthonormée  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est fixe par rapport à la base du mécanisme. En choisissant un point de référence  $P$  de l'effecteur, nous obtenons le repère mobile  $(P, \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  lié à l'effecteur tel que montré à la figure 2.2, les deux vecteurs  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y}'$  étant unitaires. Remarquons que dans toute la thèse, les lettres minuscules en caractères gras désigneront des vecteurs tandis que les lettres majuscules en caractères gras désigneront des matrices. A présent, soit  $\mathbf{p} = [x, y]^T$  le vecteur position de  $P$  dans le repère de référence et soit  $\phi$  l'angle entre le vecteur fixe  $\mathbf{x}$  et le vecteur mobile  $\mathbf{x}'$ . La position et l'orientation de l'effecteur seront respectivement représentées par  $\mathbf{p}$  et  $\phi$ . Soit également  $\rho_i = \|\overrightarrow{A_i B_i}\|$  la longueur de la partie tendue du câble  $i$ ,  $\mathbf{a}_i$  le vecteur position du point  $A_i$  dans le repère de référence et  $\mathbf{b}_i$  la projection du vecteur  $\overrightarrow{P B_i}$  dans ce même repère. Associons au câble  $i$  le vecteur unitaire  $\mathbf{d}_i$  d'origine  $B_i$  dirigé le long de la droite  $(A_i B_i)$  de  $B_i$  vers  $A_i$

$$\mathbf{d}_i = \frac{1}{\rho_i}(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i - \mathbf{p}) = \frac{1}{\rho_i}(\mathbf{a}_i^v - \mathbf{p}) \quad (2.1)$$

avec

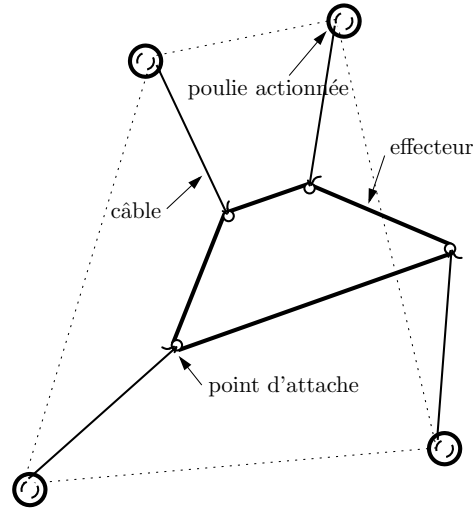


FIG. 2.1 – Principaux éléments d'un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles.

$$\mathbf{a}_i^v = \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{a}_i^v$  est fonction de la géométrie du mécanisme et de l'orientation  $\phi$  de son effecteur. Pour une orientation donnée de l'effecteur, le point  $A_i^v$ , de vecteur position  $\mathbf{a}_i^v$ , est un point fixe du plan tel que le câble  $i$  est complètement enroulé quand  $P \equiv A_i^v$ . Ainsi, quand  $P \equiv A_i^v$ , les points  $A_i$  et  $B_i$  sont confondus. Nous verrons par la suite que les points  $A_i^v$  ont leur importance dans la détermination de l'EPP. Remarquons que, quand  $P \equiv A_i^v$ ,  $\rho_i = 0$  et l'équation (2.1) n'a plus de sens. Le vecteur  $\mathbf{d}_i$  est alors défini comme étant le vecteur nul. La justification de cette définition est présentée à la section B.1 de l'annexe B. Remarquons également qu'en pratique les points  $A_i^v$  sont généralement à éviter puisqu'en ces points l'effecteur est en contact avec une des poulies du mécanisme ( $A_i \equiv B_i$ ).

Le câble tendu  $i$  applique sur l'effecteur du mécanisme un torseur dont la réduction au point de référence  $P$  de l'effecteur est  $t_i \mathbf{w}_i$ . Le vecteur  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^3$  est défini par

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \det(\mathbf{b}_i, \mathbf{d}_i) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

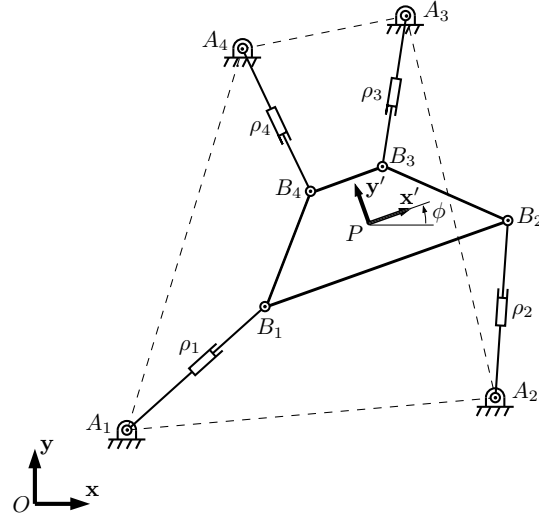


FIG. 2.2 – Modèle cinématique.

où  $t_i$  est la tension dans le câble  $i$  et où la notation  $\det$  désigne le déterminant. Le scalaire  $t_i$  est toujours positif ou nul. La réduction en  $P$ ,  $\mathbf{w}_p$ , du torseur appliqué par les quatre câbles sur l'effecteur est la somme des torseurs  $t_i \mathbf{w}_i$  et s'écrit, sous forme matricielle

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{W} \mathbf{t} \quad (2.4)$$

avec

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur des tensions dans les câbles et  $\mathbf{W}$  la matrice qui associe le torseur  $\mathbf{w}_p$  appliqué par les câbles sur l'effecteur aux tensions qui le génèrent. La matrice  $\mathbf{W}$  est fonction de la géométrie du mécanisme et de la pose de son effecteur. Elle sera appelée *matrice des torseurs* car, pour tout entier  $i$ , sa  $i^e$  colonne correspond à la réduction en  $P$  du torseur appliqué sur l'effecteur par le câble  $i$  soumis à une tension unitaire.

Définissons également la matrice  $\mathbf{W}^*$  par

$$\mathbf{W}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^* & \mathbf{w}_2^* & \mathbf{w}_3^* & \mathbf{w}_4^* \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{w}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^v - \mathbf{p} \\ \det(\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_i^v - \mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.6)$$

Ainsi, on a

$$\frac{\mathbf{w}_i^*}{\rho_i} = \mathbf{w}_i. \quad (2.7)$$

Dorénavant, pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ , les notations  $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{v} < \mathbf{0}$  signifieront que toutes les composantes de  $\mathbf{v}$  sont, respectivement, strictement positives, positives ou nulles et strictement négatives.

## 2.2 Caractérisation des poses polyvalentes

Cette section présente trois théorèmes qui sont à la base de l'étude de l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles proposée dans ce chapitre.

### 2.2.1 Nombre minimal de câbles et théorème fondamental

Une pose polyvalente de l'effecteur d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles est une pose dans laquelle n'importe quel torseur  $\mathbf{w}_p$  peut être généré à l'effecteur en tendant les câbles du mécanisme. L'EPP est l'ensemble de ces poses. En s'appuyant sur la modélisation et les notations de la section 2.1, nous pouvons énoncer une définition plus précise de l'EPP.

**Définition 1** *L'espace des poses polyvalentes (EPP) d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par câbles est l'ensemble des poses de son effecteur en lesquelles, pour tout torseur  $\mathbf{w}_p \in \mathbb{R}^n$ , il existe au moins un vecteur  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{w}_p = \mathbf{W}\mathbf{t}$ .*

Ajoutons immédiatement une deuxième définition.

**Définition 2** *L'espace des poses polyvalentes à orientation constante (EPPOC) d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par câbles est, pour une orientation donnée de son effecteur, l'ensemble des positions de ce dernier en lesquelles, pour tout torseur  $\mathbf{w}_p \in \mathbb{R}^n$ , il existe au moins un vecteur  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{w}_p = \mathbf{W}\mathbf{t}$ .*

Le présent chapitre s'intéresse aux mécanismes parallèles plans à 3 ddl entraînés par quatre câbles étant donné que, d'une part, les mécanismes plans entraînés par un ou deux câbles ont moins que 3 ddl et que, d'autre part, un mécanisme plan entraîné par trois câbles ne peut pas avoir d'EPP. En effet, la matrice des torseurs d'un mécanisme entraîné par trois câbles est une matrice carrée. Par conséquent, même quand cette matrice n'est pas singulière, de nombreux torseurs ne peuvent pas être générés à l'effecteur puisque, pour tout torseur obtenu en tirant l'effecteur avec les câbles, la génération de l'opposé de ce torseur nécessite de pousser l'effecteur avec les câbles, ce qui est impossible. Nous en déduisons que, dans le cas des mécanismes à trois ddl, quatre est le minimum de câbles nécessaire à l'existence de l'EPP. Ce résultat est connu et peut être généralisé de la manière suivante : l'EPP d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles existe seulement si  $m > n$  [48, 59, 83].

Ainsi, une condition nécessaire à l'existence de l'EPP est une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  ayant plus de colonnes que de lignes. Le noyau d'une telle matrice n'est pas vide, c'est-à-dire n'est pas réduit au seul vecteur nul et le théorème fondamental suivant présente une condition nécessaire et suffisante à l'appartenance d'une pose de l'effecteur à l'EPP.

**Théorème 1** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan entraîné par câbles appartient à l'EPP si et seulement si*

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = 3 \tag{2.8}$$

et

$$\exists \mathbf{z} \in \ker(\mathbf{W}) \text{ tel que } \mathbf{z} > \mathbf{0} \tag{2.9}$$

où  $\text{rank}(\mathbf{W})$  et  $\ker(\mathbf{W})$  désignent respectivement le rang et le noyau de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. Remarquons que ce théorème s'applique à toute matrice



des torseurs  $\mathbf{W}$  ayant plus de colonnes que de lignes et qu'il implique le résultat énoncé précédemment : l'EPP d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles existe seulement si  $m > n$ . Le théorème 1 est connu et a été prouvé plusieurs fois [38, 94, 116]. Néanmoins, remarquons que la condition (2.8) est nécessaire étant donné que si  $\text{rank}(\mathbf{W}) < 3$  alors certains torseurs ne peuvent pas être générés par les câbles même si ces derniers pouvaient pousser l'effecteur. Montrons également que les conditions (2.8) et (2.9) sont suffisantes. À cette fin, considérons l'équation (2.4) comme un système d'équations linéaires sous-déterminé d'inconnu  $\mathbf{t}$ . D'après la condition (2.8),  $\mathbf{W}$  admet une inverse généralisée  $\mathbf{W}^+$  et une solution de l'équation (2.4) est donnée par

$$\mathbf{t} = \mathbf{W}^+ \mathbf{w}_p + \lambda \mathbf{z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{z} \in \ker(\mathbf{W}), \quad \mathbf{z} > \mathbf{0} \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  est possible d'après la condition (2.9). La condition suffisante du théorème 1 est vraie parce que pour tout torseur  $\mathbf{w}_p$  à générer à l'effecteur, un scalaire  $\lambda$  suffisamment grand permet d'obtenir un vecteur des tensions  $\mathbf{t}$  dont tous les éléments sont positifs.

### 2.2.2 Noyau de la matrice des torseurs

Le théorème 1 énoncé dans la sous-section précédente caractérise une pose polyvalente par l'intermédiaire de conditions sur la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  et, notamment, par l'intermédiaire d'une condition sur le noyau de cette matrice, la condition (2.9). L'objectif principal de ce chapitre étant de déterminer l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles, il faut établir un lien entre la condition (2.9) et un ensemble de poses de l'effecteur du mécanisme. Ce lien n'étant pas évident à établir en considérant la seule condition (2.9), le théorème énoncé ci-dessous sera très utile puisqu'il permettra de mieux comprendre la relation entre le noyau de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  et la pose de l'effecteur d'un mécanisme à trois ddl et quatre câbles.

**Théorème 2** *Si la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est de plein rang alors le noyau de  $\mathbf{W}$ ,  $\ker(\mathbf{W})$ , est engendré*

par le vecteur  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^4$  suivant

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_4 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix}\right) \\ \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_4 & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix}\right) \\ \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_4 \end{bmatrix}\right) \\ - \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

où il est essentiel de remarquer que l'ordre des vecteurs  $\mathbf{w}_i$  apparaissant dans les quatre déterminants de l'équation (2.11) est important. Remarquons également que le  $i^{\text{e}}$  élément du vecteur  $\mathbf{z}_0$  est égal à  $(-1)^{i+1} \det_i$  où  $\det_i$  est le déterminant de la matrice carrée obtenue en supprimant la  $i^{\text{e}}$  colonne de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  définie à l'équation (2.5). Le théorème 2 est connu [38, 65, 126, 127, 129] mais, au meilleur de notre connaissance, ses conséquences importantes sur la nature et la détermination de l'EPP semblent ne jamais avoir été ni remarquées ni exploitées. Une preuve du théorème 2 peut être trouvée dans [68] où le cas général d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  ayant  $n$  lignes et  $n + 1$  colonnes est traité. Une telle preuve est également présentée à l'annexe A.

Étant donné que le vecteur  $\mathbf{z}_0$  défini par l'équation (2.11) est non nul si et seulement si la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est de plein rang, le théorème 3 énoncé ci-dessous est une conséquence directe des théorèmes 1 et 2.

**Théorème 3** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles appartient à l'EPP si et seulement si le vecteur  $\mathbf{z}_0$  défini par l'équation (2.11) vérifie  $\mathbf{z}_0 > \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{z}_0 < \mathbf{0}$ , c'est-à-dire si et seulement si tous les éléments du vecteur  $\mathbf{z}_0$  sont non nuls et ont le même signe.*

La section 2.3.2 montrera que les théorèmes 2 et 3 révèlent la nature des frontières de l'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par 4 câbles. Finalement, énonçons une conséquence immédiate du théorème 3 : la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  correspondant à une pose polyvalente d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est telle que toute combinaison de trois de ses colonnes est une combinaison de trois torseurs linéairement indépendants.

## 2.3 Propriétés de l'espace des poses polyvalentes à orientation constante

Cette section présente plusieurs propriétés de l'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles. Ces propriétés permettent de mieux comprendre la nature de cet espace. En outre, certaines d'entre elles seront utiles à la détermination de l'EPP sujet de la prochaine section.

### 2.3.1 Un polygone convexe contenant l'espace des poses polyvalentes à orientation constante

Pour commencer définissons l'ensemble de poses  $\mathcal{P}_f$ .

**Définition 3**  $\mathcal{P}_f$  est l'ensemble des poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles telles que

$$\text{rank}(\mathbf{W}_{12}) = 2 \quad (2.12)$$

et

$$\exists \mathbf{z}_f > \mathbf{0} \text{ tel que } \mathbf{W}_{12}\mathbf{z}_f = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{z}_f \in \mathbb{R}^4$  et  $\mathbf{W}_{12}$  est la matrice obtenue de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  en supprimant sa dernière ligne c'est-à-dire  $\mathbf{W}_{12} = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3 \ \mathbf{d}_4]$ . Pour une orientation constante  $\phi$  de l'effecteur, l'ensemble des positions du point de référence  $P$  qui appartiennent à  $\mathcal{P}_f$  est appelé  $\mathcal{P}_{f\phi}$ .

L'ensemble  $\mathcal{P}_f$  nous intéresse parce que l'EPP et l'EPPOC sont, respectivement, des sous-ensembles de  $\mathcal{P}_f$  et de  $\mathcal{P}_{f\phi}$ . En effet les équations (2.8) et (2.9) du théorème 1 impliquent, respectivement, les équations (2.12) et (2.13) de la définition 3. En outre, comme vont le montrer les développements subséquents, les coupes à orientation constante  $\mathcal{P}_{f\phi}$  de  $\mathcal{P}_f$  sont faciles à déterminer. Remarquons que, en général, l'ensemble  $\mathcal{P}_f$  n'a pas de signification physique puisque la définition 3 impose des conditions sur la partie de la matrice des torseurs qui concerne uniquement les forces alors que les

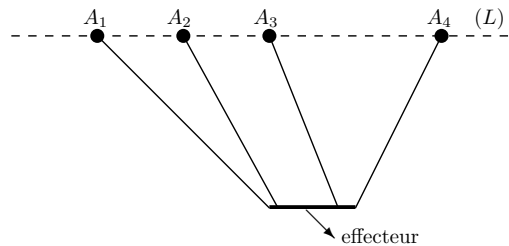


FIG. 2.3 – Exemple d’un mécanisme dont l’effecteur est dans une orientation telle que les quatre points  $A_i^v$  sont alignés suivant  $(L)$ .

ddl d’un mécanisme parallèle plan à trois ddl sont couplés, c’est-à-dire que les mêmes câbles sont utilisés pour générer les forces et les moments.

L’objectif principal de cette sous-section est de révéler la nature géométrique de l’ensemble  $\mathcal{P}_{f\phi}$ . À cette fin, intéressons-nous en premier lieu à des cas particuliers d’architectures (positions des poulies à la base et des points d’attache des câbles sur l’effecteur) de mécanismes pour lesquels il existe des orientations  $\phi$  de l’effecteur telles que  $\mathcal{P}_{f\phi}$  n’existe pas. Il peut être prouvé que deux colonnes de la matrice  $\mathbf{W}_{12}$ , par exemple  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_3$ , sont linéairement dépendantes si et seulement si le point de référence  $P$  appartient à la droite  $(A_1^v A_3^v)$  où les points  $A_i^v$  ont été définis à la section 2.1. Ainsi, il existe des positions  $\mathbf{p}$  de  $P$  telles que  $\text{rank}(\mathbf{W}_{12}) < 2$  seulement si les quatre points  $A_i^v$  sont alignés. Supposons que l’architecture du mécanisme et l’orientation de son effecteur sont telles que les quatre points  $A_i^v$  sont alignés et soit  $(L)$  la droite à laquelle ces quatre points appartiennent. Il est alors possible de démontrer que l’équation (2.13) implique que  $P$  appartient à  $(L)$ . Cependant, quand  $P$  appartient à  $(L)$  alors  $\text{rank}(\mathbf{W}_{12}) < 2$ . Ainsi, les deux équations (2.12) et (2.13) ne peuvent pas être vraies en même temps et l’ensemble  $\mathcal{P}_{f\phi}$  n’existe pas quand les quatre points  $A_i^v$  sont alignés. Dans un tel cas, l’EPPOC étant un sous-espace de  $\mathcal{P}_{f\phi}$ , l’EPPOC n’existe pas non plus. En conclusion de ces cas particuliers, remarquons que l’alignement des quatre points  $A_i^v$  ne se produit que pour des architectures très particulières qui peuvent facilement être évitées. Un exemple de ce type d’architecture est montré à la figure 2.3.

À présent, supposons que les quatre points  $A_i^v$  ne sont pas alignés et que, par conséquent, l’équation (2.12) est vérifiée quelle que soit la pose de l’effecteur. La nature géométrique de  $\mathcal{P}_{f\phi}$  peut être révélée en développant l’équation (2.13) à partir de l’ex-

pression du vecteur  $\mathbf{d}_i$  donnée à l'équation (2.1). En effet, pour  $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_i^v$  ( $i = 1$  à 4), on a

$$\mathbf{W}_{12}\mathbf{z}_f = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \frac{z_{fi}}{\rho_i} (\mathbf{a}_i^v - \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{a}_i^v = \mathbf{p} \quad (2.16)$$

avec

$$\lambda_i = \frac{z_{fi}}{\rho_i \Sigma}, \quad \Sigma = \sum_{j=1}^4 \frac{z_{fj}}{\rho_j} \quad (2.17)$$

où  $z_{fi}$  est le  $i^{\text{e}}$  élément du vecteur  $\mathbf{z}_f$ . Attendu que  $\mathbf{z}_f > \mathbf{0}$  et que  $\rho_i > 0$  pour tout entier  $i$  ( $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_i^v$ ), les coefficients  $\lambda_i$  définis par l'équation (2.17) ont les deux propriétés suivantes

$$\forall i, \lambda_i > 0 \quad (2.18)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1. \quad (2.19)$$

L'équation (2.16) avec les coefficients  $\lambda_i$  satisfaisant les équations (2.18) et (2.19) est une condition nécessaire et suffisante à l'appartenance de  $P$  à  $\mathcal{P}_{f\phi}$ . La condition suffisante est vraie car, étant donnée une position  $\mathbf{p}$  de  $P$  satisfaisant l'équation (2.16) telle que les  $\lambda_i$  vérifient les équations (2.18) et (2.19), les éléments d'un vecteur  $\mathbf{z}_f > \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{W}_{12}\mathbf{z}_f = \mathbf{0}$  sont

$$z_{fi} = \rho_i \lambda_i c \quad (2.20)$$

où  $c$  est une constante strictement positive quelconque. Les équations (2.16), (2.18) et (2.19) signifient que  $\mathbf{p}$  est une combinaison convexe (« convex combination ») des vecteurs  $\mathbf{a}_i^v$  et l'ensemble de ces combinaisons convexes, c'est-à-dire l'ensemble  $\mathcal{P}_{f\phi}$ , est l'enveloppe convexe (« convex hull ») de  $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1^v, \mathbf{a}_2^v, \mathbf{a}_3^v, \mathbf{a}_4^v\}$ , notée  $\text{conv}\mathcal{A}$  [95].  $\mathcal{A}$  étant un ensemble fini de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\text{conv}\mathcal{A}$  est un polygone convexe dont les sommets sont des éléments de  $\mathcal{A}$ . En outre, l'inégalité apparaissant à l'équation (2.18) étant stricte, l'ensemble  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est, plus exactement, l'intérieur de  $\text{conv}\mathcal{A}$ . Résumons ce résultat par un théorème.

**Théorème 4** *Pour une orientation donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles, l'ensemble  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est l'intérieur du plus grand polygone convexe dont les sommets sont trois ou quatre des points  $A_1^v$ ,  $A_2^v$ ,  $A_3^v$  et  $A_4^v$ , c'est-à-dire,  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est l'intérieur de l'enveloppe convexe de ces quatre points.*

Remarquons que, quand l'orientation de l'effecteur est constante, les vecteurs  $\mathbf{a}_i^v$  sont constants. Remarquons également que l'intérieur d'un polygone est le polygone lui-même mais sans ses côtés et que le théorème 4 implique que  $\mathcal{P}_{f\phi}$  n'existe pas quand les quatre points  $A_i^v$  sont alignés et, ainsi, que le théorème 4 reste vrai pour les cas particuliers d'architectures traités au début de cette sous-section. Un exemple de polygone convexe  $\mathcal{P}_{f\phi}$  d'un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles ayant une base carrée et un effecteur rectangulaire est montré à la figure 2.4. Le polygone  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est celui obtenu pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure et ses frontières ont été tracées en traits épais. Les cercles en traits pointillés sont les lieux des points  $A_i^v$  quand l'orientation  $\phi$  de l'effecteur varie de 0 à 360 degrés. Ainsi, les sommets du polygone  $\mathcal{P}_{f\phi}$  se déplacent sur ces cercles quand l'orientation de l'effecteur change. Finalement, étant donné que le vecteur position  $\mathbf{a}_i^v$  du point  $A_i^v$  est donné par l'équation (2.2) et qu'il existe des algorithmes déterminant l'enveloppe convexe d'un ensemble de points (fonction *convhull* de Matlab par exemple), les polygones  $\mathcal{P}_{f\phi}$  sont faciles à déterminer.

Ces résultats concernant l'ensemble  $\mathcal{P}_f$  et plus particulièrement ces coupes à orientation constante  $\mathcal{P}_{f\phi}$  ont été publiés dans [41]. L'ensemble  $\mathcal{P}_f$  a également et indépendamment été étudié dans [63] où il est appelé « espace de travail théorique en force ».

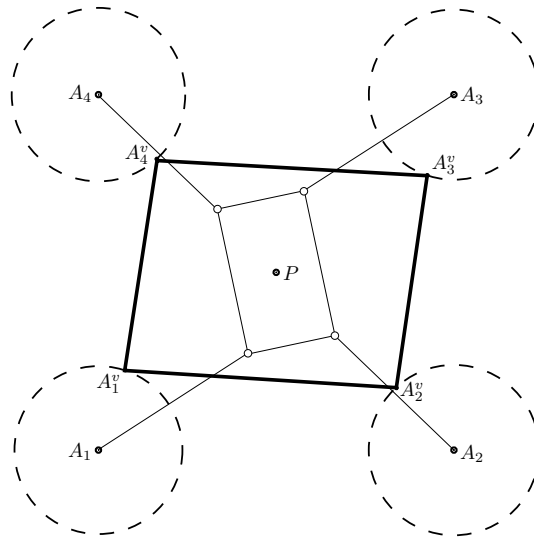


FIG. 2.4 – Exemple d'un polygone convexe  $\mathcal{P}_{f\phi}$ .

Dans [63], l'auteur propose d'utiliser  $\mathcal{P}_f$  dans une démarche de pré-conception de mécanismes parallèles entraînés par câbles destinés à suspendre des maquettes d'avion dans une soufflerie. Nous verrons qu'une telle démarche n'est pas appropriée étant donné que, premièrement, l'ensemble  $\mathcal{P}_f$  n'a pas de signification physique pour les mécanismes ayant des ddl mixtes (position et orientation) et que, deuxièmement, pour la plupart des mécanismes parallèles actionnés par câbles, il existe des plages d'orientation de l'effecteur pour lesquelles les coupes à orientation constante  $\mathcal{P}_{f\phi}$  de  $\mathcal{P}_f$  existent et sont d'une taille conséquente alors que, pour ces mêmes orientations, les EPPOC n'existent pas.

### 2.3.2 Propriétés

En se basant sur les développements précédents, plusieurs propriétés de l'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles peuvent à présent être formulées.

**Propriété 1** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est éventuellement vide.*

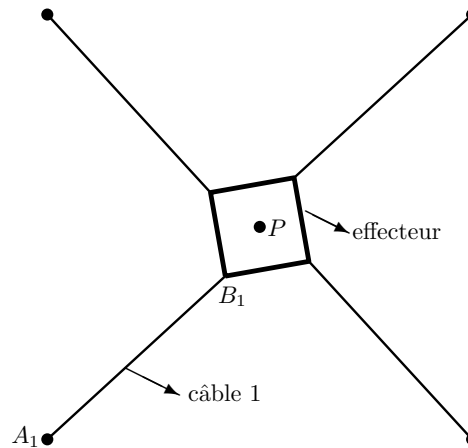


FIG. 2.5 – Mécanisme dont l'EPP est vide.

En fait, la pratique de la détermination de l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles montre que tout mécanisme de ce type possède des plages d'orientations pour lesquelles l'EPPOC n'existe pas et que, pour beaucoup de ces mécanismes, les orientations de l'effecteur pour lesquelles l'EPPOC n'existe pas sont plus nombreuses que celles pour lesquelles l'EPPOC existe. L'EPP tout entier peut également être vide. Par exemple, l'EPP du mécanisme montré à la figure 2.5 dont l'effecteur et la base sont des carrés n'existe pas pour des raisons données aux sections 2.5.1 et 3.3.2.2.

**Propriété 2** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est une partie bornée du plan.*

D'après le début de la section 2.3.1, L'EPPOC est un sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{f\phi}$  et, d'après le théorème 4,  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est une partie bornée du plan. Ainsi l'EPPOC est également une partie bornée du plan.

**Propriété 3** *La frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est composée d'arcs de coniques.*

Les quatre éléments  $z_{0i}$  du vecteur  $\mathbf{z}_0$  défini à l'équation (2.11) sont fonction de la pose de l'effecteur du mécanisme. Ainsi, pour une orientation donnée de l'effecteur,  $z_{0i}$



dépend uniquement de la position  $\mathbf{p}$  du point de référence  $P$  de l'effecteur. En outre,  $z_{0i}$  peut être écrit comme une fraction

$$z_{0i} = \frac{\mathcal{Q}_i}{\rho_j \rho_k \rho_l} \quad (2.21)$$

où l'ensemble  $\{i, j, k, l\}$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Le numérateur de cette fraction  $\mathcal{Q}_i$  est quadratique en  $\mathbf{p}$  et s'écrit

$$\mathcal{Q}_i = (-1)^{i+1} \det_i^* = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}_i \mathbf{p} + \mathbf{f}_i^T \mathbf{p} + q_{6i} \quad (2.22)$$

avec

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} 2q_{1i} & q_{3i} \\ q_{3i} & 2q_{2i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} q_{4i} \\ q_{5i} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

où les six coefficients  $q_{ji}$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) sont fonction de l'orientation  $\phi$  de l'effecteur et de la géométrie du mécanisme et où  $\det_i^*$  est le déterminant de la matrice carrée obtenue en supprimant la  $i^e$  colonne de la matrice  $\mathbf{W}^*$  définie par l'équation (2.6). Remarquons que, quand

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_j^v \ (\rho_j = 0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{p} = \mathbf{a}_k^v \ (\rho_k = 0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{p} = \mathbf{a}_l^v \ (\rho_l = 0) \quad (2.24)$$

alors

$$z_{0i} = 0. \quad (2.25)$$

En effet, à la section 2.1 le vecteur  $\mathbf{d}_i$  a été défini comme étant le vecteur nul quand  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v$ . De plus, si l'équation (2.24) est vraie, alors, d'après l'équation (2.6), un des vecteurs  $\mathbf{w}_j^*$ ,  $\mathbf{w}_k^*$  ou  $\mathbf{w}_l^*$  est nul et, par conséquent

$$\mathcal{Q}_i = 0. \quad (2.26)$$

Ainsi, pour une orientation donnée de l'effecteur, les deux lieux des positions du point de référence  $P$  pour lesquels, respectivement,  $z_{0i} = 0$  et  $\mathcal{Q}_i = 0$  sont confondus c'est-à-dire

$$\mathcal{Q}_i = 0 \iff z_{0i} = 0. \quad (2.27)$$

Avant de continuer la démonstration de la propriété 3, notons que le modèle cinématique des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles adopté à la section 2.1 est identique à celui des mécanismes parallèles plans à liaisons rigides dont l'effecteur est relié à la base par des chaînes cinématiques composées de deux liaisons pivots et d'une liaison glissière actionnée (chaîne cinématique de type  $R\underline{P}R$ ) tel que montré à la figure 2.2. Le  $i^{\text{e}}$  élément  $z_{0i}$  du vecteur  $\mathbf{z}_0$  correspond alors, au signe près, au déterminant de la matrice jacobienne du mécanisme parallèle de type  $3R\underline{P}R$  obtenu en supprimant la  $i^{\text{e}}$  patte du mécanisme montré à la figure 2.2. Les courbes de singularité de ce type de mécanisme parallèle plan ont été étudiées en détails dans [98] où les expressions des coefficients  $q_{ji}$  apparaissant aux équations (2.22) et (2.23) peuvent être trouvées. Revenons à la preuve de la propriété 3. D'après les équations (2.22) et (2.27), la courbe plane  $\mathcal{C}_i$  d'équation  $z_{0i} = 0$  est une conique. Cette conique divise le plan en régions où  $z_{0i}$  est positif ou négatif. Suivant la géométrie du mécanisme et l'orientation de son effecteur,  $\mathcal{C}_i$  est une hyperbole ( $\det(\mathbf{H}_i) < 0$ ), une parabole ( $\det(\mathbf{H}_i) = 0$ ) ou une ellipse ( $\det(\mathbf{H}_i) > 0$ ). Par exemple, dans le cas où  $\mathcal{C}_i$  est une hyperbole, ses deux branches divisent le plan tel que montré à la figure 2.6. Le théorème 3 montre ainsi que l'EPPOC, noté  $\mathcal{W}$ , consiste en la réunion de deux intersections

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \cup \mathcal{W}^- \quad (2.28)$$

avec

$$\mathcal{W}^+ = \bigcap_{i=1}^4 \mathcal{W}_i^+ = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{z}_0 > \mathbf{0}\} \quad (2.29)$$

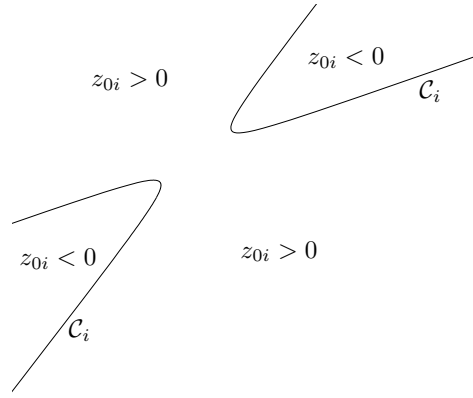


FIG. 2.6 – Une hyperbole divisant le plan en plusieurs régions.

et

$$\mathcal{W}^- = \bigcap_{i=1}^4 \mathcal{W}_i^- = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{z}_0 < \mathbf{0}\} \quad (2.30)$$

où les ensembles  $\mathcal{W}_i^+$  et  $\mathcal{W}_i^-$  sont définis par

$$\mathcal{W}_i^+ = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid z_{0i} > 0\} \quad (2.31)$$

et

$$\mathcal{W}_i^- = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid z_{0i} < 0\}. \quad (2.32)$$

La courbe qui sépare les parties  $\mathcal{W}_i^+$  et  $\mathcal{W}_i^-$  du plan étant la conique  $\mathcal{C}_i$ , d'après les équations (2.28), (2.29) et (2.30), la frontière de l'EPPOC est composée d'arcs des coniques  $\mathcal{C}_i$  et la propriété 3 est ainsi prouvée. En outre, étant donné que  $\mathcal{W}^+ \cap \mathcal{W}^- = \emptyset$ , quand aucun des deux ensembles  $\mathcal{W}^+$  et  $\mathcal{W}^-$  n'est vide, l'EPPOC est composé de deux parties disjointes.

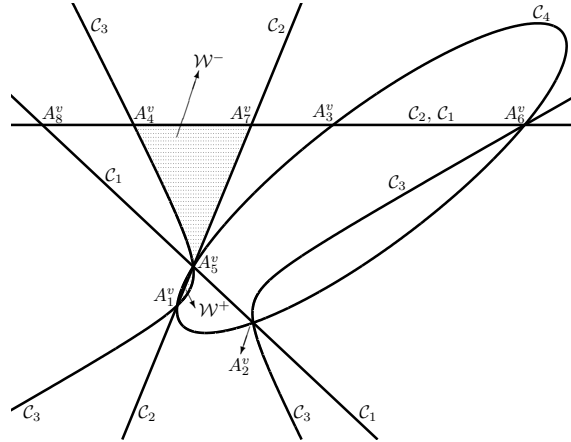


FIG. 2.7 – Exemple d'un EPPOC composée de deux parties disjointes  $\mathcal{W}^+$  et  $\mathcal{W}^-$ .

**Propriété 4** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est éventuellement composé de deux parties disjointes.*

Par exemple, un EPPOC dont les deux ensembles disjointes  $\mathcal{W}^+$  et  $\mathcal{W}^-$  existent est montré à la figure 2.7. Les ensembles  $\mathcal{W}^+$  et  $\mathcal{W}^-$  sont les parties grisées de la figure. Remarquons que les frontières de  $\mathcal{W}^+$  et de  $\mathcal{W}^-$  passent toutes les deux par le point  $A_5^v$  qui, avec le point  $A_6^v$ , sont les deux seuls points du plan pour lesquels la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  n'est pas de plein rang. En effet, les quatre courbes  $\mathcal{C}_i$  se coupent en ces deux points.

**Propriété 5** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est un ensemble ouvert.*

Les huit ensembles  $\mathcal{W}_i^+$  et  $\mathcal{W}_i^-$ ,  $i = 1$  à 4, sont des ensembles ouverts puisque les inégalités des équations (2.31) et (2.32) sont strictes. Ainsi, la réunion et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts étant toutes les deux des ensembles ouverts, l'EPPOC est un ensemble ouvert et, par conséquent, les points de sa frontière ne lui appartiennent pas.

**Propriété 6** *L'EPP d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles est un espace sans singularité.*

Bien que cette propriété soit une conséquence directe de la définition de l'EPP, elle est formulée pour souligner la différence suivante. L'espace de travail des manipulateurs parallèles à liaisons rigides est généralement défini comme l'ensemble des poses de l'effecteur en lesquelles des contraintes sur les limitations mécaniques des actionneurs (courses de vérins par exemple), sur les débattements des articulations passives et sur les interférences entre segments sont respectées [79]. Il peut alors exister des poses appartenant à l'espace de travail ainsi défini pour lesquelles les actionneurs ne peuvent pas générer certains torseurs à l'effecteur. Ces poses correspondent à des configurations singulières du manipulateur et sont caractérisées par une matrice des torseurs qui n'est pas de plein rang. Elles doivent en général être évitées limitant ainsi l'espace de travail du manipulateur parallèle. Le problème de la présence de singularités à l'intérieur de l'espace de travail ne se pose pas pour l'EPP des mécanismes parallèles entraînés par câbles étant donné que, d'après l'équation (2.8), la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est de plein rang à l'intérieur de l'EPP et que, de toute façon, par définition, tout torseur peut être généré à l'effecteur à l'intérieur de l'EPP. Cependant, l'EPP contient éventuellement des poses pour lesquelles il existe des problèmes d'interférences mécaniques (interférences entre câbles par exemple).

## 2.4 Détermination de l'espace des poses polyvalentes

Cette section présente deux méthodes de détermination de l'EPP. La première méthode est classique et consiste à tester les points d'un nuage de points de manière à déterminer ceux qui appartiennent à l'EPPOC. La seconde recherche les frontières de l'EPPOC parmi un ensemble de frontières potentielles et tire ainsi avantage de la nature quadratique des frontières de l'EPPOC. L'EPP est déterminé en appliquant une des deux méthodes à un ensemble fini d'orientations prises dans l'intervalle  $[-\pi; \pi[$ .

### 2.4.1 Détermination par test d'un nuage de points

Pour une orientation  $\phi$  donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles, considérons un ensemble fini de positions de son point de référence  $P$ . Cet ensemble forme un nuage de points  $\mathcal{N}$ . Les théorèmes 1 et 3 per-

mettent de déterminer les points de  $\mathcal{N}$  qui correspondent à des poses polyvalentes de l'effecteur. L'objectif étant d'obtenir une approximation de l'EPPOC, il faut que la zone du plan couverte par le nuage de points  $\mathcal{N}$  contienne tout l'EPPOC. Or, d'après la section 2.3.1, l'EPPOC est inclus dans le polygone convexe  $\mathcal{P}_{f\phi}$  et par conséquent si  $\mathcal{N}$  contient  $\mathcal{P}_{f\phi}$  alors  $\mathcal{N}$  contient également l'EPPOC. En outre,  $\mathcal{P}_{f\phi}$  étant un polygone, il est facile de trouver un nuage de points  $\mathcal{N}$  qui le contienne et, comme le montrera l'exemple ci-dessous, nous pouvons même trouver un nuage  $\mathcal{N}$  qui contient  $\mathcal{P}_{f\phi}$  pour toute orientation  $\phi$  de l'effecteur. Un tel nuage de points  $\mathcal{N}$  étant déterminé, ses points peuvent être testés avec le théorème 1 ou avec le théorème 3. Le théorème 3 s'applique directement puisque la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  peut être calculée en chaque point du nuage. Avec le théorème 1, il faut d'abord vérifier que la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est de plein rang afin de satisfaire la condition (2.8). Cependant, il n'est pas nécessaire d'effectuer cette vérification en chaque point du nuage étant donné que les points du plan pour lesquels  $\mathbf{W}$  n'est pas de plein rang sont, en général, au nombre de deux et peuvent être déterminés par le calcul des points d'intersection entre les coniques  $\mathcal{C}_i$  définies à la section 2.3.2. De plus, remarquons que d'après la fin de la section 2.2.2, quand au moins une des quatre coniques  $\mathcal{C}_i$  dégénère en tout le plan, l'EPPOC n'existe pas. La condition (2.8) étant vraie, il faut vérifier la condition (2.9). À cette fin, au moins deux méthodes peuvent être envisagées. La première consiste à employer une méthode d'optimisation afin de déterminer s'il existe un vecteur  $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  appartenant au noyau de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ . La deuxième méthode est beaucoup plus efficace et consiste à utiliser la décomposition LU, la décomposition QR ou la décomposition en valeurs singulières [102] de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ . Ces décompositions permettent de déterminer un vecteur non nul  $\mathbf{z}_0^*$  de  $\mathbb{R}^4$  appartenant au noyau de  $\mathbf{W}$ . Ainsi, la condition (2.9) est satisfaite, c'est-à-dire le point courant du nuage appartient à l'EPPOC, si et seulement si  $\mathbf{z}_0^* > \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{z}_0^* < \mathbf{0}$ .

Par exemple, considérons un mécanisme parallèle plan dont l'effecteur ne possède que deux points d'attache et dont les quatre câbles s'enroulent à la base aux points  $A_i$  qui forment un carré. Un tel mécanisme est montré à la figure 2.8 où le polygone  $\mathcal{P}_{f\phi}$  obtenu pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure est tracé en traits pointillés épais. Remarquons que dans ce cas  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est un parallélogramme. Les cercles montrés en traits pointillés fins correspondent aux lieux sur lesquels les point  $A_i^v$  se déplacent quand l'orientation de l'effecteur change. D'après le théorème 4, les points  $A_i^v$  sont les sommets de  $\mathcal{P}_{f\phi}$ . Ainsi, le carré tracé en traits fins à la figure 2.8, de sommets les points  $C_i$ , contient  $\mathcal{P}_{f\phi}$  et donc l'EPPOC pour toute orientation de l'effecteur. Le

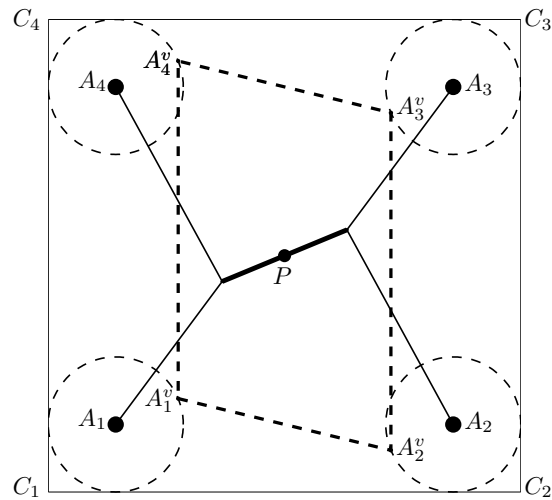


FIG. 2.8 – Un mécanisme dont l'effecteur ne possède que deux points d'attache.

nuage de points  $\mathcal{N}$  est choisi tel que ses points couvrent de manière régulière l'intérieur de ce carré et ce nuage de points peut être utilisé pour déterminer l'EPPOC pour toute orientation de l'effecteur. Pour l'orientation montrée à la figure 2.8, les points appartenant à l'EPPOC sont montrés à la figure 2.9 où un nuage  $\mathcal{N}$  de 2500 points a été testé. Finalement, une approximation de l'EPP est obtenue en testant le nuage de points  $\mathcal{N}$  pour différentes orientations de l'effecteur. Une approximation de l'EPP du mécanisme de la figure 2.8 est montrée à la figure 2.10 où les orientations pour lesquelles le nuage  $\mathcal{N}$  a été testé sont distantes de 9 degrés.

## 2.4.2 Algorithme géométrique

L'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles peut être déterminé par une représentation graphique de sa frontière. Celle-ci est, d'après la propriété 3 énoncée à la section 2.3.2, composée d'arcs des quatre coniques  $\mathcal{C}_i$ . Ainsi, des arcs de ces coniques sont des frontières potentielles de l'EPPOC. Le principe de l'algorithme présenté dans cette section est de trouver ces frontières potentielles puis de déterminer lesquelles composent réellement la frontière de l'EPPOC. Cet algorithme est qualifié de géométrique étant donné qu'il tire avantage de la connaissance de la nature géométrique de la frontière de l'EPPOC telle que décrite par la propriété 3.

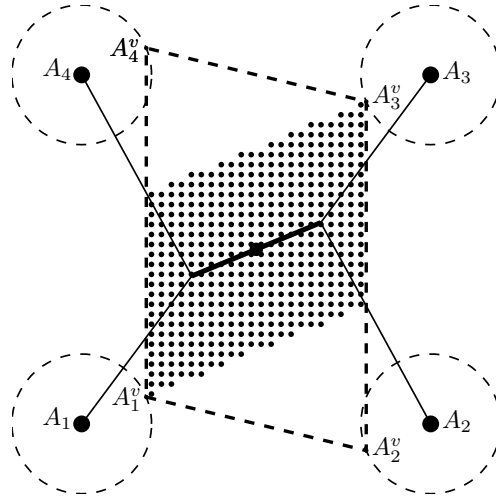


FIG. 2.9 – EPPOC obtenu par test d'un nuage de points.

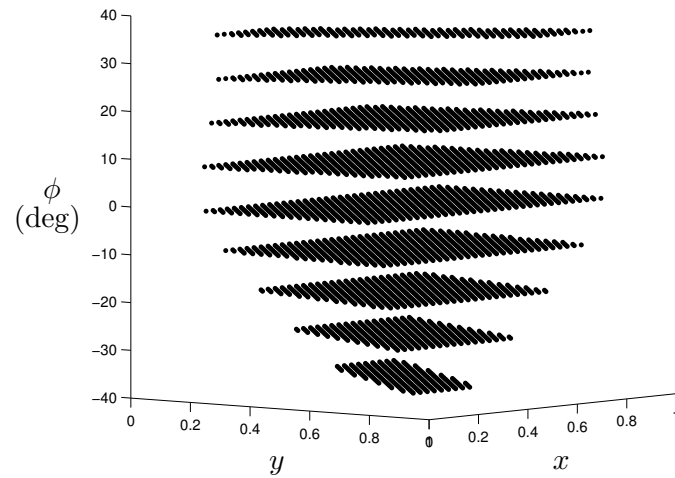


FIG. 2.10 – Approximation de l'EPP du mécanisme montré à la figure 2.8.



Des méthodes géométriques de détermination de l'espace de travail de manipulateurs parallèles sont disponibles dans la littérature comme, par exemple, celles présentées dans [15, 40, 79, 80]. Elles possèdent plusieurs avantages tels qu'une bonne qualité de représentation de l'espace de travail, une grande efficacité et la possibilité de sauvegarder les résultats d'une manière compacte. De plus, par comparaison avec les méthodes dites numériques telles que celle consistant à tester un nuage de points présentée dans la sous-section précédente, les méthodes géométriques sont souvent plus rapides et apportent une meilleure compréhension de la relation entre la géométrie du mécanisme et celle de son espace de travail. Par exemple, dans [40], des coupes de l'espace atteignable à orientation constante d'une classe de mécanisme parallèle à six ddl sont obtenues par détermination de leurs frontières, ces dernières étant composées d'arcs de cercles. Par ailleurs, une méthode géométrique de détermination de l'espace atteignable dit dynamique des robots parallèles plans à trois ddl entraînés par câbles a été présentée dans [7]. Cette méthode consiste à rechercher les parties de courbes composant la frontière de l'espace atteignable dynamique parmi des arcs de coniques. Ainsi l'algorithme proposé dans cette section et les méthodes présentées dans [7, 40] partagent le même principe. Cependant, leurs mises en œuvre sont différentes et, au meilleur de notre connaissance, un algorithme géométrique de détermination de l'EP-POC n'a jamais été proposé dans la littérature.

Décrivons à présent les principales étapes de l'algorithme géométrique qui détermine la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles.

**Étape 1 :** choisir une orientation  $\phi$  pour l'effecteur du mécanisme et déterminer les équations des quatre coniques  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) associées aux quatre combinaisons possibles de trois câbles pris parmi les quatre du mécanisme.

D'après la section 2.3.2,  $\mathcal{C}_i$  est la conique d'équation  $z_{0i} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{Q}_i = 0$  où l'expression quadratique de  $\mathcal{Q}_i$  est donnée par l'équation (2.22). Rappelons que  $z_{0i}$  est le  $i^{\text{e}}$  élément du vecteur  $\mathbf{z}_0$  défini à l'équation (2.11). Ainsi, par exemple, la conique  $\mathcal{C}_2$  d'équation  $z_{02} = \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_4 \ \mathbf{w}_3]) = 0$  est associée à la combinaison de trois câbles (1, 3, 4). L'orientation de l'effecteur étant fixée, les coefficients  $q_{ji}$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) de l'équation (2.22) sont constants. Des expressions des coefficients  $q_{ji}$  sont présentées dans [15, 98]. Cependant, ces expressions ont été obtenues pour un choix particulier du repère mobile lié à l'effecteur. Ainsi les expressions des six coefficients  $q_{ji}$  de l'équa-

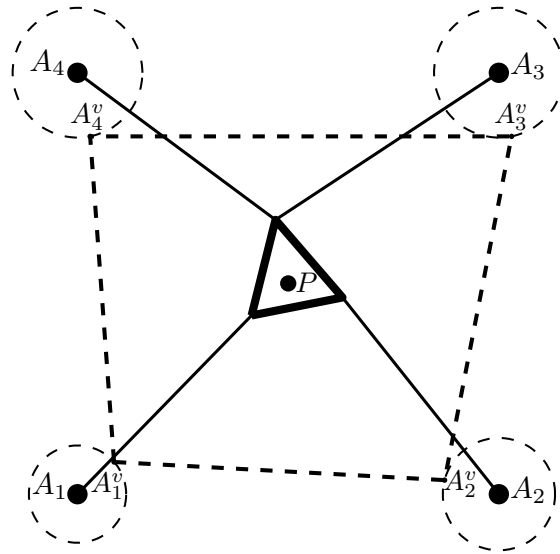


FIG. 2.11 – Un mécanisme plan entraîné par quatre câbles dont l'effecteur a trois points d'attache.

tion de la conique  $\mathcal{C}_i$  peuvent, par exemple, être obtenues en partant des expressions présentées dans [15, 98] et en effectuant un changement de repère ou en utilisant une méthode basée sur la propriété de multilinéarité du déterminant présentée dans [73].

Afin d'illustrer les différentes étapes de l'algorithme, considérons le mécanisme plan à 3 ddl montré à la figure 2.11. Les quatre câbles de ce mécanisme s'attachent en trois points de son effecteur, la paire de câbles (3, 4) partageant ainsi le même point d'attache. Les positions  $A_i$  des poulies forment un carré. Les quatre coniques  $\mathcal{C}_i$  obtenues pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure 2.11 sont présentées à la figure 2.12. La conique  $\mathcal{C}_1$  associée à la combinaison de trois câbles (2, 3, 4) est dégénérée en une paire de droites. Il en est de même pour la conique  $\mathcal{C}_2$  associée à la combinaison de câbles (1, 3, 4). La conique  $\mathcal{C}_3$  associée à la combinaison (1, 2, 4) est une hyperbole et, finalement, la conique  $\mathcal{C}_4$  associée à la combinaison (1, 2, 3) est une ellipse.

**Étape 2 :** pour chaque conique  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), trouver les points d'intersection entre cette conique et les trois autres coniques  $\mathcal{C}_j$  ( $j = 1, \dots, 4, j \neq i$ ). Si la conique est dégénérée en deux droites concourantes, trouver également leur point commun.

Une conique d'équation  $\mathcal{Q}_i = 0$  où l'expression de  $\mathcal{Q}_i$  est donnée par l'équation (2.22)

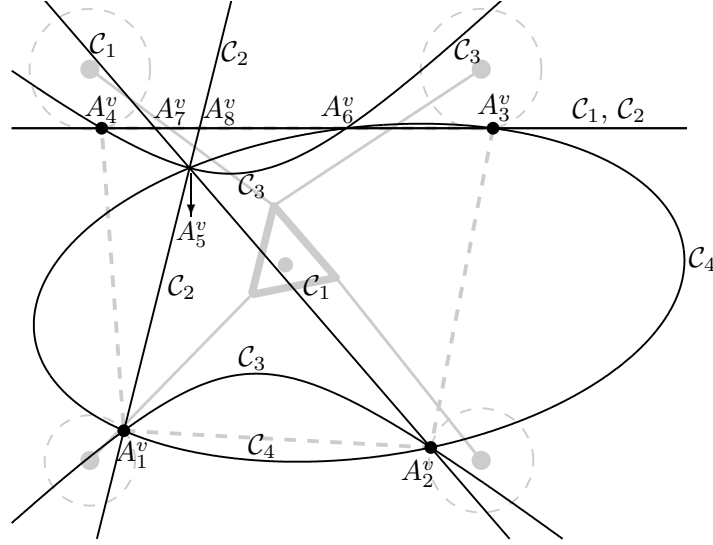


FIG. 2.12 – Les quatre coniques associées au mécanisme et à l'orientation de son effecteur montrés à la figure 2.11.

est dégénérée en une ou deux droites si et seulement si [13]

$$\frac{1}{2} \mathbf{f}_i^T \mathbf{E}^T \mathbf{H}_i \mathbf{E} \mathbf{f}_i - q_{6i} \det(\mathbf{H}_i) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Remarquons que les coniques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  montrées à la figure 2.12 sont toutes les deux dégénérées en une paire de droites parce que la paire de câbles (3,4) du mécanisme de la figure 2.11 partage le même point d'attache à l'effecteur et parce que cette paire de câbles est la paire commune aux coniques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

De manière générale deux coniques ont entre zéro et quatre points d'intersection [122] qui peuvent être trouvés en déterminant les racines réelles d'un polynôme de degré quatre [96]. Cependant, quand la position de l'effecteur est telle que son point de référence  $P$  est confondu avec le point  $A_i^v$  ( $P \equiv A_i^v$ ), le vecteur  $\mathbf{d}_i$  est par définition le vecteur nul. D'après l'équation (2.3), le torseur  $\mathbf{w}_i$  est également nul et les trois éléments du vecteur  $\mathbf{z}_0$  ayant  $\mathbf{w}_i$  dans leur expression donnée par l'équation (2.11) sont nuls. Ainsi, les trois coniques  $\mathcal{C}_i$  associées à ces trois éléments de  $\mathbf{z}_0$  passent toutes les trois par le point  $A_i^v$ . Par conséquent, deux coniques  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  se coupent toujours en au moins deux points  $A_k^v$  et  $A_l^v$  (ou en au moins un point si  $A_k^v$  et  $A_l^v$  sont confondus)

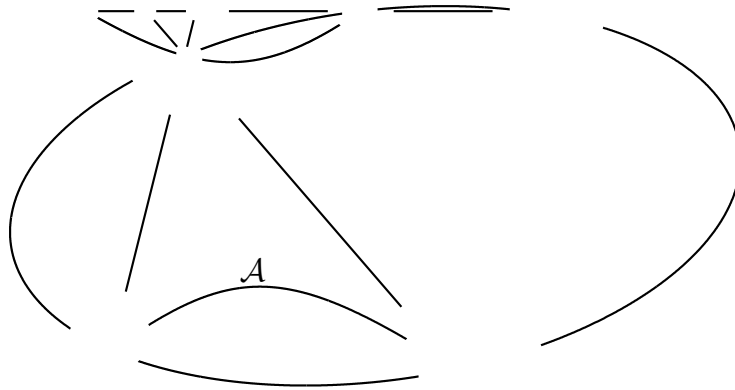


FIG. 2.13 – Les 16 arcs finis des coniques de la figure 2.12.

dont les positions peuvent être calculées à priori avec l'équation (2.2). Par exemple, les coniques  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$  de la figure 2.12 se coupent en  $A_1^v$  et  $A_2^v$ ,  $\mathcal{C}_3$  passant également par  $A_4^v$  et  $\mathcal{C}_4$  par  $A_3^v$ .

**Étape 3** : pour chaque conique  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), déterminer tous les arcs définis par les points d'intersection trouvés à l'étape 2 et éliminer tous les arcs infinis.

Un arc de la conique  $\mathcal{C}_i$  est par définition une portion continue de  $\mathcal{C}_i$  située entre deux de ses points ou limitée par un de ses points. Les arcs recherchés à l'étape 3 sont les arcs de  $\mathcal{C}_i$  limités par un ou deux points d'intersection trouvés à l'étape 2. Les arcs sont obtenus en ordonnant ces points d'intersection. Par exemple, à la figure 2.12, les arcs de la conique  $\mathcal{C}_4$  sont, en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et en commençant par le point  $A_1^v$  :  $A_1^v A_2^v$ ,  $A_2^v A_3^v$ ,  $A_3^v A_6^v$ ,  $A_6^v A_5^v$  et  $A_5^v A_1^v$ . Un arc infini est une portion continue d'une droite, d'une parabole ou d'une hyperbole limitée par un seul point d'intersection. Par exemple, dans le cas de la figure 2.12, l'hyperbole  $\mathcal{C}_3$  est composée de quatre arcs infinis, deux par branche, et de trois arcs finis  $A_1^v A_2^v$ ,  $A_4^v A_5^v$  et  $A_5^v A_6^v$ . D'après la propriété 2 de la section 2.3.2, l'EPPOC est une partie bornée du plan. Par conséquent, les arcs infinis sont éliminés dès l'étape 3 étant donné qu'ils ne peuvent pas appartenir à la frontière d'une partie bornée du plan. Le résultat de l'application de l'étape 3 aux quatre coniques de la figure 2.12 est illustré à la figure 2.13 où 16 arcs finis ont été trouvés. À présent, les arcs finis trouvés à l'étape 3 doivent être testés de manière à déterminer s'ils font partie de la frontière de l'EPPOC.

**Étape 4 :** tester les arcs finis trouvés à l'étape 3 et éliminer ceux qui ne font pas partie de la frontière de l'EPPOC.

La première étape du test d'un arc fini d'une conique  $\mathcal{C}_i$  consiste à choisir un point de l'arc, autre que ses deux extrémités, à partir duquel le test sera effectué. Ce point de test peut être quelconque mais en pratique il est choisi assez loin des deux extrémités de l'arc. Ce point de test sélectionné, une difficulté se présente. En effet, d'après la propriété 5 énoncée à la section 2.3.2, l'EPPOC est un ensemble ouvert. Par conséquent, même si l'arc à tester fait partie de la frontière de l'EPPOC, il est à l'extérieur de l'EPPOC. Ainsi, le théorème 3 ne peut pas être appliqué directement au point de test de manière à déterminer si l'arc fait partie de la frontière de l'EPPOC. Un test dérivé directement du théorème 3 et qui s'applique au point de test pourrait être envisagé mais il n'est pas facile de prouver qu'un tel test est général. En effet, des cas particuliers, tel que le cas montré à la figure 2.12 où les coniques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  partagent une même droite, posent problèmes. Ainsi, nous préférons présenter une méthode qui permet de tester n'importe quel type d'arc de conique et qui, par conséquent, est générale.

À cette fin, considérons l'exemple de l'arc d'hyperbole  $\mathcal{A}$  montré à la figure 2.13. Le point de test choisi pour cet arc est le point  $M$  montré à la figure 2.14. L'idée est de tester l'arc en appliquant le théorème 3 en deux points  $T_1$  et  $T_2$  situés de part et d'autre de l'arc  $\mathcal{A}$  et tels que un de ces deux points appartienne à l'EPPOC quand  $\mathcal{A}$  fait partie de la frontière de l'EPPOC. Ainsi, les points  $T_1$  et  $T_2$  doivent être suffisamment proches de  $M$ . De manière à donner un sens à l'expression « suffisamment proche » et, par conséquent, de manière à obtenir les deux points  $T_1$  et  $T_2$ , la tangente  $\mathcal{T}$  à l'arc  $\mathcal{A}$  au point de test  $M$  est déterminée. Puis, l'équation de la droite  $\mathcal{D}_p$  perpendiculaire à  $\mathcal{T}$  et passant par  $M$  est calculée et les points d'intersection entre  $\mathcal{D}_p$  et les quatre coniques  $\mathcal{C}_i$  sont déterminés, un de ces points devant être le point de test  $M$ . Certains de ces points d'intersection  $I_i$  sont montrés à la figure 2.14. Le point d'intersection ou les deux points d'intersection les plus proches de  $M$  sont trouvés en ordonnant les points  $I_i$ . Dans le cas de l'arc  $\mathcal{A}$  les deux points d'intersection les plus proches de  $M$  sont  $I_1$  et  $I_2$ .

Finalement, les points  $T_1$  et  $T_2$ , auxquels le théorème 3 peut être appliqué de manière à tester l'arc  $\mathcal{A}$ , sont choisis, respectivement, parmi les points de la droite  $\mathcal{D}_p$  situés entre  $M$  et  $I_1$  et entre  $M$  et  $I_2$ . L'arc  $\mathcal{A}$  appartient à la frontière de l'EPPOC si et seulement si au moins un des deux points  $T_1$  ou  $T_2$  appartient à l'EPPOC. Remar-

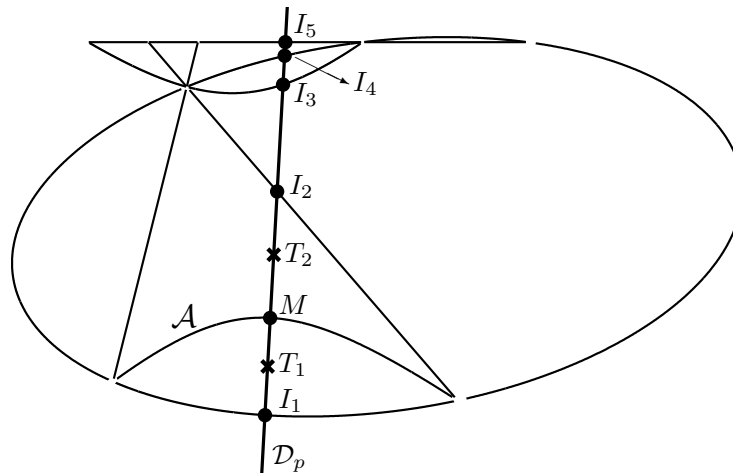


FIG. 2.14 – Illustration de la méthode de test d'un arc de conique.

quons que si les deux points  $T_1$  et  $T_2$  appartiennent à l'EPPOC alors l'arc  $\mathcal{A}$  est une frontière intérieure à l'EPPOC. Cependant, ce cas ne s'est jamais présenté en pratique. Remarquons également que si aucun point d'intersection  $I_i$  entre la droite  $\mathcal{D}_p$  et les coniques  $\mathcal{C}_i$  n'est trouvé (mis à part le point  $M$ ) alors l'arc  $\mathcal{A}$  n'appartient pas à la frontière de l'EPPOC étant donné que ce dernier est une partie bornée du plan.

**Étape 5 :** si tous les arcs finis trouvés à l'étape 3 n'ont pas été éliminés à l'étape 4, l'EPPOC existe et les arcs restants après l'étape 4 sont ceux de sa frontière. Une représentation graphique de l'EPPOC est obtenue en traçant ces arcs.

La figure 2.15 présente l'EPPOC du mécanisme à 4 câbles dont l'effecteur est dans l'orientation montrée à la figure 2.11. Ainsi, la pose de l'effecteur montrée à la figure 2.11 n'est pas polyvalente. La figure 2.16 présente l'approximation de l'EPP du mécanisme présenté à la figure 2.11 obtenue par détermination de l'EPPOC pour différentes orientations de l'effecteur. L'EPP de ce mécanisme disparaît pour deux orientations de l'effecteur. La première est comprise entre 25 et 26 degrés tandis que la deuxième est comprise entre  $-29$  et  $-30$  degrés. L'EPP existe également pour une plage d'orientations situées autour de 180 degrés. La figure 2.17 présente quatre EPPOC du mécanisme présenté à la figure 2.11 obtenus pour des orientations  $\phi$  de l'effecteur valant 0, 10, 15 et 18 degrés. La figure 2.18 montre la frontière de l'EPPOC ainsi que les points d'un nuage appartenant à l'EPPOC dans le cas du mécanisme dont l'architecture et l'orientation de l'effecteur sont montrées à la figure 2.8. Notons que, dans le cas de ce mécanisme

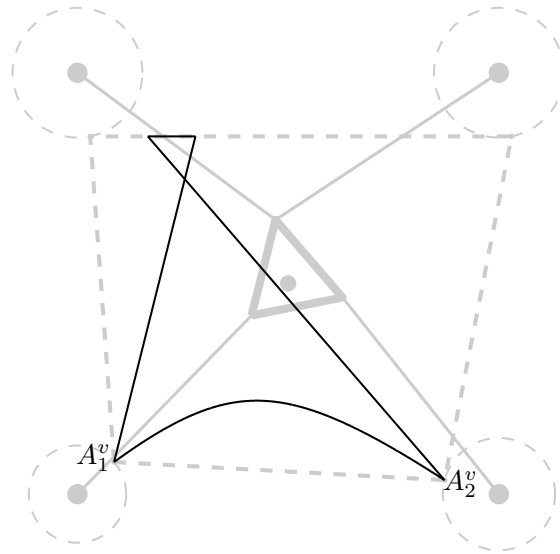


FIG. 2.15 – EPPOC déterminé par l’algorithme géométrique.

dont l’effecteur n’a que deux points d’attache, quelle que soit l’orientation de l’effecteur, si l’EPPOC existe alors sa frontière est composée de segments de droite.

### 2.4.3 Intérêts et inconvénients des deux méthodes

Les intérêts principaux de la méthode de détermination de l’EPPOC par test d’un nuage de point sont sa facilité de programmation ainsi que sa rapidité, tant que le nombre de points du nuage à tester reste raisonnable. En effet, dans ce cas, la procédure numérique de test d’un nuage de points est aussi rapide ou même plus rapide que l’algorithme géométrique. Par exemple, dans le cas du calcul de l’EPPOC montré à la figure 2.18, tel que programmé dans Matlab 7, les temps de calcul du test d’un nuage de 2500 points et de la recherche de la frontière de l’EPPOC par l’algorithme géométrique ont été approximativement égaux. Évidemment, le temps d’exécution du test d’un nuage de points augmente rapidement avec le nombre de points du nuage mais, tel qu’illustré par la figure 2.18, le test d’un nombre de points raisonnable (2500 dans le cas de la figure) suffit à donner une bonne approximation de l’EPPOC. Cependant, la procédure de test d’un nuage de points a comme inconvénient important la taille des données représentant le résultat. Elle a également un désavantage par rapport à

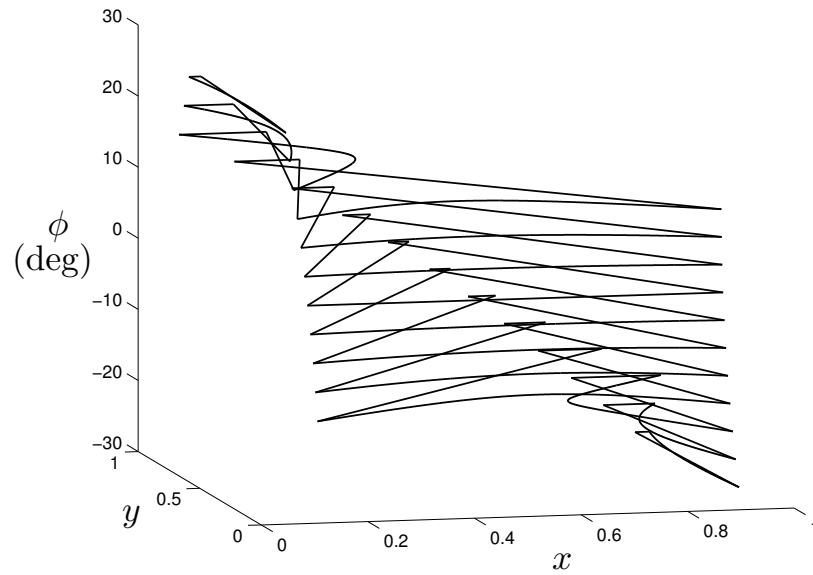


FIG. 2.16 – Approximation de l'EPP du mécanisme de la figure 2.11.

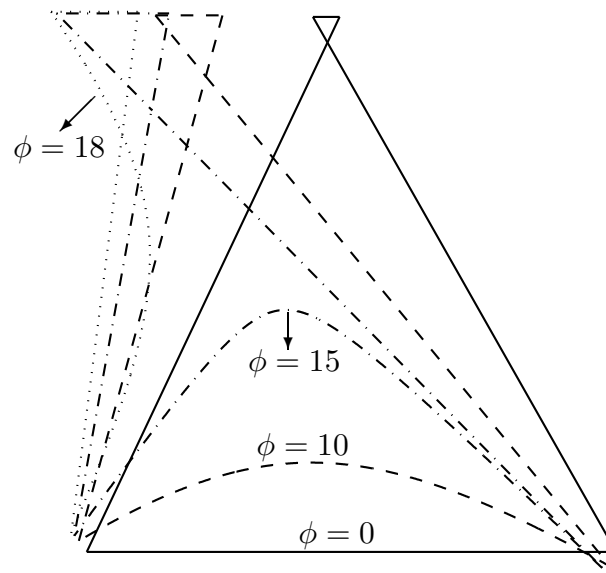


FIG. 2.17 – Quatre EPPOC du mécanisme de la figure 2.11 déterminés par l'algorithme géométrique (les orientations  $\phi$  sont en degrés).



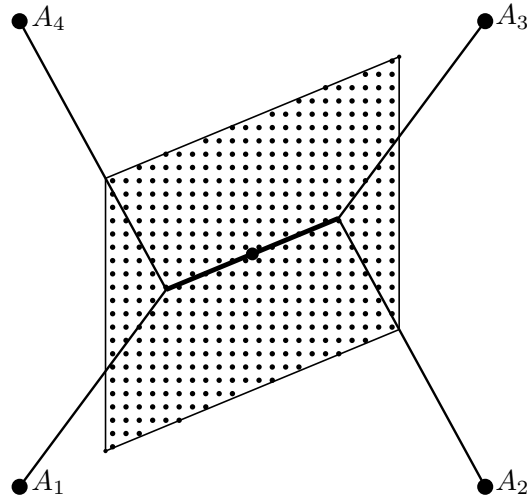


FIG. 2.18 – Superposition de la frontière de l'EPPOC et des points d'un nuage qui appartiennent à l'EPPOC.

l'algorithme géométrique, c'est-à-dire une moins bonne qualité de représentation de l'EPPOC et par conséquent de l'EPP.

Pour sa part, l'algorithme géométrique permet d'obtenir une excellente représentation de l'EPPOC puisqu'il détermine sa frontière en tenant compte de sa nature géométrique. Le principal inconvénient de cet algorithme est sa relative complexité. Par exemple, la réalisation de l'étape 3 de l'algorithme n'est pas triviale. Cependant, cette complexité peut également être considérée comme un intérêt de la méthode géométrique dans le sens où les difficultés liées à la réalisation de cette méthode motivent une meilleure compréhension de la nature et des propriétés de l'EPP. Finalement, la rapidité de la méthode géométrique, déjà très satisfaisante, pourrait être améliorée par l'utilisation d'une librairie géométrique spécialisée qui est cependant à développer. Remarquons que, tel que programmé dans Matlab 7 et exécuté sur un PC équipé d'un processeur de 1.80 GHz, l'algorithme géométrique prend approximativement 700 ms pour déterminer la frontière de l'EPPOC montrée à la figure 2.18.

## 2.5 Exemples d'espaces des poses polyvalentes

Cette section discute brièvement de géométries de mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles pour lesquelles l'EPPOC ou l'EPP n'existe pas. Puis, l'algorithme géométrique présenté dans la section précédente est appliqué à la détermination de l'EPP des mécanismes dont l'effecteur et la base sont rectangulaires.

### 2.5.1 EPP et EPPOC inexistantes

D'après la conséquence du théorème 3 énoncée à la fin de la section 2.2.2, l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles dont l'effecteur est dans une orientation telle qu'au moins une des coniques  $\mathcal{C}_i$  dégénère en tout le plan n'existe pas. Ainsi, l'EPP n'existe pas quand au moins une des coniques  $\mathcal{C}_i$  dégénère en tout le plan quelle que soit l'orientation de l'effecteur. Remarquons que des conditions nécessaires et suffisantes à la dégénérescence d'une conique  $\mathcal{C}_i$  en tout le plan sont données à la section 3.3.2.2. Par exemple, l'EPP d'un mécanisme entraîné par quatre câbles dont l'effecteur n'a que deux points d'attache tels que trois câbles s'attachent en un de ces deux points n'existe pas. D'autres mécanismes pour lesquels l'EPP n'existe pas sont ceux dont la base et l'effecteur sont des rectangles similaires (le rectangle de l'effecteur peut être obtenu du rectangle de la base par une homothétie) et dont les câbles ne se croisent pas. Le mécanisme montré à la figure 2.5 est un mécanisme de ce type, sa base et son effecteur étant carrés.

### 2.5.2 Base et effecteur rectangulaires

Aux discussions et résultats présentés dans [94, 113, 125, 127, 128], la détermination de l'EPP par l'algorithme géométrique nous permet d'ajouter les résultats suivants.

Considérons un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles dont la base et l'effecteur sont des rectangles. Considérons le cas des mécanismes dont les câbles ne sont pas croisés tel qu'illustré à la figure 2.19. Dans [94], un mécanisme ayant une base carrée et un effecteur rectangulaire est pris comme exemple et il est

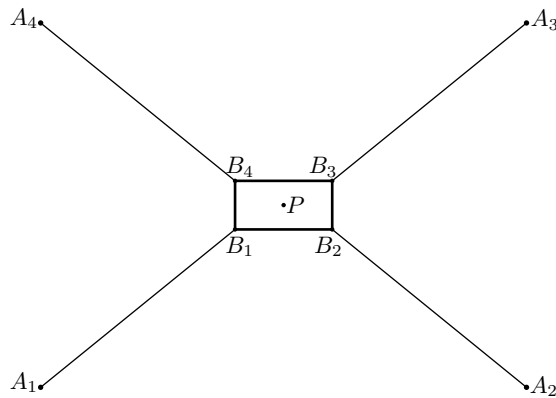


FIG. 2.19 – Mécanisme entraîné par quatre câbles ayant une base et un effecteur rectangulaires.

trouvé que l'EPP de ce mécanisme disparaît quand l'orientation de l'effecteur est telle que la droite  $(B_1B_3)$  est parallèle à la droite  $(A_1A_3)$  ou telle que la droite  $(B_2B_4)$  est parallèle à la droite  $(A_2A_4)$ . L'algorithme géométrique confirme ce résultat et montre qu'il est vrai pour tout mécanisme ayant une base et un effecteur rectangulaires et des câbles non croisés tel que celui montré à la figure 2.19. Remarquons que, par symétrie du mécanisme, l'orientation pour laquelle la droite  $(B_1B_3)$  est parallèle à la droite  $(A_1A_3)$  est l'opposée de celle pour laquelle la droite  $(B_2B_4)$  est parallèle à la droite  $(A_2A_4)$ . Par exemple, la base du mécanisme montré à la figure 2.20 forme un carré tandis que son effecteur est rectangulaire tel que, quand l'orientation  $\phi$  de l'effecteur est nulle ( $(B_1B_2)$  et  $(A_1A_2)$  sont parallèles), la droite  $(B_1B_3)$  fait approximativement un angle de 26.56 degrés avec l'horizontale. Par conséquent, L'EPP de ce mécanisme, montré à la figure 2.21, disparaît pour  $\phi = \pm(45 - 26.56) = \pm 18.44$  degrés. Aussi, sans croiser les câbles et en supposant que la base est carrée, l'EPP qui existe pour la plage d'orientation la plus étendue est obtenu quand, pour l'orientation de référence  $\phi = 0$  de l'effecteur, l'angle entre les droites  $(A_1A_3)$  et  $(B_1B_3)$  est le plus grand, c'est-à-dire quand les points  $B_1$  et  $B_4$  et les points  $B_2$  et  $B_3$  sont confondus (ou quand les points  $B_1$  et  $B_2$  et les points  $B_3$  et  $B_4$  sont confondus). Ce cas est celui du mécanisme montré à la figure 2.8 pour lequel l'EPP disparaît quand l'orientation  $\phi$  de l'effecteur vaut  $\pm 45$  degrés tel que montré à la figure 2.22.

Considérons à présent le cas des mécanismes dont la base et l'effecteur sont rectangulaires mais dont les câbles sont croisés. Un mécanisme de ce type est montré à la figure 2.23 où la base et l'effecteur sont carrés. Ces mécanismes ont en général un EPP

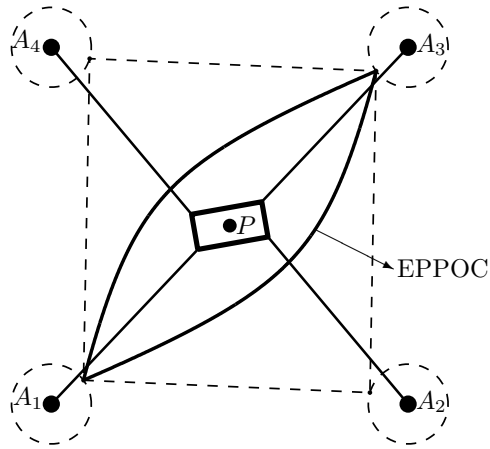


FIG. 2.20 – Mécanisme dont la base est un carré et l'effecteur un rectangle.

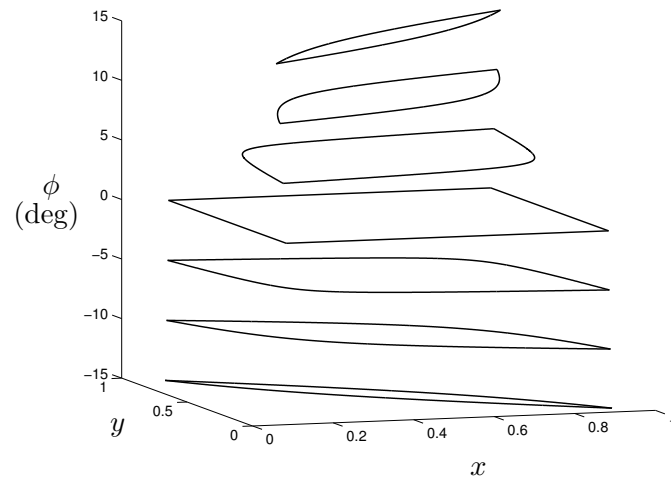


FIG. 2.21 – Approximation de l'EPP du mécanisme montré à la figure 2.20.

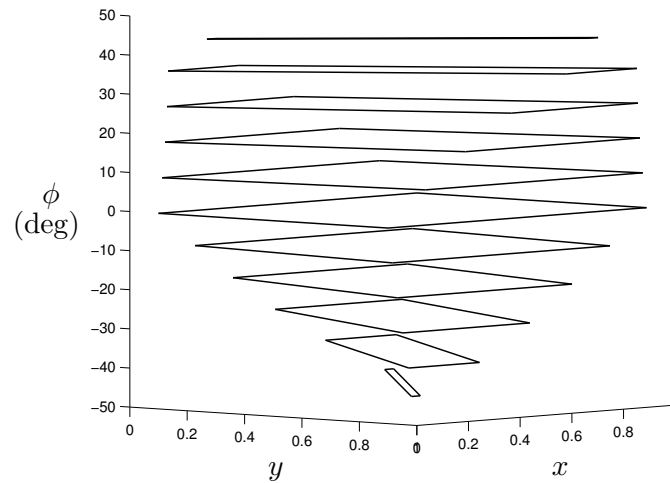


FIG. 2.22 – EPP d’un mécanisme dont la base est carrée et dont l’effecteur n’a que deux points d’attache.

plus grand que leurs homologues à câbles non croisés [125, 127]. L’algorithme géométrique montre que leurs EPPOC existent pour toute orientation  $\phi$  de l’effecteur telle que  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$  où l’orientation de référence  $\phi = 0$  est l’orientation de l’effecteur pour laquelle les droites  $(B_1B_2)$  et  $(A_1A_2)$  sont parallèles tel que montré à la figure 2.23. Cependant, l’algorithme géométrique montre également que, quand l’orientation  $\phi$  est plus grande que l’orientation pour laquelle la droite  $(B_1B_3)$  est parallèle à la droite  $(A_1A_3)$  ou plus petite que l’orientation pour laquelle la droite  $(B_2B_4)$  est parallèle à la droite  $(A_2A_4)$ , l’EPPOC est composé de deux parties disjointes. La convention choisie est telle que l’angle  $\phi$  augmente quand l’effecteur tourne dans le sens inverse des aiguilles d’une montre. Par exemple, la figure 2.24 montre un mécanisme dont l’effecteur est dans une orientation telle que l’EPPOC est composé de deux parties disjointes. Ainsi, étant donné que le mécanisme à câbles croisés montré à la figure 2.23 a une base et un effecteur carrés, son EPP existe et n’est pas composé de plusieurs parties disjointes pour toute orientation  $\phi$  de son effecteur telle que  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ . L’EPP de ce mécanisme est montré à la figure 2.25 pour  $0 \leq \phi < \pi/2$ . Au meilleur de notre connaissance, parmi toutes les géométries de mécanismes entraînés par quatre câbles, la géométrie du mécanisme montré à la figure 2.23 est celle qui donne l’EPP existant pour la plage d’orientation de l’effecteur la plus étendue. Finalement, notons que l’EPP des mécanismes entraînés par quatre câbles, croisés ou non, existe également pour une plage d’orientation  $\phi$  de l’effecteur centrée autour de  $\phi = \pi$ .

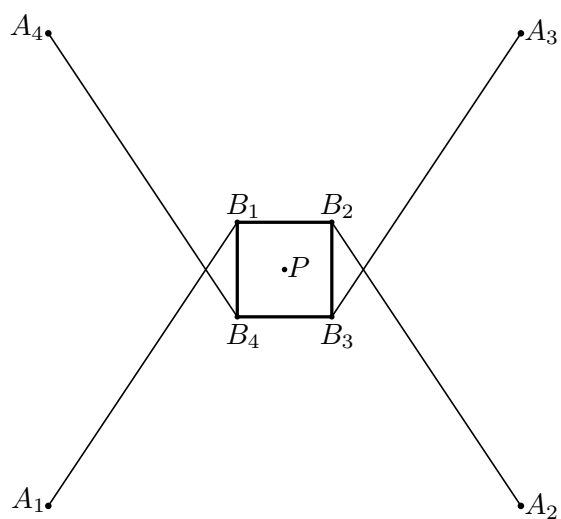


FIG. 2.23 – Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par quatre câbles croisés.

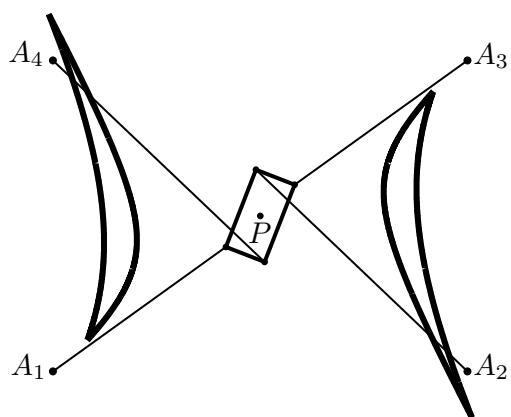


FIG. 2.24 – Un mécanisme à câbles croisés et son EPPOC composé de deux parties disjointes.

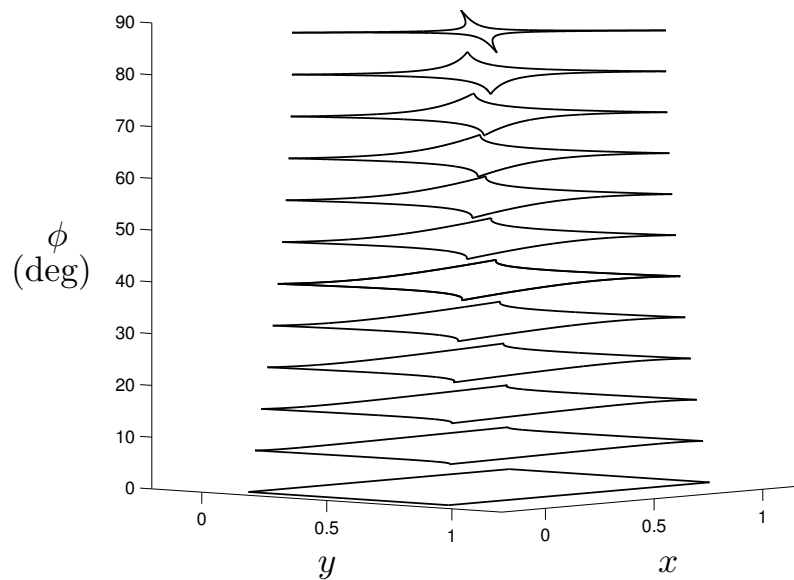


FIG. 2.25 – L’EPP du mécanisme montré à la figure 2.23.

## 2.6 Conclusion

À partir d’un modèle cinématique simple et d’une caractérisation des poses polyvalentes, ce chapitre a discuté des propriétés et de la détermination de l’EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles. Il a notamment été prouvé que la frontière de l’EPPOC de ces mécanismes est composée d’arcs des coniques sur lesquelles trois des quatre colonnes de la matrice des torseurs sont linéairement dépendantes. Aussi, une méthode géométrique consistant à déterminer l’EPPOC par recherche de sa frontière parmi ces arcs de coniques a été présentée. L’utilisation de cette méthode révèle que l’étendue et la géométrie de l’EPPOC et, par conséquent, de l’EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles sont fortement dépendantes de la géométrie du mécanisme, c’est-à-dire des positions des poulies actionnées à la base et des positions des points d’attache des câbles à l’effecteur. De plus, l’EPP des mécanismes entraînés par quatre câbles est généralement petit. Par conséquent, la méthode géométrique de détermination de l’EPPOC est un outil très utile au choix de la géométrie de ces mécanismes.

Les principaux résultats de ce chapitre ont été publiés dans [41]. En outre, une partie de ces résultats ont été confirmés par les travaux présentés dans [103] et [134].

Le principal objectif du chapitre suivant est de généraliser les résultats présentés dans ce chapitre aux mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de quatre câbles.



# Chapitre 3

## Espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de quatre câbles

Ce chapitre généralise les résultats du chapitre précédent aux mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 4$ . La problématique de la détermination de l'espace des poses polyvalentes de ces mécanismes ainsi que la notion de configuration polyvalente des torseurs colonnes de la matrice des torseurs sont introduites. Puis, une étude exhaustive des différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans est présentée. Cette étude permet de discuter de la répartition des poses polyvalentes associées aux différents types de configurations polyvalentes au sein de l'EPPOC. Finalement, la méthode géométrique de détermination de l'EPPOC est généralisée au cas des mécanismes entraînés par plus de quatre câbles.

## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Torseur appliqué à l'effecteur par $m \geq 4$ câbles

Le modèle cinématique d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles est le même que celui d'un mécanisme entraîné par quatre câbles présenté à la section 2.1. Ce modèle est montré à la figure 3.1. Le  $i^{\text{e}}$  câble du mécanisme applique sur l'effecteur un torseur dont la réduction au point de référence  $P$  est donnée par l'équation (2.3). La relation entre les tensions dans les câbles et la réduction en  $P$  du torseur appliqué par l'ensemble des câbles entraînant le mécanisme reste

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{W}\mathbf{t} \quad (3.1)$$

mais avec

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

L'EPP et l'EPPOC des mécanismes plans entraînés par quatre câbles sont définis par les définitions 1 et 2 énoncées à la section 2.2.1 et les poses appartenant à ces espaces sont caractérisées par le théorème 1. Ces deux définitions et ce théorème s'appliquent également aux mécanismes plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles. Finalement, rappelons que l'EPP existe seulement si le nombre de câbles  $m$  est supérieur au nombre de ddl du mécanisme donc, dans ce chapitre, seulement si  $m \geq 4$ .

### 3.1.2 Problématique

Commençons cette sous-section en définissant la notion de configuration polyvalente.

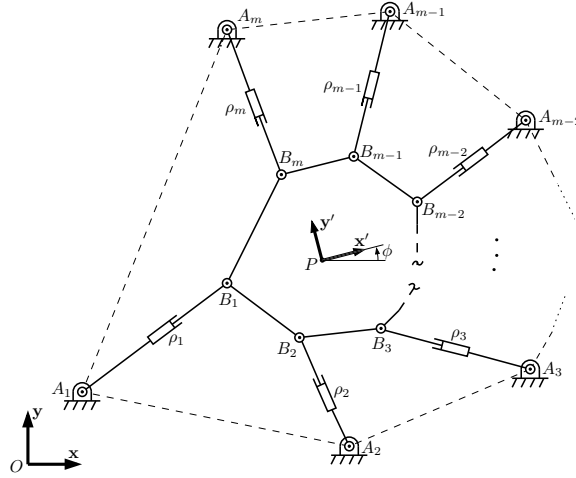


FIG. 3.1 – Modèle cinématique d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles.

**Définition 4** *Quand une pose d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles est polyvalente alors les colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  associées à cette pose, i.e., les torseurs  $\mathbf{w}_i$  définis à l'équation (2.3), sont dans une configuration polyvalente.*

Ainsi, quand un ensemble de torseurs  $\mathbf{w}_i$  est dans une configuration polyvalente, les torseurs de cet ensemble peuvent « générer positivement » tout torseur  $\mathbf{w}_p \in \mathbb{R}^3$ , i.e., l'ensemble de leurs combinaisons linéaires à coefficients positifs engendre  $\mathbb{R}^3$ . De plus, trois des torseurs  $\mathbf{w}_i$  sont linéairement indépendants. Par abus de langage, nous parlerons de configuration polyvalente de  $p$  câbles d'un mécanisme à la place de parler de configuration polyvalente des  $p$  torseurs  $\mathbf{w}_i$  associés à ces  $p$  câbles.

Considérons un mécanisme parallèle plan entraîné par  $m$  câbles tel que  $m > 4$ . Il est clair physiquement que si la pose de l'effecteur de ce mécanisme est telle que quatre des  $m$  câbles sont capables de générer tout torseur  $\mathbf{w}_p$  à l'effecteur, i.e., si quatre des  $m$  câbles sont dans une configuration polyvalente, alors les  $m$  câbles du mécanisme sont capables de générer tout torseur  $\mathbf{w}_p$ .

**Théorème 5** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles est polyvalente si les torseurs  $\mathbf{w}_i$  associés à quatre des  $m$  câbles du mécanisme sont dans une configuration polyvalente.*

Néanmoins, prouvons rigoureusement ce théorème. Soit  $\mathbf{W}$  la matrice des torseurs associée à la pose considérée dans le théorème 5. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que les quatre torseurs qui sont dans une configuration polyvalente sont les quatre premières colonnes  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  de  $\mathbf{W}$ . Alors, par définition d'une configuration polyvalente, il existe  $\mathbf{t}_4 \geq \mathbf{0}$  tel que  $[\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4]\mathbf{t}_4 = \mathbf{w}_p$  où  $\mathbf{w}_p$  peut être n'importe quel torseur. En particulier, pour  $\mathbf{w}_p = -\mathbf{W}\mathbf{1}_m$ , il existe un vecteur  $\mathbf{t}_4 \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\mathbf{t}_4 \geq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4]\mathbf{t}_4 = -\mathbf{W}\mathbf{1}_m \quad (3.3)$$

où le vecteur  $\mathbf{1}_m$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  dont tous les éléments valent 1. L'équation (3.3) implique qu'il existe un vecteur  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$  dans  $\mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

i.e. implique que la condition (2.9) du théorème 1 est vraie. En outre, les torseurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  étant dans une configuration polyvalente, trois d'entre eux sont linéairement indépendants et la matrice  $\mathbf{W}$  est de plein rang. Par conséquent les deux conditions du théorème 1 sont vérifiées et la pose associée à  $\mathbf{W}$  est polyvalente ce qui prouve le théorème 5.

Le théorème 5 montre que les poses associées aux configurations polyvalentes de quatre des  $m$  câbles d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl composent en partie l'EPP de ce type de mécanisme. Cependant, il ne permet pas de caractériser complètement l'EPP parce que la condition suffisante énoncée par le théorème 5 n'est pas nécessaire. En effet, considérons trois torseurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  quelconques mais linéairement indépendants. Ces trois torseurs forment une base de  $\mathbb{R}^3$  et il n'est pas difficile de prouver que les torseurs de l'ensemble  $\mathcal{T} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, -\mathbf{w}_1, -\mathbf{w}_2, -\mathbf{w}_3\}$  sont dans une configuration polyvalente. Il peut aussi être prouvé qu'il n'existe pas de sous-ensemble de  $\mathcal{T}$  dont les éléments sont quatre torseurs dans une configuration polyvalente. Un tel cas de configuration polyvalente est illustré à la figure 3.4 où  $\mathbf{w}_4 = -\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_5 = -\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_6 = -\mathbf{w}_3$ . Ainsi, la condition suffisante énoncée par le théorème 5 n'est pas nécessaire et l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles contient éventuellement des poses qui ne correspondent pas à des configurations polyvalentes à

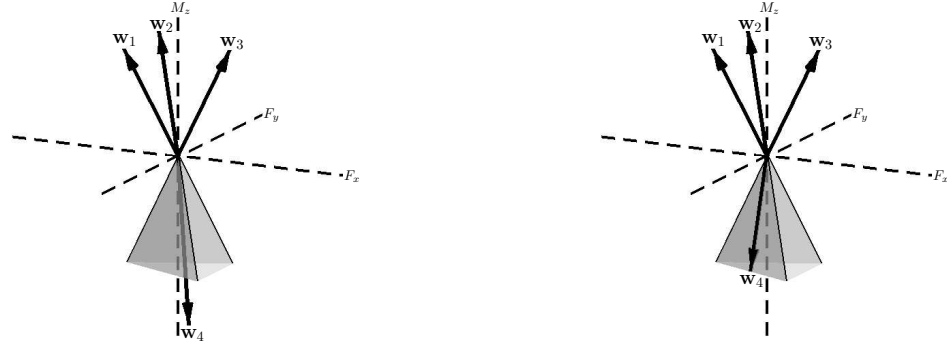
quatre câbles. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans (i.e. des torseurs  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^3$ ) et d'étudier les relations entre ces différents types de configurations polyvalentes et les poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles.

## 3.2 Configurations polyvalentes des torseurs plans

Cette section présente trois types de configurations polyvalentes des torseurs plans. Il est montré que les torseurs  $\mathbf{w}_i$ , colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ , sont dans une configuration polyvalente *si et seulement si* quatre, cinq ou six d'entre eux sont dans un de ces trois types de configurations polyvalentes. En d'autres termes, en identifiant les torseurs plans  $\mathbf{w}_i$  à des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ ,  $m$  vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  engendrent positivement  $\mathbb{R}^3$ , i.e. l'ensemble de leurs combinaisons linéaires à coefficients positifs engendre  $\mathbb{R}^3$ , *si et seulement si* quatre, cinq ou six de ces  $m$  vecteurs sont dans une configuration polyvalente correspondant à un des trois types présentés dans cette section.

### 3.2.1 Quatre torseurs

Considérons une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  ayant quatre colonnes  $\mathbf{w}_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ). D'après le théorème 1, trois de ces quatre torseurs sont linéairement indépendants et nous pouvons supposer que ces trois torseurs sont  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$ . Une interprétation géométrique de la condition (2.9) du théorème 1 est : le torseur  $\mathbf{w}_4$  est situé à l'intérieur et pas sur la frontière du cône généré par l'ensemble  $\{-\mathbf{w}_1, -\mathbf{w}_2, -\mathbf{w}_3\}$ . Une configuration polyvalente de ce type sera appelée *configuration polyvalente à quatre torseurs*. Une telle configuration polyvalente est montrée à la figure 3.2 (a). Par abus de langage, nous parlerons également de configuration polyvalente à quatre câbles. La figure 3.2 (b) montre une configuration des quatre torseurs d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  d'un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles pour laquelle les torseurs  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  sont linéairement dépendants. Ainsi, la pose de l'effecteur correspondant à cette configuration est telle que le premier élément du vecteur  $\mathbf{z}_0$  défini à l'équation (2.11) est nul. En outre, cette pose est également telle que les trois autres éléments du vecteur



(a) Configuration polyvalente à quatre torseurs.

(b) Configuration associée à une pose appartenant à la frontière de l'EPP.

FIG. 3.2 – Configurations de quatre torseurs dans leur espace à trois dimensions.

$\mathbf{z}_0$  ont le même signe et une telle pose appartient généralement à la frontière de l'EPP.

### 3.2.2 Cinq torseurs

Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par cinq câbles a une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 5$ . Le théorème suivant présente une condition nécessaire et suffisante à la polyvalence des cinq colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ .

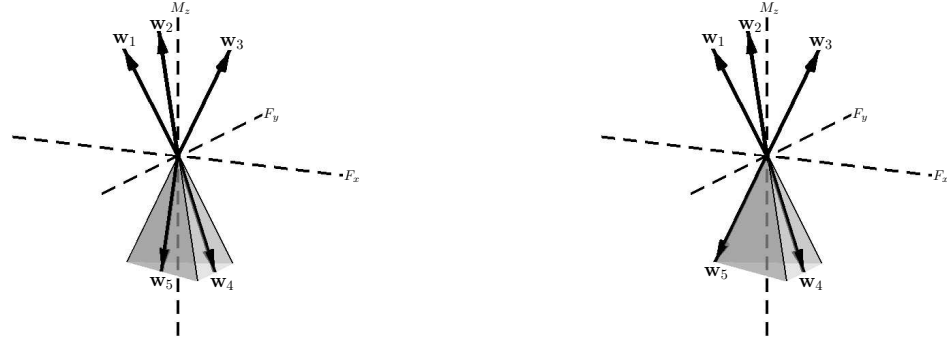
**Théorème 6** *Les cinq torseurs  $\mathbf{w}_i$  d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 5$  sont dans une configuration polyvalente si et seulement si*

- quatre de ces cinq torseurs sont dans une configuration polyvalente à quatre torseurs ou
- trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et un des deux autres torseurs  $\mathbf{w}_q$  est tel que

$$\mathbf{w}_q \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_j, -\mathbf{w}_k\}), \quad (3.5)$$

tandis que le dernier torseur  $\mathbf{w}_r$  est tel que

$$\mathbf{w}_r \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_j, -\mathbf{w}_l\}) \text{ ou} \quad (3.6)$$



(a) Cinq torseurs dans une configuration polyvalente minimale.

(b) Cinq torseurs dans une configuration polyvalente minimale particulière.

FIG. 3.3 – Exemples de configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs.

$$\mathbf{w}_r \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_k, -\mathbf{w}_l\}) \text{ ou} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{w}_r \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_l\}). \quad (3.8)$$

La définition suivante s'applique aux notations du théorème 6.

$$\text{int}(\text{cone}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i, \lambda_i > 0 \ \forall i \right\}. \quad (3.9)$$

La démonstration du théorème 6 étant relativement longue, elle est présentée à l'annexe C. Le deuxième cas du théorème 6 définit une *configuration polyvalente minimale à cinq torseurs*. Par exemple, une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs satisfaisant l'équation (3.6) ou l'équation (3.7) est montrée à la figure 3.3 (a). Une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs satisfaisant l'équation (3.8) est montrée à la figure 3.3 (b). Ce type de configuration polyvalente est dite « minimale » car si cinq torseurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une telle configuration polyvalente alors aucune combinaison de quatre d'entre eux n'est dans une configuration polyvalente, i.e., si un seul des cinq  $\mathbf{w}_i$  est supprimé, les quatre restants ne sont plus dans une configuration polyvalente. La preuve de ce résultat est également proposée à l'annexe C.

### 3.2.3 Six torseurs

À présent, considérons le cas d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par six câbles. La matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de ce mécanisme est de dimension  $3 \times 6$ . Le théorème suivant présente une condition nécessaire et suffisante à la polyvalence des six colonnes de cette matrice.

**Théorème 7** *Les six torseurs  $\mathbf{w}_i$  d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 6$  sont dans une configuration polyvalente si et seulement si*

- quatre de ces six torseurs sont dans une configuration polyvalente à quatre torseurs ou
- cinq de ces six torseurs sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs ou
- trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et les trois autres torseurs  $\mathbf{w}_q$ ,  $\mathbf{w}_r$  et  $\mathbf{w}_s$  sont tels que

$$\mathbf{w}_q \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_j\}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{w}_r \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_k\}) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{w}_s \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_l\}). \quad (3.12)$$

La démonstration du théorème 7 est présentée à l'annexe C pour la même raison que celle du théorème 6. Le troisième cas du théorème 7 définit une *configuration polyvalente minimale à six torseurs*. La figure 3.4 donne un exemple d'une telle configuration polyvalente où  $j = 1$ ,  $k = 2$ ,  $l = 3$ ,  $q = 4$ ,  $r = 5$  et  $s = 6$ . Remarquons qu'une configuration polyvalente minimale à six torseurs consiste à associer à chaque vecteur d'une base de  $\mathbb{R}^3$  son opposé de manière à obtenir une nouvelle base de  $\mathbb{R}^3$  qui peut être considérée comme opposée à la première. Il apparaît alors clairement que les six vecteurs ainsi obtenus engendrent positivement  $\mathbb{R}^3$ , i.e., que tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  peut être écrit comme une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de ces six vecteurs. En outre, comme dans le cas des configurations polyvalentes définies par le deuxième cas du théorème 6, les configurations polyvalentes définies au troisième cas du théorème 7 sont dites « minimales » parce qu'aucune combinaison de quatre ou cinq des six torseurs impliquées dans une telle configuration polyvalente est dans une configuration polyvalente. Ce résultat est démontré à la section C.4 de l'annexe C.



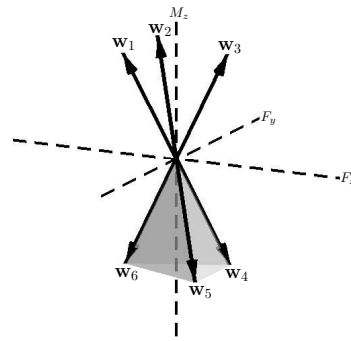


FIG. 3.4 – Une configuration polyvalente minimale à six torseurs.

### 3.2.4 Plus de six torseurs

Finalement, le théorème 8 énoncé ci-dessous s'applique aux mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de six câbles. Il montre que tous les types de configurations polyvalentes ont été présentés dans les trois sous-sections précédentes.

**Théorème 8** *Quand  $m > 6$ , les torseurs d'une matrice des torseurs de dimension  $3 \times m$  sont dans une configuration polyvalente si et seulement si, parmi ces  $m$  torseurs, quatre sont dans une configuration polyvalente à quatre torseurs, cinq sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs ou six sont dans une configuration polyvalente minimale à six torseurs.*

Une démonstration de ce théorème est proposée à la section C.5 de l'annexe C.

## 3.3 Propriétés et nature de l'espace des poses polyvalentes

### 3.3.1 Propriétés

Les propriétés 1 et 6 présentées à la section 2.3.2 restent vraies pour les mécanismes entraînés par plus de quatre câbles. Nous pouvons par conséquent les généraliser. Notons que les propriétés énoncées dans cette section ne suivent pas la même numérotation que celles présentées à la section 2.3.2.

**Propriété 1** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est éventuellement vide.*

**Propriété 2** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est un espace sans singularité.*

La propriété 4 énoncée à la section 2.3.2 peut également être généralisée aux mécanismes entraînés par quatre câbles et plus.

**Propriété 3** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est éventuellement composé de parties disjointes.*

Par exemple, pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure, le mécanisme plan entraîné par six câbles montré à la figure 3.5 a un EPPOC composé de deux parties disjointes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ . Notons que la géométrie de ce mécanisme a été générée aléatoirement.

La propriété 2 de la section section 2.3.2 se généralise également.

**Propriété 4** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est une partie bornée du plan.*

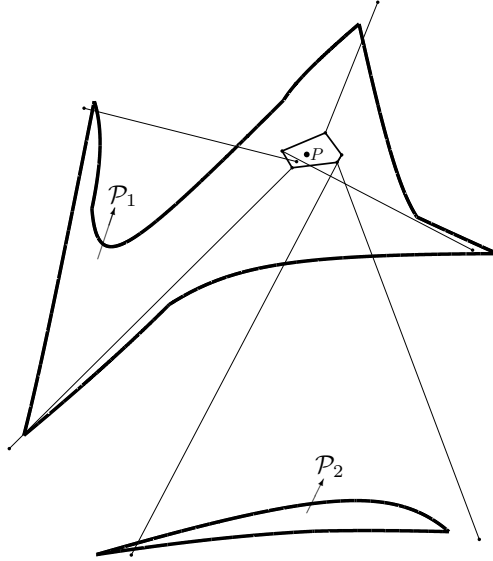


FIG. 3.5 – Exemple d'un EPPOC composé de deux parties disjointes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

En effet, la définition 3 et le théorème 4 présentés à la section 2.3.1 peuvent être étendus sans difficultés aux mécanismes entraînés par plus de quatre câbles.

**Définition 5**  $\mathcal{P}_f$  est l'ensemble des poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) telles que

$$\text{rank}(\mathbf{W}_{12}) = 2 \quad (3.13)$$

et

$$\exists \mathbf{z}_f > \mathbf{0} \text{ tel que } \mathbf{W}_{12}\mathbf{z}_f = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{z}_f \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{W}_{12}$  est la matrice obtenue de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  en supprimant sa dernière ligne, i.e.,  $\mathbf{W}_{12} = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \dots \ \mathbf{d}_m]$ . Pour une orientation constante  $\phi$  de l'effecteur, l'ensemble des positions du point de référence  $P$  qui appartiennent à  $\mathcal{P}_f$  est appelé  $\mathcal{P}_{f\phi}$ .

**Théorème 9** Pour une orientation donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ), l'ensemble  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est l'intérieur du plus grand polygone convexe dont les sommets sont des éléments de l'ensemble  $\{A_1^v, A_2^v, \dots, A_m^v\}$ , i.e.,  $\mathcal{P}_{f\phi}$  est l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points  $\{A_1^v, A_2^v, \dots, A_m^v\}$ .

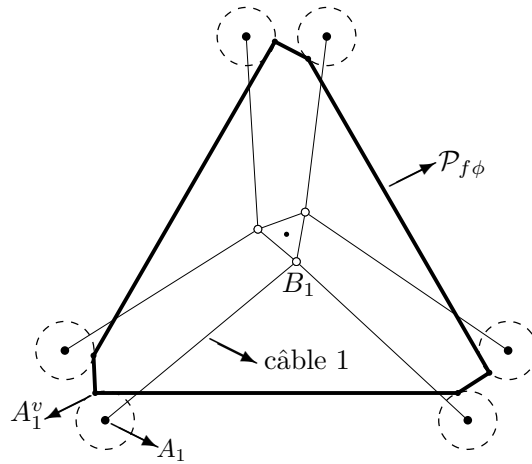


FIG. 3.6 – Exemple d’un polygone convexe  $\mathcal{P}_{f\phi}$  d’un mécanisme plan entraîné par six câbles.

Ainsi, quelle que soit l’orientation de l’effecteur, L’EPPOC étant inclus dans  $\mathcal{P}_{f\phi}$  qui, d’après le théorème 9, est une partie bornée du plan, l’EPPOC est également une partie bornée du plan. Par exemple, un polygone convexe  $\mathcal{P}_{f\phi}$  d’un mécanisme entraîné par six câbles est montré à la figure 3.6. Il a été obtenu pour l’orientation de l’effecteur montrée à la figure. S’il existe, l’EPPOC de ce mécanisme est inclus dans  $\mathcal{P}_{f\phi}$ .

À présent, énonçons une propriété fondamentale qui est une conséquence directe des théorèmes 6, 7 et 8.

**Propriété 5** *L’EPP d’un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) peut être caractérisé par la réunion suivante*

$$EPP \equiv \left( \bigcup_{i=1}^{n_4} \mathcal{S}_{4i} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n_5} \mathcal{S}_{5i} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{n_6} \mathcal{S}_{6i} \right). \quad (3.15)$$

À l’équation (3.15), le scalaire  $n_j$  ( $j = 4, 5$  et  $6$ ) est égal au nombre de combinaisons de  $j$  câbles pris parmi les  $m$  câbles du mécanisme, i.e.,

$$n_j = \frac{m!}{j!(m-j)!}. \quad (3.16)$$

Étant donné que chaque câble du mécanisme est associé à une colonne de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ ,  $n_j$  est également le nombre de combinaisons de  $j$  colonnes de  $\mathbf{W}$  prises parmi ses  $m$  colonnes. De plus, à l'équation (3.15), l'ensemble  $\mathcal{S}_{4i}$  est l'ensemble des poses polyvalentes de l'effecteur associées aux configurations polyvalentes à quatre torseurs de la  $i^{\text{e}}$  combinaison de quatre colonnes de  $\mathbf{W}$  ( $i = 1, \dots, n_4$ ). De même, l'ensemble  $\mathcal{S}_{5i}$  est l'ensemble des poses de l'effecteur associées aux configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs de la  $i^{\text{e}}$  combinaison de cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  tandis que  $\mathcal{S}_{6i}$  est l'ensemble des poses de l'effecteur associées aux configurations polyvalentes minimales à six torseurs de la  $i^{\text{e}}$  combinaison de six colonnes de  $\mathbf{W}$ . Le nombre de câbles  $m$  des mécanismes plans étudiés dans ce chapitre pouvant être inférieur ou égal à six, nous ajoutons à ces définitions les deux précisions suivantes

$$\bigcup_{i=1}^{n_5} \mathcal{S}_{5i} = \emptyset \text{ si } m < 5 \quad (3.17)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n_6} \mathcal{S}_{6i} = \emptyset \text{ si } m < 6 \quad (3.18)$$

où  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide. Ainsi, la propriété 5 formalise une conséquence importante des théorèmes 6, 7 et 8 : l'EPP d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles est composé des poses de l'effecteur pour lesquelles quatre colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalentes ou cinq ou six colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente minimale.

Finalement, énonçons deux autres propriétés.

**Propriété 6** *L'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est un ensemble ouvert.*

Une démonstration de cette propriété est proposée à la section A.3 de l'annexe A dans le cas général d'un mécanisme à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > n$ . La propriété 6 est importante à la détermination de la frontière de l'EPPOC.

**Propriété 7** *La frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est composée d'arcs de coniques qui sont les lieux de dépendances linéaires de trois des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ .*

La propriété 7 est fondamentale à la généralisation aux mécanismes plans entraînés par un nombre quelconque de câbles de l'algorithme géométrique présenté dans le chapitre précédent. Elle va être démontrée par les discussions présentées dans les sous-sections suivantes.

### 3.3.2 Relation entre les poses de l'effecteur et les configurations polyvalentes

Dans cette sous-section, les ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ ,  $\mathcal{S}_{5i}$  et  $\mathcal{S}_{6i}$  sont successivement étudiés.

#### 3.3.2.1 Configurations polyvalentes à quatre torseurs

Dans cette section, nous étudions l'ensemble de poses polyvalentes  $\mathcal{S}_4$  défini par

$$\mathcal{S}_4 \equiv \bigcup_{i=1}^{n_4} \mathcal{S}_{4i} \quad (3.19)$$

i.e. nous étudions l'ensemble des poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) associées aux configurations polyvalentes à quatre torseurs des colonnes de la matrice de torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme.

Soit  $(j, k, l, p)$  la  $i^e$  combinaison de quatre câbles pris parmi les  $m$  câbles du mécanisme, i.e., la  $i^e$  combinaison de quatre colonnes de  $\mathbf{W}$  ( $1 \leq i \leq n_4$ ). Par définition,  $\mathcal{S}_{4i}$  est l'EPP du mécanisme entraîné par quatre câbles obtenu du mécanisme parallèle plan entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) en supprimant tous ses câbles exceptés les câbles  $j$ ,  $k$ ,  $l$  et  $p$ . Ainsi, les ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  sont connus puisque leurs propriétés et leur détermination ont été discutées en détail dans le chapitre précédent.

Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  consiste en la réunion des EPP des mécanismes en-

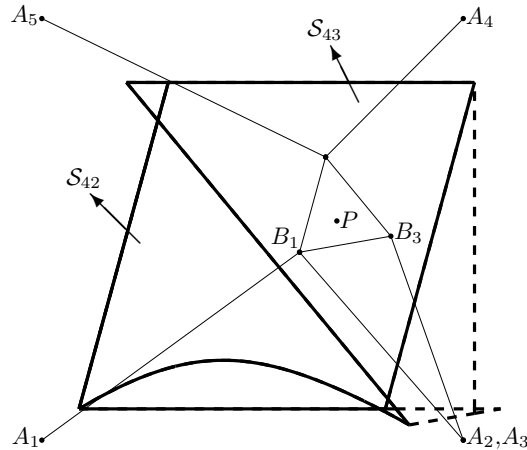


FIG. 3.7 – La réunion de cinq EPPOC associés aux mécanismes à quatre câbles obtenus du mécanisme à cinq câbles montré à la figure.

traînés par quatre câbles obtenus du mécanisme entraîné par  $m$  câbles en ne conservant que quatre de ses  $m$  câbles. D'après les propriétés 2, 3 et 5 de la section 2.3.2, *pour une orientation constante de l'effecteur, l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  est une partie ouverte et bornée du plan dont la frontière est composée d'arcs de coniques, ces coniques étant les lieux des positions de l'effecteur pour lesquelles trois des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont linéairement dépendantes.* Par exemple, un mécanisme plan entraîné par cinq câbles est montré à la figure 3.7. Les câbles 1 et 2 partagent le même point d'attache  $B_1$  à l'effecteur. Pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure, les frontières des coupes à orientation constante des cinq ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  sont tracées en traits pleins et pointillés. Les traits pointillés correspondent aux frontières des coupes à orientation constante des trois ensembles  $\mathcal{S}_{41}$ ,  $\mathcal{S}_{44}$  et  $\mathcal{S}_{45}$  où  $\mathcal{S}_{4i}$  est l'EPP du mécanisme à quatre câbles obtenu en supprimant le câble  $i$  du mécanisme montré à la figure 3.7. Les traits pleins, qui recouvrent certains traits pointillés, correspondent pour leur part aux frontières des coupes à orientation constante de  $\mathcal{S}_{43}$  et  $\mathcal{S}_{42}$ . Le mécanisme montré à la figure 3.7 étant un mélange des mécanismes montrés aux figures 2.8 et 2.11, les coupes à orientation constante de  $\mathcal{S}_{42}$  et  $\mathcal{S}_{43}$  sont similaires aux EPPOC montrés aux figures 2.15 et 2.18 de la section 2.4.2. Pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure 3.7, les frontières de  $\mathcal{S}_{41}$ ,  $\mathcal{S}_{44}$  et  $\mathcal{S}_{45}$  sont montrées en traits pleins aux figures 3.8, 3.9 et 3.10, respectivement.

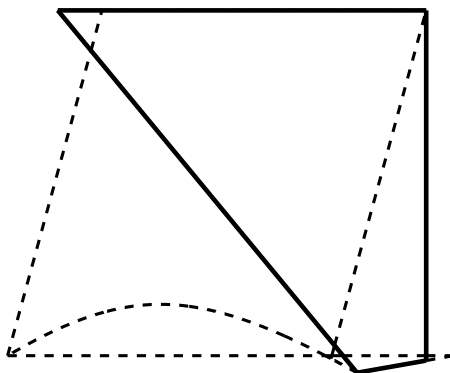


FIG. 3.8 – Une coupe à orientation constante de l'ensemble  $\mathcal{S}_{41}$ .

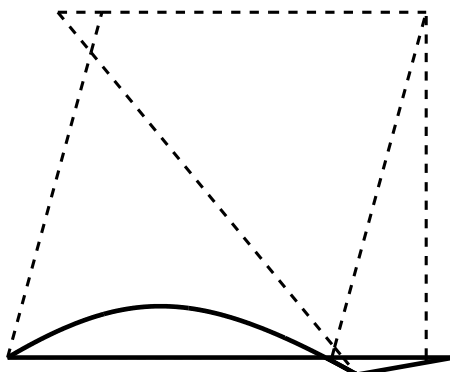


FIG. 3.9 – Une coupe à orientation constante de l'ensemble  $\mathcal{S}_{44}$ .

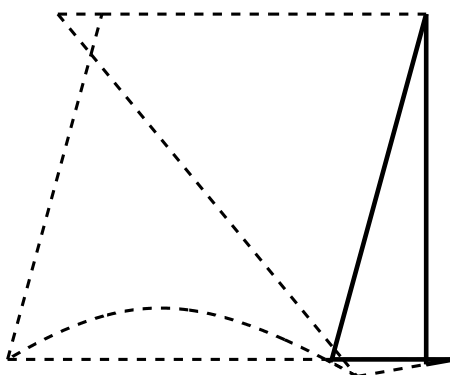


FIG. 3.10 – Une coupe à orientation constante de l'ensemble  $\mathcal{S}_{45}$ .



### 3.3.2.2 Configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs

À présent, intéressons-nous aux ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  ( $1 \leq i \leq n_5$ ). Par définition,  $\mathcal{S}_{5i}$  est l'ensemble des poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) associées aux configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs de la  $i^e$  combinaison de cinq colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. Soit  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  cette  $i^e$  combinaison de cinq colonnes de  $\mathbf{W}$ . D'après le théorème 6, ces cinq colonnes sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs si et seulement si trois d'entre elles sont linéairement indépendantes, l'équation (3.5) est vraie et une des équations (3.6), (3.7) ou (3.8) est vérifiée. Or, si  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  vérifient l'équation (3.5) alors ils sont linéairement dépendants

$$\det([\mathbf{w}_q \ \mathbf{w}_j \ \mathbf{w}_k]) = 0. \quad (3.20)$$

D'après la section 2.3.2, pour une orientation constante de l'effecteur, les positions du point de référence  $P$  de l'effecteur qui vérifient l'équation (3.20) définissent une conique  $\mathcal{C}_q$ . De plus, si une des trois équations (3.6), (3.7) ou (3.8) est vérifiée alors les torseurs  $\mathbf{w}_i$  impliqués dans cette équation sont linéairement dépendants. Pour une orientation constante de l'effecteur, cette dépendance linéaire est vérifiée sur une autre conique  $\mathcal{C}_r$ . Supposons qu'aucune des deux coniques  $\mathcal{C}_q$  et  $\mathcal{C}_r$  n'est dégénérée en tout le plan et soit, respectivement,  $\mathcal{A}_q$  et  $\mathcal{A}_r$  des arcs des coniques  $\mathcal{C}_q$  et  $\mathcal{C}_r$  sur lesquels l'équation (3.5) et une des équations (3.6), (3.7) ou (3.8) sont vérifiées. Alors, d'après le théorème 6, si elles existent, les poses de l'effecteur associées à des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs des colonnes de  $\mathbf{W}$  sont situées aux points d'intersection entre deux tels arcs  $\mathcal{A}_q$  et  $\mathcal{A}_r$ . En effet, une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs existe seulement si l'équation (3.5) et une des équations (3.6), (3.7) ou (3.8) sont toutes les deux vérifiées.

Ainsi, pour une orientation constante de l'effecteur, si aucune des coniques  $\mathcal{C}_i$  associées à la dépendance linéaire de trois des  $m$  colonnes de  $\mathbf{W}$  est dégénérée en tout le plan, la réunion des  $n_5$  ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  est un ensemble de points ou est vide. De plus, si cette réunion n'est pas vide, les points qui la composent sont des points d'intersection entre les coniques  $\mathcal{C}_i$ . Par exemple, un mécanisme plan entraîné par six câbles est montré à la figure 3.11. La frontière de son EPPOC  $y$  est tracée en traits pleins épais tandis que les traits pointillés montrent la frontière du polygone  $\mathcal{P}_{f\phi}$  défini à la section 3.3.1.

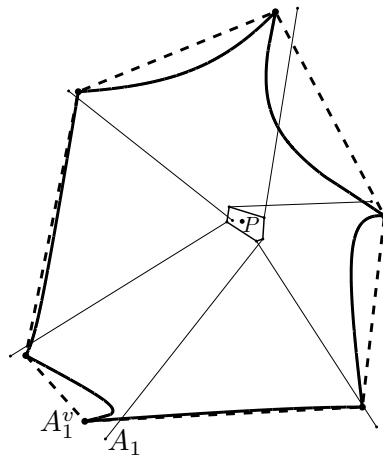


FIG. 3.11 – L'EPPOC et le polygone  $\mathcal{P}_{f\phi}$  d'un mécanisme plan entraîné par six câbles.

La réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  du mécanisme de la figure 3.11 est montrée à la figure 3.12 où les croix désignent les éléments de la réunion des  $n_5$  ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$ , i.e., les positions de l'effecteur pour lesquels cinq des six colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs. Remarquons qu'à la figure 3.12, bien que le point  $Q$  soit un point d'intersection entre deux coniques  $\mathcal{C}_i$ , il ne correspond pas à une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs (il correspond néanmoins à une configuration polyvalente à quatre torseurs).

À présent, pour une orientation constante de l'effecteur d'un mécanisme plan entraîné par  $m$  câbles, étudions les ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  quand au moins une des coniques  $\mathcal{C}_i$  est dégénérée en tout le plan. Rappelons que la conique  $\mathcal{C}_i$  est le lieu des points du plan pour lesquels la  $i^{\text{e}}$  combinaison  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_q)$  de trois des  $m$  colonnes de  $\mathbf{W}$  est une combinaison de torseurs linéairement dépendants. Avant de commencer l'étude des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$ , énonçons le résultat fondamental suivant. La conique  $\mathcal{C}_i$  dégénère en tout le plan *si et seulement si* la géométrie du mécanisme et, éventuellement, l'orientation de son effecteur sont telles qu'un des cas 1, 2, 3 ou 4 présentés ci-dessous est vérifié.

- *Cas 1* :  $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_k = \mathbf{b}_q$ , i.e., les trois points  $B_j$ ,  $B_k$  et  $B_q$  de l'effecteur sont confondus.
- *Cas 2* :  $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_q$ , i.e., les trois points  $A_j$ ,  $A_k$  et  $A_q$  de la base sont confondus.
- *Cas 3* : deux de trois indices  $j$ ,  $k$  et  $q$ , disons  $j$  et  $k$ , sont tels que  $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_k$ , i.e., les deux câbles  $j$  et  $k$  du mécanisme sont confondus.

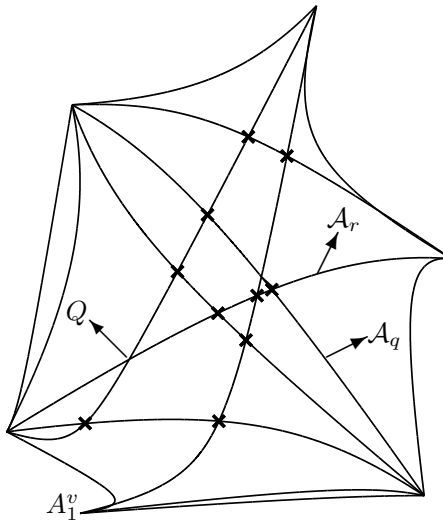


FIG. 3.12 – La réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  et les ensembles de points  $\mathcal{S}_{5i}$  obtenus pour le mécanisme et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 3.11.

- *Cas 4* : il existe un scalaire  $\alpha \neq 0$  tel que  $\mathbf{b}_k - \mathbf{b}_j = \alpha(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j)$  et  $\mathbf{b}_q - \mathbf{b}_j = \alpha(\mathbf{a}_q - \mathbf{a}_j)$ , i.e., le mécanisme et l'orientation de son effecteur sont tels que le triangle  $\Delta_p$ , de sommets  $B_j, B_k$  et  $B_q$ , peut être obtenu du triangle  $\Delta_b$ , de sommets  $A_j, A_k$  et  $A_q$ , par une homothétie de centre  $A_j$  et de rapport  $\alpha$ .

Étant donné que, telle que dérivée dans cette thèse, la preuve de ce résultat requiert une analyse longue et quelque peu fastidieuse, cette preuve n'est pas présentée dans cette section. Cependant, le principe de cette preuve est présentée à la section B.2 de l'annexe B. Remarquons que le cas 3 est un cas trivial dont nous ne reparlerons plus étant donné que deux câbles confondus, i.e., en pratique, deux câbles superposés sont considérés comme étant un seul câble en ce qui concerne l'étude de l'EPP. Avant de reprendre l'étude des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$ , intéressons-nous d'un peu plus près aux cas 1, 2 et 4 énoncés ci-dessus.

- *Cas 1* : ce cas est illustré à la figure 3.13 où les câbles 1, 2 et 3 d'un mécanisme parallèle plan sont attachés au même point  $B$  de l'effecteur, l'effecteur étant représenté par le seul segment de droite  $[PB]$ . Remarquons que le vecteur  $-\mathbf{b}$  montré à la figure 3.13 est égal au vecteur  $\overrightarrow{BP}$ . Quelle que soit la pose de l'effecteur, aucun moment ne peut être appliqué en  $B$  par les câbles 1, 2 et 3 et, par conséquent, les trois torseurs  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  de  $\mathbf{W}$  sont linéairement dépendants. Ainsi, quelle

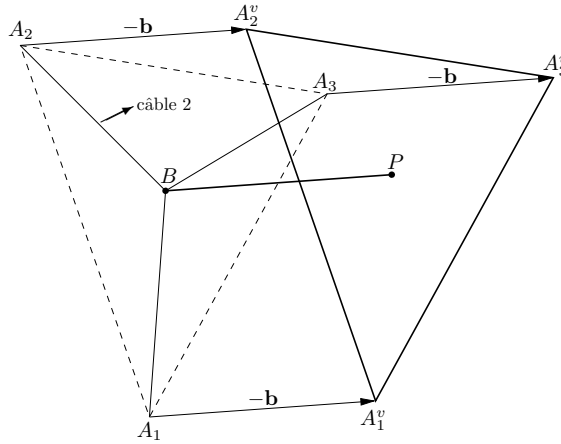


FIG. 3.13 – Trois câbles attachés en un même point  $B$  de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan.

que soit l'orientation de l'effecteur, la conique  $\mathcal{C}$ , lieu des points où  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  sont linéairement dépendants, est dégénérée en tout le plan.

- *Cas 2* : un tel cas est montré à la figure 3.14 où les câbles 1, 2 et 3 d'un mécanisme parallèle plan partagent le même point  $A$  de la base ( $A_1 \equiv A_2 \equiv A_3$ ). L'effecteur du mécanisme est représenté par le triangle de sommets  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  dont les côtés sont tracés en traits pointillés. Quelle que soit la pose de l'effecteur, les câbles 1, 2 et 3 ne peuvent pas appliquer de moment au point de l'effecteur qui est, pour la pose considérée, confondu avec le point  $A$  de la base. Ainsi, quelle que soit l'orientation de l'effecteur, les trois colonnes  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  de  $\mathbf{W}$  sont linéairement dépendantes en tout point du plan et, par conséquent, quelle que soit l'orientation de l'effecteur, la conique  $\mathcal{C}$ , lieu des points où  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  sont linéairement dépendants, est dégénérée en tout le plan.
- *Cas 4* : ce cas est illustré à la figure 3.15 où la géométrie du mécanisme montrée à la figure ainsi que l'orientation de son effecteur sont telles que les triangles  $\Delta A_1 A_2 A_3$  et  $\Delta B_1 B_2 B_3$  sont homothétiques. Par conséquent, pour l'orientation montrée à la figure 3.15, les trois câbles se coupent en un même point quelle que soit la position de l'effecteur et la conique  $\mathcal{C}$ , lieu des points où  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  sont linéairement dépendants, est dégénérée en tout le plan.

En outre, dans les cas 1, 2 et 4, pour une orientation donnée de l'effecteur, les figures 3.13, 3.14 et 3.15 montrent que les trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  vérifient l'équation (3.5) avec  $j = 1$ ,  $k = 2$  et  $q = 3$  si et seulement si le point de référence  $P$  est situé à l'intérieur du triangle  $\Delta A_j^v A_k^v A_q^v$  de sommets  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  et  $A_q^v$ . De plus, deux des trois

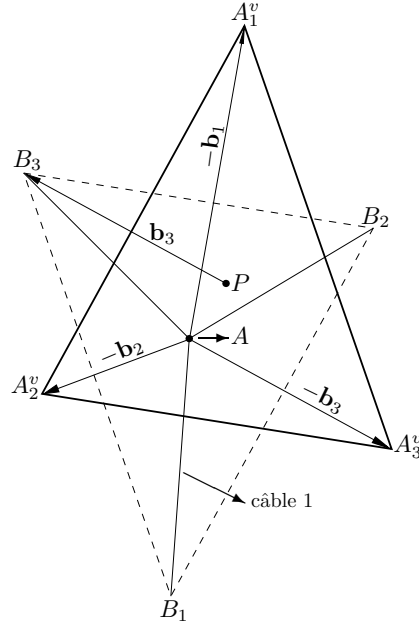


FIG. 3.14 – Trois câbles tendus à partir d'un même point  $A$  de la base d'un mécanisme parallèle plan.

torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  vérifient une équation de type (3.8) si et seulement si  $P$  est sur un côté mais pas en un des sommets du triangle  $\Delta A_j^v A_k^v A_q^v$ . Remarquons que, dans les cas 1, 2 et 4, les trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  étant linéairement dépendants, ils forment un plan  $\mathcal{P}_t$  dans l'espace tridimensionnel des torseurs plans. Quand l'équation (3.5) est vraie, i.e., pour  $P$  à l'intérieur du triangle  $\Delta A_j^v A_k^v A_q^v$ , les trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  sont dans une configuration polyvalente dans leur plan  $\mathcal{P}_t$ . Finalement, quand  $P$  est sur un des côtés mais pas en un des sommets du triangle  $\Delta A_j^v A_k^v A_q^v$ , deux des trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants et définissent une ligne dans  $\mathcal{P}_t$  sur laquelle ils sont dans une configuration polyvalente.

À partir de deux exemples, montrons que des poses associées à des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs peuvent exister sur des arcs de coniques ou à l'intérieur de parties d'aire non nulle du plan quand au moins une combinaison de trois des  $m$  câbles du mécanisme vérifie un des cas 1, 2 ou 4. Premièrement, considérons le mécanisme parallèle plan entraîné par cinq câbles montré à la figure 3.16. Les câbles 2, 3 et 4 de ce mécanisme vérifient le cas 1 puisqu'ils sont attachés au même point de l'effecteur. Ainsi, les trois torseurs  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  vérifient l'équation (3.5), avec  $q = 2$ ,  $j = 3$  et  $k = 4$ , à l'intérieur du triangle  $\Delta A_2^v A_3^v A_4^v$ . L'arc  $\mathcal{D}$  montré à la figure est une partie de la conique  $\mathcal{C}_i$ , associée à la dépendance linéaire des trois torseurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_5$ ,

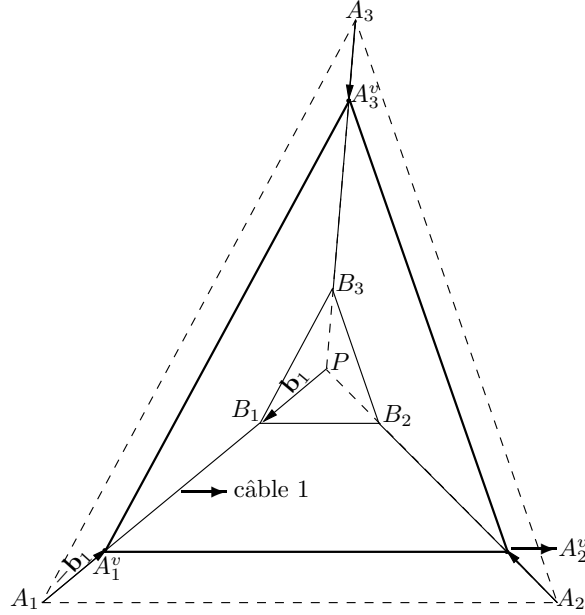


FIG. 3.15 – Un mécanisme parallèle plan à trois câbles dont la base et l’effecteur sont homothétiques.

située à l’intérieur du triangle  $\Delta A_2^v A_3^v A_4^v$ . De plus, sur l’arc  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_5$  vérifient l’équation (3.6) avec  $r = 1$ ,  $j = 3$  et  $l = 5$  et, en tout point de l’arc  $\mathcal{D}$ , les torseurs  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$  et  $\mathbf{w}_5$  sont linéairement indépendants. Ainsi, l’arc  $\mathcal{D}$  appartient à l’ensemble  $\mathcal{S}_{51}$  du mécanisme montré à la figure 3.16, i.e., tous les points de l’arc  $\mathcal{D}$  correspondent à des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs.

Deuxièmement, considérons le mécanisme parallèle plan entraîné par cinq câbles montré à la figure 3.17. La géométrie et l’orientation de l’effecteur de ce mécanisme sont telles que les câbles 1, 2 et 3 vérifient le cas 4. Les câbles 1, 4 et 5 étant attachés au même point de l’effecteur, le cas 1 est également vérifié. De plus, les deux triangles  $\Delta A_1^v A_2^v A_3^v$  et  $\Delta A_1^v A_4^v A_5^v$  ont une partie commune  $\mathcal{P}$  à l’intérieur de laquelle les torseurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_4$  sont linéairement indépendants. Ainsi, tous les points de  $\mathcal{P}$  vérifient les conditions du deuxième cas du théorème 6 et, par conséquent,  $\mathcal{P}$  appartient au sous-ensemble  $\mathcal{S}_{51}$  de l’EPP du mécanisme de la figure 3.17, i.e., il existe une partie du plan d’aire non nulle  $\mathcal{P}$  contenant des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs.

En guise de conclusion, résumons les résultats principaux de cette section. *Pour une orientation constante de l’effecteur d’un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles, soit  $\mathcal{C}_i$  les coniques associées à la dépendance linéaire de trois des  $m$*

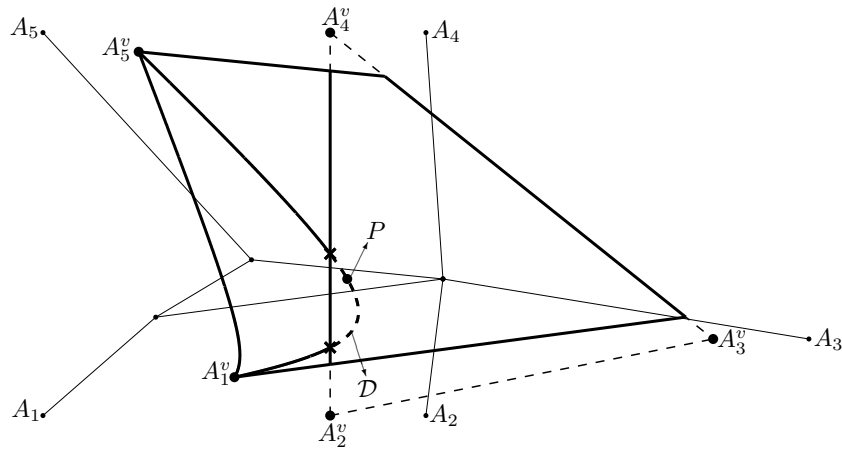


FIG. 3.16 – Des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs sur un arc de conique  $\mathcal{D}$ .

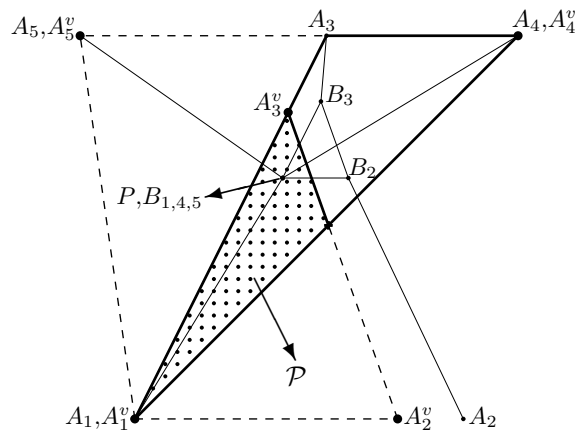


FIG. 3.17 – Des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs dans une partie du plan d'aire non nulle  $\mathcal{P}$ .

torseurs de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. D'après les développements de cette section, si aucune conique  $\mathcal{C}_i$  n'est dégénérée en tout le plan alors la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  est vide ou est composée de points d'intersection entre les coniques  $\mathcal{C}_i$ . Si une seule conique  $\mathcal{C}_i$  dégénère en tout le plan alors la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  est vide ou est composée de points d'intersection entre les coniques  $\mathcal{C}_i$  et/ou d'arcs de ces coniques. Finalement, si au moins deux coniques  $\mathcal{C}_i$  dégénèrent en tout le plan alors *la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  est vide ou est composée de points d'intersection entre les coniques  $\mathcal{C}_i$  et/ou d'arcs de ces coniques et/ou de parties du plan d'aire non nulle. De plus, les parties du plan d'aire non nulle appartenant à la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  sont des intérieurs de polygones. Les côtés de ces polygones sont des segments de droite sur lesquels deux des  $m$  torseurs de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont linéairement dépendants et, par conséquent, ces côtés sont des parties de coniques de singularité  $\mathcal{C}_i$  dégénérées en une ou deux droites.* Finalement, remarquons que les mécanismes pour lesquels des parties du plan d'aire non nulle appartiennent à la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  ont des géométries particulières qui se rencontrent rarement. Par exemple, la géométrie du mécanisme montré à la figure 3.17 n'a pas été considérée par hasard mais elle a été recherchée dans le but de présenter un exemple qui illustre l'éventuelle existence de parties du plan d'aire non nulle appartenant à la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$ .

### 3.3.2.3 Configurations polyvalentes minimales à six torseurs

Cette section conclut l'étude des relations entre les configurations polyvalentes et les poses de l'effecteur d'un mécanisme plan par l'étude des ensembles  $\mathcal{S}_{6i}$  ( $1 \leq i \leq n_6$ ). Rappelons que  $\mathcal{S}_{6i}$  est l'ensemble des poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) associées aux configurations polyvalentes minimales à six torseurs de la  $i^e$  combinaison de six colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. Soit  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r, \mathbf{w}_s)$  la  $i^e$  combinaison de six colonnes de  $\mathbf{W}$ . Considérons un mécanisme et une pose de son effecteur tels que cette  $i^e$  combinaison soit dans une configuration polyvalente minimale à six torseurs. Alors, d'après les équations (3.10), (3.11) et (3.12) du théorème 7, les trois paires  $(\mathbf{w}_q, \mathbf{w}_j)$ ,  $(\mathbf{w}_r, \mathbf{w}_k)$  et  $(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_l)$  sont des paires de torseurs linéairement dépendants. Or, d'après la section B.3 de l'annexe B, mis à part les cas très particuliers où les points  $A_j^v$  et  $A_q^g$  sont confondus et mis à part le cas trivial où les deux câbles  $j$  et  $q$  sont confondus, deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants quand

- $B_j \equiv B_q$  ( $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_q$ ) ou  $A_j \equiv A_q$  ( $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_q$ ), et, quelle que soit l'orientation de



- l'effecteur, le point de référence  $P$  est sur la droite  $(A_j^v A_q^v)$ , ou quand
- l'orientation  $\phi$  de l'effecteur est égale à  $\phi_j$  ou  $\phi_q$  et le point de référence  $P$  de l'effecteur est sur la droite  $(A_j^v A_q^v)$

où  $\phi_j$  et  $\phi_q$  sont les deux orientations de l'effecteur pour lesquelles les droites  $(B_j B_q)$  et  $(A_j A_q)$  sont parallèles. De plus, l'équation (3.10) est satisfaite en tout point du segment de droite  $[A_j^v A_q^v]$  excepté en ses deux extrémités  $A_j^v$  et  $A_q^v$ . De la même façon, les équations (3.11) et (3.12) sont, respectivement, vérifiées en tout point des segments de droite  $[A_k^v A_r^v]$  et  $[A_l^v A_s^v]$  excepté en leurs extrémités. Finalement, les six torseurs de la combinaison  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r, \mathbf{w}_s)$  étant, par hypothèse, dans une configuration polyvalente minimale à six torseurs, les trois segments de droite  $[A_j^v A_q^v]$ ,  $[A_k^v A_r^v]$  et  $[A_l^v A_s^v]$  ont un point commun qui correspond à la pose courante de l'effecteur. Ainsi, pour une orientation donnée de l'effecteur, une configuration polyvalente minimale à six torseurs existe seulement si la géométrie du mécanisme et, éventuellement, l'orientation de son effecteur sont telles que chaque paire parmi au moins trois paires de câbles vérifient une des conditions de dépendance linéaire entre deux  $\mathbf{w}_i$  listées ci-dessus et décrites en détails à la section B.3 de l'annexe B. De plus, en supposant cette condition nécessaire satisfaite, alors, les équations (3.10), (3.11) et (3.12) du théorème 7 sont vérifiées sur trois segments de type  $[A_j^v A_q^v]$  et une configuration polyvalente minimale à six torseurs existe si et seulement si les trois segments de type  $[A_j^v A_q^v]$  ont un point commun et trois des six torseurs impliqués sont linéairement dépendants tel que décrit par le troisième cas du théorème 7. Étant donné que ces conditions sont difficilement satisfaites toutes en même temps, la plupart des EPPOC ne possèdent pas de poses associées à des configurations polyvalentes minimales à six torseurs des colonnes de  $\mathbf{W}$ . Cependant, d'un point de vue général, *une coupe à orientation constante de la réunion des  $n_6$  ensembles  $\mathcal{S}_{6i}$  est vide ou est composée d'un ensemble de points qui sont des points d'intersection entre au moins trois coniques  $\mathcal{C}_i$  dégénérées en une ou deux droites.*

Par exemple, un mécanisme entraîné par six câbles dont l'effecteur n'a que deux points d'attache  $B_1$  et  $B_2$  est montré à la figure 3.18. Remarquons que deux câbles partagent le point  $B_1$  tandis que les quatre autres câbles sont attachés au point  $B_2$ . Pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure 3.18, l'EPPOC est un rectangle dont les sommets sont  $A_2^v$ ,  $A_3^v$ ,  $A_4^v$  et  $A_5^v$  tandis que le segment de droite  $[A_1^v A_6^v]$ , tracé en traits pointillés, correspond à un ensemble de configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs. Finalement, le point  $Q$  montré à la figure 3.18 correspond à une configuration

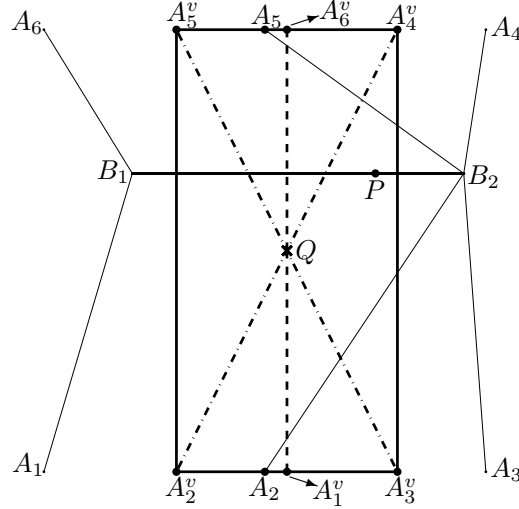


FIG. 3.18 – Un mécanisme plan à six câbles pour lequel une configuration polyvalente minimale à six torseurs existe.

polyvalente minimale à six torseurs des six colonnes de  $\mathbf{W}$ . En effet, le point  $Q$  est le point commun aux trois segments de droite  $[A_1^v A_6^v]$ ,  $[A_2^v A_4^v]$  et  $[A_3^v A_5^v]$  sur lesquels sont vérifiées, respectivement, les équations (3.10), (3.11) et (3.12) avec  $j = 1$ ,  $k = 2$ ,  $l = 3$ ,  $q = 6$ ,  $r = 4$  et  $s = 5$ , les trois colonnes  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  étant linéairement indépendantes. Les segments de droite  $[A_2^v A_4^v]$  et  $[A_3^v A_5^v]$  sont montrés en traits pointillés mixtes à la figure 3.18.

### 3.3.3 Retour sur la propriété 7

Pour une orientation constante de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles, soient  $\mathcal{C}_i$  les coniques associées à la dépendance linéaire de trois des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ . D'après la propriété 5, l'EPPOC du mécanisme consiste en la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ ,  $\mathcal{S}_{5i}$  et  $\mathcal{S}_{6i}$ . Or, d'après la section 3.3.2.1, la frontière d'une coupe à orientation constante de la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  est composée d'arcs des coniques  $\mathcal{C}_i$ . D'après la section 3.3.2.2, pour une orientation constante de l'effecteur, la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  est composée de points des coniques  $\mathcal{C}_i$  et/ou d'arcs de ces coniques et/ou de polygones dont les frontières sont des segments de droites appartenant à des coniques  $\mathcal{C}_i$  dégénérées en une ou deux droites. Finalement, d'après la section 3.3.2.3, pour une orientation constante de l'effecteur, la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{6i}$  consiste en des points des coniques  $\mathcal{C}_i$ . Ainsi, la frontière de

l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) est composée d'arcs des coniques  $\mathcal{C}_i$  et la propriété 7 est prouvée.

Finalement, notons que d'après la propriété 5 de la section 2.3.2, pour une orientation constante de l'effecteur, les ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  sont des parties ouvertes du plan. Ainsi, la réunion d'un nombre fini d'ensembles ouverts étant un ensemble ouvert, *la réunion des  $n_4$  ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  est une partie ouverte du plan.* D'après la section 3.3.2.2, les parties d'aire non nulle du plan qui appartiennent éventuellement aux coupes à orientation constante des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  sont également des parties ouvertes du plan.

## 3.4 Détermination de l'espace des poses polyvalentes et exemples

Aux sections 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3, l'algorithme géométrique présenté au chapitre 2 dans le cas des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par 4 câbles est généralisé à la détermination de l'EPPOC des mécanismes entraînés par  $m$  câbles où  $m \geq 4$ . Un exemple de détermination de l'EPP d'un mécanisme entraîné par six câbles croisés ainsi qu'une remarque concernant les configurations polyvalentes minimales sont également présentés.

### 3.4.1 Détermination de la réunion des ensembles $\mathcal{S}_{4i}$

Pour une orientation constante de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan entraîné par câbles, l'algorithme géométrique présenté à la section 2.4.2 permet de déterminer les ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  qui sont les ensembles de poses de l'effecteur associés aux configurations polyvalentes des combinaisons de quatre colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. Dans cette section, cet algorithme géométrique est généralisé à la détermination des coupes à orientation constante de la réunion  $\mathcal{S}_4$  des  $n_4$  ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ . Le principe de l'algorithme reste le même : pour une orientation constante de l'effecteur, déterminer la frontière de l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  parmi un ensemble d'arcs de coniques, cet ensemble contenant nécessairement les arcs qui composent la frontière de  $\mathcal{S}_4$ . D'après la section 3.3.2.1, les coniques d'où ces arcs sont issus sont les coniques  $\mathcal{C}_i$  associées à la

dépendance linéaire de trois des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ . Avant de présenter les principales étapes de l'algorithme géométrique, notons que la réunion  $\mathcal{S}_4$  des  $n_4$  ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  peut être déterminée par test d'un nuage de points tel que décrit à la section 2.4.1. Le test appliqué à chaque point du nuage consiste à déterminer si le point courant appartient à au moins un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  et non plus à un seul ensemble  $\mathcal{S}_{4i}$ . Remarquons que les avantages et les inconvénients présentés à la section 2.4.3 restent vrais dans le cas des mécanismes entraînés par  $m \geq 4$  câbles.

Soit  $n_3$  le nombre de combinaisons de trois câbles pris parmi les  $m$  câbles du mécanisme. Les principales étapes d'un algorithme qui détermine les frontières de l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m \geq 4$  câbles sont présentées ci-dessous.

**Étape 1 :** choisir une orientation  $\phi$  pour l'effecteur du mécanisme et déterminer les équations des  $n_3$  coniques  $\mathcal{C}_i$  associées à la dépendance linéaire de trois des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ .

**Étape 2 :** pour chaque conique  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, \dots, n_3$ ), trouver les points d'intersection entre cette conique et les  $n_3 - 1$  autres coniques  $\mathcal{C}_j$  ( $j = 1, \dots, n_3, j \neq i$ ). Si la conique  $\mathcal{C}_i$  est dégénérée en deux droites concourantes, trouver également le point commun à ces deux droites.

**Étape 3 :** pour chaque conique  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, \dots, n_3$ ), déterminer les arcs définis par les points d'intersection trouvés à l'étape 2 et, parmi ces arcs, éliminer les arcs infinis.

**Étape 4 :** tester les arcs finis trouvés à l'étape 3 et éliminer ceux qui ne font pas partie de la frontière de  $\mathcal{S}_4$ .

**Étape 5 :** si tous les arcs finis trouvés à l'étape 3 n'ont pas été éliminés à l'étape 4,  $\mathcal{S}_4$  existe et les arcs restants après l'étape 4 sont ceux de sa frontière. Une représentation graphique de  $\mathcal{S}_4$  est obtenue en traçant ces arcs.

Les étapes 1, 2 et 3 de cet algorithme étant très similaires aux étapes 1, 2 et 3 de l'algorithme géométrique présenté au chapitre 2 (la principale différence étant le nombre de coniques  $\mathcal{C}_i$  à considérer), des précisions concernant les étapes 1, 2 et 3 peuvent être trouvées à la section 2.4.2. Cependant, remarquons que les arcs infinis de coniques

$\mathcal{C}_i$  sont éliminés à l'étape 3 étant donné que, d'après la section 3.3.2.1, les coupes à orientation constante des ensembles  $\mathcal{S}_4$  sont des parties bornées du plan. À présent, présentons un test qui, à l'étape 4, permet de décider si un arc fini de conique  $\mathcal{D}$  fait partie de la frontière de l'ensemble  $\mathcal{S}_4$ . À cette fin, considérons un point  $M$  de  $\mathcal{D}$  autre que ses deux extrémités. Le test de  $\mathcal{D}$  peut être décomposé en deux étapes. La première étape consiste à déterminer si  $M$  fait partie d'un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ , i.e., si  $M$  correspond à une pose de l'effecteur pour laquelle quatre des  $m$  colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente. Le théorème 3 permet d'effectuer un tel test. Si  $M$  appartient à un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ , l'arc  $\mathcal{D}$  est situé à l'intérieur de  $\mathcal{S}_4$  (mis à part, éventuellement, une ou ses deux extrémités), et, étant donné que  $\mathcal{S}_4$  est une partie ouverte du plan, l'arc  $\mathcal{D}$  ne fait pas partie de la frontière de  $\mathcal{S}_4$ . Dans le cas contraire,  $M$  est à l'extérieur de tous les ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  et l'arc fini  $\mathcal{D}$  appartient à la frontière de  $\mathcal{S}_4$  si et seulement si  $\mathcal{D}$  appartient à la frontière d'un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ . Or, le test décrit à la suite de l'étape 4 de l'algorithme présenté à la section 2.4.2 permet de tester si  $\mathcal{D}$  appartient à la frontière d'un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ . En effet, si au moins un des points  $T_1$  ou  $T_2$ , définis à la section 2.4.2 et montrés à la figure 2.14, appartient à un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$  alors  $\mathcal{D}$  appartient à la frontière de cet ensemble. Ainsi, la deuxième étape du test de l'arc  $\mathcal{D}$  consiste à lui appliquer le test présenté à la suite de l'étape 4 de la section 2.4.2. Remarquons que les points d'intersection entre la droite  $\mathcal{P}$ , montrée à la figure 2.14, et  $n_3$  coniques  $\mathcal{C}_i$  doivent à présent être déterminés.

Par exemple, considérons à nouveau le mécanisme plan entraîné par six câbles montré à la figure 3.6. Pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure, les  $n_3 = 20$  coniques  $\mathcal{C}_i$  trouvées à l'étape 1 sont montrées à la figure 3.19. Certains des arcs finis de ces coniques sont montrés à la figure 3.20. Ces arcs sont testés à l'étape 4 de l'algorithme géométrique et ceux qui appartiennent à la frontière de la coupe à orientation constante de l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  sont montrés en traits pleins à la figure 3.21. En appliquant l'algorithme géométrique pour plusieurs orientations de l'effecteur du mécanisme montré à la figure 3.6, on obtient l'approximation de  $\mathcal{S}_4$  montrée à la figure 3.22. Ainsi, pour une orientation constante de l'effecteur du mécanisme, la frontière de l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  est composée de segments de droites. De plus, les coupes à orientation constante de  $\mathcal{S}_4$  disparaissent subitement pour une orientation de l'effecteur légèrement supérieure à 50 degrés ou légèrement inférieure à -50 degrés.

Concluons cette section sur deux remarques. Premièrement, étant donné que beaucoup de mécanismes parallèles plans entraînés par câbles ont, pour une orientation

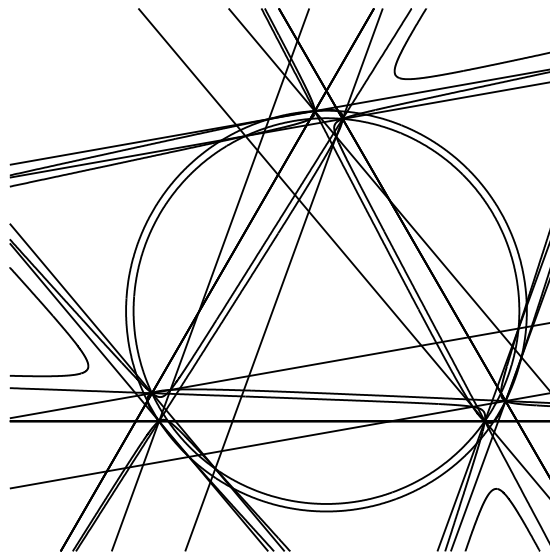


FIG. 3.19 – Les  $n_3 = 20$  coniques  $\mathcal{C}_i$  obtenues pour le mécanisme et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 3.6.

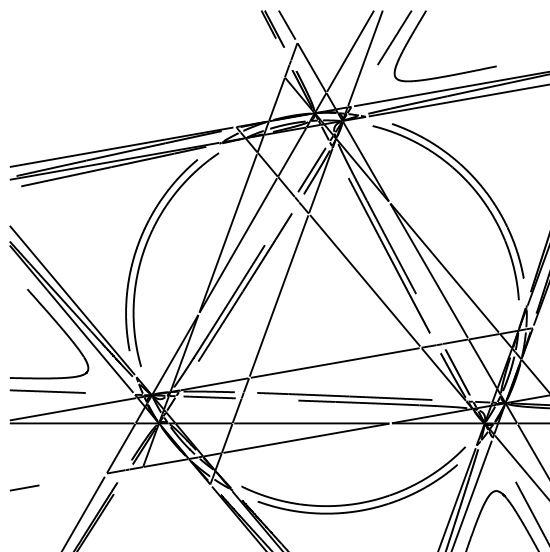


FIG. 3.20 – Certains des arcs finis des 20 coniques  $\mathcal{C}_i$  montrées à la figure 3.19.

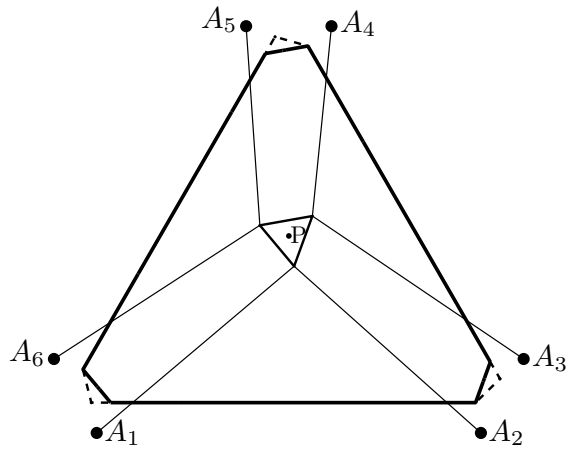


FIG. 3.21 – L'ensemble  $\mathcal{S}_4$  d'un mécanisme à six câbles pour une orientation constante de son effecteur.

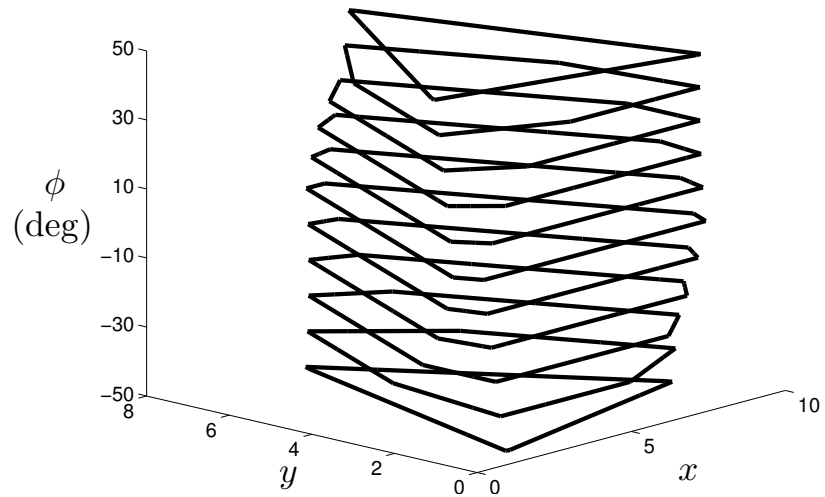


FIG. 3.22 – L'ensemble  $\mathcal{S}_4$  du mécanisme montré à la figure 3.21.

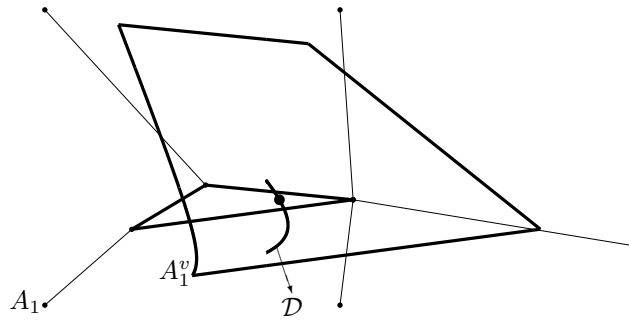


FIG. 3.23 – Frontière de l'ensemble  $\mathcal{S}_4$  du mécanisme dont l'effecteur est dans l'orientation montrée à la figure 3.16.

constante de leur effecteur, des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  réduits à des ensembles de points, la frontière de leur EPPOC est identique à celle de la coupe à orientation constante de leur ensemble  $\mathcal{S}_4$ . Ainsi, l'algorithme géométrique présenté dans cette section permet de déterminer l'EPPOC de beaucoup de mécanismes parallèles plans entraînés par  $m > 4$  câbles. La deuxième remarque concerne, au contraire, les mécanismes pour lesquels des coupes à orientation constante des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$  contiennent des arcs des coniques  $\mathcal{C}_i$  et/ou des polygones tel que discuté à la section 3.3.2.2. L'algorithme géométrique présenté ci-dessus ne détecte jamais les éventuels polygones appartenant aux coupes à orientation constante des ensembles  $\mathcal{S}_{5i}$ . Par contre, pour une orientation constante de l'effecteur et dans certaines conditions, un arc de conique  $\mathcal{C}_i$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{S}_{5i}$  peut être repéré par l'algorithme géométrique. Par exemple, pour le mécanisme entraîné par cinq câbles et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 3.16, l'arc de conique  $\mathcal{D}$  montré à la figure appartient au seul ensemble  $\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_{51}$  de ce mécanisme. De plus,  $\mathcal{D}$  est situé à l'intérieur de la coupe à orientation constante de  $\mathcal{S}_4$  sans pour autant lui appartenir. Ainsi, si l'algorithme géométrique présenté dans cette section est appliqué au mécanisme dont l'effecteur est dans l'orientation montrée à la figure 3.16, alors, l'arc fini  $\mathcal{D}$  passe le test de l'étape 4. En effet, la première étape du test est passée puisque aucun point de  $\mathcal{D}$  n'appartient à un des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ . La deuxième étape du test est également passée puisque  $\mathcal{D}$  est situé à l'intérieur de la coupe à orientation constante de  $\mathcal{S}_4$ . La représentation graphique des frontières de  $\mathcal{S}_4$  obtenue à l'étape 5 est montrée à la figure 3.23. On constate que l'arc  $\mathcal{D}$  est une frontière interne. Remarquons qu'un cas pour lequel une telle frontière interne n'appartient à aucun ensemble  $\mathcal{S}_{5i}$  n'a jamais été rencontré. La nature d'une telle frontière interne peut être déterminée en utilisant une méthode présentée dans la sous-section suivante.



### 3.4.2 Détermination des ensembles $\mathcal{S}_{5i}$ et $\mathcal{S}_{6i}$

Présentons, dans ses grandes lignes, une méthode qui permet de déterminer les éléments qui composent l'ensemble  $\mathcal{S}_{5i}$  quand l'orientation de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan entraîné par câbles est constante. Soit  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  la  $i^e$  combinaison de cinq colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  et soit  $\mathcal{C}_j$  ( $1 \leq j \leq 10$ ) les dix coniques associées à la dépendance linéaire de trois des cinq torseurs de  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$ . On détermine, dans un premier temps, les points d'intersection entre les coniques  $\mathcal{C}_j$  et, dans un deuxième temps, les arcs finis que ces points d'intersection définissent. Parmi les points d'intersection, tous ceux qui vérifient le deuxième cas du théorème 6 appartiennent à  $\mathcal{S}_{5i}$ . Puis, s'il en existe, pour chaque conique  $\mathcal{C}_j$  dégénérée en tout le plan, on considère le triangle  $\Delta$  de type  $\Delta A_j^v A_k^v A_q^v$  dans lequel, d'après la section 3.3.2.2, une équation de type (3.5) est vérifiée. Rappelons que les côtés de ce triangle sont des segments de droites appartenant à des coniques  $\mathcal{C}_j$  dégénérées en une ou deux droites. On teste alors chaque arc fini de conique  $\mathcal{C}_j$  en un de ses points en déterminant si ce point est situé à l'intérieur du triangle  $\Delta$ . Si tel est le cas, on teste si en ce point toutes les conditions du deuxième cas du théorème 6 sont réunies et, si elles le sont, l'arc testé appartient à un ensemble  $\mathcal{S}_{5i}$ . Finalement, si au moins deux coniques  $\mathcal{C}_j$  dégénèrent en tout le plan, il existe peut-être un polygone dont l'intérieur appartient à  $\mathcal{S}_{5i}$ . Considérons deux coniques ainsi dégénérées. Soit  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  les triangles associés à ces coniques dans lesquels des équations de type (3.5) sont vérifiées. Remarquons que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ont un sommet commun. Si elle existe, l'intersection de ces deux triangles est un polygone. Finalement, l'intérieur de ce polygone appartient à  $\mathcal{S}_{5i}$  si et seulement si les conditions du deuxième cas du théorème 6 sont satisfaites en un de ses points.

À présent, présentons brièvement une méthode qui, pour une orientation constante de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan entraîné par câbles, permet de déterminer si l'ensemble  $\mathcal{S}_{6i}$  est vide ou, dans le cas contraire, permet de déterminer les points qui lui appartiennent. Considérons les six câbles de la  $i^e$  combinaison de six câbles du mécanisme. Parmi ces six câbles, on commence par déterminer quelles sont les paires de câbles qui vérifient un des cas de dépendance linéaire entre deux torseurs  $\mathbf{w}_i$  présentés à la section B.3. S'il existe moins de trois paires vérifiant de telles dépendances linéaires, la coupe à orientation constante de l'ensemble  $\mathcal{S}_{6i}$  est vide. Sinon, on détermine les points d'intersection entre les segments de type  $[A_j^v A_q^v]$  sur lesquels  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants. Si trois de ces segments ont un point commun qui vérifient le troisième cas du théorème 7, ce point appartient à  $\mathcal{S}_{6i}$ . Si aucun point commun de ce

type existe, la coupe à orientation constante de l'ensemble  $\mathcal{S}_{6i}$  est vide.

### 3.4.3 Détermination de l'EPPOC

D'après la propriété 7, la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par câbles est composée d'arcs des coniques  $\mathcal{C}_i$ , lieux des points du plan auxquels trois des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont linéairement dépendantes. Cette propriété fondamentale permet d'appliquer l'algorithme géométrique présenté à la section 3.4.1 à la détermination de l'EPPOC. À cette fin, l'étape 4 de l'algorithme géométrique est modifiée de la manière suivante. À la première étape du test de l'étape 4, on détermine si le point  $M$  de l'arc  $\mathcal{D}$  à tester appartient à l'EPPOC. S'il lui appartient, d'après la propriété 6, l'arc  $\mathcal{D}$  ne fait pas partie de la frontière de l'EPPOC. Dans le cas contraire,  $M$  n'appartient pas à l'EPPOC et, à la deuxième étape du test, l'arc  $\mathcal{D}$  fait partie de la frontière de l'EPPOC si et seulement si un des deux points  $T_1$  ou  $T_2$  (c.f. figure 2.14 à la section 2.4.2) appartient à l'EPPOC. Notons qu'un cas pour lequel les deux points  $T_1$  et  $T_2$  appartiennent à l'EPPOC n'a jamais été rencontré. Dans un tel cas, l'arc  $\mathcal{D}$  serait une frontière interne à l'EPPOC. Remarquons également que la propriété 4 justifie l'élimination, à l'étape 3 de l'algorithme géométrique, des arcs infinis des coniques  $\mathcal{C}_i$ .

Cette adaptation de l'algorithme géométrique présenté à la section 3.4.1 à la détermination de l'EPPOC nécessite un test qui détermine si une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par  $m$  câbles est polyvalente. D'après les théorèmes 6, 7 et 8, un tel test consiste à déterminer si quatre des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente ou si cinq ou six des  $m$  colonnes sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq ou six torseurs. Une méthode qui permet de tester si quatre colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente a été brièvement discutée à la section 2.4.1. En outre, tester si cinq ou six colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente minimale revient à vérifier si les conditions du deuxième cas du théorème 6 ou celles du troisième cas du théorème 7 sont satisfaites, respectivement. Finalement, notons que d'autres tests qui déterminent si une pose donnée de l'effecteur appartient à l'EPP sont discutés à la section 4.2.2 dans le cas des mécanismes à six ddl. Ces tests peuvent être adaptés facilement aux mécanismes plans à trois ddl. De plus, une méthode permettant de tester si une pose

donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > n$ , appartient à l'EPP est présentée à la section D.3.

### 3.4.4 Exemples

Présentons un exemple qui montre que croiser les câbles d'un mécanisme parallèle plan permet généralement d'augmenter la taille de son EPP. Considérons le mécanisme montré à la figure 3.24. Ce mécanisme et celui montré à la figure 3.21 ont la même base et le même effecteur. La différence entre ces deux mécanismes réside dans la manière dont les six câbles lient base et effecteur, le mécanisme de la figure 3.24 ayant ses câbles croisés. L'EPP du mécanisme à câbles croisés est montré à la figure 3.25. Ainsi, en comparant les figures 3.22 et 3.25, on constate que l'EPP du mécanisme à câbles croisés existe pour une plage d'orientation plus grande. En effet, l'EPP montré à la figure 3.25 existe pour les orientations  $\phi$  de l'effecteur comprises entre  $-69.8$  degrés et  $69.8$  degrés alors que l'EPP montré à la figure 3.22 disparaît pour  $\phi \approx \pm 50$  degrés. Cette différence peut s'expliquer de la manière suivante. Dans le cas du mécanisme à câbles non croisés montré à la figure 3.21, l'EPP disparaît pour  $\phi \approx 50$  degrés puisque, pour cette orientation et pour des positions du point de référence  $P$  de l'effecteur proches du centre de l'EPPOC montré à la figure 3.21, les droites qui supportent les câbles 2, 4 et 6 se coupent en un même point  $Q$  (le triangle de l'effecteur est similaire au triangle  $\Delta A_2 A_4 A_6$  de la base) tandis que les câbles 1, 3 et 5 ne peuvent exercer qu'un moment négatif en  $Q$ . Aussi, aucun moment positif ne peut être appliqué en  $Q$  par les six câbles du mécanisme. Dans le cas du mécanisme à câbles croisés montré à la figure 3.24, l'EPP disparaît quand le triangle de l'effecteur et le triangle  $\Delta A_1 A_3 A_5$  deviennent similaires, c'est-à-dire pour  $\phi = 69.8$  degrés, les six câbles du mécanisme ne pouvant exercer qu'un moment négatif au point  $Q$  où les droites qui supportent les câbles 1, 3 et 5 se croisent. Ainsi, l'EPP disparaît pour une orientation plus grande de l'effecteur dans le cas du mécanisme à câbles croisés parce que le triangle de l'effecteur et le triangle  $\Delta A_1 A_3 A_5$  sont similaires pour une orientation de l'effecteur plus grande que celle pour laquelle le triangle de l'effecteur et le triangle  $\Delta A_2 A_4 A_6$  sont similaires.

De plus, l'EPP du mécanisme entraîné par les câbles non croisés est inclus dans l'EPP du mécanisme entraîné par les câbles croisés comme le montre la figure 3.26 dans le cas des EPPOC obtenus pour  $\phi = 40$  degrés. Remarquons que l'EPP du mécanisme

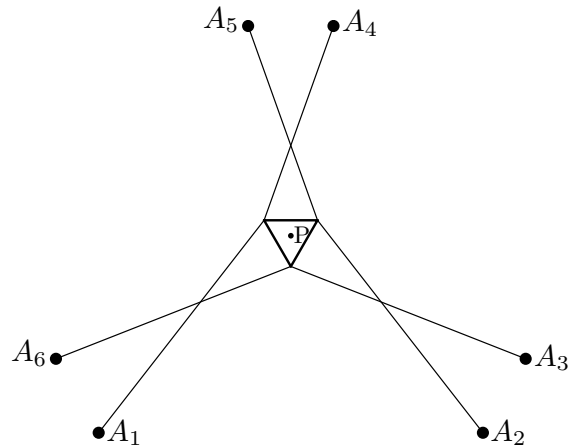


FIG. 3.24 – Un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par six câbles croisés.

entraîné par les câbles croisés existe encore pour des orientations  $\phi$  supérieures à 69.8 degrés ou inférieures à  $-69.8$  degrés. Cependant, pour ces orientations, un vide apparaît à l'intérieur de l'EPP tel que montré à la figure 3.27. De plus, ce vide grandit de telle sorte qu'à partir de  $\phi \approx \pm 73$  degrés, l'EPP est composé de trois parties disjointes tel que montré à la figure 3.28. Avant de conclure cette section sur une remarque concernant les configurations polyvalentes minimales, notons que, dans le cas du mécanisme entraîné par les câbles croisés, les algorithmes présentés aux sections 3.4.1 et 3.4.3 déterminent le même espace qui est l'EPP montré à la figure 3.25.

### 3.4.5 Existence pratique des configurations polyvalentes minimales

D'après les discussions proposées dans cette section, si elles existent, les configurations polyvalentes minimales à six torseurs sont situées en des points de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraîné par câbles. De plus, les configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs sont également situées en des points de l'EPPOC mis à part, éventuellement, dans le cas des mécanismes dont au moins une combinaison de trois câbles vérifie un des cas 1, 2 ou 4 présentés à la section 3.3.2.2. En effet, pour ces mécanismes, il se peut que des configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs soient situées sur des arcs de coniques ou à l'intérieur de parties d'aire non nulle du plan. Or, en pratique, étant donné qu'il est impossible, d'une part, d'at-

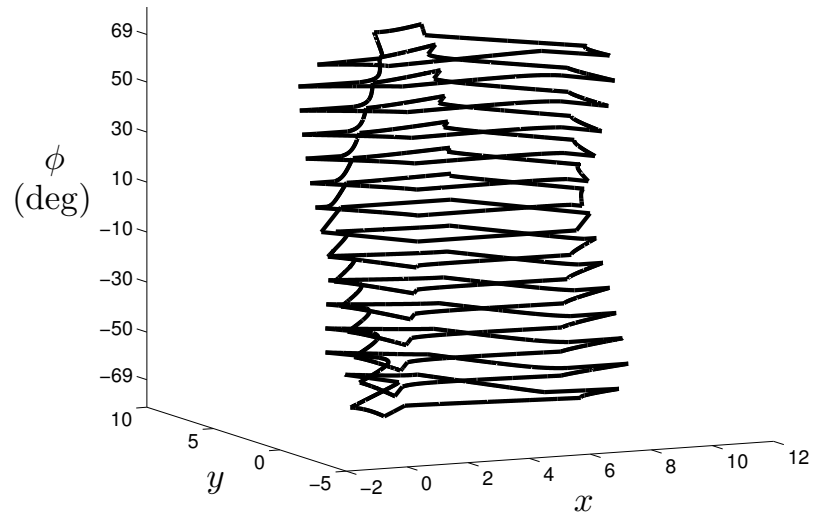


FIG. 3.25 – L'EPP du mécanisme montré à la figure 3.24.

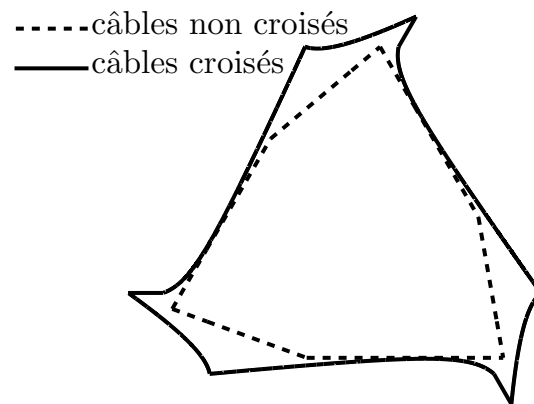


FIG. 3.26 – Comparaison des EPPOC pour  $\phi = 40$  degrés.

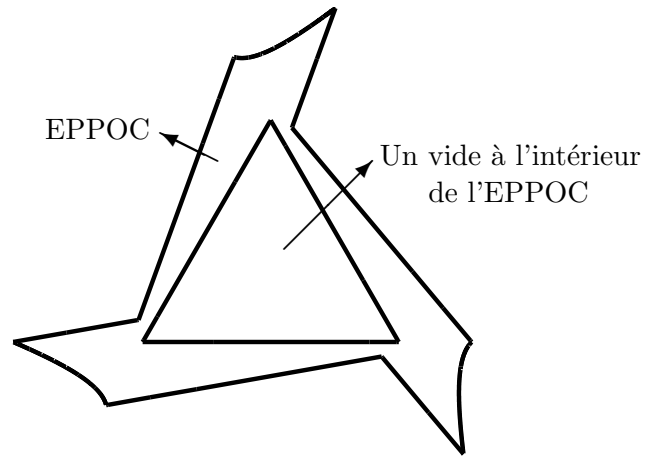


FIG. 3.27 – L'EPPOC du mécanisme entraîné par six câbles croisés pour  $\phi = 70$  degrés.

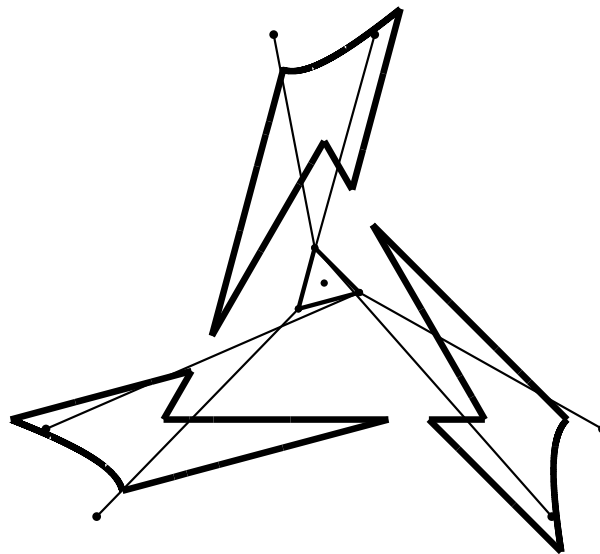


FIG. 3.28 – Trois parties disjointes constituant l'EPPOC du mécanisme entraîné par six câbles croisés pour  $\phi = 75$  degrés.

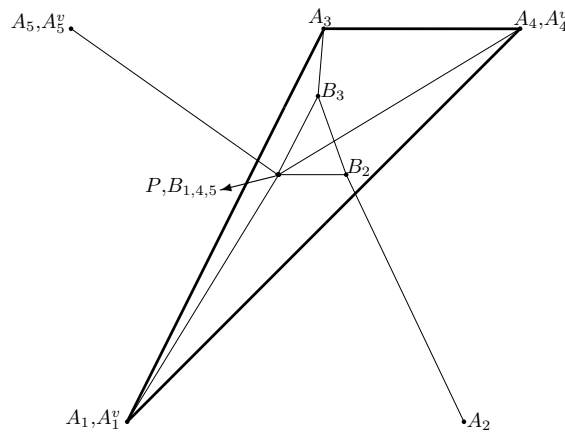


FIG. 3.29 – Une géométrie légèrement modifiée pour laquelle il n'existe plus de configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs.

tacher parfaitement trois câbles en un même point (cas 1), d'autre part, de faire sortir, d'un système de poulie actionnée, trois câbles en exactement le même point (cas 2) et, finalement, de fabriquer un effecteur et une base dont les géométries sont parfaitement similaires (cas 4), nous pouvons dire que les configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs situées sur des arcs de coniques ou à l'intérieur de parties d'aire non nulle du plan n'existent pas, i.e., sont uniquement des cas théoriques. Ainsi, en définissant les mécanismes tel que les conditions des cas 1, 2 et 4 présentés à la section 3.3.2.2 ne soient jamais exactement vérifiées, quelle que soit l'orientation de l'effecteur et mis à part en quelques points, l'EPPOC est toujours identique à la réunion des ensembles  $\mathcal{S}_{4i}$ . Par exemple, considérons à nouveau le mécanisme et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 3.17. À la section 3.3.2.2, il a été montré qu'une partie d'aire non nulle de l'EPPOC de ce mécanisme correspond à des configurations polyvalentes minimales des cinq torseurs de la matrice des torseurs. Mais, tel que montré au tableau E.16, si les positions des points d'attache  $B_i$  à l'effecteur sont très légèrement modifiées de sorte que les câbles 1, 4 et 5 ne soient plus attachés exactement au même point à l'effecteur et de sorte que le triangle  $\Delta B_1 B_2 B_3$  ne soit plus parfaitement similaire au triangle  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , alors, l'EPPOC obtenu est constitué uniquement de poses associées à des configurations polyvalentes à quatre torseurs. Cet EPPOC est montré à la figure 3.29 où nous remarquons que les frontières de l'EPPOC obtenu sont presque identiques à celles de l'EPPOC montré à la figure 3.17. En effet, en observant la figure 3.3, il semble que toute variation très faible des positions relatives des cinq torseurs  $\mathbf{w}_i$ , telle qu'ils ne

soient plus dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs, amène quatre de ces cinq  $\mathbf{w}_i$  dans une configuration polyvalente à quatre torseurs.

### 3.5 Conclusion

Généralisant les principaux résultats du chapitre précédent, ce chapitre a présenté une étude de l'EPP et plus particulièrement de l'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m \geq 4$ . Nous avons notamment montré que l'EPPOC est composé de poses polyvalentes de l'effecteur associées à des configurations polyvalentes de natures différentes. De plus, les relations entre la géométrie du mécanisme et la répartition des différents types de poses polyvalentes à l'intérieur de l'EPPOC ont été discutées. Nous pouvons en conclure que l'EPPOC de la majorité des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m > 4$ , est principalement composé des poses polyvalentes associées aux configurations polyvalentes de quatre des  $m$  câbles du mécanisme. En effet, les poses polyvalentes associées aux configurations polyvalentes minimales à cinq ou six torseurs sont généralement situées en des points isolés de l'EPPOC. En outre, il a été prouvé que la frontière de l'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de quatre câbles est de même nature que celle des mécanismes entraînés par quatre câbles, i.e., composée d'arcs de coniques associées à la dépendance linéaire des trois de  $m$  torseurs colonnes de la matrice des torseurs. Puis, la méthode géométrique de détermination de l'EPPOC présentée au chapitre 2 a été généralisée à la détermination de l'EPPOC des mécanismes entraînés par plus de quatre câbles. Tout comme dans le cas des mécanismes entraînés par quatre câbles, l'étendue et la géométrie de l'EPPOC dépendent fortement de l'orientation de l'effecteur et de la géométrie du mécanisme. Par ailleurs, multiplier les câbles entraînant l'effecteur du mécanisme permet généralement d'agrandir son EPP. Cependant, étant donné qu'ajouter des câbles au mécanisme augmente sa complexité, le gain qui en résulte doit pouvoir être déterminé. La détermination de l'EPP permet, au moins en partie, de traiter ce problème.

Ce chapitre et le précédent ont présenté une étude détaillée de l'EPPOC des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraîné par un nombre arbitraire de câbles. Cette étude a révélé de quelle manière l'EPPOC est composé de poses polyvalentes impliquant quatre, cinq ou six câbles du mécanisme. Cependant, tel que le montre les démonstra-



tions présentées à l'annexe C, cette étude nécessite des développements quelquefois longs, voire même fastidieux. Par conséquent, si la même démarche est suivie, mener une étude similaire dans le cas des mécanismes parallèles à six ddl est assurément une tâche encore plus longue et plus fastidieuse. Aussi, dans le chapitre suivant, les poses polyvalentes des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par plus de sept câbles seront caractérisées à l'aide du théorème de Stiemke [11]. La possibilité et l'intérêt résultant de l'application de ce théorème à l'analyse de l'EPP des mécanismes parallèles entraînés par câbles ont été récemment mis en évidence dans [103]. À partir de ce théorème et de résultats présentés dans [87] et dans [94] et à la lumière des discussions présentées dans ce chapitre et le précédent, nous étudions, dans le chapitre suivant, la nature de la frontière de l'EPPOC des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles sans passer par l'étude des différents types de configurations polyvalentes des torseurs de  $\mathbb{R}^6$ .

# Chapitre 4

## Détermination de l'espace des poses polyvalentes à orientation constante des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles

La première partie de ce chapitre généralise les modèles cinématiques des deux chapitres précédents aux mécanismes parallèles à six ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ . Différents théorèmes permettant de caractériser l'espace des poses polyvalentes de ces mécanismes sont également présentés, la plupart de ces théorèmes étant connus. Puis, nous étudions la nature de la frontière de l'EPPOC. Enfin, une méthode permettant de déterminer l'EPPOC par discrétisation de sa frontière est présentée. Cette méthode est illustrée par quelques exemples.

## 4.1 Modèle cinématique et torseur à l'effecteur

### 4.1.1 Modèle et notations

Un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par câbles est montré à la figure 4.1. L'effecteur est relié à la base par des câbles qui s'enroulent sur des poulies actionnées. Cet actionnement permet de contrôler les six ddl de l'effecteur. Tel que montré à la figure 4.2, considérons un repère fixe  $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  attaché à la base et un repère mobile  $(P, \mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$  attaché à l'effecteur où  $P$  est le point de référence de l'effecteur. Comme dans le cas des mécanismes plans, le point  $A_i$  auquel le câble  $i$  s'enroule sur sa poulie est supposé être fixe par rapport à la base du mécanisme. De plus, le point  $B_i$  auquel le câble  $i$  s'attache à l'effecteur est supposé être fixe par rapport à l'effecteur. Les points de contact  $A_i$  et  $B_i$  sont modélisés par des liaisons sphériques. Le câble  $i$  est supposé être tendu entre les points  $A_i$  et  $B_i$  et, par conséquent, est supposé être un segment de la droite  $(A_i B_i)$ . Sa longueur tendue est noté  $\rho_i$ . Si  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$  désignent, respectivement, les vecteurs position des points  $A_i$ ,  $B_i$  et  $P$  dans le repère fixe, alors, le vecteur unitaire  $\mathbf{d}_i$  dirigé, le long du câble  $i$ , de l'effecteur vers la base est défini par l'équation (2.1) où le vecteur position  $\mathbf{a}_i^v$  du point  $A_i^v$  est défini par l'équation (2.2). Finalement, comme dans le cas des mécanismes plans, le vecteur  $\mathbf{a}_i^v$  dépend de la géométrie du mécanisme et de l'orientation de son effecteur et, quand  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v$  ( $\rho_i = 0$  et  $B_i \equiv A_i$ ), l'équation (2.1) n'est plus valide. Le vecteur  $\mathbf{d}_i$  est alors défini comme étant le vecteur nul.

### 4.1.2 Matrice des torseurs

D'après la section 2.2.1, les mécanismes parallèles à six ddl entraînés par six câbles et par moins de six câbles n'ont pas d'EPP. Ainsi, dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des mécanismes entraînés par  $m \geq 7$  câbles.

Le câble tendu  $i$  applique sur l'effecteur un torseur dont la réduction au point de référence  $P$  est noté  $t_i \mathbf{w}_i$ . Le torseur  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^6$  est défini par

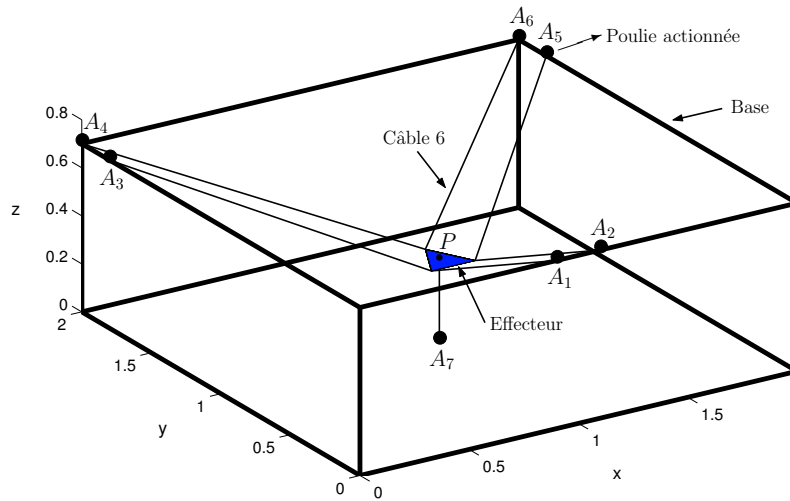


FIG. 4.1 – Un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles.

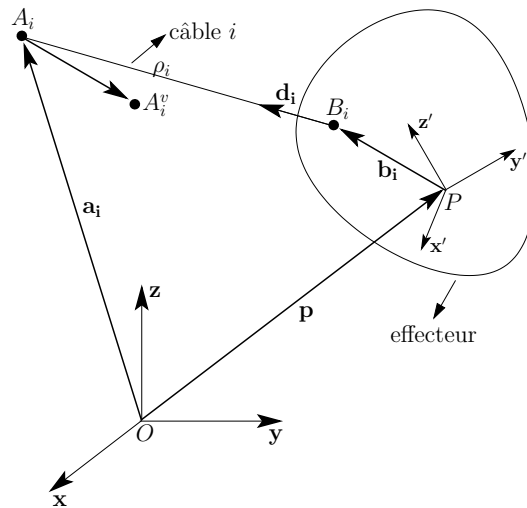


FIG. 4.2 – Notations.

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où  $t_i$  est la tension dans le câble  $i$ ,  $t_i \geq 0$ . La réduction en  $P$ ,  $\mathbf{w}_p$ , du torseur appliqué par les  $m$  câbles sur l'effecteur est la somme des torseurs  $t_i \mathbf{w}_i$  et s'écrit, sous forme matricielle

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{W} \mathbf{t} \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur colonne des tensions dans les câbles et où la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est définie par

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_m \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

### 4.1.3 Un polyèdre convexe contenant l'EPPOC

D'après la section 2.3.1, l'EPPOC d'un mécanisme parallèle plan entraîné par quatre câbles est inclus dans l'intérieur  $\mathcal{P}_{f\phi}$  d'un polygone convexe. Ce résultat a été étendu aux mécanismes plans entraînés par  $m \geq 4$  câbles à la section 3.3.1 et, le polygone devenant un polyèdre, il peut également être étendu aux mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles. À cette fin, reformulons la définition 3.

**Définition 6**  $\mathcal{P}_f$  est l'ensemble des poses de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 7$ ) telles que

$$\text{rank}(\mathbf{W}_{123}) = 3 \quad (4.4)$$

et

$$\exists \mathbf{z}_f > \mathbf{0} \text{ tel que } \mathbf{W}_{123} \mathbf{z}_f = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{z}_f \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{W}_{123}$  est la matrice obtenue de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  en supprimant ses trois dernières lignes c'est-à-dire  $\mathbf{W}_{123} = [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \dots \ \mathbf{d}_m]$ . Pour une orientation

constante de l'effecteur, représentée par la matrice orthogonale de rotation  $\mathbf{Q}$ , l'ensemble des positions du point de référence  $P$  qui appartiennent à  $\mathcal{P}_f$  est appelé  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$ . Par définition de  $\mathcal{P}_f$  et de  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$ , l'EPP et l'EPPOC du mécanisme sont inclus dans  $\mathcal{P}_f$  et dans  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$ , respectivement.

Pour une orientation donnée de l'effecteur, l'équation (4.4) est vraie quelle que soit la position du point de référence  $P$  tant que les  $m$  points  $A_i^v$  ne sont pas tous situés dans un même plan. De plus, comme à la section 2.3.1, il peut être prouvé que l'équation (4.5) est équivalente à écrire  $\mathbf{p}$  comme combinaison convexe des vecteurs  $\mathbf{a}_i^v$ . Ainsi, le théorème énoncé ci-dessous est l'équivalent du théorème 4 pour les mécanismes à six ddl.

**Théorème 10** *Pour une orientation donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 7$ ), l'ensemble  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$  est l'intérieur du plus grand polyèdre convexe dont les sommets sont des éléments de l'ensemble  $\{A_1^v, A_2^v, \dots, A_m^v\}$ , c'est-à-dire,  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$  est l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points  $\{A_1^v, A_2^v, \dots, A_m^v\}$ .*

Une conséquence directe de ce théorème est que l'EPPOC est une partie bornée de  $\mathbb{R}^3$ . Finalement, notons que  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$  et, par conséquent, l'EPPOC n'existent pas quand les  $m$  points  $A_i^v$  sont dans un même plan.

## 4.2 Caractérisation des poses polyvalentes

L'objectif de cette section est de présenter des théorèmes qui caractérisent les poses polyvalentes des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles. Dans une première partie, des théorèmes s'appliquant aux mécanismes entraînés par sept câbles sont présentés. Puis, dans le cas des mécanismes entraînés par  $m$  câbles où  $m \geq 7$ , un théorème, dont les conséquences sur la nature et la détermination de l'EPP sont importantes, est énoncé. Ce théorème, dit théorème de Stiemke, est connu dans les domaines de la programmation linéaire et non-linéaire [72] et des inégalités linéaires [11]. La possibilité d'appliquer le théorème de Stiemke à la caractérisation de l'EPP des mécanismes parallèles actionnés par câbles a été mise en évidence récemment dans [103].

Avant de nous intéresser aux mécanismes entraînés par sept câbles, remarquons que le théorème 1 s'applique à toute matrice  $\mathbf{W}$  ayant plus de colonnes que de lignes [94, 119]. Ainsi, dans le cas des mécanismes à six ddl, il s'énonce comme suit.

**Théorème 11** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles appartient à l'EPP si et seulement si*

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = 6 \quad (4.6)$$

et

$$\exists \mathbf{z} \in \ker(\mathbf{W}) \text{ tel que } \mathbf{z} > \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

#### 4.2.1 Mécanismes entraînés par sept câbles

Le théorème 2 peut être généralisé à toute matrice ayant  $n$  lignes et  $n + 1$  colonnes [68] (c.f. annexe A). En particulier, il peut être généralisé à la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  d'un mécanisme parallèle à six ddl dont l'effecteur est entraîné par sept câbles. Regroupons les théorèmes 2 et 3 en un seul théorème, le théorème 12.

**Théorème 12** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles appartient à l'EPP si et seulement si  $\mathbf{z}_0 > \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{z}_0 < \mathbf{0}$  où le vecteur  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^7$  appartient au noyau de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. Un tel vecteur  $\mathbf{z}_0$  peut être obtenu de la manière suivante*

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_7 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_6]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_7 \ \dots \ \mathbf{w}_6]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_7]) \\ -\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_6]) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) est intéressante car elle permet de mieux comprendre la nature de l'EPP. En effet, à la section 4.3, avec  $\mathbf{z}_0$  défini à l'équation (4.8), nous déduirons du théorème 12 la nature de la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles. Remarquons que le  $i^{\text{e}}$  élément  $z_i$  du vecteur  $\mathbf{z}_0$  est égal

à  $(-1)^i \det_i$  où  $\det_i$  est le déterminant de la matrice carrée obtenue de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  en supprimant sa  $i^e$  colonne. En outre, comme dans le cas des mécanismes plans à trois ddl entraînés par quatre câbles, le théorème 12 et l'équation (4.8) ont une conséquence directe qui s'énonce : la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  associée à une pose polyvalente d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles est telle que toute combinaison de six de ses colonnes est une combinaison de six torseurs linéairement indépendants. Cependant, remarquons qu'à la place d'utiliser l'équation (4.8) qui nécessite le calcul de sept déterminants, il est souvent préférable d'avoir recours à la décomposition LU, à la décomposition QR ou à la décomposition en valeurs singulières [102] de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  afin d'obtenir un vecteur  $\mathbf{z}_0$  appartenant au noyau de  $\mathbf{W}$ .

À présent, proposons un autre théorème qui permet de tester de manière efficace si une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles appartient à l'EPP.

**Théorème 13** *Soit  $i$  un entier quelconque tel que  $1 \leq i \leq 7$ . Alors, une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles appartient à l'EPP si et seulement si*

$$\det(\mathbf{W}_i) \neq 0 \quad (4.9)$$

et

$$-\mathbf{W}_i^{-1} \mathbf{w}_i > \mathbf{0} \quad (4.10)$$

où la matrice  $\mathbf{W}_i$  est la matrice carrée obtenue de la matrice des torseurs en supprimant sa  $i^e$  colonne

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_{i-1} & \mathbf{w}_{i+1} & \dots & \mathbf{w}_7 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Afin de démontrer ce théorème, commençons par prouver la condition nécessaire en supposant que l'effecteur du mécanisme est dans une pose polyvalente. D'après le théorème 12, pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ ,  $\det(\mathbf{W}_i) \neq 0$  et l'équation (4.9) est vraie. En outre, d'après l'équation (4.7) du théorème 11, on a

$$\mathbf{W}_i \mathbf{z}_i = -\mathbf{w}_i \mathbf{z}_i \quad (4.12)$$



où  $\mathbf{z}_i$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^6$  obtenu du vecteur  $\mathbf{z}$  en supprimant son  $i^{\text{e}}$  élément  $z_i$ . Étant donné que  $\det(\mathbf{W}_i) \neq 0$ , l'équation (4.12) est équivalente à

$$\mathbf{z}_i = -\mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{w}_iz_i. \quad (4.13)$$

De plus, d'après l'équation (4.7),  $z_i$  et tous les éléments du vecteur  $\mathbf{z}_i$  sont supérieurs à zéro et, par conséquent, l'équation (4.10) est vraie

$$-\mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{w}_i > \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

À présent, démontrons la condition suffisante du théorème 13. À cette fin, supposons que les équations (4.9) et (4.10) sont vraies. Nous pouvons supposer  $i = 7$ . Par définition de la matrice  $\mathbf{W}_7$ , l'équation (4.9) implique l'équation (4.6) du théorème 11. Puis, si  $\mathbf{z}^*$  désigne le vecteur  $-\mathbf{W}_7^{-1}\mathbf{w}_7$ , d'après l'équation (4.10),  $\mathbf{z}^* > \mathbf{0}$  et

$$\mathbf{W}_7\mathbf{z}^* = -\mathbf{w}_7 \quad (4.15)$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_7 & \mathbf{w}_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

avec

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ 1 \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Ainsi, l'équation (4.7) du théorème 11 est également vraie. Finalement, la condition énoncée au théorème 13 est nécessaire et suffisante et la preuve de ce théorème est complète.

Remarquons que le principe de la preuve présentée ci-dessus ne dépend pas de la dimension de l'espace vectoriel auquel les colonnes  $\mathbf{w}_i$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  appartiennent. Ainsi, en remplaçant 7 par  $n$  dans son énoncé, le théorème 13 est vrai pour tout mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $n + 1$  câbles. Notons également que le calcul du vecteur  $-\mathbf{W}_i^{-1}\mathbf{w}_i$  apparaissant à l'équation (4.10) nécessite l'inversion de la matrice carrée  $\mathbf{W}_i$ . Ainsi, afin de travailler avec le système d'équations ayant le conditionnement le meilleur possible, l'entier  $i$  impliqué à l'équation (4.10) doit être choisi tel que

$$\kappa(\mathbf{W}_i) \leq \kappa(\mathbf{W}_j), \quad \forall j \neq i, \quad 1 \leq j \leq 7 \quad (4.19)$$

où  $\kappa(\mathbf{W}_i)$  est le conditionnement de la matrice  $\mathbf{W}_i$ . Finalement, si on décide qu'une matrice  $\mathbf{W}_i$  est singulière quand son conditionnement est supérieur à une certaine valeur  $\kappa_{max}$ , alors, d'après le théorème 12 et l'équation (4.8), s'il existe un entier  $i$  tel que  $\kappa(\mathbf{W}_i) > \kappa_{max}$ , les sept colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  ne sont pas dans une configuration polyvalente puisque le  $i^e$  élément du vecteur  $\mathbf{z}_0$  est considéré comme étant nul.

### 4.2.2 Mécanismes entraînés par $m \geq 7$ câbles

Au chapitre 3, l'étude de la nature ainsi que la détermination de l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles ( $m \geq 4$ ) ont été permises par la description exhaustive des différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans ainsi que par l'étude de la répartition de ces configurations polyvalentes à l'intérieur de l'EPP. Les démonstrations des conditions nécessaires des théorèmes 6 et 7, présentées à l'annexe C, montrent que la recherche des différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans n'est pas aisée. Ainsi, en suivant la même démarche que celle présentée à l'annexe C, la recherche des différents types de configurations polyvalentes des torseurs spatiaux (vecteurs de  $\mathbb{R}^6$ ) est une tâche fastidieuse. Par exemple, la

section D.1 de l'annexe D présente le début de l'analyse des configurations polyvalentes de huit torseurs spatiaux. Le théorème de Stiemke, présenté ci-dessous, est un outil puissant qui permet de contourner cette difficulté en caractérisant les poses polyvalentes des mécanismes parallèles à  $n$  ddl entraînés par câbles sans passer par l'étude des différents types de configurations polyvalentes des torseurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Avant d'énoncer le théorème de Stiemke, remarquons que le théorème 11 peut être utilisé directement afin de tester si une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles ( $m \geq 7$ ) est polyvalente. Les conditions des équations (4.6) et (4.7) doivent être vérifiées. L'équation (4.6) peut, par exemple, être vérifiée en utilisant la décomposition en valeurs singulières de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  ou en vérifiant si au moins un des déterminants des matrices carrées de dimension 6 extraites de la matrice des torseurs est non nul. Par contre, quand le mécanisme est entraîné par plus de sept câbles, l'équation (4.7) est plus difficile à vérifier. En effet, le noyau  $\ker(\mathbf{W})$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est multidimensionnel et, par conséquent, il n'est plus généré par un seul vecteur non nul comme dans le cas des mécanismes entraînés par sept câbles. Les décompositions LU et QR et la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{W}$  permettent de déterminer une base de  $\ker(\mathbf{W})$  mais rien ne garantit qu'un des vecteurs de cette base ait tous ses éléments strictement positifs même si la pose considérée est polyvalente. Ainsi, il n'est généralement pas trivial de vérifier si l'équation (4.7) est vraie, c'est-à-dire s'il existe un vecteur  $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  appartenant au noyau de  $\mathbf{W}$ . Alors que le problème de trouver un tel vecteur  $\mathbf{z}$  peut être transformé en un problème de programmation linéaire, la condition (4.7) peut être directement vérifiée à l'aide d'une méthode d'optimisation. À cette fin, il suffit de formuler le problème sous la forme d'un problème d'optimisation avec contraintes tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{sous} \end{array} \left| \begin{array}{l} f(\mathbf{z}) \\ \mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0} \\ \mathbf{z} > \mathbf{0} \end{array} \right. \right. \quad (4.20)$$

où la fonction objectif  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  peut être choisie et où les contraintes assurent que la solution  $\mathbf{z}_{opt}$  au problème (4.20) vérifie l'équation (4.7) du théorème 11. Remarquons que les contraintes d'égalité et d'inégalité du problème (4.20) sont linéaires. Ainsi, le choix de la fonction objectif  $f$  détermine le type de problème. Par exemple, si  $f(\mathbf{z}) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}$  où  $\mathbf{c}$  est un vecteur constant de  $\mathbb{R}^m$  alors le problème est un problème de programmation

linéaire, si  $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{z}$  alors le problème est un problème de programmation quadratique et, de manière plus générale, si  $f(\mathbf{z})$  est convexe alors le problème est un problème d'optimisation convexe [22]. Remarquons que l'utilisation de méthodes d'optimisation afin de vérifier si l'équation (4.7) du théorème 11 est vraie montre que de telles méthodes convergent presque tout le temps. De plus, les résultats obtenus sont cohérents avec ceux obtenus par d'autres méthodes. Cependant, les méthodes d'optimisation ne sont pas les plus efficaces puisque l'équation (4.7) est seulement une condition d'existence qui ne requiert aucune optimisation. Une méthode beaucoup plus efficace peut être obtenue à partir du théorème de Stiemke présenté ci-dessous. De plus, à la section 4.3, nous montrerons que cette méthode permet de découvrir la nature de la frontière de l'EPPOC.

Dans [103], il est remarqué que le théorème suivant concerne directement l'équation (4.7) du théorème 11.

**Théorème 14 (Stiemke)** *Étant donnée une matrice  $\mathbf{W}$ , soit*

$$\mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{z} > \mathbf{0} \quad (4.21)$$

*a une solution  $\mathbf{z}$  ou*

$$\mathbf{W}^T \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W}^T \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad (4.22)$$

*a une solution  $\mathbf{q}$  mais jamais les deux.*

Une preuve de ce théorème peut être trouvée dans [72]. Ainsi, le théorème de Stiemke propose une alternative : l'équation (4.21) a une solution  $\mathbf{z}$  si et seulement si l'équation (4.22) n'a pas de solution  $\mathbf{q}$ . À présent, il est important de comprendre la signification géométrique de l'équation (4.22). Pour commencer, remarquons que l'équation (4.22) est équivalente à écrire

$$\forall i \ \mathbf{w}_i^T \mathbf{q} \geq 0 \quad \text{et} \quad \exists i \mid \mathbf{w}_i^T \mathbf{q} \neq 0 \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{w}_i$  est la  $i^{\circ}$  colonne de la matrice  $\mathbf{W}$  qui, dans cette thèse, est la matrice des torseurs d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles. Puis, d'après l'équation (4.23), étant donné que le vecteur  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  est non nul, nous pouvons considérer l'hyperplan  $\mathcal{H}$

de  $\mathbb{R}^n$  de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}$ . Cet hyperplan  $\mathcal{H}$  sépare  $\mathbb{R}^n$  en deux parties ouvertes situées de part et d'autre de  $\mathcal{H}$ , tout comme un plan sépare  $\mathbb{R}^3$  en deux parties ouvertes. Une de ces parties regroupe l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbf{v}^T \mathbf{q} > 0$  tandis que l'autre partie contient l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v}$  tels que  $\mathbf{v}^T \mathbf{q} < 0$ . Les vecteurs  $\mathbf{v}$  tels que  $\mathbf{v}^T \mathbf{q} = 0$  appartiennent à l'hyperplan  $\mathcal{H}$ . Par conséquent, l'équation (4.23) et, ainsi, l'équation (4.22), impliquent que les  $m$  torseurs  $\mathbf{w}_i$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont tous situés du même côté de l'hyperplan  $\mathcal{H}$ , certains  $\mathbf{w}_i$  mais pas tous pouvant appartenir à  $\mathcal{H}$ . On dit alors que  $\mathcal{H}$  supporte les torseurs  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  ou plus simplement que  $\mathcal{H}$  supporte  $\mathbf{W}$ . Dans le cas contraire, on a

$$\forall i \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{q} = 0 \quad (4.24)$$

ou

$$\exists (j, k), j \neq k, \text{ tels que } \mathbf{w}_j^T \mathbf{q} > 0 \text{ et } \mathbf{w}_k^T \mathbf{q} < 0. \quad (4.25)$$

Si l'équation (4.24) est vérifiée alors  $\mathbf{W}$  n'est pas de plein rang et, quand l'équation (4.25) est vraie, nous disons que l'hyperplan  $\mathcal{H}$ , de vecteur orthogonal  $\mathbf{q} \neq 0$ , sépare les torseurs  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  ou tout simplement que  $\mathcal{H}$  est séparableur. Ainsi, quand  $\mathbf{W}$  est de plein rang, le théorème de Stiemke s'interprète géométriquement de la manière suivante : l'équation (4.21) a une solution  $\mathbf{z}$  si et seulement si tous les hyperplans  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^n$  sont séparableurs. De plus, remarquons que le théorème 11 est vrai quelle que soit la dimension de l'espace vectoriel auquel les colonnes  $\mathbf{w}_i$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  appartiennent. Ainsi, d'après le théorème 11 et le théorème de Stiemke, nous pouvons énoncer qu'*une pose d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles est polyvalente si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  séparent les torseurs  $\mathbf{w}_i$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme, c'est-à-dire, si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  sont séparableurs*. Remarquons que ce résultat est connu de [103] mais également de [87] dans le contexte de la manipulation robotique. Ce résultat est puissant car il est valable quel que soit le nombre de ddl du mécanisme et quel que soit le nombre de câbles entraînant l'effecteur. À présent, il est légitime de se demander comment ce résultat peut être utilisé étant donné que tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  doivent être considérés, ces hyperplans existant en nombre infini. La réponse est que seuls les hyperplans formés par  $n - 1$  torseurs  $\mathbf{w}_i$  doivent et peuvent être considérés [87, 94] (remarquons que  $n - 1$

vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  doivent être linéairement indépendants afin de définir un hyperplan). Ainsi, nous pouvons énoncer un nouveau théorème fondamental qui caractérise les poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles.

**Théorème 15** *Soit  $\mathbf{W}$  la matrice des torseurs d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles telle que  $m > n$ . Soit  $\mathbf{w}_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) les torseurs colonnes de  $\mathbf{W}$ . Supposons que  $\text{rank}(\mathbf{W}) = n$ . Alors, une pose de l'effecteur du mécanisme est polyvalente si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  formés par  $n - 1$  torseurs  $\mathbf{w}_i$  (linéairement indépendants) séparent  $\mathbf{W}$ , c'est-à-dire, si et seulement si, pour chaque hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ , de vecteur orthogonal  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$  et formé par  $n - 1$  torseurs  $\mathbf{w}_i$ , l'équation (4.25) est vérifiée.*

Une méthode basée sur le théorème 15 et qui permet de tester si une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles appartient à l'EPP est présentée à la section D.3 de l'annexe D.

Notons que le fait que tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  séparent  $\mathbf{W}$  si et seulement si tous les hyperplans formés par  $n - 1$  colonnes de  $\mathbf{W}$  séparent  $\mathbf{W}$  n'est démontré rigoureusement ni dans [87] ni dans [94]. En effet, dans [87], la preuve est laissée en exercice (c.f. Chapitre 5 après la Proposition 5.3) tandis que [94] s'appuie sur des considérations géométriques dont la validité dans  $\mathbb{R}^n$  quand  $n > 3$  est difficile à décider. Ne connaissant pas de référence dans laquelle une preuve rigoureuse apparaisse et devant l'importance du résultat, une preuve est proposée à la section D.2 de l'annexe D. À présent, prenons pour exemple les configurations polyvalentes de quatre, cinq et six torseurs plans montrées, respectivement, aux figures 3.2, 3.3 et 3.4. Dans les trois cas, on constate graphiquement que tous les plans formés par deux torseurs  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendants séparent les autres  $\mathbf{w}_i$ , c'est-à-dire, séparent  $\mathbf{W}$ .

Notons également que le théorème 15 peut être utilisé afin d'étudier l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles ou plus de quatre câbles. Par rapport aux développements présentés aux chapitres 2 et 3, une telle étude aurait l'avantage d'éviter l'étude quelque peu fastidieuse des différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans mais elle aurait également l'inconvénient de ne pas étudier ces différents types de configurations polyvalentes. En effet, les chapitres 2 et 3 ont l'intérêt de montrer que l'EPP des mécanismes parallèles plans à trois ddl est composé

de poses polyvalentes de nature différente. Cette propriété fondamentale ne serait pas révélée par une étude qui, s'appuyant uniquement sur le théorème 15, ne s'intéresserait pas aux différents types de configurations polyvalentes.

Revenons au cas des mécanismes à six ddl et plus particulièrement au cas des mécanismes entraînés par sept câbles. Supposons que cinq torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{w}_l$ ,  $\mathbf{w}_p$  et  $\mathbf{w}_q$  de  $\mathbf{W}$  sont linéairement indépendants. Alors, l'hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^6$  formé par ces cinq torseurs sépare  $\mathbf{W}$  si et seulement si

$$\text{signe}(\det([\mathbf{w}_j \dots \mathbf{w}_q \mathbf{w}_r])) = -\text{signe}(\det([\mathbf{w}_j \dots \mathbf{w}_q \mathbf{w}_s])) \neq 0 \quad (4.26)$$

où  $\{j, k, l, p, q, r, s\}$  est une permutation de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  et où la fonction  $\text{signe}(x)$  est telle que  $\text{signe}(x) = 1$ ,  $\text{signe}(x) = -1$  et  $\text{signe}(x) = 0$  si  $x > 0$ ,  $x < 0$  et  $x = 0$ , respectivement. En effet, tous les vecteurs  $\mathbf{v}$  situés d'un côté de l'hyperplan  $\mathcal{H}$  (mais pas dans  $\mathcal{H}$ ) sont tels que

$$\text{signe}(\det([\mathbf{w}_j \dots \mathbf{w}_q \mathbf{v}])) = 1 \quad (4.27)$$

tandis que tous les vecteurs  $\mathbf{v}$  situés de l'autre côté de  $\mathcal{H}$  sont tels que

$$\text{signe}(\det([\mathbf{w}_j \dots \mathbf{w}_q \mathbf{v}])) = -1. \quad (4.28)$$

Ainsi, les déterminants permettent de décider si deux vecteurs sont situés du même côté de l'hyperplan  $\mathcal{H}$ . Cette propriété établit le lien entre les théorèmes 3 et 12 et le théorème 15.

Avant de discuter de la nature de la frontière de l'EPPOC, remarquons que [121] adapte un théorème issu du domaine de la manipulation robotique aux mécanismes parallèles à six ddl et huit câbles dont l'architecture est telle qu'il existe deux points  $B_i$  de l'effecteur tels que, en chacun de ces points, trois câbles soient attachés. Le théorème obtenu donne une condition suffisante à la polyvalence d'une pose donnée de l'effecteur

des mécanismes ayant ce type d'architecture. En outre, notons également l'existence du théorème suivant [94].

**Théorème 16** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles est polyvalente si et seulement si il existe  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{t}$  pour tout  $\mathbf{v} = \pm \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .*

Or, dans le cas  $n = 3$ , les six vecteurs  $\pm \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont dans une configuration polyvalente minimale à six vecteurs telle que celle montrée à la figure 3.4. Ainsi, l'étude des différents types de configurations polyvalentes présentée à la section 3.2 donne l'idée de modifier le théorème 16 comme suit.

**Théorème 17** *Une pose de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles est polyvalente si et seulement si il existe  $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{t}$  pour tout  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ , où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{e}_{n+1} = -\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$ .*

La condition nécessaire du théorème 17 est vraie par définition d'une pose polyvalente. Afin de prouver la condition suffisante, remarquons que les  $n + 1$  vecteurs  $\mathbf{e}_i$  définis au théorème 17 sont dans une configuration polyvalente à  $n + 1$  vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$ . De plus, soit  $\mathbf{t}_i \geq 0$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  tels que  $\mathbf{e}_i = \mathbf{W}\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ). Ainsi, tout torseur  $\mathbf{w}_p \in \mathbb{R}^n$  peut être obtenu par une combinaison linéaire, à coefficients positifs ou nuls, des  $n + 1$  vecteurs  $\mathbf{e}_i$  qui eux-mêmes s'écrivent comme combinaison linéaire, à coefficients positifs ou nuls, des colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ . On en conclut que tout torseur  $\mathbf{w}_p$  peut être obtenu par une combinaison linéaire, à coefficients positifs ou nuls, des colonnes de  $\mathbf{W}$ . Par conséquent, la condition du théorème 17 est suffisante et la preuve est complète. Finalement, notons qu'afin de vérifier si une pose d'un mécanisme à câbles est polyvalente, le théorème 16 nécessite le test de  $2n$  vecteurs alors que le théorème 17 nécessite le test de  $n + 1$  vecteurs.

### 4.3 Nature de la frontière de l'EPPOC

Commençons par considérer un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles ainsi que le théorème 12 qui caractérise les poses polyvalentes de ce mécanisme.



Considérons également une orientation constante de l'effecteur du mécanisme. Chaque déterminant qui apparaît à l'équation (4.8) du théorème 12 est une fonction continue de la position  $\mathbf{p}$  de l'effecteur tant qu'aucun des câbles impliqués dans ce déterminant n'est de longueur nulle ( $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_i^v$ ). Aussi, considérons une position  $\mathbf{p}_1$  de l'effecteur appartenant à l'EPPOC du mécanisme et une autre position  $\mathbf{p}_2$  située à l'extérieur de l'EPPOC telles que  $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{a}_i^v$  et  $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{a}_i^v$  quel que soit  $i$ . Alors, d'après le théorème 12, pour la position  $\mathbf{p}_1$  de l'effecteur, tous les déterminants apparaissant à l'équation (4.8) sont non nuls et ont le même signe. Ces déterminants étant des fonctions continues au point  $\mathbf{p}_1$  (c'est-à-dire au point de vecteur position  $\mathbf{p}_1$ ), il existe une boule ouverte de centre  $\mathbf{p}_1$  à l'intérieur de laquelle ils conservent leur signe et, par conséquent, cette boule est incluse dans l'EPPOC. Par ailleurs, toujours d'après le théorème 12, pour la position  $\mathbf{p}_2$  de l'effecteur, au moins deux des déterminants apparaissant à l'équation (4.8) sont de signes opposés. Si, de plus, les déterminants apparaissant à l'équation (4.8) sont tous non nuls alors il existe une boule ouverte de centre  $\mathbf{p}_2$  dans laquelle ils conservent tous leur signe. Par conséquent, cette boule ouverte est complètement à l'extérieur de l'EPPOC (elle est incluse dans son complémentaire). Un point de la frontière de l'EPPOC étant tel que toute boule ouverte centrée en ce point rencontre l'EPPOC et son complémentaire, *une position de l'effecteur appartient à la frontière de l'EPPOC seulement si, à l'équation (4.8), au moins un des déterminants est nul*. Par conséquent, une partie du lieu des positions de l'effecteur pour lesquelles six des sept torseurs colonnes de la matrice des torseurs sont linéairement dépendants fait éventuellement partie de la frontière de l'EPPOC du mécanisme entraîné par sept câbles. Or, pour les mêmes raisons que celles exposées, dans le cas des mécanismes plans, à la section 2.3.2 à la suite de la propriété 3, le lieu des positions de l'effecteur pour lesquelles six des sept torseurs de la matrice des torseurs sont linéairement dépendants est de même nature que le lieu de singularité à orientation constante d'une plate-forme de Gough-Stewart qui, en outre, est une cubique en les coordonnées  $(x, y, z)$  de l'effecteur [73] (polynôme de degré trois à trois variables  $x, y$  et  $z$ ). Ainsi, le lieu des positions de l'effecteur pour lesquelles six des sept (et plus généralement des  $m$ ) torseurs colonnes de la matrice des torseurs sont linéairement dépendants est également une cubique dont l'équation peut être écrite

$$\begin{aligned}
& c_{1i}x^3 + c_{2i}x^2y + c_{3i}x^2z + c_{4i}x^2 + c_{5i}xy^2 + c_{6i}xyz + c_{7i}xy + \\
& c_{8i}xz^2 + c_{9i}xz + c_{10i}x + c_{11i}y^3 + c_{12i}y^2z + c_{13i}y^2 + c_{14i}yz^2 + \\
& c_{15i}yz + c_{16i}y + c_{17i}z^3 + c_{18i}z^2 + c_{19i}z + c_{20i} = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

où l'indice  $i$  désigne la  $i^{\text{e}}$  combinaison de six colonnes de la matrice des torseurs. Les coefficients  $c_{ji}$  ( $j = 1, \dots, 20$ ) sont des fonctions (complexes) de la géométrie du mécanisme parallèle entraîné par câbles et de l'orientation de son effecteur. Une méthode qui permet de déterminer les expressions de ces coefficients est présentée dans [73].

L'équation (4.29) est l'équation d'une surface cubique et, ainsi, *la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles est composée de parties de surfaces cubiques. Ces surfaces cubiques sont au nombre de sept et chacune correspond au lieu de dépendance linéaire entre six des sept colonnes de la matrice des torseurs du mécanisme.* Remarquons qu'une surface cubique peut se réduire à une surface quadratique (c'est-à-dire dont l'équation est quadratique) ou à un plan. Elle peut aussi consister en la réunion de deux ou trois plans ou d'un plan et d'une surface quadratique. Avant de généraliser la discussion aux mécanismes entraînés par plus de sept câbles, remarquons que, d'après le théorème 12, si la géométrie du mécanisme ainsi que l'orientation de son effecteur sont telles qu'au moins une des sept surfaces cubiques d'équation (4.29) dégénère en tout l'espace cartésien (c'est-à-dire s'il existe au moins un entier  $i$  tel que  $c_{ji} = 0$  quel que soit  $j$ ), alors l'EPPOC n'existe pas.

À présent, considérons le cas des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par  $m$  câbles où  $m > 7$ . Nous avons vu au chapitre 3 que la frontière de l'EPPOC des mécanismes plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles, où  $m > 4$ , est composée de courbes de même nature que celles composant l'EPPOC des mécanismes plans entraînés par quatre câbles. De plus, nous avons montré au paragraphe précédent que la frontière de l'EPPOC des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par sept câbles est composée de parties de surfaces cubiques. Par conséquent, il est naturel de penser que la frontière de l'EPPOC des mécanismes à six ddl entraînés par plus de sept câbles est également composée de parties de surfaces cubiques. À l'aide du théorème 15 et, ainsi, indirectement, à l'aide du théorème de Stiemke, ce résultat peut être mis en évidence comme suit.

Fixons l'orientation de l'effecteur et remarquons que, quand la position de l'effecteur évolue de façon continue, les positions relatives des colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  évoluent également de façon continue dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^6$  (tant que  $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_i^v$ ). Considérons une position de l'effecteur située à l'intérieur de l'EPPOC et considérons également une trajectoire continue partant de cette position pour sortir de l'EPPOC. D'après le théorème 15, sur la partie de la trajectoire située à l'intérieur de l'EPPOC,

tous les hyperplans formés par cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  séparent  $\mathbf{W}$  et, de plus, au moment où la trajectoire sort de l'EPPOC, au moins un des hyperplans formés par cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  cesse de séparer  $\mathbf{W}$ . Mais, un hyperplan formé par cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  cesse d'être séparateur si et seulement si les cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  qui forment l'hyperplan deviennent linéairement dépendantes ou les cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  qui forment l'hyperplan et une autre colonne de  $\mathbf{W}$  deviennent linéairement dépendantes. Supposer que la trajectoire quitte l'EPPOC parce que cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  deviennent linéairement dépendantes alors que tous les autres hyperplans formés par cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  sont encore séparateurs est absurde étant donné que l'EPPOC est un espace ouvert (c.f. annexe A section A.3). Ainsi, la trajectoire quitte l'EPPOC parce qu'au moins une combinaison de six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs devient une combinaison de torseurs linéairement dépendants.

Aussi, étant donné que la trajectoire quitte l'EPPOC quand elle passe par sa frontière et d'après le paragraphe précédent, *la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ , est composée de parties de surfaces cubiques. Chacune de ces surfaces cubiques correspond au lieu de dépendance linéaire entre six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs du mécanisme.* Le raisonnement qui nous a permis d'établir ce résultat ne peut être considéré comme une preuve rigoureuse. Aussi, une telle preuve est présentée à la section A.4 de l'annexe A.

Dans [103], où le théorème de Stiemke est introduit dans le cadre de l'analyse des mécanismes parallèles entraînés par câbles, la nature de la frontière de l'EPP est comprise comme suit (traduction libre) : « la frontière correspond à l'annulation d'une ou de plusieurs tensions et, ensuite, à la résolution du système d'équations ainsi obtenu ». Replacé dans le contexte de [103], l'annulation d'une ou de plusieurs tensions signifie l'annulation de un ou de plusieurs éléments du vecteur  $\mathbf{z}$  de l'équation (4.7) tandis que le système d'équation à résoudre est  $\mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . À la lumière des discussions proposées ci-dessus, dans le cas d'un mécanisme à  $n$  ddl et  $m$  câbles, nous pouvons ajouter que ce sont exactement  $m - n$  éléments du vecteur  $\mathbf{z}$  de l'équation (4.7) qu'il faut annuler. Résoudre le système d'équations  $\mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0}$  revient alors à étudier les dépendances linéaires entre  $n$  torseurs de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme.

Finalement, notons que les raisonnements présentés ci-dessus ne sont pas valables aux  $m$  points  $A_i^v$  ( $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v$ ). En effet, en ces points, les déterminants de six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs ne sont pas continus. Ainsi, jusqu'ici, les développements de

cette section ne permettent pas de décider de la nature de ces points, c'est-à-dire de l'appartenance de ces points à l'EPPOC ou à sa frontière. Mais, au point  $A_i^v$ , le câble  $i$  est complètement enroulé ( $\rho_i = 0$ ) et l'effecteur est directement en contact avec la base. Dans ce cas, le torseur appliqué par la base sur l'effecteur est à priori inconnu et, généralement, les points  $A_i^v$  doivent être évités en pratique. Ainsi, ils sont à l'extérieur de tout espace de travail. Néanmoins, remarquons que la détermination de l'EPPOC des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles montre que, généralement, un certain nombre de points  $A_i^v$  appartiennent à la frontière de l'EPPOC. Géométriquement ceci s'explique par le fait que, par prolongement par continuité, une surface de singularité de six colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  passe par le point  $A_j^v$  quand  $\mathbf{w}_j$  est une de ces six colonnes.

## 4.4 Détermination de la frontière de l'EPPOC

Cette section propose une méthode qui permet de déterminer l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ . Cette méthode tire avantage de la connaissance de la nature cubique des parties de surfaces qui composent la frontière de l'EPPOC. Cependant, elle n'est pas qualifiée de géométrique étant donné que, à la différence de la méthode décrite à la section 2.4.2, elle nécessite une discrétisation de l'espace dans lequel l'EPPOC est recherché, cette discrétisation étant à la base de la méthode. En effet, la méthode présentée consiste à déterminer la frontière de l'EPPOC, et ainsi l'EPPOC lui-même, par un processus de discrétisation dont l'explication est le principal objectif de la présente section. Évidemment, une approximation de l'EPPOC peut être obtenue par test d'un nuage de points, la section 4.2 fournissant plusieurs moyens permettant de tester les points du nuage. Une méthode basée sur le théorème 15 et qui permet de tester les points d'un nuage est par ailleurs présentée en détail à la section D.3. Mais, par rapport au test d'un nuage de points, le principal avantage de la méthode présentée dans cette section est la qualité de la représentation graphique de l'EPPOC obtenue.

Ainsi, nous cherchons à discrétiser la frontière de l'EPPOC. Il existe assurément plusieurs méthodes qui permettent d'y arriver. Dans cette thèse, nous en présentons une seule qui, dans ses grandes lignes, consiste à balayer la partie de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle l'EPPOC est recherchée par un ensemble de droites parallèles régulièrement espacées.

D'après la section 4.1.3, si tout l'EPPOC est recherché (et pas seulement la partie de l'EPPOC contenue dans un espace de travail prescrit, par exemple) alors il suffit de balayer l'ensemble  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$  qui, d'après le théorème 10, est l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points  $\{A_1^v, A_2^v, \dots, A_m^v\}$ . Dans la description qui suit, nous nous limiterons à ce cas, c'est-à-dire nous considérons un ensemble de droites parallèles qui balayent  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$ .

Considérons un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ , dont les positions des  $m$  points  $A_i$  dans le repère fixe et les positions des  $m$  points  $B_i$  dans le repère mobile lié à l'effecteur sont connues. Considérons également une orientation constante de l'effecteur du mécanisme. Alors, les  $m$  points  $A_i^v$  sont connus et le polyèdre  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$  peut être calculé. Remarquons qu'il existe des algorithmes efficaces qui déterminent l'enveloppe convexe d'un ensemble de points et qui, par conséquent, permettent de déterminer  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$ . Puis, considérons les parallélépipèdes rectangles dont chaque face est orthogonale à un des axes de la base du repère fixe. Parmi l'ensemble de ces parallélépipèdes rectangles qui contiennent  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$ , soit  $\mathcal{P}_r$  le plus petit. Soit alors un ensemble de plans orthogonaux à l'axe de coordonnée  $z$  qui balaye de façon régulière  $\mathcal{P}_r$ . Ces plans ont des équations du type  $z = c$  où  $c$  est une constante. On peut évidemment choisir un ensemble de plans orthogonaux à l'axe  $x$  ou à l'axe  $y$  sans changer le principe de la méthode. Puis, on balaye chaque plan d'équation  $z = c$  par un ensemble de droites parallèles régulièrement espacées. Par exemple, des droites orthogonales à l'axe des ordonnées  $y$  sont choisies. Souvent, afin d'obtenir de bons résultats, chaque plan  $z = c$  doit être balayé par un autre ensemble de droites parallèles de direction différente, par exemple, un ensemble de droites orthogonales à l'axe des abscisses  $x$ . L'ensemble ou les deux ensembles de droites parallèles ainsi obtenus balayent de façon régulière  $\mathcal{P}_{f\mathbf{Q}}$  et vont être utilisés afin de discrétiser la frontière de l'EPPOC.

Considérons une droite  $\mathcal{D}$  de l'ensemble de droites ou d'un des deux ensembles de droites obtenus ci-dessus. Nous pouvons supposer que  $\mathcal{D}$  est située dans un plan  $\mathcal{P}_z$  orthogonal à l'axe des  $z$  et qu'elle est perpendiculaire à l'axe des ordonnées  $y$  tel que son équation soit  $(z = c, y = d)$  où  $c$  et  $d$  sont des constantes. Soit  $n_6$  le nombre de combinaisons de six colonnes prises parmi les  $m$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme. On a

$$n_6 = \frac{m!}{6!(m-6)!}. \quad (4.30)$$

À présent, il faut déterminer les équations (4.29) des  $n_6$  surfaces cubiques  $\mathcal{S}_i$  associées aux singularités de six des  $m$   $\mathbf{w}_i$  (c'est-à-dire à leur dépendance linéaire). Rappelons qu'une méthode qui permet de calculer les coefficients  $c_{ji}$  de ces cubiques est présentée dans [73]. Rappelons également que, si le mécanisme est entraîné par sept câbles, alors l'EPPOC n'existe pas quand au moins une des  $n_6 = 7$  surfaces cubiques  $\mathcal{S}_i$  est dégénérée en tout l'espace cartésien. Si le mécanisme est entraîné par plus de sept câbles, alors, toute surface cubique qui dégénère en tout l'espace cartésien est éliminée, c'est-à-dire n'est plus considérée dans la suite de la méthode étant donné qu'une telle cubique ne peut pas participer à la frontière de l'EPPOC. Les points d'intersection  $I_i$  entre la droite  $\mathcal{D}$  et les cubiques  $\mathcal{S}_i$  (non dégénérées) définissent un certain nombre de segments  $\mathcal{D}_i$  de  $\mathcal{D}$  ainsi que deux demi-droites. D'après la section 4.3, la frontière de l'EPPOC est composée de parties des cubiques  $\mathcal{S}_i$  et, par conséquent, tout segment  $\mathcal{D}_i$  est soit complètement à l'intérieur soit complètement à l'extérieur de l'EPPOC. De plus, l'EPPOC étant une partie bornée de  $\mathbb{R}^3$ , les deux demi-droites sont à l'extérieur de l'EPPOC. Parmi les segments  $\mathcal{D}_i$  de  $\mathcal{D}$ , nous allons discuter de la détermination de ceux qui appartiennent à l'EPPOC. Cependant, il faut faire attention à ne pas oublier de points d'intersection  $I_i$  entre la droite  $\mathcal{D}$  et une cubique  $\mathcal{S}_i$  tel que discuté dans le paragraphe suivant.

Considérons la droite  $\mathcal{D}$ , située dans le plan  $\mathcal{P}_z$  et perpendiculaire à l'axe des  $y$ , d'équation ( $z = c, y = d$ ) ainsi qu'une des surfaces cubiques  $\mathcal{S}_i$  non dégénérée en tout  $\mathbb{R}^3$ . Les coordonnées des points d'intersection  $I_i$  entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{S}_i$  sont simplement déterminées en substituant, dans l'équation (4.29) de  $\mathcal{S}_i$ ,  $z$  par  $c$  et  $y$  par  $d$  et en calculant les racines du polynôme de degré trois en  $x$  ainsi obtenu. Mais, un problème se présente quand tous les coefficients de ce polynôme sont nuls puisqu'il existe alors une infinité de racines au polynôme. Dans un tel cas, il ne faut pas penser que la cubique  $\mathcal{S}_i$  ne participe pas aux points  $I_i$  délimitant les segments  $\mathcal{D}_i$  de  $\mathcal{D}$  mais il faut déterminer si  $\mathcal{S}_i$  consiste en la réunion du plan  $\mathcal{P}_z$  d'équation  $z = c$  et d'un autre lieu  $\mathcal{L}_i$  ou si la trace de  $\mathcal{S}_i$  dans  $\mathcal{P}_z$  (ou la trace de  $\mathcal{L}_i$ ) est, au moins en partie, confondue avec  $\mathcal{D}$ . En effet, par exemple, dans le cas où  $\mathcal{S}_i$  est composée de  $\mathcal{P}_z$  et d'un autre lieu  $\mathcal{L}_i$ , des points d'intersection entre  $\mathcal{D}$  et cet autre lieu  $\mathcal{L}_i$  délimitent certains des segments  $\mathcal{D}_i$  de  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire font partie des points  $I_i$ . Mais ces points d'intersection ne peuvent pas être déterminés en calculant les racines du polynôme obtenu en substituant, dans l'équation (4.29) de  $\mathcal{S}_i$ ,  $z$  par  $c$  et  $y$  par  $d$ . En effet, ce polynôme est le polynôme nul puisque  $\mathcal{S}_i$  consiste en la réunion de  $\mathcal{P}_z$  (d'équation  $z = c$ ) et de  $\mathcal{L}_i$ . Aussi, pour chaque cubique  $\mathcal{S}_i$ , on calcule le polynôme  $P_{xy}$  de degré trois en  $x$  et  $y$  obtenu du membre

de gauche de l'équation (4.29) en substituant  $z$  par la constante  $c$ . Le plan  $\mathcal{P}_z$  est tout entier contenu dans  $\mathcal{S}_i$  si et seulement si tous les coefficients de  $P_{xy}$  sont nuls. Si c'est le cas, on cherche l'équation du lieu  $\mathcal{L}_i$  qui, avec  $\mathcal{P}_z$ , compose  $\mathcal{S}_i$ . À cette fin, on écrit

$$Q = Q'(z - c) \quad (4.31)$$

où  $Q$  est le membre de gauche de l'équation (4.29) ( $Q$  est un polynôme de degré trois en  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) et où  $Q'$  est un polynôme de degré deux en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Étant donné que  $c$  et les coefficients  $c_{ji}$  de  $Q$  sont connus, par identification des coefficients de  $Q$  et de  $Q'(z - c)$ , on détermine facilement les coefficients de  $Q'$ . À présent, si le polynôme  $P'_{xy}$  de degré deux en  $x$  et  $y$  obtenu de  $Q'$  pour  $z = c$  n'est pas le polynôme nul, le lieu  $\mathcal{L}_i$  a pour équation  $Q' = 0$ . Sinon, on écrit

$$Q' = Q''(z - c) \quad (4.32)$$

et, comme précédemment pour  $Q'$ , on calcule les coefficients du polynôme  $Q''$  du premier degré en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Si les coefficients du polynôme obtenu de  $Q''$  en substituant  $z$  par  $c$  ne sont pas tous nuls,  $Q'' = 0$  est l'équation du lieu  $\mathcal{L}_i$ . Sinon,  $\mathcal{L}_i$  n'existe pas, la surface cubique  $\mathcal{S}_i$  est réduite au seul plan  $\mathcal{P}_z$  et il n'existe pas de points d'intersection  $I_i$  entre la droite  $\mathcal{D}$  et la cubique  $\mathcal{S}_i$  qui délimitent des segments  $\mathcal{D}_i$  de  $\mathcal{D}$ .

Par exemple, considérons le mécanisme entraîné par sept câbles et l'orientation de son effecteur montrés à la figure 4.7 (les paramètres géométriques de ce mécanisme sont présentés à la section E.3.2). Considérons également le plan  $\mathcal{P}_z$  d'équation  $z = 0$ . Ce plan, noté  $\mathcal{P}_0$ , appartient à quatre des sept surfaces cubiques de singularité  $\mathcal{S}_i$  du mécanisme et, notamment, il appartient à la surface de singularité  $\mathcal{S}_4$ . En d'autres termes,  $\mathcal{S}_4$  est composée de  $\mathcal{P}_0$  et d'un autre lieu  $\mathcal{L}_4$ . En appliquant la méthode présentée dans le paragraphe précédent, les coefficients du polynôme  $Q'$  et, éventuellement, ceux du polynôme  $Q''$  sont calculés et, ainsi, l'équation de  $\mathcal{L}_4$  est déterminée. Tel que montré à la figure 4.3 (a), la trace de  $\mathcal{L}_4$  dans le plan  $\mathcal{P}_0$  est une droite verticale. Sur toute droite  $\mathcal{D}$  (non parallèle à l'axe des ordonnées) appartenant au plan  $\mathcal{P}_0$ , la trace de  $\mathcal{L}_4$  définira un point d'intersection  $I_i$ . À la figure 4.3 (a), ce point d'intersection est  $I_1$ . Aussi, tel que montré à la figure 4.3 (b), si les lieux, tel que  $\mathcal{L}_4$ , qui avec le plan  $\mathcal{P}_0$  composent quatre des sept surfaces cubiques  $\mathcal{S}_i$  sont oubliés (c'est-à-dire si les polynômes  $Q'$  et,

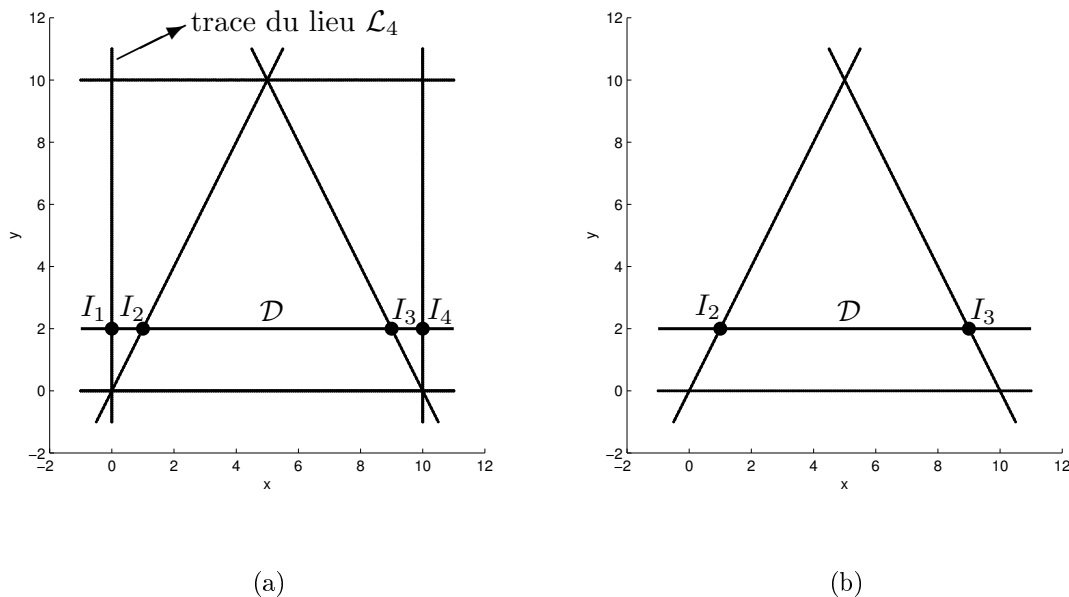


FIG. 4.3 – Traces des cubiques de singularité  $\mathcal{S}_i$  dans le plan  $\mathcal{P}_0$ .

éventuellement,  $Q''$  ne sont pas déterminés), sur toute droite  $\mathcal{D}$  appartenant au plan  $\mathcal{P}_0$  des points  $I_i$  seront oubliés et la méthode présentée dans cette section donnera éventuellement de mauvais résultats.

À présent, revenons au cas général. La méthode présentée ci-dessus permet de savoir si la cubique de singularité  $\mathcal{S}_i$  contient le plan  $\mathcal{P}_z$  et, si c'est le cas, elle permet de savoir si  $\mathcal{S}_i$  est réduite au seul plan  $\mathcal{P}_z$  ou si  $\mathcal{S}_i$  est composée du plan  $\mathcal{P}_z$  et d'un autre lieu  $\mathcal{L}_i$  dont l'équation est obtenue en déterminant les coefficients du polynôme  $Q'$  et, éventuellement, ceux du polynôme  $Q''$ . Aussi, supposons que  $\mathcal{S}_i$  n'est pas réduite au seul plan  $\mathcal{P}_z$ . Il faut maintenant déterminer si la trace de  $\mathcal{S}_i$  ou de  $\mathcal{L}_i$  dans  $\mathcal{P}_z$  est en partie confondue avec  $\mathcal{D}$ . Appelons  $\mathcal{T}_i$  la trace de la cubique  $\mathcal{S}_i$  ou du lieu  $\mathcal{L}_i$  dans  $\mathcal{P}_z$  et soit  $T = 0$  son équation où  $T$  est un polynôme de degré trois, deux ou un en  $x$  et  $y$ . Le polynôme  $T$  est obtenu de  $Q$ , de  $Q'$  ou de  $Q''$  en y substituant  $z$  par  $c$ . Puis, on substitue dans  $T$   $y$  par  $d$ . Si le polynôme en  $x$  qui en résulte n'est pas le polynôme nul,  $\mathcal{D}$  n'appartient pas à  $\mathcal{T}_i$  et les racines de ce polynôme sont les points d'intersections  $I_i$  entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{S}_i$ . Sinon,  $\mathcal{T}_i$  consiste en la droite  $\mathcal{D}$  et en un autre lieu, éventuellement vide, contenu dans le plan  $\mathcal{P}_z$ . On détermine l'équation de cet autre lieu en factorisant  $y - d$  dans  $T$  par une méthode équivalente à celle décrite ci-dessus pour déterminer  $Q'$  et  $Q''$  en factorisant  $z - c$ . Finalement, en substituant dans l'équation de cet autre



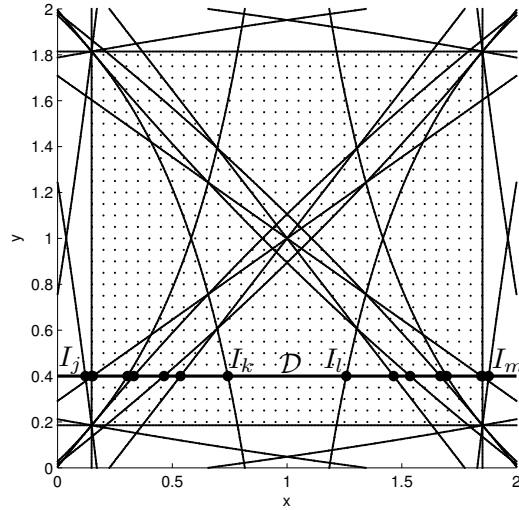


FIG. 4.4 – Les points d’intersection  $I_i$  entre une droite  $\mathcal{D}$  et les cubiques de singularité  $\mathcal{S}_i$  dans un plan  $\mathcal{P}_z$ .

lieu  $y$  par  $d$  et en calculant les racines du polynôme ainsi obtenu, on trouve les points d’intersection  $I_i$  entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{S}_i$ .

Nous sommes dans la situation où tous les points d’intersection  $I_i$  entre la droite  $\mathcal{D}$  et les cubiques  $\mathcal{S}_i$  non dégénérées en tout  $\mathbb{R}^3$  peuvent être déterminés. Par exemple, dans le cas du mécanisme et de l’orientation de son effecteur montrés à la figure 4.9 (les paramètres géométriques de ce mécanisme sont présentés à la section E.3.3 et, à la figure 4.9,  $l_b = 1$ ), les points d’intersection  $I_i$  obtenus dans le plan  $\mathcal{P}_z$  d’équation  $z = 2l_b/5$  et pour la droite  $\mathcal{D}$  d’équation  $(z = 2l_b/5, y = 2l_b/5)$  sont montrés à la figure 4.4. En ordonnant les points  $I_i$ , nous obtenons les segments  $\mathcal{D}_i$  de  $\mathcal{D}$  tels que chacun de ces segments est soit complètement à l’intérieur soit complètement à l’extérieur de l’EPPOC. Cependant, étant donné que nous cherchons les points de la frontière de l’EPPOC, nous éliminons tous les points  $I_i$  qui appartiennent à l’EPPOC. Remarquons que dans le cas d’un mécanisme entraîné par sept câbles, d’après le théorème 12, aucun point  $I_i$  n’appartient à l’EPPOC. À la figure 4.4, tous les points  $I_i$  qui sont à l’intérieur de la partie de la figure remplie par des petits points, par exemple  $I_k$  et  $I_l$ , appartiennent à l’EPPOC et sont, par conséquent, éliminés. Les points  $I_i$  restants c’est-à-dire les points  $I_i$  qui n’appartiennent pas à l’EPPOC définissent un nouvel ensemble de segments de  $\mathcal{D}$  dont les extrémités sont à l’extérieur de l’EPPOC ou sur la frontière de l’EPPOC. Finalement, on obtient les points appartenant à la frontière de l’EPPOC en testant, par

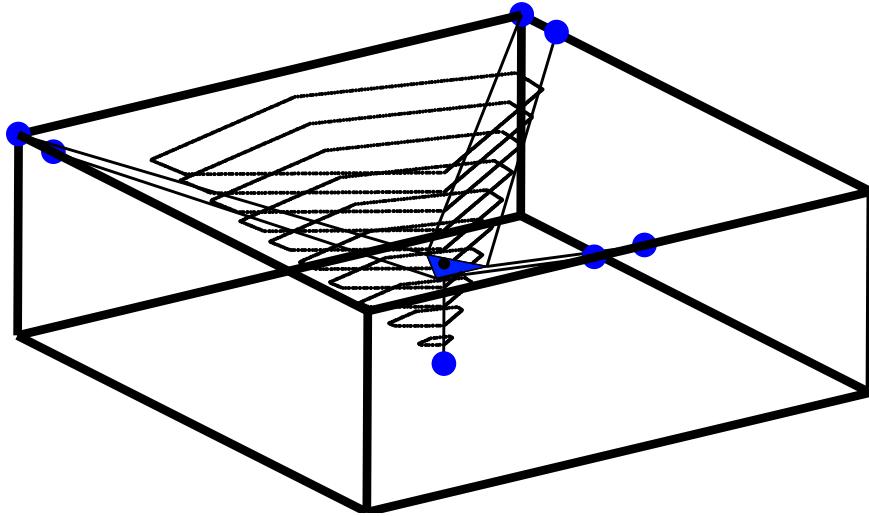


FIG. 4.5 – L’EPPOC du mécanisme montré à la figure 4.1 pour l’orientation de l’effecteur montrée à la figure (orientation de référence).

exemple, le point milieu de ces segments. En effet, les extrémités d’un de ces segments appartiennent à la frontière de l’EPPOC si le point milieu du segment appartient à l’EPPOC. La condition n’est que suffisante puisque si tout le segment appartient à la frontière de l’EPPOC alors, l’EPPOC étant un ensemble ouvert, les deux extrémités du segment appartiennent à la frontière de l’EPPOC bien que le point milieu du segment n’appartient pas à l’EPPOC. Après avoir considéré toutes les droites  $\mathcal{D}$ , une discrétisation de la frontière de l’EPPOC est obtenue. Notons que dans les exemples présentés ci-dessous, la méthode expliquée à la section D.3 a été programmée afin de déterminer si un point de  $\mathbb{R}^3$  (c’est-à-dire une position de l’effecteur) appartient à l’EPPOC. De plus, chaque plan  $\mathcal{P}_z$  a été balayé par un ensemble de droites perpendiculaires à l’axe  $y$  et par un ensemble de droites perpendiculaires à l’axe  $x$ .

Par exemple, considérons le mécanisme entraîné par sept câbles montré à la figure 4.1. Pour l’orientation de l’effecteur montrée à la figure, la frontière de l’EPPOC de ce mécanisme obtenue par la méthode présentée ci-dessus est montrée à la figure 4.5. Nous constatons que dans chaque plan  $\mathcal{P}_z$  la frontière de l’EPPOC de ce mécanisme est composée de segments de droites. Ainsi, il semble que ce sont des plans qui composent la frontière de cet EPPOC qui, par ailleurs, n’est pas très grand. La figure 4.6

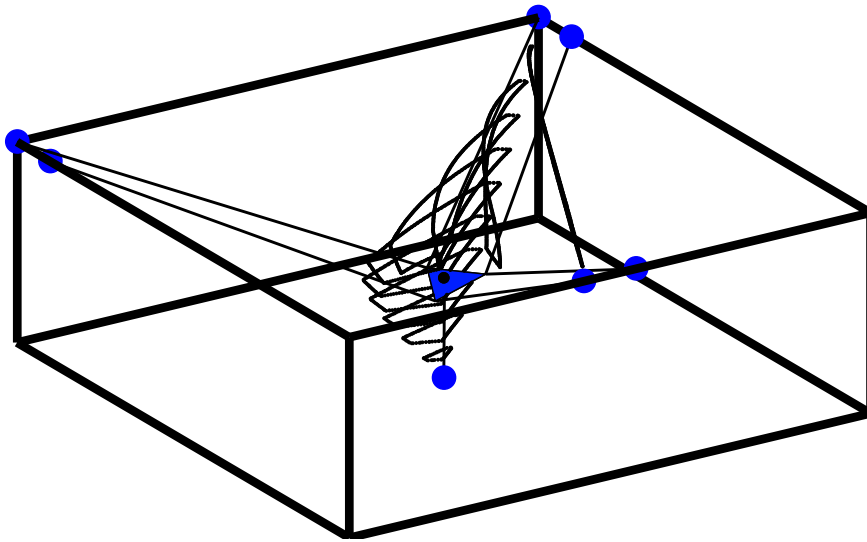


FIG. 4.6 – L'EPPOC du mécanisme montré à la figure 4.1 pour une orientation de l'effecteur obtenue de son orientation de référence par rotation de  $\pi/12$  autour d'un axe appartenant au plan de l'effecteur.

illustre le fait que l'EPP de ce mécanisme est très restreint en montrant les frontières de l'EPPOC correspondant à une orientation de l'effecteur obtenue de celle montrée à la figure 4.5 par rotation de  $\pi/12$  autour d'un axe appartenant au plan (mobile) défini par l'effecteur triangulaire. Du point de vue de l'EPP, un meilleur mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles est le robot Falcon [49, 50]. Deux EPPOC de ce mécanisme sont montrés aux figures 4.7 et 4.8. Les figures 4.9 et 4.10 présentent également des EPPOC mais, à la différence du mécanisme montré à la figure 4.1 et du robot Falcon, le mécanisme pour lequel ces EPPOC ont été déterminés est entraîné par huit câbles. De plus, ces huit câbles sont dans une configuration croisée telle que montrée à la figure 4.9.

Finalement, remarquons que la méthode présentée dans cette section permet de discrétiser la frontière de l'EPPOC mais également d'obtenir une estimation du volume de l'EPPOC. En effet, si la distance entre deux plans  $\mathcal{P}_z$  consécutifs est constante et égale à  $d_z$  et si, dans chaque plan  $\mathcal{P}_z$ , la distance entre deux droites  $\mathcal{D}$  consécutives (droites qui balayent  $\mathcal{P}_z$ ) est également constante et égale à  $d_y$ , alors, à tout segment, d'une des droites  $\mathcal{D}$ , dont les deux extrémités appartiennent à la frontière de l'EPPOC,

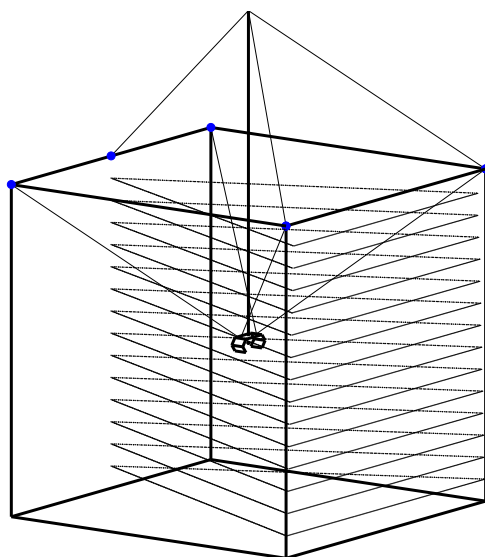


FIG. 4.7 – L'EPPOC du robot Falcon obtenu pour l'orientation de référence de son effecteur montrée à la figure.

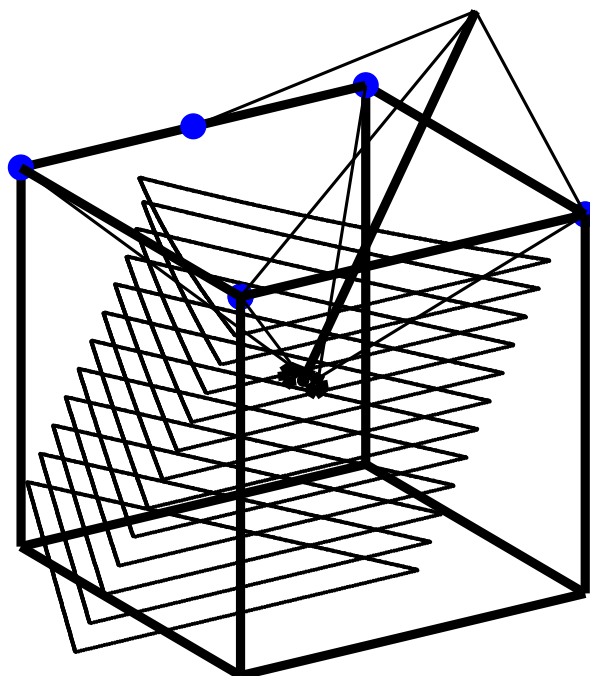


FIG. 4.8 – L'EPPOC du robot Falcon obtenu pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure.

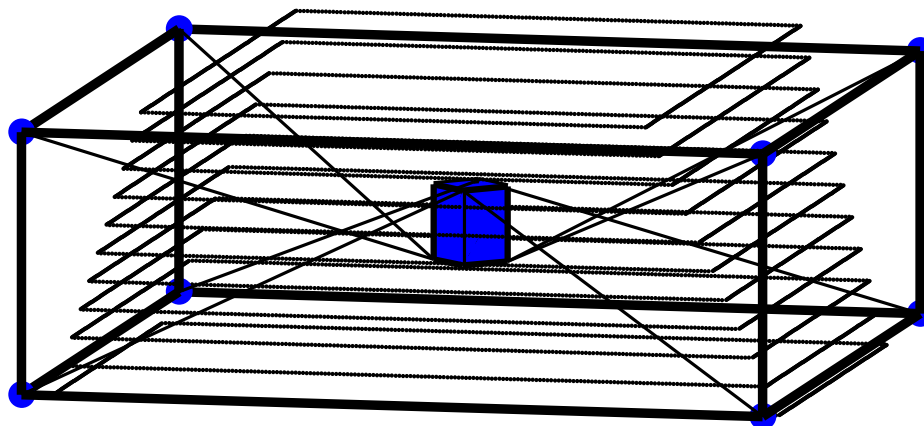


FIG. 4.9 – L'EPPOC d'un mécanisme entraîné par huit câbles obtenu pour l'orientation de référence de son effecteur.

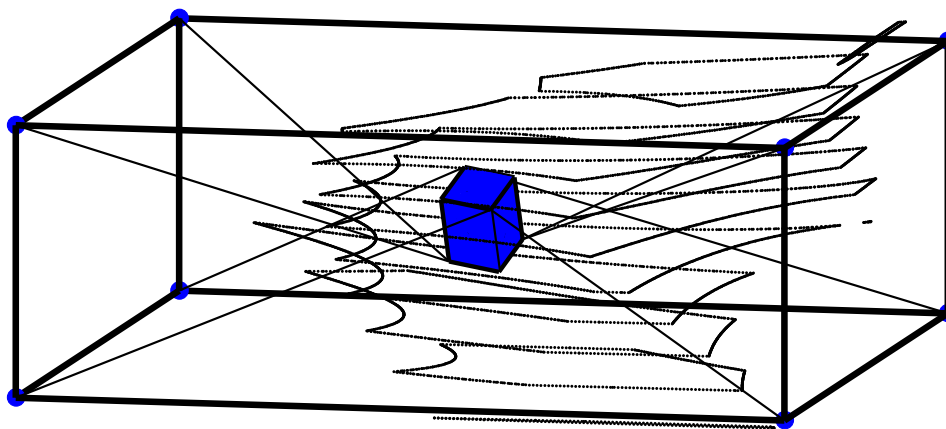


FIG. 4.10 – L'EPPOC d'un mécanisme entraîné par huit câbles obtenu pour l'orientation de l'effecteur montrée à la figure.

on peut associer un parallélépipède rectangle dont les côtés ont pour longueurs  $d_z$ ,  $d_y$  et  $l$  où  $l$  est la longueur du segment. Une estimation du volume de l'EPPOC est obtenue en additionnant les volumes des parallélépipèdes rectangles associés à tous les segments de droite  $\mathcal{D}$  dont les deux extrémités appartiennent à la frontière de l'EPPOC. Par exemple, l'estimation du volume de l'EPPOC montré à la figure 4.5 obtenue par cette méthode est  $0.187 \text{ m}^3$ , la base du mécanisme, qui correspond au parallélépipède rectangle montré à la figure 4.5, ayant un volume de  $2.8 \text{ m}^3$ . Cette base est également celle du mécanisme entraîné par huit câbles croisés montré à la figure 4.9. Les EPPOC montrés aux figures 4.9 et 4.10 ont des volumes estimés par la méthode à  $2.41 \text{ m}^3$  et  $0.56 \text{ m}^3$ , respectivement.

## 4.5 Conclusion

À partir de la généralisation aux mécanismes parallèles à six ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ , du modèle cinématique des mécanismes plans des deux chapitres précédents, plusieurs théorèmes permettant de tester si une pose donnée de l'effecteur appartient à l'EPP ont été discutés. La plupart de ces théorèmes sont connus mais rarement appliqués dans la littérature sur les mécanismes parallèles entraînés par câbles. Le théorème de Stiemke, dont l'application à l'étude de l'EPP a été mise en évidence dans [103], conduit à énoncer le théorème 15 qui permet de caractériser les poses polyvalentes des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par câbles sans passer par l'étude des différents types de configurations polyvalentes des torseurs de  $\mathbb{R}^6$ . Puis, à partir du théorème 15 et à la lumière des résultats obtenus dans le cas des mécanismes plans, il a été prouvé que la frontière de l'EPPOC est composée de parties de surfaces cubiques. De plus, pour une orientation constante de l'effecteur, ces surfaces cubiques sont les lieux des positions de l'effecteur pour lesquelles six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs du mécanisme sont linéairement dépendantes. Ainsi, ces surfaces sont de même nature que le lieu de singularité à orientation constante d'une plate-forme de Gough-Stewart. Finalement, ce résultat a permis de proposer une méthode de détermination de l'EPPOC qui consiste à trouver sa frontière par discrétisation. L'utilisation de cette méthode montre que, comme dans le cas des mécanismes parallèles plans entraînés par câbles, l'EPPOC des mécanismes parallèles à six ddl est fortement dépendant de l'orientation de l'effecteur et de la géométrie du mécanisme.

# Conclusion

Cette thèse a présenté une étude détaillée de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles, la majeure partie des résultats concernant les mécanismes plans à trois ddl.

Dans une première partie, les mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par quatre câbles ont été l'objet de l'étude. Il a été montré que l'EPPOC de ces mécanismes est une partie ouverte et bornée du plan dont la frontière est composée d'arcs de coniques. De plus, ces coniques, au nombre de quatre, sont les lieux de dépendance linéaire entre trois des quatre torseurs colonnes de la matrice des torseurs du mécanisme. Ce résultat permet d'appliquer une méthode géométrique à la détermination de l'EPPOC. Cette méthode consiste à déterminer la frontière de l'EPPOC en tirant avantage de la connaissance de sa nature. Finalement, l'application de cette méthode à la détermination de l'EPP de mécanismes ayant une base et un effecteur rectangulaires a permis d'illustrer son intérêt.

Le troisième chapitre de la thèse, qui constitue également sa deuxième partie, présente les principales contributions de ce travail. Ce chapitre concerne les mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 4$ . Son principal objectif est de généraliser les résultats obtenus au chapitre précédent. Les développements de ce chapitre partent de la problématique suivante : si quatre des  $m$  câbles du mécanisme sont capables d'engendrer tout torseur à l'effecteur, alors, les  $m$  câbles du mécanisme

le peuvent aussi mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Ainsi, il existe des poses polyvalentes pour lesquelles plus de quatre câbles sont nécessaires à la génération de tout torseur à l'effecteur. Aussi, le chapitre 3 présente de façon exhaustive les différents types de configurations polyvalentes des torseurs plans qui sont au nombre de trois : les configurations polyvalentes à quatre torseurs et les configurations polyvalentes minimales à cinq et six torseurs. Puis, la répartition de ces configurations polyvalentes au sein de l'EPPOC est discutée. Il est montré que pour la majorité des mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de quatre câbles, les configurations polyvalentes minimales à cinq et six torseurs existent en des points isolés de l'EPPOC. La détermination de ces points est par ailleurs brièvement discutée. Dans sa dernière partie, le chapitre 3 montre comment généraliser aux mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par plus de quatre câbles la méthode géométrique de détermination de l'EPPOC présentée au chapitre 2. Finalement, la méthode géométrique est utilisée afin d'illustrer le fait que croiser les câbles d'un mécanisme peut permettre d'agrandir son EPP.

Le quatrième et dernier chapitre de la thèse concerne l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles à six ddl entraînés par  $m$  câbles,  $m \geq 7$ . Une section de ce chapitre est consacrée aux différents moyens mathématiques, la plupart connus, permettant de tester si une pose donnée est polyvalente. Certains de ces moyens caractérisent les poses polyvalentes. Puis, il est démontré que la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par sept câbles est composée de parties de surfaces cubiques, c'est-à-dire de surfaces dont l'équation est un polynôme de degré trois. À la lumière des résultats obtenus dans le cas des mécanismes plans à trois ddl et en s'appuyant sur la notion d'hyperplan séparateur, la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > 7$ , est prouvée être de même nature que celle de l'EPPOC d'un mécanisme entraîné par sept câbles, c'est-à-dire est prouvée être composée de parties de surfaces cubiques. De plus, pour une orientation constante de l'effecteur, ces surfaces cubiques sont les lieux des positions de l'effecteur pour lesquelles six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs du mécanisme sont linéairement dépendantes. Ainsi, ces surfaces sont de même nature que le lieu de singularité à orientation constante d'une plate-forme de Gough-Stewart. Ce résultat permet d'utiliser une méthode présentée dans [73] afin de déterminer les équations de ces surfaces. Finalement, à partir de ces équations, une méthode permettant de déterminer la frontière de l'EPPOC est proposée. Cette méthode consiste à balayer l'espace cartésien à l'aide de droites parallèles et à chercher les points de ces droites qui appartiennent



à la frontière de l'EPPOC. Une discrétisation de la frontière est ainsi obtenue. Suivant sa programmation et la résolution souhaitée, cette méthode de discrétisation peut impliquer des temps de calcul élevés. Cependant, tel qu'illustré par les exemples de détermination d'EPPOC présentés à la fin de la section 4.4, la discrétisation de la frontière de l'EPPOC permet d'obtenir une représentation graphique de qualité qui, dans le cas tridimensionnel, est nécessaire à la visualisation de l'étendue et de la géométrie de l'EPPOC.

La détermination de l'EPP est un outil fondamental au choix de la géométrie d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par plus de  $n$  câbles, c'est-à-dire au choix du nombre de câbles, des positions des poulies actionnées à la base et des positions des points d'attache des câbles à l'effecteur. En effet, la détermination de l'EPP d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles permet de connaître dans quelles parties de son espace de travail le mécanisme peut, si les actionneurs sont assez forts et les câbles assez résistants, reprendre tout effort mécanique appliqué à son effecteur. De plus, une pose située en dehors de l'EPP est une pose pour laquelle certains efforts ne pourront pas être équilibrés par les câbles. La synthèse de mécanismes possédant un EPP important est d'ailleurs un sujet ouvert. Cependant, soulignons qu'un mécanisme parallèle entraîné par câbles peut être utilisé en dehors de son EPP puisque les câbles seront toujours capable d'exercer certains torseurs à l'effecteur. Mais, le comportement du mécanisme dépendra beaucoup de l'application, c'est-à-dire de la tâche à réaliser.

Un des principaux objectifs de cette dissertation était de discuter d'outils permettant de déterminer l'EPP des mécanismes parallèles entraînés par câbles. L'EPP des mécanismes plans à deux ddl ainsi que celui des mécanismes spatiaux à trois ddl dont les effecteurs sont ponctuels correspondent à l'enveloppe convexe des points auxquels les câbles s'enroulent à la base. Leur détermination est ainsi aisée. Par contre, étant donné que les ddl impliqués sont mixtes, l'EPP des mécanismes plans à trois ddl et celui des mécanismes à six ddl ont des géométries plus complexes et ne sont d'ailleurs pas convexes comme plusieurs exemples présentés dans cette thèse le montrent. Dans le cas des mécanismes plans à trois ddl, nous avons présenté une méthode géométrique permettant de déterminer efficacement l'EPPOC. Ainsi, l'orientation de l'effecteur dépendant d'un seul angle, une bonne approximation de l'EPP a pu être obtenue en superposant dans un espace tridimensionnel plusieurs EPPOC. Dans le cas des mécanismes spatiaux à six ddl, nous avons présenté une méthode permettant de déterminer l'EPPOC. Cependant, telle que programmée, cette méthode n'est pas très rapide. De

plus, l'EPP étant un espace à six dimensions, déterminer l'EPPOC ne donne qu'une image partielle de l'EPP. Aussi, les outils suivants, qui au meilleur de notre connaissance n'ont jamais été développés, faciliteraient et amélioreraient beaucoup l'analyse et la synthèse d'EPP des mécanismes parallèles à six ddl. Une procédure permettant de tester efficacement si une pose donnée appartient à l'EPP d'un mécanisme entraîné par un nombre quelconque de câbles serait un outil fondamental à l'analyse de l'EPP. Les discussions proposées à la section 4.2 apportent sûrement des éléments importants à la synthèse d'une telle procédure. Remarquons que la méthode présentée à la section D.3 permet de tester si une pose donnée appartient à l'EPP mais cette méthode n'est pas très efficace quand la pose appartient à l'EPP. Un autre outil serait une méthode permettant de déterminer un EPP en orientation, c'est-à-dire de déterminer l'ensemble des orientations de l'effecteur appartenant à l'EPP pour une position donnée de l'effecteur. Par exemple, des méthodes présentées dans [14, 15, 78, 79] s'appliquant à des mécanismes parallèles à liaisons rigides pourraient éventuellement être adaptées aux mécanismes parallèles entraînés par câbles. Un dernier exemple d'outil qui faciliterait l'analyse de l'EPP est une méthode efficace de détermination de l'EPP à orientation totale [81], cet espace étant défini comme l'ensemble des positions de l'effecteur du mécanisme qui appartiennent à l'EPP pour toute orientation de l'effecteur prise dans un ensemble donné d'orientations.

L'utilisation des méthodes, présentées dans cette thèse, permettant de déterminer l'EPPOC d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles montre que cet espace est fortement dépendant de l'orientation de l'effecteur et de la géométrie du mécanisme. Il est ainsi important de pouvoir le déterminer. Ces méthodes montrent également que, pour une orientation constante de l'effecteur, si le mécanisme respecte certaines symétries alors l'EPPOC obtenu pour cette orientation respectera les mêmes symétries. Finalement, notons que les mécanismes dont certains des câbles se croisent, comme celui montré à la figure 4.10 par exemple, ont généralement un EPP assez important. Cependant, la synthèse de ces géométries à câbles croisés nécessite sûrement un compromis entre croiser les câbles pour obtenir un EPP important et limiter les interférences entre les câbles.

# Bibliographie

- [1] Akeel, H. A., *Light Weight Robot Mechanism*, US patent No. 5 313 854, 1994.
- [2] Albus, J., Bostelman, R., Dagalakis, N., "The NIST Robocrane," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 10, No. 5, pp. 709-724, 1993.
- [3] Alp, A. B., Agrawal, S. K., "Cable Suspended Robots: Design, Planning and Control," Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4275-4280, Washington DC, USA, 2002.
- [4] Arai, T., Matsumura, S., Yoshimura, Y., Osumi, H., "A Proposal for a Wire Suspended Manipulator: A Kinematic Analysis," *Robotica*, Vol. 17, No. 1, pp. 3-9, 1999.
- [5] Arai, T., Yuasa, K., Mae, Y., Inoue, K., Miyawaki, K., Koyachi, N., "A Hybrid Drive Parallel Arm For Heavy Material Handling," *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 9, No. 1, pp. 45-54, 2002.
- [6] Balet, D., Chiomento, R., Beaulieu, L., Poncel, Y., *Device for Positioning a Mock-Up in Three Dimensions, in Particular for Studying BackScattering From Said Mock-Up*, US patent No. 4 873 571, 1989.
- [7] Barrette, G., *Analyse des mécanismes parallèles actionnés par câbles*, Mémoire de Maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2000.
- [8] Barrette, G., Gosselin, C. M., "Determination of the Dynamic Workspace of Cable-Driven Planar Parallel Mechanisms," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, No. 2, 2005.

- [9] Behzadipour, S., Khajepour, A., "Design of reduced DOF parallel cable-based robots," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 39, No. 10, pp. 1051-1065, 2004.
- [10] Behzadipour, S., *Ultra-High-Speed Cable-Based Robots*, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 2005.
- [11] Ben-Israel, A., "Motzkin's Transposition Theorem, and the Related Theorems of Farkas, Gordan and Stiemke," *Encyclopedia of Mathematics* (à paraître).
- [12] Bennett, R. M., Farmer, M. G., Mohr, R. L., Earl Hall Jr., W., "Wind-Tunnel Technique for Determining Stability from Cable-Mounted Models," *Journal of Aircraft*, Vol. 15, No. 5, pp. 304-310, 1978.
- [13] Beyer, W. H., *CRC standard mathematical tables*, CRC Press, 28th ed., pp. 200-201, 1987.
- [14] Bonev, I. A., Ryu, J., "A New Approach to Orientation Workspace Analysis of 6-DOF Parallel Manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, No. 1, pp. 15-28, 2001.
- [15] Bonev, I. A., *Geometric analysis of parallel mechanisms*, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 2002.
- [16] Bosscher, P., Ebert-Uphoff, I., "Wrench-Based Analysis of Cable-Driven Robots," *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4950-4955, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [17] Bosscher, P., Ebert-Uphoff, I., "A Stability Measure for Underconstrained Cable-Driven Robots," *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4943-4949, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [18] Bostelman, R., Albus, J., Graham, R. E., "RoboCrane and Emma Applied to Waste Storage Tank Remediation," *Proceedings of the American Nuclear Seventh Topical Meeting on Robotics and Remote Systems*, Augusta, GA, USA, 1997.
- [19] Bostelman, R., Jacoff, A., Bunch, R., "Delivery of an Advanced Double-Hull Ship Welding System Using RoboCrane," *Proceedings of the Third International Computer Science Conventions (ICSC) Symposia on Intelligent Industrial Automation and Soft Computing*, Genova, Italy, 1999.
- [20] Bostelman, R., Jacoff, A., Proctor, F., Kramer, T., Wavering, A., "Cable-Based Reconfigurable Machines for Large-Scale Manufacturing," *Proceedings of the 2000 Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, Ann Arbor, MI, USA, 2000.
- [21] Bouchard, S., Gosselin, C. M., "A Simple Control Strategy for Overconstrained Parallel Cable Mechanisms," *Proceeding of the 20th Canadian Congress of Applied Mechanics (CANCAM 2005)*, Montreal, Canada, 2005.

- [22] Boyd, S., Vandenberghe, L., *Convex optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [23] Brau, E., Gosselin, F., Lallemand, J. P., "Design of a Singularity Free Architecture for Cable Driven Haptic Interfaces," Proceedings of the First Joint Eurohaptics Conference and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, pp. 208-213, Pisa, Italy, 2005.
- [24] Choe, W., Kino, H., Katsuta, K., Kawamura, S., "A Design of Parallel Wire Driven Robots for Ultrahigh Speed Motion Based on Stiffness Analysis," Proceedings of the 1996 Japan/USA Symposium on Flexible Automation, pp. 159-166, Boston, MA, USA, 1996.
- [25] Le Coroller, H., Dejonghe, J., Arpesella, C., Vernet, D., Labeyrie, A., "Tests with a Carlina-type hypertelescope prototype - I. Demonstration of star tracking and fringe acquisition with a balloon-suspended focal camera," *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 426, No. 2, pp. 721-728, 2004.
- [26] Côté, G., *Analyse et Conception de Mécanismes Parallèles Actionnés par Câbles*, Mémoire de Maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2003.
- [27] Dagalakakis, N. G., Albus, J. S., Wang, B.-L., Unger, J., Lee, J. D., "Stiffness Study of a Parallel Link Robot Crane for Shipbuilding Applications," *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 111, pp. 183-193, 1989.
- [28] Dewdney, P., Nahon, M., Veidt, B., "The Large Adaptive Reflector: A Giant Radio Telescope with an Aero Twist," *Canadian Aeronautics and Space Journal*, Vol. 48, No. 4, pp. 239-250, 2002.
- [29] Ebert-UpHoff, I., Voglewede, P. A., "On the Connections Between Cable-Driven Robots, Parallel Manipulators and Grasping," Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4521-4526, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [30] Fang, S., Franitza, D., Verhoeven, R., Hiller, M., "Optimum Motion Planning for Tendon-Based Stewart Platforms," Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, 2004.
- [31] Fang, S., Franitza, Torlo, M., Bekes, F., Hiller, M., "Motion Control of a Tendon-Based Parallel Manipulator Using Optimal Tension Distribution," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 9, No. 3, pp. 561-568, 2004.
- [32] Fattah, A., Agrawal, S. K., "Workspace and Design Analysis of Cable-Suspended Planar Parallel Robots," Proceedings of the 2002 ASME Design Engineering Technical Conferences, Montreal, Canada, MECH-34330, 2002.

- [33] Fattah, A., Agrawal, S. K., "Design of Cable-Suspended Planar Parallel Robots for an Optimal Workspace," in Gosselin, C. M., and Ebert-Uphoff, I., Eds, Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, pp. 195-202, Quebec City, Canada, 2002.
- [34] Ferraresi, C., Paoloni, M., Pastorelli, S., Pescarmona, F., "A New 6-DOF Parallel Robotic Structure Actuated by Wires: The WiRo-6.3," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 21, No. 11, pp. 581-595, 2004.
- [35] Ferraresi, C., Paoloni, M., Pastorelli, S., Pescarmona, F., "A planar 2-DOF Wire-Actuated Haptic Master: the WiMas3," First Conference on Intelligent Manipulation and Grasping (IMG 2004), Genova, Italy, 2004.
- [36] Fitzsimmons, J. T., Veidt, B., Dewdney, P. E., "Steady-State Analysis of the Multi-Tethered Aerostat Platform for the Large Adaptive Reflector Telescope," Proceedings of SPIE, vol. 4015, pp. 476-487, 2000.
- [37] Gallina, P., Rosati, G., Rossi, A., "3-d.o.f. Wire Driven Planar Haptic Interface," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 32, No. 1, pp. 23-36, 2001.
- [38] Gallina, P., Rosati, G., "Manipulability of a Planar Wire Driven Haptic Device," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, No. 2, pp. 215-228, 2002.
- [39] Gorman, J. J., Jablolkow, K. W., Cannon, D. J., "The Cable Array Robot: Theory and Experiment," Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2804-2810, Seoul, Korea, 2001.
- [40] Gosselin, C. M., "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, No. 3, pp. 331-336, 1990.
- [41] Gouttefarde, M., Gosselin, C. M., "On the Properties and the Determination of the Wrench-Closure Workspace of Planar Parallel Cable-Driven Mechanisms," Proceedings of the 2004 ASME Design Engineering Technical Conferences, Salt Lake City, UT, USA, MECH-57127, 2004.
- [42] Heyden, T., Maier, T., Woernle, C., "Trajectory Tracking Control for a Cable Suspension Manipulator," in Lenarčič, J., Thomas, F., Eds, *Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 125-134, 2002.
- [43] Hiller, M., Fang, S., Mielczarek, S., Verhoeven, R., Franitza D., "Design, Analysis and Realization of Tendon-Based parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 40, pp. 429-445, 2005.

- [44] Homma, K., Fukuda, O., Usuba, M., Sugawara, J., Nagata, Y., "A Wire-Driven Leg Rehabilitation System: Development of a 4-DOF Experimental System," Proceedings of the 2003 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2003), pp. 908-913, Kobe, Japan, 2003.
- [45] Hong, D., Mueller, K. J., Velinsky, S. A., "Mobile Robot Localization by Cable-Extension Transducers," in Merlet, J.-P., Ravani, B., Eds, *Computational Kinematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 19-30, 1995.
- [46] Jeong, J. W., Kim, S. H., Kwak, Y. K., "Kinematics and Workspace Analysis of a Parallel Wire Mechanism for Measuring a Robot Pose," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, No. 6, pp. 825-841, 1999.
- [47] Kamishima, H., Arai, T., Yuasa, K., Mae, Y., Inoue, K., Miyawaki, K., Koyachi, N., "Hybrid Drive Parallel Arm and its Motion Control," Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 516-521, Takamatsu, Japan, 2000.
- [48] Kawamura, S., Ito, K., "A New Type of Master Robot for Teleoperation Using a Radial Wire Drive System," Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 26-30, Yokohama, Japan, July, 1993.
- [49] Kawamura, S., Choe, W., Tanaka, S., Pandian, S. R., "Development of an Ultra-high Speed Robot FALCON using Wire Drive System," Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 215-220, Nagoya, Japan, May, 1995.
- [50] Kawamura, S., Kino, H., Choe, W., "High-Speed Manipulation by Using Parallel Wire-Driven Robots," *Robotica*, Vol. 18, No. 1, pp. 13-21, 2000.
- [51] Khajepour, A., Behzadipour, S., Dekker, R., Chan, E., "New Cable-Based Ultra High Speed Robots, A Review," First Conference on Intelligent Manipulation and Grasping (IMG 2004), Genova, Italy, 2004.
- [52] Kim, S., Ishii, M., Koike, Y., Sato, M., "Development of Tension Based Haptic Interface and Possibility of its Application to Virtual Reality," Proceedings of the 2000 ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology (VRST), pp. 199-205, Seoul, Korea, 2000.
- [53] Kino, H., Kawamura, S., "Development of a Serial Link Structure/Parallel Wire System for a Force Display," Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 829-834, Washington DC, USA, 2002.

- [54] Kino, H., "Principle of Orthogonalization for Completely Restrained Parallel Wire Driven Robot," Proceedings of the 2003 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2003), pp. 509-514, Kobe, Japan, 2003.
- [55] Kino, H., Yabe, S., Kawamura, S., "A Force Display System Using a Serial-Link Structure Driven by a Parallel-Wire Mechanism," *Advanced Robotics*, Vol. 19, No. 1, pp. 21-37, 2005.
- [56] Kobayashi, T., Takahashi, Y., "Vibration Control for Two Dimensional Wire Driven Positioning Robot," Proceedings of the 37th SICE Annual Conference, International Session Papers, pp. 869-874, Chiba, Japan, 1998.
- [57] Kossowski, C., Notash, L., "CAT4 (Cable Actuated Truss—4 Degrees of Freedom): A Novel 4 DOF Cable Actuated Parallel Manipulator," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 19, No. 12, pp. 605-615, 2002.
- [58] Krut, S., Company, O., Pierrot, F., "Force Performance Indexes for Parallel Mechanisms with Actuation Redundancy, especially for Parallel Wire-Driven Manipulators," Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 3936-3941, Sendai, Japan, 2004.
- [59] Kurtz, R., Hayward, V., "Dexterity Measure for Tendon Actuated Parallel Mechanisms," Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Advanced Robotics, pp. 1141-1146, Pisa, Italy, 1991.
- [60] Kurtz, R., Hayward, V., "Dexterity Measures with Unilateral Actuation Constraints: the  $n + 1$  Case," *Advanced Robotics*, Vol. 9, No. 5, pp. 561-577, 1995.
- [61] Lafourcade, P., Llibre, M., Reboulet, C., "Design of a Parallel Wire-Driven Manipulator for Wind Tunnels," in Gosselin, C. M., and Ebert-Uphoff, I., Eds, Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, pp. 187-194, Quebec City, Canada, 2002.
- [62] Lafourcade, P., Verhoeven, R., "Une nouvelle architecture, fortement redondante, pour un manipulateur à câbles au volume de travail étendu," Actes du 16<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique, Nice, France, 2003.
- [63] Lafourcade, P., *Contribution à l'étude de manipulateurs parallèles à câbles, application à la conception d'une suspension active pour soufflerie*, Thèse de Doctorat, ONERA-DCSD, Toulouse, France, 2004.
- [64] Lafourcade, P., Zheng, Y.-Q., Liu, X.-W., "Stiffness Analysis of Wire-Driven Parallel Kinematic Manipulators," Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, 2004.



- [65] Lakshminarayana, K., "Mechanics of Form Closure," Proceedings of the 1978 ASME Design Engineering Technical Conference, Minneapolis, MN, USA, 1978.
- [66] Landsberger, S. E., Sheridan, B., *Parallel Link Manipulators*, US patent No. 4 666 362, 1987.
- [67] Landsberger, S. E., Sheridan, B., "A Minimal, Minimal Linkage : The Tension-Compression Parallel Link Manipulator," in Takamori, T., Tsuchiya, K., Eds, *Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, pp. 81-88, 1993.
- [68] Lelong-Ferrand, J., Arnaudière, J. M., *Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre*, 2<sup>e</sup> éd., Dunod, Paris, France, 1978.
- [69] Maeda, K., Tadokoro, S., Takamori, T., Hiller, M., Verhoeven, R., "On Design of a Redundant Wire-Driven Parallel Robot WARP Manipulator," Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 895-900, Detroit, Michigan, USA, 1999.
- [70] Maier, T., Woernle, C., "Inverse Kinematics for an Underconstrained Cable Suspension Manipulator," in Lenarčič, J., Husty, M. L., Eds, *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 97-104, 1998.
- [71] Maier, T., Woernle, C., "Flatness-Based Control of Underconstrained Cable Suspension Manipulators," Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, NV, USA, VIB-8223, 1999.
- [72] Mangasarian, O. L., *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York, USA, 1969.
- [73] Mayer St-Onge, B., Gosselin, C. M., "Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 19, No. 3, pp. 271-288, 2000.
- [74] Medenwald, A. L., *Means for Suspending and Moving a Platform or the Like*, US patent No. 2 164 128, 1939.
- [75] Melchiorri, C., Montanari, M., Vassura, G., "Control Strategies for a Defective, Wire-Based, Haptic Interface," Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 181-187, Grenoble, France, 1997.
- [76] Melchiorri, C., Vassura, G., "Development and Application of Wire-Actuated Haptic Interfaces," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 18, No. 12, pp. 755-768, 2001.

- [77] Merlet, J-P., "Détermination de l'espace de travail d'un robot parallèle pour une orientation constante," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 8, pp. 1099-1113, 1994.
- [78] Merlet, J-P., "Determination of the Orientation Workspace of Parallel Manipulators," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 13, pp. 143-160, 1995.
- [79] Merlet, J-P., *Les robots parallèles*, 2<sup>e</sup> éd., Hermes, Paris, France, 1997.
- [80] Merlet, J-P., Gosselin, C. M., Mouly, N., "Workspace of planar parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, No. 1, pp. 7-20, 1998.
- [81] Merlet, J-P., "Determination of 6D Workspaces of Gough-Type Parallel Manipulator and Comparison between Different Geometries," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 9, pp. 902-916, 1999.
- [82] Merlet, J-P., "Analysis of the Influence of Wires Interference on the Workspace of Wire Robots," in Lenarčič, J., Galletti, C., Eds, *On Advances in Robot Kinematics*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 211-218, 2004.
- [83] Ming, A., Higuchi, T., "Study on Multiple Degree-of-Freedom Positioning Mechanism Using Wires (Part 1) - Concept, Design and Control," *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, Vol. 28, No. 2, pp. 131-138, 1994.
- [84] Morizono, T., Kurahashi, K., Kawamura, S., "Realization of a Virtual Sports Training System with Parallel Wire Mechanism," Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3025-3030, Albuquerque, NM, USA, 1997.
- [85] Morizono, T., Kurahashi, K., Kawamura, S., "Analysis and Control of a Force Display System Driven by Parallel Wire Mechanism," *Robotica*, Vol. 13, No. 5, pp. 551-563, 1998.
- [86] Mroz, G., Notash, L., "Design and Prototype of a Parallel, Wire-Actuated Robot," Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China, 2004.
- [87] Murray, R., Li, Z., Sastry, S., *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1994.
- [88] Oh, S.-R., Mankala, K., Agrawal, S. K., Albus, J. S., "A Dual Stage Planar Cable Robot: Dynamic Modeling and Design of a Robust Controller With Positive Inputs," Proceedings of the 2004 ASME Design Engineering Technical Conferences, Salt Lake City, UT, USA, DETC2004-57323, 2004.

- [89] Oh, S.-R., Agrawal, S. K., "Cable Suspended Planar Robots With Redundant Cables: Controllers With Positive Tensions," *IEEE Transactions on Robotics*, 2005 (à paraître).
- [90] Osumi, H., Utsugi, Y., Koshikawa, M., "Development of a Manipulator Suspended by Parallel Wire Structure," Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 498-503, Takamatsu, Japan, 2000.
- [91] Ottaviano, E., Ceccarelli M., Paone A., Carbone G., "A Low-Cost Easy Operation 4-Cable Driven Parallel Manipulator," Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4019-4024, Barcelona, Spain, 2005.
- [92] Pusey, J., Fattah, A., Agrawal, S., Messina, E., "Design and Workspace Analysis of a 6-6 Cable-Suspended Parallel Robot," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 39, No. 7, pp. 761-778, 2004.
- [93] Riechel, A. T., Ebert-Uphoff, I., "Force-Feasible Workspace Analysis for Underconstrained, Point-Mass Cable Robots," Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4956-4962, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [94] Roberts, R. G., Graham, T., Lippitt, T., "On the Inverse Kinematics, Statics, and Fault Tolerance of Cable-Suspended Robots," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 15, No. 10, pp. 581-597, 1998.
- [95] Rockafellar, R. T., *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, pp. 10-15, 1970.
- [96] Roth, B., "Computations in Kinematics," in Angeles, J., Hommel, G., Kovács, P., Eds, *Computational Kinematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 3-14, 1993.
- [97] Sato, M., "Development of String-Based Force Display: SPIDAR," Proceedings of the Eighth International Conference on Virtual Systems and Multi Media (VSMM 2002), pp. 1034-1039, Gyeongju, Korea, 2002.
- [98] Sefrioui, J., Gosselin, C. M., "On the Quadratic Nature of the Singularity Curves of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 30, No. 4, pp. 533-551, 1995.
- [99] Shen, Y., Osumi, H., Arai, T., "Set of Manipulating Forces in Wire Driven Systems," Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1626-1631, Munich, Germany, 1994.

- [100] Shiang, W.-J., Cannon, D., Gorman, J., “Dynamic Analysis of the Cable Array Robotic Crane,” Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2495-2500, Detroit, MI, USA, 1999.
- [101] Shiang, W.-J., Cannon, D., Gorman, J., “Optimal Force Distribution Applied to a Robotic Crane with Flexible Cables,” Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1948-1954, San Francisco, USA, 2000.
- [102] Strang, G., *Linear algebra and its applications*, 3<sup>e</sup> éd., Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Orlando, FL, États-Unis, 1988.
- [103] Stump, E., Kumar, V., “Workspace Delineation of Cable-Actuated Parallel Manipulators,” Proceedings of the 2004 ASME Design Engineering Technical Conferences, Salt Lake City, UT, USA, MECH-57495, 2004.
- [104] Su, Y. X., Duan, B. Y., Nan, R. D., Peng, B., “Development of a Large Parallel-Cable Manipulator for the Feed-Supporting System of a Next-Generation Radio Telescope,” *Journal of Robotic Systems*, Vol. 18, No. 11, pp. 633-643, 2001.
- [105] Sui, C., Zhao, M., “Study on a 3DOF Parallel Wire Driven Lightweight Flexible Manipulator: Kinematics, Statics and Stiffness,” First Conference on Intelligent Manipulation and Grasping (IMG 2004), Genova, Italy, 2004.
- [106] Surdilovic, D., Bernhardt, R., “STRING-MAN: A New Wire Robot for Gait Rehabilitation,” Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2031-2036, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [107] Tadokoro, S., Nishioka, S., Kimura, T., Hattori, M., Takamori, T., Maeda, K., “On Fundamental Design of Wire Configurations of Wire-Driven Parallel Manipulators With Redundancy,” Proceedings of the 1996 Japan/USA Symposium on Flexible Automation, pp. 151-158, Boston, MA, USA, 1996.
- [108] Tadokoro, S., Verhoeven, R., Hiller, M., Takamori, T., “A Portable Parallel Manipulator for Search and Rescue at Large-Scale Urban Earthquakes and an Identification Algorithm for the Installation in Unstructured Environments”, Proceedings of the 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1222-1227, Kyongju, Korea, 1999.
- [109] Tadokoro, S., Matsushima, T., Murao, Y., Kohkawa, H., Hiller, M., “A Parallel Cable-Driven Motion Base for Virtual Acceleration,” Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1700-1705, Maui, Hawaii, USA, 2001.

- [110] Tadokoro, S., Murao, Y., Hiller, M., Murata, R., Kohkawa, H., Matsushima, T., “A Motion Base With 6-DOF by Parallel Cable Drive Architecture,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 7, No. 2, pp. 115-123, 2002.
- [111] Takeda, Y., Funabashi, H., “Kinematic Synthesis of Spatial In-Parallel Wire-Driven Mechanism With Six Degrees of Freedom With High Force Transmissibility,” Proceedings of the 2000 ASME Design Engineering Technical Conferences, Baltimore, MD, USA, MECH-14090, 2000.
- [112] Thomas, F., Ottaviano, E., Ros, L., Ceccarelli, M., “Uncertainty Model and Singularities of 3-2-1 Wire-Based Tracking Systems,” in Lenarčič, J., Thomas, F., Eds, *Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 107-116, 2002.
- [113] Thompson, C. J., Campbell Jr., P. D., *Tendon suspended platform robot*, US patent No. 5 585 707, 1996.
- [114] Trevelyan, J. P., “A Suspended Device for Humanitarian Demining,” Eurel International Conference on the Detection of Abandoned Land Mines, pp. 51-55, Edinburgh, UK, 1996.
- [115] Usher, K., Winstanley, G., Corke, P., Stauffacher, D., Carnie, R., “Air Vehicle Simulator: an Application for a Cable Array Robot,” Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2253-2258, Barcelona, Spain, 2005.
- [116] Verhoeven, R., Hiller, M., Tadokoro, S., “Workspace, Stiffness, Singularities and Classification of Tendon-Driven Stewart Platforms,” in Lenarčič, J., Husty, M. L., Eds, *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 105-114, 1998.
- [117] Verhoeven, R., Hiller, M., “Estimating the Controllable Workspace of Tendon-Based Stewart Platforms,” in Lenarčič, J., Stanišić, M. M., Eds, *Advances in Robot Kinematics*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 277-284, 2000.
- [118] Verhoeven, R., Hiller, M., “Tension Distribution in Tendon-Based Stewart Platform,” in Lenarčič, J., Thomas, F., Eds, *Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2002.
- [119] Verhoeven, R., *Analysis of the workspace of tendon-based Stewart platforms*, Thèse de Doctorat, Université de Duisburg Essen, Duisburg, Allemagne, 2004.
- [120] Viscomi, B. V., Michalerya, W. D., Lu, L.-W., “Automated construction in the ATLSS integrated building Systems,” *Automation in Construction*, Vol. 3, pp. 35-43, 1994.

- [121] Voglewede, P. A., Ebert-Uphoff, I., "Application of the Antipodal Grasp Theorem to Cable-Driven Robots," *IEEE Transactions on Robotics*, 2005 (à paraître).
- [122] Wampler, C. W., Morgan, A. P., Sommese, A. J., "Numerical Continuation Methods for Solving Polynomial Systems Arising in Kinematics," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, No. 1, pp. 59-68, 1990.
- [123] Wang, J., Gosselin, C. M., "Kinematic Analysis and Design of Cable-driven Spherical Parallel Mechanisms," Proceedings of the 15th CISM-IFTOMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control (ROMANSY), Montreal, Canada, 2004.
- [124] Williams II, R. L., "Cable-Suspended Haptic Interface," *International Journal of Virtual Reality*, Vol. 3, No. 3, pp. 13-21, 1998.
- [125] Williams II, R. L., "Planar Cable-Suspended Haptic Interface: Design for Wrench Exertion," Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, NV, USA, DAC-8639, 1999.
- [126] Williams II, R. L., Gallina, P., "Planar Cable Direct-Driven Robots, Part I: Kinematics and Statics," Proceedings of the 2001 ASME Design Engineering Technical Conferences, Pittsburgh, PA, USA, DAC-21145, 2001.
- [127] Williams II, R. L., Gallina, P., "Planar Cable-Direct-Driven Robots: Design for Wrench Exertion," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 35, pp. 203-219, 2002.
- [128] Williams II, R. L., Gallina, P., Vadia, J., "Planar Translational Cable-Direct-Driven Robots," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 20, No. 3, pp. 107-120, 2003.
- [129] Williams II, R. L., Gallina, P., "Translational Planar Cable-Direct-Driven Robots," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 37, No. 1, pp. 69-96, 2003.
- [130] Williams II, R. L., Snyder, B., Albus, J. S., Bostelman, R. V., "Seven-DOF Cable-Suspended Robot with Independent Metrology," Proceedings of the 2004 ASME Design Engineering Technical Conferences, Salt Lake City, UT, USA, MECH-57125, 2004.
- [131] Williams II, R. L., Albus, J. S., Bostelman, R. V., "3D Cable-Based Cartesian Metrology System," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 21, No. 5, pp. 237-257, 2004.
- [132] Yamamoto, M., Mohri, A., "Inverse Kinematics Analysis for Incompletely Restrained Parallel Wire Mechanisms," 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 504-509, Takamatsu, Japan, 2000.
- [133] Yamamoto, M., Yanai, N., Mohri, A., "Trajectory Control of Incompletely Restrained Parallel-Wire-Suspended Mechanism Based on Inverse Dynamics," *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 20, No. 5, pp. 840-850, 2004.

- [134] Yang, G., Yeo, S. H., Pham, C. B., "Kinematics and Singularity Analysis of a Planar Cable-Driven Parallel Manipulator," Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 3835-3840, Sendai, Japan, 2004.
- [135] Zheng, Y.-Q., Liu, X.-W., "Force Transmission Index Based Workspace Analysis of a Six DOF Wire-Driven Parallel Manipulator," Proceedings of the 2002 ASME Design Engineering Technical Conferences, Montreal, Canada, MECH-34241, 2002.

# Annexe A

## Expression de vecteurs formant une base du noyau d'une matrice des torseurs

Les sections A.1 et A.2 de cette annexe présentent des expressions de vecteurs formant une base du noyau d'une matrice ayant plus de colonnes que de lignes. Les éléments non nuls de ces vecteurs sont donnés par des déterminants. Le cas d'une matrice ayant  $n$  lignes et  $n+1$  colonnes est connu [68]. Néanmoins, par souci de clarté, une démonstration de ce cas est présentée à la section A.1. La section A.2 généralise ce résultat au cas des matrices ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes où  $m > n$ . La section A.3 prouve que l'EPPOC d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles est un ensemble ouvert. Finalement, la dernière section de cette annexe présente une preuve rigoureuse de la nature de la frontière de l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à six ddl entraînés par câbles.



## A.1 Noyau d'une matrice de dimension $n$ par $n + 1$

Soit  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_n \mathbf{w}_{n+1}]$  une matrice de dimension  $n$  par  $n + 1$  qui est de plein rang  $n$ . Cette matrice possède les dimensions d'une matrice des torseurs d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $n + 1$  câbles. Le noyau  $\ker(\mathbf{W})$  de cette matrice  $\mathbf{W}$  est engendré par le vecteur  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  suivant

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_{n+1} \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_{n+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n+1}]) \\ -\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \end{bmatrix}_{n+1}. \quad (\text{A.1})$$

*Preuve :*

la matrice  $\mathbf{W}$  étant de plein rang, son noyau  $\ker(\mathbf{W})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimension 1. Ainsi tout élément non nul de  $\ker(\mathbf{W})$  engendre  $\ker(\mathbf{W})$ .  $\mathbf{W}$  étant de plein rang, le vecteur  $\mathbf{z}_0$  défini par l'équation (A.1) est non nul et, pour compléter la preuve, il suffit de montrer que  $\mathbf{z}_0$  appartient à  $\ker(\mathbf{W})$ . Nous pouvons supposer que  $\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \neq 0$ , c'est-à-dire que  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Alors

$$\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \quad (\text{A.2})$$

et, d'après l'équation (A.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\mathbf{z}_0 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \det([\mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{i-1} \ \mathbf{w}_{n+1} \ \mathbf{w}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\ &\quad - \mathbf{w}_{n+1} \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

L'équation (A.2) et la multilinéarité du déterminant permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
& \det([\mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{i-1} \ \mathbf{w}_{n+1} \ \mathbf{w}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\
= & \det([\mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{i-1} \ \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \ \mathbf{w}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \\
= & \beta_i \det([\mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{i-1} \ \mathbf{w}_i \ \mathbf{w}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{w}_n])
\end{aligned}$$

$\forall i, 1 \leq i \leq n$ . Alors, d'après l'équation (A.3), on a

$$\mathbf{W}\mathbf{z}_0 = \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{n+1} \right). \quad (\text{A.4})$$

Finalement, d'après l'équation (A.2)

$$\mathbf{W}\mathbf{z}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

c'est-à-dire,  $\mathbf{z}_0$  appartient à  $\ker(\mathbf{W})$  et la preuve est complète. Remarquons que cette démonstration est très similaire à la preuve des formules de Cramer.

## A.2 Une base du noyau d'une matrice de dimension $n$ par $m$ , $m > n$

Soit  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_m]$  une matrice de dimension  $n$  par  $m$ ,  $m > n$ . Supposons que cette matrice est de plein rang  $n$ . Alors, le noyau  $\ker(\mathbf{W})$  de cette matrice est de dimension  $m - n$  et nous pouvons supposer que ces  $n$  premières colonnes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$  sont linéairement indépendantes. Par conséquent, les  $m - n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  définis à l'équation A.6 forment une base de  $\ker(\mathbf{W})$ .

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_{n+1} \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{n+1} \dots \mathbf{w}_n]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_{n+1}]) \\ - \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_m, \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_{n+2} \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_{n+2} \dots \mathbf{w}_n]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_{n+2}]) \\ 0 \\ - \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_m, \dots$$

$$\mathbf{z}_{m-n} = \begin{bmatrix} \det([\mathbf{w}_m \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \\ \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_m \dots \mathbf{w}_n]) \\ \vdots \\ \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_m]) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ - \det([\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_n]) \end{bmatrix}_m. \quad (\text{A.6})$$

*Preuve :*

D'après la section A.1, les  $m - n$  vecteurs  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m$  définis à l'équation (A.6) appartiennent à  $\ker(\mathbf{W})$ . Ces vecteurs étant linéairement indépendants, ils forment une base de  $\ker(\mathbf{W})$ .

### A.3 Preuve de la propriété 6

Dans cette section, nous prouvons que *l'EPPOC d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > n$ , est un espace ouvert*. Ainsi, nous prouvons la propriété 6 dans le cas plus général des mécanismes à  $n$  ddl.

Considérons un mécanisme à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > n$ , tel que l'orientation de l'effecteur du mécanisme soit constante et tel que la position  $\mathbf{p}_0$  de l'effecteur appartienne à l'EPPOC ( $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{a}_i^v, \forall 1 \leq i \leq n$ ). Soit  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_m]$  la matrice des torseurs du mécanisme où  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n$ . Afin de prouver que l'EPPOC est un espace ouvert, nous revenons à la définition d'un ensemble ouvert et prouvons qu'il existe une boule ouverte de centre  $\mathbf{p}_0$  contenue dans l'EPPOC. La position  $\mathbf{p}_0$  de l'effecteur étant polyvalente, d'après le théorème 1, qui s'applique à toute matrice ayant plus de colonnes que de lignes, la matrice des torseurs associée à cette position est de plein rang  $n$  et il existe un vecteur  $\mathbf{z}_0 > \mathbf{0}$  appartenant à son noyau. Ainsi, nous pouvons supposer que les  $n$  premières colonnes de cette matrice des torseurs sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire, pour la position  $\mathbf{p}_0$ ,  $\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \neq 0$ . Étant donné que  $\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n])$  est une fonction continue de la position  $\mathbf{p}$  de l'effecteur (mis à part en  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v, i = 1, 2, \dots, n$ ), il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}_r$  telle qu'en tout point de cette boule, c'est-à-dire, quelle que soit la position  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}_r$ , les  $n$  premières colonnes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$  de la matrice des torseurs sont linéairement indépendantes. De plus, d'après la section A.2, il existe  $m - n$  scalaires  $\alpha_i$  tels que

$$\mathbf{z}_0 = \sum_{i=1}^{m-n} \alpha_i \mathbf{z}_i(\mathbf{p}_0) \quad (\text{A.7})$$

où les  $m - n$  vecteurs  $\mathbf{z}_i$ , qui dépendent de la position de l'effecteur, sont définis à l'équation (A.6). À présent, à l'intérieur de  $\mathcal{B}_r$ , considérons les éléments  $z_j, 1 \leq j \leq m$ , du vecteur  $\mathbf{z}(\mathbf{p})$  suivant

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{m-n} \alpha_i \mathbf{z}_i(\mathbf{p}). \quad (\text{A.8})$$

D'après la section A.2,  $\mathbf{z}(\mathbf{p})$  appartient au noyau de la matrice des torseurs. Étant donné que la position  $\mathbf{p}_0$  appartient à l'EPPOC, on a

$$z_j(\mathbf{p}_0) = z_{0j} = \sum_{i=1}^{m-n} \alpha_i z_{ij}(\mathbf{p}_0) > 0. \quad (\text{A.9})$$

Or, l'élément  $z_j$  de  $\mathbf{z}$  est une fonction continue de la position  $\mathbf{p}$  de l'effecteur (mis à

part aux points  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v$ ) et, par conséquent, d'après l'équation (A.9), il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}_j$  de centre  $\mathbf{p}_0$  contenue dans  $\mathcal{B}_r$  telle que

$$z_j(\mathbf{p}) > 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{B}_j. \quad (\text{A.10})$$

Soit  $\mathcal{B}$  la plus petite des  $m$  boules ouvertes  $\mathcal{B}_j$  centrées en  $\mathbf{p}_0$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Quelle que soit la position  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  de l'effecteur, on a

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) > 0 \quad \text{et} \quad \det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n]) \neq 0. \quad (\text{A.11})$$

Ainsi, étant donné que  $\mathbf{z}(\mathbf{p})$  appartient au noyau de la matrice des torseurs, d'après le théorème 1, la boule ouverte  $\mathcal{B}$  centrée en  $\mathbf{p}_0$  appartient à l'EPPOC et la preuve est complète.

Finalement, remarquons que la preuve présentée dans cette section suppose que  $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{a}_i^v, \forall 1 \leq i \leq n$ . Cette hypothèse n'est pas gênante. En effet, même si un point  $\mathbf{A}_i^v$ , de vecteur position  $\mathbf{a}_i^v$ , appartenait à l'EPPOC d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles, en pratique, ce point doit être évité puisqu'il correspond à la situation où le câble  $i$  est complètement enroulé, l'effecteur et la base du mécanisme étant alors directement en contact.

## A.4 Preuve de la nature de la frontière de l'EPPOC

Considérons une orientation constante de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > n$ . À la section A.3, nous avons montré que l'EPPOC de ce mécanisme est un espace ouvert et, par conséquent, les points appartenant à la frontière de l'EPPOC doivent être cherchés à l'extérieur de l'EPPOC. Aussi, considérons une position  $\mathbf{p}_2$  de l'effecteur située à l'extérieur de l'EPPOC telle que la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  soit de plein rang  $n$  et telle que l'hypothèse suivante soit vérifiée.

**Hypothèse** : si  $n$  des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont linéairement

dépendantes alors elles le sont quelle que soit la position de l'effecteur.

Alors, d'après le théorème 1 qui s'applique à tout mécanisme dont la matrice des torseurs a plus de colonnes que de lignes, il n'existe pas de vecteur  $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{W}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Par conséquent, d'après le théorème de Stiemke, il existe un hyperplan  $\mathcal{H}_0$  de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}_0$  qui supporte  $\mathbf{W}$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{W}^T \mathbf{q}_0 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A.12})$$

Si  $\mathcal{H}_0$  ne contient pas  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  linéairement indépendantes, c'est-à-dire s'il n'existe pas  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  linéairement indépendantes telles que  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  alors, en appliquant autant de fois que nécessaire le théorème 18 prouvé à la section D.2, nous prouvons qu'il existe un hyperplan  $\mathcal{H}$  de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}$  engendré par  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  qui supporte  $\mathbf{W}$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{W}^T \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{q} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A.13})$$

Soit  $l$  le nombre de colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  qui appartiennent à  $\mathcal{H}$  ( $l \geq n - 1$ ). Nous pouvons supposer que ces  $l$  colonnes sont  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l$  qui, par conséquent, sont linéairement dépendantes. Par construction de  $\mathcal{H}$ , parmi ces  $l$  colonnes  $n - 1$  engendrent  $\mathcal{H}$  et nous pouvons supposer que ces  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes sont  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$ . Étant donné que les  $\mathbf{w}_i$  sont des fonctions continues de la pose de l'effecteur, il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}$  centrée en  $\mathbf{p}_2$  dans laquelle  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$  restent linéairement indépendantes. Soit  $\mathcal{H}(\mathbf{p})$  l'hyperplan engendré en  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  par  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$  ( $\mathcal{H}(\mathbf{p}_2) = \mathcal{H}$ ). Par hypothèse, quel que soit  $\mathbf{w}_j$  ( $j = n, \dots, l$ ), les  $n$  colonnes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_j$  sont linéairement dépendantes quelle que soit la position de l'effecteur et donc, en particulier, elles sont linéairement dépendantes à l'intérieur de la boule ouverte  $\mathcal{B}$  et  $\mathbf{w}_j \in \mathcal{H}(\mathbf{p})$ . Par conséquent, à l'intérieur de la boule ouverte  $\mathcal{B}$ , les  $l$  colonnes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l$  sont linéairement dépendantes et appartiennent à l'hyperplan  $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ . Soit  $\mathbf{q}(\mathbf{p})$  le vecteur orthogonal à  $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ .  $\mathbf{q}(\mathbf{p})$  est une fonction continue de  $\mathbf{p}$ . Ainsi, quel que soit  $i > l$ , il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}_i$  centrée en  $\mathbf{p}_2$  dans laquelle on

a

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{q}(\mathbf{p}) > 0. \quad (\text{A.14})$$

Finalement, dans la plus petite des boules ouvertes prise parmi les boules  $\mathcal{B}_i$  et la boule  $\mathcal{B}$ , quel que soit  $i$ , on a

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{q}(\mathbf{p}) \geq 0 \quad (\text{A.15})$$

c'est-à-dire, l'hyperplan  $\mathcal{H}(\mathbf{p})$  supporte  $\mathbf{W}$  et, d'après le théorème 15, il existe une boule ouverte centrée en  $\mathbf{p}_2$  qui est complètement située à l'extérieur de l'EPPOC.

Or, par définition, une position de l'effecteur appartient à la frontière de l'EPPOC si toute boule ouverte centrée en cette position rencontre à la fois l'EPPOC et son complémentaire, c'est-à-dire si toute boule ouverte centrée en cette position est située en partie dans l'EPPOC et en partie à l'extérieur de l'EPPOC. Ainsi, *la position  $\mathbf{p}_2$  de l'effecteur n'appartient pas à la frontière de l'EPPOC.*

À présent, considérons un mécanisme à six ddl ( $n = 6$ ) et une orientation de son effecteur tels qu'aucune cubique associée à la dépendance linéaire de six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme soit dégénérée en tout  $\mathbb{R}^3$ . Alors, il est possible de considérer une position  $\mathbf{p}_2$  de l'effecteur située à l'extérieur de l'EPPOC telle qu'aucune combinaison de six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme ne soit linéairement dépendante. D'après la discussion présentée ci-dessus,  $\mathbf{p}_2$  n'appartient pas à la frontière de l'EPPOC prouvant qu'en tout point de cette frontière, au moins une combinaison de six des  $m$  colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  du mécanisme est une combinaison de torseurs linéairement dépendants.

Finalement, dans le cas des mécanismes à six ddl et des orientations de leur effecteur pour lesquels certaines cubiques associées à la dépendance linéaire de six des  $m$  colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dégénérées en tout  $\mathbb{R}^3$ , considérons une position  $\mathbf{p}_2$  de l'effecteur située à l'extérieur de l'EPPOC telle que les seules combinaisons de six des  $m$  colonnes de  $\mathbf{W}$  linéairement dépendantes sont celles dont la cubique de singularité est dégénérée en tout  $\mathbb{R}^3$ . Alors, d'après la discussion présentée dans la première partie de cette section,  $\mathbf{p}_2$  n'appartient pas à la frontière de l'EPPOC. Ainsi, *en tout point de la frontière de l'EPPOC, au moins une des combinaisons de six des  $m$  colonnes de la matrice des tor-*

*seurs de lieu de singularité non dégénéré est une combinaison de torseurs linéairement dépendants. De plus, les cubiques de singularité dégénérées en tout  $\mathbb{R}^3$  ne participent pas à la frontière de l'EPPOC.*



# Annexe B

## Compléments sur les singularités de trois torseurs plans $\mathbf{w}_i$

Cette annexe concerne les mécanismes parallèles plans à trois ddl entraînés par câbles et les torseurs colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de ces mécanismes. À la première section, la définition  $\mathbf{d}_i = \mathbf{0}$  quand  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v$  est justifiée. La deuxième section présente le principe d'une démarche permettant de trouver les conditions nécessaires et suffisantes à la dégénérescence en tout le plan d'une conique associée aux singularités à orientation constante de trois colonnes de  $\mathbf{W}$ . Finalement, la dernière partie de cette annexe traite de la linéaire dépendance de deux colonnes de  $\mathbf{W}$ .

## B.1 Définition des vecteurs unitaires $\mathbf{d}_i$

L'objectif de cette section est de justifier la définition

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad \text{quand} \quad \mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v \quad (\rho_i = 0 \text{ et } P \equiv A_i^v) \quad (\text{B.1})$$

où le vecteur  $\mathbf{d}_i$  est le vecteur unitaire dirigé le long du câble  $i$  de l'effecteur vers la base d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles. Le vecteur  $\mathbf{d}_i$  est défini par l'équation (2.1) quand  $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_i^v$ , c'est-à-dire quand le câble  $i$  n'est pas complètement enroulé ( $\rho_i \neq 0$ ). La nécessité de définir le vecteur  $\mathbf{d}_i$  quand  $\rho_i \neq 0$  est une conséquence de l'étude du lieu  $\mathcal{L}$  des positions du point de référence  $P$  de l'effecteur telles que

$$z_{0i} = \det([\mathbf{w}_j \ \mathbf{w}_k \ \mathbf{w}_l]) = 0 \quad (\text{B.2})$$

où l'ensemble  $\{i, j, k, l\}$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  et où  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont trois colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  définie à la section 2.1. En effet, si, respectivement,  $\mathbf{d}_j$ ,  $\mathbf{d}_k$  et  $\mathbf{d}_l$  ne sont pas définis aux points  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  et  $A_l^v$  alors  $z_{0i}$  n'est pas défini non plus en ces points.

En fait, la définition (B.1) est un prolongement par continuité du lieu  $\mathcal{L}$  aux points  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  et  $A_l^v$ . Afin de démontrer ce résultat, remarquons que, d'après l'équation (2.7)

$$\det([\mathbf{w}_j \ \mathbf{w}_k \ \mathbf{w}_l]) = \frac{\det([\mathbf{w}_j^* \ \mathbf{w}_k^* \ \mathbf{w}_l^*])}{\rho_j \rho_k \rho_l} \quad (\text{B.3})$$

où les vecteurs  $\mathbf{w}_j^*$ ,  $\mathbf{w}_k^*$  et  $\mathbf{w}_l^*$  sont définis par l'équation (2.6) et où  $\det([\mathbf{w}_j^* \ \mathbf{w}_k^* \ \mathbf{w}_l^*])$  est une forme quadratique  $\mathcal{Q}$  en la position  $\mathbf{p}$  du point de référence  $P$  de l'effecteur telle que celle de l'équation (2.22)

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} + \mathbf{f}^T \mathbf{p} + q_6. \quad (\text{B.4})$$

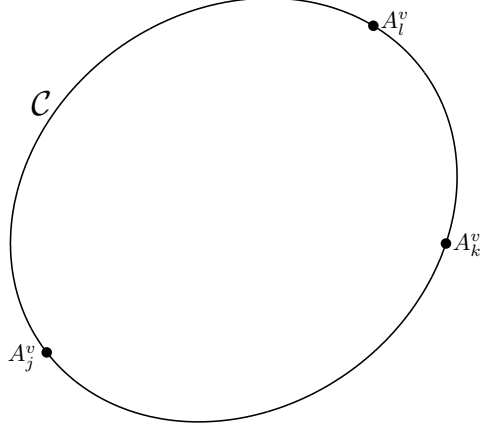


FIG. B.1 – Un cas où la conique  $\mathcal{C}$  est une ellipse.

Par conséquent, le lieu  $\mathcal{C}$  des points  $P$  où  $\mathcal{Q}(\mathbf{p}) = 0$  est une conique (hyperbole, ellipse ou parabole), une ou deux droites ou est dégénéré en tout le plan. La forme quadratique  $\mathcal{Q}$  est telle que  $\mathcal{Q}(\mathbf{p}) = 0$  quand

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_j^v \ (\rho_j = 0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{p} = \mathbf{a}_k^v \ (\rho_k = 0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{p} = \mathbf{a}_l^v \ (\rho_l = 0) \quad (\text{B.5})$$

c'est-à-dire quand les points  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  et  $A_l^v$  appartiennent à la conique  $\mathcal{C}$  tel que montré à la figure B.1 dans le cas d'une ellipse. De plus, mis à part aux points  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  et  $A_l^v$ , on a

$$\mathcal{Q}(\mathbf{p}) = 0 \iff z_{0i}(\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

c'est-à-dire, les lieux  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{L}$  sont confondus. Ainsi, il est naturel de prolonger par continuité le lieu  $\mathcal{L}$  aux points  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  et  $A_l^v$ . La définition (B.1) permet de concrétiser ce prolongement. En effet, par exemple, quand  $\mathbf{d}_j = \mathbf{0}$  alors  $\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$  et  $z_{0i} = \det([\mathbf{w}_j \ \mathbf{w}_k \ \mathbf{w}_l]) = 0$ . Finalement, notons qu'il est possible de trouver un point appartenant à la conique  $\mathcal{C}$  aussi proche que l'on veut du point  $A_j^v$ ,  $A_k^v$  ou  $A_l^v$ . Ainsi, il est également possible de trouver un tel point appartenant au lieu  $\mathcal{L}$ .

## B.2 Dégénérescence d'une conique associée aux singularités à orientation constante de trois torseurs $\mathbf{w}_i$

Considérons la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraînés par câbles. Cette section présente le principe de la preuve des conditions nécessaires et suffisantes à la dégénérescence en tout le plan du lieu de singularité à orientation constante de trois torseurs plans  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ . Ces conditions nécessaires et suffisantes ont été énoncées à la section 3.3.2.2 du chapitre 3 lors de l'étude des poses de l'effecteur associées aux configurations polyvalentes minimales à cinq torseurs.

Trois torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$ , colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ , sont linéairement dépendants ou, de manière équivalente, en singularité si et seulement si

$$\det([\mathbf{w}_j \ \mathbf{w}_k \ \mathbf{w}_q]) = 0. \quad (\text{B.7})$$

D'après la section 2.3.2 du chapitre 2, l'équation (B.7) définit une conique  $\mathcal{C}$  dont l'équation peut être écrite comme suit

$$\mathcal{Q} = \det(\mathbf{W}_{jkq}^*) = q_1x^2 + q_2y^2 + q_3xy + q_4x + q_5y + q_6 = 0 \quad (\text{B.8})$$

avec, par définition

$$\mathbf{W}_{jkq}^* = [\mathbf{w}_j^* \ \mathbf{w}_k^* \ \mathbf{w}_q^*]. \quad (\text{B.9})$$

Les coefficients  $q_i$  de la conique  $\mathcal{C}$  dépendent de la géométrie du mécanisme et de l'orientation de son effecteur et les torseurs  $\mathbf{w}_i^*$  sont définis à l'équation (2.6). En isolant les coordonnées  $x$  et  $y$  du point de référence  $P$  de l'effecteur dans l'expression de la matrice carrée  $\mathbf{W}_{jkq}^*$  donnée par l'équation (B.9), nous obtenons

$$\mathbf{W}_{j k q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{a_x^v} - x\mathbf{u} \\ \mathbf{v}_{a_y^v} - y\mathbf{u} \\ \mathbf{v}_{b_a} + x\mathbf{v}_{b_y} - y\mathbf{v}_{b_x} \end{bmatrix}_{3 \times 3}. \quad (\text{B.10})$$

Les vecteurs lignes impliqués dans l'équation (B.10) sont définis par

$$\mathbf{u} = [1 \ 1 \ 1], \quad \mathbf{v}_{a_x^v} = [a_{1x}^v \ a_{2x}^v \ a_{3x}^v], \quad \mathbf{v}_{a_y^v} = [a_{1y}^v \ a_{2y}^v \ a_{3y}^v] \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{v}_{b_a} = [\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1^v) \ \det(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2^v) \ \det(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3^v)] \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{v}_{b_x} = [b_{1x} \ b_{2x} \ b_{3x}], \quad \mathbf{v}_{b_y} = [b_{1y} \ b_{2y} \ b_{3y}] \quad (\text{B.13})$$

où les notations  $v_x$  et  $v_y$  désignent, respectivement, l'abscisse et l'ordonnée du vecteur  $\mathbf{v}$ . À présent, le déterminant étant une forme multilinéaire, le déterminant de la matrice  $\mathbf{W}_{j k q}^*$  peut être développé de manière à obtenir les expressions suivantes pour les coefficients  $q_i$  de la conique de singularité  $\mathcal{C}$

$$q_1 = \det([\mathbf{v}_{a_y^v}^T \ \mathbf{u}^T \ \mathbf{v}_{b_y}^T]), \quad q_2 = \det([\mathbf{v}_{a_x^v}^T \ \mathbf{u}^T \ \mathbf{v}_{b_x}^T]) \quad (\text{B.14})$$

$$q_3 = \det([\mathbf{u}^T \ \mathbf{v}_{a_x^v}^T \ \mathbf{v}_{b_y}^T]) + \det([\mathbf{u}^T \ \mathbf{v}_{a_y^v}^T \ \mathbf{v}_{b_x}^T]) \quad (\text{B.15})$$

$$q_4 = \det([\mathbf{v}_{a_y^v}^T \ \mathbf{u}^T \ \mathbf{v}_{b_a}^T]) + \det([\mathbf{v}_{a_x^v}^T \ \mathbf{v}_{a_y^v}^T \ \mathbf{v}_{b_y}^T]) \quad (\text{B.16})$$

$$q_5 = -\det([\mathbf{v}_{a_x^v}^T \ \mathbf{u}^T \ \mathbf{v}_{b_a}^T]) - \det([\mathbf{v}_{a_x^v}^T \ \mathbf{v}_{a_y^v}^T \ \mathbf{v}_{b_x}^T]) \quad (\text{B.17})$$

$$q_6 = \det([\mathbf{v}_{a_x^v}^T \ \mathbf{v}_{a_y^v}^T \ \mathbf{v}_{b_a}^T]). \quad (\text{B.18})$$

Notons que la méthode consistant à développer un déterminant en utilisant sa multilinearité est appliquée dans [73] dans le but de déterminer, dans le cas des plate-formes de Gough-Stewart, les effets de la géométrie du mécanisme sur certaines de ses propriétés comme, par exemple, ses singularités.

La conique de singularité  $\mathcal{C}$  dégénère en tout le plan si et seulement si ses six coefficients  $q_i$  sont nuls. Or, les expressions des coefficients  $q_i$  données aux équations (B.14) à (B.18) permettent d'associer des géométries de mécanismes et, éventuellement, des orientations de l'effecteur de ces mécanismes à la nullité des six coefficients  $q_i$ . Afin d'obtenir une liste exhaustive des conditions pour lesquelles la conique  $\mathcal{C}$  dégénère en tout le plan, une condition nécessaire et suffisante est recherchée. Dans un premier temps, la condition nécessaire est établie par le biais de l'analyse suivante : les six coefficients  $q_i$  sont annulés et, avec les équations (B.14) à (B.18), les dépendances linéaires entre les vecteurs définis aux équations (B.11), (B.12) et (B.13) qui résultent de cette annulation sont étudiées. De cette étude, on conclut que la conique  $\mathcal{C}$  dégénère en tout le plan seulement si la géométrie du mécanisme et, éventuellement, l'orientation de son effecteur sont tels qu'un des cas 1, 2, 3 ou 4 présentés à la section 3.3.2.2 du chapitre 3 est vérifié. Notons que la dérivation de cette condition nécessaire est relativement longue et fastidieuse. Puis, la preuve est complétée en vérifiant que pour chacun des cas 1, 2, 3 et 4 énoncés à la section 3.3.2.2 la conique  $\mathcal{C}$  dégénère en tout le plan, ceci établissant la condition suffisante. Ces vérifications ont été présentées à la section 3.3.2.2 pour les cas 1, 2 et 4.

Afin de donner une idée plus précise de l'analyse conduisant à la condition nécessaire à la dégénérescence en tout le plan de la conique de singularité  $\mathcal{C}$ , présentons une partie de cette analyse qui, même si petite, illustre bien son principe. Commençons par remarquer que, d'après l'équation (B.14), le coefficient  $q_1$  de  $\mathcal{C}$  est nul si et seulement si un des quatre cas suivant est vrai où  $\mathbb{R}^*$  désigne l'ensemble des nombres réels privés de zéro.

**Cas 1**  $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_{a_y^v} = \alpha_1 \mathbf{u}$ .

**Cas 2**  $\exists \alpha_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_{b_y} = \alpha_2 \mathbf{u}$ .

**Cas 3**  $\exists \alpha_3 \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{v}_{a_y^v} = \alpha_3 \mathbf{v}_{b_y}$ .

**Cas 4**  $\exists \alpha_4 \in \mathbb{R}^* \text{ et } \alpha_5 \in \mathbb{R}^* \mid \alpha_4 \mathbf{v}_{a_y^v} + \alpha_5 \mathbf{v}_{b_y} = \mathbf{u}$ .

De plus, toujours d'après l'équation (B.14), le coefficient  $q_2$  de  $\mathcal{C}$  est nul si et seulement si un des quatre cas suivant est vrai.

**Cas a**  $\exists \beta_1 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_{a_x^v} = \beta_1 \mathbf{u}$ .

**Cas b**  $\exists \beta_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_{b_x} = \beta_2 \mathbf{u}$ .

**Cas c**  $\exists \beta_3 \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{v}_{a_x^v} = \beta_3 \mathbf{v}_{b_x}$ .

**Cas d**  $\exists \beta_4 \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta_5 \in \mathbb{R}^* \mid \beta_4 \mathbf{v}_{a_x^v} + \beta_5 \mathbf{v}_{b_x} = \mathbf{u}$ .

Analysons le cas 1a pour lequel  $q_1 = 0$  et  $q_2 = 0$  parce que

$$\mathbf{v}_{a_y^v} = \alpha_1 \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{a_x^v} = \beta_1 \mathbf{u}. \quad (\text{B.19})$$

L'équation (B.19) implique  $q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$ . Par conséquent, la conique  $\mathcal{C}$  dégénère en tout le plan. En outre, l'équation (B.19) implique également que

$$\mathbf{a}_1^v = \mathbf{a}_2^v = \mathbf{a}_3^v \quad (\text{B.20})$$

c'est-à-dire qu'il existe une pose de l'effecteur pour laquelle les trois points  $A_1^v$ ,  $A_2^v$  et  $A_3^v$  sont confondus. Or, lorsque la pose de l'effecteur d'un mécanisme est telle que les trois points  $A_1^v$ ,  $A_2^v$  et  $A_3^v$  sont confondus, le triangle  $\Delta A_1 A_2 A_3$  de la base et le triangle  $\Delta B_1 B_2 B_3$  de l'effecteur sont également confondus et donc identiques. Le cas 1a est ainsi un cas particulier du cas 4 de la section 3.3.2.2 pour lequel le rapport d'homothétie est égal à 1.

Présentons également une partie de l'analyse du cas 1b pour lequel

$$\mathbf{v}_{a_y^v} = \alpha_1 \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{b_x} = \beta_2 \mathbf{u}. \quad (\text{B.21})$$

Alors, d'après les équations (B.15) à (B.18), on a

$$q_4 = -\alpha_1 q_3 \quad \text{et} \quad q_6 = -\alpha_1 q_5. \quad (\text{B.22})$$

Or, avec l'équation (B.21), le coefficient  $q_3$  de  $\mathcal{C}$  est nul si et seulement si un des quatre cas suivant est vrai.

**Cas i**  $\exists \gamma_1 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_{a_x^v} = \gamma_1 \mathbf{u}$ .

**Cas ii**  $\exists \gamma_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_{b_y} = \gamma_2 \mathbf{u}$ .

**Cas iii**  $\exists \gamma_3 \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{v}_{a_x^v} = \gamma_3 \mathbf{v}_{b_y}$ .

**Cas iv**  $\exists \gamma_4 \in \mathbb{R}^*$  et  $\gamma_5 \in \mathbb{R}^* \mid \gamma_4 \mathbf{v}_{a_x^v} + \gamma_5 \mathbf{v}_{b_y} = \mathbf{u}$ .

L'analyse du cas 1b nécessite l'étude de quatre sous-cas 1bi, 1bii, 1biii et 1biv. Dans le cas 1bi, on a

$$\mathbf{v}_{a_y^v} = \alpha_1 \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{a_x^v} = \gamma_1 \mathbf{u} \quad (\text{B.23})$$

et la conclusion est la même que celle du cas 1a : le triangle  $\Delta A_1 A_2 A_3$  de la base et le triangle  $\Delta B_1 B_2 B_3$  de l'effecteur sont identiques. Dans le cas 1bii, on a

$$\mathbf{v}_{a_y^v} = \alpha_1 \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_{b_x} = \beta_2 \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{b_y} = \gamma_2 \mathbf{u} \quad (\text{B.24})$$

qui implique que

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3. \quad (\text{B.25})$$

Les trois points  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  de l'effecteur sont confondus et le cas 1bii correspond au cas 1 de la section 3.3.2.2. Remarquons que, d'après les équations (B.12) et (B.24), on a

$$\mathbf{v}_{b_a} = \alpha_1 \beta_2 \mathbf{u} - \gamma_2 \mathbf{v}_{a_x^v} \quad (\text{B.26})$$

et, avec l'équation (B.24), nous pouvons conclure que  $q_5 = 0$ . Ainsi, étant donné que  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$  et  $q_3 = 0$ , d'après l'équation (B.22), les six coefficients  $q_i$  sont nuls et



la conique  $\mathcal{C}$  est dégénérée. L'analyse se continue par l'étude des cas 1biii et 1biv puis par l'étude des cas 1c, 1d, 2a et ainsi de suite. Notons que l'étude des cas 1biii et 1biv montre que ces deux cas sont équivalents au cas trivial  $\mathcal{B}$  de la section 3.3.2.2 pour lequel deux câbles du mécanisme sont confondus. Finalement, notons également que l'analyse de certains cas se ramène à l'analyse d'un cas déjà étudié si bien que tous les cas ne requièrent pas une nouvelle analyse.

### B.3 Lieu de dépendance linéaire de deux torseurs $\mathbf{w}_i$

Considérons deux colonnes  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  d'un mécanisme parallèle plan à trois ddl entraînés par câbles et recherchons les cas pour lesquels  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants. D'après l'équation (2.3), les deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants si et seulement si il existe deux scalaires  $\beta_j$  et  $\beta_q$  tels que  $(\beta_j, \beta_q) \neq (0, 0)$ ,

$$\beta_j \mathbf{d}_j + \beta_q \mathbf{d}_q = \mathbf{0} \quad (\text{B.27})$$

et

$$\beta_j \det(\mathbf{b}_j, \mathbf{d}_j) + \beta_q \det(\mathbf{b}_q, \mathbf{d}_q) = 0. \quad (\text{B.28})$$

Quand  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_i^v$  ( $i = j$  ou  $q$ ), le torseur  $\mathbf{w}_i$  est, par définition, égal à zéro et les deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants. À présent, supposons  $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_j^v$  et  $\mathbf{p} \neq \mathbf{a}_q^v$ . Alors, les deux scalaires  $\beta_j$  et  $\beta_q$  sont différents de zéro. Transformons l'équation (B.28) en appliquant des propriétés classiques du déterminant et en utilisant l'équation (B.27)

$$\beta_j \det(\mathbf{b}_j, \mathbf{d}_j) + \beta_q \det(\mathbf{b}_q, \mathbf{d}_q) = \det(\mathbf{b}_j, \beta_j \mathbf{d}_j) + \det(\mathbf{b}_q, \beta_q \mathbf{d}_q) \quad (\text{B.29})$$

$$= \det(\mathbf{b}_j, \beta_j \mathbf{d}_j) + \det(\mathbf{b}_q, -\beta_j \mathbf{d}_j) \quad (\text{B.30})$$

$$= \beta_j \det(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_q, \mathbf{d}_j). \quad (\text{B.31})$$

Ainsi, les deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants si et seulement si

$$\beta_j \mathbf{d}_j + \beta_q \mathbf{d}_q = \mathbf{0} \quad (\text{B.32})$$

et

$$\det(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_q, \mathbf{d}_j) = 0. \quad (\text{B.33})$$

Pour une orientation donnée de l'effecteur, si les points  $A_j^v$  et  $A_q^v$  ne sont pas confondus, l'équation (B.32) est l'équation de la droite  $(A_j^v A_q^v)$ . De plus, l'équation de fermeture du polygone  $B_j A_j A_q B_q$  permet d'écrire

$$\mathbf{d}_j = \frac{1}{\rho_j} ((\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_q) - (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_q) + \rho_q \mathbf{d}_q). \quad (\text{B.34})$$

Alors, d'après l'équation (B.32), on a

$$\det(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_q, \mathbf{d}_j) = 0 \implies \det(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_q, \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_q) = 0. \quad (\text{B.35})$$

Quand  $A_j \neq A_q$  et  $B_j \neq B_q$ , l'équation (B.35) est vérifiée pour les deux orientations  $\phi_j$  et  $\phi_q$  de l'effecteur pour lesquelles les deux droites  $(B_j B_q)$  et  $(A_j A_q)$  sont parallèles. Ainsi, les différents cas présentés ci-dessous sont nécessaires et suffisants à la linéaire dépendance des deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$ .

- $A_j \equiv A_q$  et  $B_j \equiv B_q$  : ce cas est le cas trivial pour lequel les deux câbles  $j$  et  $q$  sont confondus. Les deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont, par conséquent, linéairement dépendants quelle que soit la pose de l'effecteur.
- $B_j \equiv B_q$  ( $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_q$ ) : l'équation (B.33) est toujours vraie et, pour une orientation constante de l'effecteur, d'après l'équation (B.32),  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants quand le point de référence  $P$  est sur la droite  $(A_j^v A_q^v)$ .
- $A_j \equiv A_q$  ( $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_q$ ) : avec l'équation (B.34) on montre facilement que l'équation (B.33) est toujours vraie, c'est-à-dire est vérifiée quelle que soit la pose de

- l'effecteur. Ainsi, pour une orientation constante de l'effecteur,  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants quand le point de référence  $P$  est sur la droite  $(A_j^v A_q^v)$ .
- $A_j^v \equiv A_q^v$  ( $\mathbf{a}_j^v = \mathbf{a}_q^v$ ) : ce cas est possible quand les deux segments de droite  $[A_j A_q]$  et  $[B_j B_q]$  peuvent être confondus. Ainsi, ce cas existe uniquement pour les mécanismes dont les segments  $[A_j A_q]$  et  $[B_j B_q]$  ont la même longueur et dont l'orientation de l'effecteur est égale à  $\phi_j$  ou à  $\phi_q$ . Rappelons que  $\phi_j$  et  $\phi_q$  sont les orientations de l'effecteur pour lesquelles les droites  $(B_j B_q)$  et  $(A_j A_q)$  sont parallèles. Dans un tel cas, l'équation (B.32) est vraie quelle que soit la position de l'effecteur et l'équation (B.33) est l'équation de la droite  $\mathcal{L}$  passant par  $A_j^v \equiv A_q^v$  et dirigée par le vecteur  $\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_q$ . Ainsi,  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants si et seulement si l'orientation de l'effecteur est égale à  $\phi_j$  ou à  $\phi_q$  et le point de référence  $P$  est sur la droite  $\mathcal{L}$ .
  - Sinon : les torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_j^v$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{a}_q^v$  ou l'orientation de l'effecteur est égale à  $\phi_j$  ou à  $\phi_q$  (équation (B.33)) et le point de référence  $P$  est sur la droite  $(A_j^v A_q^v)$  (équation (B.32)).

Finalement, pour une orientation donnée de l'effecteur, remarquons que quand la géométrie du mécanisme et/ou l'orientation de son effecteur sont telles qu'il existe au moins une droite sur laquelle les deux torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants, alors, toute conique  $\mathcal{C}$ , lieu des points du plan où trois torseurs  $\mathbf{w}_i$ , dont  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_q$ , sont linéairement dépendants, dégénère en une ou deux droites ou en tout le plan.

# Annexe C

## Preuves des théorèmes 6, 7 et 8 du chapitre 3

Cette annexe propose des preuves aux théorèmes 6, 7 et 8 présentés au chapitre 3.

### C.1 Preuve du théorème 6

La preuve se décompose en deux parties. La première partie présente l'analyse qui aboutit à la condition nécessaire du théorème 6. La deuxième partie est beaucoup plus courte que la première et présente la synthèse qui démontre la condition suffisante du

théorème. Dans toute la preuve nous identifierons les torseurs  $\mathbf{w}_i$  formant les colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  à des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

### C.1.1 Condition nécessaire

La preuve de la condition nécessaire nécessite l'analyse des différents cas pour lesquels cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbb{R}^3$  sont dans une configuration polyvalente. Dans cette thèse, ces cinq vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sont les cinq torseurs colonnes d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ . La preuve de la condition nécessaire est la partie difficile de la démonstration du théorème 6. En effet, les conditions nécessaires sur les positions relatives des vecteurs  $\mathbf{w}_i$  recherchées dans cette partie de la preuve devront également être suffisantes. Néanmoins, nous avons essayé de garder cette preuve aussi claire et courte que possible.

Considérons une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 5$  telle que ses vecteurs colonnes  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente c'est-à-dire

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = 3 \tag{C.1}$$

et d'après l'équation (2.9) du théorème 1

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i. \tag{C.2}$$

Une conséquence des équations (C.1) et (C.2) est qu'au moins quatre des cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont non nuls. Si un seul des cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  est égal au vecteur nul alors les quatre autres sont dans une configuration polyvalente à quatre vecteurs telle que celles décrites à la section 3.2.1. Ainsi, dans la suite de cette preuve, nous supposons que  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$  pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  étant de dimension 3, il existe quatre scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_4$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \tag{C.3}$$

Nous pouvons supposer que parmi ces quatre scalaires  $\beta_i$  au moins un est strictement positif. Définissons alors  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  ou  $4$ , tel que  $\beta_j > 0$  et tel que

$$\frac{\lambda_j}{\beta_j} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i}, \forall i \mid \beta_i > 0. \quad (\text{C.4})$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $j = 4$ . Ainsi,  $\beta_4 > 0$  et d'après l'équation (C.3) on a

$$\mathbf{w}_4 = - \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{\beta_4} \mathbf{w}_i. \quad (\text{C.5})$$

Remarquons que les équations (C.1) et (C.2) impliquent que  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_4]) = 3$ . Alors, d'après l'équation (C.5), on a  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3]) = 3$ . À présent, dans l'équation (C.2), en remplaçant  $\mathbf{w}_4$  par son expression donnée par l'équation (C.5), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{w}_i + \lambda_5 \mathbf{w}_5 = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \lambda_i - \lambda_4 \frac{\beta_i}{\beta_4} \quad \forall i = 1, 2 \text{ ou } 3. \quad (\text{C.6})$$

Or,  $\forall i = 1, 2$  ou  $3$

- si  $\beta_i \leq 0$  alors  $\alpha_i > 0$
- si  $\beta_i > 0$  alors, par définition de  $\beta_4$ , l'équation (C.4) est vraie (avec  $j = 4$ ) et puisque  $\beta_i > 0$

$$\frac{\lambda_4}{\beta_4} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i} \iff \lambda_i - \lambda_4 \frac{\beta_i}{\beta_4} \geq 0 \quad (\text{C.7})$$

c'est-à-dire  $\alpha_i \geq 0$ .

Par conséquent,  $\forall i = 1, 2$  ou  $3$ ,  $\alpha_i \geq 0$ . Considérons un à un les différentes cas possibles.

**Cas 1** Si  $\alpha_i > 0 \forall i$  alors, comme  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3]) = 3$ , l'équation (C.6) implique que *quatre vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente*. Ici, avec les hypothèses

précédentes (par exemple nous avons supposé  $j = 4$ ), ces quatre vecteurs sont  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_5$ .

**Cas 2** Si il existe un seul  $i$  tel que  $\alpha_i = 0$ , nous pouvons supposer  $\alpha_3 = 0$ . Alors d'après l'équation (C.6)

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_5 \mathbf{w}_5 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \lambda_5 > 0 \quad (\text{C.8})$$

et on a également

$$\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3]) = 3. \quad (\text{C.9})$$

**Cas 3** Si il existe  $i$  unique tel que  $\alpha_i > 0$ , nous pouvons supposer que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont nuls. Alors d'après l'équation (C.6)

$$\alpha_3 \mathbf{w}_3 + \lambda_5 \mathbf{w}_5 = \mathbf{0}, \quad \alpha_3 > 0, \quad \lambda_5 > 0 \quad (\text{C.10})$$

et on a également

$$\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3]) = 3. \quad (\text{C.11})$$

**Cas 4** Si les trois scalaires  $\alpha_i$  sont nuls alors  $\mathbf{w}_5 = \mathbf{0}$ . Un tel cas a déjà été écarté puisque nous avons supposé dès le début de cette preuve que  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$  pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ .

D'après l'analyse précédente si cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente alors quatre d'entre eux sont dans une configuration polyvalente à quatre vecteurs (Cas 1) ou trois ou deux d'entre eux sont linéairement dépendants tel qu'une équation du type (C.8) ou (C.10) est satisfaite. Commençons par étudier le cas correspondant aux équations (C.8) et (C.9) (Cas 2) pour lequel, parmi les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$ , il existe trois vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  tels que un quatrième vecteur  $\mathbf{w}_q$  vérifie l'équation suivante

$$\alpha_q \mathbf{w}_q + \alpha_j \mathbf{w}_j + \alpha_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}, \quad \alpha_q > 0, \quad \alpha_j > 0 \text{ et } \alpha_k > 0. \quad (\text{C.12})$$

Remarquons que l'équation (C.12) est équivalente à l'équation (3.5) du théorème 6. Soit  $\alpha_s$  l'élément de l'ensemble  $\{\alpha_q, \alpha_j, \alpha_k\}$  tel que

$$\frac{\lambda_s}{\alpha_s} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \quad \forall i = q, j \text{ ou } k. \quad (\text{C.13})$$

Alors, d'après les équations (C.12) et (C.2)

$$\sum_{i \in \{q, j, k\} \setminus \{s\}} (\lambda_i - \lambda_s \frac{\alpha_i}{\alpha_s}) \mathbf{w}_i + \lambda_l \mathbf{w}_l + \lambda_r \mathbf{w}_r = \mathbf{0} \quad (\text{C.14})$$

où l'ensemble  $\{j, k, l, r, q\}$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  et où la notation  $\{q, j, k\} \setminus \{s\}$  signifie l'ensemble obtenu de  $\{q, j, k\}$  en supprimant son élément  $s$  ( $s = q, j$  ou  $k$ ). Soit

$$\delta_i = \lambda_i - \lambda_s \frac{\alpha_i}{\alpha_s}, \quad i \in \{q, j, k\} \setminus \{s\}. \quad (\text{C.15})$$

D'après l'équation (C.13),  $\delta_i \geq 0 \quad \forall i \in \{q, j, k\} \setminus \{s\}$ . Plusieurs cas doivent à nouveau être distingués.

- Si les deux scalaires  $\delta_i$  sont positifs (strictement) alors l'équation (C.14) est une combinaison linéaire à coefficients positifs de quatre des cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$ . De plus, d'après l'équation (C.12) et étant donné que  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants, les trois vecteurs  $\mathbf{w}_i$  dont les indices  $i$  sont les éléments de l'ensemble  $\{\{q, j, k\} \setminus \{s\}, l\}$  sont linéairement indépendants. Ainsi les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_i$  impliqués dans l'équation (C.14) sont une *configuration polyvalente à quatre vecteurs*.
- Si un seul des deux scalaires  $\delta_i$  est non nul, disons  $\delta_t > 0$ , alors l'équation (C.14) est équivalente à l'équation (3.6) du théorème 6 si  $t = j$ , à l'équation (3.7) de ce même théorème si  $t = k$  ou à

$$\mathbf{w}_r \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_q, -\mathbf{w}_l\}), \quad (\text{C.16})$$

si  $t = q$ . Remarquons que, d'après l'équation (C.12) et  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  étant linéairement indépendants,  $\mathbf{w}_q$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont également linéairement indépendants. Ainsi, puisque l'équation (C.12) est équivalente à l'équation (3.5), pour les trois



valeurs possibles de  $t$  ( $t = j, k$  ou  $q$ ) les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans *configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs* telle que définie par le deuxième cas du théorème 6. En effet, si  $t = j$ ,  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et les équations (3.5) et (3.6) sont vérifiées, si  $t = k$ ,  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et les équations (3.5) et (3.7) sont vérifiées tandis que, si  $t = q$ ,  $\mathbf{w}_q$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et les équations (3.5) et (3.6) sont vérifiées quand les indices  $j$  et  $q$  apparaissant dans ces deux équations sont permutés.

- Si les deux scalaires  $\delta_i$  sont nuls alors l'équation (C.14) est équivalente à l'équation (3.8) et, étant donné que  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et que l'équation (C.12) est équivalente à l'équation (3.5), les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans *une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs* telle que définie par le deuxième cas du théorème 6.

Finalement, considérons le cas correspondant aux équations (C.10) et (C.11) (Cas 3) pour lequel, parmi les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$ , il existe trois vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  et un quatrième vecteur  $\mathbf{w}_r$  tel que

$$\alpha_r \mathbf{w}_r + \alpha_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}, \quad \alpha_r > 0 \text{ et } \alpha_l > 0. \quad (\text{C.17})$$

D'après les équations (C.2) et (C.17) nous pouvons écrire

$$\lambda_j \mathbf{w}_j + \lambda_k \mathbf{w}_k + \lambda_q \mathbf{w}_q + \left( \lambda_l - \lambda_r \frac{\alpha_l}{\alpha_r} \right) \mathbf{w}_l = \mathbf{0} \quad (\text{C.18})$$

et

$$\lambda_j \mathbf{w}_j + \lambda_k \mathbf{w}_k + \lambda_q \mathbf{w}_q + \left( \lambda_r - \lambda_l \frac{\alpha_r}{\alpha_l} \right) \mathbf{w}_r = \mathbf{0} \quad (\text{C.19})$$

où l'ensemble  $\{j, k, l, r, q\}$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . De plus notons que

$$\lambda_l - \lambda_r \frac{\alpha_l}{\alpha_r} < 0 \iff \lambda_r - \lambda_l \frac{\alpha_r}{\alpha_l} > 0 \quad (\text{C.20})$$

et que les trois vecteurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_r$  sont linéairement indépendants. Ainsi

- si  $\lambda_l - \lambda_r(\alpha_l/\alpha_r) > 0$  alors l'équation (C.18) est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs et les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{w}_q$  et  $\mathbf{w}_l$  sont dans une *configuration polyvalente à quatre vecteurs*.
- Si  $\lambda_l - \lambda_r(\alpha_l/\alpha_r) < 0$  alors  $\lambda_r - \lambda_l(\alpha_r/\alpha_l) > 0$ , l'équation (C.19) est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs et les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{w}_q$  et  $\mathbf{w}_r$  sont dans une *configuration polyvalente à quatre vecteurs*.
- Si  $\lambda_l - \lambda_r(\alpha_l/\alpha_r) = 0$  alors l'équation (C.18) est équivalente à l'équation (3.5) du théorème 6 et, étant donné que l'équation (C.17) est équivalente à l'équation (3.8) et que  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants, les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une *configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs* telle que définie par le deuxième cas du théorème 6.

La condition nécessaire est ainsi démontrée.

### C.1.2 Condition suffisante

Supposons que les cinq colonnes  $\mathbf{w}_i$  d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 5$  sont tels que quatre d'entre elles sont dans une configuration polyvalente. Alors d'après le théorème 5 présenté à la section 3.1.2 les cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente. Puis, considérons une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 5$  dont les colonnes sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs vérifiant les équations (3.5) et (3.6). Alors, il existe des scalaires  $\lambda_i$  et  $\alpha_i$  strictement positifs tels que

$$\mathbf{w}_q + \lambda_j \mathbf{w}_j + \lambda_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \quad (\text{C.21})$$

et

$$\mathbf{w}_r + \alpha_j \mathbf{w}_j + \alpha_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}. \quad (\text{C.22})$$

La somme des équations (C.21) et (C.22) montre que l'équation (2.9) du théorème 1 est vraie et, les colonnes  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  étant linéairement indépendantes, d'après le théorème 1, les cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente. De la même façon on prouve que, si les cinq colonnes d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 5$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs vérifiant les équations (3.5) et (3.7) ou les équations (3.5) et (3.8), alors les cinq colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente. La preuve du théorème 6 est complète.

## C.2 Configuration polyvalente « minimale » à cinq torseurs

L'objectif de cette section est de justifier l'emploi de l'adjectif « minimal » utilisé pour qualifier les configurations polyvalentes à cinq torseurs définies par le deuxième cas du théorème 6. Pour ce faire, considérons cinq torseurs  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^3$ . Supposons que trois de ces cinq torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et que les deux autres  $\mathbf{w}_q$  et  $\mathbf{w}_r$  vérifient les équations (3.5) et (3.6) du théorème 6 c'est-à-dire qu'il existe des scalaires  $\beta_i$  et  $\delta_i$  tels que

$$\mathbf{w}_q = \beta_j \mathbf{w}_j + \beta_k \mathbf{w}_k, \quad \beta_j < 0 \text{ et } \beta_k < 0 \quad (\text{C.23})$$

et

$$\mathbf{w}_r = \delta_j \mathbf{w}_j + \delta_l \mathbf{w}_l, \quad \delta_j < 0 \text{ et } \delta_l < 0. \quad (\text{C.24})$$

Par conséquent, comme prouvé à la section C.1.2, les cinq torseurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente. De plus, cette configuration polyvalente est dite minimale dans le sens où aucune combinaison de quatre torseurs pris parmi les cinq  $\mathbf{w}_i$  est dans

une configuration polyvalente. Afin de prouver ce résultat, rappelons que d'après la fin de la section 2.2.2 si quatre torseurs sont dans une configuration polyvalente alors toute combinaison de trois de ces quatre torseurs est une combinaison de trois torseurs linéairement indépendants. Ainsi, étant donné que d'après l'équation (C.23) les trois torseurs  $\mathbf{w}_q$ ,  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_k$  sont linéairement dépendants, les quatre torseurs des combinaisons  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q)$  et  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  ne sont pas dans des configurations polyvalentes. De même, étant donné que d'après l'équation (C.24) les trois torseurs  $\mathbf{w}_r$ ,  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement dépendants, les quatre torseurs des combinaisons  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r)$  et  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  ne sont pas dans des configurations polyvalentes. La seule combinaison de quatre  $\mathbf{w}_i$  qui n'a pas été considérée est  $(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que les quatre torseurs de cette combinaison sont dans une configuration polyvalente. Par conséquent, d'après le théorème 1, il existe quatre scalaires  $\alpha_i$  strictement positifs tels que

$$\alpha_k \mathbf{w}_k + \alpha_l \mathbf{w}_l + \alpha_q \mathbf{w}_q + \alpha_r \mathbf{w}_r = \mathbf{0}. \quad (\text{C.25})$$

Avec les équations (C.23) et (C.24), on a

$$(\alpha_q \beta_j + \alpha_r \delta_j) \mathbf{w}_j + (\alpha_q \beta_k + \alpha_k) \mathbf{w}_k + (\alpha_r \delta_l + \alpha_l) \mathbf{w}_l = \mathbf{0}. \quad (\text{C.26})$$

Mais  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants, ainsi

$$\alpha_q \beta_j + \alpha_r \delta_j = 0 \quad (\text{C.27})$$

ou encore

$$\alpha_q \beta_j = -\alpha_r \delta_j. \quad (\text{C.28})$$

Étant donné que  $\alpha_q \beta_j < 0$  et  $\alpha_r \delta_j < 0$ , l'équation (C.28) est absurde et les quatre torseurs  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{w}_l$ ,  $\mathbf{w}_q$  et  $\mathbf{w}_r$  ne sont pas dans une configuration polyvalente. Il est ainsi prouvé qu'aucune combinaison de quatre torseurs pris parmi les cinq  $\mathbf{w}_i$  est dans une

configuration polyvalente. Par conséquent, la configuration polyvalente des cinq  $\mathbf{w}_i$  est dite minimale. La preuve du caractère minimal d'une configuration polyvalente à cinq torseurs vérifiant les équations (3.5) et (3.7) du théorème 6 est obtenue de la preuve présentée ci-dessus en inversant les rôles des torseurs  $\mathbf{w}_j$  et  $\mathbf{w}_k$ . Cette preuve n'est par conséquent pas présentée.

Finalement considérons cinq torseurs  $\mathbf{w}_i$  tels que trois de ces cinq torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_l$  sont linéairement indépendants et tels que les deux autres  $\mathbf{w}_q$  et  $\mathbf{w}_r$  vérifient les équations (3.5) et (3.8) du théorème 6. L'équation (3.5) implique que les torseurs  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  sont linéairement dépendants tandis que l'équation (3.8) implique que  $\mathbf{w}_l$  et  $\mathbf{w}_r$  sont linéairement dépendants. La dépendance linéaire de  $\mathbf{w}_j$ ,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{w}_q$  montre que les quatre torseurs des combinaisons  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q)$  et  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  ne sont pas dans une configuration polyvalente. De plus, la dépendance linéaire de  $\mathbf{w}_l$  et  $\mathbf{w}_r$  montre que les quatre torseurs des combinaisons  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_r)$ ,  $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  et  $(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_q, \mathbf{w}_r)$  ne sont pas dans une configuration polyvalente. Ainsi, aucune combinaison de quatre torseurs pris parmi les cinq  $\mathbf{w}_i$  est dans une configuration polyvalente. Par conséquent, une configuration polyvalente à cinq torseurs vérifiant les équations (3.5) et (3.8) du théorème 6 est dite minimale.

## C.3 Preuve du théorème 7

Tel qu'à la section C.1, la preuve est obtenue par analyse et synthèse et nous identifierons les torseurs  $\mathbf{w}_i$  formant les colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  à des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

### C.3.1 Condition nécessaire

Pour les mêmes raisons qu'à la section C.1.1, la preuve de la condition nécessaire est la partie délicate de la démonstration du théorème 7. La preuve présentée dans cette section suit les mêmes principes que celle présentée à la section C.1.1.

Considérons une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 6$  telle que ses vecteurs

colonnes  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente, c'est-à-dire, d'après le théorème 1

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = 3 \quad (\text{C.29})$$

et

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i. \quad (\text{C.30})$$

Une conséquence des équations (C.29) et (C.30) est qu'au moins quatre des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont non nuls. Si deux des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont nuls alors les quatre autres sont dans une configuration polyvalente à quatre vecteurs. Si un seul des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  est nul alors les cinq autres sont dans une configuration polyvalente à cinq vecteurs. Ainsi, dans la suite de cette preuve, nous supposons que  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$  pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . D'après l'équation (C.29), nous pouvons supposer que

$$\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4]) = 3. \quad (\text{C.31})$$

Les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  étant de dimension 3, il existe quatre scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_4$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{C.32})$$

Nous pouvons supposer que parmi ces quatre scalaires  $\beta_i$  au moins un est strictement positif. Ainsi, nous pouvons également supposer que  $\beta_1$  est tel que

$$\beta_1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{\beta_1} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i}, \quad \forall i \mid \beta_i > 0. \quad (\text{C.33})$$

De plus, d'après l'équation (C.32) on a

$$\mathbf{w}_1 = - \sum_{i=2}^4 \frac{\beta_i}{\beta_1} \mathbf{w}_i. \quad (\text{C.34})$$

À présent, dans l'équation (C.30), en remplaçant  $\mathbf{w}_1$  par son expression donnée par l'équation (C.34), nous obtenons

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i \mathbf{w}_i + \lambda_5 \mathbf{w}_5 + \lambda_6 \mathbf{w}_6 = \mathbf{0} \quad (\text{C.35})$$

où

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_1 \frac{\beta_i}{\beta_1}, \quad \forall i = 2, 3 \text{ ou } 4. \quad (\text{C.36})$$

Or,  $\forall i = 2, 3 \text{ ou } 4$

- si  $\beta_i \leq 0$  alors  $\alpha_i > 0$
- si  $\beta_i > 0$  alors, par définition de  $\beta_1$ , l'équation (C.33) est vraie et puisque  $\beta_i > 0$

$$\frac{\lambda_1}{\beta_1} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i} \iff \lambda_i - \lambda_1 \frac{\beta_i}{\beta_1} \geq 0 \quad (\text{C.37})$$

c'est-à-dire  $\alpha_i \geq 0$ .

Par conséquent,  $\forall i = 2, 3 \text{ ou } 4$ ,  $\alpha_i \geq 0$ . Distinguons les différents cas possibles.

**Cas 1** Les trois scalaires  $\alpha_i$  sont nuls. Par conséquent,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  et  $\beta_4$  sont strictement positifs et,  $\beta_1$  étant par définition strictement positif, les équations (C.31) et (C.32) impliquent que les vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  sont dans une configuration polyvalente à quatre vecteurs.

**Cas 2** Un seul scalaire  $\alpha_i$  est non nul et nous pouvons supposer que  $\alpha_4 \neq 0$ . De plus, étant donné que  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  alors  $\beta_2 > 0$  et  $\beta_3 > 0$ . Distinguons trois sous-cas.

**Cas 2.1** si  $\beta_4 > 0$  alors, pour les mêmes raisons que dans le cas 1,  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  sont dans une configuration polyvalente à quatre vecteurs.

**Cas 2.2** Si  $\beta_4 < 0$  alors, d'après l'équation (C.32), nous pouvons écrire

$$\mathbf{w}_4 = \sum_{i=1}^3 (> 0) \mathbf{w}_i \quad (\text{C.38})$$

où la notation utilisée à l'équation (C.38) signifie que le vecteur  $\mathbf{w}_4$  s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des vecteurs  $\mathbf{w}_i$ . Ainsi, dans l'équation (C.30), remplacer  $\mathbf{w}_4$  par cette combinaison linéaire à coefficients strictement positifs et remarquer que les équations (C.29) et (C.30) impliquent que tout ensemble de cinq vecteurs pris parmi les six  $\mathbf{w}_i$  est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants montrent que les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_5$  et  $\mathbf{w}_6$  sont dans une configuration polyvalente.

**Cas 2.3** Si  $\beta_4 = 0$  alors une analyse plus détaillée est nécessaire. Celle-ci est présentée plus loin dans cette section.

**Cas 3** Un seul scalaire  $\alpha_i$  est nul. Comme dans le cas 2.3, une analyse plus détaillée doit être entreprise.

**Cas 4** Aucun des trois scalaires  $\alpha_i$  est nul. Dans ce cas, l'équation (C.35) est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des cinq vecteurs  $\mathbf{w}_2$  à  $\mathbf{w}_6$  et, ces vecteurs étant linéairement indépendants, ils sont dans une configuration polyvalente à cinq vecteurs.

En résumé, quatre ou cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente ou les six  $\mathbf{w}_i$  vérifient les conditions du cas 2.3 ou du cas 3. Analysons successivement ces deux cas.

Pour commencer, intéressons-nous au cas 2.3 pour lequel  $\alpha_4 > 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  et  $\beta_4 = 0$ , c'est-à-dire pour lequel, d'après les équations (C.32) et (C.35), les scalaires strictement positifs  $\lambda_i$  de l'équation (C.30) peuvent être choisis tels que

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (\text{C.39})$$

et



$$\sum_{i=4}^6 \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{C.40})$$

Les équations (C.39) et (C.31) impliquent que

$$\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3]) = 2. \quad (\text{C.41})$$

Nous pouvons ainsi supposer que  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_4$  sont linéairement indépendants et il existe des scalaires  $\gamma_i$  et  $\delta_i$  tels que

$$\mathbf{w}_5 = \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \gamma_2 \mathbf{w}_2 + \gamma_4 \mathbf{w}_4 \quad (\text{C.42})$$

et

$$\mathbf{w}_6 = \delta_1 \mathbf{w}_1 + \delta_2 \mathbf{w}_2 + \delta_4 \mathbf{w}_4. \quad (\text{C.43})$$

Avec l'équation (C.40), nous pouvons écrire

$$(\lambda_5 \gamma_1 + \lambda_6 \delta_1) \mathbf{w}_1 + (\lambda_5 \gamma_2 + \lambda_6 \delta_2) \mathbf{w}_2 + (\lambda_5 \gamma_4 + \lambda_6 \delta_4 + \lambda_4) \mathbf{w}_4 = \mathbf{0}. \quad (\text{C.44})$$

Les trois vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_4$  étant linéairement indépendants, on a

$$\lambda_5 \gamma_1 + \lambda_6 \delta_1 = 0, \quad \lambda_5 \gamma_2 + \lambda_6 \delta_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_5 \gamma_4 + \lambda_6 \delta_4 + \lambda_4 = 0. \quad (\text{C.45})$$

Étant donné que les scalaires  $\lambda_i$  sont strictement positifs, les équations (C.45) impliquent que

$$\gamma_4 < 0 \quad \text{ou} \quad \delta_4 < 0 \quad (\text{C.46})$$

$$\gamma_1 \leq 0 \quad \text{ou} \quad \delta_1 \leq 0 \tag{C.47}$$

$$\gamma_2 \leq 0 \quad \text{ou} \quad \delta_2 \leq 0. \tag{C.48}$$

De plus, on a aussi

$$\gamma_1 = 0 \iff \delta_1 = 0 \tag{C.49}$$

$$\gamma_2 = 0 \iff \delta_2 = 0. \tag{C.50}$$

D'après l'équation (C.46), nous pouvons supposer que  $\gamma_4 < 0$  et ainsi

$$\mathbf{w}_5 = \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \gamma_2 \mathbf{w}_2 + (< 0) \mathbf{w}_4 \tag{C.51}$$

où le coefficient  $\gamma_4$  de l'équation (C.42) a été remplacé par son signe. Nous utiliserons ce type de notation dans la suite de la preuve. À présent, distinguons neuf cas qui correspondent aux différents signes possibles pour  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

- $\gamma_1 = 0$  et  $\gamma_2 = 0$  : d'après les équations (C.49) et (C.50),  $\delta_1 = 0$  et  $\delta_2 = 0$  et, par conséquent, les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_1$  à  $\mathbf{w}_5$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs telle que celle vérifiant les équations (3.5) et (3.8) du théorème 6 (avec  $j = 1$ ,  $k = 2$ ,  $l = 4$ ,  $q = 3$  et  $r = 5$ ).
- $\gamma_1 = 0$  et  $\gamma_2 > 0$  : d'après l'équation C.51 on a

$$\mathbf{w}_2 = (> 0) \mathbf{w}_4 + (> 0) \mathbf{w}_5. \tag{C.52}$$

Ainsi, en substituant, dans l'équation (C.30),  $\mathbf{w}_2$  par le membre de droite de l'équation (C.52) on obtient une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de cinq des six  $\mathbf{w}_i$  prouvant que ces cinq  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

–  $\gamma_1 = 0$  et  $\gamma_2 < 0$  : d'après l'équation (C.51), nous pouvons écrire

$$\mathbf{w}_5 \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_2, -\mathbf{w}_4\}). \quad (\text{C.53})$$

De plus, l'équation (C.39) est équivalente à

$$\mathbf{w}_3 \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_1, -\mathbf{w}_2\}) \quad (\text{C.54})$$

et les trois vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_4$  sont linéairement indépendants. Ainsi,  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$  et  $\mathbf{w}_5$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs.

–  $\gamma_1 > 0$  et  $\gamma_2 = 0$  : d'après l'équation (C.51), nous pouvons écrire

$$\mathbf{w}_1 = (> 0)\mathbf{w}_4 + (> 0)\mathbf{w}_5. \quad (\text{C.55})$$

Ainsi, d'après l'équation (C.30), les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_2$  à  $\mathbf{w}_5$  sont dans une configuration polyvalente à cinq vecteurs.

–  $\gamma_1 > 0$  et  $\gamma_2 > 0$  : alors on a  $\delta_1 < 0$  et  $\delta_2 < 0$  c'est-à-dire

$$\mathbf{w}_6 = (< 0)\mathbf{w}_1 + (< 0)\mathbf{w}_2 + \delta_4\mathbf{w}_4. \quad (\text{C.56})$$

Si  $\delta_4 < 0$  alors les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_4$  et  $\mathbf{w}_6$  sont dans une configuration polyvalente. Si  $\delta_4 > 0$  alors  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_5$  et  $\mathbf{w}_6$  sont dans une configuration polyvalente à cinq vecteurs. Finalement, si  $\delta_4 = 0$  alors il existe un scalaire  $\mu > 0$  tel que

$$\mathbf{w}_5 + \mu\mathbf{w}_6 = (< 0)\mathbf{w}_1 + (< 0)\mathbf{w}_2 + (< 0)\mathbf{w}_4 \quad (\text{C.57})$$

et les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_4$ ,  $\mathbf{w}_5$  et  $\mathbf{w}_6$  sont, par conséquent, dans une configuration polyvalente.

–  $\gamma_1 > 0$  et  $\gamma_2 < 0$  : alors d'après l'équation (C.51) on a

$$\mathbf{w}_1 = (> 0)\mathbf{w}_2 + (> 0)\mathbf{w}_4 + (> 0)\mathbf{w}_5 \quad (\text{C.58})$$

et en substituant, dans l'équation (C.30),  $\mathbf{w}_1$  par le membre de droite de l'équation (C.58), on obtient une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de cinq des six  $\mathbf{w}_i$  prouvant que ces cinq  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

–  $\gamma_1 < 0$  et  $\gamma_2 = 0$  : d'après l'équation (C.51) on a

$$\mathbf{w}_5 \in \text{int}(\text{cone}\{-\mathbf{w}_1, -\mathbf{w}_4\}) \quad (\text{C.59})$$

et, avec l'équation (C.54), les trois vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_4$  étant linéairement indépendants, les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$  et  $\mathbf{w}_5$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs.

–  $\gamma_1 < 0$  et  $\gamma_2 > 0$  : d'après l'équation (C.51) on a

$$\mathbf{w}_2 = (> 0)\mathbf{w}_1 + (> 0)\mathbf{w}_4 + (> 0)\mathbf{w}_5. \quad (\text{C.60})$$

Ainsi, d'après l'équation (C.30), les cinq vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$ ,  $\mathbf{w}_5$  et  $\mathbf{w}_6$  sont dans une configuration polyvalente.

–  $\gamma_1 < 0$  et  $\gamma_2 < 0$  : d'après l'équation (C.51), les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_4$  et  $\mathbf{w}_5$  sont dans une configuration polyvalente.

La conclusion du cas 2.3 est la suivante : quatre ou cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

Analysons à présent le cas 3 pour lequel un seul des scalaires  $\alpha_i$  définis à l'équation (C.36) est nul. Nous pouvons supposer  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 > 0$  et  $\alpha_4 > 0$ . Ainsi, dans l'équation (C.35), en remplaçant les scalaires  $\alpha_i$  par leurs signes, on a

$$\sum_{i=3}^6 (> 0)\mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{C.61})$$

Si  $\text{rank}([\mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4 \ \mathbf{w}_5 \ \mathbf{w}_6]) = 3$  alors les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$ ,  $\mathbf{w}_5$  et  $\mathbf{w}_6$  sont dans une configuration polyvalente. Si  $\text{rank}([\mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4 \ \mathbf{w}_5 \ \mathbf{w}_6]) = 1$  alors il existe  $j$  et  $k$  pris parmi  $\{3, 4, 5, 6\}$  tels que

$$\mathbf{w}_j = (> 0)\mathbf{w}_k \quad (\text{C.62})$$

et, dans l'équation (C.30), substituer  $\mathbf{w}_j$  par le membre de droite de l'équation (C.62) montre que cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente. Finalement, intéressons-nous au cas où

$$\text{rank}([\mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4 \ \mathbf{w}_5 \ \mathbf{w}_6]) = 2 \quad (\text{C.63})$$

c'est-à-dire au cas où les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_3$  à  $\mathbf{w}_6$  sont dans un plan  $\mathcal{P}$  et, qui plus est,

d'après l'équation (C.61), ces quatre vecteurs sont dans une configuration polyvalente dans  $\mathcal{P}$ . Ainsi, deux cas se présentent. Dans le premier cas, tel qu'illustré à la figure C.1, trois des quatre vecteurs  $\mathbf{w}_i$ ,  $3 \leq i \leq 6$ , sont dans une configuration polyvalente dans  $\mathcal{P}$  et, par conséquent, le quatrième  $\mathbf{w}_i$ , disons  $\mathbf{w}_k$ , s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de ces trois  $\mathbf{w}_i$ . En substituant, dans l'équation (C.30),  $\mathbf{w}_k$  par cette combinaison linéaire, nous obtenons une configuration polyvalente pour cinq des six  $\mathbf{w}_i$ . Dans le deuxième cas, tel qu'illustré à la figure C.2 où  $\{j, k, q, r\}$  est une permutation de  $\{3, 4, 5, 6\}$ , les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$ ,  $\mathbf{w}_5$  et  $\mathbf{w}_6$  sont dans une configuration polyvalente minimale dans  $\mathcal{P}$ . Afin d'étudier ce cas, considérons l'équation suivante qui est obtenue de l'équation (C.32) en remplaçant les scalaires  $\beta_1$  et  $\beta_2$  par leurs signes

$$(> 0)\mathbf{w}_1 + (> 0)\mathbf{w}_2 + \beta_3\mathbf{w}_3 + \beta_4\mathbf{w}_4 = \mathbf{0} \quad (\text{C.64})$$

où  $\beta_1 > 0$  par définition et où  $\beta_2 > 0$  car  $\alpha_2 = 0$ . Rappelons que, d'après l'équation (C.31)

$$\text{rank}([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4]) = 3. \quad (\text{C.65})$$

Distinguons différents cas suivant les signes de  $\beta_3$  et  $\beta_4$ .

- $\beta_3 > 0$  et  $\beta_4 > 0$  : d'après les équations (C.64) et (C.65), les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  sont dans une configuration polyvalente.
- $\beta_3 > 0$  et  $\beta_4 < 0$  : d'après l'équation (C.64), on a

$$\mathbf{w}_4 = (> 0)\mathbf{w}_1 + (> 0)\mathbf{w}_2 + (> 0)\mathbf{w}_3 \quad (\text{C.66})$$

et substituer, dans l'équation (C.30),  $\mathbf{w}_4$  par le membre de droite de l'équation (C.66) prouve que cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

- $\beta_3 > 0$  et  $\beta_4 = 0$  : alors si  $j = 4$  à la figure C.2,  $q = 5$  ou  $q = 6$  et les vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$  et  $\mathbf{w}_q$  sont une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs.
- $\beta_3 < 0$  et  $\beta_4 \geq 0$  : on a

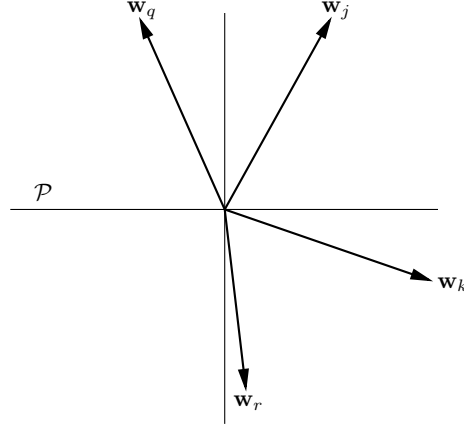


FIG. C.1 – Trois des quatre  $\mathbf{w}_i$  appartenant au plan  $\mathcal{P}$  sont dans une configuration polyvalente.

$$\mathbf{w}_3 = (> 0)\mathbf{w}_1 + (> 0)\mathbf{w}_2 + (\geq 0)\mathbf{w}_4 \quad (\text{C.67})$$

et substituer, dans l'équation (C.30),  $\mathbf{w}_3$  par le membre de droite de l'équation (C.67) prouve que cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

- $\beta_3 < 0$  et  $\beta_4 < 0$  : si, dans le plan vectoriel  $\mathcal{P}$ ,  $\mathbf{w}_3 = (< 0)\mathbf{w}_4$  (par exemple  $j = 3$  et  $q = 4$  à la figure C.2) et, ainsi,  $\mathbf{w}_4 = (< 0)\mathbf{w}_3$  alors, avec l'équation (C.64), on a

$$\sum_{i=1}^4 (> 0)\mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (\text{C.68})$$

c'est-à-dire les quatre vecteurs  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  sont dans une configuration polyvalente. Sinon, dans le plan vectoriel  $\mathcal{P}$ ,  $\mathbf{w}_3 = (< 0)\mathbf{w}_5$  ou  $\mathbf{w}_3 = (< 0)\mathbf{w}_6$  et nous pouvons supposer que  $\mathbf{w}_3 = (< 0)\mathbf{w}_5$ . Alors l'équation (C.64) impliquent que

$$\mathbf{w}_4 = (> 0)\mathbf{w}_1 + (> 0)\mathbf{w}_2 + (> 0)\mathbf{w}_5 \quad (\text{C.69})$$

et, d'après l'équation (C.30), cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

- $\beta_3 = 0$  et  $\beta_4 > 0$  : comme dans le cas  $\beta_3 > 0$  et  $\beta_4 = 0$ , cinq des six  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq vecteurs.
- $\beta_3 = 0$  et  $\beta_4 < 0$  : d'après l'équation (C.64), on a

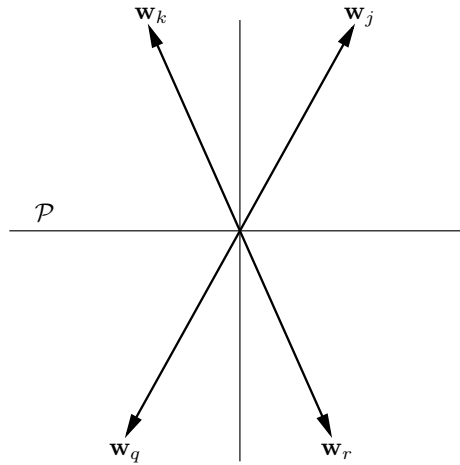


FIG. C.2 – Une configuration polyvalente minimale dans le plan vectoriel  $\mathcal{P}$ .

$$\mathbf{w}_4 = (> 0)\mathbf{w}_1 + (> 0)\mathbf{w}_2 \quad (\text{C.70})$$

et, d'après l'équation (C.30), cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

–  $\beta_3 = 0$  et  $\beta_4 = 0$  : d'après l'équation (C.64), on a

$$\mathbf{w}_2 = (< 0)\mathbf{w}_1 \quad (\text{C.71})$$

et les six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente minimale à six vecteurs telle que définie par le troisième cas du théorème 7 (par exemple,  $j = 3$ ,  $k = 4$ ,  $l = 1$ ,  $q = 5$ ,  $r = 6$  et  $s = 2$ ).

La conclusion du cas 2.3 est la suivante : quatre ou cinq des six vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente ou les six  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente minimale à six vecteurs.

La condition nécessaire du théorème 7 est ainsi démontrée.

### C.3.2 Condition suffisante

D'après le théorème 5 présenté à la section 3.1.2, si quatre des six colonnes d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 6$  sont dans une configuration polyvalente

alors les six colonnes de  $\mathbf{W}$  le sont également et, ainsi, la condition énoncée au premier cas du théorème 7 est suffisante. D'après la section C.1.2, la condition énoncée au deuxième cas du théorème 7 est également suffisante. Finalement, supposons que les six colonnes  $\mathbf{w}_i$  d'une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times 6$  sont dans une configuration polyvalente minimale à six vecteurs. Alors, nous pouvons supposer que  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$  sont linéairement indépendants ( $\text{rank}(\mathbf{W}) = 3$ ) et, d'après les équations (3.10), (3.11) et (3.12), il existe trois scalaires strictement positifs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  tels que

$$\mathbf{w}_4 + \lambda_1 \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}_5 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_6 + \lambda_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}. \quad (\text{C.72})$$

La somme des équations (C.72) montre que l'équation (2.9) du théorème 1 est vraie et ainsi que les six colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente. La preuve du théorème 7 est complète.

## C.4 Configuration polyvalente « minimale » à six torseurs

Les configurations polyvalentes à six torseurs  $\mathbf{w}_i$  définies par le troisième cas du théorème 7 sont dites minimales parce qu'aucune combinaison de quatre ou cinq de ces six  $\mathbf{w}_i$  est dans une configuration polyvalente. En effet, en supposant que quatre des six  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente alors, d'après la fin de la section 2.2.2, toute combinaison de trois de ces quatre torseurs est une combinaison de trois torseurs linéairement indépendants. Ceci est en contradiction avec les trois linéaires dépendances impliquées par les trois équations (3.10), (3.11) et (3.12) et, par conséquent, aucune combinaison de quatre des six  $\mathbf{w}_i$  est dans une configuration polyvalente. De manière similaire, supposer que cinq des six  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs tel que défini par le deuxième cas du théorème 6 amène à une contradiction due aux linéaires dépendances impliquées par les trois équations (3.10), (3.11) et (3.12).



## C.5 Preuve du théorème 8

Tel que pour les démonstrations des théorèmes 6 et 7, une analyse permet de prouver la condition nécessaire du théorème 8 tandis que la condition suffisante est prouvée par synthèse. Cependant, étant donné qu'aucune nouvelle configuration polyvalente minimale doit être mise en évidence par l'analyse, celle-ci est beaucoup plus courte que celles entreprises dans les preuves des conditions nécessaires des théorèmes 6 et 7. Nous identifierons les torseurs  $\mathbf{w}_i$  formant les colonnes de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  à des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

### C.5.1 Condition nécessaire

Considérons une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times m$ ,  $m \geq 7$ , telle que ses vecteurs colonnes  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente, c'est-à-dire, d'après le théorème 1

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = 3 \tag{C.73}$$

et

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \lambda_i > 0 \quad \forall i. \tag{C.74}$$

Une conséquence des équations (C.73) et (C.74) est que si  $r$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont nuls ( $r \geq 1$ ) alors les  $m - r$  autres vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente si  $r \leq m - 4$  ou, si  $r > m - 4$ , il est absurde que les équations (C.73) et (C.74) soient vraies en même temps. Ainsi, dans la suite de cette preuve, nous supposons que  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$  pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . D'après l'équation (C.73), nous pouvons supposer que

$$\text{rank}([\mathbf{w}_5 \ \mathbf{w}_6 \ \mathbf{w}_7]) = 3. \tag{C.75}$$

De plus, étant donné que les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont de dimension 3, il existe quatre scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_4$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{C.76})$$

Nous pouvons supposer que parmi ces quatre scalaires  $\beta_i$  au moins un est strictement positif. Ainsi, nous pouvons également supposer que  $\beta_1$  est tel que

$$\beta_1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{\beta_1} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i}, \quad \forall i \mid \beta_i > 0, \quad 2 \leq i \leq 4. \quad (\text{C.77})$$

D'après l'équation (C.76), on a

$$\mathbf{w}_1 = - \sum_{i=2}^4 \frac{\beta_i}{\beta_1} \mathbf{w}_i. \quad (\text{C.78})$$

À présent, dans l'équation (C.74), en remplaçant  $\mathbf{w}_1$  par son expression donnée par le membre de droite de l'équation (C.78), nous obtenons

$$\sum_{i=2}^4 \alpha_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=5}^m \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (\text{C.79})$$

avec

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_1 \frac{\beta_i}{\beta_1}, \quad \forall i = 2, 3 \text{ ou } 4. \quad (\text{C.80})$$

Or,  $\forall i = 2, 3 \text{ ou } 4$

– si  $\beta_i \leq 0$  alors  $\alpha_i > 0$

– si  $\beta_i > 0$  alors, par définition de  $\beta_1$ , l'équation (C.77) est vraie et puisque  $\beta_i > 0$

$$\frac{\lambda_1}{\beta_1} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i} \iff \lambda_i - \lambda_1 \frac{\beta_i}{\beta_1} \geq 0 \quad (\text{C.81})$$

c'est-à-dire  $\alpha_i \geq 0$ .

Par conséquent,  $\forall i = 2, 3$  ou  $4$ ,  $\alpha_i \geq 0$ . Distinguons deux cas.

**Cas 1**  $m \geq 8$  : étant donné que  $\alpha_i \geq 0 \forall i = 2, 3$  ou  $4$  et que, d'après l'équation (C.75),  $\mathbf{w}_5$ ,  $\mathbf{w}_6$  et  $\mathbf{w}_7$  sont linéairement indépendants, nous déduisons de l'équation (C.79) qu'au plus  $m - 1$  (tous les  $\alpha_i > 0$ ) et qu'au moins  $m - 4$  (tous les  $\alpha_i = 0$ ) des  $m$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.

**Cas 2**  $m = 7$  :

- s'il existe au moins un indice  $i$  tel que  $\alpha_i \neq 0$ , c'est-à-dire tel que  $\alpha_i > 0$  alors nous déduisons de l'équation (C.79) qu'au plus  $m - 1$  et qu'au moins  $m - 3$  des  $m$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente.
- Si pour tout indice  $i$ ,  $i = 2, 3$  et  $4$ ,  $\alpha_i = 0$  alors, puisque  $m = 7$ , l'équation (C.79) implique que les trois vecteurs  $\mathbf{w}_5$ ,  $\mathbf{w}_6$  et  $\mathbf{w}_7$  sont linéairement dépendants ce qui est absurde d'après l'équation (C.75).

Ainsi,  $m - 1$ ,  $m - 2$  ou  $m - 3$  des  $m$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente ou, si  $m \geq 8$ ,  $m - 4$  des  $m$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente. Finalement, en appliquant ce résultat autant de fois que nécessaire, on prouve que quatre, cinq ou six des  $m$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente, c'est-à-dire on prouve la condition nécessaire du théorème 8.

## C.5.2 Condition suffisante

Considérons une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  de dimension  $3 \times m$ ,  $m \geq 7$ . D'après les théorèmes 5, 6 et 7, si parmi les  $m$  vecteurs colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ , quatre sont dans une configuration polyvalente à quatre torseurs, cinq sont dans une configuration polyvalente minimale à cinq torseurs ou six sont dans une configuration polyvalente minimale à six torseurs alors six des  $m$   $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente. Nous pouvons supposer que ces six  $\mathbf{w}_i$  sont  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_6$ . À présent, la démonstration est similaire

à celle du théorème 5. En effet, par définition d'une configuration polyvalente, il existe un vecteur  $\mathbf{t}_6 \in \mathbb{R}^6$  tel que

$$\mathbf{t}_6 \geq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_6] \mathbf{t}_6 = -\mathbf{W} \mathbf{1}_m \quad (\text{C.82})$$

où le vecteur  $\mathbf{1}_m$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  dont tous les éléments valent 1. L'équation (C.82) implique qu'il existe un vecteur  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$  dans  $\mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathbf{W} \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.83})$$

c'est-à-dire implique que la condition (2.9) du théorème 1 est vraie. En outre, les torseurs  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_6$  étant dans une configuration polyvalente, trois d'entre eux sont linéairement indépendants et la matrice  $\mathbf{W}$  est de plein rang. Par conséquent les deux conditions du théorème 1 sont vérifiées et les  $m$  colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente ce qui prouve la condition suffisante du théorème 8.

# Annexe D

## Compléments au chapitre 4

Cette annexe comporte trois sections. La première traite de l'analyse des configurations polyvalentes de huit vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  tandis que la seconde et la troisième proposent, respectivement, une preuve du théorème 15 et une méthode permettant de tester si une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles appartient à l'EPP.

### D.1 De la nature des configurations polyvalentes de huit vecteurs de $\mathbb{R}^6$

Cette section présente le début de l'analyse des configurations polyvalentes de huit vecteurs  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbb{R}^6$ , ces vecteurs pouvant être considérés comme huit torseurs colonnes

de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  d'un mécanisme parallèle à six ddl entraînés par huit câbles. Cette analyse, bien que incomplète, montre que si huit vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  sont dans une configuration polyvalente alors sept d'entre eux le sont ou, dans le cas contraire, il existe certaines dépendances linéaires entre ces huit vecteurs.

Telle qu'abordée dans cette thèse, l'étude des différents types de configurations polyvalentes de huit vecteurs  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^6$  est très similaire à l'étude des différents types de configurations polyvalentes de cinq vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi, le début d'analyse présenté ci-dessous est également très similaire à l'analyse proposée à la section C.1.1. Considérons huit vecteurs  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbb{R}^6$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) et supposons que ces huit vecteurs sont dans une configuration polyvalente. Soit  $\mathbf{W}$  la matrice dont les huit colonnes sont les huit vecteurs  $\mathbf{w}_i$  (matrice des torseurs). D'après le théorème 11, on a

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = 6 \quad (\text{D.1})$$

et

$$\sum_{i=1}^8 \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i. \quad (\text{D.2})$$

Les équations (D.1) et (D.2) impliquent qu'au moins sept des huit vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont non nuls. De plus, si un des vecteurs  $\mathbf{w}_i$  est nul, alors les sept autres sont dans une configuration polyvalente. À présent, supposons  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$  quel que soit  $i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ . Étant donné que les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  appartiennent à  $\mathbb{R}^6$ , il existe sept scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_7$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{D.3})$$

Nous pouvons supposer qu'un de ces scalaires est non nul et positif. Soit  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  ou 7, tel que  $\beta_j > 0$  et tel que

$$\frac{\lambda_j}{\beta_j} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i}, \forall i \mid \beta_i > 0. \quad (\text{D.4})$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $j = 7$ . Ainsi,  $\beta_7 > 0$  et d'après l'équation (D.3) on a

$$\mathbf{w}_7 = - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\beta_7} \mathbf{w}_i. \quad (\text{D.5})$$

Remarquons que les équations (D.1) et (D.2) impliquent que  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_7]) = 6$ . Alors, d'après l'équation (D.5), on a  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_6]) = 6$ . À présent, dans l'équation (D.2), en remplaçant  $\mathbf{w}_7$  par son expression donnée par l'équation (D.5), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathbf{w}_i + \lambda_8 \mathbf{w}_8 = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \lambda_i - \lambda_7 \frac{\beta_i}{\beta_7}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{D.6})$$

Or,  $\forall i, i = 1, 2, \dots, 6$

- si  $\beta_i \leq 0$  alors  $\alpha_i > 0$
- si  $\beta_i > 0$  alors, par définition de  $\beta_7$ , l'équation (D.4) est vraie (avec  $j = 7$ ) et puisque  $\beta_i > 0$

$$\frac{\lambda_7}{\beta_7} \leq \frac{\lambda_i}{\beta_i} \iff \lambda_i - \lambda_7 \frac{\beta_i}{\beta_7} \geq 0 \quad (\text{D.7})$$

c'est-à-dire  $\alpha_i \geq 0$ .

Par conséquent,  $\forall i = 1, \dots, 5$  ou  $6$ ,  $\alpha_i \geq 0$  et différents cas doivent être étudiés. Ces cas se distinguent par le nombre de coefficients  $\alpha_i$  nuls et sont au nombre de sept.

**Cas 1**  $\alpha_i > 0, \forall 1 \leq i \leq 6$ .

**Cas 2** Un seul  $\alpha_i = 0$ .

**Cas 3** Deux  $\alpha_i = 0$ .

**Cas 4** Trois  $\alpha_i = 0$ .

**Cas 5** Quatre  $\alpha_i = 0$ .

**Cas 6** Cinq  $\alpha_i = 0$ .

**Cas 7** Les six  $\alpha_i = 0$ .

Dans le cas 1, d'après l'équation (D.6) et étant donné que  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_6]) = 6$ , les sept vecteurs  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_6$  et  $\mathbf{w}_8$  sont dans une configuration polyvalente. D'après l'équation (D.6), le cas 7 implique que le vecteur  $\mathbf{w}_8$  est nul, cas qui a été écarté au début de cette analyse. L'analyse des cas 2 à 6 permettrait d'identifier différentes configurations polyvalentes de huit vecteurs de  $\mathbb{R}^6$ . Pour les raisons données à la section 4.2.2, cette analyse n'est pas entreprise dans cette thèse. Cependant, soulignons que dans le cas  $i$  ( $i = 2, \dots, 6$ ), d'après l'équation (D.6),  $(8-i)$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont linéairement dépendants et, étant donné que  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_6]) = 6$ , ces  $(8-i)$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  engendrent un sous-espace de dimension  $(7-i)$  de  $\mathbb{R}^6$  dans lequel ils sont, de plus, dans une configuration polyvalente. Ainsi, sans analyser en détails les différents cas, nous pouvons quand-même conclure que *si huit vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  sont dans une configuration polyvalente alors sept d'entre eux sont dans une configuration polyvalente ou, dans le cas contraire, certains d'entre eux sont linéairement dépendants*. Afin d'illustrer ces propos, considérons le cas 6 pour lequel on peut supposer que seul  $\alpha_1$  est non nul. Alors, d'après l'équation (D.6), on a

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_8 \mathbf{w}_8 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1 > 0 \text{ et } \lambda_8 > 0. \quad (\text{D.8})$$

D'après les équations (D.2) et (D.8), nous pouvons écrire

$$\sum_{i=2}^7 \lambda_i \mathbf{w}_i + \left( \lambda_8 - \lambda_1 \frac{\lambda_8}{\alpha_1} \right) \mathbf{w}_8 = \mathbf{0} \quad (\text{D.9})$$

et

$$\sum_{i=2}^7 \lambda_i \mathbf{w}_i + \left( \lambda_1 - \lambda_8 \frac{\alpha_1}{\lambda_8} \right) \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}. \quad (\text{D.10})$$

De plus, l'équivalence suivante est vérifiée



$$\lambda_8 - \lambda_1 \frac{\lambda_8}{\alpha_1} < 0 \iff \lambda_1 - \lambda_8 \frac{\alpha_1}{\lambda_8} > 0. \quad (\text{D.11})$$

Ainsi, en distinguant trois cas similaires à ceux traités à la fin de la section C.1.1, on prouve que soit sept vecteurs  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente ou les huit  $\mathbf{w}_i$  sont dans une configuration polyvalente minimale à huit vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  (cas où  $\lambda_8 - \lambda_1(\lambda_8/\alpha_1) = 0$ ) telle que  $\text{rank}([\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_6]) = 6$ ,  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_8$  sont dans une configuration polyvalente suivant une ligne de  $\mathbb{R}^6$  (équation (D.8)) et, d'après l'équation (D.9), les six vecteurs  $\mathbf{w}_2$  à  $\mathbf{w}_7$  sont dans un hyperplan de  $\mathbb{R}^6$  dans lequel ils sont dans une configuration polyvalente

$$\sum_{i=2}^7 \lambda_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad \lambda_i > 0. \quad (\text{D.12})$$

Finalement, concluons ces considérations sur les configurations polyvalentes des vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  en remarquant que, en suivant la même démarche qu'à la section C.5, quand  $m \geq 13$ , il peut être prouvé que  $m$  vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  sont dans une configuration polyvalente si et seulement si entre 7 et 12 d'entre eux sont dans une configuration polyvalente.

## D.2 Preuve du théorème 15

D'après les développements de la section 4.2.2 qui suivent l'énoncé du théorème 14 (théorème de Stiemke), afin de prouver le théorème 15, il suffit de prouver que tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  séparent une matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  (c'est-à-dire séparent les  $m$  colonnes  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n$  de  $\mathbf{W}$ ,  $m > n$ ) si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$ , formés par  $n - 1$  colonnes (linéairement indépendantes)  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ , séparent  $\mathbf{W}$  où  $\text{rank}(\mathbf{W}) = n$ . La condition nécessaire étant évidente, il faut démontrer la condition suffisante. À cette fin, remarquons que les propositions 1 et 2 énoncées ci-dessous sont équivalentes.

**Proposition 1** *Si tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  formés par  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  séparent  $\mathbf{W}$  alors tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  séparent  $\mathbf{W}$ .*

**Proposition 2** *S'il existe un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui supporte  $\mathbf{W}$  alors il existe un hyperplan formé par  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  qui supporte  $\mathbf{W}$ .*

Aussi, nous allons démontrer la proposition 2 en construisant, à partir de l'hyperplan quelconque qui, par hypothèse de la proposition 2, supporte  $\mathbf{W}$ , un hyperplan formé par  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  qui supporte  $\mathbf{W}$ . L'essentiel de cette construction consiste à prouver le théorème suivant.

**Théorème 18** *Soit  $\mathbf{W}$  une matrice de rang  $n$  ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  telle que  $m > n$  et  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$ ,  $\forall i$ . S'il existe un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui supporte  $\mathbf{W}$  et qui contient  $n - k$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  ( $1 < k \leq n$ ) alors il existe un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui supporte  $\mathbf{W}$  et qui contient  $n - k + 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$ .*

Démontrons le théorème 18. Soit  $\mathcal{H}$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui supporte  $\mathbf{W}$  et auquel  $n - k$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  appartiennent. Nous pouvons supposer que ces  $n - k$  colonnes sont  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$ . Soient les vecteurs unitaires  $\mathbf{w}_i^u$  de  $\mathbb{R}^n$  définis par

$$\mathbf{w}_i^u = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (\text{D.13})$$

De plus, soit  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$  un vecteur unitaire orthogonal à  $\mathcal{H}$ . Étant donné que l'hyperplan  $\mathcal{H}$  supporte  $\mathbf{W}$ , nous pouvons supposer que,  $\forall 1 \leq i \leq m$ ,  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{q} \geq 0$  et, par conséquent

$$\mathbf{w}_i^{uT} \mathbf{q} \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m. \quad (\text{D.14})$$

Nommons  $\mathcal{U}$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - k$  engendré par les  $n - k$  vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{w}_1^u, \mathbf{w}_2^u, \dots, \mathbf{w}_{n-k}^u$  ( $\mathcal{U}$  est également un sous-espace de  $\mathcal{H}$ ). Nous noterons

$$\mathcal{U} = \text{span}(\mathbf{w}_1^u, \dots, \mathbf{w}_{n-k}^u). \quad (\text{D.15})$$

Soit  $\mathcal{O} = \mathcal{U}^\perp$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  orthogonal à  $\mathcal{U}$ , c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{b} \in \mathcal{O}, \mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0. \quad (\text{D.16})$$

De plus, on a

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{O}) = n \quad (\text{D.17})$$

donc, étant donné que  $\dim(\mathcal{U}) = n - k$

$$\dim(\mathcal{O}) = k > 1. \quad (\text{D.18})$$

Étant donné que  $\mathbf{q}$  est orthogonal à  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbf{q}$  est également orthogonal à  $\mathcal{U}$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{q} \in \mathcal{O}. \quad (\text{D.19})$$

En outre,  $\mathbb{R}^n$  est somme directe de  $\mathcal{U}$  et de  $\mathcal{O}$ , c'est-à-dire tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de  $\mathcal{U}$  et d'un vecteur de  $\mathcal{O}$ . En particulier, quel que soit  $1 \leq i \leq m$ , on peut écrire

$$\mathbf{w}_i^u = \mathbf{u}_i^\perp + \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i^\perp \in \mathcal{U} \text{ et } \mathbf{u}_i \in \mathcal{O}. \quad (\text{D.20})$$

Avant de continuer la preuve, remarquons que si  $k = n$  alors  $\mathcal{H}$  ne contient aucune colonne  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ ,  $\mathcal{U}$  n'existe pas,  $\mathcal{O} \equiv \mathbb{R}^n$  et pour tout  $i$ ,  $\mathbf{w}_i^u = \mathbf{u}_i$ . Remarquons également que

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad \forall 1 \leq i \leq n - k. \quad (\text{D.21})$$

À présent, supposons qu'il existe des colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ ,  $i > n - k$ , telles que  $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ . Alors, ces colonnes appartiennent à l'hyperplan  $\mathcal{H}$  qui supporte  $\mathbf{W}$ . Étant donné que, par hypothèse, la matrice  $\mathbf{W}$  est de plein rang, ces colonnes sont en nombre limité et il existe au moins  $k$  entiers  $i > n - k$  tel que  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ . Aussi, dans la suite de cette preuve, pour  $i > n - k$ , nous ne considérons que les vecteurs  $\mathbf{w}_i$  tels que  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$  en supposant

$$\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}, \forall i > n - k. \quad (\text{D.22})$$

À présent, travaillons dans  $\mathcal{O}$  et, pour ce faire, définissons les vecteurs unitaires  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{O}$  par

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|}, \forall i > n - k. \quad (\text{D.23})$$

Nommons  $\mathbf{v}_j$ ,  $j > n - k$ , le vecteur de  $\mathcal{O}$  défini par

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{q} = \min_{i > n - k} (\mathbf{v}_i^T \mathbf{q}). \quad (\text{D.24})$$

D'après les équations (D.14), (D.19), (D.20) et (D.23), on a  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{q} \geq 0$  quel que soit  $i > n - k$  et en particulier

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{q} \geq 0. \quad (\text{D.25})$$

En outre, les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  et le vecteur  $\mathbf{q}$  étant des vecteurs unitaires, on a  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{q} \leq 1$ ,  $\forall i > n - k$ . Or,  $\mathbf{v}_j = \mathbf{q}$  si et seulement si  $\mathbf{v}_j^T \mathbf{q} = 1$  et, par conséquent, d'après l'équation (D.24),  $\mathbf{v}_j$  n'est pas égal à  $\mathbf{q}$  sinon  $\text{rank}(\mathbf{W}) < n$  ce qui a été écarté par hypothèse. Ainsi, on a

$$\mathbf{v}_j \neq \mathbf{q}. \quad (\text{D.26})$$

Construisons un sous-espace  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{O}$  qui contient  $\mathbf{v}_j$  et qui supporte tous les vecteurs  $\mathbf{v}_i, \forall i > n - k$ . À cette fin, définissons le sous-espace  $\mathcal{O}'$  de  $\mathcal{O}$  orthogonal à  $\text{span}(\mathbf{v}_j, \mathbf{q})$ . Comme  $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{q}$  et attendu que  $\mathcal{O}$  est de dimension  $k$ , on a

$$\dim(\mathcal{O}') = k - 2. \quad (\text{D.27})$$

$\mathcal{P}$  est alors défini par

$$\mathcal{P} = \text{span}(\mathbf{v}_j) + \mathcal{O}'. \quad (\text{D.28})$$

Mais, par définition de  $\mathcal{O}'$ , on a

$$\text{span}(\mathbf{v}_j) \cap \mathcal{O}' = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{D.29})$$

et, par conséquent,  $\mathcal{P}$  est somme directe de  $\text{span}(\mathbf{v}_j)$  et de  $\mathcal{O}'$

$$\mathcal{P} = \text{span}(\mathbf{v}_j) \oplus \mathcal{O}' \quad (\text{D.30})$$

c'est-à-dire tout vecteur de  $\mathcal{P}$  s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de  $\text{span}(\mathbf{v}_j)$  et d'un vecteur de  $\mathcal{O}'$  et, de plus

$$\dim(\mathcal{P}) = \dim(\text{span}(\mathbf{v}_j)) + \dim(\mathcal{O}'). \quad (\text{D.31})$$

Ainsi, d'après l'équation (D.27),  $\mathcal{P}$  est un sous-espace de  $\mathcal{O}$  de dimension  $k - 1$ . Ainsi,  $\mathcal{O}$  étant de dimension  $k$ , il existe un vecteur non nul  $\mathbf{q}_n \in \mathcal{O}$  qui engendre le supplémentaire orthogonal de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{O}$ , ce vecteur pouvant être choisi unitaire,  $\|\mathbf{q}_n\| = 1$ , et tel que

$$\mathbf{q}_n^T \mathbf{q} > 0. \quad (\text{D.32})$$

En effet, si  $\mathbf{q}_n^T \mathbf{q} = 0$  alors  $\mathbf{q}_n$  appartient à  $\mathcal{O}'$  et  $\mathbf{q}_n$  étant, par définition, orthogonal à  $\mathcal{P}$ ,  $\mathbf{q}_n$  est orthogonal à  $\mathcal{O}'$ , ce qui est absurde. À présent, une grande partie du travail est déjà faite puisqu'il ne reste plus qu'à vérifier, dans un premier temps, que  $\mathcal{P}$  supporte tous les vecteurs  $\mathbf{v}_i, \forall i > n - k$ , et, dans un deuxième temps, que l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}_n$  supporte  $\mathbf{W}$ , cet hyperplan contenant par construction  $n - k + 1$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendants. Afin de vérifier que  $\mathcal{P}$  supporte les vecteurs  $\mathbf{v}_i$ , notons que, par définition de  $\mathbf{q}_n$ , il existe deux scalaires  $\alpha_n$  et  $\alpha_x$  tels que

$$\mathbf{q} = \alpha_n \mathbf{q}_n + \alpha_x \mathbf{x}, \text{ où } \mathbf{x} \in \mathcal{P}. \quad (\text{D.33})$$

De plus, étant donné que  $\mathbf{q}, \mathbf{q}_n$  et  $\mathbf{v}_j$  sont orthogonaux à  $\mathcal{O}'$  et que  $\mathbf{x}$  s'écrit comme la somme d'un vecteur de  $\mathcal{O}'$  et d'un vecteur dirigé par  $\mathbf{v}_j$ , il existe  $\alpha_j$  tel que

$$\mathbf{q} = \alpha_n \mathbf{q}_n + \alpha_j \mathbf{v}_j \quad (\text{D.34})$$

et, étant donné que  $\mathbf{q}_n^T \mathbf{v}_j = 0$

$$\alpha_n = \mathbf{q}_n^T \mathbf{q}, \quad \alpha_j = \mathbf{v}_j^T \mathbf{q}. \quad (\text{D.35})$$

À présent, d'après l'équation (D.24), pour tout  $i > n - k$  on a

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{q} \geq \mathbf{v}_j^T \mathbf{q} \quad (\text{D.36})$$

et, avec les équations (D.32), (D.34) et (D.35)

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{q}_n \geq \frac{\mathbf{v}_j^T \mathbf{q} (1 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j)}{\mathbf{q}_n^T \mathbf{q}}. \quad (\text{D.37})$$

Ainsi, comme  $1 - \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j \geq 0$ ,  $\mathbf{q}_n^T \mathbf{q} > 0$ ,  $\mathbf{v}_j^T \mathbf{q} \geq 0$  et  $\mathbf{v}_j^T \mathbf{q}_n = 0$ ,  $\mathcal{P}$  supporte les vecteurs  $\mathbf{v}_i$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{q}_n \geq 0, \forall i > n - k. \quad (\text{D.38})$$

D'après l'équation (D.23), on peut alors écrire

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{q}_n \geq 0, \forall i > n - k \quad (\text{D.39})$$

et, avec l'équation (D.20), étant donné que  $\mathbf{q}_n \in \mathcal{O}$  on a  $\mathbf{u}_i^{\perp T} \mathbf{q}_n = 0, \forall 1 \leq i \leq m$ . Par conséquent, avec l'équation (D.39), on a aussi  $\mathbf{w}_i^{uT} \mathbf{q}_n \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{q}_n \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m. \quad (\text{D.40})$$

L'équation (D.40) implique que l'hyperplan de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}_n$  supporte  $\mathbf{W}$ . De plus, parce que  $\mathbf{q}_n \in \mathcal{O}$  ( $\mathcal{O} = \mathcal{U}^\perp$ ) on a  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{q}_n = 0, \forall 1 \leq i \leq n - k$ , et, par construction de  $\mathbf{q}_n$ ,  $\mathbf{v}_j^T \mathbf{q}_n = 0$  donc  $\mathbf{w}_j^T \mathbf{q}_n = 0$ . Ainsi, l'hyperplan de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}_n$  contient les  $n - k + 1$  vecteurs  $\mathbf{w}_i, 1 \leq i \leq n - k$  et  $i = j$ , qui sont, de surcroit, linéairement indépendants puisque  $\mathbf{w}_j$  n'appartient pas à  $\mathcal{U}$ . Finalement, l'hyperplan de vecteur orthogonal  $\mathbf{q}_n$  supporte  $\mathbf{W}$  et contient  $n - k + 1$  vecteurs  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendants. La preuve du théorème 18 est complète.

Le théorème 18 prouvé, la proposition 2 l'est pratiquement. En effet, par hypothèse de la proposition 2, il existe un hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^n$  qui supporte  $\mathbf{W}$  où  $\mathbf{W}$  est une matrice (des tenseurs) de plein rang  $n$  ayant  $n$  lignes et  $m$  colonnes  $\mathbf{w}_i, m > n$ . De plus, nous pouvons supposer que  $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}, \forall 1 \leq i \leq m$  et, étant donné que  $\mathcal{H}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ , il ne peut contenir plus de  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendantes. Ainsi, si  $\mathcal{H}$  contient  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendantes, la preuve de la proposition 2 est finie. Sinon,  $\mathcal{H}$  contient  $n - k$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendantes,  $1 < k \leq n$ , et, en appliquant  $k - 1$  fois le théorème 18, on obtient un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui supporte  $\mathbf{W}$  et qui contient  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  linéairement indépendantes. Par conséquent, cet hyperplan est engendré par ces  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  et la proposition 2 est démontrée. Finalement, la proposition 2 étant vraie, la proposition 1 l'est aussi et le théorème 15 est démontré.

### D.3 Test des poses polyvalentes

Cette section présente une méthode permettant de tester si une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle entraîné par câbles appartient à l'EPP. La méthode est basée sur le théorème 15 et sur des résultats présentés dans [94]. En effet, le théorème 15 permet d'adapter une méthode présentée dans [94], dans le cadre du test d'un équilibre statique, au test de l'appartenance d'une pose à l'EPP.

Considérons une pose donnée de l'effecteur d'un mécanisme parallèle à  $n$  ddl entraîné par  $m$  câbles,  $m > n$ . Soit  $\mathbf{W}$  la matrice des torseurs associée à cette pose

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n, \forall 1 \leq i \leq m. \quad (\text{D.41})$$

Dans un premier temps, il faut vérifier si la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est de plein rang, c'est-à-dire si  $\text{rank}(\mathbf{W}) = n$ . En effet, dans le cas contraire, la pose n'est pas polyvalente puisque les torseurs colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  engendrent un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension inférieure ou égale à  $n - 1$ . Ainsi, tout torseur  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  qui n'appartient pas à ce sous-espace ne peut pas être généré par les câbles même si ces derniers pouvaient pousser l'effecteur. Le rang de la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  peut être déterminé en utilisant, par exemple, la décomposition en valeurs singulières [102].

À présent, supposons que la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$  est de plein rang. Alors, d'après le théorème 15, la pose de l'effecteur appartient à l'EPP ou, en d'autres termes, les colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  sont dans une configuration polyvalente si et seulement si tous les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  formés par  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  séparent  $\mathbf{W}$ . Aussi, un test basé sur le théorème 15 consiste à considérer une à une les différentes combinaisons de  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  et à vérifier si les hyperplans définis par ces combinaisons sont tous séparateurs. Si une combinaison de  $n - 1$  colonnes de  $\mathbf{W}$  forme un hyperplan qui n'est pas séparateur, la pose n'appartient pas à l'EPP et le test s'arrête au test de cette combinaison. Si toutes les combinaisons de  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  forment des hyperplans séparateurs, la pose appartient à l'EPP. Remarquons que ce test est plus rapide si la pose n'appartient pas à l'EPP étant donné que le test s'arrête dès qu'un hyperplan non séparateur est rencontré. Par contre, si la pose appartient à l'EPP alors le test est plus lent parce que toutes les combinaisons



de  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  doivent être considérées afin de vérifier que tous les hyperplans définis par ces combinaisons sont séparateurs.

Le test présenté dans le paragraphe précédent nécessite une méthode qui détermine si l'hyperplan formé par  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  est séparateur. Une telle méthode, basée sur la décomposition QR [102], est proposée dans [94]. Présentons et justifions cette méthode. À cette fin, considérons  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ces  $n - 1$  colonnes sont  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$ . Soit  $\mathbf{W}_1$  et  $\mathbf{W}_2$  les matrices définies par

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n & \mathbf{w}_{n+1} & \dots & \mathbf{w}_m \end{bmatrix}. \quad (\text{D.42})$$

La décomposition QR de la matrice  $\mathbf{W}_1$  produit une matrice orthogonale  $\mathbf{Q}$  de dimension  $n$  et une matrice  $\mathbf{R}$  de dimension  $n$  par  $n - 1$  telles que  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{QR}$ , la matrice  $\mathbf{R}$  étant telle que ces éléments  $r_{ij}$  sont nuls quand  $i > j$ . Notons  $\mathbf{R}_{n-1}$  la matrice carrée de dimension  $n - 1$  obtenue de la matrice  $\mathbf{R}$  en supprimant sa dernière ligne. Remarquons que cette matrice est triangulaire supérieure. Les  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$  de  $\mathbf{W}$  sont linéairement indépendantes si et seulement si  $\det(\mathbf{R}_{n-1}) \neq 0$ , c'est-à-dire si et seulement si le produit des éléments de la diagonale de  $\mathbf{R}_{n-1}$  est non nul. Aussi, si  $\det(\mathbf{R}_{n-1}) \neq 0$ , les  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$  de  $\mathbf{W}$  sont linéairement indépendantes et, par conséquent, elles forment un hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^n$  que nous devons tester afin de déterminer s'il est séparateur. À cette fin, nous pouvons utiliser le résultat suivant : l'hyperplan  $\mathcal{H}$  est séparateur si et seulement si le vecteur ligne  $\mathbf{v} = \mathbf{q}_n^T \mathbf{W}_2$  possède un élément positif et un élément négatif, c'est-à-dire, si et seulement si il existe  $j$  et  $k$ ,  $j \neq k$ ,  $n \leq j \leq m$ ,  $n \leq k \leq m$  tels que

$$v_j > 0 \quad \text{et} \quad v_k < 0 \quad (\text{D.43})$$

où  $\mathbf{q}_n$  est la dernière colonne de la matrice  $\mathbf{Q}$  et où  $v_j$  et  $v_k$  sont, respectivement, les éléments  $j$  et  $k$  du vecteur  $\mathbf{v}$ . Afin de justifier ce résultat et en se référant à la section 4.2.2, rappelons que l'hyperplan  $\mathcal{H}$  est séparateur si et seulement si il existe  $j$  et  $k$ ,  $j \neq k$ ,  $n \leq j \leq m$ ,  $n \leq k \leq m$  tels que

$$\text{signe}(\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-1} \ \mathbf{w}_j])) = -\text{signe}(\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-1} \ \mathbf{w}_k])) \neq 0. \quad (\text{D.44})$$

Or, quel que soit  $i$ ,  $n \leq i \leq m$ , on a

$$\mathbf{Q}^T [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-1} \ \mathbf{w}_i] = [\mathbf{Q}^T \mathbf{W}_1 \ \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_i] = [\mathbf{R} \ \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_i]. \quad (\text{D.45})$$

De plus, en développant le déterminant de la matrice carrée  $[\mathbf{R} \ \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_i]$  suivant sa dernière ligne, on obtient

$$\det([\mathbf{R} \ \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_i]) = v_i \det(\mathbf{R}_{n-1}) \quad (\text{D.46})$$

où rappelons que  $\det(\mathbf{R}_{n-1}) \neq 0$ . Alors, on a

$$\det([\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-1} \ \mathbf{w}_i]) = \frac{\det(\mathbf{R}_{n-1})}{\det(\mathbf{Q}^T)} v_i. \quad (\text{D.47})$$

Notons que  $\det(\mathbf{Q}^T) = \pm 1$  puisque la matrice  $\mathbf{Q}$  est orthogonale. Finalement, étant donné que  $\det(\mathbf{R}_{n-1})$  et  $\det(\mathbf{Q}^T)$  sont indépendants de  $i$ , d'après les équations D.44 et D.47, l'hyperplan  $\mathcal{H}$  est séparateur si et seulement si il existe  $j$  et  $k$ ,  $j \neq k$ ,  $n \leq j \leq m$ ,  $n \leq k \leq m$  tels que

$$v_j > 0 \quad \text{et} \quad v_k < 0. \quad (\text{D.48})$$

Résumons la méthode. On vérifie dans un premier temps que la matrice des torseurs  $\mathbf{W}$ , associée à la pose dont l'appartenance à l'EPP est à tester, est de plein rang. Si elle ne l'est pas, la pose n'appartient pas à l'EPP. Si elle l'est, la pose appartient à l'EPP si et seulement si tous les hyperplans formés par  $n - 1$  colonnes linéairement indépendantes de  $\mathbf{W}$  sont séparateurs. Aussi, on considère une à une les différentes combinaisons possibles de  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$ . Pour chacune de ces combinaisons :

- on forme une matrice  $\mathbf{W}_1$  de dimension  $n$  par  $n - 1$  dont les colonnes sont les  $n - 1$   $\mathbf{w}_i$  de la combinaison et on forme une matrice  $\mathbf{W}_2$  dont les colonnes sont les  $m - n + 1$  autres  $\mathbf{w}_i$  (telles que les matrices  $\mathbf{W}_1$  et  $\mathbf{W}_2$  montrées à l'équation D.42).
- On effectue la décomposition QR de  $\mathbf{W}_1 : \mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ . En supprimant sa dernière ligne, on extrait de  $\mathbf{R}$  la matrice carrée  $\mathbf{R}_{n-1}$ . En ne gardant que sa dernière colonne, on extrait de  $\mathbf{Q}$  le vecteur  $\mathbf{q}_n$ .
- Si  $\det(\mathbf{R}_{n-1}) = 0$ , les  $n - 1$  colonnes de  $\mathbf{W}_1$  ne forment pas un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  et on passe à la combinaison de  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  suivante. Sinon,  $\det(\mathbf{R}_{n-1}) \neq 0$ , les  $n - 1$  colonnes de  $\mathbf{W}_1$  forment un hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^n$  et on passe à l'étape suivante.
- On calcule le vecteur ligne  $\mathbf{v} = \mathbf{q}_n^T \mathbf{W}_2$ . Si il existe deux éléments  $v_j$  et  $v_k$  de  $\mathbf{v}$  tels que  $v_j > 0$  et  $v_k < 0$  alors l'hyperplan  $\mathcal{H}$  est séparateur et on passe à la combinaison de  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  suivante. Sinon, l'hyperplan  $\mathcal{H}$  n'est pas séparateur et la pose à tester n'appartient pas à l'EPP.

Si toute les combinaisons de  $n - 1$  colonnes  $\mathbf{w}_i$  de  $\mathbf{W}$  ont été considérées et que tous les hyperplans  $\mathcal{H}$  formés par ces combinaisons sont séparateurs, la pose à tester appartient à l'EPP.

# Annexe E

## Paramètres géométriques des mécanismes

Cette annexe présente les paramètres géométriques des mécanismes illustrant les chapitres 2, 3 et 4.

### E.1 Mécanismes du chapitre 2

Cette section présente les paramètres géométriques des mécanismes illustrant le chapitre 2. Dans le repère de référence fixe par rapport à la base, les composantes du

vecteur position  $\mathbf{a}_i$  du point  $A_i$  sont notées  $a_{ix}$  et  $a_{iy}$ . Dans le repère mobile  $(P, \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  lié à l'effecteur, les composantes du vecteur position  $\mathbf{b}_i$  du point  $B_i$  sont notées  $b_{ix}$  et  $b_{iy}$ .

### E.1.1 Mécanisme de la figure 2.3

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.1. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 2.3, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.1 est  $\phi = 0$  degré.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	0	0
2	$l$	0	$l/10$	0
3	$2l$	0	$4l/5$	0
4	$4l$	0	$l$	0

TAB. E.1 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.3.

### E.1.2 Mécanisme de la figure 2.4

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.2. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = 5l_b/12$ . À la figure 2.4, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.2 est  $\phi = 12.7$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-2l_e/7$	$-l_e/2$
2	$l_b$	0	$2l_e/7$	$-l_e/2$
3	$l_b$	$l_b$	$2l_e/7$	$l_e/2$
4	0	$l_b$	$-2l_e/7$	$l_e/2$

TAB. E.2 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.4.

### E.1.3 Mécanisme de la figure 2.5

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.3. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 2.5, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.3 est  $\phi = 9.5$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/10$	$-l/10$
2	$l$	0	$l/10$	$-l/10$
3	$l$	$l$	$l/10$	$l/10$
4	0	$l$	$-l/10$	$l/10$

TAB. E.3 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.5.

### E.1.4 Mécanisme de la figure 2.8

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.4. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 2.8, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.4 est  $\phi = \pi/8 = 22.5$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/5$	0
2	$l$	0	$l/5$	0
3	$l$	$l$	$l/5$	0
4	0	$l$	$-l/5$	0

TAB. E.4 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.8.

### E.1.5 Mécanisme de la figure 2.11

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.5. Les paramètres  $l$  et  $r$  sont positifs et

$$r = \frac{\sqrt{3}l}{15}. \quad (\text{E.1})$$

À la figure 2.11, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.5 est  $\phi = \pi/16 = 11.25$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/10$	$-r/2$
2	$l$	0	$3l/25$	$-r/2$
3	$l$	$l$	0	$4r/3$
4	0	$l$	0	$4r/3$

TAB. E.5 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.11.

### E.1.6 Mécanisme de la figure 2.20

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.6. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 2.20, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.6 est  $\phi = \pi/16 = 11.25$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/10$	$-l/20$
2	$l$	0	$l/10$	$-l/20$
3	$l$	$l$	$l/10$	$l/20$
4	0	$l$	$-l/10$	$l/20$

TAB. E.6 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.20.

### E.1.7 Mécanisme de la figure 2.23

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.7. Le paramètre  $l$  est positif.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/10$	$l/10$
2	$l$	0	$l/10$	$l/10$
3	$l$	$l$	$l/10$	$-l/10$
4	0	$l$	$-l/10$	$-l/10$

TAB. E.7 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.23.

### E.1.8 Mécanisme de la figure 2.24

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.8. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = l_b/4.82$ . À la figure 2.24, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.8 est  $\phi = 68.75$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l_e/2$	$l_e/4$
2	$l_b$	0	$l_e/2$	$l_e/4$
3	$l_b$	$l_b/1.32$	$l_e/2$	$-l_e/4$
4	0	$l_b/1.32$	$-l_e/2$	$-l_e/4$

TAB. E.8 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 2.24.

## E.2 Mécanismes du chapitre 3

Cette section présente les paramètres géométriques des mécanismes illustrant le chapitre 3. Dans le repère de référence fixe par rapport à la base, les composantes du vecteur position  $\mathbf{a}_i$  du point  $A_i$  sont notées  $a_{ix}$  et  $a_{iy}$ . Dans le repère mobile  $(P, \mathbf{x}', \mathbf{y}')$  lié à l'effecteur, les composantes du vecteur position  $\mathbf{b}_i$  du point  $B_i$  sont notées  $b_{ix}$  et  $b_{iy}$ .



### E.2.1 Mécanisme de la figure 3.5

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.9. Ils ont été obtenus aléatoirement. À la figure 3.5, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.9 est  $\phi = 40$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	-98.273	-57.195	-6.494	-0.266
2	-57.981	-92.351	8.767	-7.523
3	57.045	-87.215	6.040	-8.423
4	23.473	90.336	9.337	1.523
5	54.833	8.377	-5.494	6.096
6	-73.579	55.283	-4.105	0.355

TAB. E.9 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.5 (en mm).

### E.2.2 Mécanisme de la figure 3.6

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.10. L'effecteur possède trois points d'attache qui forment un triangle équilatéral. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = l_b/8$ . À la figure 3.6, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.10 est  $\phi = 10$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	$(l_b/10) \cos(-\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(-\pi/3)$	0	$(-\sqrt{3}/3)l_e$
2	$l_b + (l_b/10) \cos(-2\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(-2\pi/3)$	0	$(-\sqrt{3}/3)l_e$
3	$l_b + (l_b/10) \cos(\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(\pi/3)$	$l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
4	$3l_b/5$	$(\sqrt{3}/2)l_b$	$l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
5	$2l_b/5$	$(\sqrt{3}/2)l_b$	$-l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
6	$(l_b/10) \cos(2\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(2\pi/3)$	$-l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$

TAB. E.10 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.6.

### E.2.3 Mécanisme de la figure 3.7

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.11. Les paramètres  $l$  et  $r$  sont positifs et

$$r = \frac{\sqrt{3}l}{15}. \quad (\text{E.2})$$

À la figure 3.7, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.11 est  $\phi = 10$  degrés.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/10$	$-r/2$
2	$l$	0	$-l/10$	$-r/2$
3	$l$	0	$3l/25$	$-r/2$
4	$l$	$l$	0	$4r/3$
5	0	$l$	0	$4r/3$

TAB. E.11 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.7.

### E.2.4 Mécanisme de la figure 3.11

Le mécanisme montré à la figure 3.11 est le même que celui montré à la figure 3.5. Par conséquent, les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.9. À la figure 3.11, l'orientation de l'effecteur du mécanisme est  $\phi = 0$  degré.

### E.2.5 Mécanisme de la figure 3.16

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.12. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 3.16, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.12 est  $\phi = 0$  degré.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-l/2$	$-l/10$
2	$l$	0	$l/4$	0
3	$2l$	$l/5$	$l/4$	0
4	$l$	$l$	$l/4$	0
5	0	$l$	$-l/4$	$l/20$

TAB. E.12 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.16.

### E.2.6 Mécanisme de la figure 3.17

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.13. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 3.17, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.13 est  $\phi = 0$  degré.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	$l$	$l$	0	0
2	$7l$	$l$	$6l/5$	0
3	$4.5l$	$8l$	$3.5l/5$	$7l/5$
4	$8l$	$8l$	0	0
5	0	$8l$	0	0

TAB. E.13 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.17.

### E.2.7 Mécanisme de la figure 3.18

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.14. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 3.18, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.14 est  $\phi = 0$  degré.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	0	0	$-0.55l$	0
2	$l/2$	0	$l/5$	0
3	$l$	0	$l/5$	0
4	$l$	$l$	$l/5$	0
5	$l/2$	$l$	$l/5$	0
6	0	$l$	$-0.55l$	0

TAB. E.14 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.18.

### E.2.8 Mécanisme de la figure 3.24

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.15. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = l_b/8$ . L'effecteur possède trois points d'attache qui forment un triangle équilatéral. Les câbles du mécanisme se croisent. À la figure 3.24, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.15 est  $\phi = 0$  degré.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	$(l_b/10) \cos(-\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(-\pi/3)$	$-l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
2	$l_b + (l_b/10) \cos(-2\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(-2\pi/3)$	$l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
3	$l_b + (l_b/10) \cos(\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(\pi/3)$	0	$(-\sqrt{3}/3)l_e$
4	$3l_b/5$	$(\sqrt{3}/2)l_b$	$-l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
5	$2l_b/5$	$(\sqrt{3}/2)l_b$	$l_e/2$	$(\sqrt{3}/6)l_e$
6	$(l_b/10) \cos(2\pi/3)$	$(l_b/10) \sin(2\pi/3)$	0	$(-\sqrt{3}/3)l_e$

TAB. E.15 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.24.

### E.2.9 Mécanisme de la figure 3.29

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.16. Le paramètre  $l$  est positif. À la figure 3.29, l'orientation de l'effecteur du mécanisme défini au tableau E.16 est  $\phi = 0$  degré.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$
1	$l$	$l$	0	$-l/10$
2	$7l$	$l$	$6l/5 + l/100$	0
3	$4.5l$	$8l$	$3.5l/5$	$7l/5$
4	$8l$	$8l$	0	0
5	0	$8l$	$-l/10$	0

TAB. E.16 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 3.29.

### E.3 Mécanismes du chapitre 4

Cette section présente les paramètres géométriques des mécanismes illustrant le chapitre 4. Dans le repère de référence fixe par rapport à la base, les composantes du vecteur position  $\mathbf{a}_i$  du point  $A_i$  sont notées  $a_{ix}$ ,  $a_{iy}$  et  $a_{iz}$ . Dans le repère mobile  $(P, \mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$  lié à l'effecteur, les composantes du vecteur position  $\mathbf{b}_i$  du point  $B_i$  sont notées  $b_{ix}$ ,  $b_{iy}$  et  $b_{iz}$ .

#### E.3.1 Mécanisme de la figure 4.1

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.17. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = l_b/10$ .

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$a_{iz}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$
1	$.9l_b$	0	$.7l_b$	$-l_e$	$-l_e$	0
2	$1.1l_b$	0	$.7l_b$	$l_e$	$-l_e$	0
3	0	$1.8l_b$	$.7l_b$	$-l_e$	$-l_e$	0
4	0	$2l_b$	$.7l_b$	0	$l_e$	0
5	$2l_b$	$1.8l_b$	$.7l_b$	$l_e$	$-l_e$	0
6	$2l_b$	$2l_b$	$.7l_b$	0	$l_e$	0
7	$l_b$	$l_b$	0	0	0	0

TAB. E.17 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 4.1.

### E.3.2 Mécanisme de la figure 4.7

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.18. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = 2l_b/25$ . L'effecteur du mécanisme possède trois points d'attache. En effet, les points  $B_1$  et  $B_4$  sont confondus, les points  $B_2$  et  $B_3$  sont confondus et les points  $B_5$ ,  $B_6$  et  $B_7$  sont confondus.

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$a_{iz}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$
1	0	0	$l_b$	$-l_e/2$	0	$l_e/4$
2	$l_b$	0	$l_b$	$l_e/2$	0	$l_e/4$
3	$l_b$	$l_b$	$l_b$	$l_e/2$	0	$l_e/4$
4	0	$l_b$	$l_b$	$-l_e/2$	0	$l_e/4$
5	0	0	$l_b$	0	0	$l_b$
6	$l_b$	0	$l_b$	0	0	$l_b$
7	$l_b/2$	$l_b$	$l_b$	0	0	$l_b$

TAB. E.18 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 4.7.

### E.3.3 Mécanisme de la figure 4.9

Les paramètres géométriques du mécanisme sont définis au tableau E.19. Les paramètres  $l_b$  et  $l_e$  sont positifs et  $l_e = l_b/10$ .

câble	$a_{ix}$	$a_{iy}$	$a_{iz}$	$b_{ix}$	$b_{iy}$	$b_{iz}$
1	0	0	0	$-l_e$	0	$l_e$
2	$2l_b$	0	0	$l_e$	0	$l_e$
3	$2l_b$	$2l_b$	0	$l_e$	0	$l_e$
4	0	$2l_b$	0	$-l_e$	0	$l_e$
5	0	0	$.7l_b$	0	$-l_e$	$-l_e$
6	$2l_b$	0	$.7l_b$	0	$-l_e$	$-l_e$
7	$2l_b$	$2l_b$	$.7l_b$	0	$l_e$	$-l_e$
8	0	$2l_b$	$.7l_b$	0	$l_e$	$-l_e$

TAB. E.19 – Paramètres géométriques du mécanisme montré à la figure 4.9.