

RÉMI RICARD

**COMPENSATION DYNAMIQUE DE MÉCANISMES  
PARALLÈLES**

Thèse présentée

à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de doctorat en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2006

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 Les problèmes liés à la non compensation . . . . .	6
1.2 Formulation mathématique du problème . . . . .	9
1.3 La compensation statique . . . . .	10
1.4 La compensation dynamique . . . . .	12
1.5 Objectifs et contributions . . . . .	15
<b>2 Compensation dynamique</b>	<b>16</b>
2.1 Compensation du moment cinétique . . . . .	16
<b>3 Analyse de la compensation dynamique des mécanismes à quatre barres</b>	<b>18</b>
3.1 Mécanisme à quatre barres . . . . .	18
3.2 Équation du moment cinétique des mécanismes à quatre barres compensés statiquement . . . . .	20
3.2.1 Conditions générale de compensation dynamique . . . . .	23

<b>4 Mécanisme à quatre barres général</b>	<b>25</b>
4.1 Simplification du moment cinétique . . . . .	25
4.1.1 Simplification de la variable $V$ du moment cinétique . . . . .	27
4.1.2 Simplification de la variable $W$ du moment cinétique . . . . .	28
4.1.3 Équation simplifiée du moment cinétique . . . . .	28
4.2 Expression du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée . .	29
4.2.1 Élimination des variables intermédiaires . . . . .	29
4.2.2 Obtention de l'expression en fonction de la variable d'entrée . .	31
4.3 Dérivation des équations de contraintes . . . . .	32
4.3.1 Familles de solutions . . . . .	33
4.4 Analyse des familles de solutions . . . . .	35
4.4.1 Analyse de la première famille de solutions . . . . .	35
4.4.1.1 Comportement à vérifier . . . . .	37
4.4.2 Analyse de la deuxième famille de solution . . . . .	37
4.4.2.1 Domaine des solutions pour le cas général . . . . .	40
4.5 Vérification . . . . .	43
4.5.1 Vérification de la compensation statique . . . . .	44
4.5.2 Vérification de la compensation dynamique . . . . .	45
4.5.2.1 Vérification à l'aide des équations de Lagrange . . . . .	45
4.5.2.2 Vérification selon la méthode de Newton . . . . .	50
4.6 Conclusion . . . . .	56
<b>5 Mécanisme à quatre barres : Cas particuliers</b>	<b>57</b>
5.1 Cas spéciaux de la compensation statique . . . . .	58
5.2 Simplification de $Y_1$ . . . . .	58
5.2.1 Simplification de $Y_1$ en sortant un carré parfait . . . . .	59
5.2.2 Simplification de $Y_1$ en sortant un $C_1^2$ . . . . .	62
5.3 Redérivation des équations de compensation statique . . . . .	65
5.3.1 Redérivation des équations de compensation statique pour le cas $Y1-CP_1$ . . . . .	66
5.3.2 Redérivation des équations de compensation statique pour le cas $Y1-CP_2$ . . . . .	69
5.4 CCD lorsque $Y_1$ est un carré parfait et que $l_1 = l_3$ . . . . .	71
5.4.1 Équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée	71
5.4.2 Dérivation des équations de contraintes . . . . .	72
5.4.2.1 Familles de solutions . . . . .	72
5.4.3 Analyse des familles de solutions . . . . .	73

5.4.3.1	Analyse de la première famille de solution . . . . .	73
5.4.3.2	Analyse de la deuxième famille de solution . . . . .	74
5.4.4	Comportement à vérifier . . . . .	75
5.4.5	Domaine de solution pour le cas $M_4B-Y_{CP_1}$ . . . . .	77
5.4.6	Vérification . . . . .	78
5.4.6.1	Vérification à l'aide des équations de Lagrange . . . . .	79
5.4.6.2	Vérification à l'aide des équations de Newton-Euler . . . . .	79
5.5	CCD lorsque $Y_1$ est un carré parfait et que $l_1 = l_2$ . . . . .	80
5.5.1	Équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée . . . . .	81
5.5.2	Dérivation des équations de contrainte . . . . .	82
5.5.2.1	Familles de solutions . . . . .	83
5.5.3	Analyse des familles de solutions . . . . .	84
5.5.3.1	Analyse de la première famille de solution . . . . .	84
5.5.3.2	Analyse de la deuxième famille de solution . . . . .	84
5.5.4	Comportement à vérifier . . . . .	86
5.5.5	Domaine des solutions pour le cas $M_4B-Y_{CP_2}$ . . . . .	87
5.5.6	Vérification . . . . .	87
5.5.6.1	Vérification à l'aide des équations de Lagrange . . . . .	88
5.5.6.2	Vérification à l'aide des équations de Newton-Euler . . . . .	89
5.6	CCD lorsqu'on sort un facteur de $Y_1$ . . . . .	91
5.6.1	Dérivation des équations de contrainte . . . . .	92
5.6.1.1	Familles de solutions . . . . .	93
5.6.2	Analyse des familles de solutions . . . . .	94
5.6.2.1	Analyse de la première famille de solutions . . . . .	94
5.6.2.2	Analyse de la deuxième famille de solutions . . . . .	94
5.6.2.3	Analyse de la troisième famille de solutions . . . . .	95
5.6.3	Discussion . . . . .	95
5.7	Conclusion . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Discussions et observations</b> . . . . .	<b>97</b>
6.1	Mécanisme à quatre barres versus corps rigide . . . . .	97
6.1.1	Exemples de <i>corps rigides</i> . . . . .	100
6.2	Discussion sur la position de l'actionneur . . . . .	101
6.2.1	Équation de Newton en 3D . . . . .	102
6.2.2	Ajustement des équations . . . . .	103
6.2.3	Exemples . . . . .	104
6.3	Conclusion . . . . .	106

<b>7</b>	<b>Compensation dynamique appliquée aux mécanismes à cinq barres</b>	<b>107</b>
7.1	Équation du moment cinétique des mécanismes à cinq barres . . . . .	108
7.1.1	Utilisation de la compensation statique . . . . .	110
7.1.2	Simplification de la variable $V$ du moment cinétique . . . . .	111
7.1.3	Simplification de la variables $W$ du moment cinétique . . . . .	112
7.2	Équation du moment cinétique des mécanismes à cinq barres compensés statiquement . . . . .	112
7.3	Équation du moment cinétique en fonction des variables d'entrée . . . . .	113
7.4	Obtention de l'équation en fonction des variables d'entrée . . . . .	115
7.5	Obtention de l'équation en fonction des variables d'entrée lorsque $I_a =$ $I_b = 0$ . . . . .	116
7.6	Analyse de la famille de solution M5b-1 . . . . .	117
7.7	Analyse de la validité de l'ajout de contre-rotations . . . . .	119
7.7.1	Analyse de la validité de l'ajout d'une contre-rotation . . . . .	119
7.7.2	Ajout d'une contre-rotation sur la deuxième articulation . . . . .	120
7.7.3	Ajout d'une contre-rotation sur la troisième articulation . . . . .	121
7.7.4	Analyse de la validité de l'ajout de deux contre-rotations . . . . .	122
7.7.4.1	Ajout de contre-rotations sur les articulations un et deux	123
7.7.4.2	Ajout de contre-rotations sur les articulations deux et trois . . . . .	125
7.7.4.3	Ajout de contre-rotations sur les articulations trois et quatre . . . . .	126
7.7.5	Analyse de la validité de l'ajout de trois contre-rotations . . . . .	127
7.7.5.1	Ajout de contre-rotations sur les articulations un, deux et trois . . . . .	128
7.7.5.2	Ajout de contre-rotations sur les articulations un, deux et quatre . . . . .	130
7.8	Conclusion . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Applications</b>	<b>133</b>
8.1	Ajout d'un effecteur . . . . .	134
8.2	Ajout d'un corps rigide à une membrure . . . . .	136
8.2.1	Ajout d'un mécanisme à quatre barres à une membrure . . . . .	136
8.3	Compensation dynamique de mécanismes plans à $n$ ddl . . . . .	137
8.3.1	Exemple de mécanisme plan à trois ddl . . . . .	141
8.4	Création d'un mécanisme parallèle à partir de modules . . . . .	148
8.4.1	Cascade des paramètres physiques . . . . .	151

8.4.2	Plate-forme . . . . .	152
8.4.3	Pattes . . . . .	155
8.4.4	Problème géométrique inverse (PGI) . . . . .	156
8.4.5	Vérification de la compensation dynamique . . . . .	160
8.5	Mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté ( <i>PP3</i> ) . . . . .	160
8.5.1	<i>PP3</i> dont les modules sont attachés à $l_{1,1,k}$ et $l_{1,2,k}$ ( <i>PP3-11</i> ) . . . . .	161
8.5.1.1	Paramètres du mécanisme <i>PP3-11</i> . . . . .	163
8.5.1.2	Problème géométrique inverse (PGI) . . . . .	166
8.5.1.3	Vérification de la compensation dynamique . . . . .	166
8.5.2	<i>PP3</i> dont le deuxième module est attaché à $l_{3,1,k}$ et $l_{1,2,k}$ ( <i>PP3-31</i> ) . . . . .	172
8.5.2.1	Paramètres du mécanisme <i>PP3-31</i> . . . . .	174
8.5.2.2	Problème géométrique inverse (PGI) . . . . .	176
8.5.2.3	Vérification de la compensation dynamique . . . . .	176
8.6	Conclusion . . . . .	180
<b>9</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>182</b>
9.1	Compensation dynamique . . . . .	183
9.1.1	Mécanismes à quatre barres . . . . .	183
9.1.2	Mécanisme à cinq barres . . . . .	183
9.1.3	Mécanismes à plusieurs degrés de liberté . . . . .	184
9.2	Travaux futurs . . . . .	184
9.2.1	Optimisation . . . . .	185
9.2.2	Compensation dynamique en 3D . . . . .	186
9.2.2.1	Utilisation de mécanismes à quatre barres plan . . . . .	186
9.2.2.2	Mécanismes à quatre barres spatiaux . . . . .	187
	<b>Annexes</b> . . . . .	<b>195</b>
<b>A</b>	<b>Résumé des CCD et des familles de solution</b> . . . . .	<b>196</b>
A.1	Contraintes de compensation dynamique (CCD) . . . . .	197
A.2	Familles de solutions simplifiant $Y_1$ . . . . .	197
<b>B</b>	<b>Définition de l'opérateur <math>\boxtimes</math></b> . . . . .	<b>201</b>
<b>C</b>	<b>Écriture des angles intermédiaires en fonction de <math>\theta_3</math></b> . . . . .	<b>204</b>
<b>D</b>	<b>Coefficients de l'équation (7.57)</b> . . . . .	<b>207</b>

# Liste des tableaux

4.1	<i>Contraintes de Compensation Dynamique du cas général (noté <math>M_4B-G</math>)</i>	40
4.2	Variables définissant un mécanisme à quatre barres . . . . .	54
4.3	Valeurs de la trajectoire du mécanisme. . . . .	55
4.4	Forces et moments internes et externes calculés pour le mécanisme à quatre barres défini aux tableaux 4.2 et 4.3 . . . . .	55
5.1	<i>Contraintes de Compensation Dynamique lorsque <math>Y_1</math> est un Carré Parfait et <math>l_1 = l_3</math> (noté <math>M_4B-Y_{CP_1}</math>)</i> . . . . .	76
5.2	Variables définissant un mécanisme à quatre barres de la famille $Y1-CP_1$	80
5.3	Valeurs de la trajectoire d'un mécanisme de la famille $M_4B-Y_{CP_1}$ . . . . .	81
5.4	Forces et moments internes et externes calculés pour le mécanisme à quatre barres défini aux tableaux 5.2 et 5.3. . . . .	81
5.5	<i>Contraintes de Compensation Dynamique lorsque <math>Y_1</math> est un Carré Parfait et <math>l_1 = l_2</math> (noté <math>M_4B-Y_{CP_2}</math>)</i> . . . . .	86
5.6	Variables définissant un mécanisme à quatre barres de la famille $M_4B-Y_{CP_2}$	90
5.7	Valeurs de la trajectoire d'un mécanisme de la famille $M_4B-Y_{CP_2}$ . . . . .	90
5.8	Forces et moments internes et externes calculés pour le mécanisme à quatre barres défini aux tableaux 5.6 et 5.7 . . . . .	91
6.1	Exemples de mécanismes à quatre barres se comportant comme des corps rigides . . . . .	101
6.2	Exemples de configuration des corps rigides . . . . .	101
6.3	Paramètres des corps rigides résultants. . . . .	102

6.4	Variables définissant un mécanisme à quatre barres, * variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 4.4.2 . . . . .	105
6.5	Variables définissant le comportement dynamique du mécanisme à quatre barres, * variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 4.2.1	105
6.6	Forces et Moments en fonction de la position de l'actionneur . . . . .	106
8.1	Variables définissant le 3 <sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5 . .	143
8.2	Valeurs utilisées pour la vérification à l'aide de la méthode de Newton pour le module 3. . . . .	143
8.3	Variables définissant le 2 <sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. .	145
8.4	Valeurs utilisées pour la vérification à l'aide de la méthode de Newton pour le module 2. . . . .	146
8.5	Variable définissant le 1 <sup>er</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. .	147
8.6	Valeurs utilisées pour la vérification à l'aide de la méthode de Newton pour le module 3. . . . .	147
8.7	Paramètres pour les masses équivalentes du mécanisme <i>PP3-11</i> . . . . .	164
8.8	Variables définissant le 2 <sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. .	165
8.9	Variables définissant le 1 <sup>er</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. .	165
8.10	Paramètres pour le PGI du mécanisme <i>PP3-11</i> avec $t=0.85$ . . . . .	167
8.11	Accélération pour les corps du mécanisme <i>PP3-11</i> avec $t=0.85$ . . . . .	168
8.12	Forces sur les membrures du mécanisme <i>PP3-11</i> lorsque $t=0.85$ . . . . .	171
8.13	Forces aux points d'attache des pattes et de la plate-forme et moments appliqués aux pattes entre $d_{1,k}$ et $l_{3,1,k}$ lorsque $t=0.85$ pour le mécanisme <i>PP3-11</i> . . . . .	171
8.14	Paramètres pour les masses équivalentes du mécanisme <i>PP3-31</i> . . . . .	174
8.15	Variables définissant le 2 <sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.18. Les variables marquées d'un * sont calculées à l'aide de la solution $M4B-Y_{CP_1}$ (Tab. A.2) et $d_{2,k} = 3m$ . . . . .	175
8.16	Variables définissant le 1 <sup>er</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.18. Les variables marquées d'un * sont calculées à l'aide de la solution $M4B-Y_{CP_1}$ (Tab. A.2) et $d_{1,k} = 5m$ . . . . .	175
8.17	Paramètres pour le PGI du mécanisme <i>PP3-11</i> avec $t=0.85$ . . . . .	177
8.18	Accélération pour les corps du mécanisme <i>PP3-31</i> avec $t=\frac{1}{3}$ . . . . .	179
8.19	Forces sur les membrures du mécanisme <i>PP3-31</i> lorsque $t=\frac{1}{3}$ . . . . .	181



8.20	Forces aux points d'attache des pattes et de la plate-forme et moments appliqués aux pattes entre $d_{1,k}$ et $l_{3,1,k}$ lorsque $t=\frac{1}{3}$ pour le mécanisme $PP3-31$ . . . . .	181
A.1	Tableau regroupant les numéros des équations des CCD. . . . .	198
A.2	Regroupement des différentes ensemble de CCD. . . . .	199
A.3	Regroupement familles de solutions pour $Y_1$ . . . . .	200

# Liste des figures

1.1	Marteau-piqueur (tiré de Artville (Photodisc) Libre de Droits) . . . . .	7
1.2	Télescope (courtoisie de l’Observatoire du mont Wilson) . . . . .	8
1.3	Poignée de main dans l’espace (courtoisie de l’Agence spatiale canadienne)	8
1.4	Mécanisme parallèle à 3 ddl, statiquement équilibré . . . . .	11
1.5	Manipulateur hybride équilibré statiquement. . . . .	12
3.1	Mécanisme à quatre barres. . . . .	20
3.2	Géométrie d’un mécanisme à quatre barres. . . . .	21
4.1	Modes d’assemblage d’un mécanisme à quatre barre. . . . .	31
4.2	Mécanisme à quatre barres défini par les contraintes $M_4B-G$ (Tab. 4.1).	41
4.3	Exemple de domaine des solutions pour l’ensemble de solution du méca- nisme général ( $M_4B-G$ ) . . . . .	42
4.4	Déplacement virtuel d’un mécanisme à quatre barres. . . . .	46
4.5	Forces et moments entre la base et le mécanisme. . . . .	51
4.6	Diagramme des corps libres des différentes membrures. . . . .	51
5.1	Solutions physiques inacceptables pour le cas $Y1-CP_1$ . . . . .	69
5.2	Exemple de domaine des solutions pour l’ensemble de solution $M_4B-Y_{CP_1}$ .	78
5.3	Mécanisme à quatre barres de la famille $M_4B-Y_{CP_1}$ . . . . .	82
5.4	Exemple de domaine des solutions pour l’ensemble de solution $M_4B-Y_{CP_2}$ .	88
5.5	Mécanisme à quatre barres de la famille $M_4B-Y_{CP_2}$ . . . . .	91
6.1	Paramètres d’un module fait d’un mécanisme à quatre barres . . . . .	98

7.1	Mécanisme à cinq barres. . . . .	108
7.2	Géométrie du mécanisme à cinq barres. . . . .	109
8.1	Mécanisme à quatre barres et effecteur. . . . .	134
8.2	Mécanisme à quatre barres greffé à une membrure . . . . .	138
8.3	Masse ponctuelle ajoutée à une membrure . . . . .	138
8.4	Paramètres décrivant deux modules superposés. . . . .	140
8.5	Mécanisme sériel plan à trois degré de liberté dynamiquement équilibré composé de mécanismes à quatre barres. . . . .	142
8.6	Structures composant un mécanisme parallèle. . . . .	150
8.7	Mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté général composé de mécanismes à quatre barres. . . . .	151
8.8	Paramètres décrivant les relation entre la plate-forme et une des ses pattes (patte $k$ ) . . . . .	154
8.9	Exemples de mécanismes plans pleinement parallèles à trois degrés de liberté. . . . .	155
8.10	Paramètres pour le problème géométrique inverse d'une patte d'un mé- canisme à quatre barres. . . . .	158
8.11	Exemples de mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté. . . .	161
8.12	Schéma du mécanisme ( $PP3-11$ ). . . . .	162
8.13	$PP3$ dont le deuxième module est attaché à $l_{1,1,k}$ ( $PP3-11$ ). . . . .	163
8.14	Configuration du mécanisme ( $PP3-11$ ) selon les paramètres des sections 8.5.1.1 et 8.5.1.2. . . . .	168
8.15	Configuration du mécanisme ( $PP3-11$ ) selon les mêmes paramètres que la figure 8.14 mais avec des $t$ différents. . . . .	169
8.16	Diagrammes des corps libres pour une patte et pour la plate-forme du mécanisme ( $PP3-11$ ). . . . .	170
8.17	Schéma du mécanisme ( $PP3-31$ ). . . . .	172
8.18	$PP3$ dont le deuxième module est attaché à $l_{3,1,k}$ ( $PP3-31$ ). . . . .	173
8.19	Configuration du mécanisme ( $PP3-31$ ) selon les paramètres des sections 8.5.2.1 et 8.5.2.2 . . . . .	178
8.20	Configuration du mécanisme ( $PP3-31$ ) selon les mêmes paramètres que la figure 8.19 mais avec des $t$ différents. . . . .	179
8.21	Diagramme des corps libres pour une patte et pour la plate-forme du mécanisme ( $PP3-31$ ). . . . .	180
9.1	Mécanisme à quatre barres dynamiquement équilibrés . . . . .	185

9.2	Prototype tiré de Foucault et Gosselin [2004] . . . . .	186
9.3	Prototype physique tiré de Wu et Gosselin [2004] . . . . .	187

# Résumé

Cette thèse présente une nouvelle approche qui permet la compensation dynamique de mécanismes à quatre barres, c'est-à-dire l'annulation de la somme des forces et moments qu'un mécanisme exerce sur son environnement. Depuis plus de trois décennies des chercheurs se penchent sur le problème de la compensation. Les premières recherches n'ont abordé que le problème de la compensation statique. Par la suite, les chercheurs ont commencé à attaquer le problème de la compensation dynamique tout en le simplifiant en imposant une vitesse constante. Suivant une évolution naturelle, le problème abordé est devenu de plus en plus général mais les mécanismes qui répondaient aux attentes sont devenus eux aussi de plus en plus complexe car on leurs greffait des contrepoids, des contre-rotations, des pantographes. De plus, les conditions trouvées permettant la compensation dynamique étaient souvent suffisantes mais pas toujours nécessaires.

L'objectif de cette thèse est de trouver des contraintes de compensations dynamiques (CCD) exprimées en fonctions des paramètres physiques, qui soient nécessaires et suffisantes, sans rien ajouter au mécanisme. Un mécanisme simple sera donc utilisé pour faire la démonstration qu'il est possible de trouver des CCD nécessaires et suffisantes. L'analyse démontrera qu'il existe trois ensembles de CCD permettant la compensation dynamique des mécanismes à quatre barres. Une vérification de ces CCD faite d'une façon analytique à l'aide des équations de Lagrange et d'une façon numérique à l'aide de la méthode de Newton prouverons la validité des CCD. Par la suite, des

mécanismes à cinq barres seront étudiés, par contre cette analyse sera moins fructueuse puisque les résultats démontreront que les mécanismes à cinq barres doivent avoir trois contre-rotations pour être compensés dynamiquement.

Finalement, les mécanismes à quatre barres compensés dynamiquement serviront de modules pour construire des mécanismes complexes compensés dynamiquement. Des mécanismes sériels plans ainsi que des mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté seront présentés.

Cette thèse a donc démontré qu'il était possible d'établir des contraintes de compensation dynamique nécessaires et suffisantes pour des mécanismes à quatre barres. De plus, la démonstrations a été faites que des mécanismes plan à trois degrés de liberté peuvent eux aussi être compensés dynamiquement lors qu'ils sont construits à partir de mécanismes à quatre barres. Cela met donc la première pierre à la voie qui pourrait conduire au développement de mécanismes spatiaux.

# Avant-propos

Cette aventure a commencé il y a bien longtemps lorsque mon directeur de thèse, le Professeur Clément Gosselin m'a proposé un très intéressant sujet. Ayant fait mon mémoire sous sa supervision, je savais que je pouvais compter sur lui pour me diriger, me motiver et me dire comment surmonter les obstacles qui viendraient à ma rencontre. Tout au long de ce périple, il a fait tout cela et même encore plus. Je lui serai donc toujours reconnaissant pour le temps qu'il m'a consacré et la confiance qu'il m'a portée.

Ce genre de voyage ne se fait pas sans compagnons. Les membres du *laboratoire de robotique*, les anciens comme les nouveaux car je les ai tous côtoyés, ont su apporter les moments de détente et d'entraide nécessaires à toute épopée. Plus particulièrement Pierre Dupont, Pascale Lê-Huu et Sylvain Lemieux m'ont permis d'entretenir mes cellules grises par les innombrables parties d'échecs. Boris Mayer-St-Onge s'est occupé de mes muscles en les maltraitant au Judo. Thierry Laliberté m'a démontré que mes équations fonctionnaient en construisant des prototypes à partir de canettes de *Sprite*.

Cette traversée de longue haleine ne s'est pas faite sans sacrifices. Ces sacrifices partagés par ma conjointe Pascale et mes enfants Dominic et Élianne, qui m'ont poussé et permit de devenir ermite pour compléter le dernier droit, sachant que nous allions nous retrouver à l'autre bout.

Cette expédition part d'un rêve qui a été entretenue par mes parents quand je leurs ai dit du haut de mes quatre ans que : *Quand je serai grand je serai un savant.*

Alors à tous ceux qui m'ont croisé sur mon parcours, je vous remercie de m'avoir saluer, parler, interroger, renseigner car vous avez créer les évènements qui ont fait de ce voyage, un beau voyage.

Il ne me reste plus qu'à sortir les diapositives et à vous dire : *Installez vous confortablement je vais vous raconter une histoire...*



# Chapitre 1

## Introduction

La compensation dynamique consiste, comme son nom l'indique, à compenser les forces et moments qu'un mécanisme en mouvement exerce sur sa base, ou, d'un point de vue plus général, compenser les forces et moments qu'un objet en mouvement exerce sur son environnement.

Lorsqu'on marche ou court, on exerce une force sur le sol/base pour se propulser vers l'avant. Cette force crée des perturbations qui affectent de diverses façons son environnement. La croyance populaire veut que les militaires, conscients de ce problème, demandent aux régiments qui passent sur un pont de briser le pas pour ne pas induire de vibrations dans le pont et causer son écroulement si, par malchance, les vibrations tombaient sur les fréquences naturelles du pont. C'est une façon très imagée de conscientiser les gens au problème.

Le même principe se présente pour les mécanismes. On a un certain nombre de membrures reliées entre elles, bougeant les unes par rapport aux autres selon la configuration du mécanisme. Le mouvement du mécanisme peut être dû à une force ou un couple interne ou externe au mécanisme. Puisque le mécanisme est rattaché à une base, celle-ci ressent des forces et des moments aux points d'attache avec le mécanisme. La compensation dynamique consiste donc à éliminer ou du moins à réduire les forces et moments sur la base car cela peut causer bien des problèmes comme on le verra dans la section 1.1.

## 1.1 Les problèmes liées à la non compensation

Les problèmes découlants de mécanismes non compensés affectent la vie des gens tous les jours. Une des conséquences les plus visibles est la génération de vibrations qui peuvent altérer la durée de vie des mécanismes et augmenter le niveau de bruit généré par ceux-ci [Bagci, 1982; Lowen *et al.*, 1983; Ricard et Gosselin, 2000].

Le corps humain subit très mal les effets pervers découlant des vibrations, que ce soit les vibrations causées par le marteau-piqueur (Fig. 1.1) qui peut entraîner le phénomène de Raynaud [Lasfargues, 1990] ou que ce soit l'arrière train qui devient ankylosé après plusieurs heures de voiture [Boileau et Rakheja, 2000]. Ces manifestations des vibrations sont celles qui ont le plus d'incidences pour le commun des mortels mais les problèmes découlants des vibrations se retrouvent dans toutes les sphères de l'activité humaine.

Dans l'aviation, l'usure des pièces due à la vibration est prise très au sérieux car la vie de centaines de gens dépend du bon fonctionnement de toutes les composantes de l'avion. C'est pourquoi les supports de moteur en élastomère doivent être changés après 15 000 heures d'utilisation.

L'astrophysique ainsi que les sciences spatiales se retrouvent, plus que souvent, à subir les effets de la non compensation. Lors de la conception des observatoires et télescopes, il faut tenir compte des vibrations causées par le déplacement et le changement d'orientation du miroir secondaire. Ces changements sont habituellement effectués à hautes fréquences pour permettre la correction des perturbations causées par l'atmosphère. Les vibrations peuvent être atténuées par le système de contrôle ou par une



FIG. 1.1 – Marteau-piqueur (tiré de Artville (Photodisc) Libre de Droits)

conception plus robuste de la structure de support. Cela n'est habituellement pas parfait et des résidus de ces vibrations viennent affecter la clarté des images recueillies par ces télescopes [Coudé du Foresto *et al.*, 1997] (Fig. 1.2). Les satellites de communication doivent maintenir un lien constant avec leur base. Ils doivent également maintenir les panneaux solaires à un angle qui maximise l'efficacité de ces panneaux. Les changements d'orientation des antennes et des panneaux créent des perturbations qui sont habituellement compensées par des fusées de positionnement et des roues d'inertie. Par contre, ces deux façons de faire utilisent de l'énergie et diminuent la durée de vie utile du satellite à moins qu'on puisse le ravitailler [Legnani *et al.*, 1999; Abu-Abed et Papadopoulos, 1994]. Les manipulateurs spatiaux sur la navette spatiale américaine ou sur la station spatiale créent des perturbations dans le positionnement de leur base, qui sont

en réalité des corps libres puisqu'ils flottent sans contrainte dans l'espace (Fig. 1.3). Jusqu'à maintenant, ces perturbations faisaient partie du *bruit de fond* tout comme les perturbations causées par le déplacement des astronautes à l'intérieur de la navette ou de la station. Cela ne sera pas toujours le cas si on change le rapport des masses impliquées ou qu'on diminue le temps alloué aux diverses tâches que doivent effectuer les manipulateurs [Dubowsky et Torres, 1991; Papadopoulos et Dubowsky, 1991].

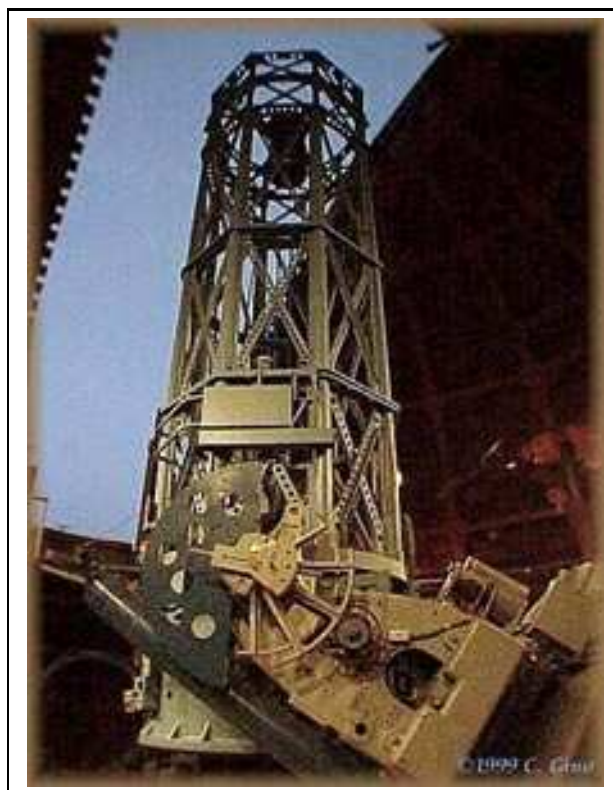


FIG. 1.2 – Télescope (courtoisie de l'Observatoire du mont Wilson)



FIG. 1.3 – Poignée de main dans l'espace (courtoisie de l'Agence spatiale canadienne)

Les problèmes causés par la non compensation sont importants et se retrouvent dans plusieurs sphères de l'activité humaine. De plus, ils affectent un nombre important de personnes. C'est pourquoi, plusieurs chercheurs se sont attaqués aux problèmes. La section 1.4 présentera les diverses approches employées pour obtenir une compensation dynamique.

## 1.2 Formulation mathématique du problème

On a mentionné en introduction, que la compensation dynamique consistait à compenser les forces et moments qu'un mécanisme exerce sur sa base.

Si on considère le mécanisme comme un corps rigide ayant des caractéristiques physiques, c'est-à-dire masse, centre de masse, moment d'inertie, etc, bien définies, on peut formuler les deux équations mathématiques suivantes :

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m_t \mathbf{v})}{dt} \quad (1.1)$$

$$\sum \mathbf{M} = \frac{d(\bar{I} \boldsymbol{\omega})}{dt} \quad (1.2)$$

où  $\sum \mathbf{F}$  est la somme des forces sur la base,  $m_t$  est la masse totale du mécanisme,  $\mathbf{v}$  est la vitesse du centre de masse du mécanisme,  $\sum \mathbf{M}$  est la somme des moments par rapport au centre de masse,  $\bar{I}$  est le moment d'inertie du mécanisme par rapport à son centre de masse et finalement  $\boldsymbol{\omega}$  est la vitesse angulaire du mécanisme par rapport à ce même point.

Ces équations (Eqs (1.1) et (1.2)) ne seront pas utilisées pour trouver les contraintes de compensation dynamique (CCD) car il est difficile de conceptualiser certains des paramètres,  $\boldsymbol{\omega}$  par exemple et de plus la distance entre deux points quelconques du mécanisme n'est pas toujours constante ce qui ne permet pas de définir le tenseur d'inertie du mécanisme. Lorsqu'on travaillera à établir les CCD, de nouvelles équations seront définies. Ces nouvelles équations prendront en considération chaque membrure du mécanisme (Chaps. 2 et 4).

Les équations (1.1) et (1.2) peuvent être utiles car le comportement du mécanisme, vu comme un corps unique, permet de tirer certaines conclusions qui simplifieront la recherche des CCD.

La compensation consistera donc à éliminer la somme des forces et la somme des moments. Pour éliminer la somme des forces, on peut faire en sorte que le terme entre parenthèses dans le membre de droite de l'équation (1.1) reste constant par rapport au temps. Si on considère que la masse du mécanisme reste constante, le problème se simplifie et se résume à dire que la vitesse du centre de masse est constante par rapport à la base. Puisque le mécanisme est rattaché à la base, il ne peut jamais avoir une vitesse constante différente de zéro par rapport à sa base. On peut donc encore simplifier et dire que la position du centre de masse doit être fixe par rapport à la base car c'est la seule option lorsque  $\mathbf{v}$  égale zéro. La masse du mécanisme peut ne pas être constante dans le temps. C'est possible lorsqu'on prend comme mécanisme un manipulateur et que ce manipulateur effectue une tâche qui consiste à déplacer un objet.

Pour éliminer la somme des moments, on peut faire en sorte que le terme entre parenthèses dans le membre de droite de l'équation (1.2) reste constant par rapport au temps. Par contre dans ce cas ci et à ce moment ci, on ne sait pas si c'est seulement le  $\bar{\mathbf{T}}$  ou la combinaison de  $\bar{\mathbf{T}}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  qui est constant. Le chapitre 8 lèvera cette ambiguïté. Pour l'instant aucune déduction ne peut ressortir de l'équation (1.2).

Le cas où le mécanisme vient en contact avec un autre objet et que cet objet applique une force ou un moment sur le mécanisme ou que l'objet devient une partie intégrante du mécanisme car le mécanisme l'a saisi et le déplace, ne sera pas étudié dans cette thèse. On se contentera donc d'étudier la compensation dynamique lorsque le nombre de corps et de force impliqués dans les équations (1.1) et (1.2) sont constants.

### 1.3 La compensation statique

La façon dont Meriam et Kraige [1996] présentent l'étude de la mécanique convient parfaitement à la façon dont l'étude de la compensation se divise.

L'étude de la mécanique se divise traditionnellement en deux parties : la *statique*, qui s'intéresse à l'équilibre des corps soumis à l'action de forces, et

la *dynamique* qui étudie le mouvement des corps en relation avec les forces qui les engendrent.

Il faut prendre en considération que leur définition parle de *force* au sens large, ce qui inclut les forces et les moments .

Suite à cette définition, on peut constater que la compensation statique est un sous ensemble de la compensation dynamique car la compensation statique se résume à compenser un mécanisme, soumis à l'action de forces et de moments, dont tous les corps sont en équilibre alors que la compensation dynamique s'intéresse à la compensation de mécanismes soumis à l'action de forces et de moments dont les corps peuvent être en mouvement. Il sera donc possible d'utiliser les contraintes de compensation statique (CCS) lors de la recherche des CCD puisque la compensation dynamique englobe la compensation statique.

Même si la compensation statique peut sembler être très simple, plusieurs approches peuvent être appliquées pour obtenir le résultat désiré. On peut vouloir compenser la force de gravité en utilisant le principe de la conservation de l'énergie potentielle à l'aide de contre-poids et de ressorts [Ulrich et Vikay, 1991; Walsh *et al.*, 1991] (Fig. 1.4) ou utiliser le fait que la position du centre de masse est constant [Berkof et Lowen, 1969] ou encore on peut utiliser la méthode des pantographes combinée avec la méthode des ressorts [Shin et Streit, 1991].

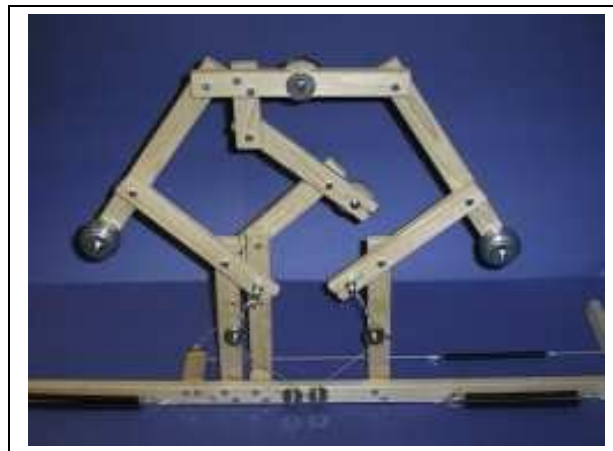


FIG. 1.4 – Mécanisme parallèle à 3 ddl, statiquement équilibré (courtoisie du Laboratoire de robotique de l'université Laval).

Le fait de pouvoir maintenir une position statique permet une meilleure utilisation de l'énergie dépensée par le mécanisme car l'énergie sert à déplacer le système à une nouvelle configuration et non à maintenir une position donnée [Herder, 2001].

La recherche dédiée à la compensation statique se poursuit depuis plusieurs années car déjà Lowen et Berkof [1968] présentaient une revue de littérature sur le sujet et ils en ont refait une autre [Lowen *et al.*, 1983] près de deux décennies plus tard car beaucoup de travail avait été fait sur le sujet et une mise à jour semblait nécessaire. Des développements récents ont encore lieu [Wang, 1998] ou l'emphase est mise sur le développement de mécanismes spatiaux [Gosselin *et al.*, 1999] (Fig. 1.5).



FIG. 1.5 – Manipulateur hybride équilibré statiquement. Courtoisie du Laboratoire de robotique de l'université Laval.

## 1.4 La compensation dynamique

Comme mentionné à la section 1.2, la compensation dynamique se résume à l'aide des équations (1.1) et (1.2) et le but ultime est le même c'est-à-dire mettre les équations égales à zéro. Par contre, le problème se complique beaucoup puisqu'on ne restreint plus le mécanisme à être dans un état statique. Les composantes du mécanisme peuvent bouger les unes par rapport aux autres.

Les premières recherches, qui se sont intéressées à la compensation dynamique datent, elles aussi, de plusieurs années [Berkof et Lowen, 1969; Lowen et Berkof, 1971;



Tepper et Lowen, 1972; Berkof, 1973; Wiederrich et Roth, 1976; Lowen *et al.*, 1983]. Mais puisque le problème est beaucoup plus compliqué, beaucoup de recherches ont encore lieu sur ce thème comme le démontre le sujet de cette thèse.

Avant l'article publié par Berkof et Lowen [1969], il n'y avait pas beaucoup de travaux qui portaient sur la compensation dynamique des forces. La méthode des vecteurs linéairement indépendants qu'ils ont développée, se trouvera être une des plus efficaces pour résoudre ce problème et sera modifiée et améliorée plusieurs fois comme on le verra plus loin. Leur méthode bornait le nombre maximal de contre-poids que l'on devait ajouter à  $n - 1$  si le nombre de membrures dans la boucle était de  $n$ . Par la suite, ce nombre a été réduit à  $\frac{n}{2}$  par Tepper et Lowen [1972]. Cette méthode consistait à fixer le centre de masse du mécanisme en traitant le déplacement, selon deux axes orthogonaux, comme indépendant.

Les travaux de Berkof et Lowen [1969] s'appliquaient aux mécanismes plans. Kaufman et Sandor [1977] ont été parmi les premiers à en généraliser la formulation pour l'appliquer aux mécanismes à quatre barres spatiaux. Ils ont réussi à faire la compensation dynamique complète des forces pour différents mécanismes à quatre barres à l'aide de contre-poids en utilisant des opérateurs de rotation.

Encore une fois, la méthode des vecteurs indépendants sera généralisée par Tepper et Lowen [1972]. De plus, dans cet article, on considère les restrictions qu'imposent les articulations prismatiques, ce qui amène à présenter le *Théorème du contour* qui établit que, s'il est possible de passer d'une membrure à la base en rencontrant seulement des articulations rotoïdes, il est possible de compenser dynamiquement la force que le mécanisme génère à l'aide de contre-poids ou en redistribuant les masses. Par la suite, on étudiera les différentes possibilités présentées par cette méthode, en l'appliquant à des mécanismes à 10 barres [Smith, 1975], aux mécanismes de Watt et Stephenson [Balasubramanian et Bagci, 1978] pour n'en nommer que quelques uns. Yu [1987b,a] décide d'ajouter une dyade entre le membre de sortie et la base ce qui permet une réduction des forces et des moments.

Les grandes lignes d'une méthode semi-itérative permettant l'optimisation de la compensation des forces et des moments sera aussi présentée [Lowen et Berkof, 1971; Berkof et Lowen, 1971a] mais elle n'aura pas un impact aussi grand que la précédente.

Une autre méthode développée et qui sera utilisée et bonifiée dans plusieurs articles [Walker et Oldham, 1978; Chen, 1984; Yao et Smith, 1993b,a; Ye et Smith, 1994] est la méthode des masses complexes développée par Oldham et Walker [1978]. Le principe consiste à trouver quelle membrure couper et à distribuer ses paramètres aux membrures la soutenant. Les contre-poids sont choisis de telle façon que leur addition permet de positionner le nouveau centre de masse à une articulation rotoïde. Ce principe de transfert est répété jusqu'à la base. Bagci [1992] se basera sur cette méthode et ces principes pour classifier différents types de membrures dynamiquement équivalentes (*Complete Dynamically Equivalent Link* (CDEL)).

Jusqu'à maintenant les articles cités présentaient des méthodes consacrées surtout à la compensation dynamique des forces mais la compensation dynamique des moments n'est pas laissée de côté car Berkof [1973] commence à s'y intéresser. La redistribution des masses et l'ajout de contre-rotations permettent la compensation complète de mécanismes à quatre barres plans. Puisque la compensation dynamique des moments se retrouve à être un problème beaucoup plus complexe, Wiederrich et Roth [1976] ne s'attaquent pas directement au problème, ils choisissent de diminuer les fluctuations du moment cinétique. Elliot et Tesar [1977] reprennent la méthode des vecteurs linéairement indépendants et la transforment pour y inclure le moment cinétique. Ils doivent introduire des moments d'inertie négatifs qui seront représentés par des contre-rotations. Cette méthode sera par la suite reprise dans plusieurs articles [Bagci, 1982; Kochev, 1991; Esat et Bahai, 1999]. Feng [1989] appliquera cette méthode aux mécanismes à 4 et 6 barres. On utilisera même deux types différents de contre-rotations avec cette méthode [Feng, 1989, 1990, 1991].

Certains chercheurs s'aventurent en dehors des sentiers battus et approchent le problème de la compensation dynamique de façons différentes. Thuemmel et Brandl [1996] ajoutent un actionneur redondant pour atteindre la compensation. Cela permet de plus, de faire varier les contraintes aux articulations. À la différence des autres méthodes, on peut considérer cette méthode comme active car on doit introduire de l'énergie au système. D'autres chercheurs, voyant que la compensation dynamique complète d'un mécanisme était très difficile et observant que certains mécanismes utilisaient seulement une fraction de leur espace de travail, ont décidé d'explorer la possibilité de contraindre le déplacement du mécanisme pour atteindre une compensation dynamique complète [Dubowsky et Torres, 1991; Papadopoulos et Dubowsky, 1991; Abu-Abed et Papado-

poulos, 1994]. Shemin [1994] a travaillé à construire des fonctions d'optimisation servant à minimiser les harmoniques des forces de vibrations à l'aide des séries de Fourier.

Dans l'article de Behi et Tesar [1991], une meilleure connaissance des paramètres physiques d'un manipulateur trouvés à l'aide d'une analyse modale permet de réduire les vibrations et d'améliorer la précision. De plus, Kochev [1992] déduit qu'il y a un prix à payer lors de la réduction ou la compensation dynamique des forces à l'aide de contre-poids. Il remarque qu'il y a une augmentation des contraintes aux articulations.

## 1.5 Objectifs et contributions

La compensation dynamique de mécanismes à l'aide de contre-poids et de contre-rotations, de dyade, etc, n'est pas parfaite et amène quelques problèmes qui ont été mentionnés à la section 1.4. Le but de cette thèse sera donc de vérifier la possibilité de compenser dynamiquement les mécanismes parallèles sans ajouter de contre-poids ou de contre-rotations. Mais avant de s'attaquer à ce problème, une incursion dans le monde des mécanismes à quatre barres sera faite pour permettre le développement des outils d'analyse et investiguer la possibilité de compenser des mécanismes à boucles fermées. Cette étude pourra par la suite être étendue aux mécanismes parallèles qui sont composés de plusieurs boucles fermées. Un des objectifs principaux sera d'obtenir, pour les mécanismes étudiés, les contraintes de compensation dynamique (CCD), c'est-à-dire les équations algébriques impliquant les paramètres dimensionnels et inertiels qui doivent être satisfaites pour assurer la compensation dynamique.

# Chapitre 2

## Compensation dynamique

### 2.1 Compensation du moment cinétique

Puisqu'on veut que les effets dynamiques, vibrations, efforts et contraintes soient éliminés, on peut travailler à l'élimination des causes qui produisent ces effets. Cependant, le travail sera à refaire lorsqu'une nouvelle force ou un nouveau moment sera introduit. De plus, l'élimination de la cause peut être trop restrictif.

Pour travailler d'une façon générale, il serait judicieux de regarder les effets et de les éliminer le plus possible. Si les effets sont éliminés, on peut en déduire qu'il n'y a pas de cause, c'est-à-dire de forces ou de moments sur le mécanisme mais cela peut aussi vouloir dire que les forces et moments sur le mécanisme annulent mutuellement leurs effets. Cette approche est plus générale car les effets sont connus (forces et moments).

Pour le moment cinétique l'équation qui relie la cause à l'effet est :

$$\mathbf{M}_A = \frac{d\mathbf{H}_A}{dt} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{M}_A$  est la somme des moments appliqués aux points  $A$  dans un repère inertiel et  $\mathbf{H}_A$  est le moment cinétique par rapport au point  $A$ .

Ainsi pour avoir une compensation du moment cinétique, on doit avoir que l'effet ( $\sum \mathbf{M}_A$ ) égale zéro ou que  $\mathbf{H}_A$  soit constant.

Puisque la compensation du moment cinétique constitue la pierre angulaire de ce travail, il est important de présenter une équation du moment cinétique qui pourra s'adapter à toutes les applications qui se présenteront lors du déroulement de ce travail.

Le travail en cours portera sur des mécanismes, c'est pourquoi l'équation du moment cinétique est donnée pour un système mécanique formé de  $n$  composantes distinctes (corps rigides). De plus l'équation sera donnée par rapport à un point  $A$  quelconque (pas nécessairement sur le mécanisme).

L'équation qui satisfait ces exigences se retrouve dans le livre de Meriam et Kraige [1987] et s'écrit comme suit :

$$\mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n [\mathbf{H}_{Gi} + \mathbf{r}_{Si} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{Si}] \quad (2.2)$$

avec

$$\mathbf{H}_{Gi} = \bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{H}_{Gi}$  est le moment cinétique du corps  $i$  par rapport à son centre de masse,  $\bar{\mathbf{I}}_i$  est le moment d'inertie du corps  $i$  par rapport à son centre de masse,  $\boldsymbol{\omega}_i$  est la vitesse angulaire du corps  $i$ ,  $\mathbf{r}_{Si}$  est le vecteur reliant le point  $A$  au centre de masse du corps  $i$  et  $m_i$  est la masse du corps  $i$ .

Cette équation est adaptable car elle peut facilement s'écrire de façon scalaire lorsque le système se trouve dans un plan.

# Chapitre 3

## Analyse de la compensation dynamique des mécanismes à quatre barres

### 3.1 Mécanisme à quatre barres

Le mécanisme à quatre barres (Fig. 3.1) est un mécanisme des plus simples ce qui en fait un des plus étudiés. Par contre, même si les mécanismes à quatre barres sont des plus étudiés, ils ne sont pas nécessairement étudiés de la façon qui convient à l'étude en cours. Un des exemples frappant est le fait que pour compenser dynamiquement les mécanismes à quatre barres plusieurs approches consistent à ajouter : des boucles fermées ou des mécanismes [Bagci, 1982], des mécanismes miroirs, des contre-rotations

[Kochev, 1990; Ye et Smith, 1994] mais cette approche n'est pas celle favorisée dans cette étude car l'objectif de ce travail est d'avoir un mécanisme le plus simple possible qui sera compensé dynamiquement. Lorsque l'on ajoute des membrures [Yong et Zhen, 1989], la dimension hors tout et la masse totale du mécanisme augmentent ce qui devient un facteur limitatif pour des mécanismes parallèles car leur encombrement est plus grand et cela peut changer le nombre de configurations singulières. L'approche de cette étude consiste à compenser dynamiquement les mécanismes en jouant sur les dimensions, les masses et les moments d'inertie des membrures existantes plutôt que d'en ajouter. Cela permet de garder le même graphe topologique et par le fait même, les mêmes caractéristiques globales du mécanisme étudié. Dans cette section, cette approche sera favorisée. C'est pourquoi l'étude des mécanismes à quatre barres est importante, puisque aucune preuve formelle n'a été faite pour démontrer si l'équilibrage de ces mécanismes sans ajout d'éléments mécaniques additionnels était possible ou non. Plusieurs chercheurs dont Lowen *et al.* [1983]; Kochev [1990]; Feng [1990] mentionnent qu'il est très difficile et même probablement impossible de compenser un mécanisme à quatre barres seulement en changeant les caractéristiques des membrures. Par contre, ils en sont restés là et aucune preuve n'a été fournie.

Le mécanisme à quatre barres possède un degré de liberté. On peut associer ce degré de liberté à l'angle d'entrée du mécanisme, noté  $\theta$ . Si on veut compenser le mécanisme dynamiquement, il faudrait pouvoir le compenser pour toutes les valeurs de :  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ , c'est-à-dire, pour toutes valeurs de position, vitesse et accélération. Par contre dans la littérature, on rencontre souvent une compensation en position et à vitesse constante. Ce type de compensation cela est justifiable dans bien des cas mais cette approche ne peut être transposée aux mécanismes parallèles puisque chaque actionneur n'effectuera pas un mouvement à vitesse constante.

La méthode préconisée dans cette étude consiste à compenser dynamiquement les mécanismes autant en position, vitesse et accélération puisque les actionneurs des mécanismes parallèles auront des accélérations variables. Pour ce faire, une expression du moment cinétique en fonction des variables d'entrées seulement sera recherchée. Cette fonction devra être constante ou égale à zéro. Une façon de s'assurer que cette condition est respectée est d'imposer que les coefficients des différentes variables d'entrée ( $\theta_i$ ,  $\dot{\theta}_i$  et  $\ddot{\theta}_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  où  $n$  est le nombre de degrés de liberté) soient égaux à zéro. En effet, il s'agit là d'une condition mathématiquement suffisante.

Puisque des études sur les mécanismes à quatre barres (Fig. 3.1) démontrent qu'ils peuvent être compensés statiquement en éliminant les forces générées sur la base [Berkof et Lowen, 1969; Tepper et Lowen, 1972], l'étude présente se penchera sur la compensation dynamique seulement (constance du moment cinétique).

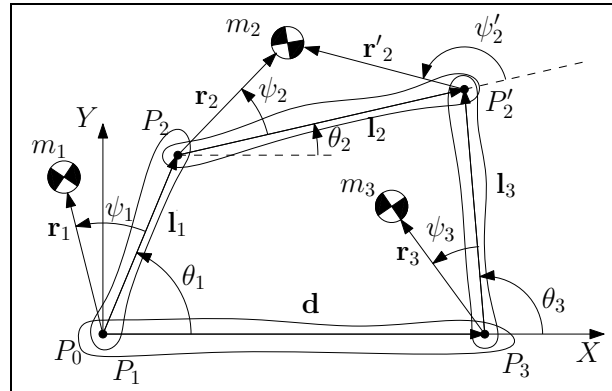


FIG. 3.1 – Mécanisme à quatre barres.

Pour compenser les mécanismes à quatre barres. On se servira de l'équation du moment cinétique et des équations de contraintes cinématiques pour trouver une expression qui dépend seulement de la variable d'entrée ( $\theta_1$ ). Les variables utilisées sont représentées schématiquement à la figure 3.1. Les longueurs des membrures sont notées  $d$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  et les angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  décrivent l'orientation des membrures mobiles par rapport au repère de base. Le centre de masse de la membrure  $i$  est localisé à l'aide de la longueur  $r_i$  et de l'angle  $\psi_i$ .

### 3.2 Équation du moment cinétique des mécanismes à quatre barres compensés statiquement

L'équation (2.2) se trouve à être une équation vectorielle générale, cette équation sera écrite de façon scalaire pour simplifier son utilisation puisque les mécanismes à quatre barres étudiés sont plans et que par conséquent le moment cinétique n'a qu'une seule composante (Fig. 3.1). On obtient :

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 m_i \left( x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i \right) \quad (3.1)$$



avec

$$x_1 = r_1 \cos (\theta_1 + \psi_1) \quad (3.2)$$

$$y_1 = r_1 \sin (\theta_1 + \psi_1) \quad (3.3)$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos (\theta_2 + \psi_2) \quad (3.4)$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin (\theta_2 + \psi_2) \quad (3.5)$$

$$x_3 = d + r_3 \cos (\theta_3 + \psi_3) \quad (3.6)$$

$$y_3 = r_3 \sin (\theta_3 + \psi_3) \quad (3.7)$$

Pour permettre une meilleure compréhension des équations on définit ici quelques termes. La membrure  $i$ , de masse  $m_i$ , est la  $i$ ème barre du mécanisme, sa longueur  $l_i$  est définie comme la norme du vecteur  $\mathbf{l}_i$  reliant le point  $P_i$  (premier pivot de la membrure  $i$ ) au deuxième pivot de la membrure. La variable  $r_i$  représente la norme du vecteur  $\mathbf{r}_i$  reliant le point  $P_i$  au centre de masse de la membrure  $i$ . L'angle  $\psi_i$  représente l'angle entre le vecteur  $\mathbf{l}_i$  et le vecteur  $\mathbf{r}_i$  défini du premier vers le second, cet angle sera défini positif dans le sens anti-horaire. La variable  $\theta_i$  représente l'angle entre une droite parallèle à l'axe X passant par  $P_i$  et le vecteur  $\mathbf{l}_i$ , défini du premier vers le second, cet angle sera donc positif dans le sens anti-horaire. La valeur  $k_i$  représente le rayon de giration de la membrure  $i$ , ce rayon est calculé à partir du centre de masse de la membrure  $i$ . Finalement,  $d$  est la longueur de la base du mécanisme, cette distance est calculée entre les deux pivots reliant le mécanisme à sa base. (Fig. 3.1).

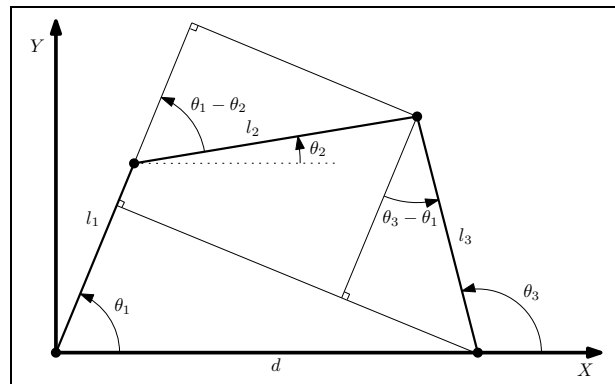


FIG. 3.2 – Géométrie d'un mécanisme à quatre barres.

De plus,  $l_i$  sera défini positif car une valeur égale à zéro transformera le mécanisme en un treillis statiquement stable. Dans le même ordre d'idées, les valeurs  $r_i$  seront définies, semi-positives, cette définition permettra de restreindre le nombre de solution car le

vecteur  $\mathbf{r} = r[\cos \beta, \sin \beta]^T$  défini par le couple  $-r, \beta$  a toujours un équivalent défini par  $r, \beta + \pi$ . Si on garde les deux possibilités, on n'ajoute pas de nouvelles solutions mais on exprime la solution seulement d'une façon différente.

Pour adapter l'équation précédente (Eq. 3.1) aux mécanismes à quatre barres compensés statiquement on suivra la dérivation faite par Berkof et Lowen [1971b].

Pour simplifier l'équation du moment cinétique, on utilise des équations analytiques décrivant la géométrie d'un mécanisme à quatre barres en se basant sur la figure 3.2. (Eq. 3.8, 3.9, 3.13 et 3.14).

$$\tau_1 = \sin(\theta_1 - \theta_2) = \mu \sin(\theta_1 - \theta_3) + \nu \sin \theta_1 \quad (3.8)$$

$$\tau_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) + \lambda = \mu \cos(\theta_1 - \theta_3) + \nu \cos \theta_1 \quad (3.9)$$

où

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2} \quad (3.10)$$

$$\mu = \frac{l_3}{l_2} \quad (3.11)$$

$$\nu = \frac{d}{l_2} \quad (3.12)$$

Les équations suivantes (Eq. 3.13 et 3.14) seront plus précisément appelées, équations de contraintes d'un mécanisme à quatre barres.

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = d + l_3 \cos \theta_3 \quad (3.13)$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_3 \sin \theta_3 \quad (3.14)$$

Si les équations précédentes ainsi que leur dérivée sont substituées dans l'équation du moment cinétique (3.1), on se retrouve avec :

$$H_0 = [m_1 (k_1^2 + r_1^2) - m_2 l_1 \lambda r_2' \cos \theta_2'] \dot{\theta}_1 + m_2 [k_2^2 - r_2 (l_2 \cos \psi_2 - r_2)] \dot{\theta}_2 + m_3 [k_3^2 - r_3 (l_3 \cos \theta_3 - r_3)] \dot{\theta}_3 + V + W \quad (3.15)$$

où

$$V = \left[ m_2 l_1 r_2 \tau_2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 r_2 \left( \tau_2 - \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \dot{\theta}_2 + m_3 r_3 (l_3 + d \cos \theta_3) \frac{\cos \psi_3}{\cos \psi_2} \dot{\theta}_3 \right] \cos \psi_2 \quad (3.16)$$

$$W = \left[ m_2 l_1 r_2 \tau_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - m_3 r_3 d \sin \theta_3 \frac{\sin \psi_3}{\sin \psi_2} \dot{\theta}_3 \right] \sin \psi_2 \quad (3.17)$$

avec

$$l_2 - r_2 \cos \psi_2 = r_2' \cos \psi_2' \quad (3.18)$$

La variable  $r_2'$  représente la norme du vecteur  $\mathbf{r}_2'$ , qui relie le centre de masse de la membrure 2 au point  $P_2'$ . La variable qui représente l'angle entre une droite parallèle à l'axe X passant par  $P_2'$  et ce vecteur se nommera  $\psi_2'$ , cet angle est défini positif dans le sens anti-horaire (Fig. 3.1).

### 3.2.1 Conditions générale de compensation dynamique

Comme mentionné à la fin de la section 3.2, le but est d'écrire l'équation du moment cinétique en fonction de seulement une variable articulaire. Si on choisit la variable  $\theta_1$  comme la variable articulaire indépendante. On pourrait, comme il sera démontré dans les sections suivantes, écrire le moment cinétique sous la forme suivante :

$$H_0 = \left[ \frac{J_n}{J_d} \right] \dot{\theta}_1 \quad (3.19)$$

Puisque, pour avoir une compensation dynamique, le moment cinétique doit être constant, on utilisera l'équation (3.20), c'est-à-dire l'équation du moment cinétique dérivée par rapport au temps, pour faire quelques observations, puisque cette équation doit être nulle lorsqu'un mécanisme à quatre barres est compensé dynamiquement. On

a :

$$\dot{H}_0 = \left[ \frac{J_d \dot{J}_n - J_n \dot{J}_d}{J_d^2} \right] \dot{\theta}_1 + \left[ \frac{J_n}{J_d} \right] \ddot{\theta}_1 = 0 \quad (3.20)$$

Pour que cette équation soit satisfaite et que le mécanisme soit compensé pour toutes valeurs de  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_1$  (qui sont indépendantes), chaque coefficient doit être égal à zéro.

Si l'attention est portée sur le coefficient de  $\ddot{\theta}_1$ . On se retrouve avec :

$$\frac{J_n}{J_d} = 0 \quad (3.21)$$

Ceci implique que le dénominateur tend vers l'infini ou que le numérateur est égal à zéro. Pour ce qui est du dénominateur, il ne peut tendre vers l'infini, puisque tous les termes qui le composent, sont bornés, puisqu'ils proviennent des paramètres physiques du mécanisme (i.e. les  $m_i$ ,  $l_i$ ,  $r_i$ , etc) qui sont bornés, et des fonctions trigonométriques simples, soit, les cosinus et sinus qui varient entre -1 et 1. Une analyse plus détaillée des termes du dénominateur sera donnée aux sections suivantes.

Il est donc clair que le numérateur de l'équation (3.21) doit être égal à zéro. Si le numérateur de l'équation (3.21) est égal à zéro, l'équation (3.19) sera par définition égale à zéro. Ce qui vérifie la condition qui demande que cette équation soit constante. La condition que le numérateur de l'équation (3.21) soit égal à zéro est donc une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3.19) soit constante.

Le chapitre suivant servira donc à établir les conditions qui permettent d'avoir  $J_n$  égal à zéro. Mais pour cela, il faudra écrire l'équation (3.15) en fonction d'une variable articulaire seulement. Pour ce faire, on utilisera des équations de compensation statique ainsi que les équations de fermeture du mécanisme qui simplifieront l'équation du moment cinétique.

La première approche sera effectuée pour un mécanisme général et tous les cas spéciaux seront vérifiés indépendamment pour s'assurer qu'aucune contrainte supplémentaire n'est introduite.

# Chapitre 4

## Mécanisme à quatre barres général

Dans ce chapitre, on recherche les équations de CCD pour un mécanisme général. En d'autres termes, on recherche les conditions mathématiques qui doivent être satisfaites pour qu'un mécanisme à quatre barres soit dynamiquement équilibré sans ajout de composantes mécaniques additionnelles. Ces conditions s'écriront en fonction des paramètres dimensionnels et inertiels des membrures du mécanisme. Pour avoir un mécanisme le plus général possible aucune équation de contrainte entre les différentes variables qui servent à le représenter ne devrait être imposée a priori.

### 4.1 Simplification du moment cinétique

On utilise tout d'abord le fait que le mécanisme doit être équilibré statiquement (aucune force de réaction). Cette prémisse permet d'utiliser les équations de Berkof et

Lowen [1969] même si on sait que ces équations sont suffisantes mais non nécessaires pour un équilibrage statique [Gosselin, 1997]. Pour que les équations de Berkof et Lowen [1969] deviennent non nécessaires, une relation de contrainte doit être établie entre les paramètres physiques du mécanisme à quatre barres. Cette démarche sera étudiée dans le chapitre portant sur les cas particuliers (Chap. 5).

Il est à remarquer que les cas particuliers ne sont pas évacués de l'analyse car ils seront abordés dans les sections 5.4.1, 5.5.1 et 5.6

Les équations de Berkof et Lowen [1969] (Eqs. 4.1—4.4) qui représentent les conditions mathématiques pour avoir un mécanisme compensé statiquement, serviront à la simplification du moment cinétique. Leur substitution permet l'annulation d'une grande partie des composantes du moment cinétique et rend l'équation plus facile à manipuler. Les quatre conditions d'équilibrage statique de Berkof et Lowen s'écrivent :

$$m_1 r_1 = m_2 r_2' \frac{l_1}{l_2} \quad (4.1)$$

$$m_3 r_3 = m_2 r_2' \frac{l_3}{l_2} \quad (4.2)$$

$$\psi_1 = \psi_2' \quad (4.3)$$

$$\psi_3 = \psi_2 + \pi \quad (4.4)$$

ou, données sous une forme équivalente par Jean et Gosselin [1996] :

$$m_1 r_1 \sin \psi_1 - \frac{m_2 r_2 l_1 \sin \psi_2}{l_2} = 0 \quad (4.5)$$

$$m_1 r_1 \cos \psi_1 + m_2 l_1 - \frac{m_2 r_2 l_1 \cos \psi_2}{l_2} = 0 \quad (4.6)$$

$$m_3 r_3 \sin \psi_3 + \frac{m_2 r_2 l_3 \sin \psi_2}{l_2} = 0 \quad (4.7)$$

$$m_3 r_3 \cos \psi_3 + \frac{m_2 r_2 l_3 \cos \psi_2}{l_2} = 0 \quad (4.8)$$

Lorsque ces conditions sur les paramètres sont satisfaites, le mécanisme est statiquement équilibré, c'est-à-dire que la position de son centre de masse demeure fixe et la somme des forces de réaction sur la base est égale à zéro pour toute trajectoire du mécanisme.

### 4.1.1 Simplification de la variable $V$ du moment cinétique

Si on porte notre attention sur l'équation (3.16) et que l'on y substitue les équations (4.2) et (4.4). On se retrouve avec :

$$V = m_2 l_2 r_2 \cos \psi_2 \left[ \lambda \tau_2 \dot{\theta}_1 + (\lambda \tau_2 - \lambda^2 + 1) \dot{\theta}_2 - \mu (\mu + \nu \cos \theta_3) \dot{\theta}_3 \right] \quad (4.9)$$

On peut, de plus, utiliser les dérivées des équations de contraintes d'un mécanisme à quatre barres (Eq. 3.13 et 3.14) pour éliminer les variables  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  et transformer l'équation (4.9) en une équation qui dépend seulement de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}_1$  ainsi que des angles  $\theta_i$   $i = 1, 2, 3$ .

On peut trouver  $\dot{\theta}_2$  en fonction de  $\dot{\theta}_1$ . Pour ce faire, on multiplie la dérivée de l'équation (3.13) par  $\cos \theta_3$  et l'équation (3.14) par  $\sin \theta_3$  pour, par la suite, soustraire ces deux équations ce qui donne :

$$l_1 [\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3] \dot{\theta}_1 + l_2 [\sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_2 \sin \theta_3] \dot{\theta}_2 = 0 \quad (4.10)$$

On substitue dans l'équation (4.10) les valeurs de  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$  provenant des équations de contraintes (Eq. 3.13 et 3.14) pour obtenir la valeur de  $\dot{\theta}_2$  en fonction des angles  $\theta_1$  et  $\theta_3$  et de la vitesse angulaire de  $\dot{\theta}_1$ , ce qui donne :

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\lambda}{\tau_3} \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 \quad (4.11)$$

avec

$$\tau_3 = \lambda \sin(\theta_1 - \theta_3) + \nu \sin \theta_3 \quad (4.12)$$

On peut faire un cheminement similaire pour trouver  $\dot{\theta}_3$  en fonction des angles  $\theta_1$  et  $\theta_3$  et de la vitesse angulaire de  $\dot{\theta}_1$ , ce qui donne :

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\lambda \tau_1}{\mu \tau_3} \dot{\theta}_1 \quad (4.13)$$

où  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont définis aux équations (3.8, 3.9, 3.10 et 3.11).

En substituant les équations (4.11) et (4.13) dans l'équation (4.9). On se retrouve avec :

$$V = m_2 l_2 r_2 \lambda \cos \theta_2 \left[ \tau_2 + \frac{\lambda \tau_2 - \lambda^2 + 1}{\tau_3} \sin(\theta_1 + \theta_3) - \frac{\tau_1}{\tau_3} (\mu - \nu \cos \theta_3) \right] \dot{\theta}_1 \quad (4.14)$$

Si on utilise en plus l'équation de Freudenstein [1955], provenant des équations de contraintes des mécanismes à quatre barres, c'est-à-dire :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1 = 2\mu\lambda \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2\nu(\lambda \cos \theta_1 - \mu \cos \theta_3) \quad (4.15)$$

On se retrouve alors avec :

$$V = 0 \quad (4.16)$$

### 4.1.2 Simplification de la variable $W$ du moment cinétique

L'équation (3.17) peut aussi être simplifiée à l'aide des équations de contraintes données par l'équilibrage statique (Eq. 4.2 et 4.4). Ce qui donne :

$$W = m_2 l_2 r_2 \sin \psi_2 \left[ \lambda \tau_1 \dot{\theta}_1 + \lambda \tau_1 \dot{\theta}_2 + \mu \nu \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \right] \quad (4.17)$$

Si on utilise les équations (4.11) et (4.13), l'équation (4.17) s'écrit simplement :

$$W = 2m_2 l_2 r_2 \lambda \tau_1 \sin \psi_2 \dot{\theta}_1 \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Équation simplifiée du moment cinétique

Donc, si un mécanisme à quatre barres est équilibré statiquement, l'équation de son moment cinétique se présente comme suit :

$$H_0 = m_1 [k_1^2 + r_1^2 - r_1 l_1 \cos \psi_1] \dot{\theta}_1 + m_2 [k_2^2 + r_2^2 - r_2 l_2 \cos \psi_2] \dot{\theta}_2 + m_3 [k_3^2 + r_3^2 - r_3 l_3 \cos \psi_3] \dot{\theta}_3 + 2m_2 l_1 r_2 \sin \psi_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \quad (4.19)$$



Si on regroupe les termes constants on peut réécrire l'équation sous une forme plus compacte :

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 I_i \dot{\theta}_i + I_a \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \quad (4.20)$$

avec

$$I_i = (k_i^2 + r_i^2 - r_i l_i \cos \psi_i) m_i \quad (4.21)$$

$$I_a = 2m_2 l_1 r_2 \sin \psi_2 \quad (4.22)$$

Il est à remarquer que la variable  $I_i$  n'est pas le moment d'inertie de la membrure  $i$  même si les unités sont semblables. Cette variable ne sert qu'à regrouper un ensemble de constantes provenant de chacune des membrures et qui sont multipliées par le même facteur.

## 4.2 Expression du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée

### 4.2.1 Élimination des variables intermédiaires

Maintenant que l'on connaît l'expression du moment cinétique (Eq. 4.20), il ne reste plus qu'à trouver une équation en fonction de la variable d'entrée seulement et de vérifier que le moment cinétique est constant.

À l'aide des équations de contraintes (3.13) et (3.14), il est possible d'éliminer plusieurs variables. Une des premières étapes pour obtenir l'équation en  $\theta_1$  consiste à se départir des dérivées par rapport au temps de  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , ce qui peut être fait en dérivant les équations (3.13) et (3.14). On trouve :

$$\dot{\theta}_2 = \left[ \frac{C_3 S_1 - C_1 S_3}{C_2 S_3 - C_3 S_2} \right] \dot{\theta}_1 \quad (4.23)$$

$$\dot{\theta}_3 = \left[ \frac{C_2 S_1 - C_1 S_2}{C_2 S_3 - C_3 S_2} \right] \dot{\theta}_1 \quad (4.24)$$

avec

$$C_i = \lambda_i \cos \theta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.25)$$

$$S_i = \lambda_i \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.26)$$

où

$$\lambda_i = \frac{l_i}{d}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.27)$$

De plus, à l'aide des équations de contraintes (3.13) et (3.14), il est possible d'exprimer  $C_3$  et  $S_3$  en fonction de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On a :

$$C_3 = C_1 + C_2 - 1 \quad (4.28)$$

$$S_3 = S_1 + S_2 \quad (4.29)$$

En utilisant l'identité trigonométrique  $C_i^2 + S_i^2 = \Lambda_i$  et les équations (4.28) et (4.29), on trouve la relation qui permet d'exprimer  $S_2$  en fonction de  $C_2$  et  $\theta_1$ . Cette équation se présente comme suit :

$$S_2 = \frac{-[\Delta_1 - C_1 + (C_1 - 1)C_2]}{S_1} \quad (4.30)$$

avec

$$\Delta_1 = \frac{1 + \Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3}{2} \quad (4.31)$$

$$\Lambda_i = \lambda_i^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.32)$$

Puisque maintenant on connaît la valeur de  $S_2$ , on peut obtenir la valeur de  $C_2$  à l'aide de l'identité trigonométrique  $C_i^2 + S_i^2 = \Lambda_i$  et de l'équation (4.30). Ce qui donne :

$$C_2 = \frac{-A_1 + Y_1}{2A_2} \quad (4.33)$$

avec

$$Y_1 = \epsilon \sqrt{A_1^2 - 4A_2A_0} \quad (4.34)$$

$$A_2 = -2C_1 + \Lambda_1 + 1 \quad (4.35)$$

$$A_1 = 2[-C_1^2 + (1 + \Delta_1)C_1 - \Delta_1] \quad (4.36)$$

$$A_0 = (1 + \Lambda_2)C_1^2 - 2\Delta_1C_1 + \Delta_1^2 - \Lambda_1\Lambda_2 \quad (4.37)$$

$$\epsilon = \pm 1 \quad (4.38)$$

La variable  $\epsilon$  permet de choisir le mode d'assemblage du mécanisme. Deux modes d'assemblage sont possibles pour un mécanisme à quatre barres (Fig. 4.1). C'est-à-dire le mode convexe ( $\epsilon = 1$ ) où  $0^\circ < \Theta < 180^\circ$  et le mode concave ( $\epsilon = -1$ ) où  $180^\circ < \Theta < 360^\circ$ . Ces configurations du mécanisme sont appelées modes d'assemblage puisqu'il peut arriver que la seule façon de passer d'un mode à l'autre, soit par le démantèlement du mécanisme.

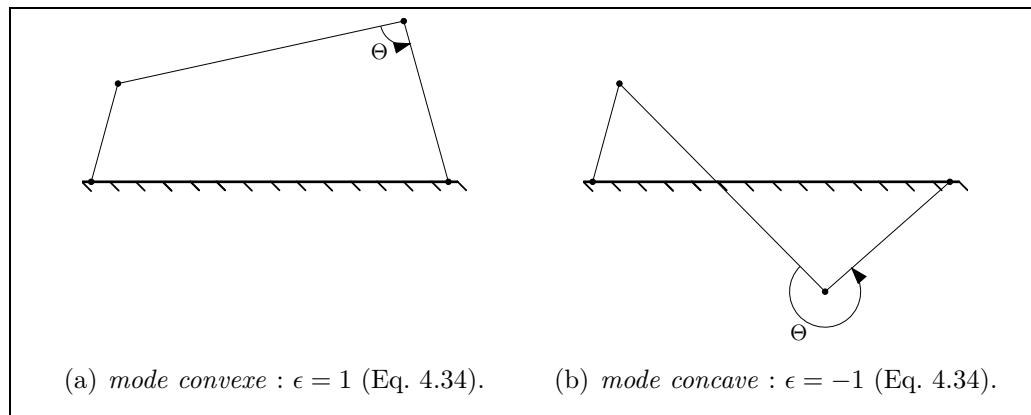


FIG. 4.1 – Modes d'assemblage d'un mécanisme à quatre barre.

## 4.2.2 Obtention de l'expression en fonction de la variable d'entrée

Pour obtenir une expression simple du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée, certaines opérations seront nécessaires.

La première série d'opérations consiste à substituer dans l'équation (4.20) les valeurs de  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$ ,  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et  $C_2$  définies aux équations (4.23, 4.24, 4.28, 4.29, 4.30 et 4.33). Après chaque opération, on effectuera la substitution  $S_i^2 = \Lambda_i - C_i^2$  pour tous les  $\theta_i$  restants.

Après ces opérations, on se retrouve avec l'équation (3.19) sous sa forme générale dans laquelle  $J_n$  est de degré cinq en  $C_1$  et  $J_d = \lambda_1(1 - 2C_1 + \Lambda_1)\lambda_2 Y_1 S_1$ .

On peut encore simplifier ces équations, si on multiplie le numérateur et le dénominateur par  $S_1$  et que l'on applique la substitution trigonométrique suivante  $S_1^2 = \Lambda_1 - C_1^2$ . On s'aperçoit que l'on peut sortir du numérateur le facteur  $(C_1^2 - \Lambda_1)$  et du dénominateur  $S_1^2$ . Ces deux facteurs se divisent pour donner -1, ce qui donne finalement :

$$J_n = \sum_{s=0}^3 \sum_{t=0}^1 \sum_{u=0}^1 j_{s,t,u} C_1^s S_1^t Y_1^u \quad (4.39)$$

$$J_d = -\lambda_1 \lambda_2 (1 - 2C_1 + \Lambda_1) Y_1 \quad (4.40)$$

avec

$$j_{0,0,0} = 2\lambda_1^3 \lambda_2 ((1 - \Delta_1 + \Lambda_1)I_2 - \Delta_1 I_3) \quad (4.41)$$

$$j_{0,0,1} = -(\lambda_1 \lambda_2 (\Lambda_1 (I_2 + I_3) + (1 + \Lambda_1) I_1)) \quad (4.42)$$

$$j_{0,1,0} = 2I_a \Lambda_1 (\Delta_1^2 - (1 + \Lambda_1) \Lambda_2) \quad (4.43)$$

$$j_{0,1,1} = -\Delta_1 I_a \quad (4.44)$$

$$j_{1,0,0} = 2\lambda_1^3 \lambda_2 (I_3 - I_2) \quad (4.45)$$

$$j_{1,0,1} = \lambda_1 \lambda_2 (2I_1 + I_2 + I_3) \quad (4.46)$$

$$j_{1,1,0} = -2I_a (\Delta_1^2 + 2\Delta_1 \Lambda_1 - \Lambda_2 (1 + 3\Lambda_1)) \quad (4.47)$$

$$j_{1,1,1} = I_a \quad (4.48)$$

$$j_{2,0,0} = 2\lambda_1 \lambda_2 (\Delta_1 I_3 - (1 - \Delta_1 + \Lambda_1) I_2) \quad (4.49)$$

$$j_{2,1,0} = 2I_a (2\Delta_1 + \Lambda_1 - 2\Lambda_2) \quad (4.50)$$

$$j_{3,0,0} = 2\lambda_1 \lambda_2 (I_2 - I_3) \quad (4.51)$$

$$j_{3,1,0} = -2I_a \quad (4.52)$$

Par soucis de concision et d'économie d'espace les coefficients  $j_{s,t,u}$  égaux à zéro ne sont pas présentés. Ces coefficients n'ont aucun intérêt puisqu'ils apparaissent seulement par la façon générale d'écrire l'équation.

### 4.3 Dérivation des équations de contraintes

Pour obtenir une compensation dynamique du mécanisme à quatre barres, il ne reste plus qu'à imposer que  $J_n$  soit égal à zéro et à vérifier que  $J_d$  ne peut tendre vers l'infini.

Dans un premier temps on prendra les fonctions combinant  $\cos^i \theta_1 \sin^j \theta_1$ ;  $i = 0, 1, \dots, 5$ ;  $j = 0, 1$  et  $Y_1$  comme indépendantes entre elles pour des  $i = 0, 1, \dots, 5$  et  $j = 0, 1$  différents. Cette condition se justifie très bien dans le cas général si l'on considère que les fonctions trigonométriques comprises dans  $Y_1$  sont situées sous une racine carrée. Pour les faire sortir de la racine et ainsi les simplifier avec les autres sinus et cosinus, il faudrait avoir des valeurs particulières pour les longueurs  $l_i, i = 1, 2, 3$  et  $d$ . Puisqu'on est dans le cas général et qu'on ne veut pas introduire de contraintes entre les différentes variables à ce point-ci du processus, on les considère indépendantes pour l'instant. Les implications de la simplification de  $Y_1$  seront étudiées dans la section 5.2.

### 4.3.1 Familles de solutions

Suite à ces considérations, chaque coefficient  $j_{s,t,u}$  de l'équation (4.39) doit être égal à zéro pour respecter la condition de l'équation (3.21).

Lorsqu'on regarde les équations (4.41) à (4.52), il peut sembler difficile de trouver les solutions qui mettent toutes ces équations à zéro. Une méthode simple et efficace est de trouver la solution d'une équation pour laquelle aucune ambiguïté n'est possible et où il existe seulement une solution, pour ensuite simplifier les équations restantes à l'aide de cette solution.

Il ne faut pas oublier que les variables ( $\lambda_i$  et  $\Lambda_i, i = 1, 2, 3$ ) (Eq. 4.27 et 4.32) sont définies positives suite aux considérations expliquées à la section 3.2.

On remarque, à l'observation des équations (4.41) à (4.52), qu'il y a deux ensembles de solutions qui donnent tous les coefficients égaux à zéro. Ces ensembles de solutions seront appelés familles de solution puisque chaque ensemble regroupe une série d'équations qui définissent un comportement ou des caractéristiques particulières.

Pour appliquer le principe et trouver la première famille de solution, on part avec l'équation (4.48) ou l'équation (4.52), puisqu'une solution seulement est possible soit  $I_a = 0$ . Par la suite, on peut regarder l'équation (4.45) ou l'équation (4.51), ces équations impliquent toutes deux que  $I_3 = I_2$ , si on veut les avoir égales à zéro, sachant que les  $\lambda_i$  sont définis positifs. Lorsque l'on substitue ces deux solutions dans les autres équations,

une solution non triviale à l'équation (4.46) serait  $I_2 = -I_1$ . Avec cette dernière solution l'équation (4.42) se simplifie pour donner  $j_{0,0,1} = \lambda_1 \lambda_2 I_1 [\Lambda_1 - 1] = 0$ . On remarque qu'il existe plus d'une solution à cette équation :

$$I_1 = 0 \tag{4.53}$$

$$\lambda_1 = 1 \tag{4.54}$$

Pour la première famille de solution, on choisira  $I_1 = 0$ . Lorsque ces quatre solutions sont substituées dans toutes les équations restantes, on s'aperçoit que les équations se simplifient pour donner zéro. Cela confirme que les équations (4.41–4.52) ne constituent pas un ensemble d'équations indépendantes.

Les solutions de la première famille de solutions peuvent être présentées comme  $I_a = I_1 = I_2 = I_3 = 0$ . Mais pour permettre de faire un parallèle entre les différentes familles de solutions, on présentera les équations sous la forme trouvée c'est à dire :

$$I_a = 0 \tag{4.55}$$

$$I_3 = I_2 \tag{4.56}$$

$$I_2 = -I_1 \tag{4.57}$$

$$I_1 = 0 \tag{4.58}$$

La deuxième famille de solutions sera composée elle aussi, des solutions présentées aux équations (4.55, 4.56 4.57 et 4.54). Par contre, ces solutions ne permettent pas de mettre toutes les équations à zéro. On doit donc poursuivre le processus de simplification. En regardant l'équation (4.41) qui est devenue  $j_{0,0,0} = 2\lambda_1^3 \lambda_2 I_1 [\Lambda_2 - \Lambda_3]$ , on s'aperçoit qu'il y a deux solutions possibles soit  $I_1 = 0$  et  $\lambda_3 = \lambda_2$ . On a discuté précédemment dû fait que la solution  $I_1 = 0$  permettait de mettre toutes les équations à zéro sans que l'on soit obligé d'avoir  $\lambda_1 = 1$ . Si on choisit cette solution, on aura donc une solution redondante et c'est pourquoi on choisit  $\lambda_3 = \lambda_2$ .

La deuxième famille de solutions sera donc formée des équations :

$$I_a = 0 \quad (4.59)$$

$$I_3 = I_2 \quad (4.60)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (4.61)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (4.62)$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 \quad (4.63)$$

## 4.4 Analyse des familles de solutions

L'analyse des familles de solutions consistera en une vérification de la validité de certaines équations ainsi que de la cohérence de l'ensemble des équations.

On vérifiera que les équations d'une famille de solutions peuvent coexister avec les équations de compensation statique puisqu'on sait que par défaut un mécanisme équilibré dynamiquement doit aussi être équilibré statiquement, les équations de compensation statique devront donc être satisfaites.

Pour ce faire, on utilisera quatre équations indépendantes dans l'ensemble d'équations (4.1) à (4.8). Il peut sembler inutile de réutiliser les équations de compensation statique puisque pour simplifier  $V$  et  $W$  (Eq. 3.16) et 3.17), on les a déjà utilisées. Mais cette façon de faire est pleinement justifiée puisqu'à la section 3.2, on voit clairement que  $V$  et  $W$  ne sont qu'une partie de  $H_0$ . Il reste donc des termes et des valeurs qui peuvent ne pas satisfaire les équations de contraintes.

### 4.4.1 Analyse de la première famille de solutions

Il est possible d'éliminer facilement la première famille de solutions en regardant les équations (4.21) et (4.22) qui doivent être égales à zéro. En effet, on ne doit pas produire un mécanisme à quatre barres qui dégénère en un autre mécanisme ou qui se transforme en une structure. Il faut donc que les distances  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $d$ , les

rayons de giration  $k_i$  ainsi que les masses  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  soient différents de zéro. C'est pourquoi on dira que les  $l_i, k_i, m_i, i = 1 \dots 3$  et  $d$  sont des quantités définies positives.

Si on regarde la première famille de solutions, on s'aperçoit que pour satisfaire  $I_a = 0$  (Eq. 4.22), il existe trois possibilités.

$$r_2 = 0 \quad (4.64)$$

$$\psi_2 = 2n\pi \quad (4.65)$$

$$\psi_2 = (2n + 1)\pi \quad (4.66)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

On peut vérifier la validité de la solution donnée à l'équation (4.64), en la substituant dans l'équation  $I_2 = 0$  (Eq. 4.21). Cette solution donne :

$$I_2 = k_2^2 m_2 = 0 \quad (4.67)$$

lorsqu'on utilise la solution donnée à l'équation (4.66), l'équation  $I_2 = 0$  donne :

$$I_2 = m_2(k_2^2 + r_2^2 + l_2 r_2) = 0 \quad (4.68)$$

En considérant que les valeurs  $m_2, k_2$  et  $l_2$  sont définies positives et que  $r_2$  est défini semi-positif. On constate que cette solution est impossible.

Pour la troisième solution il faut regarder les équations (4.21) et (4.8) sachant maintenant que  $I_3 = 0$ . Lorsqu'on y substitue la valeur de l'équation (4.66), ces équations deviennent :

$$I_3 = m_3(k_3^2 + r_3^2 - l_3 r_3 \cos \psi_3) = 0 \quad (4.69)$$

$$m_3 r_3 \cos \psi_3 + \frac{m_2 r_2 l_3}{l_2} = 0 \quad (4.70)$$

L'impossibilité apparaît clairement puisqu'il est impossible de satisfaire ces deux équations simultanément. En effet, pour la première équation  $\cos \psi_3$  doit être positif alors que dans la deuxième, il doit être négatif.

Puisqu'il est impossible de satisfaire l'équation (4.55), la première famille de solutions est donc impossible.

C'est pourquoi, on travaillera seulement avec la deuxième famille de solutions.



#### 4.4.1.1 Comportement à vérifier

Puisqu'on désire que l'expression donnée à l'équation (3.19) soit constante pour toutes valeurs de  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_1$ , il faut vérifier le comportement de cette expression pour certaines valeurs critiques. C'est-à-dire lorsque l'expression devient indéterminée pour certaines valeurs de  $\theta_1$ . Puisque le numérateur  $J_n$  est mis à zéro pour permettre à l'équation (3.19) d'être constante, les indéterminations apparaissent lorsque le dénominateur (Eq. 4.40) tend vers zéro.

On observe qu'il y a plusieurs possibilités qui donnent au dénominateur une valeur nulle mais avant de faire la vérification de tous les points, il faut se demander si ces points qui causent problème existent vraiment. Pour ce faire, on retourne aux équations (4.39) et (4.40) et l'on regarde s'ils ne se simplifient pas lorsqu'on substitue les contraintes de la deuxième famille de solutions. Si on substitue les contraintes données aux équations (4.62), (4.63), (4.59) et (4.60), dans  $J_n$  et  $J_d$ . On se retrouve avec :

$$J_n = 2\lambda_2(I_1 + I_2)(1 - C_1)Y_1 \quad (4.71)$$

$$J_d = 2\lambda_2(1 - C_1)Y_1 \quad (4.72)$$

On remarque alors que le dénominateur se simplifie complètement avec le numérateur. Cela implique qu'il n'y a aucun point qui peut causer problème car le dénominateur  $J_d$  après la simplification sera égal à 1.

#### 4.4.2 Analyse de la deuxième famille de solution

Puisque les conditions à satisfaire pour l'équilibrage statique données par Jean et Gosselin [1996] (Eqs. 4.5 — 4.8) sont équivalentes aux équations données par Berkof et Lowen [1969] (Eqs. 4.1 — 4.4), il est possible d'utiliser une combinaison d'équations indépendantes qui semble la plus appropriée pour les calculs que l'on effectuera. On utilisera donc les équations (4.2) et (4.4) de Berkof et Lowen [1969] sans inclure les deux autres équations car l'on devrait introduire deux nouvelles variables, pour les remplacer, on utilisera les équations (4.5) et (4.6) de Jean et Gosselin [1996].

Les équations de compensation statique (4.2) et (4.4) peuvent être manipulées pour donner les deux premières valeurs :

$$r_3 = \frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2} \quad (4.73)$$

$$\psi_3 = \pi + \psi_2 \quad (4.74)$$

On remarque que les conditions (4.62) et (4.63) ( $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_3 = \lambda_2$ ) sont très simples. C'est pourquoi on les utilise dès maintenant pour donner les prochaines valeurs. En utilisant l'équation (4.27) on obtient directement :

$$d = l_1 \quad (4.75)$$

$$l_3 = l_2 \quad (4.76)$$

On peut penser que certaines valeurs ont été oubliées car l'équation  $\Delta_1 = 1$  se simplifie comme suit  $l_2^2 - l_3^2 = 0$ . Ainsi, il est possible d'avoir deux valeurs pour  $l_3$ , une positive et l'autre négative. Cependant, on utilisera seulement la valeur positive car les valeurs de longueurs  $r_i, l_i$  servent à positionner des points en leur adjoignant les angles  $\psi_i, \theta_i$  (Fig. 3.1). Ainsi le couple de coordonnées  $(r_i, \psi_i)$  et équivalent au couple  $(-r_i, \psi_i + \pi)$ , de même pour le couple  $(l_i, \theta_i)$  qui est équivalent au couple  $(-l_i, \theta_i + \pi)$ . Puisqu'il est plus facile d'imaginer une longueur positive, on va seulement prendre la valeur positive. Si une valeur négative est bien une nouvelle solution, on devrait voir apparaître deux valeurs pour l'angle  $\psi_i$  (avec une différence de  $\pi$ ).

Avec l'équation (4.61), on trouve la valeur de  $k_2$ , ce qui donne :

$$k_2 = \sqrt{\frac{m_2 r_2 (l_2 \cos \psi_2 - r_2) - I_1}{m_2}} \quad (4.77)$$

Lorsque la valeur de  $k_2$  est remplacée dans l'équation (4.60), on trouve comme valeur pour  $k_3$  :

$$k_3 = \sqrt{\frac{m_3 r_3 (l_3 \cos \psi_3 - r_3) - I_1}{m_3}} \quad (4.78)$$

L'équation (4.59) peut être satisfaite par trois solutions différentes soit :

$$r_2 = 0 \quad (4.79)$$

$$\psi_2 = 2n\pi \quad (4.80)$$

$$\psi_2 = (2n + 1)\pi \quad (4.81)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$

Les solutions données aux équations (4.79) et (4.81) sont impossibles car chacune d'elles va donner une incompatibilité entre les équations (4.6) et (4.77). Pour que l'équation (4.6) soit égale à zéro on doit avoir  $\cos \psi_1$  plus petit que zéro alors que pour l'équation (4.77) la valeur de  $\cos \psi_1$  devrait être plus grande que zéro. Puisque c'est deux conditions sont exclusives, les solutions données aux équations (4.79) et (4.81) sont impossibles.

Si on travaille avec l'équation (4.5), on s'aperçoit qu'elle est satisfaite par les trois solutions décrites ci-dessous :

$$r_1 = 0 \quad (4.82)$$

$$\psi_1 = 2n\pi \quad (4.83)$$

$$\psi_1 = (2n + 1)\pi \quad (4.84)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

Encore une fois, on doit vérifier si toutes les solutions sont possibles. Si chaque valeur, donnée aux équations (4.82) et (4.84), est substituée dans l'équation (4.78), on se retrouve avec un radical négatif ce qui est impossible. On ne gardera donc que la solution donnée à l'équation (4.83).

Pour finir, l'équation (4.6) est satisfaite si :

$$r_2 = \frac{l_2 (l_1 m_2 + m_1 r_1)}{l_1 m_2} \quad (4.85)$$

On constate donc que pour la deuxième famille de solutions, on doit respecter les contraintes de compensation dynamique (CCD) suivantes : (4.73, 4.74, 4.75, 4.76, 4.77, 4.78, 4.80, 4.83 et 4.85).

TAB. 4.1 – *Contraintes de Compensation Dynamique du cas général* (noté  $M_4B-G$ ) (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ).

$r_3 = \frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2}$
$\psi_3 = \pi + \psi_2$
$d = l_1$
$l_3 = l_2$
$k_2 = \sqrt{\frac{m_2 r_2 (l_2 \cos \psi_2 - r_2) - I_1}{m_2}}$
$k_3 = \sqrt{\frac{m_3 r_3 (l_3 \cos \psi_3 - r_3) - I_1}{m_3}}$
$\psi_2 = 2n\pi$
$\psi_1 = 2n\pi$
$r_2 = \frac{l_2 (l_1 m_2 + m_1 r_1)}{l_1 m_2}$

Cet ensemble de solutions que l'on nommera *Contraintes de Compensation Dynamique du cas général* (noté  $M_4B-G$ ) (Tab. 4.1), contient deux modes d'assemblage (concave et convexe) pour le mécanisme à quatre barres puisque l'équation (4.34) peut être utilisée avec le signe négatif ou positif. Ceci est illustré schématiquement à la figure 4.2, où un mécanisme équilibré dynamiquement est représenté. Il est à noter que le mécanisme est équilibré pour les deux modes d'assemblage.

#### 4.4.2.1 Domaine des solutions pour le cas général

Les conditions incluses dans l'ensemble de solutions général *Contraintes de Compensation Dynamique du cas général* (noté  $M_4B-G$ ) donné au tableau 4.1 doivent permettre la formation d'un mécanisme physiquement valide. Cela implique que les valeurs des variables  $d$ ,  $l_3$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $k_2$  et  $k_3$  doivent être réelles et positives.

Puisque les valeurs de  $d$  et  $l_3$  sont directement dépendantes des valeurs à  $l_2$  et  $l_1$ , il est logique de penser que ces valeurs seront toujours valides. Les valeurs  $r_2$  et  $r_3$  calculées respectivement à l'aide des équations (4.85) et (4.73) ne pourront qu'être

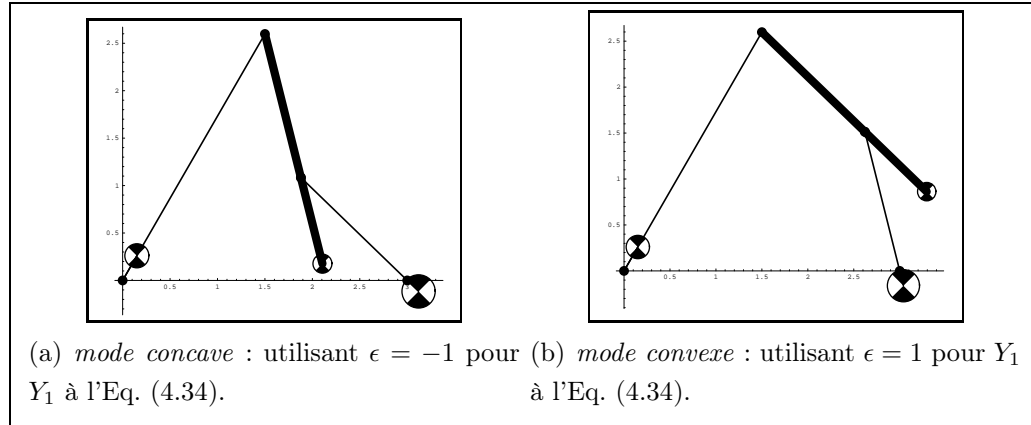


FIG. 4.2 – Mécanisme à quatre barres définis par les contraintes  $M_4B-G$  (Tab. 4.1). La dimension de  $\bullet$  est proportionnelle à la masse de la membrure et l'épaisseur du vecteur  $\mathbf{r}_i$  est proportionnel à la valeur de  $k_i$ .

valides puisque dans ces équations, on retrouve seulement des additions, multiplications et divisions ce qui ne peut que donner des termes réels et positifs.

L'inquiétude provient des variables  $k_2$  et  $k_3$  (Eqs. 4.77, 4.78). Dans ces dernières expressions, on retrouve des racines carrées, les termes sous le radical doivent donc donner une valeur plus grande que zéro.

Dû au fait que le domaine des solutions est dans  $\mathbb{R}^7$  (sept variables sont à considérer), il n'est pas évident à première vue de trouver des valeurs pour les inconnues qui satisfèrent les conditions associées à  $k_2$  et  $k_3$ . Cela laisse la possibilité que les contraintes de compensation dynamique général ( $M_4B-G$ ) ne soient valides que pour certaines valeurs des variables libres.

Afin d'illustrer ce concept, une application numérique est maintenant réalisée. Pour montrer la région de validité des CCD du mécanisme général, les valeurs de  $l_1$  et  $l_2$  pour lesquelles  $k_2^2 = 0$  et  $k_3^2 = 0$  seront tracées. Les valeurs de  $l_1$  et  $l_2$  varient entre  $-10$  et  $10$  alors que les autres variables sont fixées et ont comme valeurs :  $m_1 = 0.3$ ,  $m_2 = 0.05$ ,  $m_3 = 0.75$ ,  $k_1 = 0.15$  et  $r_1 = 0.3$ . Ceci permet de visualiser les zones de faisabilité (domaine de solutions) dans un espace bidimensionnel ( $l_1, l_2$ ). Les paramètres restants sont calculés à l'aide des CCD du mécanisme général ( $M_4B-G$ ) (i.e Tab. 4.1). Les résultats sont présentés à la figure 4.3.

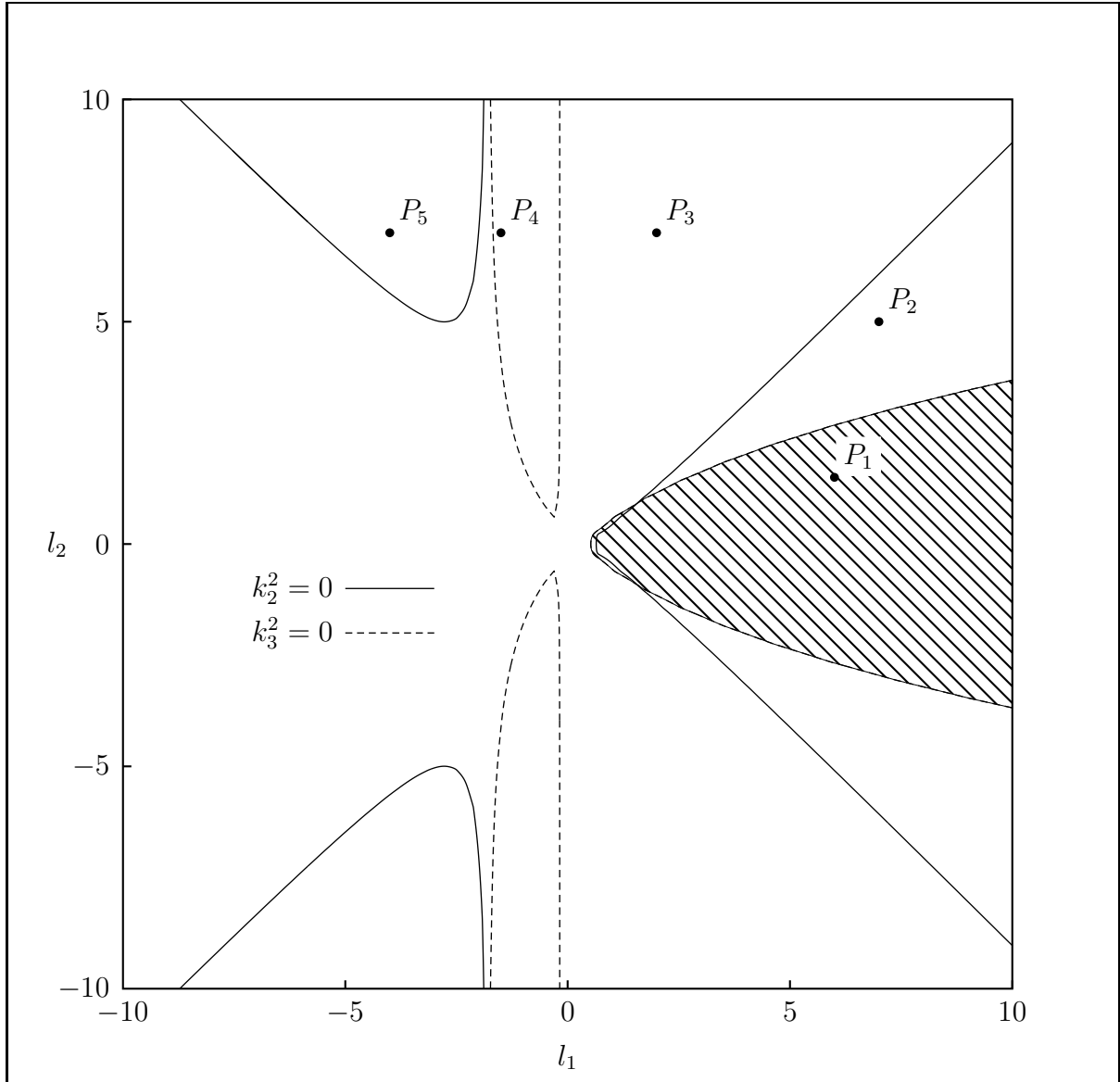


FIG. 4.3 – Exemple de domaine des solutions pour l'ensemble de solution du mécanisme général ( $M_4B-G$ ), avec certaines variables fixées ( $m_1 = 0.3$ ,  $m_2 = 0.05$ ,  $m_3 = 0.75$ ,  $k_1 = 0.15$  et  $r_1 = 0.3$ ).

On peut observer que les points dans la région 1 (par exemple  $P_1$ ) donneront des mécanismes à quatre barres valides. Quant aux points dans la région 2 (par exemple  $P_2$ ), ils donneront des valeurs imaginaires pour  $k_3$  alors que ceux dans la région 3 (par exemple  $P_3$ ) donneront des valeurs imaginaires pour  $k_2$  et  $k_3$ .

On remarque donc que les points à l'intérieur d'une courbe donneront des valeurs valides pour le  $k_i$  correspondant. Ainsi les points (par exemple  $P_4$ ), qui sont à l'intérieur

de la courbe définie par  $k_3^2 = 0$  donneront des valeurs positives pour  $k_3$  et des valeurs imaginaires pour  $k_2$  et vice versa pour le point  $P_5$ .

Comme on pouvait s'y attendre les régions valides sont l'intersection des régions intérieures aux deux courbes. Ces régions sont hachurées sur la figure 4.3. On observe donc qu'il existe une infinité de mécanismes équilibrés dynamiquement qui satisfont les CCD générales. Cependant, on observe aussi que le domaine de solution est limité dans l'espace des paramètres de design.

## 4.5 Vérification

Dans les sections précédentes, la génération d'équations de contraintes pour la compensation de mécanismes à quatre barres a été effectuée.

Lors de la démonstration permettant l'obtention des équations de contraintes de compensation dynamique, il est possible que certaines questions soient soulevées quant à la validité des équations.

Cela peut être dû au fait : que l'obtention des équations de contraintes de compensation dynamique comprend plusieurs étapes, que chaque étape s'appuyant sur la précédente étape, que des simplifications basées sur des déductions physiques et mathématiques, ont eues lieu.

C'est pourquoi cette section sera consacrée à la vérification des équations de contraintes.

Deux approches différentes seront utilisées. Une méthode analytique exploitera les équations de Lagrange pour faire la démonstration que la somme des moments ainsi que celle des forces sur la base sont égales à zéro (Sec. 4.5.2.1).

La deuxième approche utilisera les équations de Newton-Euler pour faire la démonstration (Sec. 4.5.2.2). Une approche numérique sera utilisée. Par conséquent, les paramètres physiques d'un mécanisme à quatre barres seront définis, ce qui permettra de finalement voir à quoi ressemble un mécanisme dynamiquement compensé.

### 4.5.1 Vérification de la compensation statique

Dans les sections précédentes et plus particulièrement les sections 4.1.1, 4.1.2, 4.4 et 4.4.2, on a utilisé le fait qu'un mécanisme à quatre barres peut être compensé statiquement pour développer les équations de compensation dynamique. Pour ce faire, on a utilisé des équations de contraintes de compensation statique. Cette affirmation a permis le développement des équations de contrainte pour la compensation dynamique.

Lorsqu'on utilisait les équations de contraintes de compensation statique, souvent ce n'était qu'un sous-ensemble des équations de contraintes. De plus, il pouvait être appliqué sur une partie seulement d'une équation.

Il serait important de vérifier qu'un mécanisme dynamiquement équilibré est aussi statiquement équilibré. C'est pourquoi on se réserve cette section, pour démontrer que les conditions obtenues pour la compensation dynamique donnent par défaut un mécanisme statiquement équilibré.

On a établi que le centre de masse d'un mécanisme compensé statiquement, devrait être fixe. Ceci implique que la quantité de mouvement du mécanisme devrait être égale à zéro comme le démontrent Berkof et Lowen [1969].

$$\sum_{i=1}^3 (m_i \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^3 (m_i \dot{y}_i) = 0 \quad (4.86)$$

Il faut donc vérifier que ces équations donnent bien zéro. Pour ce faire, on peut y substituer les CCD générales  $M_4B-G$  (Tab. 4.1) et remplacer les  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  par les équations (4.23 et 4.24).

En simplifiant les équations après avoir fait les manipulations, on se retrouve bien avec  $\sum_{i=1}^3 (m_i \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^3 (m_i \dot{y}_i) = 0$ . Ce qui permet de conclure qu'un mécanisme à quatre barres qui respecte les CCD générales est par défaut équilibré statiquement.



## 4.5.2 Vérification de la compensation dynamique

### 4.5.2.1 Vérification à l'aide des équations de Lagrange

La vérification à l'aide de la méthode de Lagrange sera faite d'une façon analytique.

Pour connaître les forces et le moment de réaction qui sont appliquées sur la base du mécanisme, on utilisera la notion de déplacements virtuels [Goldstein, 1981]. À l'aide des coordonnées généralisées, qui seront les déplacements virtuels du mécanisme, on calculera les forces généralisées du mécanisme avec l'équation suivante :

$$F_{q_r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} \quad (4.87)$$

où les coordonnées généralisées  $q_r$  sont associées aux déplacements virtuels de la base du mécanisme.

Les déplacements virtuels sont représentés à la figure 4.4, ils consistent en un déplacement  $\mathbf{s}$  du point  $P_1$  — l'origine du repère  $\mathcal{R}$  — et d'une rotation  $\delta$  de la base dans le plan XY i.e. par rapport au repère inertiel  $\mathcal{R}_0$ .

Les équations seront développées dans le repère du mécanisme à quatre barres ( $\mathcal{R}$ ) qui n'est pas inertiel car cela permettra l'utilisation des mêmes variables lors de la vérification selon la méthode de Newton (Sec. 4.5.2.2).

Puisque le mécanisme se déplace dans le plan on utilisera des équations en 2D seulement, mais sous une forme vectorielle. Ainsi il sera plus facile de passer au 3D lorsque le temps sera venu. Pour permettre l'écriture des équations, on introduira un nouvel opérateur  $\boxtimes$  dont les propriétés sont définies à l'annexe B.

Pour faire l'analyse, on cherche l'énergie cinétique ( $T_i$ ) des éléments qui composent le corps. L'énergie cinétique est donnée par :

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{cm_i} \cdot \mathbf{v}_{cm_i} + \frac{1}{2} \bar{I}_i (\dot{\delta} + \omega_i)^2 \quad (4.88)$$

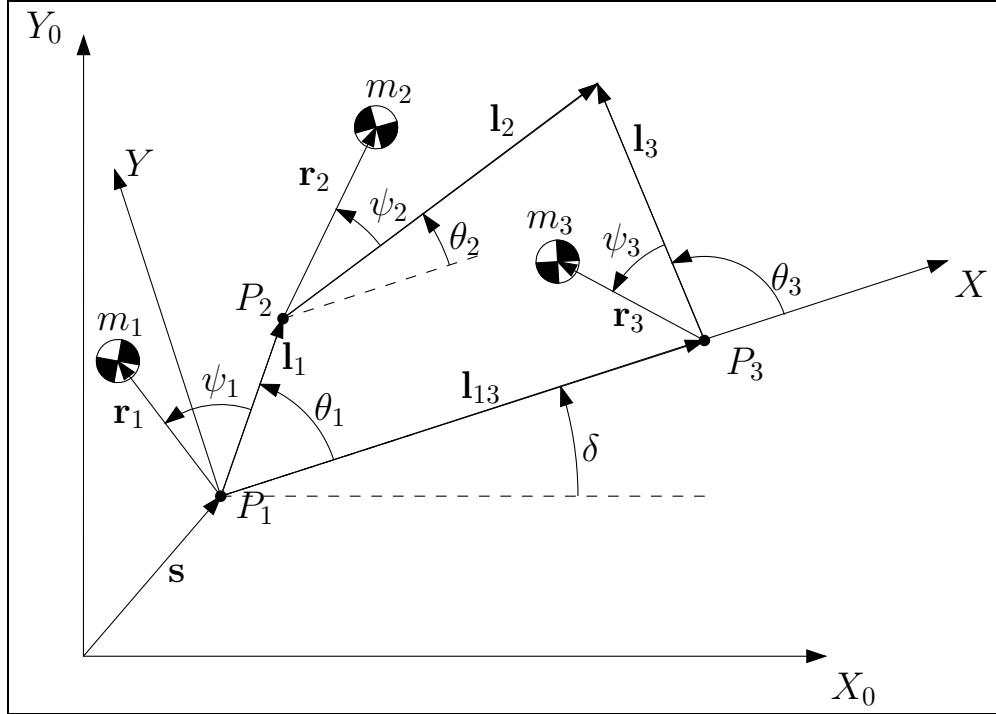


FIG. 4.4 – Déplacement virtuel d'un mécanisme à quatre barres.

où

$$\omega_i = \dot{\theta}_i \quad (4.89)$$

$$\bar{I}_i = k_i^2 m_i \quad (4.90)$$

$$(4.91)$$

et où  $m_i$  représente la masse de la membrure  $i$ ,  $\mathbf{v}_{cm_i}$  est la vitesse du centre de masse de la membrure  $i$ , exprimée dans le repère  $\mathcal{R}$  et définie aux équations (4.92, 4.95 et 4.97) pour la membrure un, deux et trois respectivement,  $\bar{I}_i$  est le moment d'inertie de la membrure par rapport à son centre de masse et  $k_i$  est son rayon de giration,  $\omega_i$  est la vitesse angulaire du corps  $i$  par rapport au repère  $\mathcal{R}$  du mécanisme à quatre barres et finalement  $\delta$  est la rotation du repère  $\mathcal{R}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ .

Pour le membre d'entrée, c'est-à-dire la membrure un, on définit la vitesse du centre de masse donné dans le repère du mécanisme à quatre barres par :

$$\mathbf{v}_{cm_1} = \frac{ds}{dt} + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{s} + \omega_1 \boxtimes \mathbf{r}_1 + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{r}_1 \quad (4.92)$$

avec

$$\mathbf{s} = [x, y]^T \quad (4.93)$$

$$\mathbf{r}_i = r_i [\cos(\psi_i + \theta_i), \sin(\psi_i + \theta_i)]^T \quad (4.94)$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur reliant le repère du mécanisme à quatre barres ( $P_1$ ) au repère  $\mathcal{R}_0$  donné dans le repère du mécanisme ( $\mathcal{R}$ ) et  $\mathbf{r}_i$  est le vecteur reliant le centre de masse du membre  $i$  au point  $P_i$  le tout donné dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Pour le coupleur, c'est-à-dire le membre deux, la vitesse du centre de masse sera définie comme suit :

$$\mathbf{v}_{cm_2} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{s} + \omega_1 \boxtimes \mathbf{l}_1 + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{l}_1 + \omega_2 \boxtimes \mathbf{r}_2 + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{r}_2 \quad (4.95)$$

avec

$$\mathbf{l}_i = l_i [\cos \theta_i, \sin \theta_i]^T \quad (4.96)$$

$\mathbf{l}_i$  est le vecteur reliant les deux articulations d'une même membrure exprimé dans le repère du mécanisme à quatre barres ( $\mathcal{R}$ ), ainsi pour le membre un,  $\mathbf{l}_1$  reliera le point  $P_2$  au point  $P_1$ .

Et finalement pour le membre de sortie, c'est-à-dire le membre trois, la vitesse du centre de masse est décrite par l'équation suivante :

$$\mathbf{v}_{cm_3} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{s} + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{l}_{13} + \omega_3 \boxtimes \mathbf{r}_3 + \dot{\delta} \boxtimes \mathbf{r}_3 \quad (4.97)$$

avec

$$\mathbf{l}_{13} = [d, 0]^T \quad (4.98)$$

où  $\mathbf{l}_{13}$  est le vecteur reliant le point  $P_3$  au point  $P_1$  exprimé dans le repère  $\mathcal{R}$ .

**Vérification de la compensation statique selon l'axe  $X$  et  $Y$**  L'équation pour trouver la force qui s'exerce sur la base selon l'axe des  $X$  est donnée par :

$$L_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.99)$$

où  $T = \sum_{i=1}^3 T_i$  et  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  est donné à l'équation (4.88).

On se retrouve donc avec :

$$T = T_{x0} + T_x \quad (4.100)$$

$$T_{x0} = f(\delta, \dot{\delta}, y, \dot{y}) \quad (4.101)$$

$$T_x = A_1 x + A_2 \dot{x} \quad (4.102)$$

où

$$A_1 = 0 \quad (4.103)$$

$$A_2 = - [l_1 m_2 \sin \theta_1 + m_1 r_1 \sin (\psi_1 + \theta_1)] \dot{\theta}_1 - m_2 r_2 \sin (\psi_2 + \theta_2) \dot{\theta}_2 - m_3 r_3 \sin (\psi_3 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \quad (4.104)$$

Puisque les variables  $\delta, \dot{\delta}, y, \dot{y}, x$  et  $\dot{x}$  sont des déplacements et vitesses virtuels et que pour cette section, on s'intéresse seulement au déplacement selon  $x$  (i.e  $x$  et  $\dot{x}$ ), il est possible de mettre les valeurs de  $\delta, \dot{\delta}, y, \dot{y}$  et  $\ddot{x}$  à zéro car aucune dérivation de ces termes par le Lagrangien n'est effectuée et à la fin de la procédure, ils devraient être mis à zéro, donc  $T_{x0} = 0$ .

Une autre étape qui permet de simplifier les équations est de garder seulement les termes linéaires en  $\dot{x}$  ou  $x$  puisqu'ils seront dérivés un à un dans le Lagrangien. Pour les termes non linéaires en  $\dot{x}$  ou  $x$ , c'est à dire  $\dot{x}^i$  ou  $x^i$ , avec  $i > 1$ , il est possible de les mettre à zéro avant la dérivation car si on suit le cours normal après leur dérivation par le Lagrangien ils donneront  $\ddot{x}\dot{x}^{i-1}$  ou  $\dot{x}^{i-1}$  mais puisque ce sont des déplacements virtuels, ils seront mis à zéro, ainsi ils n'ont aucune influence.

### Substitution des contraintes de la famille de solution générale (M4B-G)

Maintenant que l'on a simplifié l'équation pour ne garder que les termes importants, on peut introduire les contraintes de compensation dynamique. On utilise donc les CCD générales (Tab. 4.1), ce qui donne :

$$T_x = (l_1 m_2 + m_1 r_1) \left( S_3 \dot{\theta}_3 - S_1 \dot{\theta}_1 - S_2 \dot{\theta}_2 \right) \dot{x} \quad (4.105)$$

Maintenant, on peut transformer cette équation en une équation qui dépend de la variable d'entrée seulement. On remplace donc la valeur de  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  par leur valeur donnée aux équations (4.23 et 4.24).

Si on regarde de nouveau la valeur de  $T_x$ , on remarque qu'elle est maintenant égale à zéro. Cela implique que la force selon l'axe  $X$  qui sera donnée par l'équation (4.99), est égale à zéro. Il n'y a pas de force appliquée sur la base du mécanisme ce qui indique que le mécanisme est équilibré statiquement selon l'axe  $X$ .

On peut faire la même démarche pour l'axe  $Y$  et l'on obtiendra les mêmes résultats.

**Vérification de la compensation dynamique (Valeur du moment)** L'équation pour trouver le moment qui s'exerce sur la base selon l'axe des  $X$  est donnée par :

$$L_\delta = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} \quad (4.106)$$

où  $T = \sum_{i=1}^3 T_i$  et  $T_i$  est donné à l'équation (4.88).

On peut simplifier les équations en mettant les valeurs  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $y$  et  $\dot{y}$  tout de suite à zéro puisqu'on les mettra de toute façon à zéro après avoir appliqué le Lagrangien et de plus aucune dérivation de ces termes ne sera effectuée.

Une autre étape qui permet de simplifier les équations est de garder seulement les termes linéaires en  $\dot{\delta}$ ,  $\cos \delta$  et  $\sin \delta$  puisqu'ils seront dérivés dans le Lagrangien, les autres termes en  $\delta$  ( $\ddot{\delta}$ ,  $\dot{\delta}^2$ ) peuvent être mis à zéro car leur dérivation dans le Lagrangien va donner zéro.

On se retrouve donc avec :

$$T_\delta = B_1 \delta + B_2 \dot{\delta} \quad (4.107)$$

où

$$B_1 = 0 \quad (4.108)$$

$$B_2 = \{ I_{1,zz} + m_1 r_1^2 + l_1 m_2 [l_1 + r_2 \cos(\psi_2 - \theta_1 + \theta_2)] \} \dot{\theta}_1 + \\ \{ I_{2,zz} + m_2 r_2 [r_2 + l_1 \cos(\psi_2 - \theta_1 + \theta_2)] \} \dot{\theta}_2 + \\ \{ I_{3,zz} + m_3 r_3 [r_3 + d \cos(\psi_3 + \theta_3)] \} \dot{\theta}_3 \quad (4.109)$$

**Substitution des contraintes de la famille de solution générale  $M4B-G$**   
Maintenant que l'on a simplifié l'équation pour ne garder que les termes importants, on

peut introduire les contraintes de compensation dynamique. On utilise donc les CCD générales (Tab. 4.1), ce qui donne :

$$T_\delta = \{ [m_1(k_1^2 + r_1^2) + l_1^2 m_2 + l_1(l_1 m_2 + m_1 r_1)(C_1 C_2 + S_1 S_2)] \dot{\theta}_1 + \\ [l_2 r_2 m_2 + l_1(l_1 m_2 + m_1 r_1)(C_1 C_2 + S_1 S_2) - I_1] \dot{\theta}_2 - \\ [l_2 r_2 m_2 + l_1(l_1 m_2 + m_1 r_1)C_3 + I_1] \dot{\theta}_3 \} \dot{\delta} \quad (4.110)$$

Maintenant, on peut transformer cette équation en une équation qui dépend de la variable d'entrée seulement. On remplace donc la valeur de  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  par leur valeur donnée aux équations (4.23 et 4.24). On fait de même pour les variables  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et  $C_2$  qu'on remplace par leur valeur donnée aux équations (4.28), (4.29), (4.30) et (4.33).

Si on regarde de nouveau la valeur de  $T_\delta$ , on remarque qu'elle est maintenant égale à zéro. Cela implique que le moment qui sera donné par l'équation (4.106), est égal à zéro. Il n'y a pas de moment appliqué sur la base du mécanisme ce qui indique que le mécanisme est équilibré dynamiquement en rotation.

Il est à remarquer que l'énergie cinétique du mécanisme à quatre barres n'est pas nécessairement égale à zéro car  $T_x$ ,  $T_y$  et  $T_\delta$  ne représentent qu'une petite partie de l'énergie cinétique totale puisqu'on a utilisé seulement la partie qui pouvait donner une force lorsqu'on lui appliquait l'équation de Lagrange.

#### 4.5.2.2 Vérification selon la méthode de Newton

Dans cette section, une vérification numérique de la compensation dynamique d'un mécanisme, pour lequel on a les équations de contraintes de compensation dynamique, sera effectuée.

Le mécanisme possède 1 degré de liberté. Ainsi, il faut installer un actionneur sur le mécanisme. Cet actionnement se fera par le biais d'un moteur qui sera fixé sur la base et entraînera le membre  $l_1$  du mécanisme par le biais de l'articulation du point  $P_1$  (Fig. 4.5).

La méthode de Newton permettra de vérifier que le couple moteur appliqué sur la base, dû au principe d'action-réaction, est compensé par le couple généré lors du mouvement du mécanisme (Fig. 4.5). C'est-à-dire par le couple produit par les forces

aux points d'attache du mécanisme avec sa base. Le couple moteur sera transmis au mécanisme par l'articulation un puisque le moteur sera monté sur cette articulation. Il n'y aura pas de couple à l'articulation reliant le membre trois et la base puisque cette articulation est une articulation rotoïde libre qui ne supporte aucun moment.

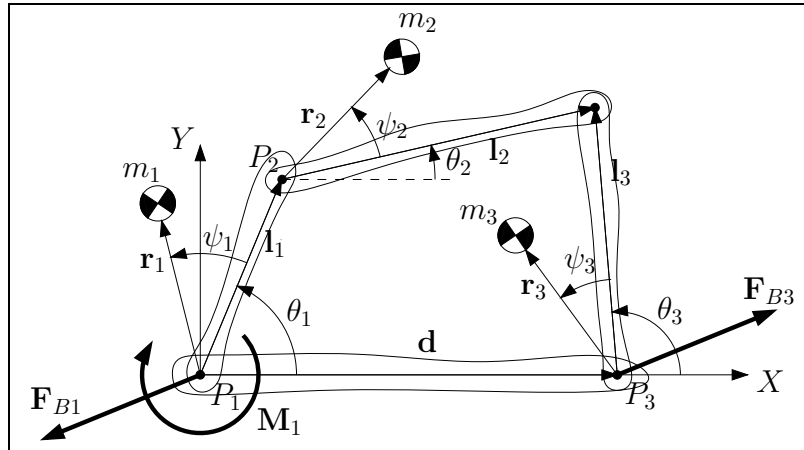


FIG. 4.5 – Forces et moments entre la base et le mécanisme.

Pour bien étudier les forces en question, on utilisera la méthode du diagramme des corps libres (DCL) pour chaque membrure (Fig.4.6), ce qui permettra, entre autre, de connaître les forces internes entre la base et le membre d'entrée ainsi qu'entre la base et le membre de sortie. Toutes les variables seront exprimées dans le repère de la base ( $\mathcal{R}$ ).

Puisque le mécanisme se déplace dans le plan, on utilisera des équations en 2D seulement, mais sous une forme vectorielle. Ainsi il sera plus facile de passer au 3D

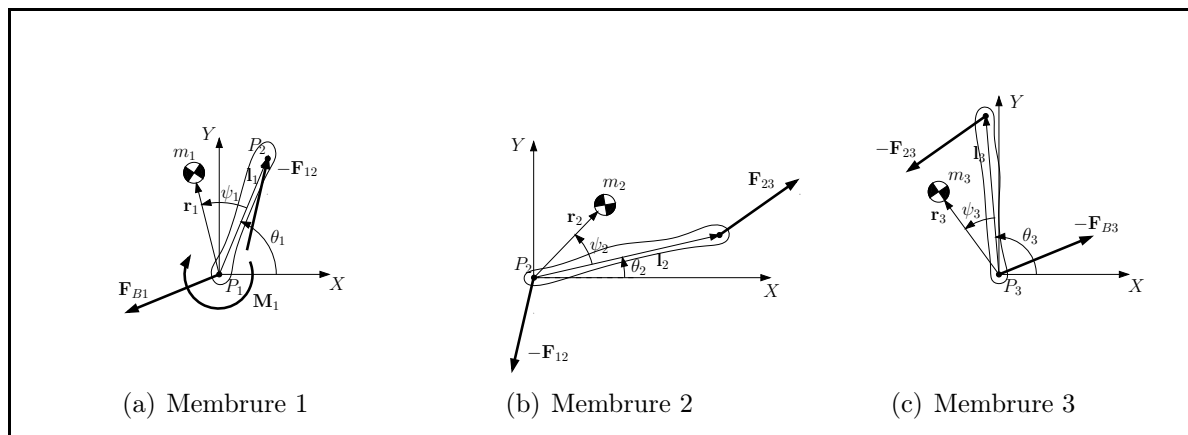


FIG. 4.6 – Diagramme des corps libres des différentes membrures.

lorsque le temps sera venu. Pour travailler sur les vecteurs en 2D on prendra l'opérateur  $\boxtimes$  défini à l'annexe B.

Pour établir les équations de Newton on doit définir certains termes. Ainsi, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la membrure  $i$  seront définies par :

$$\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt} \quad (4.111)$$

$$\alpha_i = \frac{d\omega_i}{dt} \quad (4.112)$$

Les vitesses angulaires  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  sont calculées à l'aide des équations (4.23) et (4.24), les accélérations peuvent être déduites en dérivant les équations précédentes par rapport au temps.

L'accélération du centre de masse du membre  $i$  par rapport au point  $P_1$  du repère  $\mathcal{R}_i$  est donnée par :

$$\mathbf{a}_{cm,i} = \mathbf{a}_i + \alpha_i \boxtimes \mathbf{r}_i + \omega_i \boxtimes (\omega_i \boxtimes \mathbf{r}_i) \quad (4.113)$$

où

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i-1} + \alpha_{i-1} \boxtimes \mathbf{l}_{i-1} + \omega_{i-1} \boxtimes (\omega_{i-1} \boxtimes \mathbf{l}_{i-1}) \quad (4.114)$$

Le vecteur  $\mathbf{a}_i$  représente l'accélération du point  $P_i$  par rapport au point  $P_1$ , le vecteur  $\mathbf{r}_i$  se retrouve à l'équation (4.94) et  $\mathbf{l}_i$  est défini à l'équation(4.96).

**Forces et moments sur le membre d'entrée** Le premier membre subit l'action de plusieurs forces qui sont décrites par :

$$-\mathbf{F}_{B1} + \mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_{cm,1} \quad (4.115)$$

où le vecteur  $\mathbf{F}_{B1}$  est la force exercée par la membrure d'entrée ( $l_1$ ) sur la base (membrure  $d$ ),  $\mathbf{F}_{ij}$  est la force interne exercée par le membre  $j$  sur le membre  $i$  et  $\mathbf{a}_{cm,1}$  est défini à l'équation (4.113). L'accélération  $\mathbf{a}_1$  sera égale à  $[0, 0]^T$  puisque le point  $P_1$  ne bouge pas.

Le moment  $M_{1d}$  généré par le moteur sur le membre 1 devra produire les accélérations et vitesses qu'on demande au mécanisme et sera aussi égal à :

$$M_{1d} = -\mathbf{l}_1 \boxtimes \mathbf{F}_{12} + I_1 \alpha_1 + \mathbf{r}_1 \boxtimes (m_1 \mathbf{a}_{cm,1}) \quad (4.116)$$



où  $I_i$  est le moment d'inertie par rapport au centre de masse de la membrure  $i$ ,  $\mathbf{r}_i$  est défini à l'équation (4.94).

**Forces et moments sur le coupleur** Le coupleur subira l'effet des forces décrites par l'équation :

$$-\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} = m_2 \mathbf{a}_{cm,2} \quad (4.117)$$

Le vecteur  $\mathbf{a}_{cm,2}$  est défini à l'équation (4.113).

Sachant que les articulations reliant le coupleur aux autres membres du mécanisme sont des articulations rotoïdes et qu'elles ne peuvent supporter aucun moment. L'équation du moment au point  $P_2$  sera :

$$\mathbf{l}_2 \boxtimes \mathbf{F}_{23} = I_2 \alpha_2 + \mathbf{r}_2 \boxtimes (m_2 \mathbf{a}_{cm,2}) \quad (4.118)$$

alors que pour le point  $P_3$  cela donnera :

$$-\mathbf{l}_2 \boxtimes -\mathbf{F}_{23} = I_2 \alpha_2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{l}_2) \boxtimes (m_2 \mathbf{a}_{cm,2}) \quad (4.119)$$

**Forces et moments sur le membre de sortie** Le membre de sortie subira l'effet des forces données par :

$$\mathbf{F}_{B3} + \mathbf{F}_{32} = m_3 \mathbf{a}_{cm,3} \quad (4.120)$$

où  $\mathbf{F}_{B3}$  est la force que le membre de sortie exerce sur la base, l'accélération  $\mathbf{a}_{cm,3}$  est défini à l'équation (4.113). L'accélération  $\mathbf{a}_3$  sera égale à  $[0, 0]^T$  puisque le point  $P_3$  ne bouge pas.

Puisque l'articulation qui relie le coupleur au membre de sortie est une articulation rotoïde le moment dans cette articulation devrait être égal à zéro :

$$\mathbf{l}_3 \boxtimes \mathbf{F}_{32} = I_3 \alpha_3 + \mathbf{r}_3 \boxtimes (m_3 \mathbf{a}_{cm,3}) \quad (4.121)$$

**Résolution des équations de forces et de moments pour la famille de solution générale ( $M4B-G$ )** Si un prototype d'un mécanisme à quatre barres dynamiquement équilibré était construit, la séquence pour valider l'équilibrage serait de démarrer

le moteur qui actionne le mécanisme et d'enregistrer le moment généré par le moteur, la position et la vitesse des membrures. Les valeurs identifiées pourraient être utilisées dans les équations de Newton, puisqu'aucun prototype n'est construit, la séquence sera donc modifiée.

La méthode utilisée consiste à prendre au hasard des valeurs (la position, la vitesse et l'accélération de la membrure d'entrée) et trouver les forces internes ainsi que le moment sur la base qui devraient produire ces valeurs.

Pour résoudre les équations et trouver les valeurs des forces impliquées dans ce mécanisme, on donnera des valeurs aux variables libres de la famille de solutions  $M4B-G$  (Tab. 4.2). Les autres variables seront calculées à partir des CCD générales. De plus, on donnera des valeurs quelconques pour  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_1$  (Tab. 4.3). Il est à noter que les valeurs calculées sont données numériquement dans les tableaux avec un nombre limité de chiffres. Cependant, pour les calculs un nombre beaucoup plus grand de chiffres sont utilisés afin d'obtenir une bonne précision sur les forces et moments de réaction calculés.

TAB. 4.2 – Variables définissant un mécanisme à quatre barres, \* indique les variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 4.4.2.

Variable	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$l_i$ (m)	3	1.56	1.56 *
$m_i$ (kg)	0.3	0.05	0.75
$r_i$ (m)	0.3	2.496 *	0.1664 *
$k_i$ (m)	0.15	1.54556 *	0.166514 *
$\psi_i$ (rad)	0 *	0 *	$\pi$ *

La valeur de  $d$  est donnée par l'équation (4.75).

Avec ces valeurs, le mécanisme à quatre barres est entièrement défini. Le mécanisme est illustré schématiquement à la figure 4.2. Sur cette figure, la taille des cercles désignant les centres de masse est proportionnelle à la masse de la membrure et la largeur de la ligne du vecteur  $\mathbf{r}_i$  est proportionnelle à la valeur de  $k_i$ .

TAB. 4.3 – Valeurs de la trajectoire du mécanisme. Les valeurs marquées d'un \* sont calculées à l'aide des équations de la section 4.2.1. Les valeurs des colonnes + sont calculées avec  $\epsilon = 1$  à l'équation (4.34), alors que celles de la colonne – sont calculées avec  $\epsilon = -1$ .

Positions	Membre 1	Membre 2		Membre 3	
	+ et –	+	–	+	–
$\theta_i$ (rad)	$\frac{\pi}{3}$	-0.76895*	-1.32544*	1.81615*	2.37264*
$\dot{\theta}_i$ (rad/s)	0.40143	-1.01629*	1.41771*	1.41771*	-1.01629*
$\ddot{\theta}_i$ (rad/s <sup>2</sup> )	1.16937	-8.00431*	9.17369*	9.17369*	-8.00431*

Puisqu'on a donné des valeurs à toutes les variables, il est maintenant possible de calculer la valeur des forces et des moments. Ce qui donne les valeurs du tableau 4.4.

TAB. 4.4 – Forces et moments internes et externes calculés pour le mécanisme à quatre barres défini aux tableaux 4.2 et 4.3. Les valeurs des colonnes + sont calculées avec  $\epsilon = 1$  à l'équation (4.34), alors que ceux de la colonne – sont calculées avec  $\epsilon = -1$ .

$\mathbf{F}_{B1}$ (N)	$\mathbf{F}_{12}$ (N)	$\mathbf{F}_{32}$ (N)		$\mathbf{F}_{B3}$ (N)	$M_1$ (Nm)
		+	–		
2.4476	2.3492	-1.3979	-3.2348	-2.4476	12.1654
-4.0551	-4.0151	4.5766	3.4269	4.0551	

Si on regarde la valeur des efforts sur la base ( $\mathbf{F}_B$ ), on constate qu'ils sont nuls puisque la base subit les forces de  $\mathbf{F}_{B1}$  et  $\mathbf{F}_{B3}$ . Si on additionne leurs valeurs on se retrouve avec un vecteur nul.

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_{B1} + \mathbf{F}_{B3} \quad (4.122)$$

Si on calcule le moment exercé sur la base au point d'attache du membre d'entrée, le moment total provient de deux sources. La première est le moment dû au moteur, la deuxième source provient de la force  $\mathbf{F}_{B3}$  qui possède un bras de levier.

Donc, le moment sur la base calculé au point d'attache du membre d'entrée est :

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{l}_{13} \times \mathbf{F}_{B3} \quad (4.123)$$

ce qui donne bien zéro.

Si on calcule la valeur de l'énergie cinétique du mécanisme à partir de l'équation (4.88), on trouve comme valeur  $T = T_1 + T_2 + T_3 = 0.34039$  J. Ce qui prouve que, même si le mécanisme est en mouvement à cet instant, la force et le moment exercés sur la base sont zéro.

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de développer un ensemble de conditions qui permettent de générer toute une famille de mécanismes à quatre barres plans qui sont dynamiquement équilibrés. Les mécanismes ainsi obtenus sont équilibrés pour leur deux modes d'assemblage. Peu importe la trajectoire réalisée (positions, vitesses, accélérations), ces mécanismes généreront toujours des forces et moments de réaction nuls sur leur base. Les résultats obtenus ont été validés grâce à deux approches différentes. Finalement, il a été observé que le domaine des solutions possibles pour de tels mécanismes demeure limité dans l'espace des paramètres de design en raison de l'opposition de contraintes faisant intervenir des racines carrées.

# Chapitre 5

## Mécanisme à quatre barres : Cas particuliers

Au chapitre 4, l'étude des mécanismes à quatre barres s'est restreinte aux mécanismes généraux. C'est-à-dire qu'aucune contrainte de compensation dynamique ne devait être donnée avant d'établir les coefficients de l'équation (3.20).

Cette approche est valide si on veut établir les équations générales. Mais, cette approche peut omettre des familles de solutions, puisqu'une contrainte simple introduite en amont de l'équation (3.20) peut amener à la simplification des équations et ainsi, faire sortir de nouvelles familles de solutions.

Lors de l'étude du cas général, on avait relevé des pistes à suivre pour trouver des cas particuliers. La première piste vient du fait que les équations de compensation statique

utilisées (Eqs. 4.1— 4.4) ou leur équivalent (Eqs. 4.5— 4.8) n'étaient que suffisantes (et non nécessaires) à l'obtention de la compensation statique. Il a été démontré [Gosselin, 1997] que certaines longueurs des membrures permettent d'obtenir une compensation statique sans pour autant satisfaire les équations de compensation statique mentionnées ci-haut.

La deuxième piste vient du fait que, pour l'équation (4.39), les variables  $C_1$ ,  $S_1$  et  $Y_1$  étaient considérées indépendantes. Cette hypothèse est valide lorsque aucune contrainte ne peut être introduite à priori. Cependant, si cette restriction n'est plus à respecter, on peut se pencher sur les cas où les variables sous le radical s'organisent pour former un carré parfait et ainsi, faire disparaître le radical. Cela permettrait aux termes composants  $Y_1$  de se combiner avec les  $C_1$ ,  $S_1$  et ainsi obtenir une équation où le nombre de coefficients à mettre à zéro est diminué. On doit aussi analyser le cas où l'on peut sortir seulement une partie des éléments qui se trouvent sous le radical.

## 5.1 Cas spéciaux de la compensation statique

Il a été démontré par Gosselin [1997] que les équations de Berkof et Lowen [1969] étaient suffisantes mais non nécessaires pour avoir un mécanisme compensé statiquement. Le fait d'avoir les contraintes suivantes  $l_1 = l_3$  et  $l_2 = d$  produit seulement deux équations de contraintes lorsque la démarche de Berkof et Lowen [1969] est utilisée. Dans les sections suivantes, on montrera par une méthode similaire que lorsque  $l_1 = l_2$  et  $l_3 = d$  les équations de Berkof et Lowen [1969] ne sont que suffisantes. Mais d'abord il faut établir la forme que prend l'expression de  $Y_1$  dans ces cas particuliers.

## 5.2 Simplification de $Y_1$

Au chapitre 4, on avait posé comme condition générale que  $Y_1$  (Eq. 4.34) était indépendant des  $C_1^n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$  pour toute valeur de  $\theta_1$ . Mais il se peut que cela ne soit pas vrai, puisqu'un certain agencement des paramètres du mécanisme peut amener une simplification de  $Y_1$ , comme l'a démontré Gosselin [1997]. Cette simplification peut se traduire par la simplification totale de la racine carrée si on peut sortir un carré

parfait, ou, si la racine carrée devient égale à zéro. Mais il y a aussi la possibilité de sortir un facteur comprenant un  $C_1^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  qui pourra se combiner avec les  $C_1$  de  $J_n$  (Eq. 4.39). Chacun de ces cas est maintenant analysé.

### 5.2.1 Simplification de $Y_1$ en sortant un carré parfait

Pour que  $Y_1$  ne soit plus dépendant des  $C_1$ , il faut donc avoir une des deux possibilités suivantes ; soit que  $Y_1$  est un carré parfait ou que  $Y_1$  est égal à zéro. Si on fait le développement de l'équation (4.34), on s'aperçoit que le radical possède un terme égal à  $4C_1^4$ . Il est donc impossible que ce terme soit égal à zéro pour toute valeur de  $\theta_1$ . Ainsi,  $Y_1$  ne peut être égal à zéro. Il faut donc analyser la possibilité que le terme  $Y_1$  devienne un carré parfait lorsque les paramètres du mécanisme prennent certaines valeurs spécifiques.

Pour avoir un carré parfait sous le radical, il faut donc que  $Y_1$  soit de la forme :

$$Y_1 = \epsilon \sqrt{Y_{1i}} \quad (5.1)$$

$$Y_{1i} = (a_2 C_1^2 + a_1 C_1 + a_0)^2 = a_2^2 C_1^4 + 2a_1 a_2 C_1^3 + (a_1^2 + 2a_0 a_2) C_1^2 + 2a_1 a_0 C_1 + a_0^2 \quad (5.2)$$

avec  $\epsilon$  défini à l'équation (4.38).

Il est à noter que, s'il est possible de trouver un carré parfait pour  $Y_1$  le signe de  $a_2$  a peu d'importance puisque la solution sera nécessairement représentée dans l'équation par le  $\epsilon$ . Ainsi :

$$Y_1 = \epsilon \left| (a_2 C_1^2 + a_1 C_1 + a_0) \right| \text{ avec } a_2 \geq 0 \quad (5.3)$$

donnera la solution positive si  $\epsilon$  égale 1 et la solution négative lorsque  $\epsilon$  est égale à  $-1$ .

Par ailleurs, le développement de l'expression sous la racine carrée de l'équation (4.34) donne

$$Y_{1i} = b_4 C_1^4 + b_3 C_1^3 + b_2 C_1^2 + b_1 C_1 + b_0 \quad (5.4)$$

avec

$$b_4 = 4 \quad (5.5)$$

$$b_3 = -8(\Delta_1 - \Lambda_2) \quad (5.6)$$

$$b_2 = 4 [\Delta_1^2 - \Lambda_1 (1 + \Lambda_2) - \Lambda_2] \quad (5.7)$$

$$b_1 = 8\Lambda_1(\Delta_1 - \Lambda_2) \quad (5.8)$$

$$b_0 = 4\Lambda_1 [\Lambda_2 (1 + \Lambda_1) - \Delta_1^2] \quad (5.9)$$

où  $\Delta_1$  est défini à l'équation (4.31).

Ainsi, il ne reste plus qu'à établir les correspondances entre les différentes valeurs en comparant les équations (5.2) et (5.4), ce qui conduit à :

$$0 = b_4 - a_2^2 \quad (5.10)$$

$$0 = b_3 - 2a_1a_2 \quad (5.11)$$

$$0 = b_2 - (a_1^2 + 2a_0a_2) \quad (5.12)$$

$$0 = b_1 - 2a_1a_0 \quad (5.13)$$

$$0 = b_0 - a_0^2 \quad (5.14)$$

Les équations (5.10) à (5.14) doivent être satisfaites pour obtenir un carré parfait pour  $Y_1$ .

On remarque que l'équation (5.10) donne deux solutions soit :

$$a_2 = 2 \quad (5.15)$$

$$a_2 = -2 \quad (5.16)$$

Il est à noter que la solution (5.16) peut être négligée comme mentionné lors de la présentation de l'équation (5.3).

Ainsi, toutes les dérivations subséquentes seront faites avec  $a_2 = 2$ . Si on passe à l'équation (5.11), elle sera égale à zéro lorsque :

$$a_1 = -1 - \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \quad (5.17)$$

Après avoir introduit la valeur de  $a_1$  dans les équations restantes. On trouve :

$$0 = -4(a_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2\Lambda_3) \quad (5.18)$$



ce qui donnera lorsque l'équation (5.12) sera égale à zéro

$$a_0 = -\Lambda_1 - \Lambda_2\Lambda_3 \quad (5.19)$$

Lorsque l'équation (5.13) est simplifiée à l'aide des variables  $a_1$  et  $a_0$ , elle devient :

$$0 = 2(1 + \Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3)(\Lambda_1 - \Lambda_2\Lambda_3) \quad (5.20)$$

Puisque les  $\Lambda_i$  sont définis positifs, l'équation (5.20) donne seulement deux solutions possibles :

$$\Lambda_3 = 1 + \Lambda_1 - \Lambda_2 \quad (5.21)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \quad (5.22)$$

Avec la première solution donnée à l'équation (5.21), l'équation (5.14) devient :

$$0 = - [(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2(\Lambda_2 - 1)^2] \quad (5.23)$$

Cette équation sera donc égale à zéro lorsqu'une des valeurs suivantes est utilisée :

$$\Lambda_2 = 1 \quad (5.24)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 \quad (5.25)$$

Lorsque ces solutions sont substituées dans les équations (5.10—5.14), les équations deviennent égales à zéro. On a donc obtenu les deux premiers ensembles de solutions que l'on nommera  $Y1-CP_1$  et  $Y1-CP_2$ .

Il est à noter que lorsque la valeur de  $\Lambda_2$  (Eq. 5.24) est remplacée dans les équations (5.21 et 5.22), les deux équations donnent la même solution c'est-à-dire  $\Lambda_3 = \Lambda_1$ . La même observation peut être faite pour l'équation (5.25) lorsque remplacée dans les mêmes équations, on aura  $\Lambda_3 = 1$ . Cela indique que les équations ne sont pas linéairement indépendantes et que seulement deux familles de solutions existent.

Les deux familles sont donc composées des éléments suivants, soit la première famille de solutions  $Y1-CP_1$  :

$$l_2 = d \quad (5.26)$$

$$l_3 = l_1 \quad (5.27)$$

$$a_0 = -2\Lambda_1 \quad (5.28)$$

$$a_1 = 0 \quad (5.29)$$

$$a_2 = 2 \quad (5.30)$$

et la deuxième famille de solutions  $Y1-CP_2$  :

$$l_2 = l_1 \quad (5.31)$$

$$l_3 = d \quad (5.32)$$

$$a_0 = -2\Lambda_1 \quad (5.33)$$

$$a_1 = 0 \quad (5.34)$$

$$a_2 = 2 \quad (5.35)$$

Finalement, on se retrouve avec le carré parfait suivant pour  $Y_1$ ,

$$Y_1 = 2\epsilon |(C_1^2 - \lambda_1^2)| \quad (5.36)$$

et on doit respecter les contraintes suivantes soit :

$$l_2 = d \quad (5.37)$$

$$l_3 = l_1 \quad (5.38)$$

ou

$$l_2 = l_1 \quad (5.39)$$

$$l_3 = d \quad (5.40)$$

### 5.2.2 Simplification de $Y_1$ en sortant un $C_1^2$

Puisque le radical de  $Y_1$  (Eq. 5.1) contient un  $C_1^4$ , il est peut-être possible d'écrire  $Y_1$  sous la forme d'une multiplication de deux facteurs de degré deux en  $C_1$  et qu'un

de ces facteurs soit un carré parfait. Ainsi écrit, le radical pourrait se simplifier car on pourrait sortir du radical le carré parfait. Il y aurait donc une possibilité que le terme sorti se combine avec les autres termes de l'expression de  $Y_1$  pour simplifier les équations.

Il faut donc que  $Y_{1i}$  soit de la forme :

$$\begin{aligned}
 Y_{1i} = e_0(C_1 + a_0)^2(C_1^2 + g_1C_1 + g_0) = & e_0C_1^4 + \\
 & (g_1e_0 + 2a_0e_0)C_1^3 + \\
 & (g_0e_0 + 2a_0g_1e_0 + a_0^2e_0)C_1^2 + \\
 & (2a_0g_0e_0 + a_0^2g_1e_0)C_1 + a_0^2g_0e_0
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Il ne reste plus qu'à établir les correspondances entre les différentes valeurs des équations (5.4) et (5.41), ce qui conduit à :

$$0 = b_4 - e_0 \tag{5.42}$$

$$0 = b_3 - (g_1e_0 + 2a_0e_0) \tag{5.43}$$

$$0 = b_2 - (g_0e_0 + 2a_0g_1e_0 + a_0^2e_0) \tag{5.44}$$

$$0 = b_1 - (2a_0g_0e_0 + a_0^2g_1e_0) \tag{5.45}$$

$$0 = b_0 - a_0^2g_0e_0 \tag{5.46}$$

Il est possible d'obtenir deux autres équations qui permettront de simplifier la recherche des variables  $a_i$  et  $g_i$ . Ces deux équations sont obtenues par l'analyse des variables  $b_i$  (Eqs. 5.5—5.9). On s'aperçoit que

$$b_1 = -\Lambda_1 b_3$$

$$b_0 = -4\Lambda_1^2 - \Lambda_1 b_2$$

Ainsi, puisque l'équation de  $Y_{1i}$  peut être représentée par l'équation (5.41) ou (5.4), On doit avoir :

$$0 = (2a_0g_0e_0 + a_0^2g_1e_0) + \Lambda_1(g_1e_0 + 2a_0e_0) \tag{5.47}$$

$$0 = a_0^2g_0e_0 + [4\Lambda_1^2 + \Lambda_1(g_0e_0 + 2a_0g_1e_0 + a_0^2e_0)] \tag{5.48}$$

L'équation (5.47) sera égale à zéro lorsque :

$$g_1 = \frac{-2(a_0g_0 + a_0\Lambda_1)}{a_0^2 + \Lambda_1} \tag{5.49}$$

Après avoir introduit la valeur de  $g_1$  dans les équations restantes. On trouve pour l'équation (5.42) :

$$e_0 = 4 \quad (5.50)$$

L'équation (5.48) devient zéro si on utilise une des conditions suivantes :

$$a_0 = \xi \lambda_1 \quad (5.51)$$

$$g_0 = -\Lambda_1 \quad (5.52)$$

avec

$$\xi = \pm 1 \quad (5.53)$$

La deuxième solution (Eq. 5.52) est impossible. Ceci est démontré en solutionnant l'équation (5.43) qui donne  $a_0 = -\Delta_1 + \Lambda_2$ . Si par la suite, on substitue toutes les valeurs trouvées dans les équations restantes, on trouve pour l'équation (5.44) que  $0 = -4\Lambda_2\Lambda_3$ , ce qui est impossible sachant que les  $\Lambda_i$  sont définis positifs.

Si on utilise la solution de l'équation (5.51), l'équation (5.44) donnera :

$$g_0 = (\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_2 - \Delta_1^2) \quad (5.54)$$

Les deux équations restantes donnent zéro lorsque :

$$\Lambda_3 = (\lambda_1 + \xi)^2 + \lambda_2 [\lambda_2 + 2\zeta (1 + \xi\lambda_1)] \quad (5.55)$$

avec

$$\zeta = \pm 1 \quad (5.56)$$

Suite à ces dérivations, on a une possibilité de quatre familles de solutions que l'on nommera  $Y1-CS_i$   $i = 1, 2, 3, 4$ . Ces familles se différencient seulement par les signes de

$\zeta$  et  $\xi$  qui peuvent être positifs ou négatifs. Ces familles de solutions s'écrivent :

$$e_0 = 4 \quad (5.57)$$

$$a_0 = \xi\lambda_1 \quad (5.58)$$

$$g_0 = [\Lambda_2(1 + \Lambda_1) - \Delta_1^2] \quad (5.59)$$

$$g_1 = \frac{-(g_0 + \Lambda_1)}{a_0} \quad (5.60)$$

$$\Lambda_3 = (\lambda_1 + \xi)^2 + \lambda_2[\lambda_2 + 2\zeta(1 + \xi\lambda_1)] \quad (5.61)$$

$$\zeta = \pm 1 \quad (5.62)$$

$$\xi = \pm 1 \quad (5.63)$$

Finalement, on se retrouve avec  $Y_1$  qui se simplifie comme suit :

$$Y_1 = 2|(C_1 + \xi\lambda_1)|Y_{1,cs} \quad (5.64)$$

$$Y_{1,cs} = \epsilon\sqrt{C_1^2 + g_1C_1 + g_0} \quad (5.65)$$

On remarque que  $Y_1$  contient toujours une racine carrée. On pourrait faire disparaître cette racine avec certaines valeurs des  $\lambda_i$  mais là n'est pas notre but. En faisant disparaître la racine carrée on se retrouverait dans le cas du carré parfait (Sec. 5.2.1) avec les contraintes présentées aux équations (5.37–5.38) et (5.39–5.40), ce qui a déjà été étudié. Le but de cette section était de faire sortir un facteur de la racine carrée originale (Eq. 4.34) et de simplifier l'équation (4.39) puisque  $Y_1$  n'est plus indépendant des  $C_1$  et  $S_1$  mais seulement  $Y_{1,cs}$ .

### 5.3 Redérivation des équations de compensation statique

Lors de la dérivation du moment cinétique au chapitre 4, on a utilisé les équations de Berkof et Lowen [1969] pour simplifier les équations du moment cinétique car aucune variable ou longueur de membrure n'était connue. Par contre, il a été démontré que les équations de Berkof et Lowen [1969] sont suffisantes mais non nécessaires à la compensation statique de mécanismes à quatre barres [Gosselin, 1997] pour certaines longueurs de membrures d'un mécanisme.

Cela est dû au fait que la relation de dépendance entre  $C_2$  (Eq. 4.33) et  $\theta_1$  inclut une racine carrée contenant des fonctions trigonométriques en  $\theta_1$ . La racine carrée doit donc être considérée indépendante des autres termes si aucune relation entre les paramètres n'est définie, a priori, comme le sont déjà les  $C_1$  et  $S_1$ . Cet état de fait implique que les coefficients devant les termes contenant la racine carrée doivent être mis à zéro séparément, ce qui ajoute des équations de contraintes ou modifie celles déjà présentes.

On s'est donc aperçu que, lorsque  $Y_{1i}$  devient un carré parfait (Sec. 5.2.1), les longueurs des membrures correspondent à des longueurs pour lesquelles les conditions deviennent suffisantes mais non nécessaires. Puisque la racine carrée disparaît et que les termes sortis de la racine carrée peuvent se combiner avec les autres éléments de l'équation, le nombre de contraintes à satisfaire est ainsi réduit. Donc, si on utilise les équations de Berkof et Lowen [1969], il est possible que l'on introduise dans les dérivations et, de fait, dans les conditions de compensation dynamique, des contraintes non nécessaires.

Une nouvelle dérivation des équations de contraintes pour l'équilibrage statique doit donc être faite pour les familles de solutions  $Y1-CP_1$  et  $Y1-CP_2$  seulement puisque ces familles de solutions font disparaître la racine carrée. Par contre, pour les familles de solutions  $Y1-CS_i$ , il ne sera pas nécessaire de refaire une dérivation des équations de contraintes puisque seulement un facteur est sorti de la racine carrée. La racine carrée restante doit donc être considérée indépendante des termes  $C_1$  et  $S_1$  et les coefficients devant les racines carrées devront être mis à zéro.

### 5.3.1 Redérivation des équations de compensation statique pour le cas $Y1-CP_1$

Pour trouver les équations d'équilibrage statique, on utilise les équations de positionnement du centre de masse (Fig. 3.1). Les coordonnées du centre de masse global

du mécanisme sont données par :

$$\bar{x} = \frac{m_1 r_1 \cos(\theta_1 + \psi_1) + m_2 [l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_2 + \psi_2)] + m_3 [d + r_3 \cos(\theta_3 + \psi_3)]}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (5.66)$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 r_1 \sin(\theta_1 + \psi_1) + m_2 [l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_2 + \psi_2)] + m_3 r_3 \sin(\theta_3 + \psi_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (5.67)$$

Ces équations sont fonctions des variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  mais il est possible de les écrire en fonction de seulement la variable d'entrée  $\theta_1$ .

Pour ce faire, on utilisera les équations (4.28, 4.29, 4.30 et 4.33). Il est à noter qu'on doit utiliser le  $Y_1$  de l'équation (5.36) puisqu'on est dans le cas où  $l_3 = l_1$  et  $d = l_2$ . De plus, ces dernières contraintes sont aussi utilisées pour simplifier les équations.

Donc le centre de masse dans la direction  $y$  devient :

$$\bar{y} = \frac{y_{20} C_1^2 + (y_{10} + y_{11} S_1) C_1 + y_{00} + y_{01} S_1}{l_1 (l_1^2 + l_2^2 - 2C_1 l_2^2)} \quad (5.68)$$

avec

$$y_{00} = (\epsilon l_1^2 + l_2^2) N_{RP_2} \quad (5.69)$$

$$y_{01} = (l_1^2 + l_2^2) N_{RP_3} + l_2^2 (\epsilon - 1) N_{RP_4} \quad (5.70)$$

$$y_{10} = (l_1^2 + l_2^2) N_{RP_1} + (l_1^2 - l_2^2) N_{RP_2} \quad (5.71)$$

$$y_{11} = (l_1^2 - l_2^2) N_{RP_3} - y_{01} \quad (5.72)$$

$$y_{20} = -2l_2^2 N_{RP_1} - l_2^2 (1 + \epsilon) N_{RP_2} \quad (5.73)$$

où

$$N_{RP_1} = l_2 m_1 r_1 \sin \psi_1 - l_1 m_2 r_2 \sin \psi_2 \quad (5.74)$$

$$N_{RP_2} = l_1 m_2 r_2 \sin \psi_2 + l_2 m_3 r_3 \sin \psi_3 \quad (5.75)$$

$$N_{RP_3} = l_1 l_2 m_2 + l_2 m_1 r_1 \cos \psi_1 - l_1 m_2 r_2 \cos \psi_2 \quad (5.76)$$

$$N_{RP_4} = l_1 m_2 r_2 \cos \psi_2 + l_2 m_3 r_3 \cos \psi_3 \quad (5.77)$$

Il est à noter que l'expression de  $\bar{x}$ , possède les mêmes caractéristiques que l'équation pour  $\bar{y}$ . C'est-à-dire une équation qui dépend des coefficients  $N_{RP_i}$  pour être égale à zéro. Sa présentation n'apporterait rien de plus à la discussion. On s'attarde seulement à l'expression de  $\bar{y}$  puisque toutes les remarques peuvent être faites à partir de cette équation.

Pour avoir  $\bar{y}$  constant pour toutes valeurs de  $\theta_1$ , les coefficients  $y_{ij}$   $i = 0, 1, 2$  et  $j = 0, 1$  doivent être égaux à zéro ou avoir une valeur infinie au dénominateur car les  $C_1^n$   $n = 0, 1, 2$  et  $S_1$  sont indépendants entre eux. Le dénominateur ne peut tendre vers l'infini puisque  $C_1$  est borné entre  $\pm\lambda_1$  et que les autres variables sont des valeurs physiques décrivant le mécanisme à quatre barres.

Pour avoir les coefficients  $y_{ij}$  égaux à zéro, plusieurs solutions existent, sachant que les valeurs  $m_1$  et  $l_i$  sont définies positives et que les  $r_i$  sont définis semi-positifs. L'équation (5.70) peut être égale à zéro si  $\epsilon = 1$  et  $N_{RP_3} = 0$ . Bien que cette solution soit mathématiquement possible, elle est physiquement impossible puisque :

**Observation 5.1** *Si,  $\epsilon = 1$ ,  $l_3 = l_1$  et  $d = l_2$ , le mécanisme est un parallélogramme dont le mode d'assemblage est convexe (Fig. 4.1(a)-5.1(a)). Ce qui implique que pour tout mouvement du mécanisme, les centres de masse auront une rotation dans le même sens, dû au fait que le mécanisme à la forme d'un parallélogramme. Ce qui rend impossible toute compensation du moment généré à la base.*

Une autre solution serait que l'équation (5.72) soit égale à zéro en posant  $l_2 = l_1$  puisque  $y_{01} = 0$ . Ce qui est mathématiquement possible. Mais lorsque le mécanisme est dans le mode concave (Fig. 4.2(a)-5.1(b)), avec  $l_3 = l_1$  et  $d = l_2$ , la compensation dynamique s'avère physiquement impossible puisque :

**Observation 5.2** *Si  $\epsilon = -1$ ,  $l_3 = d$  et  $l_1 = l_2$ , le mécanisme est en singularité [Gosselin et Angeles, 1990] (Fig. 5.1(b)). Le point  $P_2'$  se trouve toujours sur le point  $P_1$ . Les membrures un et deux peuvent tourner autour du point  $P_1$  alors que la membrure trois ne bouge pas. Les centres de masse des membrures qui bougent auront toujours une rotation dans le même sens. Ce qui rend impossible toute compensation du moment généré à la base.*

Ainsi, la seule possibilité, qui soit mathématiquement et physiquement possible est d'avoir les  $N_{RP_i}$   $i = 1, 2, 3, 4$  égaux à zéro.

Les équations (5.74—5.77) sont ainsi les équations nécessaires et suffisantes pour avoir une compensation statique, pour le cas où  $l_3 = l_1$  et  $d = l_2$ . Si on fait un retour



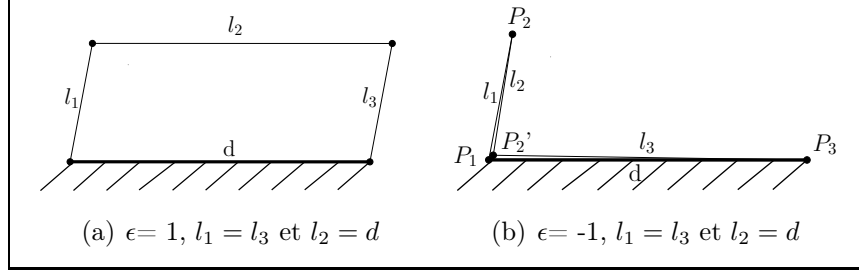


FIG. 5.1 – Solutions physiques inacceptables pour le cas  $Y1-CP_1$

et que l'on compare les équations (4.5—4.8) aux équations que l'on vient de trouver, on s'aperçoit qu'elles sont identiques lorsque  $l_3 = l_1$  et  $d = l_2$ . Cela implique que le moment dynamique simplifié de l'équation (4.19) est toujours valide et qu'il est possible de l'utiliser pour trouver les équations de contraintes dynamiques.

### 5.3.2 Redérivation des équations de compensation statique pour le cas $Y1-CP_2$

Pour trouver les équations d'équilibre statique, on utilise les équations de positionnement du centre de masse (Eqs. 5.66 et 5.67). Comme à la section 5.3.1, les équations (4.28, 4.29, 4.30 et 4.33) sont utilisées pour écrire les équations en fonction de la variable d'entrée  $\theta_1$  seulement. Dans ce cas-ci, on utilise les contraintes données aux équations (5.39) et (5.40) pour simplifier les équations, ce qui implique que l'on doit utiliser l'équation simplifiée de  $Y_1$  qui est donnée par l'équation (5.36).

On se retrouve donc avec :

$$\bar{y} = \frac{y_{20}C_1^2 + (y_{10} + y_{11}S_1)C_1 + y_{00} + y_{01}S_1}{l_1(l_1^2 + l_3^2 - 2l_3^2C_1)} \quad (5.78)$$

où

$$y_{00} = l_1^2(1 + \epsilon)N_{RQ_2} \quad (5.79)$$

$$y_{01} = l_3(l_1^2 + l_3^2)N_{RQ_3} + l_3^2(1 + \epsilon)N_{RQ_4} \quad (5.80)$$

$$y_{10} = l_3(l_1^2 + l_3^2)N_{RQ_1} \quad (5.81)$$

$$y_{11} = l_3(l_1^2 - l_3^2)N_{RQ_3} - y_{01} \quad (5.82)$$

$$y_{20} = -2l_3^3N_{RQ_1} - l_3^2(1 + \epsilon)N_{RQ_2} \quad (5.83)$$

et

$$N_{RQ_1} = m_1 r_1 \sin \psi_1 - m_2 r_2 \sin \psi_2 \quad (5.84)$$

$$N_{RQ_2} = l_3 m_2 r_2 \sin \psi_2 + l_1 m_3 r_3 \sin \psi_3 \quad (5.85)$$

$$N_{RQ_3} = l_1 m_2 + m_1 r_1 \cos \psi_1 - m_2 r_2 \cos \psi_2 \quad (5.86)$$

$$N_{RQ_4} = l_3 m_2 r_2 \cos \psi_2 + l_1 m_3 r_3 \cos \psi_3 \quad (5.87)$$

Encore une fois, on travaille sur la composante  $y$  du positionnement du centre de masse, puisque la composante  $x$ , donnera les mêmes contraintes.

Pour avoir  $\bar{y}$  constant pour toutes valeurs de  $\theta_1$ , il faut que les coefficients  $y_{ij}$  où  $i = 0, 1, 2$  et  $j = 0, 1$  soient égaux à zéro ou que le dénominateur de l'équation ait une valeur infinie car les  $C_1^n$   $n = 0, 1, 2$  et  $S_1$  sont indépendants entre eux. La valeur du dénominateur ne peut être infinie puisque  $C_1$  est borné entre  $\pm \lambda_1$  et que les autres variables sont des valeurs physiques décrivant le mécanisme à quatre barres.

Ainsi, pour avoir  $\bar{y}$  constant, il faut absolument mettre les coefficients  $y_{ij}$  égaux à zéro. On peut y arriver de plusieurs façons. La plus simple serait tout simplement de mettre la valeur des  $N_{RQ_i}$   $i = 1, 2, 3, 4$  égale à zéro. Cela donnera quatre nouvelles équations de contraintes statiques pour le cas  $l_2 = l_1$  et  $d = l_3$ . On peut aussi avoir le cas où  $N_{RQ_1}$  et  $N_{RQ_3}$  sont égaux à zéro et que  $\epsilon$  égale  $-1$ . Par contre, ce cas est à rejeter comme on l'a démontré à l'observation (5.2).

Les équations (5.84—5.87) sont ainsi les équations nécessaires et suffisantes pour avoir une compensation statique, pour le cas où  $l_2 = l_1$  et  $d = l_3$ . Si on fait un retour et que l'on compare les équations (4.5—4.8) aux équations que l'on vient de trouver, on s'aperçoit qu'elles sont identiques. Cela implique que le moment dynamique simplifié de l'équation (4.19) est toujours valide et qu'il est possible de l'utiliser pour trouver les équations de contraintes dynamiques.

## 5.4 CCD lorsque $Y_1$ est un carré parfait et que $l_1 = l_3$

Dans le chapitre 4, la recherche des CCD s'effectuait de la façon la plus générale possible. Par contre, le fait de considérer  $Y_1$  (Eq. 4.34) indépendant des  $C_1$  (Eq. 4.25) restreignait le domaine de solution exploré.

On a démontré qu'il est possible que  $Y_1$  ne soit pas totalement indépendant des  $C_1$  lorsque certaines contraintes entre les longueurs des différentes membrures sont présentes.

Dans cette section, on reprendra la dérivation des contraintes de compensation dynamique (CCD) lorsqu'une de ces contraintes sur la longueur des membrures ( $l_1 = l_3$ ) est présente.

### 5.4.1 Équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée

Pour écrire l'équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée  $\theta_1$ , on peut partir de l'équation (4.20) puisque la simplification des termes  $V$  et  $W$  (Eqs. 3.16 et 3.17) se fera de la même façon car les contraintes statiques sont les mêmes.

Par contre, lors de l'élimination des termes intermédiaires, il faudra utiliser l'équation (5.36) pour  $Y_1$  avec  $\epsilon = -1$  seulement car  $\epsilon = 1$  donne un mécanisme impossible à compenser (observation 5.1) (Fig. 4.2(b)).

Suivant la méthode donnée à la section 4.2.2, on se retrouve avec les coefficients suivants pour l'équation (4.39) :

$$j_{0,0,0} = \lambda_1 [I_1 - I_3 + \Lambda_1 (I_1 + 2I_2 + I_3)] \quad (5.88)$$

$$j_{0,1,0} = I_a(1 + \Lambda_1) \quad (5.89)$$

$$j_{1,0,0} = -2\lambda_1(I_1 + I_2) \quad (5.90)$$

avec

$$J_d = \lambda_1 (1 - 2C_1 + \lambda_1^2) \quad (5.91)$$

## 5.4.2 Dérivation des équations de contraintes

Pour obtenir les équations de contraintes du mécanisme, on voit que  $J_n$  (Eq. 4.39) est égal à zéro seulement si les coefficients (Eqs. 5.88—5.90) sont égaux à zéro et que  $J_d$  (Eq. 5.91) ne peut tendre vers l'infini.

La vérification pour  $J_d$  est très simple, puisque  $C_1$  (Eq. 4.25) est borné entre  $-\lambda_1$  et  $\lambda_1$  et que les  $\lambda_i$  sont des rapports entre les longueurs des membrures —définies positives—, le dénominateur sera donc toujours borné.

Pour  $J_n$ , il est facile de conclure que l'on doit mettre tous les coefficients à zéro puisque les  $C_1$  et  $S_1$  sont indépendants entre eux pour toutes valeurs de  $\theta_1$ . De plus, la supposition qu'on avait faite que  $Y_1$  était indépendant est rendue caduque par le fait que, devenant un carré parfait, il se décompose et se combine avec les  $C_1$  et  $S_1$ .

Il ne reste plus qu'à trouver quelles sont les valeurs qui rendent les  $j_{s,t,u}$  égaux à zéro.

### 5.4.2.1 Familles de solutions

Une démarche similaire à celle de la section 4.3.1 est effectuée pour mettre les équations (5.88, 5.89 et 5.90) à zéro. On se retrouve avec des solutions qui, combinées avec les contraintes qui transforment  $Y_1$  en un carré parfait, forment les deux familles de solutions suivantes :

$$l_3 = l_1 \quad (5.92)$$

$$d = l_2 \quad (5.93)$$

$$\epsilon = -1 \quad (5.94)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (5.95)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (5.96)$$

et

$$l_3 = l_1 \quad (5.97)$$

$$d = l_2 \quad (5.98)$$

$$\epsilon = -1 \quad (5.99)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (5.100)$$

$$I_a = 0 \quad (5.101)$$

$$I_3 = I_1 \quad (5.102)$$

À la première famille de solution, seulement deux contraintes se sont rajoutées pour permettre de mettre les trois équations à zéro. Cela est dû au fait que les équations  $j_{s,t,u}$  ne sont pas linéairement indépendantes dans tous les espaces de solutions.

### 5.4.3 Analyse des familles de solutions

Il ne reste plus qu'à vérifier que les familles de solutions trouvées respectent les contraintes de compensation statique et qu'elles respectent les domaines de validité des différentes variables, comme mentionné à la section 4.4.

#### 5.4.3.1 Analyse de la première famille de solution

La première famille de solutions est à rejeter car la contrainte  $\lambda_1 = 1$  implique que  $l_1 = d$  (Eq. 4.27), ce qui ramène le cas discuté à l'observation 5.2.

### 5.4.3.2 Analyse de la deuxième famille de solution

Pour faire la validation des équations (5.100—5.102), les équations (4.2, 4.4, 5.75 et 5.77) seront utilisées. Encore une fois, une série d'équations indépendantes a été choisie à partir des ensembles de contraintes de compensation statique.

Cette façon de faire permet d'éviter l'introduction de variables secondaires et de faire sortir immédiatement deux solutions provenant des équations (4.2) et (4.4). C'est-à-dire :

$$r_3 = \frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2} \quad (5.103)$$

$$\psi_3 = \pi + \psi_2 \quad (5.104)$$

L'étape logique à ce point est de trouver les solutions qui amènent l'équation (5.101) à zéro. Cela est possible lorsque :

$$r_2 = 0 \quad (5.105)$$

ou

$$\psi_2 = 2n\pi \quad (5.106)$$

ou

$$\psi_2 = (2n + 1)\pi \quad (5.107)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

Les solutions données aux équations (5.105) et (5.107) sont impossibles car chacune d'elles va donner une incompatibilité pour les équations (5.100) et (5.76). En effet, pour que l'équation (5.76) soit égale à zéro, on doit avoir  $\cos \psi_1$  plus petit que zéro alors que pour l'équation (5.100) la valeur de  $\cos \psi_1$  devrait être plus grande que zéro. Puisque ces deux conditions sont exclusives, les solutions données aux équations (5.105) et (5.107) sont impossibles.

Puisque l'équation (5.106) doit être satisfaite, si on travaille avec l'équation (5.74), on s'aperçoit que cette dernière est satisfaite par les trois solutions décrites ci-dessous :

$$r_1 = 0 \quad (5.108)$$

ou

$$\psi_1 = 2n\pi \quad (5.109)$$

ou

$$\psi_1 = (2n + 1) \pi \quad (5.110)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

Par contre, deux de ces solutions seront impossibles. En effet, lorsque les solutions (5.108 et 5.109) sont utilisées, l'équation (5.76) donne que  $r_2 \geq l_2$ . Si le cas où  $r_1 = 0$  est utilisé, l'équation (5.100) devient  $k_1^2 m_1 + k_2^2 m_2 = 0$  ce qui est impossible sachant que les variables sont définies positives. Dans le cas où la solution (5.109) est utilisée, on se retrouve avec  $I_2 > 0$  ce qui implique que  $I_1 \leq 0$  dû à l'équation (5.100). Ainsi  $I_3$  devrait aussi être plus petit ou égal à zéro, ce qui est impossible sachant que  $\psi_3 = (2n + 1)\pi$ . On se retrouve avec une seule solution soit  $\psi_1 = (2n + 1) \pi$ .

Les trois équations restantes (Eqs. 5.76, 5.100 et 5.102) vont donner les trois dernières équations de contrainte soit :

$$r_2 = l_2 \left( 1 - \frac{m_1 r_1}{l_1 m_2} \right) \quad (5.111)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{m_2(l_2 r_2 - r_2^2) - I_1}{m_2}} \quad (5.112)$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{I_1 - m_3(l_3 r_3 + r_3^2)}{m_3}} \quad (5.113)$$

où  $I_i$  est défini à l'équation (4.21).

Cet ensemble de contraintes de compensation dynamique (CCD) que l'on nommera *Contraintes de Compensation Dynamique lorsque  $Y_1$  est un Carré Parfait et  $l_1 = l_3$*  (noté  $M4B-Y_{CP1}$ ) sera donc formé des équations de contraintes suivantes : (5.37, 5.38, 5.99, 5.103, 5.104, 5.106, 5.110, 5.111, 5.112 et 5.113).

#### 5.4.4 Comportement à vérifier

Dans cette section, on vérifie si le dénominateur de l'équation (3.21) donné à l'équation (5.91) peut amener une indétermination.

Dans la section 4.4.1.1, on avait substitué certaines contraintes dans  $J_n$  et  $J_d$ , ce qui amenait plusieurs simplifications. Ces simplifications rendaient le dénominateur égal à

TAB. 5.1 – *Contraintes de Compensation Dynamique lorsque  $Y_1$  est un Carré Parfait et  $l_1 = l_3$  (noté  $M4B-Y_{CP_1}$ ) où  $n \in \mathbb{Z}$ .*

$l_2 = d$
$l_3 = l_1$
$\epsilon = -1$
$r_3 = \frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2}$
$\psi_3 = \pi + \psi_2$
$\psi_2 = 2n\pi$
$\psi_1 = (2n + 1)\pi$
$r_2 = l_2 \left(1 - \frac{m_1 r_1}{l_1 m_2}\right)$
$k_2 = \sqrt{\frac{m_2(l_2 r_2 - r_2^2) - I_1}{m_2}}$
$k_3 = \sqrt{\frac{I_1 - m_3(l_3 r_3 + r_3^2)}{m_3}}$

un. Ainsi toute possibilité d'indétermination était évitée. Si on fait la même procédure pour ce cas-ci, il n'y a aucune simplification.

On doit donc regarder comment est constitué le dénominateur et regarder dans quel cas on aura une indétermination ou dans quel cas aucune indétermination ne sera possible.

Les indéterminations peuvent se produire lorsque le dénominateur est égal à zéro. Est-ce possible d'éviter que le dénominateur devienne égal à zéro ?

En regardant l'équation (5.91), on remarque que le dénominateur sera égal à zéro si :

$$C_1 = \frac{1 + \Lambda_1}{2} \quad (5.114)$$

ou réécrit plus simplement avec l'aide des équations (4.25 et 4.32)

$$\cos \theta_1 = \frac{1 + \lambda_1^2}{2\lambda_1} \quad (5.115)$$



Sachant que la fonction  $\cos \theta_1$  est bornée entre  $\pm 1$ , si le membre de droite de l'équation est plus grand que un, l'équation (5.115) ne pourra jamais être satisfaite ce qui implique que le dénominateur ne pourra jamais être égal à zéro. Donc si la condition suivante  $\frac{1+\lambda_1^2}{2\lambda_1} > 1$  est respectée, toute singularité sera évitée. Puisque les  $\lambda_i$  (4.27) sont définis positifs, on peut réécrire cette condition sous la forme suivante :

$$(1 - \lambda_1)^2 > 0 \quad (5.116)$$

Cette condition est toujours vraie car pour la contredire il faudrait avoir  $l_1 = d$  mais l'observation 5.2 stipule qu'un mécanisme équilibré dynamiquement ne peut avoir  $l_1 = d$ . On a ainsi démontré qu'aucune singularité ne peut se produire pour l'équation (3.21).

#### 5.4.5 Domaine de solution pour le cas $M4B-Y_{CP_1}$

Comme pour le cas général (Sec. 4.4.2.1), le domaine de solutions est inscrit dans  $\mathbb{R}^7$ , puisqu'il y a sept variables libres et neuf équations de contrainte.

Pour illustrer graphiquement le domaine de solution de la famille  $M4B-Y_{CP_1}$ , un exemple est maintenant traité, dans lequel un certain nombre de variables libres sont fixées aux valeurs suivantes :  $m_1 = 0.139$ ,  $m_2 = 0.101$ ,  $m_3 = 0.108$ ,  $k_1 = 0.04167$ , et  $r_1 = 0.6712299216$ . Cela permet d'avoir un graphique en deux dimensions en fonction de  $l_1$  et  $l_2$ .

Puisqu'on est intéressé aux mécanismes physiquement valides, on a tracé les courbes où  $k_2^2$  et  $k_3^2$  égalent zéro. Ces courbes délimitent les domaines de validité car lorsque  $k_i^2$  est négatif, on obtient des valeurs imaginaires pour le rayon de giration, ce qui est physiquement impossible.

Ainsi, le domaine de validité de la figure 5.2 comprend le point  $P_1$ , alors que tous les autres points se trouvent dans des domaines non valides. Cela se voit très facilement puisque, le côté droit de la ligne  $k_2^2 = 0$  représente le domaine valide de  $k_2$  alors que le domaine situé entre les deux lignes où  $k_3^2 = 0$  est un domaine non valide. Si on fait l'assemblage des domaines valides, on se retrouve avec le domaine hachuré sur le graphe de la figure 5.2.

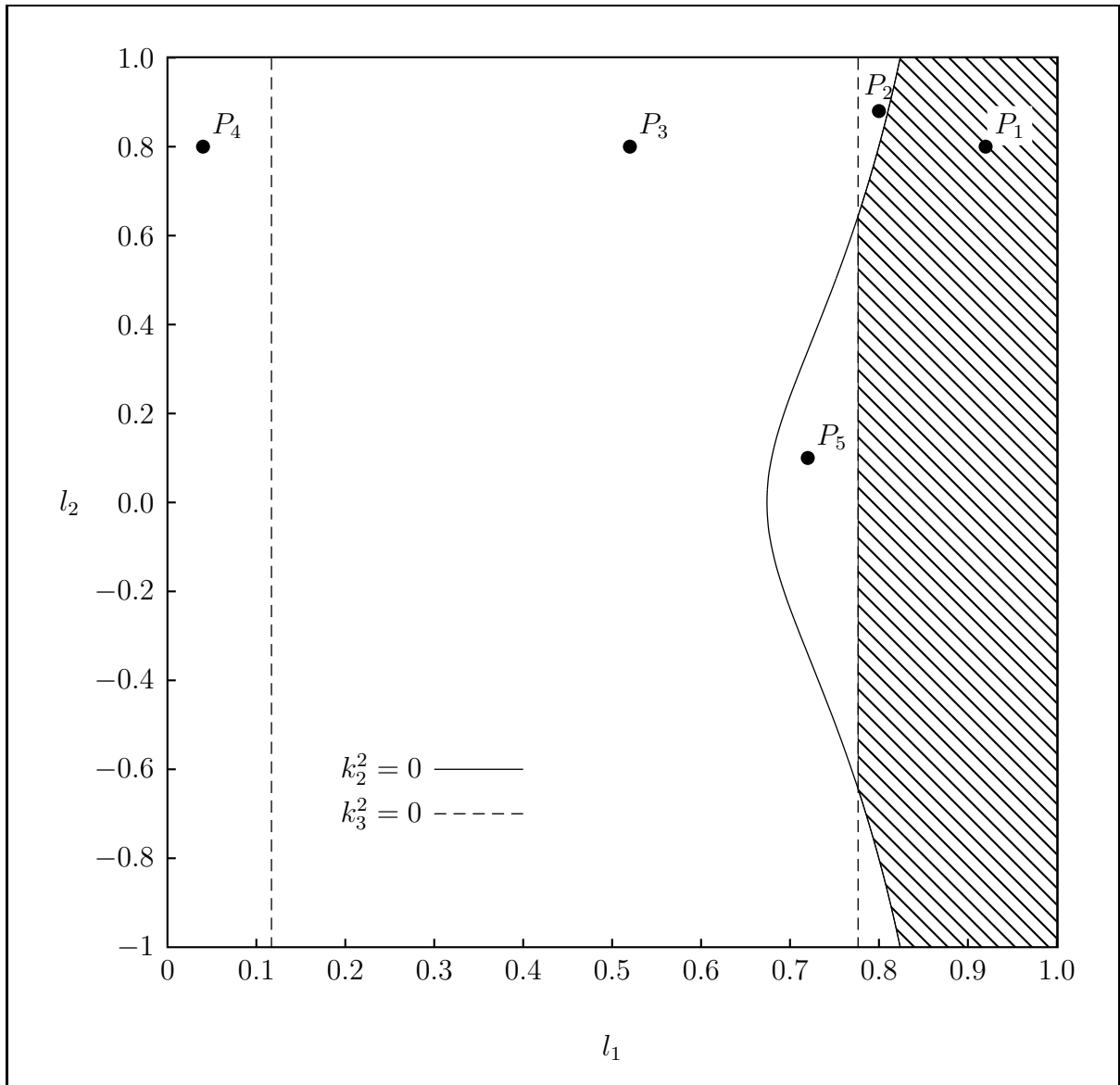


FIG. 5.2 – Exemple de domaine des solutions pour l'ensemble de solution  $M_4B-Y_{CP_1}$ , avec certaines variables fixées ( $m_1 = 0.139$ ,  $m_2 = 0.101$ ,  $m_3 = 0.108$ ,  $k_1 = 0.04167$ , et  $r_1 = 0.6712299216$ ).

### 5.4.6 Vérification

Pour faire la vérification des CCD de l'ensemble  $M_4B-Y_{CP_1}$ , on se basera en grande partie sur la section 4.5.

### 5.4.6.1 Vérification à l'aide des équations de Lagrange

Il est avantageux d'utiliser les équations développées pour le cas général (Sec. 4.5.2.1), puisque la seule différence consiste à y substituer les nouvelles CCD trouvées pour cette famille au lieu de celles du cas général.

Puisque la dérivation des équations de Lagrange se déroule de la même façon, que l'on soit dans le cas  $M_4B-G$  ou dans le cas  $M_4B-Y_{CP_1}$ , on ne répétera pas la même démarche.

La première différence apparaît lors de l'introduction des contraintes de compensations statiques. Ainsi lorsque les contraintes du cas  $M_4B-Y_{CP_1}$  sont introduites, on se retrouve avec  $T_x$  (Eq. 5.117) et  $T_\delta$  (Eq. 5.118) qui valent :

$$T_x = \frac{l_2(l_1m_2 - m_1r_1)}{l_1} (S_3\dot{\theta}_3 - S_1\dot{\theta}_1 - S_2\dot{\theta}_2) \dot{x} \quad (5.117)$$

$$T_\delta = \left\{ [m_1(k_1^2 + r_1^2) + l_1^2m_2 + l_2r_2m_2(C_1C_2 + S_1S_2)] \dot{\theta}_1 + [m_2(k_2^2 + l_2^2) + m_2(r_2^2 - l_2^2) + l_2r_2m_2(C_1C_2 + S_1S_2)] \dot{\theta}_2 + [m_3(k_3^2 + r_3^2) - r_2l_2m_2C_3] \dot{\theta}_3 \right\} \dot{\delta} \quad (5.118)$$

au lieu des valeurs définies aux équations (4.105 et 4.110).

Pour amener  $T_x$  égal à zéro, il suffit de remplacer les  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  par les valeurs données aux équations (4.23) et (4.24). Pour  $T_\delta$ , on doit poursuivre les substitutions et remplacer les  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et  $C_2$ , par les équations (4.28, 4.29, 4.30 et 4.33). Il ne faut pas oublier que le  $Y_1$ , qui se trouve dans l'équation de  $C_2$  doit être remplacé par l'équation (5.36) puisque l'on est dans le cas où  $Y_1$  devient un carré parfait. Après avoir fait les substitutions démontrées précédemment,  $T_x$  et  $T_\delta$ , représentant les parties du moment cinétique qui peuvent donner respectivement des forces et moments sur la base, sont bien égaux à zéro. Ce qui prouve que les forces et moments sur la base sont égaux à zéro.

### 5.4.6.2 Vérification à l'aide des équations de Newton-Euler

Dans cette section, la vérification de la compensation dynamique d'un mécanisme de la famille  $M_4B-Y_{CP_1}$  sera effectuée. On doit donc démontrer que la somme des forces (Eq. 4.122) ainsi que la somme des moments (Eq. 4.123), sur la base du mécanisme

donne zéro. Cette vérification se fera à l'aide des équations de Newton-Euler qui ont été développées à la section 4.5.2.2.

### Résolution des équations de forces et de moments pour l'ensemble $M4B-Y_{CP_1}$

Des valeurs numériques décrivant un mécanisme qui respecte les  $M4B-Y_{CP_1}$  (Fig. 5.3) sont données au tableau 5.2.

Comme à la section 4.5.2.2, la méthode utilisée consiste à donner une position, une vitesse et une accélération au membre d'entrée (membre 1), de calculer les mêmes variables pour les autres membrures (Tab. 5.3) et finalement de trouver le couple requis pour effectuer cette trajectoire. Les valeurs  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_1$  étant considérées indépendantes, elles ont été choisies au hasard.

Les valeurs des forces et moments sont données au tableau 5.4. On remarque que qu'elles ne sont pas nulles. Par contre, la somme des forces et des moments sur la base donne zéro ( $\mathbf{F}_{B1} - \mathbf{F}_{B3} = 0$ ,  $\mathbf{M}_1 - \mathbf{l}_{13} \times \mathbf{F}_{B3} = 0$ ), ce qui était à démontrer.

TAB. 5.2 – Variables définissant un mécanisme à quatre barres de la famille  $M4B-Y_{CP_1}$   
Le symbole \* indique les variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 5.4.3.2

Variable	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$l_i$ (m)	1.7	3	1.7 *
$m_i$ (kg)	0.139	0.101	0.108
$r_i$ (m)	0.671	1.366 *	0.722 *
$k_i$ (m)	0.0417	0.185 *	0.549 *
$\psi_i$ (rad)	$\pi$ *	0 *	$\pi$ *

## 5.5 CCD lorsque $Y_1$ est un carré parfait et que $l_1 = l_2$

Dans la section 4, la recherche des CCD s'effectuait de la façon la plus générale possible. Par contre le fait de considérer  $Y_1$  (Eq. 4.34) indépendant des  $C_1$  (Eq. 4.25) restreignait le domaine de solution exploré.

TAB. 5.3 – Valeurs de la trajectoire d'un mécanisme de la famille  $M4B-Y_{CP_1}$ . Le symbole \* indique les variables qui sont calculées à l'aide des équations de la section 4.2.1.

Positions	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$\theta_i$ (rad)	$\frac{3\pi}{8}$	-1.179*	-2.35664*
$\dot{\theta}_i$ (rad/s)	0.210	0.0493*	-0.161*
$\ddot{\theta}_i$ (rad/s <sup>2</sup> )	0.45	0.146*	-0.304*

On a démontré qu'il est possible que  $Y_1$  ne soit pas totalement indépendant des  $C_1$  lorsque certaines contraintes entre les longueurs des différentes membrures sont présentes.

Dans cette section, on reprendra la dérivation des contraintes de compensation dynamique (CCD) lorsqu'une de ces contraintes sur la longueur des membrures ( $l_1 = l_2$ ) est présente.

### 5.5.1 Équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée

Pour écrire l'équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée  $\theta_1$ , on peut partir de l'équation (4.20) puisque la simplification des termes  $V$  et  $W$  (Eqs. 3.16 et 3.17) se fera de la même façon, les contraintes statiques étant les mêmes.

Par contre lors de l'élimination des termes intermédiaires, il faudra utiliser l'équation (5.36) pour  $Y_1$  avec  $\epsilon = 1$  car si  $\epsilon = -1$ , le mécanisme sera dans une singularité (observation 5.2).

TAB. 5.4 – Forces et moments internes et externes calculés pour le mécanisme à quatre barres défini aux tableaux 5.2 et 5.3.

$\mathbf{F}_{B1}$ (N)	$\mathbf{F}_{12}$ (N)	$\mathbf{F}_{32}$ (N)	$\mathbf{F}_{B3}$ (N)	$M_1$ (Nm)
0.00819334	0.0486	0.00718443	-0.00819334	0.143829
-0.0479431	-0.0602217	0.0297001	0.0479431	

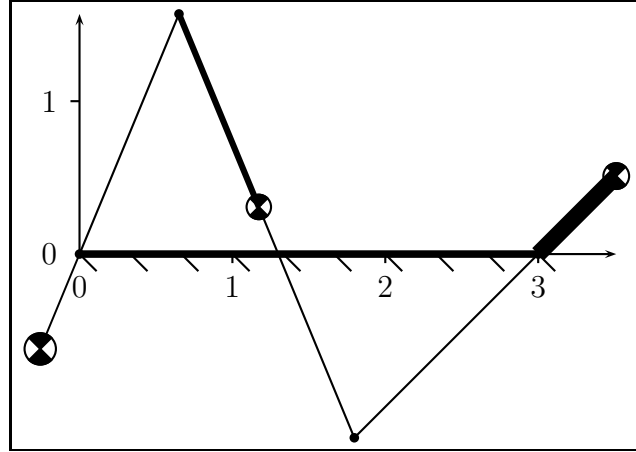


FIG. 5.3 – Mécanisme à quatre barres de la famille  $M_4B-Y_{CP_1}$ , dont les paramètres sont données aux tableaux 5.2 et 5.3. La dimension des  $\odot$  est proportionnelle à la masse de la membrure et l'épaisseur du vecteur  $\mathbf{r}_i$  est proportionnelle à la valeur de  $k_i$ .

Suivant la méthode donnée à la section 4.2.2, on se retrouve avec les coefficients suivants pour l'équation (4.39) :

$$\dot{j}_{0,0,0} = \Lambda_1 [I_1 - I_2 + \Lambda_1(I_1 + I_2 + 2I_3)] \quad (5.119)$$

$$\dot{j}_{0,1,0} = 2\Lambda_1 I_a \quad (5.120)$$

$$\dot{j}_{1,0,0} = -2\Lambda_1(I_1 + I_3) \quad (5.121)$$

$$\dot{j}_{1,1,0} = -2I_a \quad (5.122)$$

avec

$$J_d = -\Lambda_1(1 - 2C_1 + \Lambda_1) \quad (5.123)$$

### 5.5.2 Dérivation des équations de contrainte

Pour obtenir les équations de contrainte du mécanisme, on doit avoir  $J_n$  (Eq. 4.39) égal à zéro seulement si les coefficients (Eqs. 5.119—5.122) sont égaux à zéro et que  $J_d$  (Eq. 5.123) ne peut tendre vers l'infini.

La vérification pour  $J_d$  est très simple. Puisque  $C_1$  (Eq. 4.25) est borné entre  $-\lambda_1$  et  $\lambda_1$  et les  $\lambda_i$  sont des rapports entre les longueurs des membrures —définies positives—, le dénominateur sera donc borné.

Pour  $J_n$ , il est facile de conclure que l'on doit mettre tous les coefficients à zéro puisque les  $C_1$  et  $S_1$  sont indépendants entre eux pour toutes valeurs de  $\theta_1$ . De plus, la supposition que l'on avait faite que  $Y_1$  était indépendant est rendue caduque par le fait que  $Y_1$  devenant un carré parfait, il se décompose et se combine avec les  $C_1$  et  $S_1$ .

Il ne reste plus qu'à trouver quelles sont les valeurs qui rendent les  $j_{s,t,u}$  égaux à zéro.

### 5.5.2.1 Familles de solutions

Si une démarche similaire à celle de la section 4.3.1 est effectuée pour mettre les équations (5.119—5.122) à zéro, on se retrouve avec des solutions qui, combinées avec les contraintes qui transforment  $Y_1$  en un carré parfait, forment les deux familles de solutions suivantes :

$$l_2 = l_1 \quad (5.124)$$

$$d = l_3 \quad (5.125)$$

$$\epsilon = 1 \quad (5.126)$$

$$I_a = 0 \quad (5.127)$$

$$I_3 = -I_1 \quad (5.128)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (5.129)$$

et

$$l_2 = l_1 \quad (5.130)$$

$$d = l_3 \quad (5.131)$$

$$\epsilon = 1 \quad (5.132)$$

$$I_a = 0 \quad (5.133)$$

$$I_3 = -I_1 \quad (5.134)$$

$$I_2 = I_1 \quad (5.135)$$

### 5.5.3 Analyse des familles de solutions

Il ne reste plus qu'à vérifier que les familles de solutions trouvées, respectent les contraintes de compensation statique et qu'elles respectent les domaines de validité des différentes variables, comme mentionné à la section 4.4.

#### 5.5.3.1 Analyse de la première famille de solution

La première famille de solutions est à rejeter car la contrainte  $\lambda_1 = 1$  implique que  $l_1 = d$  (Eq. 4.27), ce qui ramène le cas discuté à l'observation 5.1.

#### 5.5.3.2 Analyse de la deuxième famille de solution

Pour établir la validité de la deuxième famille de solutions, les équations (4.2, 4.4, 5.85 et 5.87) seront utilisées. Encore une fois, une série d'équations indépendantes a été choisie à partir des ensembles de contraintes de compensation statique.

Cette façon de faire permet d'éviter l'introduction de variables secondaires et de faire sortir immédiatement les deux solutions données aux équations (4.73) et (4.74).

Par la suite on peut trouver directement les valeurs de  $k_1$  et  $k_3$  à l'aide des équations (5.135) et (5.134), ce qui donne :

$$k_1 = \sqrt{\frac{I_2 - m_1 r_1 (r_1 + l_1)}{m_1}} \quad (5.136)$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{-I_1 - m_3 r_3 (r_3 + l_3 \cos \psi_2)}{m_3}} \quad (5.137)$$

Les solutions suivantes qui formeront la famille de solutions devront répondre à deux contraintes supplémentaires, c'est-à-dire, donner des valeurs réelles pour  $k_1$  et  $k_3$ .

Si on travaille avec l'équation (5.133), on s'aperçoit qu'elle est satisfaite par les trois solutions décrites ci-dessous :

$$r_2 = 0 \quad (5.138)$$



ou

$$\psi_2 = 2n\pi \quad (5.139)$$

ou

$$\psi_2 = (2n + 1)\pi \quad (5.140)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

Par contre, deux de ces solutions seront impossibles. Lorsque la solution (eq. 5.138) est utilisée,  $k_3$  devient imaginaire puisqu'égal à  $\sqrt{-\frac{k_2^2 m_2}{m_3}}$  après avoir utilisé l'équation (4.2) et avoir fait les simplifications qui s'imposent.

Lorsque la solution donnée à l'équation (5.139) est utilisée, on se retrouve avec  $I_3 = (k_3^2 + r_3^2 + l_3 r_3)m_3$  toujours positif. Donc les équations (5.134 et 5.135) impliquent que  $I_1$  et  $I_2$  doivent être négatifs. La contrainte sur  $I_1$  est respectée seulement si  $\cos \psi_1$  est plus grand que zéro. Pour que la contrainte sur  $I_2 = (k_2^2 - l_1 r_2 + r_2^2)m_2$  soit respectée, il faut avoir au minimum  $r_2 < l_1$  mais en regardant la contrainte  $N_{RQ_3}$  (Eq. 5.86), on s'aperçoit que  $r_2 = (l_1 + \frac{m_1 r_1 \cos \psi_1}{m_2})$  et que  $r_2$  sera toujours plus grand que  $l_1$  puisque l'on doit avoir  $\cos \psi_1 > 0$ , ce qui amène à une incompatibilité. On prendra donc la solution donnée à l'équation (5.140) pour faire partie de la famille de solutions.

Étant donné ce résultat, l'équation (5.85) est satisfaite lorsque :

$$r_1 = 0 \quad (5.141)$$

ou

$$\psi_1 = 2n\pi \quad (5.142)$$

ou

$$\psi_1 = (2n + 1)\pi \quad (5.143)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

Par contre la solution  $r_1 = 0$  est impossible puisque l'équation de  $N_{RQ_3}$  (Eq. 5.86) devient  $l_1 m_2 + m_2 r_2$ , et sachant qu'elle doit être égale à zéro, on a donc une incompatibilité. Il en va de même pour la solution  $\psi_1 = 2n\pi$  qui donne pour la même équation  $l_1 m_2 + m_1 r_1 + m_2 r_2$ . Si on utilise la solution donnée à l'équation (5.143), la contrainte de compensation statique  $N_{RQ_3}$  (Eq. 5.86) donne la valeur suivante pour  $r_2$ .

$$r_2 = -l_1 + \frac{m_1 r_1}{m_2} \quad (5.144)$$

Cet ensemble de contraintes de compensation dynamique (CCD) que l'on nommera *Contraintes de Compensation Dynamique lorsque  $Y_1$  est un Carré Parfait et  $l_1 = l_2$*  (noté  $M_4B-Y_{CP_2}$ ) sera donc formé des équations de contraintes suivantes : (4.2, 4.4, 5.39, 5.40, 5.136, 5.137, 5.140, 5.143 et 5.144).

TAB. 5.5 – *Contraintes de Compensation Dynamique lorsque  $Y_1$  est un Carré Parfait et  $l_1 = l_2$*  (noté  $M_4B-Y_{CP_2}$ ) où  $n \in \mathbb{Z}$ .

$m_3 r_3 = m_2 r_2 \frac{l_3}{l_2}$
$\psi_3 = \psi_2 + \pi$
$l_2 = l_1$
$l_3 = d$
$k_1 = \sqrt{\frac{I_2 - m_1 r_1 (r_1 + l_1)}{m_1}}$
$k_3 = \sqrt{\frac{-I_1 - m_3 r_3 (r_3 + l_3 \cos \psi_2)}{m_3}}$
$\psi_2 = (2n + 1) \pi$
$\psi_1 = (2n + 1) \pi$
$r_2 = -l_1 + \frac{m_1 r_1}{m_2}$

#### 5.5.4 Comportement à vérifier

Dans cette section, on vérifie si le dénominateur de l'équation (3.21) donné à l'équation (5.123) peut amener une indétermination.

Cette indétermination se produira lorsque le dénominateur sera égal à zéro. Cette possibilité peut se produire lorsque  $C_1 = \frac{1+\Delta_1}{2}$ .

Puisque cette condition est la même que celle donnée à la section 5.4.4. On peut donc tirer les mêmes conclusions et dire que le dénominateur ne pourra jamais donner une indétermination.

### 5.5.5 Domaine des solutions pour le cas $M4B-Y_{CP_2}$

Comme pour le cas général (Sec. 4.4.2.1), le domaine des solutions est inscrit dans  $\mathbb{R}^7$ , puisqu'il y a sept variables libres et neuf équations de contraintes.

Pour illustrer graphiquement le domaine des solutions et permettre l'obtention d'un graphique en deux dimensions, un exemple est maintenant présenté dans lequel un certain nombre de variables libres sont fixées comme suit :  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 5$ ,  $r_1 = 0.3$ , et  $k_2 = 0.01$ .

Puisqu'on est intéressé aux mécanismes physiquement valides, on a tracé les courbes où  $k_1^2$  et  $k_3^2$  égalent zéro. Ces courbes délimitent les domaines de validité car lorsque  $k_i^2$  est négatif, on obtient des valeurs imaginaires pour le rayon de giration ce qui est physiquement impossible.

Ainsi, le domaine de validité de la famille  $M4B-Y_{CP_2}$  (Fig. 5.4) comprend seulement le point  $P_6$ , alors que tous les autres points se trouvent dans des domaines non valides.

Dû à l'imprécision du graphique, il est difficile de voir comment sont formées les courbes où  $k_3^2 = 0$  mais sachant que  $P_1$ ,  $P_3$  et  $P_6$  sont des domaines où  $k_3 > 0$ , on peut déduire qu'on a une ligne continue qui part du bas du graphique et qui se dirige vers la droite et que les autres segments forment, eux aussi, une ligne continue. Le domaine de validité pour  $k_1$  se situe à gauche de la ligne  $k_1^2 = 0$ . Lorsque l'intersection des domaines de validité pour  $k_1$  et  $k_3$  est effectuée, on se retrouve bien avec seulement un domaine.

### 5.5.6 Vérification

Pour faire la vérifications des CCD de l'ensemble  $M4B-Y_{CP_2}$ , on se basera en grande partie sur la section 4.5.

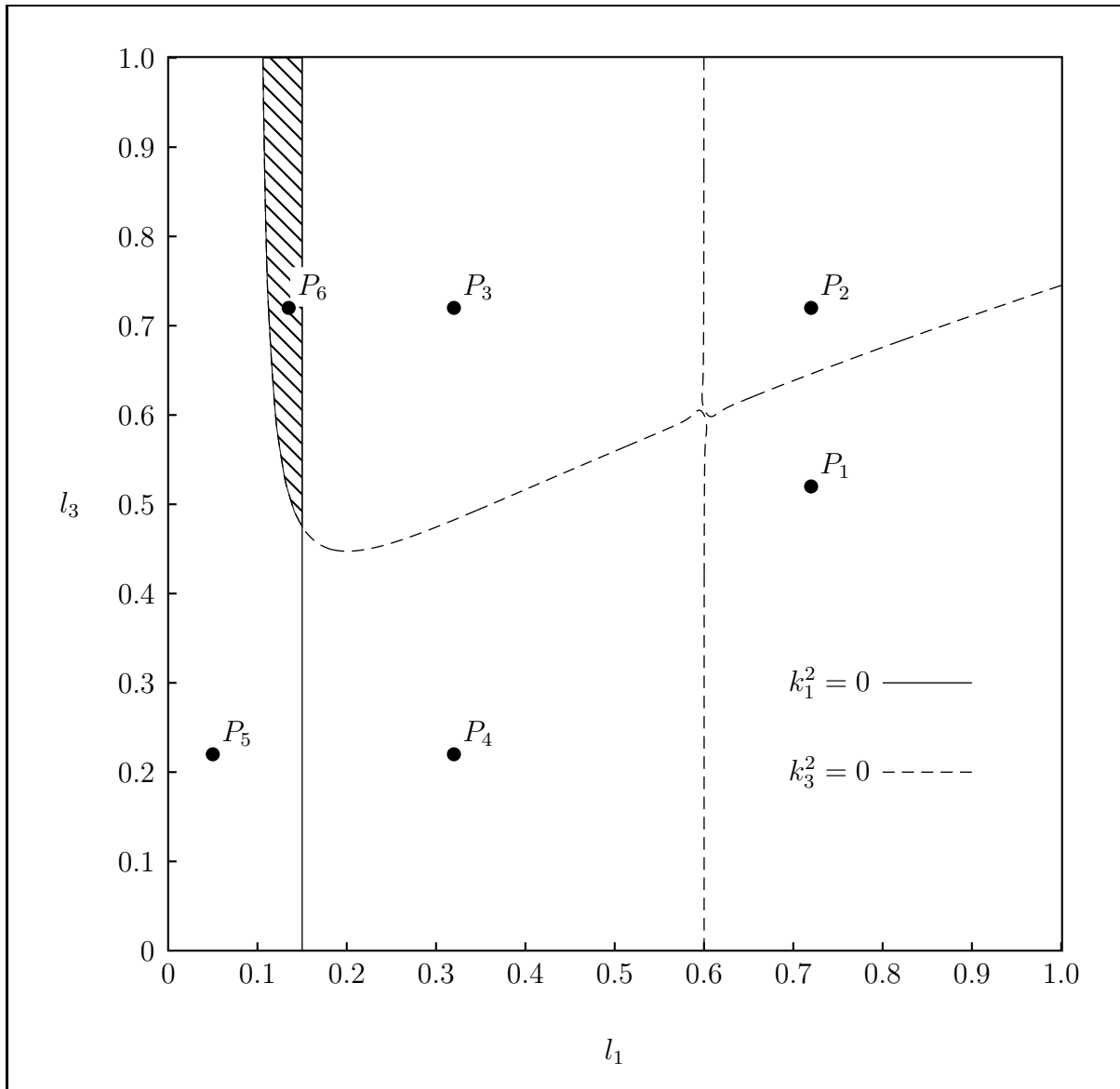


FIG. 5.4 – Exemple de domaine des solutions pour l'ensemble de solution  $M_4B-Y_{CP_2}$ , avec certaines variables fixées ( $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 5$ ,  $r_1 = 0.3$ , et  $k_2 = 0.01$ ).

### 5.5.6.1 Vérification à l'aide des équations de Lagrange

Il est avantageux d'utiliser les équations développées pour le cas général (Sec. 4.5.2.1), puisque la seule différence consiste à y substituer les nouvelles équations de compensation dynamique trouvées pour cette famille au lieu de celles du cas général.

Puisque la dérivation des équations de Lagrange se déroule de la même façon que l'on soit dans le cas  $M4B-G$  ou dans le cas  $M4B-Y_{CP_2}$  on ne répétera pas la même démarche.

La première différence apparaît lors de l'introduction des contraintes de compensations statiques. Ainsi lorsque les contraintes du cas  $M4B-Y_{CP_2}$  sont introduites, on se retrouve avec  $T_x$  (Eq. 5.145) et  $T_\delta$  (Eq. 5.146) qui valent :

$$T_x = \frac{l_3(l_1 m_2 - m_1 r_1)}{l_1} (S_3 \dot{\theta}_3 - S_1 \dot{\theta}_1 - S_2 \dot{\theta}_2) \dot{x} \quad (5.145)$$

$$T_\delta = \left\{ \left[ m_1(k_1^2 + r_1^2) + l_1^2 m_2 + l_3^2 \left( m_2 - \frac{m_1 r_1}{l_1} \right) (C_1 C_2 + S_1 S_2) \right] \dot{\theta}_1 + \right. \\ \left[ m_2(k_2^2 + r_2^2) + l_3^2 \left( m_2 - \frac{m_1 r_1}{l_1} \right) (C_1 C_2 + S_1 S_2) \right] \dot{\theta}_2 + \\ \left. \left[ m_3(k_3^2 + r_3^2) - l_3^2 \left( m_2 - \frac{m_1 r_1}{l_1} \right) C_3 \right] \dot{\theta}_3 \right\} \dot{\delta} \quad (5.146)$$

au lieu des valeurs définies aux équations (4.105 et 4.110).

Pour amener  $T_x$  égal à zéro, il suffit de remplacer les  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  par les valeurs données aux équations (4.23) et (4.24). Pour  $T_\delta$ , on doit poursuivre les substitutions et remplacer les  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et  $C_2$ , par les équations (4.28, 4.29, 4.30 et 4.33). Il ne faut pas oublier que le  $Y_1$ , qui se trouve dans l'équation de  $C_2$  doit être remplacé par l'équation (5.36) puisque l'on est dans le cas où  $Y_1$  devient un carré parfait. Après avoir fait ces substitutions,  $T_x$  et  $T_\delta$ , qui représentent les parties du moment cinétique qui peuvent donner respectivement des forces et moment sur la base, sont bien égaux à zéro, ce qui prouve que les forces et moments sur la base sont égaux à zéro.

### 5.5.6.2 Vérification à l'aide des équations de Newton-Euler

Dans cette section, la vérification de la compensation dynamique d'un mécanisme de l'ensemble  $M4B-Y_{CP_2}$  sera effectuée. On doit donc démontrer que la somme des forces (Eq. 4.122) ainsi que la somme des moments (Eq. 4.123), sur la base du mécanisme donne zéro. Cette vérification se fera à l'aide des équations de Newton-Euler qui ont été développées à la section 4.5.2.2.

**Résolution des équations de forces et de moments pour l'ensemble  $M4B-Y_{CP_2}$**   
Des valeurs numériques décrivant un mécanisme qui respecte les  $M4B-Y_{CP_2}$  (Fig. 5.5) sont données au tableau 5.6.

Comme à la section 4.5.2.2, la méthode utilisée consiste à donner une position, vitesse et accélération au membre d'entrée (membre 1), de calculer les mêmes variables pour les autres membrures (Tab. 5.7) et finalement trouver le couple requis pour effectuer cette trajectoire. Les valeurs  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_1$  étant considérées indépendantes, elles ont été choisies au hasard.

Les résultats intermédiaires de ces calculs, c'est-à-dire, les valeurs des forces et moments sont données au tableau 5.8. On remarque qu'elles ne sont pas nulles. Par contre, la somme des forces et des moments sur la base donne zéro, ce qui était à démontrer.

TAB. 5.6 – Variables définissant un mécanisme à quatre barres de la famille  $M4B-Y_{CP_2}$ , Le symbole \* indique les variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 5.5.3

Variable	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$l_i$ (m)	0.3	0.3	1 *
$m_i$ (kg)	4	1	5
$r_i$ (m)	0.3	0.9 *	0.6 *
$k_i$ (m)	0.300	0.0100*	0.155 *
$\psi_i$ (rad)	$\pi$ *	$\pi$ *	$2\pi$ *

TAB. 5.7 – Valeurs de la trajectoire d'un mécanisme de la famille  $M4B-Y_{CP_2}$ .

Positions	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$\theta_i$ (rad)	$\frac{\pi}{3}$	1.50112*	2.54832*
$\dot{\theta}_i$ (rad/s)	0.4014260	-0.462402*	-0.0609761*
$\ddot{\theta}_i$ (rad/s <sup>2</sup> )	1.16937	-1.22491*	-0.0555361*

TAB. 5.8 – Forces et moments internes et externes calculés pour le mécanisme à quatre barres défini aux tableaux 5.6 et 5.7.

$\mathbf{F}_{B1}$ (N)	$\mathbf{F}_{12}$ (N)	$\mathbf{F}_{32}$ (N)	$\mathbf{F}_{B3}$ (N)	$M_1$ (Nm)
4.22693	5.53886	4.12453	-4.22693	2.77791
-2.77791	-3.31207	2.90981	2.77791	

## 5.6 CCD lorsqu'on sort un facteur de $Y_1$

Pour écrire l'équation du moment cinétique en fonction de la variable d'entrée  $\theta_1$ , on peut partir de l'équation (4.20) puisque la simplification des termes  $V$  et  $W$  (Eqs. 3.16 et 3.17) se fera de la même façon car les contraintes statiques sont les mêmes. Par contre lors de l'élimination des termes intermédiaires, il faudra utiliser l'équation (5.64). Suivant la méthode donnée à la section 4.2.2, on se retrouve avec les coefficients suivants pour l'équation (4.39) :

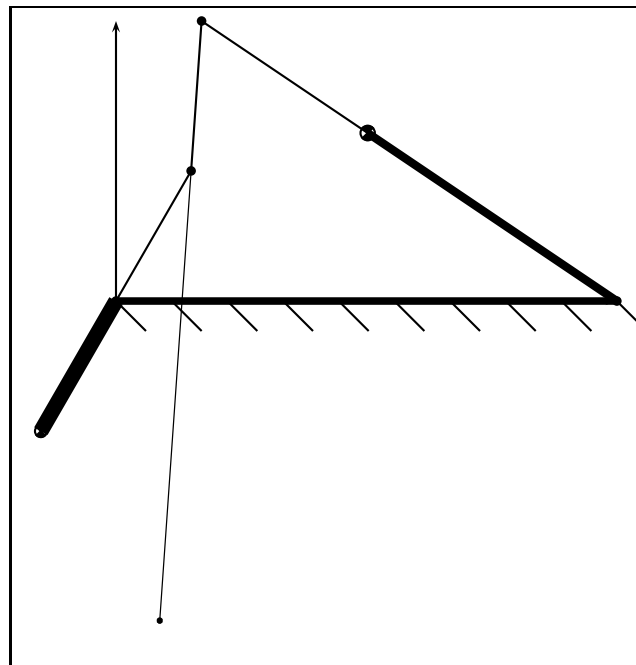


FIG. 5.5 – Mécanisme à quatre barres de la famille  $M_4B-Y_{CP_2}$ , dont les valeurs sont données aux tableaux 5.6 et 5.7. La dimension des  $\bullet$  est proportionnelle à la masse de la membrure et l'épaisseur du vecteur  $\mathbf{r}_i$  est proportionnelle à la valeur de  $k_i$ .

$$j_{0,0,0} = -\lambda_1^3 \lambda_2 ((I_2 + I_3)(\lambda_1 + \zeta \lambda_2 (\xi + \lambda_1)) + \xi I_2 (1 + \Lambda_1)) \quad (5.147)$$

$$j_{0,0,1} = \xi \Lambda_1 \lambda_2 (\Lambda_1 (I_2 + I_3) + I_1 (1 + \Lambda_1)) \quad (5.148)$$

$$j_{0,1,0} = -\lambda_1^3 I_a (2\Lambda_2 + \xi \lambda_1 + 2\zeta \lambda_2 (1 + \xi \lambda_1)) \quad (5.149)$$

$$j_{0,1,1} = -\lambda_1 I_a (\lambda_1 + \zeta \lambda_2 (\xi + \lambda_1)) \quad (5.150)$$

$$j_{1,0,0} = \xi \lambda_1^3 \lambda_2 (I_2 - I_3) \quad (5.151)$$

$$j_{1,0,1} = \lambda_1 \lambda_2 (I_1 + \Lambda_1 (I_1 + I_2 + I_3) - \xi \lambda_1 (2I_1 + I_2 + I_3)) \quad (5.152)$$

$$j_{1,1,0} = \lambda_1 I_a (\xi \lambda_1 (1 - 2\Lambda_2) + 2\lambda_2 (\zeta + \lambda_2) - 2\Lambda_1 (1 + \zeta \lambda_2)) \quad (5.153)$$

$$j_{1,1,1} = -(I_a (\zeta \lambda_2 + \xi \lambda_1 (2 + \zeta \lambda_2))) \quad (5.154)$$

$$j_{2,0,0} = \lambda_1 \lambda_2 ((I_2 + I_3)(\lambda_1 + \zeta \lambda_2 (\xi + \lambda_1)) + \xi I_2 (1 + \Lambda_1)) \quad (5.155)$$

$$j_{2,0,1} = -\lambda_1 \lambda_2 (2I_1 + I_2 + I_3) \quad (5.156)$$

$$j_{2,1,0} = I_a (-\xi \Lambda_1 + 2\xi \lambda_2 (\zeta + \lambda_2) + 2\lambda_1 (1 + \zeta \lambda_2)) \quad (5.157)$$

$$j_{2,1,1} = -I_a \quad (5.158)$$

$$j_{3,0,0} = \xi \lambda_1 \lambda_2 (I_3 - I_2) \quad (5.159)$$

$$j_{3,1,0} = \xi I_a \quad (5.160)$$

et

$$J_d = \xi \lambda_1 \lambda_2 (1 - 2C_1 + \Lambda_1) (\lambda_1 + \xi C_1) Y_{1,cs} \quad (5.161)$$

où  $\xi$ ,  $\zeta$  et  $Y_{1,cs}$  sont définis aux équations (5.53, 5.56, 5.41) respectivement.

### 5.6.1 Dérivation des équations de contrainte

Pour obtenir les équations de contrainte du mécanisme, on doit établir que  $J_n$  (Eq. 4.39) est égal à zéro seulement si les coefficients (Eqs. 5.147—5.160) sont égaux à zéro et que  $J_d$  (Eq. 5.161) ne peut tendre vers l'infini.

La vérification pour  $J_d$  est très simple. En effet, puisque  $C_1$  (Eq. 4.25) est borné entre  $-\lambda_1$  et  $\lambda_1$ , et que  $Y_{1,cs}$  est lui aussi composé de valeurs qui représentent des longueurs de membrures ainsi que des  $C_1$  et des variables qui permettent de changer de signe une partie de l'équation ( $\xi$  et  $\zeta$ ), il est clair que  $J_d$  est borné.



Pour  $J_n$ , il est facile de conclure que l'on doit mettre tous les coefficients à zéro puisque les  $C_1$ ,  $S_1$  et  $Y_{1,cs}$  sont considérés comme indépendants entre eux pour toutes valeurs de  $\theta_1$ .

Il ne reste plus qu'à trouver quelles sont les valeurs qui rendent les  $j_{s,t,u}$  égaux à zéro.

### 5.6.1.1 Familles de solutions

Si une démarche similaire à celle de la section 4.3.1 est effectuée pour trouver les familles de solutions des équations (5.147—5.160), on se retrouve avec trois familles.

La première famille de solutions contient les contraintes suivantes :

$$I_a = 0 \quad (5.162)$$

$$I_3 = I_2 \quad (5.163)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (5.164)$$

$$I_1 = 0 \quad (5.165)$$

La deuxième famille est définie par les équations suivantes :

$$I_a = 0 \quad (5.166)$$

$$I_3 = I_2 \quad (5.167)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (5.168)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (5.169)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\zeta} \quad (5.170)$$

alors que la troisième se présente avec les équations suivantes :

$$I_a = 0 \quad (5.171)$$

$$I_3 = I_2 \quad (5.172)$$

$$I_2 = -I_1 \quad (5.173)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (5.174)$$

$$\xi = -1 \quad (5.175)$$

Il ne faut pas oublier que chaque famille de solutions doit aussi respecter les contraintes qui proviennent de la simplification de  $Y_1$ . On portera donc une attention particulière à la contrainte de l'équation (5.55).

À la première famille de solution, seulement deux contraintes permettent de mettre les trois équations à zéro. Cela est dû au fait que les équations  $j_{s,t,u}$  ne sont pas linéairement indépendantes dans tous les espaces de solutions.

## 5.6.2 Analyse des familles de solutions

Il ne reste plus qu'à vérifier que les familles de solutions trouvées respectent les contraintes de compensation statique et qu'elles respectent les domaines de validité des différentes variables, comme mentionné à la section 4.4.

### 5.6.2.1 Analyse de la première famille de solutions

La première famille de solutions s'analyse de la même façon que la première famille de solutions du cas général (Sec. 4.4.1) puisqu'elle possède les mêmes contraintes que le cas général, avec l'ajout de la contrainte sur  $\Lambda_3$  (5.55). La contrainte sur  $\Lambda_3$  n'affectant pas la démarche qui démontre que cette famille est impossible, les mêmes étapes s'ensuivent pour démontrer que cette famille de solutions est impossible.

### 5.6.2.2 Analyse de la deuxième famille de solutions

Il est facile de démontrer que cette famille de solutions n'est pas une famille physiquement valide. Tout d'abord, on doit ajouter une contrainte supplémentaire pour que l'équation (5.170) soit valide. Sachant que  $\lambda_2$  est défini positif, on doit avoir que :

$$\zeta = -1 \tag{5.176}$$

Pour finir la démonstration, il ne reste plus qu'à substituer les équations (5.169, 5.170 et 5.176) dans l'équation de  $\Lambda_3$  (Eq. 5.55). Ce qui donne  $\Lambda_3 = \xi^2$ . Sachant que  $\xi = \pm 1$  (Eq. 5.53), on se retrouve donc avec un mécanisme dont toutes les membrures auront la même longueur puisque les  $\lambda_i$  sont le rapport des longueurs sur la base du mécanisme

(4.27). Si on se réfère aux observations (5.1, 5.2), le mécanisme ne pourra être compensé dynamiquement.

On doit donc éliminer cette famille puisque le mécanisme ne pourra être compensé dynamiquement.

### 5.6.2.3 Analyse de la troisième famille de solutions

Pour analyser le troisième ensemble de solutions, on se reportera à la section 4.4.2, qui présente l'analyse de la deuxième famille de solutions du cas général.

On peut se reporter à cette section puisque les contraintes sont les mêmes. Les quatre premières contraintes sont les mêmes (Eqs. 5.171—5.174 et 4.59—4.62) pour les deux familles de solutions. Pour ce qui est de la dernière contrainte de la troisième famille des *Contraintes de Compensation Dynamique lorsqu'on sort un facteur de  $Y_1$  (noté  $M4B-Y_{CS_i}$ )*, si on la substitue dans la contrainte de  $\Lambda_3$  (Eq. 5.55), cette contrainte se simplifie pour donner  $\Lambda_3 = \Lambda_2$  ou  $\lambda_3 = \lambda_2$  qui est la quatrième et dernière contrainte du cas général (Eq. 4.63). Ainsi, cette troisième famille de solutions n'est pas une nouvelle famille mais correspond en fait au cas général ( $M4B-G$ ) étudié au chapitre 4.

Il est à noter que la variable  $\zeta$  n'affecte plus l'équation (5.55) lorsque  $\lambda_1 = 1$  et  $\xi = -1$  puisque qu'elle est multipliée par zéro, c'est pourquoi après simplification  $\lambda_3 = \lambda_2$ .

### 5.6.3 Discussion

Il était à prévoir que le cas où l'on sort seulement un facteur de  $Y_1$  donne les mêmes solutions que le cas général. Cela s'explique facilement par le fait que ces deux ensembles de contraintes possèdent une racine carrée dans la relation entre  $C_2$  et  $\theta_1$ .

Lorsqu'on veut mettre l'équation de  $J_n$  (Eq. 4.39) égale à zéro, le fait d'avoir une racine carrée, qui doit être considérée comme indépendante des  $C_1$  et  $S_1$ , fait en sorte que tous les coefficients devant les termes contenant cette racine carrée doivent être mis à zéro car ils ne peuvent se combiner avec les autres termes de l'équation.

Puisque les CCD pour ces deux ensembles de solutions sont les mêmes. On préférera parler de l'ensemble de solution général (  $M_4B-G$  ).

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, de nouvelles familles de mécanismes à quatre barres équilibrés dynamiquement ont été découverts. Ceci a été rendu possible par le fait que dans certains cas, les équations de compensation statique de Berkof et Lowen [1969] ne sont pas nécessaires, tel qu'observé dans [Gosselin, 1997]. Ainsi, on dispose maintenant de 3 familles de solutions différentes qui pourront être utiles dans la réalisation pratique de mécanismes à quatre barres dynamiquement équilibrés.

# Chapitre 6

## Discussions et observations

Dans les chapitres précédents, on a établi la théorie relative aux mécanismes à quatre barres dynamiquement équilibrés. Dans ce chapitre, une discussion sur les propriétés des mécanismes à quatre barres sera faite, pour permettre de faire ressortir des observations qui seront pertinentes au développement de manipulateurs parallèles dynamiquement compensés.

### 6.1 Mécanisme à quatre barres versus corps rigide

Une des caractéristiques intéressantes d'un mécanisme à quatre barres dynamiquement compensé est le fait qu'il peut être considéré comme un corps rigide. Cela vient

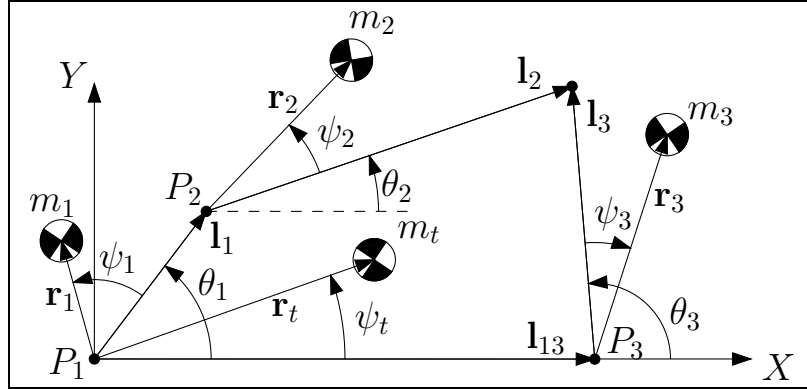


FIG. 6.1 – Paramètres d'un module fait d'un mécanisme à quatre barres

du fait que ses paramètres tels que : la masse, le centre de masse ainsi que le rayon de giration, sont constants.

Il est facile de voir que la masse est constante puisque même si le mécanisme est en mouvement, aucune pièce ni structure ne se sépare du mécanisme, si on fait abstraction de l'usure. La masse totale du mécanisme sera simplement la somme des masses des membrures.

$$m_t = \sum_{i=1}^n m_i \quad (6.1)$$

avec  $n$  égal à quatre pour un mécanisme à quatre barre.

Il est possible dans certain cas, que la base ait une masse nulle, si on considère que la base fait partie de la structure sur laquelle on pose le mécanisme à quatre barres. Cette approche sera particulièrement utilisée lors de la conception de mécanismes parallèles. À partir de maintenant, on considérera donc la base comme ayant une masse nulle. Une autre façon d'exprimer ceci est de considérer seulement la masse des parties mobiles.

Pour ce qui est du centre de masse, par définition d'un mécanisme à quatre barres dynamiquement compensé, sa position doit être constante car on utilise cette condition pour établir les équations de compensation statique (Sec. 5.3). Le vecteur  $\mathbf{r}_t$  indiquant la position du centre de masse du mécanisme à quatre barres sera donné par rapport au point  $P_1$  (Fig. 6.1). On peut donc écrire la position du centre de masse comme suit :

$$\mathbf{r}_t = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_2) + m_3 (\mathbf{l}_{13} + \mathbf{r}_3)}{m_t} \quad (6.2)$$

avec  $\mathbf{r}_i$  défini par l'équation (4.94),  $\mathbf{l}_i$  par l'équation (4.96) et  $\mathbf{l}_{13}$  par l'équation (4.98).

L'angle entre la base du module et le vecteur  $\mathbf{r}_t$ , défini du premier vers le second, sera nommé  $\psi_t$ .

Le rayon de giration par rapport au centre de masse du module sera défini par :

$$k_t = \sqrt{\frac{(k_1^2 + \|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_t\|^2) m_1 + (k_2^2 + \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_t\|^2) m_2 + (k_3^2 + \|\mathbf{r}_3 - \mathbf{l}_{13} + \mathbf{r}_t\|^2) m_3}{m_t}} \quad (6.3)$$

Pour avoir un module qui soit considéré comme un corps rigide, il faut donc que  $k_t$  soit constant pour toutes valeurs de  $\theta_i$   $i = 1, 2, 3$ . Si on prend directement l'équation (6.3) pour faire la vérification, cela devient très difficile. Par contre, si on utilise le théorème des axes parallèles, on a :

$$k_t^2 = k_{t,1}^2 - r_t^2 \quad (6.4)$$

avec

$$k_{t,1}^2 = \frac{(k_1^2 + \|\mathbf{r}_1\|^2) m_1 + (k_2^2 + \|\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_2\|^2) m_2 + (k_3^2 + \|\mathbf{l}_{13} + \mathbf{r}_3\|^2) m_3}{m_t} \quad (6.5)$$

où  $r_t$  est la norme du vecteur  $\mathbf{r}_t$ . Il ne reste plus qu'à vérifier que le terme  $k_{t,1}$  —rayon de giration par rapport au point  $P_1$ —, est constant puisque  $r_t$  est constant. Ce terme peut être séparé en deux parties, une partie regroupant les termes constants et une autre partie regroupant les termes comprenant les  $\theta_i$ , qui sont les seuls termes non constants.

$$k_{t,1}^2 = K_{t,1,c} + K_{t,1,nc} \quad (6.6)$$

avec

$$K_{t,1,c} = (k_1^2 + r_1^2) m_1 + (k_2^2 + r_2^2 + l_1^2) m_2 + (k_3^2 + r_3^2 + d^2) m_3 \quad (6.7)$$

$$K_{t,1,nc} = 2r_2 l_1 m_2 \cos(\psi_2 - \theta_1 + \theta_2) + 2r_3 d m_3 \cos(\psi_3 + \theta_3) \quad (6.8)$$

Ainsi, le problème de vérifier si  $k_t$  était constant se simplifie et consiste à vérifier si le terme  $K_{t,1,nc}$  est constant. Pour faire la vérification, il faut premièrement substituer les valeurs des angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$  (Eqs. 4.28, 4.29, 4.30 et 4.33). Par la suite, il ne reste plus qu'à y substituer les contraintes formant les différentes familles de solutions. Ainsi, si on y substitue les familles de solutions  $M4B-G$  et  $M4B-Y_{CP_1}$ , on obtient zéro. Lorsque les contraintes de la famille de solutions  $M4B-Y_{CP_2}$  y sont substituées, on obtient  $K_{t,1,nc} = \frac{2r_2(l_1^2 - l_3^2)m_2}{l_1}$ .

Puisque pour chaque cas, on obtient une valeur constante, on peut donc affirmer que  $k_t$  est constant. Cela implique qu'on peut considérer en partie un mécanisme à quatre barres compensé dynamiquement comme un corps rigide puisque les paramètres physiques du mécanisme sont tous constants. Par contre, la distance entre deux points quelconques n'est pas toujours constante, ce qui est le cas pour un corps rigide.

### 6.1.1 Exemples de *corps rigides*

Dans la section précédente on a fait la démonstration théorique qu'un mécanisme à quatre barres plan, compensé dynamiquement, peut être considéré comme un corps rigide puisque ses paramètres physiques sont constants. Pour faire suite à cette démonstration, on donnera des exemples pour les différentes familles de solutions. Les paramètres des différents mécanismes seront calculés pour deux configurations différentes.

Les paramètres donnés au tableau 6.1.1 permettent de construire un mécanisme pour les différentes familles de solutions. Pour chaque mécanisme à quatre barres, une partie des paramètres sont choisis au hasard alors que les autres sont trouvés à l'aide des contraintes de compensation dynamique (CCD).

Pour vérifier que les paramètres physiques du mécanisme sont toujours constants, on doit faire la vérification pour plus d'une configuration (Tab. 6.1.1). On donne seulement deux configurations dans cette section car la preuve formelle a déjà été présentée de façon théorique. Ces exemples ne viennent qu'appuyer la démonstration.

Les valeurs totales des mécanismes sont données au tableau 6.1.1. Pour chaque paramètre, on ne retrouve qu'une valeur puisqu'on obtient les mêmes résultats pour les différentes configurations. Le mécanisme peut donc bien être considéré comme un corps rigide puisque ses paramètres sont constants.



TAB. 6.1 – Exemples de mécanisme à quatre barres se comportant comme des corps rigides . Le symbole \* indique les variables calculées à l'aide des CCD des différentes familles de solution. (Tab. A.2)

	$M_4B-G$	$M_4B-Y_{CP_1}$	$M_4B-Y_{CP_2}$
$m_1$ (kg)	0.27	1	3.5
$m_2$ (kg)	0.07	1	1
$m_3$ (kg)	0.5	1	3.5
$k_1$ (m)	0.15	1.1	0.3
$k_2$ (m)	1.55495*	0.368939*	0.620484*
$k_3$ (m)	0.51641*	0.74162 *	0.0319438*
$r_1$ (m)	1	0.4	0.2
$r_2$ (m)	3.30804*	1.84545*	0.4*
$r_3$ (m)	0.46313*	0.7*	0.342857*
$l_1$ (m)	3.2	1.1	0.3
$l_2$ (m)	1.5	2.9*	0.3*
$l_3$ (m)	1.5*	1.1*	0.9
$d$ (m)	3.2*	2.9	0.9*
$\psi_1$ (rad)	$2 \pi$ *	$\pi$ *	$\pi$ *
$\psi_2$ (rad)	$2 \pi$ *	0*	$\pi$ *
$\psi_3$ (rad)	$\pi$ *	$\pi$ *	0*
$\epsilon$	$\pm$	-1*	1*

## 6.2 Discussion sur la position de l'actionneur

Lors de la vérification de la compensation dynamique à l'aide de la méthode de Newton (Sec. 4.5.2.2), il peut sembler arbitraire de mettre l'actionneur entre la base et la membrure 1.

TAB. 6.2 – Exemples de configurations de mécanismes à quatre barres se comportant comme des corps rigides.

	$M_4B-G$		$M_4B-Y_{CP_1}$		$M_4B-Y_{CP_2}$	
	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 1	Sol. 2
$\theta_1$ (rad)	0.261799	0.401426	0.261799	0.401426	0.261799	0.401426
$\theta_2$ (rad)	-0.151286	-0.238601	-0.307437	-0.447799	2.62667	2.3687
$\theta_3$ (rad)	0.413086	0.640026	-0.569236	-0.849225	2.88847	2.77013

TAB. 6.3 – Paramètres des corps rigides résultants.

	$M_4B-G$	$M_4B-Y_{CP_1}$	$M_4B-Y_{CP_2}$
$m_t$ (kg)	0.84	3	8
$r_t$ (m)	2.49286	1.58182	0.24375
$\psi_t$ (rad)	0	0	0
$k_t$ (m)	1.5693	1.63975	0.493037

On démontrera que ce choix est tout à fait valable puisqu'il est possible de positionner l'actionneur à toutes les articulations (Points  $P_i$ ) et que ce changement n'affecte en rien la dynamique du système.

Pour commencer, il faut se rappeler que toute équation représente la description d'un phénomène physique avec ses causes et ses effets. En ce qui nous concerne les causes possibles sont des forces et des moments et les effets sont : les déplacements, les rotations, les vitesses, les accélérations, les déformations, etc.

À l'aide de l'équation du moment cinétique (Sec. 3.2), on décrit le comportement du mécanisme autour d'un point. À la section 4.2.2, on demande que ce comportement ne change pas en spécifiant que la dérivée du moment dynamique soit égale à zéro. Ainsi, on ne fait aucunement mention des causes du mouvement, on se concentre sur les effets. C'est une bonne chose puisqu'on ne peut contrôler et prévoir toutes les causes possibles. Ainsi les équations de contraintes qui sont regroupées dans les familles de solutions ne prennent aucunement en cause les forces et moments qui créent le mouvement, seulement les effets de ces forces et moments. Ainsi la compensation dynamique du mécanisme à quatre barres est indépendante de son actionnement.

C'est ce qu'on démontrera en changeant seulement l'actionnement du mécanisme et en vérifiant que le mécanisme est toujours dynamiquement équilibré.

### 6.2.1 Équation de Newton en 3D

Pour faciliter la vérification et aussi permettre seulement une série d'équations pour l'ensemble de la vérification, les équations seront développées en 3D et certains termes

seront ajoutés pour prendre en compte la possibilité que l'actionneur puisse être positionné à différents endroits.

Les équations de forces seront les mêmes que celles que l'on retrouve à la section 4.5.2.2, c'est-à-dire les équations (4.115, 4.117, 4.120) puisque l'actionnement ne génère qu'un moment.

Pour les équations de moments, on prendra intégralement l'équation (4.116). Puisqu'elle contient déjà le terme  $\mathbf{M}_B$  qui peut représenter l'actionneur ajouté au mécanisme alors qu'on ajoutera aux équations (4.118) et (4.121) un terme qui permettra de représenter un couple moteur. Ce qui donnera :

$$\mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{32} + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{F}_{23} = \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{r}_2 \times (m_2 \mathbf{a}_{cm,2}) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{M}_{32} + \mathbf{M}_{3B} + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{F}_{23} = \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\alpha}_3 + \mathbf{r}_3 \times (m_3 \mathbf{a}_{cm,3}) \quad (6.10)$$

où  $\mathbf{M}_{21}$  est un moment exercé sur le membre 2 par le membre 1,  $\mathbf{M}_{32}$  est un moment exercé sur le membre 3 par le membre 2 et  $\mathbf{M}_{3B}$  est un moment exercé sur le membre 3 par la base. Ces moments peuvent provenir d'un actionneur que l'on intègre au mécanisme mais ils peuvent aussi provenir du fait que le mécanisme est dans un espace en 3D. Ces moments serviront à établir une certaine stabilité au mécanisme car on veut seulement qu'il bouge dans le plan XY. Pour solutionner le système d'équations on procédera de la même manière qu'à la section 4.5.2.2. C'est-à-dire qu'on donnera des valeurs pour la position, la vitesse et l'accélération du membre d'entrée et qu'on trouvera la valeur du moment que doit générer l'actionneur pour obtenir ces valeurs. Il est à noter que la position, la vitesse et l'accélération des autres membrures sont calculées à l'aide des équations de la section 4.2.1.

## 6.2.2 Ajustement des équations

Avant de solutionner les équations, il faut vérifier si le système est statiquement déterminé. Si on regarde simplement le nombre d'équations (18) et le nombre d'inconnues (24). On remarque qu'il y a plus d'inconnues que d'équations. Cela indique que le problème est surdéterminé ou qu'il est possible d'éliminer certaines variables dues à la configuration physique du système. Pour écrire les équations d'une façon générale on a donné la possibilité à chaque articulation de supporter des moments selon les trois

axes, ce qui n'est certainement pas nécessaire. On sait que des articulations rotoïdes peuvent supporter des moments que selon deux axes. Il faut donc analyser le mécanisme pour vérifier s'il est possible d'éliminer des variables et ainsi avoir un mécanisme statiquement déterminé.

Pour avoir un mécanisme stable et statiquement déterminé, on doit avoir le nombre d'équations égal au nombre d'inconnues.

Si on pose un actionneur sur l'articulation  $P_1$ , elle supporte un moment selon les trois axes. Avec cette contrainte la membrure un est fixée statiquement. Les articulations  $P_2$ ,  $P_2'$  et  $P_3$  (Fig. 3.1) ne pourront avoir de moment selon l'axe  $Z$  puisqu'elles possèdent des articulations rotoïdes selon cet axe et une articulation rotoïde ne peut soutenir aucun moment. Ainsi trois variables sont éliminées soient les composantes selon l'axe  $Z$  des variables  $\mathbf{M}_{12}$ ,  $\mathbf{M}_{23}$  et  $\mathbf{M}_{3B}$ .

On se rappelle que le mécanisme à quatre barres est un mécanisme fermé. On doit donc ajouter trois autres équations de contraintes soit :

$$\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_{13} + \mathbf{l}_3 \quad (6.11)$$

où  $\mathbf{l}_i$  est défini à l'équation (4.96) et  $\mathbf{l}_{13}$  à l'équation (4.98).

Ainsi si on refait le compte, on a 21 équations et 24 variables dont on peut enlever 3 composantes en  $Z$ . Ce qui donne  $21 - (24 - 3) = 0$ , on obtient donc, un ensemble d'équations statiquement déterminées.

Lorsque le moteur sera positionné sur une autre articulation, on pourra refaire le même cheminement pour obtenir un mécanisme stable et on s'apercevra qu'il est toujours possible d'éliminer six variables et avoir un mécanisme stable et statiquement déterminé.

### 6.2.3 Exemples

Dans les sections précédentes de ce chapitre, on a fait des énoncés et on a apporté une preuve théorique. Dans cette section, on illustrera le résultat avec des valeurs numériques.

Les dimensions du mécanisme qu'on va utiliser se trouvent dans le tableau 6.4. Ce mécanisme est un mécanisme compensé dynamiquement de la famille  $M_4B-G$ .

TAB. 6.4 – Variables définissant un mécanisme à quatre barres, \* variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 4.4.2

Variable	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$l_i$ (m)	3	0.7	3 *
$m_i$ (kg)	0.3	0.01	1
$r_i$ (m)	0.01	0.77 *	0.0077 *
$k_i$ (m)	0.0001	0.918205*	0.0593355 *
$\psi_i$ (rad)	$2\pi$ *	$2\pi$ *	$\pi$ *

Pour faire la preuve que la position de l'actionneur n'a aucune importance sur la compensation dynamique d'un mécanisme à quatre barres, on donne une configuration au mécanisme en définissant la valeur de l'angle  $\theta_1$ . On spécifie aussi la vitesse et l'accélération angulaire de la membrure un (Tab. 6.5). Ainsi la seule différence sera le positionnement de l'actionneur qui permet d'engendrer les vitesses et accélérations données plus haut. Finalement la vérification sera établie en regardant la somme des forces et des moments sur la base (Eqs. 4.122 et 4.123). Si la somme reste à zéro, pour les trois configurations, on aura une preuve de plus que la position des actionneurs n'influence pas les propriétés et contraintes qui permettent à un mécanisme d'être compensé dynamiquement. Il est à noter que, pour l'équation (4.123) le moment généré par l'actionneur est un des  $\mathbf{M}_i$  où  $i$  est égale à 1, 2 ou 3 selon la configuration analysée.

TAB. 6.5 – Variables définissant le comportement dynamique du mécanisme à quatre barres, \* variables calculées à l'aide des solutions valides de la section 4.2.1

Variable	Membre 1	Membre 2	Membre 3
$\theta_i$ (rad)	$\frac{\pi}{7}$	-1.04078 *	1.48958 *
$\dot{\theta}_i$ (rad/s)	0.401	-2.58378 *	2.98478 *
$\ddot{\theta}_i$ (rad/s) <sup>2</sup>	1.16937	-31.9782 *	33.1476 *

Dans le tableau 6.6, on retrouve les forces internes et externes calculées pour différentes positions de l'actionneur. Pour la configuration 1 l'actionneur est situé à l'articulation reliant la base à la membrure 1 ( $P_1$ ). À la configuration 2 l'actionneur est monté

sur l'articulation reliant les membrures un et deux ( $P_2$ ) alors qu'à la configuration 3 l'actionneur est installé à l'articulation entre la base et la membrure 3 ( $P_3$ ) (Fig. 3.1).

TAB. 6.6 – Forces et Moments en fonction de la position de l'actionneur

Variable	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
$\mathbf{F}_{B1}$ (N)	$[0.3163, -1.3503]^T$	$[0.4432, 0.2096]^T$	$[-0.3686, -0.1814]^T$
$\mathbf{F}_{B3}$ (N)	$[-0.3163, 1.3503]^T$	$[-0.4432, -0.2096]^T$	$[0.3686, 0.1814]^T$
$\mathbf{F}_{12}$ (N)	$[0.3143, -1.3474]^T$	$[0.4413, 0.2125]^T$	$[-0.3706, -0.1785]^T$
$\mathbf{F}_{32}$ (N)	$[-0.0563, 1.3980]^T$	$[-0.1833, -0.1619]^T$	$[0.6286, 0.2291]^T$
$\mathbf{M}_1$ (Nm)	4.0509	—	—
$\mathbf{M}_2$ (Nm)	—	-0.6287	—
$\mathbf{M}_3$ (Nm)	—	—	0.5442
$\mathbf{F}_B$ (N x10 <sup>-16</sup> )	$[0.5551, -2.2204]^T$	$[-0.5551, -2.4980]^T$	$[0.5551, -2.2204]^T$
$\mathbf{M}_{0_1}$ (Nm x10 <sup>-15</sup> )	0.8882	-2.6645	3.6637

Si on insère les valeurs trouvées pour les trois configurations dans les équations 4.122 et 4.123), on trouve la valeur recherchée pour les deux équations, c'est-à-dire zéro.

## 6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait ressortir des propriétés fondamentales des mécanismes à quatre barres équilibrés dynamiquement. La propriété principale est que de tels mécanismes se comportent dynamiquement comme des corps rigides. Ce résultat est très important puisqu'il permettra de bien comprendre l'utilisation de mécanismes à quatre barres pour la synthèse de mécanismes parallèles dynamiquement équilibrés.

# Chapitre 7

## Compensation dynamique appliquée aux mécanismes à cinq barres

Dans les chapitres précédents, on a vu qu'il est possible d'obtenir des mécanismes à quatre barres plans dynamiquement équilibrés sans utiliser de composantes additionnelles comme des contre-rotations. Ce résultat est nouveau et fort prometteur pour le développement de mécanismes parallèles équilibrés dynamiquement. Dans le présent chapitre, on utilisera la même approche afin de déterminer s'il est possible d'obtenir des mécanismes à cinq barres dynamiquement équilibrés. En effet, si ceci est possible, on pourrait alors obtenir des modules plans à deux degrés de liberté dynamiquement équilibrés.

## 7.1 Équation du moment cinétique des mécanismes à cinq barres

Puisque les mécanismes à cinq barres (Fig. 7.1) sont des mécanismes plans, l'équation (2.2) peut être écrite de façon scalaire pour simplifier son utilisation, ce qui donne :

$$H_O = \sum_{i=1}^4 m_i \left( x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i + k_i^2 \dot{\theta}_i \right) \quad (7.1)$$

avec

$$x_1 = r_1 \cos(\theta_1 + \psi_1) \quad (7.2)$$

$$y_1 = r_1 \sin(\theta_1 + \psi_1) \quad (7.3)$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_2 + \psi_2) \quad (7.4)$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_2 + \psi_2) \quad (7.5)$$

$$x_3 = d + l_4 \cos \theta_4 + r_3 \cos(\theta_3 + \psi_3) \quad (7.6)$$

$$y_3 = l_4 \sin \theta_4 + r_3 \sin(\theta_3 + \psi_3) \quad (7.7)$$

$$x_4 = r_4 \cos(\theta_4 + \psi_4) \quad (7.8)$$

$$y_4 = r_4 \sin(\theta_4 + \psi_4) \quad (7.9)$$

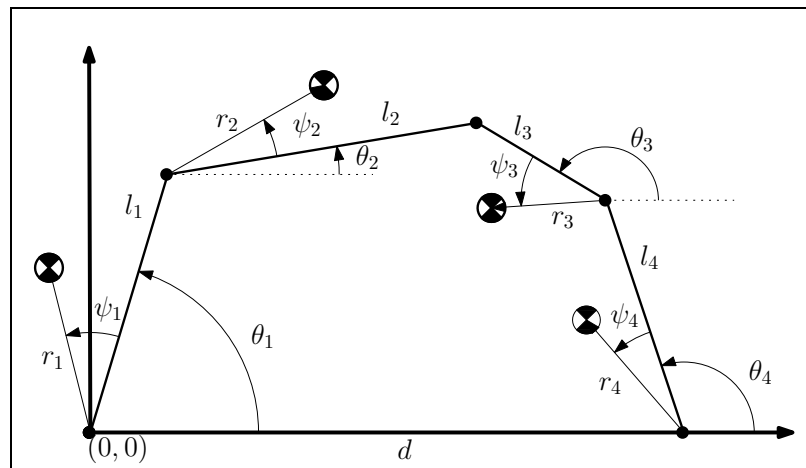


FIG. 7.1 – Mécanisme à cinq barres

Pour adapter l'équation précédente (Eq. 7.1) aux mécanismes à cinq barres compensés statiquement, on suivra la dérivation faite dans la section 3.2 qui s'inspire de la dérivation faite par Berkof et Lowen [1971b].



La première étape, avant de commencer les simplifications, est de remplacer les valeurs de  $x_i$ ,  $y_i$  et  $\dot{x}_i$ ,  $\dot{y}_i$ , pour avoir une équation en fonction des angles et des longueurs du mécanisme.

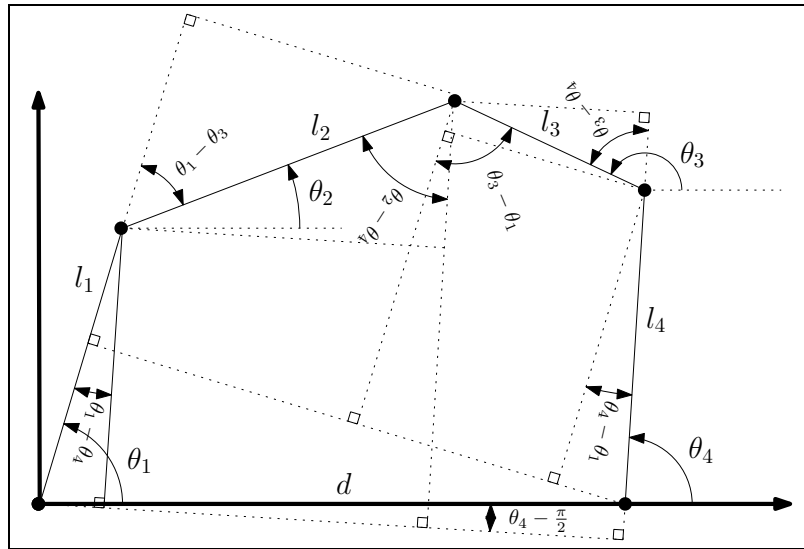


FIG. 7.2 – Géométrie du mécanisme à cinq barres.

Puisqu'on veut avoir une équation en fonction des variables articulaires. On remplace dans l'équation obtenue certaines valeurs de  $\sin(\theta_1 - \theta_2)$ ,  $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ ,  $\sin(\theta_3 - \theta_4)$  et  $\cos(\theta_3 - \theta_4)$  par une valeur obtenue en utilisant des équations (Eq. 7.10–7.13) qui décrivent la géométrie d'un mécanisme à cinq barres (Fig. 7.2). On a :

$$\tau_1 = \sin(\theta_1 - \theta_2) = \eta \sin \theta_1 + \nu \sin(\theta_1 - \theta_4) + \mu \sin(\theta_1 - \theta_3) \quad (7.10)$$

$$\tau_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) + \lambda = \eta \cos \theta_1 + \nu \cos(\theta_1 - \theta_4) + \mu \cos(\theta_1 - \theta_3) \quad (7.11)$$

$$\Gamma_1 = \sin(\theta_3 - \theta_4) = \frac{\eta}{\mu} \sin \theta_4 + \frac{\lambda}{\mu} \sin(\theta_1 - \theta_4) + \frac{1}{\mu} \sin(\theta_2 - \theta_4) \quad (7.12)$$

$$\Gamma_2 = \cos(\theta_3 - \theta_4) + \frac{\nu}{\mu} = -\frac{\eta}{\mu} \cos \theta_4 + \frac{\lambda}{\mu} \cos(\theta_1 - \theta_4) + \frac{1}{\mu} \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad (7.13)$$

où  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont données aux équations (3.10, 3.11 et 3.12) alors que  $\eta$  est égale à  $\frac{l_4}{l_2}$ .

Pour utiliser les mêmes étapes que dans la section 3.2, on introduit de nouvelles variables (Eq. 7.14 et 7.15) qui serviront à remplacer des valeurs de  $r_2 \cos \psi_2$  et  $r_3 \cos \psi_3$ .

$$r_2 \cos \psi_3 = r'_2 \cos \psi'_2 + l_2 \quad (7.14)$$

$$r_3 \cos \psi_3 = r'_3 \cos \psi'_3 + l_3 \quad (7.15)$$

On remarque que dans l'équation du moment cinétique, on retrouve des termes qui ressemblent aux termes de l'équation (3.15). Puisqu'on soupçonne que le mécanisme se comporte de la même façon, on fera sortir le même genre de termes, quitte à devoir les ajouter. On se retrouve donc avec :

$$\begin{aligned}
H_0 = & \left[ m_1 (k_1^2 + r_1^2) - l_1 r_2' m_2 \cos \psi_2 \lambda \right] \dot{\theta}_1 + m_2 (k_2^2 + r_2^2 - l_2 r_2 \cos \psi_2) \dot{\theta}_2 + \\
& m_3 (k_3^2 + r_3^2 - l_3 r_3 \cos \psi_3) \dot{\theta}_3 + \left[ m_4 (k_4^2 + r_4^2) - l_4 r_3' m_3 \cos \psi_3 \frac{\nu}{\mu} \right] \dot{\theta}_4 + \\
& V + W
\end{aligned} \tag{7.16}$$

où

$$\begin{aligned}
V = & \left\{ m_2 l_1 r_2 \tau_2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 r_2 \left( \tau_2 - \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \dot{\theta}_2 + \right. \\
& m_3 r_3 \left[ l_3 + l_4 \left( \Gamma_2 - \frac{\nu}{\mu} \right) + d \cos \theta_3 \right] \frac{\cos \psi_3}{\cos \psi_2} \dot{\theta}_3 + \\
& \left. [m_4 r_4 d \cos \theta_4 \cos \psi_4 + m_3 l_4 (r_3 \Gamma_2 \cos \psi_3 + d \cos \theta_4)] \frac{1}{\cos \psi_2} \dot{\theta}_4 \right\} \cos \psi_2
\end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned}
W = & \left\{ m_2 l_1 r_2 \tau_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - m_3 r_3 \left[ d \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_4 \Gamma_1 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \right] \frac{\sin \psi_3}{\sin \psi_2} - \right. \\
& \left. m_4 r_4 d \sin \theta_4 \frac{\sin \psi_4}{\sin \psi_2} \dot{\theta}_4 \right\} \sin \psi_2
\end{aligned} \tag{7.18}$$

### 7.1.1 Utilisation de la compensation statique

On peut trouver dans la littérature [Jean et Gosselin, 1996] les équations qui amènent l'obtention d'un mécanisme à cinq barres compensé statiquement. Celles-ci sont données aux équations (7.19) à (7.24). On remarquera que les quatre premières équations sont les mêmes que celles données aux équations (4.5–4.8). Puisque ces quatre équations sont équivalentes à celles trouvées par Berkof et Lowen [1969], le choix des six équations indépendantes à utiliser se fera dans un ensemble de dix équations.

$$m_1 r_1 \sin \psi_1 - \frac{m_2 r_2 l_1 \sin \psi_2}{l_2} = 0 \quad (7.19)$$

$$m_1 r_1 \cos \psi_1 + m_2 l_1 - \frac{m_2 r_2 l_1 \cos \psi_2}{l_2} = 0 \quad (7.20)$$

$$\frac{m_2 r_2 l_3 \sin \psi_2}{l_2} + m_3 r_3 \sin \psi_3 = 0 \quad (7.21)$$

$$\frac{m_2 r_2 l_3 \cos \psi_2}{l_2} + m_3 r_3 \cos \psi_3 = 0 \quad (7.22)$$

$$\frac{m_2 r_2 l_4 \sin \psi_2}{l_2} + m_4 r_4 \sin \psi_4 = 0 \quad (7.23)$$

$$\frac{m_2 r_2 l_4 \cos \psi_2}{l_2} + m_3 l_4 + m_4 r_4 \cos \psi_4 = 0 \quad (7.24)$$

### 7.1.2 Simplification de la variable $V$ du moment cinétique

Le but de cette section se résume à simplifier  $V$  (Eq. 7.17), qui représente une partie de l'équation du moment dynamique (Eq. 7.16).

On peut utiliser les équations de contraintes du mécanisme à cinq barres (Eq. 7.25 et 7.26) pour éliminer les variables  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$ .

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = d + l_4 \cos \theta_4 + l_3 \cos \theta_3 \quad (7.25)$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_4 \sin \theta_4 + l_3 \sin \theta_3 \quad (7.26)$$

Pour éliminer  $\dot{\theta}_2$ , on utilisera la dérivée des équations (7.25) et (7.26) qui seront multipliées par  $\sin \theta_3$  et  $\cos \theta_3$  respectivement. Par la suite, on substitue les expressions de  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$  obtenues à partir des équations de contraintes, ce qui permet d'obtenir  $\dot{\theta}_2$  en fonction des variables auxquelles on s'intéresse. Une méthode similaire est utilisée pour obtenir  $\dot{\theta}_3$ . Ce qui donne :

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\lambda \sin (\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 + \nu \sin (\theta_3 - \theta_4) \theta_4}{\tau_3} \quad (7.27)$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\lambda \tau_1 \dot{\theta}_1 - \nu [\lambda \sin (\theta_1 - \theta_4) - \mu \Gamma_1 + \eta \sin \theta_4] \dot{\theta}_4}{\mu \tau_3} \quad (7.28)$$

Lorsque c'est fait, on peut substituer les expressions de  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$ , obtenues directement des équations (7.25) et (7.26), dans l'équation de  $V$ . Une des dernières étapes consiste à remettre dans l'équation les valeurs de  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  données aux équations (7.10–7.13). Pour finir, on utilise l'équation (7.29), provenant des équations (7.25) et (7.26) lorsqu'on isole  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$  pour, par la suite, les mettre au carré et les additionner,

$$\begin{aligned} \eta^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1 = & 2\lambda\mu \cos(\theta_1 - \theta_3) + 2\lambda\nu \cos(\theta_1 - \theta_4) - \\ & 2\mu\nu \cos(\theta_3 - \theta_4) + 2\eta\lambda \cos \theta_1 - 2\eta\mu \cos \theta_3 - 2\eta\nu \cos \theta_4 \end{aligned} \quad (7.29)$$

on s'aperçoit alors que :

$$V = 0 \quad (7.30)$$

### 7.1.3 Simplification de la variables $W$ du moment cinétique

Le but de cette section se résume à simplifier  $W$  (Eq. 7.18), qui représente une partie de l'équation du moment dynamique (Eq. 7.16).

La première étape consiste à substituer les équations (7.27) et (7.28) dans l'équation (7.18). Par la suite, on peut remplacer les valeurs de  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  données aux équations (7.10–7.13) dans l'équation du moment dynamique. Pour finir, on remplace les valeurs de  $\cos \theta_2$  et  $\sin \theta_2$  trouvées à l'aide des équations de contraintes, dans l'équation du moment dynamique (Eq. 7.16).

On obtient finalement :

$$W = 2l_1 r_2 m_2 \sin \psi_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + 2l_3 \frac{l_4}{l_2} r_2 m_2 \sin \psi_2 \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4 \quad (7.31)$$

## 7.2 Équation du moment cinétique des mécanismes à cinq barres compensés statiquement

Si un mécanisme à cinq barres est équilibré statiquement, l'équation de son moment dynamique se présente sous une forme très similaire à l'équation d'un mécanisme à quatre barres.

Si on utilise les équations de compensation statique (7.20), (7.22) et (7.24) pour éliminer les variables supplémentaires qu'on avait introduites (Eq. 7.14 et 7.15). On se retrouve avec :

$$H_0 = \sum_{i=1}^4 I_i \dot{\theta}_i + I_a \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + I_b \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4 \quad (7.32)$$

où

$$I_i = (k_i^2 + r_i^2 - r_i l_i \cos \psi_i) m_i \quad (7.33)$$

$$I_a = 2l_1 r_2 m_2 \sin \psi_2 \quad (7.34)$$

$$I_b = 2l_3 \frac{l_4}{l_2} r_2 m_2 \sin \psi_2 \quad (7.35)$$

Il est à remarquer que la variable  $I_i$  n'est pas le moment d'inertie de la membrure  $i$  même si l'équation (7.32) peut porter à confusion, cette variable ne sert qu'à regrouper un ensemble de constantes provenant des différentes membrures et qui sont multipliées par le même facteur.

### 7.3 Équation du moment cinétique en fonction des variables d'entrée

Maintenant qu'on connaît l'équation du moment cinétique (Eq. 7.32), il ne reste plus qu'à trouver une équation en fonction des variables d'entrée ( $\theta_1$  et  $\theta_4$ ) et de vérifier que le moment cinétique est constant.

À l'aide des équations de contraintes (7.25) et (7.26), il est possible d'éliminer plusieurs variables. Une des premières étapes pour obtenir l'équation en  $\theta_1$  et  $\theta_4$  consiste à se départir des dérivées par rapport au temps de  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . Ceci peut être fait en dérivant les équations de contraintes, ce qui donne deux équations en fonction des deux variables recherchées. On peut donc isoler  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  de ce système d'équations. Ce qui donne :

$$\dot{\theta}_2 = \frac{(C_3 S_1 - C_1 S_3) \dot{\theta}_1 + (C_4 S_3 - C_3 S_4) \dot{\theta}_4}{C_2 S_3 - C_3 S_2} \quad (7.36)$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{(C_2 S_1 - C_1 S_2) \dot{\theta}_1 + (C_4 S_2 - C_2 S_4) \dot{\theta}_4}{C_2 S_3 - C_3 S_2} \quad (7.37)$$

avec

$$C_i = \lambda_i \cos \theta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.38)$$

$$S_i = \lambda_i \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.39)$$

$$(7.40)$$

où

$$\lambda_i = \frac{l_i}{d}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.41)$$

De plus, à l'aide des équations de contraintes (7.25) et (7.26), il est possible d'exprimer  $C_3$  et  $S_3$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_4$ .

$$C_3 = C_1 + C_2 - (1 + C_4) \quad (7.42)$$

$$S_3 = S_1 + S_2 - (S_4); \quad (7.43)$$

En utilisant l'identité trigonométrique  $C_i^2 + S_i^2 = \lambda_i^2$  et les équations (7.42) et (7.43), on trouve la relation qui permet d'exprimer  $\sin \theta_2$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $\theta_4$  et  $\cos \theta_2$ . Cette équation se présente comme suit :

$$S_2 = \frac{-[\Delta_2 - C_1(1 + C_4) + C_2(-1 + C_1 - C_4) + C_4 - S_1 S_4]}{S_1 - S_4} \quad (7.44)$$

avec

$$\Delta_2 = \frac{1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + \lambda_4^2}{2} \quad (7.45)$$

Puisqu'on connaît maintenant la valeur de  $S_2$ , on peut obtenir la valeur de  $C_2$  en fonction de  $\theta_1$  et  $\theta_4$  à l'aide de l'identité trigonométrique  $C_i^2 + S_i^2 = \lambda_i^2$  et de l'équation (7.44). Ce qui donne :

$$C_2 = \frac{-B_1 + Y_2}{2B_2} \quad (7.46)$$

avec

$$Y_2 = \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_2 B_0} \quad (7.47)$$

$$B_2 = -2(1 + C_4)C_1 - 2S_1 S_4 + 2C_4 + \lambda_1^2 + \lambda_4^2 + 1 \quad (7.48)$$

$$B_1 = 2[-(1 + C_4)C_1^2 + (-S_1 S_4 + C_4^2 + 3C_4 + \Delta_2 + 1)C_1 + (1 + C_4)S_1 S_4 - C_4^2 - (1 + \Delta_2)C_4 - \Delta_2] \quad (7.49)$$

$$B_0 = (2C_4^2 + 2C_4 + \lambda_2^2 - \lambda_4^2 + 1)C_1^2 + 2[(1 + C_4)S_1 S_4 - C_4^2 - (1 + \Delta_2)C_4 - \Delta_2]C_1 + 2(-C_4 + \lambda_2^2 - \Delta_2)S_1 S_4 + (1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2)C_4^2 + 2\Delta_2 C_4 + \Delta_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_4^2 - \lambda_2^2 \lambda_4^2 \quad (7.50)$$

## 7.4 Obtention de l'équation en fonction des variables d'entrée

Si on substitue dans l'équation (7.32) les valeurs de  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$ ,  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et  $C_2$  définies aux équations (7.36), (7.37), (7.42), (7.43), (7.44) et (7.46), on obtient :

$$H_0 = \left[ \frac{J_{n,1}\dot{\theta}_1 + J_{n,4}\dot{\theta}_4}{J_d} \right] \quad (7.51)$$

où

$$J_{n,1} = \sum_{i=0}^5 j_{i,1} C_1^i \quad (7.52)$$

$$J_{n,4} = \sum_{i=0}^5 j_{i,4} C_1^i \quad (7.53)$$

$$J_d = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 Y_2}{2(\sin \theta_1 - \sin \theta_4)} \quad (7.54)$$

où les coefficients  $j_{i,j}$  sont fonctions de la variable  $\theta_4$  et des paramètres dimensionnels du mécanisme.

On regardera seulement les  $j_{i,1}$  et  $j_{i,4}$  pour lesquelles on retire de l'information importante. C'est pourquoi notre attention se porte sur  $j_{5,1}$  et  $j_{5,4}$

$$j_{5,1} = 32\lambda_3\lambda_4 I_a S_4 [2C_4^3 + 4C_4^2 + C_4(3 - \lambda_4^2) - \lambda_4^2 + 1] \quad (7.55)$$

$$j_{5,4} = 8\lambda_1\lambda_2 I_b S_4 [8C_4^3 + 12C_4^2 + 2C_4(3 - 2\lambda_4^2) - 3\lambda_4^2 + 1] \quad (7.56)$$

Pour que  $j_{5,1}$  et  $j_{5,4}$  soient égaux à zéro pour toutes valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_4$ , sachant que les  $\lambda_i$  sont définis semi-positifs, il faut que  $I_a$  et  $I_b$  soient égaux à zéro.

On laissera de côté, pour l'instant, les autres coefficients puisqu'il est plus simple de redériver l'équation (7.32), en sachant que  $I_a = 0$  et  $I_b = 0$ , et ainsi obtenir des coefficients beaucoup plus simple, où l'on pourra facilement voir les conditions d'équilibrage dynamique.

Il ne faut pas oublier de vérifier le comportement de l'équation (7.51) pour toutes valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_4$ . Cette vérification se fera lorsqu'on connaîtra les conditions d'équilibrage car, on pourra substituer ces contraintes dans l'équation (7.54), ce qui, sûrement, simplifiera l'équation et ainsi son comportement sera plus facile à analyser.

## 7.5 Obtention de l'équation en fonction des variables d'entrée lorsque $I_a = I_b = 0$

Si on reprend l'équation (7.32) avec  $I_a = I_b = 0$  et qu'on substitue les valeurs de  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$ ,  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et  $C_2$  données aux équations (7.36), (7.37), (7.42), (7.43), (7.44) et (7.46). On se retrouve avec l'équation suivante :

$$H_0 = \left[ \frac{K_{n,1}\dot{\theta}_1 + K_{n,4}\dot{\theta}_4}{K_d} \right] \quad (7.57)$$

avec

$$K_{n,1} = \sum_{i=0}^3 C_1^i \sum_{j=0}^1 S_1^j \sum_{k=0}^3 C_4^k \sum_{l=0}^1 S_4^l (a_{ijkl,1} + b_{ijkl,1}Y_2) \quad (7.58)$$

$$K_{n,4} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \sum_{i=0}^3 C_1^i \sum_{j=0}^1 S_1^j \sum_{k=0}^3 C_4^k \sum_{l=0}^1 S_4^l (a_{ijkl,4} + b_{ijkl,4}Y_2) \quad (7.59)$$

$$K_d = 4(S_1 - S_4)(1 - 2C_1 + 2C_4 - 2C_1C_4 + \lambda_1^2 + \lambda_4^2 - 2S_1S_4) \quad (7.60)$$

Puisque cette équation peut devenir assez volumineuse, on ne donnera que les coefficients qui présentent un intérêt pour cette dérivation (tous les coefficients sont données en annexe D).

Le but de cet exercice est de mettre le numérateur de l'équation (7.57) à zéro. Puisque les variables  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\theta_4$  et  $\dot{\theta}_4$  sont indépendantes, il faut que les variables  $K_{n,1}$  et  $K_{n,4}$  soient égales à zéro. Ceci implique que les coefficients  $a_{ijkl,1}$ ,  $b_{ijkl,1}$ ,  $a_{ijkl,4}$  et  $b_{ijkl,4}$  doivent être égaux à zéro puisque les combinaisons  $\cos^i \theta_1 \sin^j \theta_1 \cos^k \theta_4 \sin^l \theta_4 Y_2^m$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ;  $j = 0, 1$ ;  $k = 0, 1, 2, 3$ ;  $l = 0, 1$  et  $m = 0, 1$  sont toutes indépendantes les unes des autres, si on considère qu'on veut que cet énoncé soit vrai pour toutes valeur de  $l_i$   $i = 1, \dots, 4$  et  $d$ . Comme on le démontrera plus tard, il est possible



de simplifier la variable  $Y_2$  pour faire disparaître sa racine carrée pour des valeurs spécifiques de  $l_i$   $i = 1, \dots, 4$  et  $d$ . Si cela se produit, les cosinus et sinus de  $Y_2$  pourront se combiner avec les autres cosinus et sinus pour donner des ensembles de coefficients qui ne seront pas indépendants. Mais pour l'instant, on veut obtenir une solution générale c'est pourquoi, on considère que tous les coefficients sont indépendants.

L'ensemble de coefficients, présentés aux équations (7.61), (7.62) et (7.63), sont des coefficients où il est très facile de trouver les paramètres qui permettent de vérifier la contrainte. De plus, ces équations présentent un ensemble de solutions qui met tous les coefficients à zéro.

$$a_{3020,1} = 4(-I_2 + I_3) \quad (7.61)$$

$$b_{1010,1} = -2I_1 - I_2 - I_3 \quad (7.62)$$

$$b_{0010,1} = 2I_1 \quad (7.63)$$

Ces équations donnent la famille de solution (noté M5b-1)

$$I_a = 0 \quad (7.64)$$

$$I_b = 0 \quad (7.65)$$

$$I_1 = 0 \quad (7.66)$$

$$I_2 = 0 \quad (7.67)$$

$$I_3 = 0 \quad (7.68)$$

$$I_4 = 0 \quad (7.69)$$

## 7.6 Analyse de la famille de solution M5b-1

Il faut vérifier que la famille de solutions données présente un ensemble de contraintes qui peuvent être vérifiées lorsqu'on donne des valeurs aux variables. Il faut se rappeler que les  $l_i$ ,  $m_i$  et  $d$  sont définies positives alors que les  $r_i$  sont définies semi-positives.

L'ensemble de contraintes qu'on doit vérifier se compose des équations (4.2), (4.4), (7.19), (7.20), (7.23) et (7.24). On a choisi de prendre des équations dans les deux

séries de contraintes car celles données par Berkof et Lowen [1969] sont très simples mais certaines introduisent de nouvelles variables. On a donc choisi celles qui étaient simples et qui n'ajoutaient pas de contrainte, pour les équations restantes. On a choisi celles qui formaient un ensemble indépendant dans le choix que Jean et Gosselin [1996] proposaient.

Pour statuer que la famille de solutions est valable, il faut vérifier que les contraintes soient respectées ou lorsqu'utilisées, elles donnent des équations possibles.

Pour vérifier l'équation (7.64), il y a trois possibilités qui sont :

$$r_2 = 0 \tag{7.70}$$

ou

$$\psi_2 = 2n\pi \tag{7.71}$$

ou

$$\psi_2 = (2n + 1)\pi \tag{7.72}$$

Pour simplifier la démonstration on introduit la valeur de  $\psi_3$  donnée à l'équation (4.4) dans les équations de la famille de solutions M5b-1 et l'on vérifie les possibilités trouvées.

Si on utilise l'équation (7.70) comme solution possible, on remarque que l'équation (7.67), donne  $I_2 = k_2^2 m_2 = 0$ . Ce qui est impossible avec les définitions données plus haut.

Il faut donc se tourner vers les solutions restantes. Si on substitue l'équation (7.71) dans (7.68), on trouve  $I_3 = m_3 (k_3^2 + l_3 r_3 + r_3^2) = 0$ . Ce qui est impossible.

Si cette famille de solution est valide il faut donc que l'équation (7.72) donne des valeurs possibles lorsqu'on l'utilise. Ce qui n'est pas le cas puisque l'équation (7.67) devient  $I_2 = m_2 (k_2^2 + l_2 r_2 + r_2^2) = 0$ . Ce qui, comme on l'a constaté pour les deux autres cas, est impossible.

Puisqu'il est impossible de compenser dynamiquement un mécanisme à cinq barres sans ajouter d'éléments mécaniques supplémentaires ou de contrainte sur les dimensions. On devrait donc se tourner vers ces autres voies si l'on veut compenser le mécanisme.

Ces ajouts devront faire en sorte que les équations qui étaient impossibles deviennent possibles, d'une certaine façon cela permet d'orienter la recherche de nouvelles solutions.

## 7.7 Analyse de la validité de l'ajout de contre-rotations

Dans la section 7.6, on s'est aperçu qu'on ne pouvait obtenir un mécanisme compensé dynamiquement seulement en changeant les paramètres physiques du mécanisme tout en gardant le mécanisme le plus général possible. Puisque cela est impossible, on tentera d'établir dans cette section le nombre minimal de contre-rotations qu'il faut ajouter au mécanisme pour réussir à le compenser dynamiquement.

Les contre-rotations qu'on veut ajouter au mécanisme seront des plus simples. Ces contre-rotations seront entraînées par une des articulations, ainsi leur vitesse sera proportionnelle à une des vitesses  $\dot{\theta}_i$ . Cela restreint les possibilités mais permet de garder le mécanisme le plus simple possible.

### 7.7.1 Analyse de la validité de l'ajout d'une contre-rotation

Plusieurs choix s'offrent lorsqu'on veut ajouter une contre-rotation. Si on regarde l'équation (7.32), on s'aperçoit qu'on peut associer une contre-rotation à quatre variables différentes soient  $\dot{\theta}_i$   $i = 1, \dots, 4$ . Si on pose une contre-rotation sur l'articulation un (Fig. 7.1), cela affectera seulement la variable  $I_1$  et non la variable  $I_a$ , car la variable  $I_a$  peut être considérée comme indépendante de  $I_1$ , et n'est affecté que par une variation de  $\dot{\theta}_1$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Cela s'explique aussi par le fait qu'on peut voir l'équation comme ceci.

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \sum_{i=1}^4 I_i \dot{\theta}_i + I_a \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + I_b \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4 + I_{cr} \dot{\theta}_j & (7.73) \\
 &= I_i \dot{\theta}_i + I_j \dot{\theta}_j + I_k \dot{\theta}_k + (I_l - I_{cr}) \dot{\theta}_l + I_a \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + I_b \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4 \\
 &= I_i \dot{\theta}_i + I_j \dot{\theta}_j + I_k \dot{\theta}_k + I'_l \dot{\theta}_l + I_a \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 + I_b \sin(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4
 \end{aligned}$$

où  $i, j, k, l \in [1, 2, 3, 4]$  avec aucun élément qui se répète deux fois.

Avec cela, on se rend compte que les équations des familles de solutions restent valides. L'ajout d'une contre-rotation sur l'articulation  $i$  ne fait que remplacer le  $I_i$  correspondant par  $I'_i = I_i - I_{cr}$ . Cela s'explique aussi par le fait que la contre-rotation est entraînée par l'articulation  $i$ . Ainsi, sa vitesse se trouve à être proportionnelle à la vitesse de rotation de la membrure, qui est dans ce cas-ci la membrure  $i$ .

Une façon longue d'aborder le problème serait de mettre une contre-rotation sur chaque articulation et de regarder l'effet sur chaque équation de contrainte. Si on canalise nos efforts, on s'aperçoit qu'il est nécessaire de faire la vérification pour une contre-rotation sur  $\dot{\theta}_2$  et  $\dot{\theta}_3$  seulement. À la section 7.6, on s'est aperçu que seulement les équations (7.67) et (7.68) étaient impossibles avec les valeurs trouvées et que changer les équations  $I_1 = 0$  en  $I_1 - I_{cr} = 0$  ou  $I_4 = 0$  en  $I_4 - I_{cr} = 0$  ne modifiera pas la valeur des équations qui causent des problèmes.

## 7.7.2 Ajout d'une contre-rotation sur la deuxième articulation

Avec l'ajout d'une contre-rotation sur la deuxième articulation l'équation (7.67) de la famille de solutions M5b-1 sera transformée pour inclure une contre-rotation :

$$I_2 - I_{cr} = 0 \quad (7.74)$$

Ce qui donnera la famille de solutions suivante (noté M5b-Cr-I<sub>2</sub>) comprenant les équations : (7.64–7.66, 7.68, 7.69 et 7.74).

Pour vérifier si cette famille de solutions est valide, on utilisera la même démarche que celle effectuée à la section 7.6. Ainsi pour l'équation (7.64), les trois possibilités seront celles données aux équations (7.70), (7.71) et (7.72). Encore une fois, on simplifiera les équations en introduisant la valeur de  $\psi_3$  donnée par l'équation de contrainte

(4.74). Si on substitue la valeur de  $r_2$  donnée par l'équation (7.70) dans les équations de la famille de solutions et aussi dans les équations de contraintes, on remarque que les équations (7.66) et (7.20) sont incompatibles puisque pour qu'une des équations (Eq. 7.75) soit valide  $\cos \psi_1$  doit être plus grand que zéro alors que pour l'autre équation (Eq. 7.76) cette valeur doit être plus petite que zéro.

$$I_1 = m_1(k_1^2 + r_1^2 - l_1 r_1 \cos \psi_1) = 0 \quad (7.75)$$

$$l_1 l_2 m_2 + r_1 l_2 m_1 \cos \psi_1 = 0 \quad (7.76)$$

Si on substitue l'équation (7.71) dans (7.68), on trouve  $I_3 = m_3 (k_3^2 + l_3 r_3 + r_3^2) = 0$ . Ce qui est impossible.

Si on utilise la valeur de l'équation (7.72) dans les équations de la famille de solutions, on s'aperçoit que les équations (7.66) et (7.19) sont incompatibles car elles ne pourront jamais être simultanément égales à zéro (Eq. 7.77, 7.78).

$$I_1 = m_1(k_1^2 + r_1^2 - l_1 r_1 \cos \psi_1) = 0 \quad (7.77)$$

$$l_1 l_2 m_2 + l_1 m_2 r_2 + l_2 m_1 r_1 \cos \psi_1 = 0 \quad (7.78)$$

Puisque cette famille de solutions n'admet aucune solution possible, on devra regarder pour une autre alternative. C'est-à-dire mettre la contre-rotation sur la troisième articulation.

### 7.7.3 Ajout d'une contre-rotation sur la troisième articulation

Avec l'ajout d'une contre-rotation sur la troisième articulation l'équation (7.68) de la famille de solutions M5b-1 sera transformée pour inclure une contre-rotation :

$$I_3 - I_{cr} = 0 \quad (7.79)$$

Ce qui donnera la famille de solutions suivante (noté M5b-Cr-I<sub>3</sub>) comprenant les équations : (7.64–7.67, 7.69 et 7.79).

Pour vérifier si cette famille de solutions est valide, on utilisera la même démarche que celle effectuée à la section 7.6. Ainsi pour l'équation (7.64), les trois possibilités

seront celles données aux équations (7.70), (7.71) et (7.72). Encore une fois, on simplifiera les équations en introduisant la valeur de  $\psi_3$  donnée à l'équation (4.74). Si on substitue la valeur donnée à l'équation (7.70) dans l'équation (7.67), on se retrouve avec  $I_2 = k_2^2 m_2 = 0$  ce qui est impossible sachant que les variables sont définies positives. Pour la valeur de donnée à l'équation (7.71), c'est l'incompatibilité des équations (7.24) ( $l_2 l_4 m_3 + l_4 m_2 r_2 + l_2 m_4 r_4 \cos \psi_4 = 0$ ) et (7.69) ( $m_4(k_4^2 + r_4^2 - l_4 r_4 \cos \psi_4) = 0$ ) qui démontre l'impossibilité de cette solution. Tandis que pour la solution donnée à l'équation (7.72), c'est l'équation (7.67) qui présente l'impossibilité car elle est égale à  $I_2 = (k_2^2 m_2 + l_2 r_2 + r_2^2) = 0$ .

Ce résultat permet d'affirmer qu'il n'est pas possible d'équilibrer dynamiquement un mécanisme à cinq barres seulement en jouant avec les paramètres physiques et une contre-rotation, lorsque la vitesse de rotation des entrées n'est pas constante.

#### 7.7.4 Analyse de la validité de l'ajout de deux contre-rotations

Puisqu'il n'est pas possible d'équilibrer le mécanisme à l'aide d'une contre-rotation, on se doit d'essayer d'en ajouter une autre.

Plusieurs possibilités de positionnement existent pour l'ajout de deux contre-rotations. Pour trouver où mettre les contre-rotations, on peut regarder quelles sont les équations qui deviennent impossibles dans les sections précédentes. Comme précédemment les équations  $I_2 = 0$  et  $I_3 = 0$ , deviennent impossibles dans certains cas, on doit donc essayer de les garder valides en leur ajoutant une contre-rotation, tour à tour.

De plus, lorsqu'on met une contre-rotation sur l'articulation deux, on remarque que l'équation (7.66) et l'équation (7.20) sont incompatibles et on peut essayer de lever cette incompatibilité en ajoutant une contre-rotation à l'articulation un. De même que l'impossibilité de l'équation (7.68) peut être levée par l'ajout d'une contre-rotation.

Lorsqu'on met une contre-rotation sur l'articulation trois, ce sont les équations (7.69) et par la suite l'équation (7.67) qui sont impossibles lorsqu'on essaie les solutions  $\psi_2 = 2n\pi$  et  $\psi_2 = (2n + 1)\pi$ .

On aura donc trois cas à traiter, soit ajouter deux contre-rotations. Une sur l'articulation deux et l'autre sur l'articulation un, une sur l'articulation deux et la deuxième sur l'articulation trois et pour finir une contre-rotation sur l'articulation trois et quatre.

#### 7.7.4.1 Ajout de contre-rotations sur les articulations un et deux

Avec l'ajout de deux contre-rotations, une sur la première et une sur la deuxième articulation, les équations (7.66) et (7.67) de la famille de solutions M5b-1 seront transformées pour inclure les contre-rotations :

$$I_1 - I_{cr1} = 0 \quad (7.80)$$

$$I_2 - I_{cr2} = 0 \quad (7.81)$$

Ce qui donnera la famille de solutions suivante (noté M5b-Cr-I<sub>1,2</sub>) comprenant les équations (7.64, 7.65, 7.68 et 7.69, 7.80, 7.81).

Pour vérifier si cette famille de solutions est valide, on utilisera la même démarche que celle effectuée à la section 7.6. Ainsi pour l'équation (7.64), les trois possibilités seront celles données aux équations (7.70), (7.71) et (7.72).

Encore une fois, on simplifiera les équations en introduisant la valeur de  $\psi_3$  et la valeur  $r_3$  données aux équations (4.74) et (4.73).

Si on substitue l'équation (7.70) dans (7.69) et (7.24), on se retrouve avec une impossibilité puisque ces équations seront incompatibles.

$$I_4 = m_4(k_4^2 + r_4^2 - l_4 r_4 \cos \psi_4) = 0 \quad (7.82)$$

$$l_2 l_4 m_3 + l_2 r_4 m_4 \cos \psi_4 = 0 \quad (7.83)$$

Si on substitue la valeur donnée à l'équation (7.71) dans l'équation (7.68), on se retrouve avec  $I_3 = m_3(k_3^2 + l_3 r_3 + r_3^2) = 0$  ce qui implique que l'on doit continuer avec la dernière solution (Eq. 7.72) puisque celle-ci est impossible.

Pour vérifier l'équation (7.23), il existe trois solutions qui sont :

$$r_4 = 0 \quad (7.84)$$

ou

$$\psi_4 = 2n\pi \quad (7.85)$$

ou

$$\psi_4 = (2n + 1)\pi \quad (7.86)$$

Lorsque la première solution (Eq. 7.84) est utilisée dans (7.69), on se retrouve avec  $I_4 = k_4^2 m_4 = 0$  ce qui est impossible. Cette impossibilité s'observe également lorsqu'on utilise la solution (7.86) puisque maintenant on a  $I_4 = m_4(k_4^2 + l_4 r_4 + r_4^2)$ .

On continue donc la recherche de solutions avec, comme valeur de solution pour l'équation (7.23),  $\psi_4 = 2n\pi$ .

Si on cherche la valeur de  $r_4$ , on peut la trouver à l'aide de l'équation (7.24) ce qui donne :

$$r_4 = \frac{l_4(r_2 m_2 - l_2 m_3)}{l_2 m_4} \quad (7.87)$$

Si on observe toutes les équations avec les solutions données (Eqs. 4.74, 4.73, 7.72, 7.85 et 7.80), elles semblent respecter toutes les conditions physiques qu'on a établies.

Par contre si on regarde plus attentivement les équations (7.68 et 7.69) lorsqu'on y a substitué toutes les solutions, on se retrouve avec :

$$I_3 = k_3^2 m_3 + \frac{l_3^2 r_2 m_2 (r_2 m_2 - l_2 m_3)}{l_2^2 m_3} = 0 \quad (7.88)$$

$$I_4 = k_4^2 m_4 + \frac{l_4^2 (r_2 m_2 - l_2 m_3) [(r_2 m_2 - l_2 m_3) - l_2 m_4]}{l_2^2 m_4} = 0 \quad (7.89)$$

Pour que  $I_3$  soit égal à zéro, on doit avoir :

$$r_2 m_2 - l_2 m_3 < 0 \quad (7.90)$$

et pour que  $I_4$  soit égal à zéro, on doit avoir :

$$l_4^2 (r_2 m_2 - l_2 m_3) [(r_2 m_2 - l_2 m_3) - l_2 m_4] < 0 \quad (7.91)$$

Si on divise l'équation (7.91) par l'équation (7.90), on se retrouve avec :

$$l_4^2 [(r_2 m_2 - l_2 m_3) - l_2 m_4] > 0 \quad (7.92)$$

C'est alors qu'on s'aperçoit qu'il y a incompatibilité puisque cette condition ne peut être respectée sachant que le terme  $r_2 m_2 - l_2 m_3$  est plus petit que zéro.



### 7.7.4.2 Ajout de contre-rotations sur les articulations deux et trois

Avec l'ajout de deux contre-rotations, une sur la deuxième et une sur la troisième articulation, les équations (7.67) et (7.68) de la famille de solutions M5b-1 seront transformées pour inclure les contre-rotations :

$$I_2 - I_{cr2} = 0 \quad (7.93)$$

$$I_3 - I_{cr3} = 0 \quad (7.94)$$

Ce qui donnera la famille de solutions suivante (noté M5b-Cr-I<sub>2,3</sub>) comprenant les équations (7.64–7.66, 7.69, 7.93, 7.94).

Pour vérifier si cette famille de solutions est valide, on utilisera la même démarche que celle effectuée à la section 7.6, en n'oubliant pas que  $\psi_3$  défini à l'équation (4.74) est substitué dans les équations pour les simplifier. Ainsi pour l'équation (7.64), les trois possibilités seront celles données aux équations (7.70), (7.71) et (7.72).

Lorsque la solution (7.70) est utilisée, une incompatibilité s'établit entre les équations (7.24) et (7.69) car :

$$l_2 l_4 m_3 + r_4 l_2 m_4 \cos \psi_4 = 0 \quad (7.95)$$

$$I_4 = m_4 (k_4^2 + r_4^2 - r_4 l_4 \cos \psi_4) = 0 \quad (7.96)$$

et également lorsque la solution (7.71) est utilisée, car (7.24) devient :

$$l_2 l_4 m_3 + r_2 l_4 m_2 + r_4 l_2 m_4 \cos \psi_4 = 0 \quad (7.97)$$

ce qui est incompatible avec  $I_4$  donnée par l'équation (7.96).

Tandis que pour la solution (7.70), c'est une incompatibilité entre les équations (7.66) et (7.20) :

$$l_1 l_2 m_2 + r_2 l_1 m_2 + r_1 l_2 m_1 \cos \psi_1 = 0 \quad (7.98)$$

$$I_1 = m_1 (k_1^2 + r_1^2 - r_1 l_1 \cos \psi_1) = 0 \quad (7.99)$$

Puisqu'aucune des solutions n'est envisageable, il faut en convenir que cette famille de solution ne donnera pas de système compensé dynamiquement.

### 7.7.4.3 Ajout de contre-rotations sur les articulations trois et quatre

Avec l'ajout de contre-rotations sur la troisième et quatrième articulations, les équations (7.68) et (7.69) de la famille de solutions M5b-1 seront transformées pour inclure une contre-rotation :

$$I_3 - I_{cr3} = 0 \quad (7.100)$$

$$I_4 - I_{cr4} = 0 \quad (7.101)$$

Ce qui donnera la famille de solutions suivante (noté M5b-Cr-I<sub>3,4</sub>) comprenant les équations (7.64–7.67, 7.69, 7.100 et 7.100).

Pour vérifier si cette famille de solutions est valide, on utilisera la même démarche que celle effectuée à la section 7.7.3. Ainsi pour l'équation (7.64), les trois possibilités seront celles données aux équations (7.70), (7.71) et (7.72) et on retrouvera les mêmes impossibilités pour les solutions (7.70) et (7.72).

Puisque la valeur donnée par l'équation (7.71) ne cause pas de problème dans l'immediat, on peut l'utiliser pour obtenir d'autres solutions.

Si on regarde l'équation (7.19), on peut sortir trois valeurs qui satisfont cette équation :

$$r_1 = 0 \quad (7.102)$$

ou

$$\psi_1 = 2n\pi \quad (7.103)$$

ou

$$\psi_1 = (2n + 1)\pi \quad (7.104)$$

Les solutions (7.102) et (7.104) généreront des impossibilités pour l'équation (7.66) qui seront pour les équations (7.102) et (7.104) respectivement :

$$I_1 = k_1^2 m_1 \quad (7.105)$$

$$I_1 = m_1(k_1^2 + r_1 l_1 + r_1^2) \quad (7.106)$$

Lorsque la solution donnée à l'équation (7.103) est substituée dans l'équation (7.20), on peut trouver  $r_2$  qui est :

$$r_2 = l_2 \left( 1 + \frac{r_1 m_1}{l_1 m_2} \right) \quad (7.107)$$

On s'aperçoit alors que  $r_2 \geq l_2$ . Si en gardant cela en tête, on regarde l'équation (7.67) alors que l'on y a substitué les valeurs trouvées pour cette famille de solutions. On a :

$$I_2 = k_2^2 m_2 + r_2 m_2 (r_2 - l_2) = 0 \quad (7.108)$$

Puisqu'on veut que cette équation soit valide cela revient à dire qu'il faut avoir  $(r_2 - l_2) < 0$  ce qui contredit l'équation (7.107).

### 7.7.5 Analyse de la validité de l'ajout de trois contre-rotations

On doit encore une fois ajouter une contre-rotation de plus puisque l'ajout de deux contre-rotations n'a pas permis de compenser dynamiquement le mécanisme.

Comme aux sections 7.7.1 et 7.7.4, il s'agit de trouver quelles sont les équations qui ne permettent pas la compensation, si ces équations font partie des équations (7.64 – 7.69), alors on peut leur ajouter une contre-rotation.

À l'aide de ce système, on trouve que des ajouts aux articulations trois ou quatre, lorsqu'on a déjà des contre-rotations aux articulations un et deux, permettraient de se rendre plus loin dans la vérification des solutions. De même, des contre-rotations aux articulations un ou quatre dans le cas où il en a déjà aux articulations un et trois.

On peut arrêter notre recherche à ce point-ci puisque toutes les possibilités doivent être évaluées. On devra traiter les trois cas suivants : soit le cas où des contre-rotations se trouvent aux articulations un, deux et trois ; le cas avec des contre-rotations aux articulations un, deux et quatre et pour finir, celui où les contre-rotations se trouvent sur les articulations deux trois et quatre. Cependant, ce dernier cas est équivalent au premier et ne sera pas traité ici.

### 7.7.5.1 Ajout de contre-rotations sur les articulations un, deux et trois

Avec l'ajout de contre-rotations sur les articulations un, deux et trois, les équations (7.66), (7.67) et (7.68) se transforment pour inclure les contre-rotations, ce qui donnent :

$$I_1 - I_{cr1} = 0 \quad (7.109)$$

$$I_2 - I_{cr2} = 0 \quad (7.110)$$

$$I_3 - I_{cr3} = 0 \quad (7.111)$$

Ainsi la famille de solutions M5b-Cr-I<sub>1,2,3</sub> sera composée des équations suivantes : (7.64, 7.65, 7.69, 7.109, 7.110 et 7.111).

Pour simplifier les calculs, on introduit la valeur de  $\psi_3$  (Eq. 4.74) donnée par les équations de compensation statique.

Si on substitue l'équation (7.70) ou l'équation (7.71) dans les équations (7.69 et 7.24), on se retrouve avec une impossibilité puisque ces équations seront incompatibles après la simplification (Eq. 7.89 et 7.83).

On continue la démarche de vérification avec la valeur donnée à l'équation (7.72), l'équation (7.19) est vérifiée pour les solutions donnés aux équations (7.102, 7.103 et 7.104). La première solution est à exclure car l'équation (7.19) devient  $l_1 l_2 m_2 + l_1 m_2 r_2 = 0$  ce qui est impossible. La deuxième solution est aussi à exclure car elle donne pour la même équation  $l_1 l_2 m_2 + l_2 m_1 r_1 + l_1 m_2 r_2 = 0$ , ce qui est encore une fois impossible. La solution  $\psi_1 = (2n + 1)\pi$  sera donc utilisée pour la poursuite de la vérification.

L'équation (7.23) est vérifiée lorsqu'on utilise les solutions données aux équations (7.84, 7.85 et 7.86). Lorsque la première solution est utilisée, l'équation (7.69) se simplifie et donne  $I_4 = k_4^2 m_4 = 0$ , ce qui est impossible. De même, lorsqu'on utilise la solution  $\psi_4 = (2n + 1)\pi$ ,  $I_4$  se simplifie pour donner  $I_4 = m_4(k_4^2 + l_4 r_4 + r_4^2) = 0$  ce qui est encore une fois impossible.

Maintenant que la majeure partie des contraintes sont vérifiées, on peut trouver les valeurs des contre-rotations à l'aide des équations (7.109, 7.110 et 7.111). Ce qui donne :

$$I_{cr1} = m_1(k_1^2 + l_1r_1 + r_1^2) \quad (7.112)$$

$$I_{cr2} = m_2(k_2^2 + l_2r_2 + r_2^2) \quad (7.113)$$

$$I_{cr3} = m_3(k_3^2 - l_3r_3 + r_3^2) \quad (7.114)$$

La valeur du rayon de giration pour la membrure 4 devra être donnée par :

$$k_4 = \sqrt{r_4(l_4 - r_4)} \quad (7.115)$$

puisqu'elle doit satisfaire l'équation (7.69).

Pour finir, il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ , ce qui peut être fait à l'aide des équations (7.20, 7.22 et 7.24). Ce qui donne :

$$r_1 = \frac{l_1m_2(l_2 + r_2)}{l_2m_1} \quad (7.116)$$

$$r_2 = \frac{l_2(l_4m_3 + m_4r_4)}{l_4m_2} \quad (7.117)$$

$$r_3 = \frac{l_3m_2r_2}{l_2m_3} \quad (7.118)$$

On constate donc, que, pour la famille de solutions M5b-Cr-I<sub>1,2,3</sub>, on doit respecter les contraintes des équations (4.74, 7.71, 7.104, 7.85, 7.112, 7.113, 7.114, 7.116, 7.116 et 7.116). C'est à dire :

- $\psi_3 = \psi_2 + \pi$
- $\psi_2 = \pi$
- $\psi_1 = \pi$
- $\psi_4 = 0$
- $I_{cr1} = m_1(k_1^2 + l_1r_1 + r_1^2)$
- $I_{cr2} = m_2(k_2^2 + l_2r_2 + r_2^2)$
- $I_{cr3} = m_3(k_3^2 - l_3r_3 + r_3^2)$
- $k_4 = \sqrt{r_4(l_4 - r_4)}$
- $r_1 = \frac{l_1m_2(l_2+r_2)}{l_2m_1}$
- $r_2 = \frac{l_2(l_4m_3+m_4r_4)}{l_4m_2}$
- $r_3 = \frac{l_3m_2r_2}{l_2m_3}$

### 7.7.5.2 Ajout de contre-rotations sur les articulations un, deux et quatre

Avec l'ajout de contre-rotation sur les articulations un, deux et quatre, les équations (7.66), (7.67) et (7.69) se transforment pour inclure les contre-rotations, ce qui donnent :

$$I_1 - I_{cr1} = 0 \quad (7.119)$$

$$I_2 - I_{cr2} = 0 \quad (7.120)$$

$$I_4 - I_{cr4} = 0 \quad (7.121)$$

Ainsi la famille de solutions M5b-Cr-I<sub>1,2,4</sub>, sera composée des équations suivantes : (7.64, 7.65, 7.68, 7.119, 7.120 et 7.121).

Pour simplifier les calculs, on introduit la valeur de  $r_3$  (Eq. 4.73) et  $\psi_3$  (Eq. 4.74) donnée par les équations de compensation statique.

L'équation  $I_a = 0$  donne toujours les solutions trouvées aux équations (7.70-7.72). On peut utiliser une de ces solutions pour simplifier les autres équations. Si on substitue l'équation (7.70) dans (7.68), elle se simplifie pour donner  $I_3 = k_3^2 m_3 = 0$  ce qui est impossible, de même si on y substitue  $\psi_2 = 0$  (Eq. 7.71) puisqu'elle donnera :

$$I_3 = m_3(k_3^2 + l_3 r_3 + r_3^2) = 0 \quad (7.122)$$

On utilise donc la solution  $\psi_2 = (2n + 1)\pi$  (Eq. 7.72), ce qui permet de poursuivre la démarche.

L'équation de compensation statique (7.19) peut être solutionner par les valeurs données aux équations (7.102-7.104). Par contre ces solutions peuvent engendrer des incompatibilités. Avec  $r_1 = 0$  substitué dans l'équation (4.6), on obtient  $l_1 l_2 m_2 + l_1 m_2 r_2 = 0$ , ce qui est impossible. Pour la solution  $\psi_1 = 2n\pi$ , on obtiendra pour la même équation  $l_1 l_2 m_2 + l_2 m_1 r_1 + l_1 m_2 r_2 = 0$  ce qui est une fois de plus impossible. On se contentera donc de la solution  $\psi_1 = (2n + 1)\pi$ .

Si on passe à l'équation (7.64), on peut lui trouver trois solutions (Eq. 7.87 — 7.86). Par contre, seule la solution  $\psi_4 = (2n + 1)\pi$  sera valide puisque les autres solutions vont, lorsqu'on les substituera dans d'autres équations, produire des incompatibilités. On le

voit très bien avec la solution  $r_4 = 0$  puisque les équations (7.68) et (7.24) donneront :

$$I_3 = k_3^2 m_3 - \frac{l_3^2 m_2 r_2}{l_2} \left( 1 - \frac{m_2 r_2}{l_2 m_3} \right) = 0 \quad (7.123)$$

$$l_4 (l_2 m_3 - m_2 r_2) = 0 \quad (7.124)$$

Pour que la première équation soit satisfaite, on doit avoir  $l_2 m_3 - m_2 r_2 > 0$  tandis que pour l'équation (7.124), on doit avoir  $l_2 m_3 - m_2 r_2 = 0$ . Il est donc impossible de satisfaire les deux équations simultanément, de là, vient l'incompatibilité.

La solution  $\psi_4 = (2n)\pi$  produira une incompatibilité. Cette incompatibilité apparaît pour les équations (7.68) et (7.24).

$$I_3 = k_3^2 m_3 - \frac{l_3^2 m_2 r_2}{l_2} \left( 1 - \frac{m_2 r_2}{l_2 m_3} \right) = 0 \quad (7.125)$$

$$l_2 m_4 r_4 - l_4 (m_2 r_2 - l_2 m_3) = 0 \quad (7.126)$$

Si on veut que la deuxième équation soit zéro, on doit avoir  $m_2 r_2 - l_2 m_3 > 0$  alors que pour la première équation on doit avoir  $l_2 m_3 - m_2 r_2 > 0$ .

Il est maintenant possible de trouver les valeurs des contre-rotations ainsi que la valeur du rayon de giration à l'aides des équations (7.119, 7.120, 7.121 et 7.68). Ce qui donne :

$$I_{cr1} = m_1 (k_1^2 + l_1 r_1 + r_1^2) \quad (7.127)$$

$$I_{cr2} = m_2 (k_2^2 + l_2 r_2 + r_2^2) \quad (7.128)$$

$$I_{cr4} = m_4 (k_4^2 + l_4 r_4 + r_4^2) \quad (7.129)$$

$$k_3 = l_3 \frac{\sqrt{(m_2 r_2)(l_2 m_3 - m_2 r_2)}}{l_2 m_3} \quad (7.130)$$

## 7.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a démontré qu'il n'était pas possible d'obtenir un mécanisme à cinq barres plan dynamiquement équilibré sans y introduire au moins trois contre-rotations. Ce résultat rend l'utilisation de mécanismes à cinq barres très peu attrayant pour des applications pratiques. C'est pourquoi, dans le prochain chapitre, on utilisera plutôt des mécanismes à quatre barres pour construire des mécanismes parallèles à

plusieurs degrés de liberté dynamiquement équilibrés. En effet, les mécanismes à quatre barres peuvent être équilibrés sans contre-rotation, tel que démontré dans les chapitres précédents, ce qui rend leur utilisation pratique très intéressante.



# Chapitre 8

## Applications

Jusqu'à maintenant la majeure partie de cette thèse a été consacrée à l'analyse de modules à un ou deux degrés de liberté puisqu'ils représentent deux familles de mécanismes très simples mais qui avaient le plus de chances de satisfaire les contraintes de la compensation dynamique. De plus, une étude exhaustive a été faite pour trouver tous les mécanismes à quatre barres ainsi qu'à cinq barres pouvant être dynamiquement compensés tout en ne nécessitant aucun ajout (contre-rotation, "Idler loop", etc). On a donc consacré beaucoup de temps à ces mécanismes mais ceci a permis de faire ressortir trois sous-familles de mécanismes équilibrés dynamiquement soit :  $M_4B-G$  : section 4.4<sup>1</sup> ,  $M_4B-Y_{CP_1}$  : section 5.4 et  $M_4B-Y_{CP_2}$  : section 5.5 chacune de ces familles possédant des caractéristiques différentes.

---

<sup>1</sup>Les ensembles de CCD des sections 4.4 et 5.6 étant équivalents on préférera utiliser l'ensemble  $M_4B-G$

Cette analyse a fait la preuve qu'il est possible de construire des mécanismes plans compensés dynamiquement pourvu que certaines contraintes soient respectées.

Le problème jusqu'à maintenant est que les mécanismes à quatre barres sont composés seulement de membrures et cela restreint de beaucoup leur utilité. Il n'y a aucune mention de la possibilité de poser un effecteur sur le mécanisme pour lui permettre d'effectuer une tâche quelconque. De plus, il pourrait être intéressant que le centre de masse de cet effecteur ne se retrouve pas directement situé sur une des membrures mais à une certaine distance de la droite reliant les deux articulations de la membrure (Fig. 8.1). Ceci permettrait *l'ajustement* de l'équation décrivant le mouvement de l'effecteur [Hunt, 1978].

## 8.1 Ajout d'un effecteur

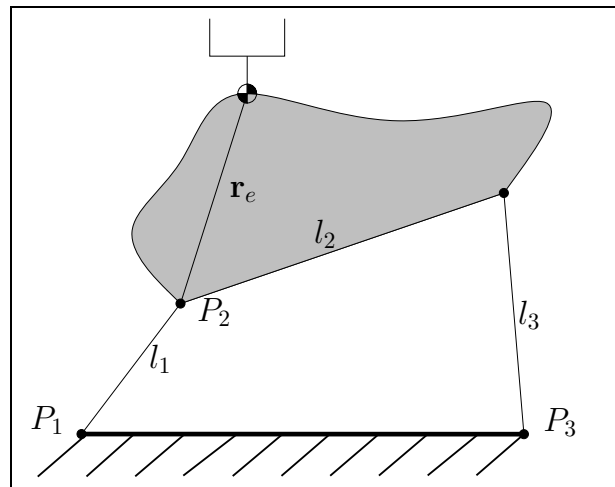


FIG. 8.1 – Mécanisme à quatre barres et effecteur.

Comme présenté à la figure 8.1, il est très facile de positionner un effecteur à l'endroit désiré, il ne s'agit que de définir le vecteur  $\mathbf{r}_e$ .

Par contre, il faut toutefois s'assurer que le mécanisme puisse toujours être équilibré dynamiquement. Avant l'ajout, chaque membrure se présentait comme un corps rigide. Si les composantes du mécanisme restent des corps rigides la compensation dynamique sera assurée si les paramètres physiques de chaque composante (la membrure plus l'effecteur le cas échéant) respectent une des familles de contraintes de compensa-

tion dynamique (  $M4B-G$  : section 4.4,  $M4B-Y_{CP_1}$  : section 5.4 et  $M4B-Y_{CP_2}$  : section 5.5)

Pour que la membrure  $l_2$  et l'effecteur se comportent comme un corps rigide, il faut que les sommes de tous leurs paramètres physiques soient constantes. Si aucune articulation n'est présente entre ces deux corps cette contrainte sera respectée. Le lien reliant l'effecteur à la membrure doit donc être considéré comme une soudure.

Les valeurs physiques du deuxième corps mobile seront données par les équations suivantes :

$$m_2 = m_{r_2} + m_e \quad (8.1)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_{r_2}\mathbf{r}_{r_2} + m_e\mathbf{r}_e}{m_2} \quad (8.2)$$

$$k_2^2 m_2 = (k_{r_2}^2 + |-\mathbf{r}_{r_2} + \mathbf{r}_2|^2) m_{r_2} + (k_e^2 + |-\mathbf{r}_e + \mathbf{r}_2|^2) m_e \quad (8.3)$$

où  $m_e$  est la masse de l'effecteur,  $m_{r_2}$  est la masse réelle de la membrure deux et  $m_2$  est la masse *augmentée* de la deuxième membrure, qui sera utilisée dans les calculs de la compensation dynamique. Le vecteur  $\mathbf{r}_e$  est le vecteur reliant le point  $P_2$  au centre de masse de l'effecteur et  $\mathbf{r}_2$  est le vecteur reliant le point  $P_2$  au centre de masse de la membrure *augmentée* (composé de la membrure réelle et de l'effecteur) et finalement  $k_e$  est le rayon de giration de l'effecteur par rapport à son centre de masse et  $k_2$  est le rayon de giration de la membrure *augmentée* par rapport à son centre de masse.

Le deuxième corps composé de la membrure et de l'effecteur sera appelé membrure *augmentée*, puisque du point de vue des paramètres physiques la seule différence avec la membrure réelle originale est le fait que ses valeurs ont été augmentées. Aucune des valeurs augmentées ne sera affectée par le déplacement du mécanisme. L'addition des masses (valeurs scalaires) ne dépend aucunement de la position du mécanisme. Pour les deux équations restantes qui contiennent des vecteurs, ils sont relatifs au point  $P_2$ . Ainsi, tant que les centres de masse gardent la même position par rapport à ce point, ils ne devraient pas être affectés par les mouvement du mécanisme. Ce qui est le cas, puisque la membrure est un corps rigide et que le lien reliant l'effecteur à la membrure est une soudure.

On peut donc mettre directement les valeurs de la membrure *augmentée* dans les équations de contraintes dynamiques pour connaître les valeurs permises pour le mécanisme à quatre barres.

## 8.2 Ajout d'un corps rigide à une membrure

Dans la section précédente, le travail effectué revenait à ajouter un corps rigide à une des membrures du mécanisme. Cet ajout ne complique en rien les équations pourvu qu'il respecte les règles suivantes.

- Sa masse est constante
- Son centre de masse est fixe par rapport à un point sur la membrure auquel il est rattaché
- Son rayon de giration est constant par rapport à un point sur la membrure auquel il est rattaché

Si ces conditions sont respectées, il n'y a aucune contre-indication à ajouter le corps rigide au mécanisme.

Le seul problème qui peut se présenter, est le respect des contraintes de compensation dynamique. Il deviendra plus difficile de satisfaire ces équations puisque les rapports entre les autres membrures et la membrure augmentée auront changés. Par contre, l'ajout de nouveaux paramètres permettra une plus grande flexibilité puisque l'ensemble de paramètres sur lesquels un contrôle est possible est augmenté, si les valeurs physiques du corps rigide peuvent être changées lors de l'optimisation.

### 8.2.1 Ajout d'un mécanisme à quatre barres à une membrure

Le fait qu'il est possible d'ajouter un corps rigide aux membrures d'un mécanisme à quatre barres sans affecter la possibilité de compenser dynamiquement le mécanisme global a beaucoup d'implications.

Dans la section 6.1, il a été démontré qu'un mécanisme à quatre barres compensé dynamiquement a le même comportement qu'un corps rigide.

Il est donc possible de greffer un mécanisme à quatre barres sur une des membrures d'un autre mécanisme à quatre barres et obtenir ainsi un mécanisme complexe (comprenant deux mécanismes à quatre barres) compensé dynamiquement.

Si on extrapole ce concept, on peut se retrouver avec une multitude de mécanismes, greffés les uns sur les autres. Cette structure aura le comportement d'un corps rigide. Une des possibilités de cette conception sera démontrée à la section suivante.

### 8.3 Compensation dynamique de mécanismes plans à $n$ ddl

Le fait de pouvoir greffer des mécanismes à quatre barres les uns aux autres amène la possibilité de construire des mécanismes plans à plusieurs degrés de liberté (ddl). L'avantage d'avoir un mécanisme à plusieurs degrés de liberté est important puisqu'il peut être utilisé dans plusieurs domaines. Le domaine de la robotique utilise à profusion des mécanismes à plusieurs degrés de liberté. On a qu'à penser aux manipulateurs sériels, dont les plus standards ont trois degrés de liberté pour les sériels plans et six degrés de liberté pour les manipulateurs spatiaux, ou aux manipulateurs parallèles dont les plus standards ont entre deux et six degrés de liberté [Tsai, 1999; Merlet, 2000]

Le principe selon lequel le mécanisme à plusieurs degrés de liberté sera construit, se présente comme une cascade des paramètres physiques. À la section 8.1, l'ajout d'un effecteur au mécanisme à fait en sorte que les paramètres de la membrure *augmentée* englobe les paramètres de la membrure à qui l'on greffe l'effecteur ainsi que les paramètres de l'effecteur.

Si on remplace l'effecteur par un mécanisme à quatre barres, la membrure *augmentée* englobera les paramètres du mécanisme à quatre barres. Si on prend une vue plus globale, on s'aperçoit que le mécanisme sur lequel on greffe le mécanisme à quatre barres voit tous ses paramètres physiques globaux changés ( $m_t, \mathbf{r}_t, k_t, \psi_i$  : Sec. 6.1). Le mécanisme sur lequel on greffe un mécanisme additionnel doit prendre en compte les paramètres du mécanisme et les englober dans ses propres paramètres avant d'établir qu'il satisfait aux exigences des contraintes de compensation dynamique. C'est ce qu'on appellera la cascade des paramètres physiques.

D'un point de vue général, on peut greffer un mécanisme à quatre barres à n'importe laquelle des membrures d'un mécanisme à quatre barres. Par contre, on restreindra ce

concept aux membres mobiles de longueur  $l_i$  car la membre de longueur  $d$  (la base), servira de point d'attache pour greffer ce mécanisme à un autre.

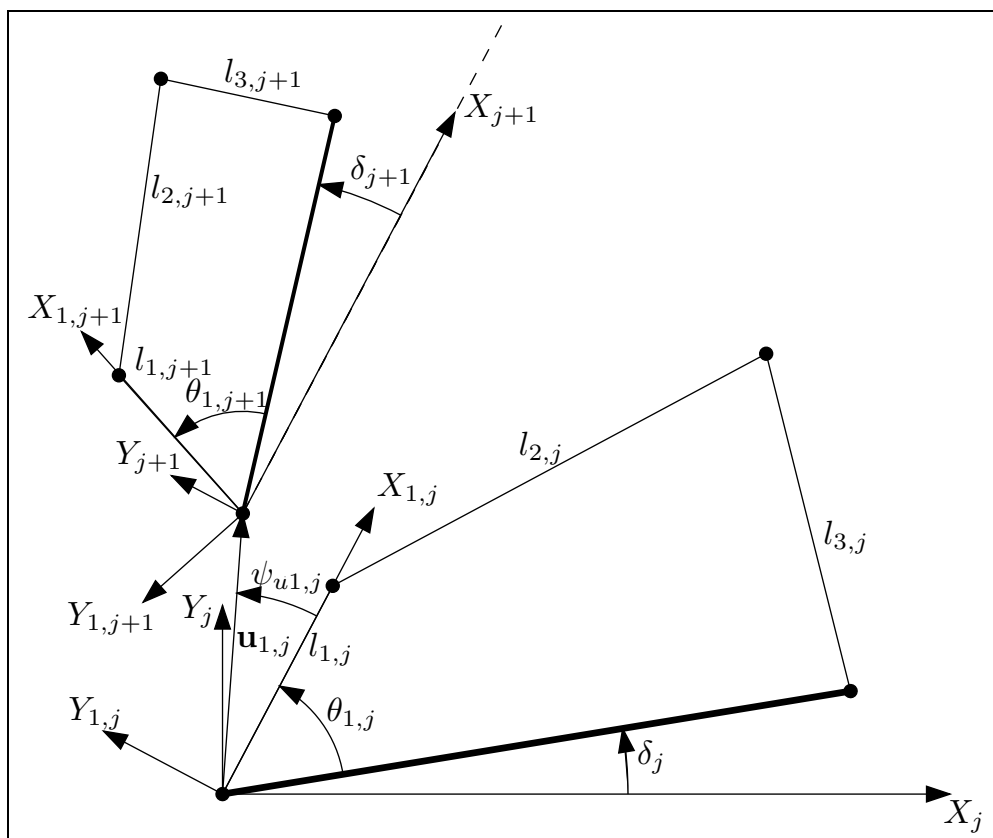


FIG. 8.2 – Mécanisme à quatre barres greffé à une membre

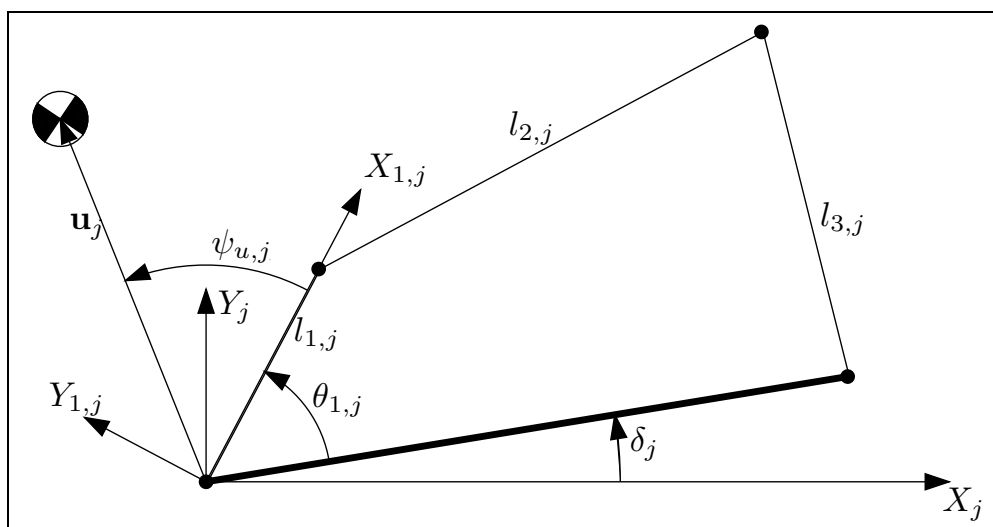


FIG. 8.3 – Masse ponctuelle ajoutée à une membre

Les nouvelles variables présentées à la figure 8.2 permettent de définir le positionnement du mécanisme à quatre barres que l'on greffe d'une façon générale. La position du mécanisme à quatre barres est donnée par rapport au point  $P_{i,j}$ , par le vecteur  $\mathbf{u}_{i,j}$  si le mécanisme à quatre barres est greffé à la membrure  $l_{i,j}$  (membrure  $i$  du  $j^e$  quatre barres).

$$\mathbf{u}_{i,j} = u_{i,j} [\cos \psi_{ui,j}, \sin \psi_{ui,j}]^T \quad (8.4)$$

où  $u_{i,j}$  est la distance entre les points  $P_{i,j}$  et  $P_{1,j+1}$  et  $\psi_{ui,j}$  est l'angle entre la membrure  $l_{i,j}$  et la ligne reliant les points  $P_{i,j}$  et  $P_{1,j+1}$ . Le vecteur  $\mathbf{u}_{i,j}$  est exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_{i,j}$ .

Le mécanisme à quatre barres greffé sera donc le  $j + 1^e$  quatre barres. L'angle  $\delta_{i,j+1}$  est l'angle que la base  $d_{j+1}$  fait avec l'axe  $X$  du repère sur lequel le mécanisme à quatre barres se greffe, dans ce cas-ci le repère est  $\mathcal{R}_{i,j}$ , c'est-à-dire le repère de la membrure  $l_{i,j}$ .

Les caractéristiques physiques de la membrure *augmentée* seront donc les suivantes :

$$m_{i,j} = m_{ri,j} + m_{tj+1} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{r}_{i,j} = \frac{m_{ri,j} \mathbf{r}_{ri,j} + m_{tj+1} (\mathbf{Q}_{\delta_{i,j}} \mathbf{r}_{tj+1} + \mathbf{u}_{i,j})}{m_{i,j}} \quad (8.6)$$

$$k_{i,j} = \sqrt{\frac{(k_{ri,j}^2 + |-\mathbf{r}_{ri,j} + \mathbf{r}_{i,j}|^2) m_{ri,j} + (k_{tj+1}^2 + |-\mathbf{Q}_{\delta_{i,j}} \mathbf{r}_{tj+1} - \mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{r}_{i,j}|^2) m_{tj+1}}{m_{i,j}}} \quad (8.7)$$

où

$$\mathbf{Q}_{\delta_{i,j}} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_{i,j}) & -\sin(\delta_{i,j}) \\ \sin(\delta_{i,j}) & \cos(\delta_{i,j}) \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

On applique la matrice de rotation  $\mathbf{Q}_{\delta_{i,j}}$  qui transforme le vecteur  $\mathbf{r}_{tj+1}$  du repère  $\mathcal{R}_{1,j+1}$  vers le repère  $\mathcal{R}_{i,j}$  puisque ce vecteur est défini dans le repère de la première membrure du  $j + 1^e$  quatre barres (voir équations. 6.2, 4.94 et 4.96) alors que les autres vecteurs sont définis dans le repère  $\mathcal{R}_{i,j}$ .

Il est à noter qu'une nouvelle nomenclature a été introduite. Dans les sections précédentes, on notait la masse de la  $i^e$  membrure  $m_i$ . Maintenant, puisqu'une équation peut comprendre des éléments de plusieurs mécanismes à quatre barres, les variables auront

un deuxième indice qui établira à quel mécanisme à quatre barres elles appartiennent. Ainsi  $m_{i,j}$  est la masse de la  $i^e$  membrure du  $j^e$  quatre barres. Avec la définition précédente, on peut déduire que :  $m_{ri,j}$  est la masse réelle de la membrure  $i$  du  $j^e$  quatre barres,  $m_{tj}$  est la masse totale du  $j^e$  quatre barres (Eq. 6.1) —qui inclut les masses des mécanismes à quatre barres qui se cascadedent sur ce mécanisme— et  $m_{i,j}$  est la masse *augmentée* (composée de la masse réelle et de la masse du mécanisme supporté) de la  $i^e$  membrure du  $j^e$  quatre barres qui sera utilisé dans le calcul des équations de la compensation dynamique, de même que pour les positions des centres de masse et des rayons de giration (Fig. 8.4).

Les variables donnant les valeurs physiques d'un mécanisme à quatre barres sont définies dans la section 6.1.

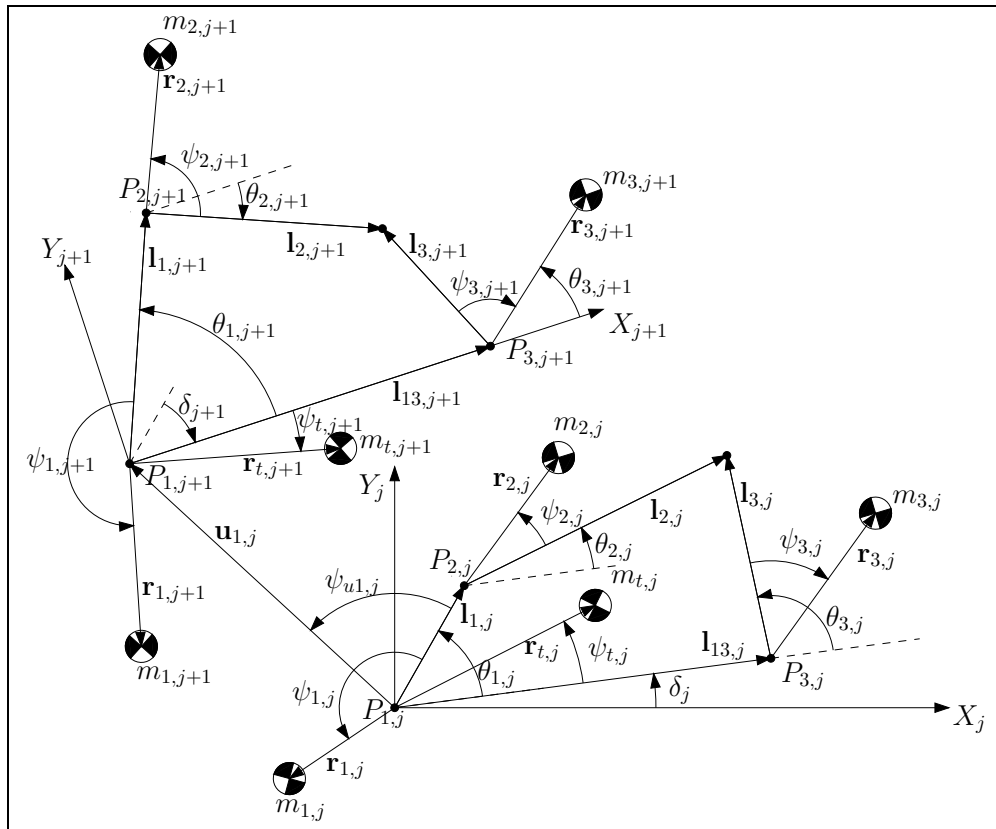


FIG. 8.4 – Paramètres décrivant deux modules superposés.



### 8.3.1 Exemple de mécanisme plan à trois ddl

L'objectif de cette section est d'illustrer la possibilité de trouver des valeurs définissant un mécanisme complexe (un mécanisme plan à trois degré de liberté) qui est compensé dynamiquement.

Il est à souligner qu'aucun autre objectif n'est poursuivi. Ainsi, aucune restriction sur les valeurs physiques du mécanisme n'a été imposée. Il se peut que le mécanisme avec les valeurs trouvées ne puisse devenir un prototype pour des raisons d'ordre pratique. Par contre, une optimisation des paramètres est possible puisque les équations de contraintes de la compensation dynamique possèdent plusieurs variables libres.

Les valeurs trouvées pour ce mécanisme lui donnent la caractéristique d'être compensé dynamiquement. Mais, il est à remarquer qu'aucune optimisation des paramètres n'a été effectuée. C'est pourquoi, il peut y avoir de grandes différences entre un ensemble de paramètres physiques (par exemple les masses).

Un choix à faire avant de trouver les valeurs du mécanisme est de décider quelle famille de solutions sera utilisée pour chaque mécanisme. Dans cet exemple les trois ensembles de CCD seront utilisés à titre de démonstration mais un autre mécanisme pourrait seulement utiliser un des ensembles de CCD pour tous ses modules. Ainsi les paramètres du troisième module seront trouvés à l'aide de la famille de solutions  $M4B-Y_{CP_1}$ , les paramètres du deuxième module proviendront de la famille de solutions  $M4B-G$  et la famille de solutions  $M4B-Y_{CP_2}$  servira à trouver les paramètres du premier module.

Une autre étape à compléter avant de trouver les valeurs du mécanisme est d'établir sur laquelle des membrures du deuxième mécanisme sera fixé le troisième mécanisme et sur quelle membrure du premier mécanisme sera attaché le deuxième mécanisme. Dans le cas présenté le troisième mécanisme est posé sur la deuxième membrure du deuxième mécanisme et le deuxième mécanisme est fixé sur la première membrure du premier mécanisme (Fig. 8.5).

Il est à noter que chaque décision aura une influence sur la valeur des paramètres physiques que l'on trouvera et aussi influencera les paramètres globaux du mécanisme comme l'espace de travail, la rigidité, etc.

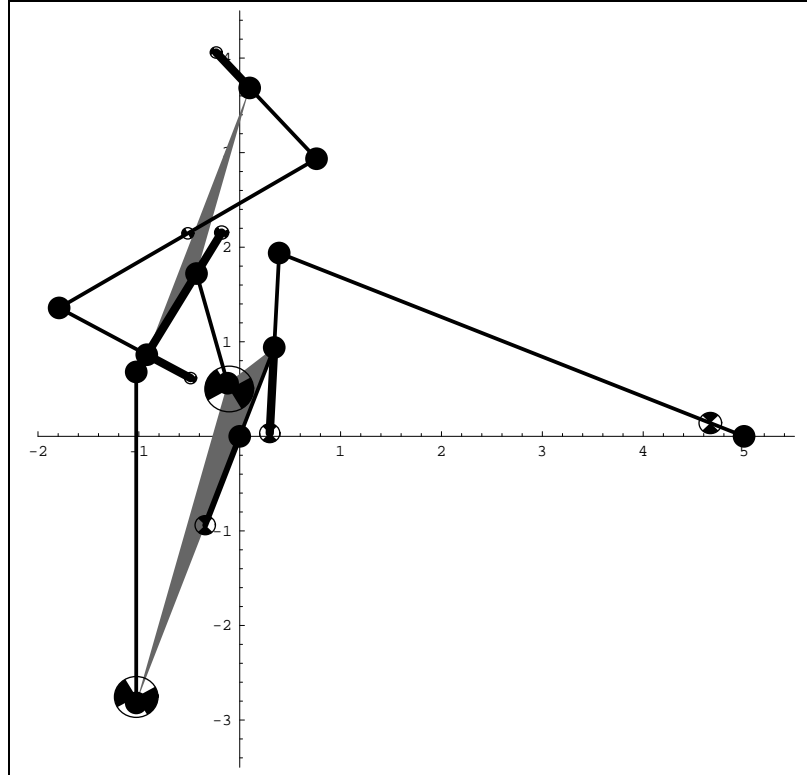


FIG. 8.5 – Mécanisme sériel plan à trois degré de liberté dynamiquement équilibré composé de mécanismes à quatre barres.

Lors de la recherche des paramètres du mécanisme, il est possible d'y aller d'une façon globale, d'entrer toutes les variables libres et les équations de contraintes des trois modules dans un optimiseur et de le laisser travailler. Cette méthode obtiendra probablement la meilleure optimisation mais le niveau de complexité des équations qui en découle, dû à la cascade des paramètres physiques, augmentera de beaucoup le temps de calcul puisque, par exemple, une variation dans la masse du troisième mécanisme influence presque tous les paramètres du premier et deuxième module.

La génération du mécanisme de cet exemple a été réalisée comme suit. La synthèse a commencé par le haut puisque le troisième mécanisme n'est influencé par aucun module mais influence les deux autres. Les valeurs du mécanisme ont été trouvées d'une façon arbitraire. La base a comme valeur  $d = 3m$  et le reste des valeurs physiques sont données dans le tableau 8.1.

Pour permettre une cascade de ce module sur le suivant il faut que ce module (*module augmenté*) puisse être vu comme une structure fixe ou bien une masse ponctuelle dont le

TAB. 8.1 – Variables définissant le 3<sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. Les variables marquées d'un \* sont calculés à l'aide de la solution  $M4B-Y_{CP_1}$

Variables	Membrure 1	Membrure 2	Membrure 3
$l$ (m)	1	3 *	1 *
$m$ (kg)	0.01	0.01	0.01
$r$ (m)	0.5	1.5 *	0.5 *
$k$ (m)	1.22474	0.0035*	1.2247 *
$\psi$ (rad)	$\pi$ *	0 *	$\pi$ *

centre de masse est fixe par rapport à un point. Ce qui revient à vérifier si le mécanisme est compensé dynamiquement.

La méthode de Newton (Sec. 4.5.2.2) sera utilisée pour la vérification. On doit obtenir que la somme des forces ainsi que la somme des moments sur la base soient égales à zéro.

Pour trouver les forces, on a donné à la membrure numéro un, un angle, une vitesse angulaire ainsi qu'une accélération angulaire arbitraire mais qui respectent la plage angulaire valide pour un mécanisme qui possède les dimensions de la table 8.1. Ces valeurs se retrouvent dans la table 8.2.

TAB. 8.2 – Valeurs utilisées pour la vérification à l'aide de la méthode de Newton pour le module 3. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $Y1-CP_1$

Variables	Membrure 1	Membrure 2	Membrure 3
$\theta_{i,3}$ (rad)	1.4	-0.6702 *	-2.0702 *
$\dot{\theta}_{i,3}$ ( $\frac{rad}{s}$ )	0.11	0.0120 *	-0.0980 *
$\ddot{\theta}_{i,3}$ ( $\frac{rad}{s^2}$ )	0.7	0.0835 *	-0.6165 *

Les forces et moments trouvés à l'aide des tables 8.1 et 8.2 sont :

$$\mathbf{F}_{1d,3} = [-0.0107273, 0.00930064]^T N$$

$$\mathbf{F}_{3d,3} = [0.0107273, -0.00930064]^T N$$

$$\mathbf{F}_{12,3} = [0.0141866, -0.0098359]^T N$$

$$\mathbf{F}_{32,3} = [-0.00804419, 0.00778238]^T N$$

$$\mathbf{F}_{d,3} = [0.0, -1.73472 \times 10^{-18}]^T N$$

$$\mathbf{M}_{o1,3} = 0.0279019 \text{ Nm}$$

$$\mathbf{M}_{d,3} = 0.0 \text{ Nm}$$

La somme des forces ( $\mathbf{F}_{d,3}$ ) et des moments ( $\mathbf{M}_{d,3}$ ) sont bien égales à zéro. Le deuxième module du mécanisme peut être développé et le troisième module pourra être cascader sur le deuxième module sans problème.

Pour trouver les valeurs du deuxième module les choses se compliquent car la membrure un, utilisée dans les équations de compensation dynamique, sera composée de la membrure réelle du module deux et des valeurs totales du module trois (voir sec. 8.3).

Puisque l'angle  $\psi_{1,2}$  a une valeur connue (i.e.  $\psi_{1,2} = \pi$  étant une des contraintes de la compensation dynamique). Il est plus facile de partir des valeurs de la membrure utilisée dans le calcul de la compensation dynamique et des valeurs totales du troisième module, de trouver les valeurs réelles de la membrure un. La seule contrainte qui se présente en utilisant cette méthode est que la valeur de  $k_{r2,2}$  doit être plus grande que zéro ( $k_{r2,2} > 0$ ). Alors que si l'inverse est fait et que le but est de trouver les valeurs utilisées dans le calcul de la compensation dynamique à partir des valeurs réelles de la membrure et des valeurs du troisième module, la contrainte est beaucoup plus stricte car on doit avoir que  $\psi_{2,2} = \pi$ .

De plus, les valeurs de la membrure deux dépendent du positionnement du troisième module par rapport au point  $P_{2,2}$ . On choisit :

$$\mathbf{u}_{2,2} = [0.21, 0]^T \text{ m}$$

$$\delta_3 = 0.174533 \text{ rad}$$

Les valeurs du deuxième mécanisme sont donc présentées dans le tableau 8.3. Il est à remarquer que les variables libres ne sont pas celles que l'on retrouve dans le

tableau A.2 puisqu'il y a eu une manipulation des contraintes pour permettre d'avoir comme variables libres les paramètres de la deuxième membrure. Les valeurs totales du troisième mécanisme (colonne *Module 3*) y sont présentes car elles sont utilisées dans le calcul des valeurs physiques de la membrure deux du deuxième module (colonne *Membrure 2 augmentée*). Les valeurs réelles de la membrure deux ont été trouvées en isolant les variables  $m_{r2,2}$ ,  $r_{r2,2}$ ,  $\psi_{r2,2}$  et  $k_{r2,2}$  des équations (8.5), (8.6) et (8.7). Il est à noter que la valeur de la base est  $d_2 = 3.5\text{m}$ .

TAB. 8.3 – Variables définissant le 2<sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $M_4B-G$

Variables	Module 3	Membrure 1	Membrure 2		Membrure 3
			réelle	augmentée	
$l$ (m)	—	3.5	1.2 *	1.2 *	1.2 *
$m$ (kg)	0.03 *	3	0.1 *	0.13	3.5
$r$ (m)	1.5*	1 *	1.7056*	0.9075	0.363 *
$k$ (m)	1.7320*	3 *	2.0672*	4.38765	0.0681*
$\psi$ (rad)	0*	$\pi^*$	-0.0458*	$\pi$ *	$2\pi$ *

Encore une fois, une vérification de la compensation dynamique du module sera effectuée. Cela permet de bien vérifier qu'aucune erreur ne s'est glissée dans les calculs des paramètres globaux du module trois ainsi que dans le calcul des valeurs réelles de la membrure deux.

Lors de la vérification à l'aide de la méthode de Newton de la section 4.5.2.2, les positions, vitesse et accélération angulaires du tableau 8.4 ont été utilisées. L'actionneur se situe encore une fois à l'articulation entre la membrure  $l_{1,2}$  et la base  $d_2$  ce qui oblige la connaissance des valeurs de positionnement, vitesse angulaire et accélération angulaire, de la membrure un. Puisque le module doit être équilibré pour toute valeur de position, vitesse et accélération, la seule restriction quand au choix des valeurs pour la membrure un est le respect de la plage de mobilité pour l'angle  $\theta_{1,2}$ . Les autres valeurs peuvent être choisis arbitrairement.

TAB. 8.4 – Valeurs utilisées pour la vérification à l’aide de la méthode de Newton pour le module 2. Les variables marquées d’un \* sont calculées à l’aide de la solution  $M4B-Y_{CP_1}$

Variables	Membrure 1	Membrure 2	Membrure 3
$\theta_{i,2}$ (rad)	0.261799	-0.2597*	0.5215 *
$\dot{\theta}_{i,2}$ ( $\frac{rad}{s}$ )	0.7	-0.7445*	1.4445 *
$\ddot{\theta}_{i,2}$ ( $\frac{rad}{s^2}$ )	0.11	-0.5598*	0.6698 *

Les forces et moments trouvés sont :

$$\mathbf{F}_{1d,2} = [-0.120852, 0.336419]^T N$$

$$\mathbf{F}_{3d,2} = [0.120852, -0.336419]^T N$$

$$\mathbf{F}_{12,2} = [0.0257245, -0.340319]^T N$$

$$\mathbf{F}_{32,2} = [0.35274, 0.437788]^T N$$

$$\mathbf{F}_{d,2} = [4.16334 \times 10^{-17}, -1.11022 \times 10^{-17}]^T N$$

$$\mathbf{M}_{o1,2} = 1.17747 \text{ Nm}$$

$$\mathbf{M}_{d,2} = 4.44089 \times 10^{-16} \text{ Nm}$$

Pour l’étape finale il ne reste plus qu’à trouver les valeurs du premier module. Suivant le principe développé pour les modules précédents, les valeurs des paramètres du module supporté doivent être connues (colonne *Module 2* du tableau 8.3). Il est bien de rappeler que les valeurs physiques employées pour le calcul de la compensation doivent comprendre les paramètres du *corps rigide* qui se greffe à une des membrures. Ce corps rigide se compose dans les faits par le module deux et le module trois. Le positionnement du deuxième module est donné par :

$$\mathbf{u}_{1,1} = [-3, 0]^T \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.0872665 \text{ rad}$$

Il faut donc prendre en considération tous les éléments au-dessus du module un. Les paramètres physiques totaux du module trois sont inclus dans les valeurs de la membrure deux du tableau 8.3 si on prend la colonne avec l’entête *Membrure 2* alors qu’ils ne sont pas inclus dans les valeurs de la colonne *Membrure 2 réelle*. Donc, si les

colonnes *Membrure 1*, *Membrure 2* et *Membrure 3* du tableau 8.3 sont utilisées pour le calcul des paramètres physiques que l'on doit ajouter à la membrure un du premier module (Fig. 8.5), les valeurs du *corps rigide* seront obtenues.

TAB. 8.5 – Variable définissant le 1<sup>er</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $M_4B-Y_{CP_2}$  (Tab. A.2).

Variables	Module 2	Membrure 1		Membrure 2	Membrure 3
		réelle	augmentée		
$l$ (m)	—	1 *	1	1 *	5 *
$m$ (kg)	6.63 *	1 *	7.63	4	50
$r$ (m)	1.9449*	1.2672 *	1	0.9075*	0.3630 *
$k$ (m)	1.7662*	6.8070 *	3	4.3876*	0.0681 *
$\psi$ (rad)	0*	-2.0511 *	$\pi^*$	$\pi^*$	$2\pi^*$

Pour trouver les forces, on a donné à la membrure un, un angle, une vitesse angulaire ainsi qu'une accélération angulaire arbitraire mais qui respectent la plage angulaire valide pour un mécanisme qui possède les dimensions du tableau 8.5. Ces valeurs se retrouvent dans le tableau 8.6.

TAB. 8.6 – Valeurs utilisées pour la vérification à l'aide de la méthode de Newton pour le module 3. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $Y1-CP_1$ .

Variables	Membrure 1	Membrure 2	Membrure 3
$\theta_{i,1}$ (rad)	1.2217*	1.5217*	2.7435
$\dot{\theta}_{i,1}$ ( $\frac{rad}{s}$ )	0.9*	-0.9566*	-0.0566
$\ddot{\theta}_{i,1}$ ( $\frac{rad}{s^2}$ )	0.13*	0.2201*	0.3501

Les forces et moments trouvés à l'aide des tables 8.5 et 8.6 sont :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1d,1} &= [18.4293, -1.37549]^T N \\ \mathbf{F}_{3d,1} &= [-18.4293, 1.37549]^T N \\ \mathbf{F}_{12,1} &= [-15.3835, 6.84382]^T N \\ \mathbf{F}_{32,1} &= [16.0193, -7.25569]^T N \\ \mathbf{F}_{d,1} &= [-7.10543 \times 10^{-15}, 1.55431 \times 10^{-15}]^T N \\ \mathbf{M}_{o1,1} &= -6.87746 \text{ Nm} \\ \mathbf{M}_{d,1} &= 1.95399 \times 10^{-14} \text{ Nm}\end{aligned}$$

Puisque la somme des forces sur la base ( $\mathbf{F}_{d,1}$ ) et la somme des moments ( $\mathbf{M}_{d,1}$ ) sur la base sont égales à zéro —si on néglige les erreurs d'arrondis qui ont pu s'accumuler—, on a réussi à construire un mécanisme à trois degré de liberté plan qui est compensé dynamiquement. Ce mécanisme pourrait remplacer un mécanisme sériel plan à trois degré de liberté.

Par contre, il est à noter que le mécanisme construit dans cette section n'est qu'une démonstration de la possibilité de construire un tel mécanisme. Une optimisation des paramètres serait à envisager pour avoir des valeurs plus réalistes.

## 8.4 Création d'un mécanisme parallèle à partir de modules

Une suite logique serait d'essayer de trouver des mécanismes complexes compensés dynamiquement. On pourrait appliquer les principes développés dans les chapitres précédents aux mécanismes parallèles. Une des raisons qui plaide pour une autre approche est le fait que les mécanismes ne se présentent pas seulement dans un plan. Ils évoluent souvent en trois dimensions. Faire passer les équations du plan à l'espace peut s'avérer très difficile.

Il serait donc opportun de regarder les possibilités créer oar ce qui a été élaboré dans les chapitres précédents. Peut-on utiliser les mécanismes à quatre barres pour créer des mécanismes plus complexes ?



Plusieurs chercheurs ont déjà utilisé des mécanismes simples afin de construire des mécanismes possédants des caractéristiques physiques/dynamiques différentes des mécanismes standards [Ebert-Uphoff et Chirikjian, 1996; Ricard et Gosselin, 1994; Gosselin et Wang, 2000]

Dans ce chapitre, on étudiera la possibilité de construire des mécanismes parallèles, compensés dynamiquement à l'aide de modules développés aux chapitres précédents.

Avant de construire des mécanismes à l'aide des modules trouvés dans les chapitres précédents, il est nécessaire de connaître et de pouvoir différencier les diverses composantes d'un mécanisme. La complexité à traiter un mécanisme ne provient habituellement pas de ses composantes car on peut séparer un mécanisme en quatre composantes données plus bas, mais plutôt des équations mathématiques qui décrivent le comportement de ce mécanisme.

Les composantes d'un mécanisme peuvent ainsi être définies comme suit :

- *Base* : Composante fixe reliée habituellement au repère inertiel sur lequel se connecte le ou les chaînes cinématiques.
- *Effecteur* : Organe attaché à la plate-forme permettant l'exécution d'une action (préhension, vision, etc).
- *Plate-forme* : Composante sur laquelle vient se fixer les chaînes cinématiques ainsi que l'effecteur.
- *Chaînes cinématiques* : Systèmes mécaniques composés de corps rigides, ou membres reliés entre eux par des liaisons cinématiques (liaisons rotoïdes, prismatiques, hélicoïdales, cylindriques, planes et sphériques).

Ces définitions sont vraiment générales. Dans les cas qui seront discutés ici, il est possible que la base du mécanisme soit seulement un ensemble de points d'ancrage pour les chaînes cinématiques, sans pour autant avoir une apparence physique. C'est-à-dire, qu'il est possible que la base n'ait pas de masse.

De plus, les mécanismes créés dans le cadre de cette thèse n'auront pas d'effecteur puisqu'on se concentre sur la dynamique du mouvement du mécanisme et non sur l'action que ce mécanisme peut effectuer (préhension, vision, etc). Par contre, si le mécanisme possède un effecteur, ses caractéristiques devront être prises en compte lors de l'établissement des contraintes de compensation dynamique. Pour prendre en compte ces paramètres, il va s'agir de les cascader sur la plate-forme.

Finalement, puisqu'on traite les mécanismes parallèles plusieurs chaînes cinématiques relieront la base à la plate-forme, formant ainsi des boucles cinématiques. L'attention sera portée sur la construction des pattes des mécanismes parallèles, puisque les degrés de liberté du mécanisme sont restreints par les degrés de liberté des pattes.

Pour bien cerner le problème et partir sur une base commune, on définira une patte de mécanisme comme : tous éléments structurels compris entre le point d'attache sur la base et le point d'attache sur la plate-forme. Ainsi la base peut être vue comme une plaque (d'une épaisseur égale à zéro lorsque la masse de la base est égale à zéro), où sont *inscrits* les points d'attache des pattes, de même que pour la plate-forme (Fig. 8.6).

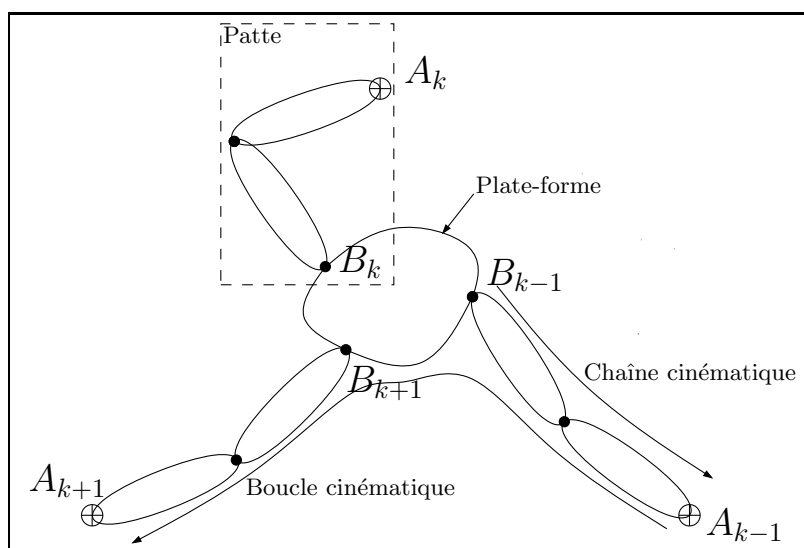


FIG. 8.6 – Structures composant un mécanisme parallèle.

Les pattes créées à partir des modules dynamiquement compensés pourront, en plus des modules, comprendre des articulations simples, comme des articulations rotoïdes ou sphériques pour atteindre le bon nombre de degrés de liberté sans pour autant complexifier outre mesure la structure de la patte.

On peut donc se douter que, si un mécanisme possède un degré de liberté plus grand que un, plus d'un module sera probablement nécessaire pour obtenir le bon degré de liberté du mécanisme. On devra donc utiliser le principe de la cascade des paramètres physiques (Sec. 8.4.1) pour obtenir des pattes dynamiquement compensées.

### 8.4.1 Cascade des paramètres physiques

Le principe qui permet l'obtention de mécanismes compensés dynamiquement est le fait qu'on cascade les paramètres physiques des structures soutenues sur les structures qui les soutiennent et ainsi de suite jusqu'à la dernière structure. Chaque structure soutenant une autre structure deviendra une structure *augmentée* puisque les paramètres physiques de la structure soutenue doivent être ajoutés à la structure soutenant. On peut donc voir l'ensemble de la structure soutenue et de la structure soutenant comme une nouvelle structure, de là, la structure *augmentée*, avec ses propres paramètres.

Théoriquement, ce principe permet l'utilisation de structures qui ne sont pas nécessairement compensées dynamiquement. La seule contrainte est que les structures *augmentées* touchant à la base du mécanisme global soient compensées dynamiquement car les structures touchant à la base sont celles qui peuvent générer des forces et moments sur la base.

Une des membrures du mécanisme à quatre barres servira donc de base à la structure à être soutenue. Par la suite, une des composantes de cette structure servira de base à la structure subséquente et ainsi de suite (Fig. 8.7).

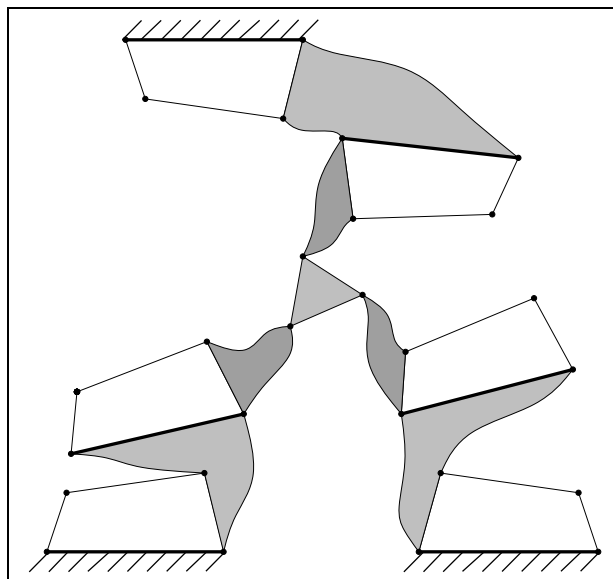


FIG. 8.7 – Mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté général composé de mécanismes à quatre barres.

Il faut donc que le mécanisme à quatre barres *augmenté*, qui est composé d'un mécanisme à quatre barres réel et de la structure soutenue, soit compensé dynamiquement. Ceci implique que chaque membrure du mécanisme à quatre barres *augmenté* doit être l'équivalent d'un corps rigide puisque les mécanismes à quatre barres compensés dynamiquement que l'on a étudié, sont composés de corps rigides (membrures). On devra donc faire en sorte que l'ajout de paramètres physiques provenant des structures soutenues ne viennent pas changer ce fait. Ce qui implique que la membrure servant de base à la structure subséquente, doit être greffée d'une structure qui possède les mêmes caractéristiques qu'un corps rigide, c'est-à-dire, une masse constante, un centre de masse fixe et un rayon de giration constant.

Le fait d'avoir une masse constante, un centre de masse fixe et un rayon de giration constant pour un mécanisme en mouvement implique que ce mécanisme doit être compensé dynamiquement. Ces contraintes sont les contraintes que l'on a imposées pour obtenir les équations de contraintes de compensation dynamique. Donc, si on doit *greffer* un module ou une structure pouvant se déformer (dû à un mouvement interne), ce module ou cette structure doit être compensé dynamiquement. Par contre si on *greffe* un corps rigide à une des membrures du mécanisme soutenant, on doit s'assurer que le lien formé entre les deux éléments est un lien ne possédant aucun degré de liberté (i.e une soudure).

En observant la figure 8.7, on remarque qu'il ne s'agit plus d'une simple cascade comme celle obtenue à la section précédente pour le mécanisme sériel. En effet, dans le mécanisme illustré ici, les trois pattes sont reliées à une plate-forme commune, ce qui permettra la transmission d'efforts entre les différentes pattes.

On doit donc regarder l'interaction entre la plate-forme et les pattes du mécanisme que l'on veut compenser dynamiquement.

## 8.4.2 Plate-forme

La plate-forme (effecteur) est un corps rigide non compensé dynamiquement. Ainsi, pour pouvoir équilibrer dynamiquement les effets inertiels dûs à la plate-forme, il faut inclure ces effets dans les équations d'équilibre. Pour équilibrer dynamiquement le

mécanisme parallèle de la figure 8.7, il faudrait donc reprendre à zéro l'écriture des équations du moment cinétique pour l'ensemble du mécanisme. Cette procédure conduirait à des équations très complexes et ne permettrait pas d'exploiter les résultats obtenus précédemment pour les mécanismes à quatre barres.

Une procédure alternative sera plutôt utilisée ici. Elle consiste à remplacer virtuellement la plate-forme par trois masses ponctuelles qui seront dynamiquement équivalentes à la plate-forme et qui seront localisées exactement aux points d'attache de la plate-forme avec les pattes. Ainsi, chacune de ces masses pourra être considérée comme appartenant à un corps situé dans la patte, ce qui permettra d'équilibrer les pattes indépendamment. Lorsque le mécanisme est en mouvement, les effets inertiels produits par les masses ponctuelles seront forcément équivalents à ceux de la plate-forme puisque les contraintes cinématiques (fermeture des boucles cinématiques) doivent être respectées. Ainsi, l'ensemble du mécanisme sera dynamiquement équilibré puisque les efforts sur la base sont dûs au mouvement des parties mobiles.

Il est à noter cependant que, en raison de la transmission des efforts entre les pattes via la plate-forme, les efforts de réaction sur la base de chacune des pattes ne seront pas nuls (même si on a équilibré chaque patte individuellement). Toutefois, la résultante des réactions à la base de chaque patte sera toujours nulle.

Il est également à noter que la procédure proposée ici impose des restrictions additionnelles sur le domaine des solutions dans l'espace des paramètres des mécanismes. En effet, on impose l'équilibrage de chaque patte individuellement, ce qui n'est pas nécessaire. On obtiendra donc un ensemble de conditions suffisantes mais non nécessaires. Cette approche est quand même justifiée puisqu'elle s'avère beaucoup plus simple qu'une approche générale (qui ne semble pas faisable avec les techniques analytiques connues).

Les paramètres physiques de la plate-forme comprennent, la masse ( $m_{pl}$ ), le centre de masse (origine du repère  $\mathcal{R}_{pl}$ ), le rayon de giration ( $k_{pl}$ ) (Fig. 8.8).

On cherche donc à calculer les masses ponctuelles équivalentes, notées  $m_{p,k}$  qui doivent être placées aux articulations dont la position exprimée dans le repère ayant son origine au centre de masse de la plate-forme est donnée par  $\mathbf{r}_{p,k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) pour

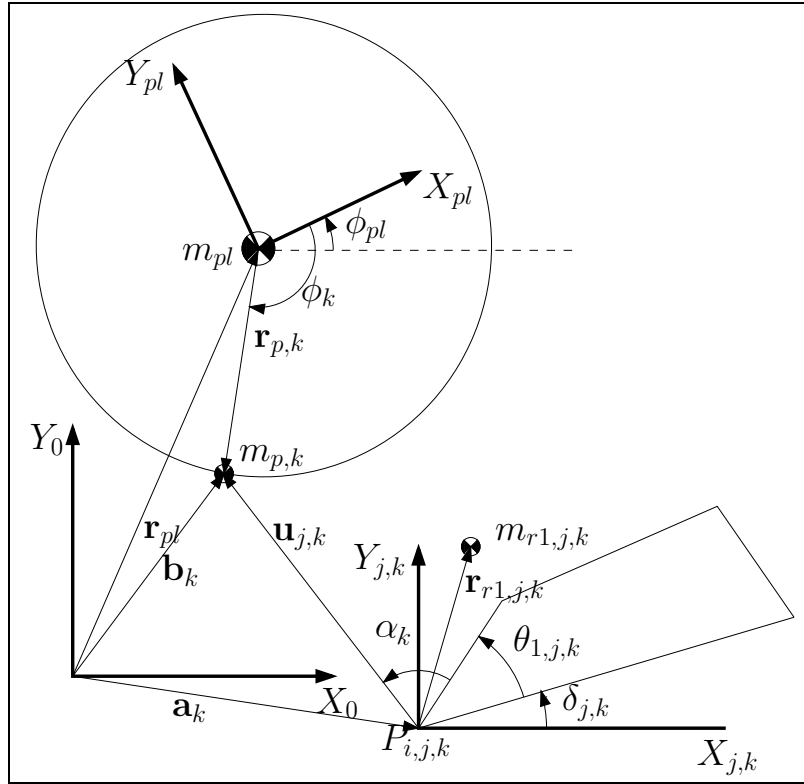


FIG. 8.8 – Paramètres décrivant les relation entre la plate-forme et une des ses pattes (patte  $k$ )

se retrouver avec des masses ponctuelles qui équivalent les paramètres physiques de la plate-forme.

La distribution des paramètres devra donc respecter les équations suivantes.

$$m_{pl} = \sum_{k=0}^n m_{p,k} \quad (8.9)$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \mathbf{r}_{p,k} m_{p,k} \quad (8.10)$$

$$m_{pl} k_{pl}^2 = \sum_{k=0}^n m_{p,k} \mathbf{r}_{p,k}^T \mathbf{r}_{p,k} \quad (8.11)$$

où  $m_{p,k}$  est la valeur de la masse équivalente qu'on doit attribuer à la patte  $k$ ,  $\mathbf{r}_{p,k}$  est le vecteur indiquant la position où on doit situer la masse équivalente par rapport au centre de masse de la plate-forme et finalement  $n$  est le nombre de pattes. Il est à noter que l'équation (8.11) impose une contrainte sur les propriétés physiques de la

plate-forme. En pratique, cette contrainte peut être satisfaite en ajustant l'épaisseur de la plate-forme.

### 8.4.3 Pattes

En utilisant les articulations de base, c'est-à-dire, les articulations prismatiques et rotoïdes, il est possible de créer sept différentes pattes qui possèdent les 3 ddls requis par un mécanisme plan pleinement parallèle [Merlet, 1997] (Fig : 8.9).

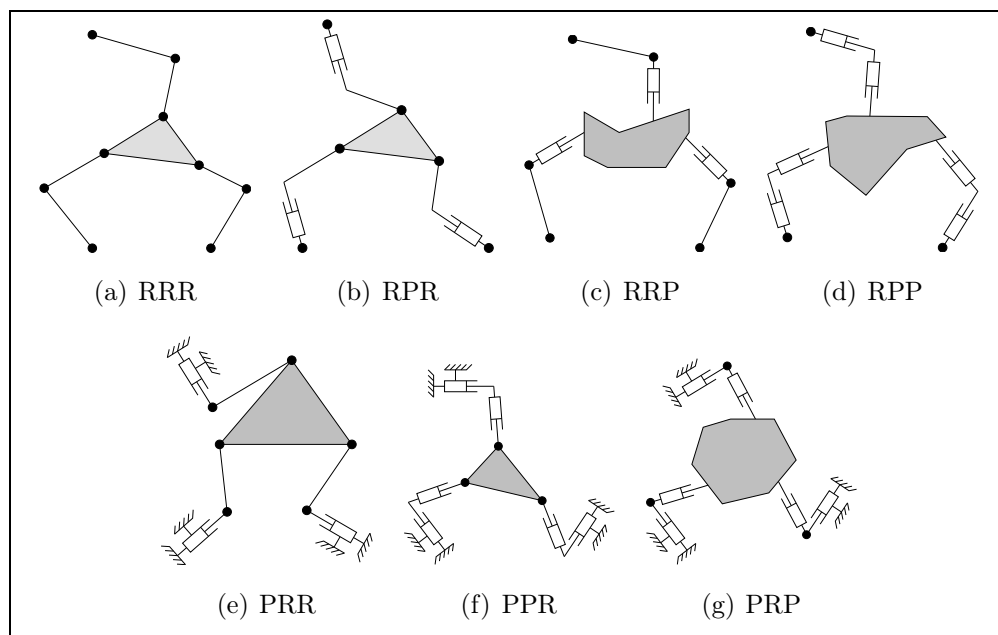


FIG. 8.9 – Exemples de mécanismes plans pleinement parallèles à trois degrés de liberté.

Le problème avec les pattes des mécanismes présentés à la figure 8.9, est qu'elles ne sont pas compensées dynamiquement. Lorsqu'on a une articulation prismatique, il est impossible de trouver deux points, sur le corps, dont la distance par rapport au centre de masse sera constante, ce qui contredit totalement la définition du corps rigide dont tous les points sont fixes les uns par rapport aux autres. Lorsqu'on a une membrure rattachée à une articulation rotoïde et que le centre de masse de la membrure ne se situe pas au centre de l'articulation alors la position du centre de masse de cet ensemble (articulation – membrure) n'est pas constant lorsque l'articulation est en rotation, on doit donc remplacer, les deux articulations ci-haut mentionnées, pour que les pattes deviennent compensées dynamiquement. La seule articulation que l'on peut garder sur les pattes des figures 8.9 est l'articulation rotoïde qui se situe à la jonction de la patte

et de la plate-forme. On peut la garder puisque le centre de masse — de la masse équivalente — est situé au centre de l'articulation (Sec. 8.4.2).

Ainsi toutes les pattes qu'on présentera, se composeront d'un minimum de deux mécanismes à quatre barres et d'un maximum de trois. Les pattes composées de deux mécanismes à quatre barres devront avoir comme troisième degré de liberté une articulation rotoïde à la jonction de la plate-forme. N'importe laquelle des membrures  $l_i$   $i = 1, 2, 3$  pourra soutenir une articulation (mécanisme à quatre barres) et la position des mécanismes à quatre barres soutenus par rapport à l'articulation soutenante, sera donnée par le vecteur  $\mathbf{u}$ .

#### 8.4.4 Problème géométrique inverse (PGI)

Le problème géométrique inverse, consiste à trouver la position des actionneurs lorsque la configuration de l'effecteur est donnée.

Il est habituellement intéressant d'avoir les actionneurs fixés à la base. Cela permet de réduire les masses en mouvement. Puisque ce mécanisme a trois degrés de liberté, on doit avoir trois actionneurs. Ils se situeront aux points  $A_k$  (Figs. 8.10 et 8.13). Ainsi le problème géométrique inverse consiste à trouver la valeur des angles  $\theta_{i,1,k}$  pour une position et orientation donnée de la plate-forme. Lorsque ces angles seront connus, il sera possible de trouver la valeur de tous les autres angles du mécanisme.

Le problème géométrique inverse sera d'une grande utilité lors de la vérification de la compensation dynamique du mécanisme selon la méthode de Newton (Sec. 4.5.2.2), puisque cette méthode demande de connaître la valeur des angles des modules, ainsi que leur vitesse angulaire et leur accélération.

Dans bien des cas, notre approche pour trouver le PGI se résumera à trouver l'orientation de deux segments dont l'un, a une extrémité qui touche au point  $A_k$  et l'autre au point  $B_k$ , et qui s'intersectent à leur autre extrémité (Fig. 8.10). Lorsque l'orientation de ces segments sera trouvée, il sera facile de faire sortir les valeurs intéressantes. Pour le cas étudié, on doit trouver la valeur des angles des mécanismes à quatre barres qui composent les pattes du mécanisme.



Les points  $B_k$  représentent les points d'attache des pattes avec la plate-forme, le vecteur  $\mathbf{b}_k$  donne la position du point  $B_k$  dans le repère fixe de la base. Pour obtenir la position des points  $B_k$  exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_0$  de la base, on utilise les équations suivantes :

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{r}_{pl} + \mathbf{Q}_0^{pl}[-\mathbf{r}_{b,k}]_{\mathcal{R}_{pl}} \quad (8.12)$$

avec

$$\mathbf{Q}_0^{pl} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{pl} & -\sin \phi_{pl} \\ \sin \phi_{pl} & \cos \phi_{pl} \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

où  $\mathbf{r}_{pl}$  est la position du centre de masse de la plate-forme, exprimée dans le repère de la base,  $\mathbf{r}_{b,k}$  est le vecteur donnant la position du point d'attache de la patte  $k$  par rapport au centre de masse de la plate-forme exprimé dans le repère de la plate-forme ( $\mathcal{R}_{pl}$ ). Finalement  $\mathbf{Q}_0^{pl}$  est la matrice de rotation du repère de la plate-forme ( $\mathcal{R}_{pl}$ ) vers le repère de la base ( $\mathcal{R}_0$ ) (Fig : 8.8).

Les positions des points d'ancrage des pattes sur la plate-forme peuvent être données par :

$$\mathbf{r}_{b,k} = [x_k, y_k]_{\mathcal{R}_{pl}}^T$$

dans le repère de la plate-forme mais souvent on exprime  $\mathbf{r}_{b,k}$  par un angle et une distance par rapport à un axe.

$$\mathbf{r}_{b,k} = r_{b,k}[\cos \phi_{b,k}, \sin \phi_{b,k}]_{\mathcal{R}_{pl}}^T \quad (8.14)$$

où  $r_{b,k}$  est la distance entre le point d'ancrage de la patte  $k$  au repère de la plate-forme ( $\mathcal{R}_{pl}$ ) et  $\phi_k$  est l'angle entre l'axe X du repère de  $\mathcal{R}_{pl}$  et la ligne reliant le point  $B_k$  et l'origine du repère allant du premier vers le second.

On constate que ces deux définitions sont équivalentes puisqu'on doit, dans les deux cas, spécifier deux paramètres. Le choix n'est fait qu'en fonction de la facilité à visualiser la position des points d'ancrage.

Il est possible d'exprimer la position des points d'ancrage des pattes sur la base par la même série d'équation ce qui donne :

$$\mathbf{a}_k = a_k[\cos \varphi_{a,k}, \sin \varphi_{a,k}]_{\mathcal{R}_0}^T \quad (8.15)$$

où  $a_k$  est la distance reliant le point d'ancrage de la patte  $k$  à l'origine du repère de la base et  $\varphi_{a,k}$  est l'angle entre l'axe X du repère de la base et la ligne reliant le point  $A_k$  et l'origine du repère allant du premier vers le second.

Maintenant que l'on connaît la position des points  $A_k$  et  $B_k$ , on peut voir le problème comme l'intersection de deux cercles dont les rayons sont  $s_{1,k}$  et  $s_{2,k}$  (Fig. 8.10). Habituellement ces rayons seront les vecteurs  $\mathbf{u}_{1,k}$  et  $\mathbf{u}_{2,k}$

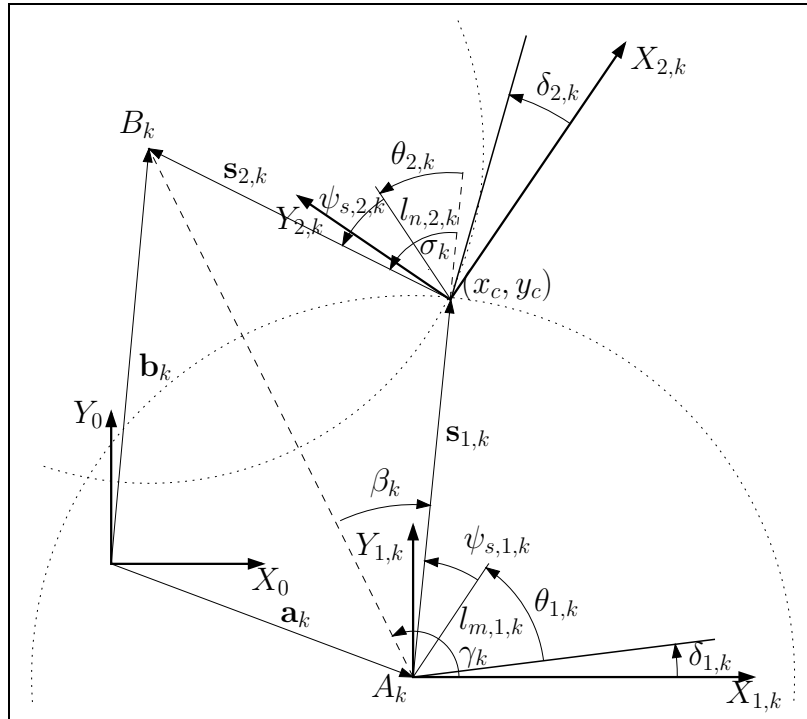


FIG. 8.10 – Paramètres pour le problème géométrique inverse d'une patte d'un mécanisme à quatre barres.

Pour permettre de trouver les deux points d'intersection  $[x_c, y_c]_{\mathcal{R}_{AB}}$ , on se transporte dans le repère  $\mathcal{R}_{AB}$  dont l'axe des X est parallèle à la ligne reliant les points  $A_k$  et  $B_k$  et l'origine est le point  $A_k$ . Ainsi, les points d'intersection dans ce repère seront :

$$x_c = \frac{(s_{2,k}^2 - s_{1,k}^2) - x_k^2}{-2x_k} \quad (8.16)$$

$$y_c = \pm \sqrt{s_{1,k}^2 - x_c^2} \quad (8.17)$$

où

$$[x_k, y_k]_{AB} = \mathbf{Q}_{\mathcal{R}_{AB}}^{\mathcal{R}_{1,k}} (B_k - A_k) \quad (8.18)$$

$$\mathbf{Q}_{AB}^{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_k & \sin \gamma_k \\ -\sin \gamma_k & \cos \gamma_k \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

avec  $\gamma_k$  qui représente l'angle entre l'axe X du repère de la patte  $k$  et la ligne reliant le point  $A_k$  et le point  $B_k$  allant du premier vers le second (Fig. 8.10).

Par la suite, il ne reste plus qu'à trouver les angles restants. L'angle  $\beta_k$  est l'angle entre la ligne formée en reliant  $B_k$  et  $A_k$  et le vecteur  $\mathbf{s}_{1,k}$  allant du premier vers le second et positif dans le sens anti-horaire. Si on se déplace dans un repère ( $\mathcal{R}_{s_{1,k}}$ ) dont l'axe des X est parallèle au vecteur  $\mathbf{s}_{1,k}$  et l'origine est le point  $A_k$ . On peut trouver l'angle  $\sigma_k$  qui est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{s}_{1,k}$  et  $\mathbf{s}_{2,k}$  allant du premier vers le second et positif dans le sens anti-horaire.

$$\beta_k = \arctan(x_c, y_c) \quad (8.20)$$

$$\sigma_k = \arctan(-s_{1,k} + x_u, y_u) \quad (8.21)$$

où

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{R}_{s_{1,k}}}^{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_k + \beta_k) & \sin(\gamma_k + \beta_k) \\ -\sin(\gamma_k + \beta_k) & \cos(\gamma_k + \beta_k) \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

$$[x_u, y_u]_{\mathcal{R}_{u_{1,k}}} = \mathbf{Q}_{\mathcal{R}_{u_{1,k}}}^{\mathcal{R}_0} (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k) \quad (8.23)$$

Ainsi les angles  $\theta_{i,j,k}$   $i = m, n$   $j = 1, 2$   $k = 1, 2, 3$  seront donnés par :

$$\theta_{n,2,k} = \sigma_k + \psi_{s,1,k} - \delta_{2,k} - \psi_{s,2,k} \quad (8.24)$$

$$\theta_{m,1,k} = \gamma_k + \beta_k - \psi_{s,1,k} - \delta_{1,k} \quad (8.25)$$

où  $\theta_{m,1,k}$  est l'angle de la membrure du premier mécanisme à quatre barres qui soutient le deuxième mécanisme à quatre barres et  $\theta_{n,2,k}$  est l'angle de la membrure du deuxième mécanisme à quatre barres qui soutient l'articulation rotoïde et la masse équivalente distribuée sur cette patte.

Dans certains cas, lors de l'application à des mécanismes réels, les équations du problème géométrique inverse seront particularisées puisque leur développement est le plus

général possible. Cette généralité sera importante si une optimisation du mécanisme est souhaitée.

### 8.4.5 Vérification de la compensation dynamique

La vérification de la compensation des mécanismes s'effectuera à l'aide de la méthode de Newton (Sec. 4.5.2.2). Avec les moyens technologiques présents, il sera très difficile de faire la preuve de la compensation dynamique à l'aide de la méthode de Lagrange (Sec. 4.5.2.1) dû à la non linéarité du problème.

Il est beaucoup plus facile d'utiliser la méthode de Newton. C'est pourquoi, cette méthode sera utilisée. Par contre, pour faire la démonstration, on doit avoir les équations du problème géométrique inverse puisqu'un comportement dynamique sera attribué à la plate-forme (c'est-à-dire : configuration  $[\mathbf{r}, \theta]$ , vitesse, accélération). À partir des valeurs données à l'effecteur, les positions, vitesses et accélérations des membrures seront déduites.

Chaque mécanisme présenté aura ses propres équations définissant son problème géométrique inverse puisque la topologie des différents mécanismes créés diffère.

## 8.5 Mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté (*PP3*)

Un des mécanismes parallèles le plus simple est le mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté. Ce type de mécanisme à une mobilité complète dans le domaine où il évolue, c'est-à-dire, trois degrés de liberté dans un plan, où l'on peut avoir un maximum de trois degrés de liberté.

Puisque le mécanisme possède trois degrés de liberté, les pattes de ce mécanisme doivent avoir au moins trois degrés de liberté pour ne pas restreindre les degrés de liberté du mécanisme.

Le fait de commencer par ce type de mécanismes permet d'établir la base de la compensation dynamique applicable aux mécanismes parallèles à l'aide de modules compensés dynamiquement puisque les équations décrivant le mécanisme sont simples.

De plus, on retrouve deux grandes catégories de mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté, ceux à actionnement prismatique (Fig. 8.11(a)) et ceux à actionnement rotoïdes (Fig. 8.11(b))

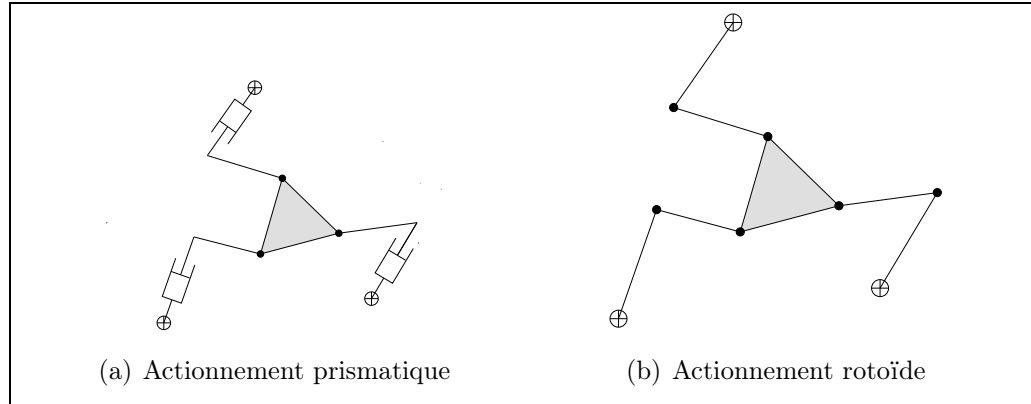


FIG. 8.11 – Exemples de mécanismes parallèles plans à trois degrés de liberté.

Ces deux familles de mécanismes serviront de comparaison aux mécanismes dynamiquement compensés qui seront développés dans cette section.

### 8.5.1 *PP3* dont les modules sont attachés à $l_{1,1,k}$ et $l_{1,2,k}$ (*PP3-11*)

Ce premier mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté (Figs. 8.12 et 8.13) possède une certaine symétrie puisque ses pattes sont construites selon les mêmes paramètres. Pour chaque patte ( $k = 1, 2, 3$ ), on a un mécanisme à quatre barres fixé au repère inertiel  $\mathcal{R}_0$ . Le deuxième mécanisme à quatre barres de la patte est situé à une distance  $u_{1,k}$  de l'origine du repère de la première membrure du premier mécanisme  $\mathcal{R}_{1,1,k}$  et le vecteur  $\mathbf{u}_{1,k}$  fait un angle  $\psi_{u,1,k}$  par rapport à l'axe  $X_{1,1,k}$ . La plate-forme est attachée à la membrure  $l_1$  du deuxième mécanisme à quatre barres et sa position par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}_{1,2,k}$  est  $\mathbf{u}_{2,k}$ . Une articulation rotoïde relie la patte  $k$  à la plate-forme. C'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{u}_{2,k}$  se termine par une articulation ro-

toïde. Finalement l'effecteur est situé au centre de masse de la plate-forme, c'est-à-dire à l'origine du repère ( $\mathcal{R}_{pl}$ ).

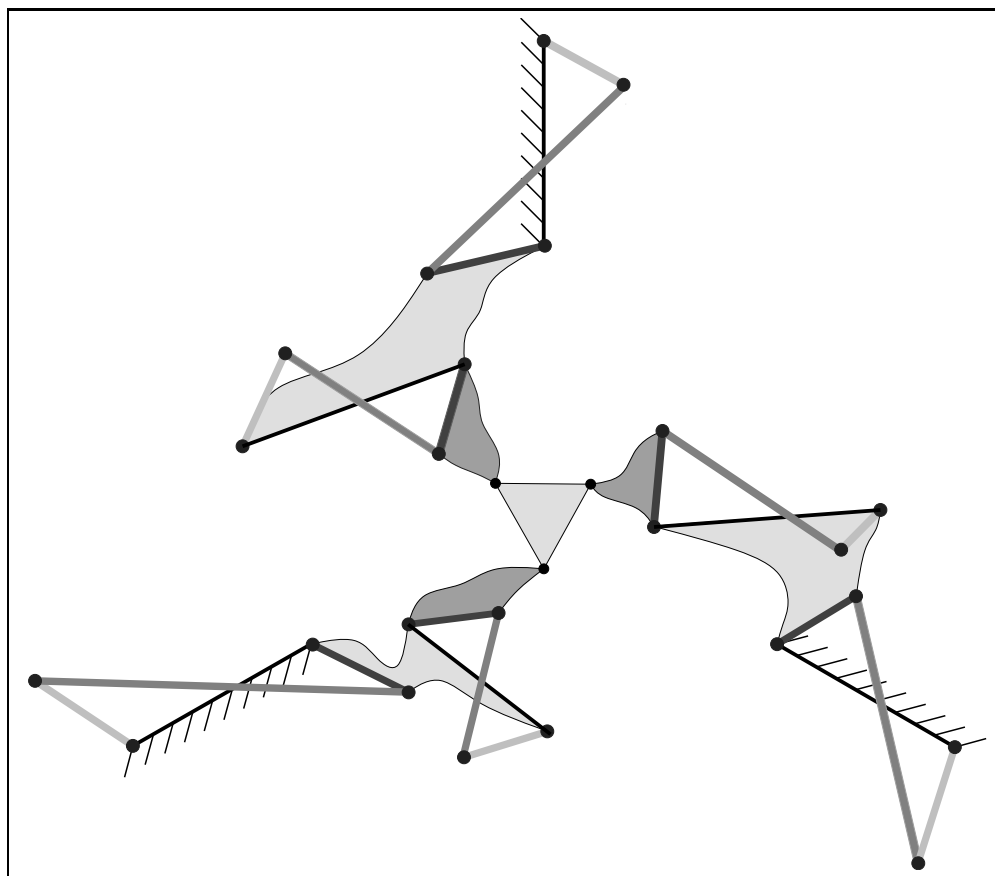


FIG. 8.12 – Schéma du mécanisme (*PP3-11*). Les membrures  $l_{i,j,k}$  de même teinte ont le même  $i$ .

La figure 8.13 donne une représentation générale du mécanisme. Cela permet de bien voir toutes les variables que l'on peut définir. Encore une fois, aucune optimisation des paramètres du mécanisme ne sera faite. La seule contrainte à part le fait que le mécanisme sera compensé dynamiquement, est celle d'avoir un mécanisme dont la représentation graphique est visuellement acceptable. On peut donc se retrouver avec des valeurs physiques ayant plusieurs ordres de grandeur de différence.

Une optimisation de ce mécanisme devra donc inclure la relation entre les différents paramètres physiques soit : la position du deuxième mécanisme à quatre barres par rapport au premier, la position de la plate-forme par rapport au deuxième mécanisme à quatre barres, le positionnement des pattes entre elles, etc. On voit donc que le nombre de variables à prendre en compte au cours de l'optimisation est très élevé. En

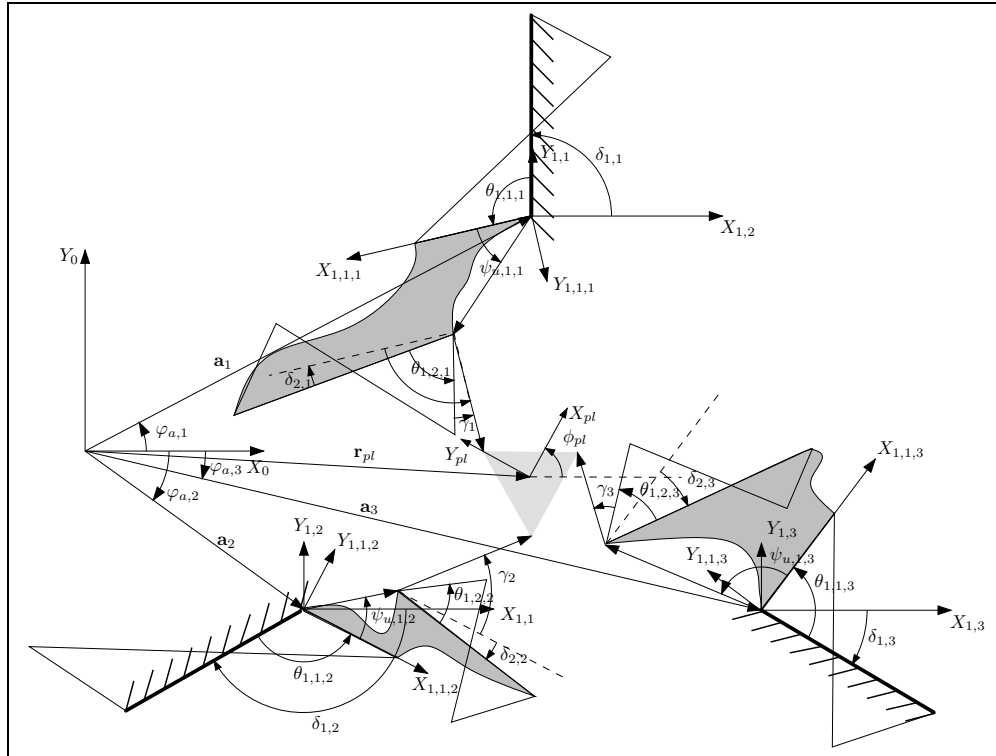


FIG. 8.13 –  $PP3$  dont le deuxième module est attaché à  $l_{1,1,k}$  ( $PP3-11$ ).

plus d'optimiser pour avoir des valeurs physiques raisonnables, on peut aussi inclure l'espace de travail dans l'optimisation pour permettre d'effectuer la tâche que l'on assignera au mécanisme. Puisque le but de cette démonstration est simplement de présenter un mécanisme plan à trois degrés de liberté, aucune optimisation ne sera faite.

### 8.5.1.1 Paramètres du mécanisme $PP3-11$

Une description de la procédure utilisée pour trouver les paramètres du mécanisme sera donnée dans cette section.

Encore un fois, puisque aucune optimisation des paramètres n'est effectuée, on utilisera une démarche où la relation entre les différents paramètres est la moins compliquée possible. On partira donc de la plate-forme puisque les paramètres de la plate-forme ne dépendent pas des paramètres des pattes. Par la suite, on trouvera les paramètres du 2<sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la patte, dans lequel on aura inclus les paramètres de la plate-forme et pour finir on trouvera les paramètres du mécanisme à quatre barres relié

au repère  $\mathcal{R}_0$  dans lequel seront inclus les paramètres du second mécanisme à quatre barres.

Chaque patte possédera les mêmes paramètres. La seule différence sera leur positionnement par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ . Cela permet de simplifier la recherche des paramètres du mécanisme et aussi l'élaboration des équations dynamiques du mécanisme.

Les caractéristiques de la plate-forme sont les suivantes : masse totale de la plate-forme  $m_{pl} = 0.1kg$ ; rayon de giration  $k_{pl} = 0.8m^2$ . Maintenant que l'on connaît les caractéristiques de la plate-forme, on peut trouver les valeurs pour les trois masses équivalentes qui seront situées aux points  $B_k$ , c'est-à-dire  $[\mathbf{b}_k]_{\mathcal{R}_{pl}} = r_{b,k} [\cos \phi_k, \sin \phi_k]^T$  à l'aide des équations (8.9—8.11). Les valeurs se retrouvent dans le tableau 8.7.

TAB. 8.7 – Paramètres pour les masses équivalentes du mécanisme *PP3-11*.

k	$\phi_{b,k}$	$m_{p,k}$	$r_{p,k}$
	<i>rad</i>	<i>kg</i>	<i>m</i>
1	$\frac{\pi}{2}$	0.0333	0.8
2	$\frac{7\pi}{6}$	0.0333	0.8
3	$\frac{11\pi}{6}$	0.0333	0.8

Pour les points d'attache sur la base, ils se trouvent aux positions suivantes :  $\mathbf{a}_k = a_k [\cos \varphi_{a,k}, \sin \varphi_{a,k}]^T$  où  $a_k = 2.75m$  et  $\varphi_{a,k} = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$  avec  $k = 1, 2, 3$ . Étant donné la façon dont le mécanisme est construit, les points  $A_k$  définissent l'origine des repères  $\mathcal{R}_{1,1,k}$ .

Puisque le mécanisme est symétrique et que les pattes se composent des mêmes modules, les tableaux 8.8 et 8.9 décrivent les paramètres physiques pour toutes les pattes. Pour le tableau 8.8 la colonne *Module* représente les caractéristiques totales du module 2, ce qui inclut les valeurs de la masse équivalente provenant de la plate-forme et qui est rattachée à la membrure  $l_{1,2,k}$ . Pour le tableau 8.9 la colonne *Module* représente les caractéristiques totales du module  $(1, k)$ , ce qui inclut les valeurs totales du module  $(2, k)$  qui est rattaché à la membrure  $l_{1,1,k}$ .

La position de la masse équivalente  $m_{p,k}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_{1,2,k}$  est donnée par  $u_{2,k} = 1m$  et  $\psi_{u,2,k} = \pi rad$  et la position du module  $(2, k)$  est donnée par les valeurs



TAB. 8.8 – Variables définissant le 2<sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $M4B-Y_{CP_2}$  (Tab. A.2) et  $d_{2,k} = 3m$ .

Variables	Membrure 1		Membrure 2	Membrure 3	Module
	réelle	augmentée			
$l$ (m)	1.2 *	1.2	3 *	1.2 *	—
$m$ (kg)	0.001 *	0.0343	0.0406	1	1.0749*
$r$ (m)	1 *	1	0.8840*	0.0143*	2.8243*
$k$ (m)	0.5859*	0.1	0.0022*	0.2418*	0.7528*
$\psi$ (rad)	$-\pi^*$	$\pi^*$	0 *	$\pi^*$	0 *

$u_{1,k} = 2m$  et  $\psi_{u,1,k} = 2.9671rad$  dans le repère  $\mathcal{R}_{1,1,k}$  et finalement l'angle que fait l'axe  $X$  du repère  $\mathcal{R}_{j,k}$  avec le repère sur lequel il se rattache est  $\delta_{1,k} = \frac{-\pi}{6}rad$  et  $\delta_{2,k} = \frac{\pi}{36}rad$  avec  $k = 1, 2, 3$ .

Les différences que l'on retrouve entre les pattes sont leur positionnement par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  et la valeur des angles  $\theta_{i,j,k}$  des mécanismes. La valeur des différents angles permettant le positionnement du mécanisme sera donnée dans la section 8.5.1.2.

TAB. 8.9 – Variables définissant le 1<sup>er</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.5. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $M4B-Y_{CP_2}$  (Tab. A.2) et  $d_{1,k} = 5m$ .

Variables	Membrure 1		Membrure 2	Membrure 3	Module
	réelle	augmentée			
$l$ (m)	2 *	2	5 *	2 *	—
$m$ (kg)	2 *	3.0749	2	5	10.0749*
$r$ (m)	1.2632 *	0.5	3.0782 *	0.4925 *	3.0925*
$k$ (m)	1.1710 *	1.5	0.7312 *	0.9617*	2.6395*
$\psi$ (rad)	-2.8863 *	$\pi^*$	0 *	$\pi^*$	0 *

### 8.5.1.2 Problème géométrique inverse (PGI)

Les équations du problème géométrique inverse de ce mécanisme se retrouvent à la section 8.4.4 si l'on remplace les variables  $\mathbf{s}_{j,k}$  et  $\psi_{s,j,k}$  par  $\mathbf{u}_{j,k}$  et  $\psi_{u,j,k}$ .

Considérant le mécanisme de la figure 8.13, on attache le second module sur la membrure 1 du premier module. Ce qui fait que l'origine du vecteur  $\mathbf{u}_{1,k}$  est le point  $A_k$ , c'est-à-dire, l'articulation au point  $P_{1,1,k}$  et son point d'arrivée est le point  $P_{1,2,k}$ , puisque cela fait partie de la définition des vecteurs  $\mathbf{u}_{j,k}$ . Finalement, la masse équivalente est attachée à la membrure 1 du deuxième module, ainsi le vecteur  $\mathbf{u}_{2,k}$  débutera au point  $P_{1,2,k}$ . On voit donc que les vecteurs  $\mathbf{u}_{j,k}$  relient les articulations des pattes (c'est-à-dire les points  $A_k$ ,  $B_k$  et  $(x_c, y_c)$  de la figure 8.13).

Le tableau 8.10 regroupe les valeurs qui permettent de trouver le problème géométrique inverse de ce mécanisme ainsi que la valeur des angles lorsqu'on utilise le signe négatif de l'équation (8.17), que la position de la plate-forme est donnée par  $\mathbf{r}_{pl} = 0.25 [\cos(2\pi t), \cos(6\pi t)]^T$  et son orientation est  $\phi_{pl} = \frac{\pi \cos(4\pi t)}{36}$  avec  $t = 0.85$ . La figure 8.14 donne la représentation graphique schématique de ce mécanisme.

### 8.5.1.3 Vérification de la compensation dynamique

Pour faire la vérification de la compensation dynamique, une méthode similaire à celle employé à la section 8.3.1 pourrait être utilisée mais le problème de cette méthode est le fait que la vérification repose sur l'hypothèse que le mécanisme est compensé dynamiquement et fait appel aux équations qui permettent d'obtenir les valeurs des membrures augmentées. Il serait donc préférable d'utiliser une méthode qui ne suppose a priori aucune connaissance sur les corps du DCL. C'est pourquoi une méthode similaire à celle de la section 4.5.2.2 sera utilisée.

Ainsi, pour faire les calculs, on se servira des masses réelles des membrures — colonnes 2, 4 et 5 des tableaux 8.9 et 8.8 — ce qui permettra l'obtention des forces et moments sans avoir supposé une compensation quelconque.

Encore une fois, les éléments connus seront la position, vitesse et accélération de l'organe terminal — plate-forme — et les moments des moteurs seront trouvés en même temps que les forces et moments appliqués sur la base. Une position, et orientation

TAB. 8.10 – Paramètres pour le PGI du mécanisme *PP3-11* avec  $t=0.85$ .

Variables	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$A_k$ (m)	$(0, 2.7500)^*$	$(-2.3816, -1.3750)^*$	$(2.3816, -1.3750)^*$
$B_k$ (m)	$(0.1685, 0.5619)^*$	$(-0.5564, -0.6189)^*$	$(0.8287, -0.6563)^*$
$u_{1,k}$ (m)	2.0	2.0	2.0
$\psi_{u,1,k}$ (rad)	2.9671	2.9671	2.9671
$u_{2,k}$ (m)	1.0	1.0	1.0
$\psi_{u,2,k}$ (rad)	$\pi$	$\pi$	$\pi$
$\delta_{1,k}$ (rad)	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\delta_{2,k}$ (rad)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{36}$
$x_c$ (m)	1.7808 *	1.7471 *	1.7111 *
$y_c$ (m)	0.9104 *	0.9735 *	-0.9998 *
$\beta_k$ (rad)	5.8106 *	5.7748 *	5.7597 *
$\sigma_k$ (rad)	1.6168 *	1.5044 *	2.1154 *
$\theta_{1,1,k}$ (rad)	1.8732 *	3.7241 *	6.024 *
$\theta_{1,2,k}$ (rad)	1.3550 *	1.5868 *	1.8536 *

arbitraire en fonction du temps sera donnée pour le centre de la plate-forme, c'est-à-dire l'origine du repère  $\mathcal{R}_{pl}$  (Fig. 8.13).

La position des différents éléments du mécanisme est donnée à la section 8.5.1.2. Pour trouver les vitesses et accélérations, un calculateur symbolique est utilisé en dérivant les différentes variables de positionnement. Si le calcul des accélérations des variables  $\theta_{i,j,k}$   $i = 2, 3$ ,  $j = 1, 2$  et  $k = 1, 2, 3$  est trop lourd, il est possible de trouver seulement les vitesses et accélérations : du centre de la plate-forme, de  $\dot{\theta}_{1,j,k}$  et  $\ddot{\theta}_{1,j,k}$ . Par la suite, les équations (4.23 et 4.24) et leur dérivée peuvent être utilisées.

Le mécanisme sera décomposé en 19 corps et le DCL sera fait pour ces 19 éléments qui sont : la plate-forme et les membrures  $l_{i,j,k}$   $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$  et  $k = 1, 2, 3$  où l'indice  $i$  indique la membrure,  $j$  indique le module et  $k$  donne la patte (Fig. 8.16). Les équations de la section 4.5.2.2 ne peuvent pas être directement utilisées même si on leur ajoute deux nouveaux indices, soit ceux du module et de la patte, car ces équations ne prennent pas en compte le fait qu'une membrure puisse supporter un corps.

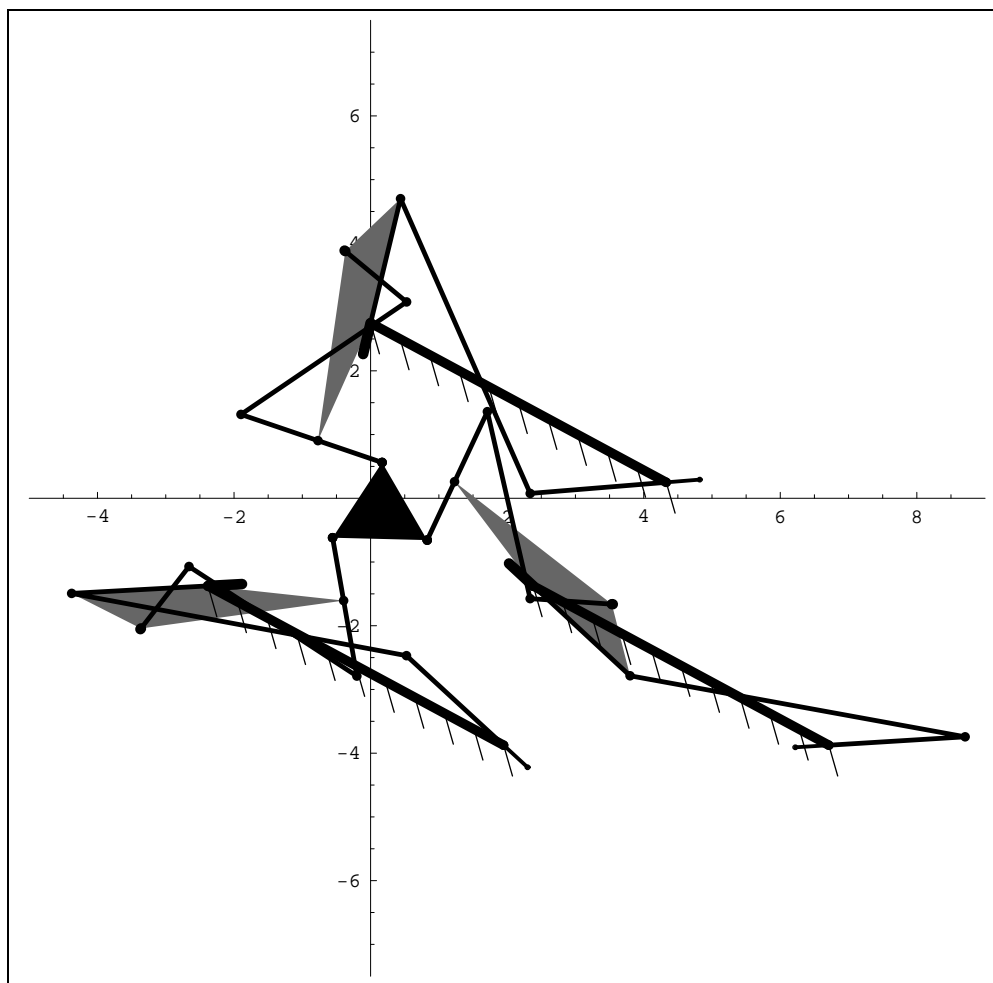


FIG. 8.14 – Configuration du mécanisme (*PP3-11*) selon les paramètres des sections 8.5.1.1 et 8.5.1.2.

TAB. 8.11 – Accélération pour les corps du mécanisme *PP3-11* avec  $t=0.85$

j	k	$\dot{\theta}_{1,j,k}$	$\ddot{\theta}_{1,j,k}$	$\dot{\theta}_{2,j,k}$	$\ddot{\theta}_{2,j,k}$	$\dot{\theta}_{3,j,k}$	$\ddot{\theta}_{3,j,k}$
		rad/s	rad/s <sup>2</sup>	rad/s	rad/s <sup>2</sup>	rad/s	rad/s <sup>2</sup>
1	1	-0.0482	-17.5161	-0.0192	-6.9925	0.0290	10.5235
	2	0.2307	43.6875	0.1247	23.6073	-0.1060	-20.0801
	3	-1.5607	-46.9047	1.8300	52.1955	3.3906	99.1002
2	1	1.5826	91.3722	0.2380	15.4253	-1.3446	-75.9469
	2	-1.8673	-29.6803	-0.5299	-6.7198	1.3374	22.9605
	3	0.6392	-45.4254	0.2510	-17.7014	-0.3882	27.7240

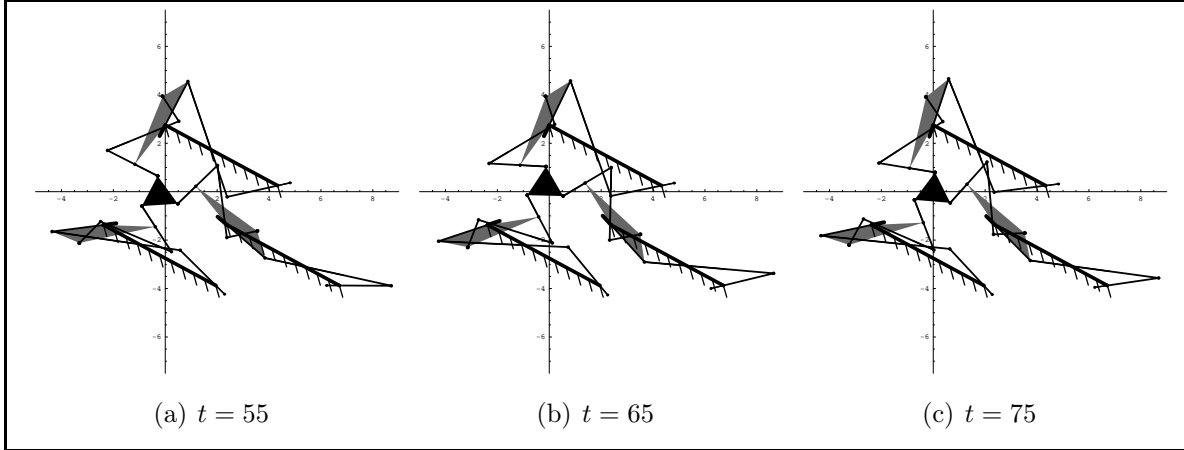


FIG. 8.15 – Configuration du mécanisme (*PP3-11*) selon les mêmes paramètres que la figure 8.14 mais avec des  $t$  différents. N.B. Les dimensions du premier module ont été multipliées par 0.2 (i.e.  $l_{i,1,k}$  et  $d_{1,k}$ ).

La membrure du premier module ( $l_{1,1,k}$ ) qui supporte le module 2 subit l'effet de 4 forces (Fig. 8.16). Il y a les deux forces présentes aux extrémités et les deux forces qui s'ajoutent, soit les forces que le deuxième module exerce sur sa base.

C'est-à-dire les forces  $\mathbf{F}_{B1,2,k}$  et  $\mathbf{F}_{B3,2,k}$  situées à la position  $\mathbf{u}_{1,1,k}$  et

$$\mathbf{u}_{1,k} + d [\cos (\delta_{1,k} + \theta_{1,k} + \delta_{2,k}), \sin (\delta_{1,k} + \theta_{1,k} + \delta_{2,k})]^T$$

respectivement.

La membrure du deuxième module ( $l_{1,2,k}$ ) qui se rattache à la plate-forme, subit l'effet de 3 forces (Fig. 8.16). Il y a les deux forces présentes aux extrémités et la force exercée par la plate-forme ( $\mathbf{F}_{p,k}$ ) (Tab. 8.13) située à la position  $\mathbf{u}_{2,k}$ .

Finalement, on ajoute les 2 équations provenant du DCL de la plate-forme :

$$\sum_{k=0}^3 \mathbf{F}_{p,k} = m_{pl} \ddot{\mathbf{x}}_{pl} \quad (8.26)$$

$$\sum_{k=0}^3 \left( \mathbf{Q}_{\mathcal{R}_{s_{1,k}}}^{\mathcal{R}_0} \mathbf{r}_{p,k} \right) \boxtimes \mathbf{F}_{p,k} = k_{pl}^2 m_{pl} \ddot{\phi}_{pl} \quad (8.27)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{R}_{s_{1,k}}}^{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} \cos (\phi_{pl}) & \sin (\phi_{pl}) \\ -\sin (\phi_{pl}) & \cos (\phi_{pl}) \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

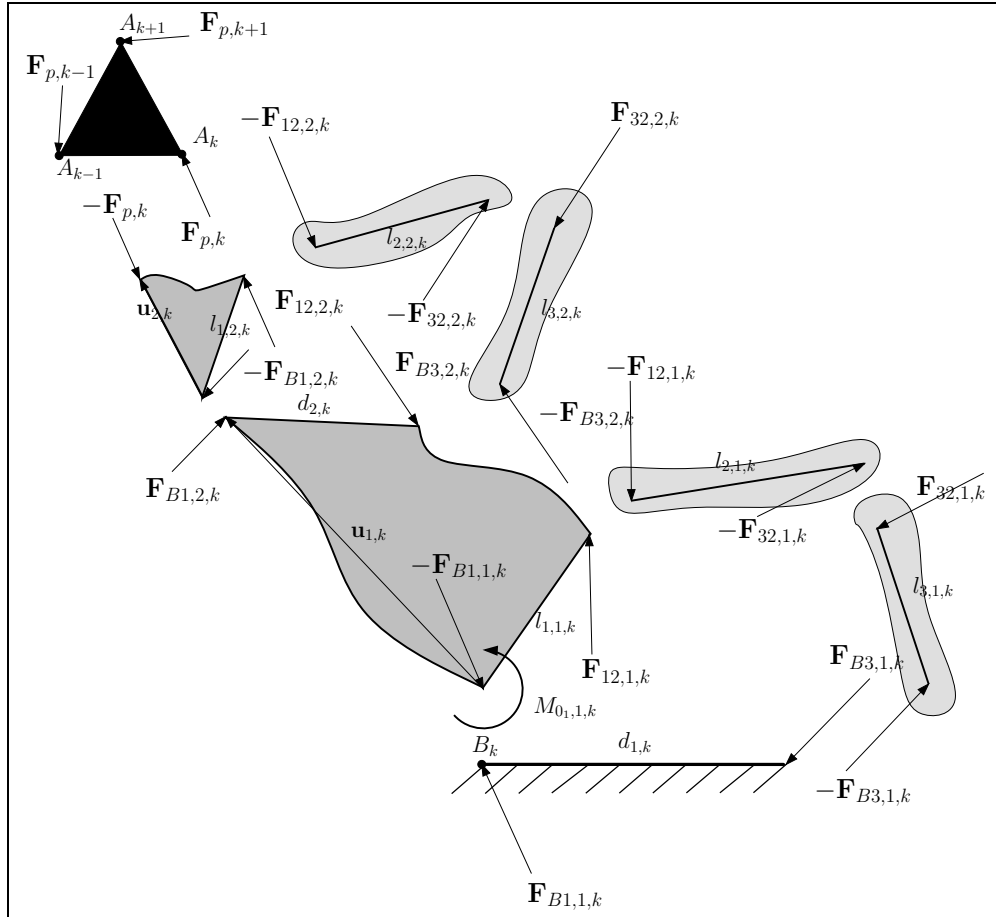


FIG. 8.16 – Diagrammes des corps libres pour une patte et pour la plate-forme du mécanisme (*PP3-11*).

On résout alors le système d'équations formé par les équations des DCL des pattes et de la plate-forme pour trouver les forces en jeu. Il est possible, par la suite, de trouver la valeur de la somme des forces et des moments que la base subit à l'aide des équations (8.29) et (8.30). On s'aperçoit que l'intensité de la somme des forces et de la somme des moments appliquées sur la base sont négligeables, ce qui prouve que le mécanisme est bien un mécanisme compensé dynamiquement. En effet, il est clair que les réactions trouvées sont négligeables lorsqu'on les compare aux forces de réaction calculées aux différents points d'attache et données aux tableaux 8.12 et 8.13

$$\sum_{k=0}^3 (\mathbf{F}_{B1,1,k} + \mathbf{F}_{B3,1,k}) = [0, -1.13687 \times 10^{-13}]^T N \quad (8.29)$$

TAB. 8.12 – Forces sur les membrures du mécanisme *PP3-11* lorsque  $t=0.85$ .

j	k	$\mathbf{F}_{B1,j,k}$		$\mathbf{F}_{B3,j,k}$		$\mathbf{F}_{12,j,k}$		$\mathbf{F}_{32,j,k}$	
		N		N		N		N	
1	1	-4.9413		6.8222		-33.0954		4.5643	
		67.9651		-56.2475		62.1593		-30.4314	
	2	-122.3120		126.9170		-130.9500		92.1517	
		-33.8883		26.5247		40.5214		-8.6395	
	3	1600.5100		-1607.0000		1660.4900		-1562.6600	
		-432.5810		428.2270		-379.7230		186.5860	
2	1	8.7664		-24.8408		6.5686		-4.1764	
		14.4637		-10.1588		5.6198		-2.6896	
	2	7.9784		-33.5717		3.2566		-3.5560	
		-14.4856		45.0091		-4.3102		1.6384	
	3	-9.5282		14.4828		-3.2061		-1.8407	
		-8.8631		55.3245		-1.4933		1.7254	

$$\sum_{k=0}^3 [\mathbf{a}_k \boxtimes \mathbf{F}_{B1,1,k} + (\mathbf{a}_k + \mathbf{d}_{1,k}) \boxtimes \mathbf{F}_{B3,1,k} - M_{O_1,1,k}] = 1.81899 \times 10^{-12} \text{ Nm} \quad (8.30)$$

TAB. 8.13 – Forces aux points d'attache des pattes et de la plate-forme et moments appliqués aux pattes entre  $d_{1,k}$  et  $l_{3,1,k}$  lorsque  $t=0.85$  pour le mécanisme *PP3-11*.

k	$\mathbf{F}_{p,k}$	$M_{0_1,1,k}$
	N	Nm
1	$[-2.1886, -8.9276]^T$	-232.5930
2	$[-4.7183, 10.0935]^T$	449.0690
3	$[6.3268, 7.2819]^T$	-2174.6400

### 8.5.2 *PP3* dont le deuxième module est attaché à $l_{3,1,k}$ et $l_{1,2,k}$ (*PP3-31*)

Ce mécanisme parallèle plan à trois degrés de liberté (Figs. 8.17 et 8.18) possède une certaine symétrie puisque ses pattes sont construites selon les mêmes paramètres. Pour chaque patte ( $k = 1, 2, 3$ ), on a un mécanisme à quatre barres fixé au repère inertiel  $\mathcal{R}_0$ . Le deuxième mécanisme à quatre barres de la patte est situé à une distance  $u_{1,k}$  de l'origine du repère de la troisième membrure du premier mécanisme  $\mathcal{R}_{3,1,k}$  et le vecteur  $\mathbf{u}_{1,k}$  fait un angle  $\psi_{u,1,k}$  par rapport à l'axe  $X_{3,1,k}$ . La plate-forme est attachée à la membrure  $l_1$  du deuxième mécanisme à quatre barres et sa position par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}_{1,2,k}$  est  $\mathbf{u}_{2,k}$ . Une articulation rotoïde relie la patte  $k$  à la plate-forme, c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{u}_{2,k}$  se termine par une articulation rotoïde. Finalement l'effecteur est situé au centre de masse de la plate-forme, c'est-à-dire à l'origine du repère ( $\mathcal{R}_{pl}$ ).

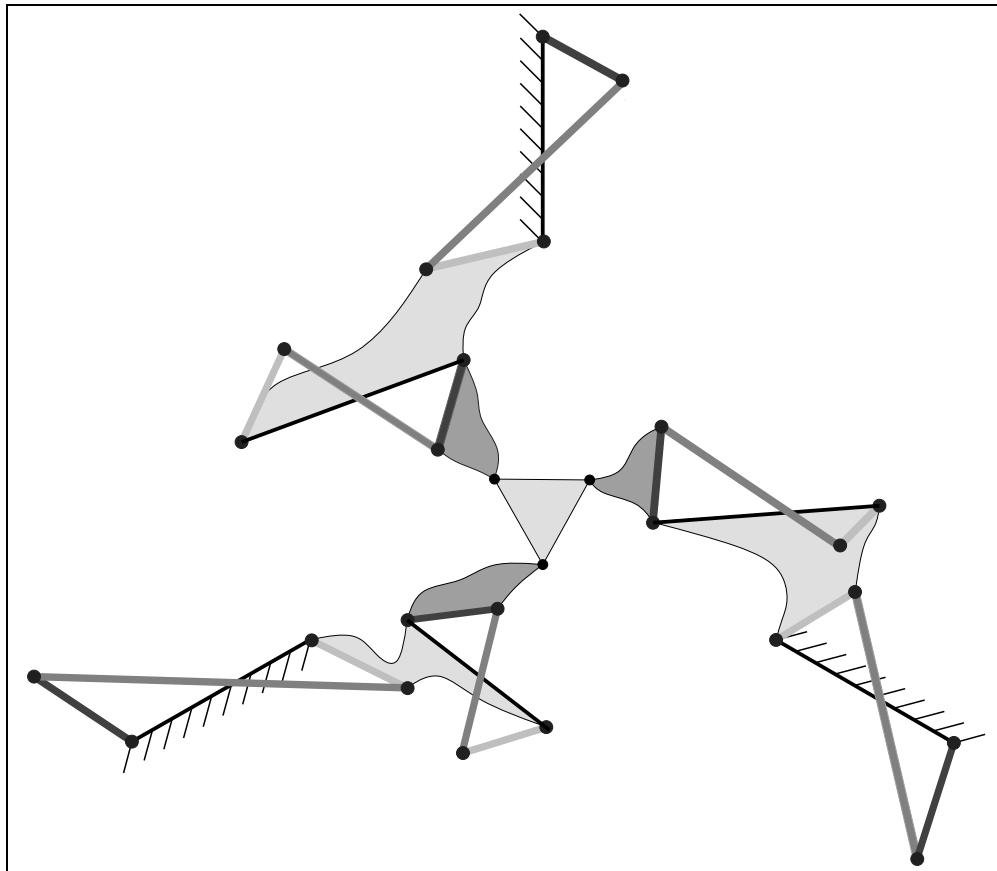


FIG. 8.17 – Schéma du mécanisme (*PP3-31*). Les membrures  $l_{i,j,k}$  de même teinte ont le même  $i$ .



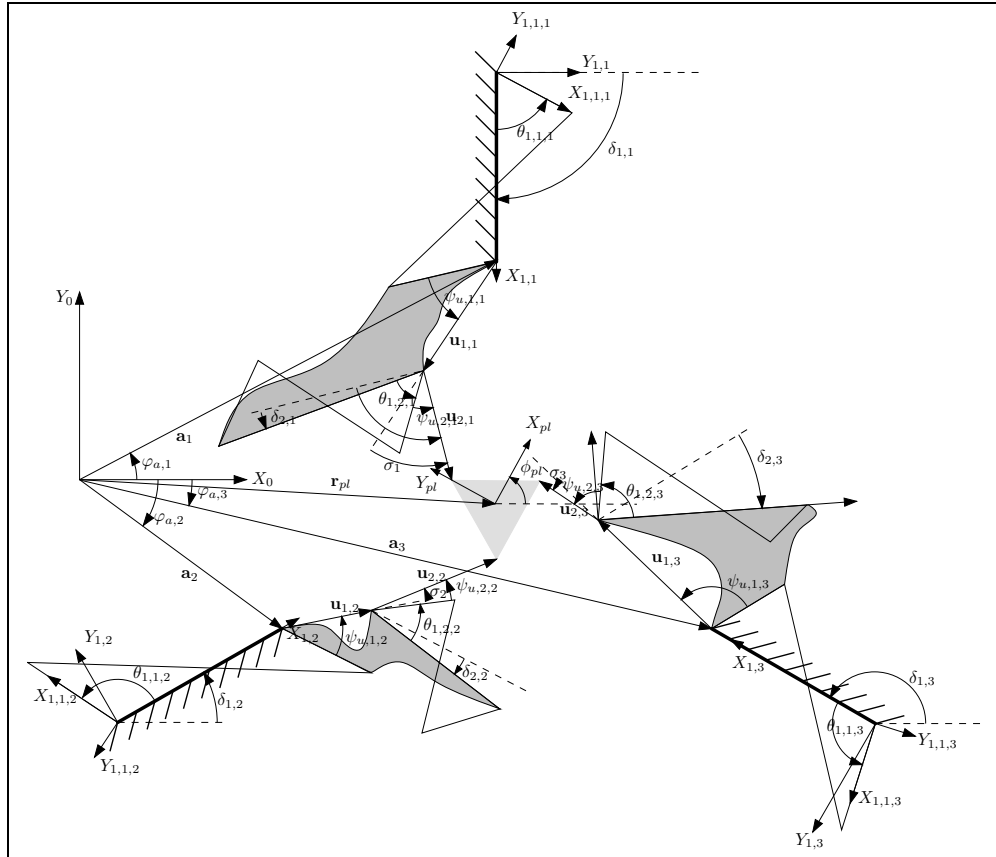


FIG. 8.18 –  $PP3$  dont le deuxième module est attaché à  $l_{3,1,k}$  ( $PP3-31$ ).

La figure 8.18 donne une représentation générale du mécanisme. Cela permet de bien voir toutes les variables qu'on peut définir. Encore une fois aucune optimisation des paramètres du mécanisme ne sera faite. La seule contrainte à part le fait que le mécanisme sera compensé dynamiquement est celle d'avoir un mécanisme dont la représentation graphique est visuellement acceptable. On peut donc se retrouver avec des valeurs physiques ayant plusieurs ordres de grandeur de différence.

Une optimisation de ce mécanisme devra donc inclure : la relation des différents paramètres physiques entre eux, la position du deuxième mécanisme à quatre barres par rapport au premier, la position de la plate-forme par rapport au deuxième mécanisme à quatre barres, le positionnement des pattes entre elles etc. On voit donc que le nombre de variables à prendre en compte au cours de l'optimisation est très élevé. En plus d'optimiser pour avoir des valeurs physiques raisonnables, on peut aussi inclure l'espace de travail dans l'optimisation pour permettre d'effectuer la tâche que l'on assignera au

mécanisme. Puisque le but de cette démonstration est de présenter un mécanisme plan à trois degrés de liberté aucune de ces possibles optimisations ne sera faite.

### 8.5.2.1 Paramètres du mécanisme *PP3-31*

Une description de la procédure utilisée pour trouver les paramètres du mécanisme sera donnée dans cette section.

Encore une fois, puisque aucune optimisation des paramètres n'est effectuée, on utilisera une démarche où la relation entre les différents paramètres est la plus simple possible. On partira donc de la plate-forme puisque les paramètres de la plate-forme ne dépendent pas des paramètres des pattes. Par la suite, on trouvera les paramètres du 2<sup>e</sup> mécanisme à quatre barres d'une patte, qui inclueront les paramètres de la plate-forme et, pour finir, on trouvera les paramètres du mécanisme à quatre barres relié au repère  $\mathcal{R}_0$ .

Chaque patte possédera les mêmes paramètres. La seule différence sera leur positionnement par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ . Cela permet de simplifier la recherche des paramètres du mécanisme et aussi l'élaboration des équations dynamiques du mécanisme.

Les caractéristiques de la plate-forme sont les suivantes : masse totale de la plate-forme  $m_{pl} = 0.06kg$ ; rayon de giration  $k_{pl} = 0.17m^2$ . Maintenant qu'on connaît les caractéristiques de la plate-forme, on peut trouver les valeurs pour les trois masses équivalentes qui seront situées aux points  $B_k$ , c'est-à-dire  $[\mathbf{b}_k]_{\mathcal{R}_{pl}} = r_{b,k} [\cos \phi_k, \sin \phi_k]^T$  à l'aide des équations (8.9—8.11). Les valeurs se retrouvent dans le tableau 8.14.

TAB. 8.14 – Paramètres pour les masses équivalentes du mécanisme *PP3-31*

k	$\phi_{b,k}$	$m_{p,k}$	$r_{p,k}$
	rad	kg	m
1	$\frac{\pi}{2}$	0.02	0.17
2	$\frac{7\pi}{6}$	0.02	0.17
3	$\frac{11\pi}{6}$	0.02	0.17

Les points d'attache sur la base, se trouvent aux positions suivantes :  $\mathbf{a}_k = a_k [\cos \varphi_{a,k}, \sin \varphi_{a,k}]^T$  où  $a_k = 0.75m$  et  $\varphi_{a,k} = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$  avec  $k = 1, 2, 3$ . Étant

donné la façon dont le mécanisme est construit, les points  $A_k$  définissent l'origine des repères  $\mathcal{R}_{1,1,k}$ .

Puisque le mécanisme est symétrique et que les pattes se composent des mêmes modules, les tableaux 8.15 et 8.16 décrivent les paramètres pour toutes les pattes. Pour le tableau 8.15 la colonne *Module* représente les caractéristiques totales du module 2, ce qui inclut les valeurs de la masse équivalente provenant de la plate-forme qui est rattachée à la membrure  $l_{1,2,k}$ . Pour le tableau 8.16 la colonne *Module* représente les caractéristiques totales du module  $(1, k)$ , ce qui inclut les valeurs totales du module  $(2, k)$  qui est rattaché à la membrure  $l_{3,1,k}$ .

TAB. 8.15 – Variables définissant le 2<sup>e</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.18. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $M_4B-Y_{CP_1}$  (Tab. A.2) et  $d_{2,k} = 3m$ .

Variables	Membrure 1		Membrure 2	Membrure 3	Module
	réelle	augmentée			
$l$ (m)	0.25000*	0.25000	0.75000*	0.25000	—
$m$ (kg)	0.18800*	0.20800	0.40000	0.22000	0.82800 *
$r$ (m)	0.19457*	0.20000	0.43800*	0.26545*	0.41087 *
$k$ (m)	0.35720*	0.34000	0.17246*	0.23991*	0.43702*
$\psi$ (rad)	$\pi$ *	$\pi$ *	0*	$\pi$ *	0 *

TAB. 8.16 – Variables définissant le 1<sup>er</sup> mécanisme à quatre barres de la figure 8.18. Les variables marquées d'un \* sont calculées à l'aide de la solution  $M_4B-Y_{CP_1}$  (Tab. A.2) et  $d_{1,k} = 5m$ .

Variables	Membrure 1	Membrure 2	Membrure 3		Module
			réelle	augmentée	
$l$ (m)	1.5200*	5 *	1.5200	1.5200	—
$m$ (kg)	0.0500*	0.9400*	0.65100*	1.4790	2.4690 *
$r$ (m)	9.0029*	3.4247*	1.7757*	0.6617	4.2990 *
$k$ (m)	2.2621*	0.2889*	1.2743*	1.3900	2.2440 *
$\psi$ (rad)	$\pi$ *	0*	-2.7574*	$\pi$ *	0 *

### 8.5.2.2 Problème géométrique inverse (PGI)

Les équations du problème géométrique inverse de ce mécanisme se retrouvent à la section 8.4.4 si l'on remplace les variables  $\mathbf{s}_{j,k}$  et  $\psi_{s,j,k}$  par  $\mathbf{u}_{j,k}$  et  $\psi_{u,j,k}$ .

Considérant le mécanisme de la figure 8.18, on attache le second module sur la membrure 3 du premier module. Ce qui fait que l'origine du vecteur  $\mathbf{u}_{1,k}$  est le point  $A_k$ , c'est-à-dire, l'articulation au point  $P_{3,1,k}$  et son point d'arrivée est le point  $P_{1,2,k}$ , puisque cela fait partie de la définition des vecteurs  $\mathbf{u}_{j,k}$ . Finalement, la masse équivalente est attachée à la membrure 1 du deuxième module, ainsi le vecteur  $\mathbf{u}_{2,k}$  débutera au point  $P_{1,2,k}$ . On voit donc que les vecteurs  $\mathbf{u}_{j,k}$  relient les articulations des pattes (i.e les points  $A_k$ ,  $B_k$  et  $(x_c, y_c)$  de la figure 8.18).

Le tableau 8.17 regroupe les valeurs qui permettent de solutionner le problème géométrique inverse de ce mécanisme ainsi que la valeur des angles lorsqu'on utilise le signe négatif de l'équation (8.17) et que la position de la plate-forme est donnée par  $\mathbf{r}_{pl} = 0.03 [\cos(2\pi t), 0]^T$  et son orientation est  $\phi_{pl} = \frac{\pi t^2}{360}$  avec  $t = \frac{1}{3}$ . La figure 8.19 donne la représentation graphique schématique de ce mécanisme.

### 8.5.2.3 Vérification de la compensation dynamique

Pour faire la vérification de la compensation dynamique, on utilise la même approche qu'à la section 8.5.1.3, c'est-à-dire que l'on utilise des DCL de tous les corps mobiles.

Une méthode similaire à celle employée à la section 8.3.1 pourrait être utilisée mais le problème de cette méthode est le fait que, celui qui fait la vérification, doit savoir que le mécanisme est compensé dynamiquement et aussi avoir à sa disposition les équations qui permettent d'obtenir les valeurs des membrures augmentées. Il serait donc préférable d'utiliser une méthode qui suppose, a priori, aucune connaissance sur les corps du DCL. C'est pourquoi une méthode similaire à la section 4.5.2.2 sera utilisée.

Ainsi, pour faire les calculs, on se servira des masses réelles des membrures — colonnes 1,2 et 4 du tableau 8.16 et colonnes 1, 3 et 4 du tableau 8.15 — ce qui permettra l'obtention des forces et moments sans avoir supposé une compensation quelconque.

TAB. 8.17 – Paramètres pour le PGI du mécanisme *PP3-11* avec  $t=0.85$ .

Variables	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$A_k$ (m)	$(0, 0.7500)^*$	$(-0.6495, -0.3750)^*$	$(0.6495, -0.3750)^*$
$B_k$ (m)	$(-0.0152, 0.1670)^*$	$(-0.1621, -0.0851)^*$	$(0.1323, -0.0849)^*$
$u_{1,k}$ (m)	0.74	0.74	0.74
$\psi_{u,1,k}$ (rad)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$u_{2,k}$ (m)	0.251	0.251	0.251
$\psi_{u,2,k}$ (rad)	$\pi$	$\pi$	$\pi$
$\delta_{1,k}$ (rad)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\delta_{2,k}$ (rad)	$\pi$	$\pi$	$\pi$
$x_c$ (m)	0.7077 *	0.7102 *	1.7111 *
$y_c$ (m)	0.2162 *	0.2057 *	-0.9998 *
$\beta_k$ (rad)	0.2965 *	0.2818 *	0.3084 *
$\sigma_k$ (rad)	3.8830 *	3.8208 *	3.9412 *
$\theta_{1,1,k}$ (rad)	5.7681 *	-0.4907*	-0.4647 *
$\theta_{1,2,k}$ (rad)	4.6684 *	4.6062 *	4.7266 *

Encore une fois, les éléments connus seront la position, vitesse et accélération de l'organe terminal — plate-forme — et les moments des moteurs seront trouvés en même temps que les forces et moments appliqués sur la base. Une position, et orientation arbitraire en fonction du temps sera donnée pour le centre de la plate-forme, c'est-à-dire, l'origine du repère  $\mathcal{R}_{pl}$  (Fig. 8.18).

La position des différents éléments du mécanisme est donnée à la section 8.5.2.2 et les positions, vitesses et accélérations sont données au tableau 8.18.

Tout comme pour le mécanisme précédent, le mécanisme est décomposé en 19 corps et le DCL sera fait pour ces 19 éléments.

La membrure du premier module ( $l_{3,1,k}$ ) qui supporte le module 2 subit l'effet de 4 forces (Fig. 8.21). Il y a les deux forces présentes aux extrémités et les deux forces qui s'ajoutent, soit les forces que le deuxième module exerce sur sa base. C'est-à-dire, les forces  $\mathbf{F}_{B1,2,k}$  et  $\mathbf{F}_{B3,2,k}$  situées à la position  $\mathbf{u}_{1,1,k}$  et

$$\mathbf{u}_{1,k} + d [\cos(\delta_{1,k} + \theta_{3,k} + \delta_{2,k}), \sin(\delta_{1,k} + \theta_{3,k} + \delta_{2,k})]^T$$

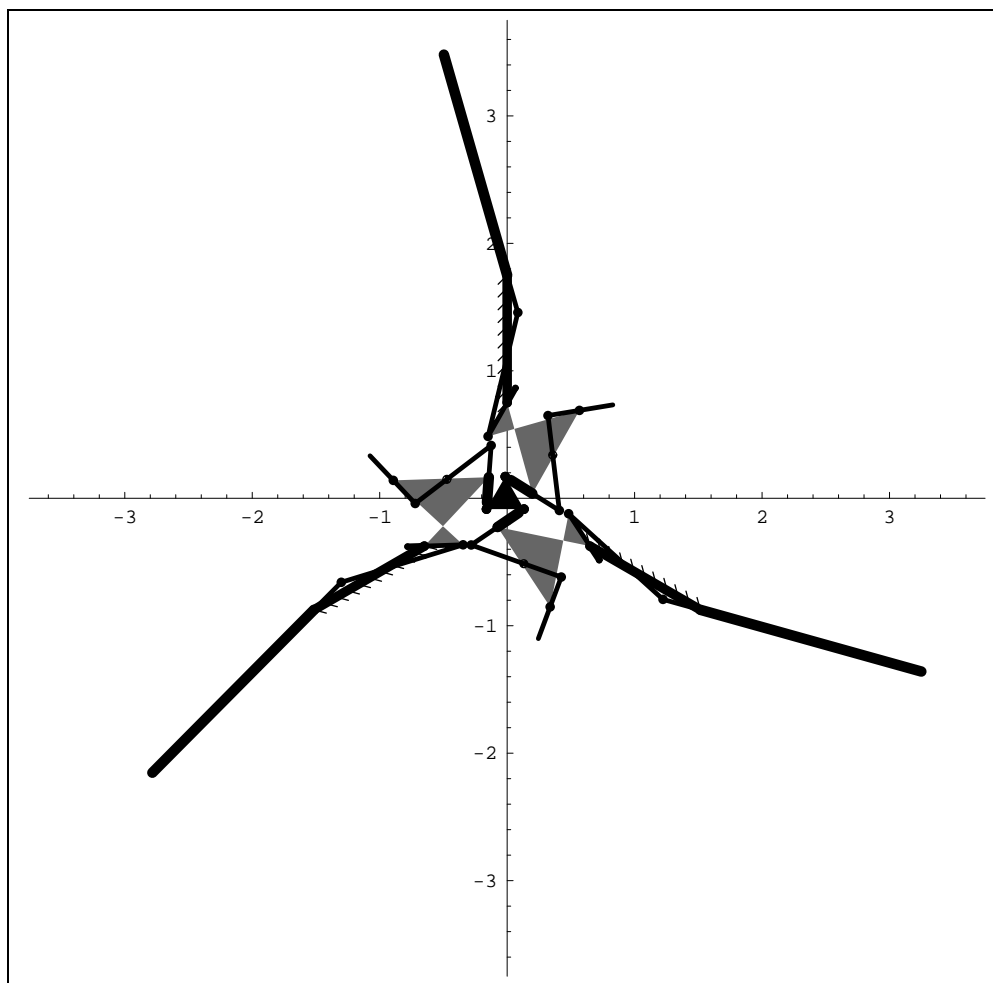


FIG. 8.19 – Configuration du mécanisme (*PP3-31*) selon les paramètres des sections 8.5.2.1 et 8.5.2.2. N.B. Les dimensions du premier module ont été multipliées par 0.2 (i.e.  $l_{i,1,k}$  et  $d_{1,k}$ ).

respectivement.

La membrure du deuxième module ( $l_{1,2,k}$ ) qui se rattache à la plate-forme subit l'effet de 3 forces (Fig. 8.21). Il y a les deux forces présentes aux extrémités et la force exercée par la plate-forme ( $\mathbf{F}_{p,k}$ ) (Tab. 8.20) située à la position  $\mathbf{u}_{2,k}$ .

On résout le système d'équation formé par les équations des DCL des pattes et de la plate-forme pour trouver les forces en jeu. Il est alors possible par la suite de trouver la valeur de la somme des forces et des moments que la base subit à l'aide des équations (8.31) et (8.32). On s'aperçoit que l'intensité de la somme des forces et de la somme

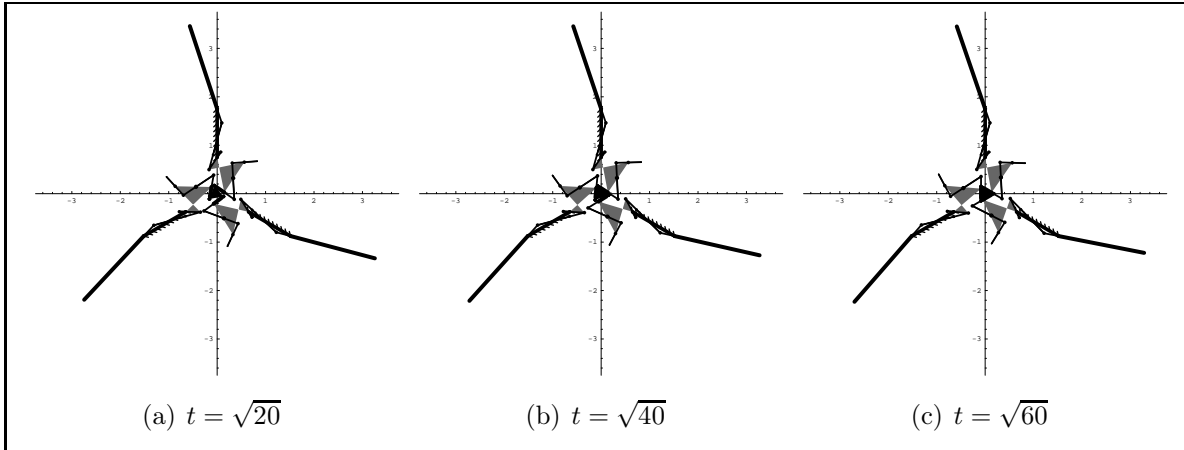


FIG. 8.20 – Configuration du mécanisme (*PP3-31*) selon les mêmes paramètres que la figure 8.19 mais avec des  $t$  différents. N.B. Les dimensions du premier module ont été multipliées par 0.2 (i.e.  $l_{i,1,k}$  et  $d_{1,k}$ ).

des moments appliquées sur la base est négligeable, ce qui prouve que le mécanisme est bien un mécanisme compensé dynamiquement.

$$\sum_{k=0}^3 (\mathbf{F}_{B1,1,k} + \mathbf{F}_{B3,1,k}) = [0, 0]^T N \quad (8.31)$$

$$\sum_{k=0}^3 [\mathbf{a}_k \boxtimes \mathbf{F}_{B1,1,k} + (\mathbf{a}_k + \mathbf{d}_{1,k}) \boxtimes \mathbf{F}_{B3,1,k} - M_{03,1,k}] = 0 \text{ Nm} \quad (8.32)$$

TAB. 8.18 – Accélération pour les corps du mécanisme *PP3-31* avec  $t = \frac{1}{3}$ .

j	k	$\dot{\theta}_{1,j,k}$	$\ddot{\theta}_{1,j,k}$	$\dot{\theta}_{2,j,k}$	$\ddot{\theta}_{2,j,k}$	$\dot{\theta}_{3,j,k}$	$\ddot{\theta}_{3,j,k}$
		rad/s	rad/s <sup>2</sup>	rad/s	rad/s <sup>2</sup>	rad/s	rad/s <sup>2</sup>
1	1	0.1559	-0.5800	-0.1227	0.4706	-0.2786	1.0507
	2	0.0153	0.1019	-0.0122	-0.0808	-0.0275	-0.1828
	3	-0.1402	0.6926	0.1125	-0.5452	0.2528	-1.2378
2	1	0.0199	0.1434	0.0044	0.0314	-0.0155	-0.1119
	2	-0.6820	2.1245	-0.1690	0.3303	0.5129	-1.7942
	3	0.6338	-2.4912	0.1224	-0.6772	-0.5114	1.8140

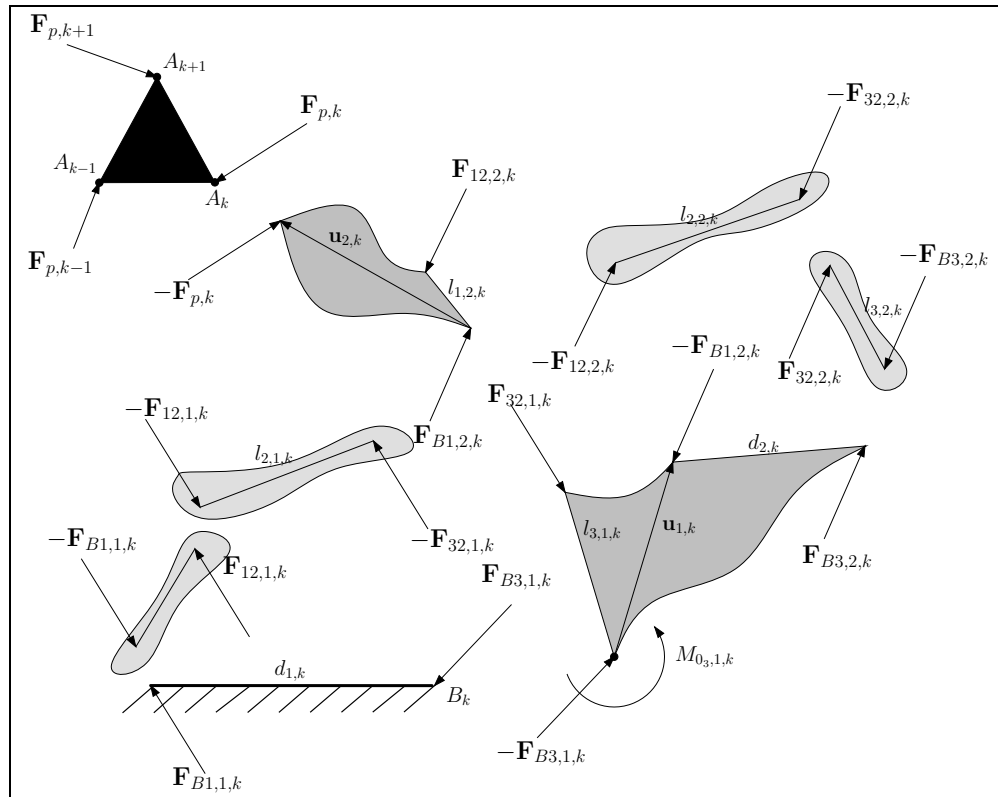


FIG. 8.21 – Diagramme des corps libres pour une patte et pour la plate-forme du mécanisme (PP3-31).

L'observation des tableaux 8.19 et 8.20 démontre clairement que les forces internes sont importantes même si les réactions globales sont nulles.

## 8.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a synthétisé des mécanismes sériels et parallèles plans à 3 degrés de liberté qui sont dynamiquement équilibrés. Ceci a été rendu possible par l'utilisation de modules formés de mécanismes à quatre barres dynamiquement équilibrés. Des exemples numériques ont été donnés pour clairement démontrer la faisabilité de tels mécanismes.



TAB. 8.19 – Forces sur les membrures du mécanisme *PP3-31* lorsque  $t=\frac{1}{3}$ 

j	k	$\mathbf{F}_{B1,j,k}$		$\mathbf{F}_{B3,j,k}$		$\mathbf{F}_{12,j,k}$		$\mathbf{F}_{32,j,k}$	
		N		N		N		N	
1	1	-1.1664		0.5081		-0.9124		0.2341	
		-2.8439		3.2107		-2.7824		3.2842	
	2	-0.5583		1.1662		-0.5257		0.5532	
		-0.0874		0.4740		-0.1196		0.2662	
	3	2.5891		-2.5387		2.6645		-3.6351	
		-3.0852		2.3317		-2.7825		2.4709	
2	1	-0.8912		-0.0507		-0.1043		-0.0603	
		0.4380		-0.4420		0.0823		-0.2566	
	2	0.8355		-0.3072		0.3301		-0.1932	
		0.6340		-0.2327		0.2431		-0.1535	
	3	0.0949		0.1279		0.1527		0.0353	
		-1.0165		-0.2584		-0.2251		-0.1748	

TAB. 8.20 – Forces aux points d'attache des pattes et de la plate-forme et moments appliqués aux pattes entre  $d_{1,k}$  et  $l_{3,1,k}$  lorsque  $t=\frac{1}{3}$  pour le mécanisme *PP3-31*.

k	$\mathbf{F}_{p,k}$		$M_{O_3,1,k}$
	N		Nm
1	$[0.6701, -0.3669]^T$		6.2194
2	$[-0.5960, -0.3867]^T$		-1.0296
3	$[-0.0385, 0.7535]^T$		-7.2614

# Chapitre 9

## Conclusion

Le but général de cette thèse consistait à trouver des mécanismes compensés dynamiquement. Plusieurs méthodes donnent la possibilité de compenser dynamiquement un mécanisme. On peut penser aux méthodes qui utilisent le contrôle pour obtenir la compensation. On peut aussi penser aux méthodes qui ajoutent des contre-rotations ou d'autres éléments mécaniques supplémentaires.

Ainsi, certaines contraintes se sont rattachées au but principal, c'est-à-dire, obtenir des mécanismes compensés dynamiquement sans ajouter de composantes et que la compensation existe pour tout mouvement. Une des possibilités qui restait était donc de trouver des relations entre les différents paramètres physiques du mécanisme pour faire en sorte qu'il soit compensé dynamiquement pour tout déplacement, toute vitesse et toute accélération.

## 9.1 Compensation dynamique

Puisque cette recherche abordait un secteur inexploré de la compensation dynamique, les mécanismes étudiés ont été des plus simples. Par contre, cette simplicité a permis la construction de mécanismes beaucoup plus complexes puisqu'il était possible de travailler avec les équations de contraintes grâce à leur simplicité.

### 9.1.1 Mécanismes à quatre barres

Un des mécanismes les plus simples est le mécanisme à quatre barres plan. Étant donné qu'il a déjà été démontré qu'il peut être compensé statiquement, ce mécanisme est donc un bon candidat pour la compensation dynamique.

La recherche effectuée dans cette thèse a démontré que les mécanismes à quatre barres peuvent être compensés, s'ils respectent un des ensembles de contraintes de compensation dynamique (CCD) (Tab : A.2).

Les CCD peuvent paraître contraignantes mais le nombre d'équations de contraintes étant moindre que le nombre de variables, le nombre de mécanismes pouvant être générés par un ensemble de CCD est infini.

Ce résultat (les 3 familles de CCD) est important puisqu'il ouvre pour la première fois la porte à l'utilisation de mécanismes à quatre barres compensés dynamiquement mais qui ne comporte aucun ajout mécanique.

### 9.1.2 Mécanisme à cinq barres

Puisque les mécanismes à quatre barres pouvaient être compensés dynamiquement, on s'est penché sur des mécanismes un peu plus complexes, c'est-à-dire, les mécanismes à cinq barres. Après une analyse rigoureuse, on a conclu que ces mécanismes ne pouvaient être compensés dynamiquement lorsqu'on imposait les mêmes contraintes de départ.

### 9.1.3 Mécanismes à plusieurs degrés de liberté

Le but à long terme de cette recherche est de développer des mécanismes dynamiquement équilibrés qui possèdent jusqu'à 6 degrés de liberté.

Souvent les résultats d'une recherche semblent très prometteurs lorsqu'on les regarde seulement du point de vue théorique. Il a été intéressant de pouvoir établir que ce qui avait été trouvé pouvait avoir des applications pratiques.

Deux grandes familles de manipulateurs existent. Il y a les manipulateurs sériels et parallèles. On s'est donc affairé à trouver au moins un exemple pour chaque grande famille de manipulateurs.

À l'aide de la cascade des paramètres physiques, il est possible de construire des mécanismes à plusieurs degrés de liberté. De plus, l'agencement des mécanismes à quatre barres peut varier et ainsi créer des manipulateurs avec différentes caractéristiques car la cascade peut se faire sur toutes les membrures du mécanisme.

Dans cette thèse, des exemples de mécanismes à 3 degrés de liberté équilibrés dynamiquement ont été donnés, ce qui illustre la portée éventuelle des résultats obtenus.

## 9.2 Travaux futurs

Cette recherche n'a résolu qu'une partie du problème de la compensation dynamique applicable aux mécanismes à plusieurs degrés de liberté. En effet, cette recherche s'est restreinte aux mécanismes plans. De plus, les applications n'ont présenté que des mécanismes qui respectaient les CCD et qui étaient visuellement acceptables. À partir de ces résultats, plusieurs directions de recherche peuvent être envisagées. Par ailleurs, bien que cette thèse soit soutenue en 2005 les travaux qui y sont décrits ont été complétés en 2000. Par conséquent, certaines de ces directions de recherche potentielles ont déjà été explorées, à la suite des travaux présentés dans cette thèse.

### 9.2.1 Optimisation

Un complément de recherche serait de trouver des mécanismes dont les paramètres physiques peuvent permettre la création de prototypes. Certains mécanismes donnés en exemple ont des rapports de masses ou des rapports de longueurs entre les membrures de plusieurs ordres de grandeur de différence. De plus, il arrivait que la position du centre de masse d'une membrure se situait très loin de la ligne reliant les deux articulations.

Une optimisation pourrait aussi être effectuée pour trouver un mécanisme possédant tel genre d'espace de travail. C'est possible dû au nombre de variables libres disponibles.

Cette approche a été utilisée dans [Côté *et al.*, 2001; Gosselin *et al.*, 2004] pour la synthèse de modèles en plastique de mécanismes à quatre barres dynamiquement équilibrés. L'optimisation a été réalisée avec la méthode du gradient avec contraintes. Le modèle construit est illustré à la figure 9.1.

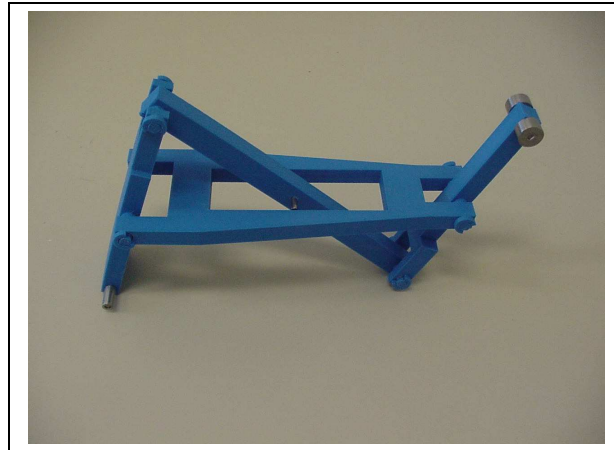


FIG. 9.1 – Mécanisme à quatre barres dynamiquement équilibrés (tiré de Côté *et al.* [2001])

Par ailleurs, dans [Foucault et Gosselin, 2004] un prototype actionné de mécanisme parallèle à 3 degrés de liberté dynamiquement équilibré a été construit. Celui-ci est montré à la figure 9.2. Il est à noter que ce mécanisme est construit à partir de mécanismes à 5 degrés de liberté plan incluant des contre-rotations.

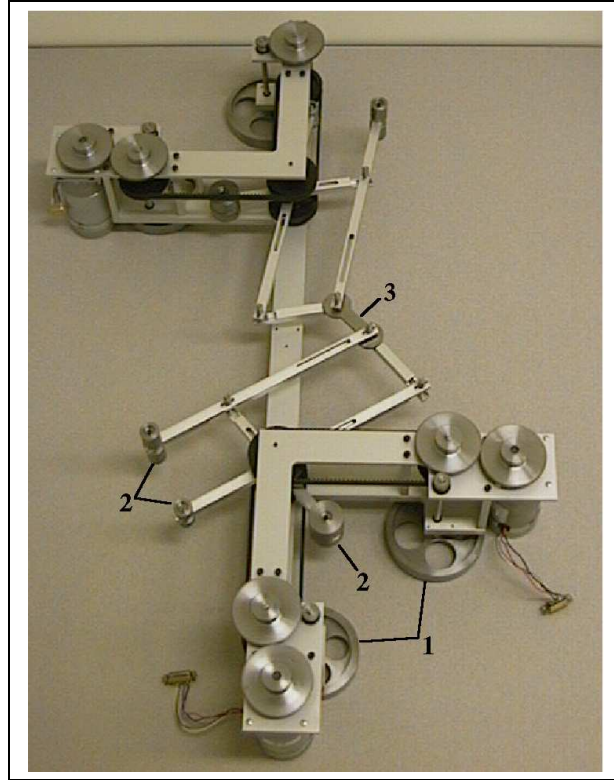


FIG. 9.2 – Prototype tiré de Foucault et Gosselin [2004]

## 9.2.2 Compensation dynamique en 3D

Dans cette thèse, la recherche s'est restreinte aux mécanismes plans. Il reste donc toute la dimension des mécanismes spatiaux à aborder. Deux approches possibles seraient dans la continuité de ce travail.

### 9.2.2.1 Utilisation de mécanismes à quatre barres plan

Il pourrait être intéressant de vérifier s'il est possible de compenser dynamiquement un mécanisme spatial en le construisant à partir de mécanismes à quatre barres plans qui ne sont pas nécessairement tous dans le même plan.

Cette approche a été utilisée dans [Foucault et Gosselin, 2004] pour synthétiser des mécanismes spatiaux à 3 degrés de liberté. Les mécanismes obtenus sont construits à partir de mécanismes à quatre barres plans montés dans des plans distincts. Le

mécanisme global est un mécanisme spatial mais les mécanismes plans utilisés bougent dans des plans fixes.

Par ailleurs, il a été démontrés dans [Wu, 2003; Wu et Gosselin, 2004] qu'il était possible de modifier le mécanisme à quatre barres plan afin qu'il puisse être équilibrés même pour des mouvements hors plan. Grâce à ce résultat, les auteurs ont pu synthétiser des mécanismes parallèles à 6 degrés de liberté dynamiquement équilibrés. Un exemple est montré à la figure 9.3.

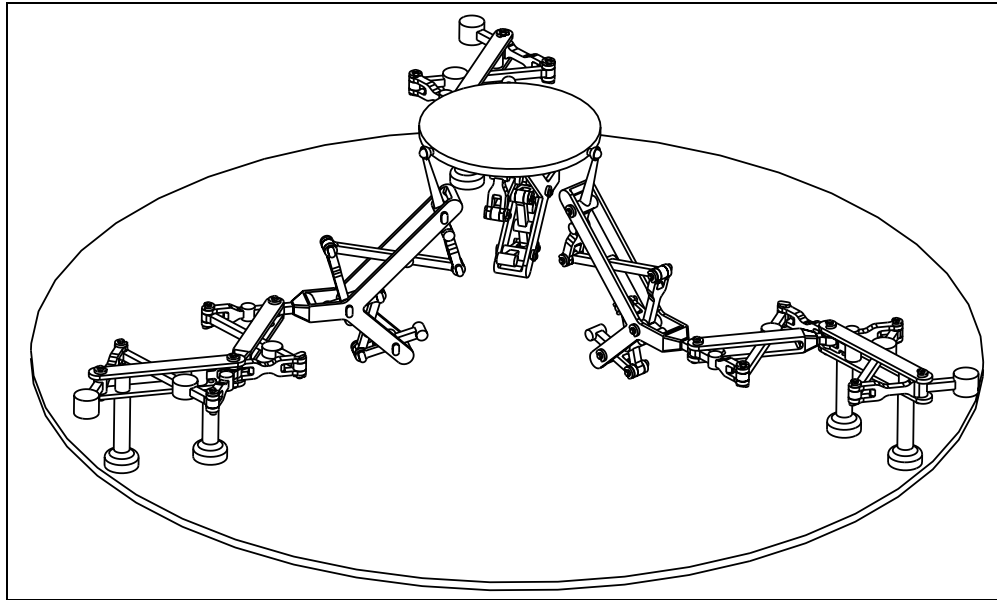


FIG. 9.3 – Prototype physique tiré de Wu et Gosselin [2004]

### 9.2.2.2 Mécanismes à quatre barres spatiaux

Il serait aussi intéressant d'aborder le problème à l'aide de mécanismes à quatre barres spatiaux. Dans le livre de Hunt [1978], Hunt présente des exemples de mécanismes à quatre barres qui pourraient servir de base pour élaborer les équations de CCD.

Une autre avenue de recherche prometteuse est la dérivation de conditions moins restrictives pour l'équilibrage de mécanismes complexes, c'est-à-dire d'éviter l'équilibrage indépendant des différentes pattes d'un mécanisme parallèle. Cette avenue pourrait sans doute permettre d'obtenir de meilleurs mécanismes. Elle renferme toutefois des défis importants.

En conclusion, on peut donc constater que les résultats de cette recherche ont déjà conduit à des développements importants dans le domaine de l'équilibrage de mécanismes à plusieurs degrés de liberté. Cependant, même si d'intéressants résultats ressortent de cette recherche, seulement la surface du problème de compensation dynamique a été explorée.



# Bibliographie

- A. ABU-ABED et E. PAPADOPOULOS, Design and motion planning for a zero-reaction manipulator, *Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1554–1559, San Diego, CA, USA, 8-13 mai 1994.
- C. BAGCI, Complete shaking force and shaking moment balancing of link mechanisms using balancing idler loops, *Journal of Mechanical Design*, 104:482–493, avril 1982.
- C. BAGCI, Complete balancing of linkages using complete dynamical equivalents of floating links : Cdel method, *Dans DE Flexible Mechanisms, Dynamics, and Analysis 22nd Biennial Mechanisms Conference*, volume 47, pages 477–488, 13–16 septembre 1992.
- S. BALASUBRAMANIAN et C. BAGCI, Design equations for the complete shaking force balancing of 6R 6-Bar and 6-Bar Slider-Crank mechanisms, *Mechanism and Machine Theory*, 13:659–674, 1978.
- F. BEHI et D. TESAR, Parametric identification for industrial manipulators using experimental modal analysis, *IEEE Transaction on Robotics and automation*, 7(5): 642–652, 1991.
- R. S. BERKOF et G. G. LOWEN, Theory of shaking moment optimization of force-balanced four-bar linkages, *Journal of Engineering for Industry*, 93(1):53–60, 1971a.
- R. S. BERKOF, Complete force and moment balancing of inline four-bar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 8:397–410, 1973.

- R. S. BERKOF et G. G. LOWEN, A new method for completely force balancing simple linkages, *Journal of Engineering for Industry*, 91(1):21–26, 1969.
- R. S. BERKOF et G. G. LOWEN, Theory of shaking moment optimization of force-balanced four-bar linkages, *Journal of engineering for industry*, 93(1):53–60, 1971b.
- P.-É. BOILEAU et S. RAKHEJA, Caractérisation de l'environnement vibratoire dans différentes catégories de véhicules : industriels, utilitaires et de transport urbain études et recherches, Rapport R-242, IRSST, 2000. 162 pages.
- N.-X. CHEN, The complete shaking force balancing of a spatial linkage, *Mechanism and Machine Theory*, 19(2):243–255, 1984.
- V. Coudé du FORESTO, F. MALBET, D. MÉKARNIA, R. PETROV, F. REYNAUD et M. TALBON, Étude préliminaire de l'instrument proche-infrarouge/rouge du VLTI et de GI2T, Étude, AMBER Consortium, 1997. 78 pages.
- G. CÔTÉ, C. M. GOSSELIN et F. VOLLMER, Équilibrage dynamique et optimisation d'un mécanisme à quatre barres plan, *Dans Proceedings of the CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines, and Mechatronics (SM3)*, page 2, Montréal, 1 juin 2001.
- S. DUBOWSKY et M. A. TORRES, Path planning for space manipulators to minimize spacecraft attitude disturbances, *Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2522–2528, Sacramento CA, 1991.
- I. EBERT-UPHOFF et G. CHIRIKJIAN, Inverse kinematics of discretely actuated hyper-redundant manipulators using workspace densities, *Dans IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 139–145, 1996.
- J. L. ELLIOT et D. TESAR, The theory of torque. shaking force and shaking moment balancing of four link mechanisms, *Asme Journal of Engineering for Industry*, 99 (B):715–722, 1977.
- I. ESAT et H. BAHAI, A theory of complete force and moment balancing of planar linkage mechanisms, *Mechanism and Machine Theory*, 34:903–922, 1999.
- G. FENG, Complete shaking force and shaking moment balancing of four types of six-bar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 24(4):275–287, 1989.
- G. FENG, Complete shaking force and shaking moment balancing of 26 types of four-, five- and six-bar linkages with prismatic pairs, *Mechanism and Machine Theory*, 25 (2):183–192, 1990.

- G. FENG, Complete shaking force and shaking moment balancing of 17 types of height-bar linkages only with revolute pairs, *Mechanism and Machine Theory*, 26(2):197–206, 1991.
- S. FOUCAULT et C. M. GOSSELIN, Synthesis, design and prototyping of a planar 3-dof reactionless parallel mechanism, *ASME Journal of Mechanical Design*, 126(6):992–999, 2004.
- F. FREUDENSTEIN, Approximate synthesis of four-bar linkages, *American Society of Mechanical Engineers, Transactions of the ASME*, 77:853–861, juillet 1955.
- H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, second édition, 1981. 672 p.
- C. M. GOSSELIN, Note sur les conditions d'équilibrage de Berkof et Lowen, Dans *Congrès Canadien de Mécanique Appliquée (CANCAM 97)*, volume 1, pages 497–498, Québec, Canada, juin 1997.
- C. M. GOSSELIN et J. ANGELES, Singularity analysis of closed-loop kinematic chains, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(3):281–290, 1990.
- C. M. GOSSELIN, F. VOLLMER, G. CÔTÉ et Y. WU, Synthesis and design of reactionless three-degree-of-freedom parallel mechanisms, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2):191–199, 2004.
- C. M. GOSSELIN et J. WANG, Static balancing of spatial six-degree-of-freedom parallel mechanisms with revolute actuators, *Journal of Robotic Systems*, 17(3):159–170, 2000.
- C. M. GOSSELIN, J. WANG, T. LALIBERTÉ et I. EBERT-UPHOFF, On the design of a statically balanced 6-dof parallel manipulator, Dans *IFTToMM Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1045–1050, Oulu, Finland, 20–24 juin 1999.
- J. HERDER, *Energy-free systems. Theory, conception, and design of statically balanced spring mechanisms*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, Pays-Bas, 2001. ISBN 90-370-0192-0.
- K. H. HUNT, *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon Press, Oxford, 1978. 465 p.

- M. JEAN et C. M. GOSSELIN, Static balancing of planar parallel manipulators, *Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 3732–3737, Minneapolis, Minnesota, 22–28 avril 1996.
- R. E. KAUFMAN et G. N. SANDOR, Complete force balancing of spatial-linkages, *Asme Journal of Engineering for Industry*, 93(B):620–626, 1977.
- I. S. KOCHEV, Contribution to the theory of torque, shaking force and shaking moment balancing of planar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 26(3):275–284, 1991.
- I. S. KOCHEV, Qualitative theory of the reactions and stresses in high speed planar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 27(1):59–68, 1992.
- I. KOCHEV, General method for active balancing of combined shaking moment and torque fluctuation in planar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 25(6):679–687, 1990.
- G. LASFARGUES, Effets vasculaires et neurologiques des vibrations transmises au système main-bras, Études et enquêtes TF 21, INRS, 1990. 10 pages.
- G. LEGNANI, B. ZAPPA, R. ADAMINI et F. CASOLO, A contribution to the dynamics of free-flying space manipulators, *Mechanism and Machine Theory*, 34(3):359–372, 1999.
- G. G. LOWEN et R. S. BERKOF, Survey of investigations into the balancing of linkages, *Journal of Mechanisms*, 3:221–231, 1968.
- G. G. LOWEN et R. S. BERKOF, Determination of force-balanced four-bar linkages with optimum shaking moment characteristics, *Journal of Engineering for Industry*, 93(1):39–46, 1971.
- G. G. LOWEN, F. R. TEPPER et R. BERKOF, Balancing linkages-an update, *Mechanism and Machine Theory*, 18(3):213–220, 1983.
- J. L. MERIAM et L. G. KRAIGE, *Engineering mechanics, Vol 2, Dynamics*, volume 2. John Wiley and Sons, 2e édition, 1987. 641 p.
- J. L. MERIAM et L. G. KRAIGE, *Mécanique de l'ingénieur, Statique*. Les Éditions Reynald Goulet inc., 1996. 522 p.
- J.-P. MERLET, *Les robots parallèles, 2<sup>e</sup> édition revue et augmentée*. Hermès, Paris, France, 1997. 367 p.

- J.-P. MERLET, *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 2000. 355 p.
- K. OLDHAM et M. WALKER, A procedure for force-balancing planar linkages using counterweights, *Journal Mechanical Engineering Science*, 20(4):177–182, 1978.
- E. PAPADOPOULOS et S. DUBOWSKY, Coordinated manipulator/spacecraft motion control for space robotic systems, *Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1696–1701, Sacramento CA, 1991.
- R. RICARD et C. M. GOSSELIN, On the determination of the workspace of complex planar robotic manipulators, *Dans ASME Mechanisms Conference*, volume DE-72, pages 133–140, Minneapolis, septembre 1994.
- R. RICARD et C. M. GOSSELIN, On the development of reactionless parallel manipulators, *Dans ASME 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, numéro MECH-14098, Baltimore, Usa, septembre 2000.
- Z. SHEMIN, A constituting method of objective function for the dynamic optimum balance of shaking forces in linkage, *Mechanism and Machine Theory*, 29(6):829–835, 1994.
- E. SHIN et A. STREIT, Donald, Spring equilibrators theory for static balancing of planar pantograph linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 26(7):645–657, 1991.
- R. SINATRA et J. ANGELES, A new tool in the teaching of planar mechanism and machine theory, *Dans Ninth World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms*, volume 4, pages 3181–3186, Politecnico di Milano, Italy, 29 août–2 septembre 1995.
- M. R. SMITH, Optimal balancing of planar multi-bar linkages, *Dans 4th World Congress on the Theory of Machines and Mechanism*, pages 145–149, New-Castle-Upon-Tyne, 1975.
- F. R. TEPPER et G. G. LOWEN, General theorems concerning full force balancing of planar linkages by internal mass redistribution, *Journal of Engineering for Industry*, 94B(3):789–796, 1972.
- T. THUEMMEL et M. BRANDL, Active balancing of joint forces in high-speed linkages by redundant drives and learning control, *Dans The 1996 ASME Design Technical Conference and Computers in Engineering Conference*, volume 96-DETC/MECH-1572, pages 1–10, Irvine, California, août 1996.

- L.-W. TSAI, *Robot Analysis and Design : The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators, 1st edition*. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, USA, 1999. 520 p.
- N. ULRICH et K. VIKAY, Passive mechanical gravity compensation for robot manipulator, *Dans 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1536–1541, 1991.
- M. J. WALKER et K. OLDHAM, A general theory of force balancing using counterweights, *Mechanism and Machine Theory*, 13(2):175–185, 1978.
- G. J. WALSH, D. A. STREIT et B. J. GILMORE, Spatial spring equilibrators theory, *Mechanism and Machine Theory*, 26(2):155–170, 1991.
- J. WANG, *Kinematic analysis, dynamic analysis and static balancing of planar and spatial parallel mechanisms or manipulators with revolute actuators*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 1998.
- J. L. WIEDERRICH et B. ROTH, Momentum balancing of four-bar linkages, *Journal of Engineering for Industry*, 98(4):1289–1295, 1976.
- Y. WU, *Synthesis and Analysis of reactionless spatial parallel mechanisms*. Thèse de doctorat, Département de génie mécanique, Université Laval, 2003. 173 p.
- Y. WU et C. M. GOSSELIN, Synthesis of reactionless spatial 3-dof and 6-dof mechanisms without separate counter-rotations, *International Journal of Robotics Research*, 23(6):625–642, 2004.
- j. YAO et M. R. SMITH, Force-balancing of linkages. a new method for proving the validity of counterweight arrangements, *Mechanism and Machine Theory*, 28(4):583–591, 1993a.
- j. YAO et M. R. SMITH, An improved complex mass method for force balancing of planar linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 28(3):417–425, 1993b.
- Z. YE et M. R. SMITH, Complete balancing of planar linkages by an equivalence method, *Mechanism and Machine Theory*, 29(5):701–712, 1994.
- L. d. YONG et H. ZHEN, Input torque balancing of linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 24(2):99–103, 1989.
- Y.-Q. YU, Optimum shaking force and shaking moment balancing of the rrs'r spatial linkage, *Mechanism and Machine Theory*, 22(1):39–45, 1987a.

Y.-Q. YU, Research on complete shaking force and shaking moment balancing of spatial linkages, *Mechanism and Machine Theory*, 22(1):27–37, 1987b.

# Annexe A

## Résumé des CCD et des familles de solution

Cette annexe permet de regrouper en un même endroit les différentes contraintes de compensation dynamique (CCD) applicables aux mécanismes à quatre barres ainsi que les familles de solutions, qui simplifient  $Y_1$ , utilisées dans cette thèse.



## A.1 Contraintes de compensation dynamique (CCD)

Les CCD permettent de construire un mécanisme à quatre barres compensé dynamiquement. La compensation a été obtenue en contraignant les paramètres physiques à respecter certains rapports entre eux.

Un mécanisme compensé dynamiquement sera obtenu si toutes les contraintes d'une même colonne des tableaux A.1 ou A.2 sont respectées.

De plus, on doit respecter la définition qu'on a donné à certaines valeurs physiques pour avoir un mécanisme physiquement possible. Sachant que les masses et les longueurs des membrures ont été définies semi-positives, il faut avoir les  $m_i$  et  $l_i$  plus grands que zéro.

Les champs libres dans le tableau indiquent les variables libres. Finalement, les — indiquent que la variable ne s'applique pas pour ces CCD.

Il est à noter que si on simplifie les différentes variables de  $M_4B-Y_{CS_i}$ , on se retrouve avec les mêmes contraintes que pour  $M_4B-G$ , c'est pourquoi dans le tableau A.2 les CCD  $M_4B-G$  et  $M_4B-Y_{CS_i}$  sont regroupées dans la même colonne.

## A.2 Familles de solutions simplifiant $Y_1$

Dans cette section on a regroupé les différentes familles de solutions qui permettent de simplifier la variable  $Y_1$  (Eq :4.34).

Dans le tableau A.3, les familles de solutions qui permettent la transformation de  $Y_1$  en un carré parfait ( $Y1-CP_1$  et  $Y1-CP_2$ ) seront présentées ainsi que la famille de solution qui permet de faire sortir un  $C_1$  du radical ( $Y1-CS_i$ ).

TAB. A.1 – Tableau regroupant les numéros des équations des CCD.

Variables	$M_4B-G$	$M_4B-Y_{CP_1}$	$M_4B-Y_{CP_2}$	$M_4B-Y_{CS_i}$
Figure	4.2	5.3	5.3	—
$m_1$				
$m_2$				
$m_3$				
$\psi_1$	(4.83)	(5.110)	(5.143)	(4.83)
$\psi_2$	(4.80)	(5.106)	(5.140)	(4.80)
$\psi_3$	(4.74)	(5.104)	(4.4)	(4.74)
$r_1$				
$r_2$	(4.85)	(5.111)	(5.144)	(4.85)
$r_3$	(4.73)	(5.103)	(4.2)	(4.73)
$k_1$			(5.136)	
$k_2$	(4.77)	(5.112)		(4.77)
$k_3$	(4.78)	(5.113)	(5.137)	(4.78)
$l_1$				
$l_2$		(5.37)	(5.39)	
$l_3$	(4.76)	(5.38)	(5.39)	(5.61)
$d$	(4.75)			(4.75)
$Y_1$	(4.34)	(5.36)	(5.36)	(5.64)
$\epsilon$	$\pm 1$	-1	1	$\pm 1$
$\xi$	—	—	—	(5.175)
$\zeta$	—	—	—	$\pm 1$

TAB. A.2 – Regroupement des différents ensembles de CCD lorsque les simplifications ont été appliquées. Note : Les variables  $\xi$  et  $\zeta$  ne font pas parties des CCD puisque lors de la simplification elles sont multipliées par zéro ce qui les fait disparaître.

	$M4B-Y_{CP_1}$	$M4B-Y_{CP_2}$	$M4B-G$ et $M4B-Y_{CS_i}$
$m_1$			
$m_2$			
$m_3$			
$\psi_1$	$(2n + 1) \pi$	$(2n + 1) \pi$	$2n\pi$
$\psi_2$	$2n\pi$	$(2n + 1) \pi$	$2n\pi$
$\psi_3$	$\pi + \psi_2$	$\pi + \psi_2$	$\pi + \psi_2$
$r_1$			
$r_2$	$l_2 \left( 1 - \frac{m_1 r_1}{l_1 m_2} \right)$	$-l_1 + \frac{m_1 r_1}{m_2}$	$\frac{l_2(l_1 m_2 + m_1 r_1)}{l_1 m_2}$
$r_3$	$\frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2}$	$\frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2}$	$\frac{m_2 r_2 l_3}{m_3 l_2}$
$k_1$		$\sqrt{\frac{I_2 - m_1 r_1 (r_1 + l_1)}{m_1}}$	
$k_2$	$\sqrt{\frac{m_2 (l_2 r_2 - r_2^2) - I_1}{m_2}}$		$\sqrt{\frac{m_2 r_2 (l_2 \cos \psi_2 - r_2) - I_1}{m_2}}$
$k_3$	$\sqrt{\frac{I_1 - m_3 (l_3 r_3 + r_3^2)}{m_3}}$	$\sqrt{\frac{-I_1 - m_3 r_3 (r_3 + l_3 \cos \psi_2)}{m_3}}$	$\sqrt{\frac{m_3 r_3 (l_3 \cos \psi_3 - r_3) - I_1}{m_3}}$
$l_1$			
$l_2$	$l_2 = d$	$l_2 = l_1$	
$l_3$	$l_3 = l_1$	$l_3 = d$	$l_3 = l_2$
$d$			$d = l_1$
$Y_1$	$2\epsilon  C_1^2 - \lambda_1^2 $	$2\epsilon  C_1^2 - \lambda_1^2 $	
$\epsilon$	-1	1	$\pm 1$

TAB. A.3 – Regroupement familles de solutions pour  $Y_1$ .

$Y_1 = 2\epsilon  C_1^2 - \lambda_1^2 $				$Y_1 = 2  C_1 + \xi\lambda_1  Y_{1,cs}$ $Y_{1,cs} = \epsilon\sqrt{C_1^2 + g_1 C_1 + g_0}$	
$Y1-CP_1$		$Y1-CP_2$		$Y1-CS_i$	
Eq :	Contraintes	Eq :	Contraintes	Eq :	Contraintes
(5.26)	$l_2 = d$	(5.31)	$l_2 = l_1$	(5.57)	$e_0 = 4$
(5.27)	$l_3 = l_1$	(5.32)	$l_3 = d$	(5.58)	$a_0 = \xi\lambda_1$
(5.28)	$a_0 = -2\Lambda_1$	(5.33)	$a_0 = -2\Lambda_1$	(5.59)	$g_0 = [\Lambda_2(1 + \Lambda_1) - \Delta_1^2]$
(5.29)	$a_1 = 0$	(5.34)	$a_1 = 0$	(5.60)	$g_1 = \frac{-(g_0 + \Lambda_1)}{a_0}$
(5.30)	$a_2 = 2$	(5.35)	$a_2 = 2$	(5.61)	$\Lambda_3 = (\xi + \lambda_1)^2 + \lambda_2[\lambda_2 + 2\zeta(1 + \xi\lambda_1)]$
				(5.62)	$\zeta = \pm 1$
				(5.63)	$\xi = \pm 1$

# Annexe B

## Définition de l'opérateur $\boxtimes$

Lors de l'écriture des équations, il est possible de vouloir écrire les équations sous forme vectorielle. Mais tous les opérateurs ne sont pas définis pour des vecteurs qu'on représente en 2D. On peut penser au produit vectoriel pour donner un exemple.

On peut donc se demander, pourquoi vouloir écrire les équations sous forme vectorielle dans un espace à deux dimensions? Il peut y avoir plusieurs raisons : en écrivant les équations sous forme vectorielle pour un domaine en 2D, l'extension de ces équations au 3D ce fera tout naturellement; l'écriture des équations directement en 3D introduit une quantité non négligeable de paramètres qui devront être nuls ainsi cela fait beaucoup de termes superflus à traiter analytiquement.

Ces raisons ont donc amené à introduire un nouvel opérateur, car des auteurs Sinatra et Angeles [1995] avaient déjà introduit un opérateur qui permettait certaines

manipulations sur des vecteurs en 2D mais on a étendu les possibilités de cet opérateur pour avoir plus de fonctionnalité. On définit le nouvel opérateur, noté  $\boxtimes$ , comme suit :

$$A \boxtimes \mathbf{B} = \forall A = [a_1] \in \mathbb{R}^1, \mathbf{B} = [b_1, b_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \boxtimes \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid A \boxtimes \mathbf{B} = [-a_1 b_2, a_1 b_1] \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B} = \forall \mathbf{A} = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2, \mathbf{B} = [b_1, b_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \boxtimes \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mid \mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (\text{B.2})$$

La première définition fournit la définition permettant la multiplication d'une valeur scalaire représentant en fait le module d'un vecteur défini perpendiculairement au plan de travail par un vecteur.

On peut vouloir faire une telle chose lorsque que l'on veut multiplier une vitesse angulaire par un vecteur pour obtenir l'effet d'un repère en mouvement.

Si on prend un exemple en 3D. On sait que

$$[\dot{\mathbf{p}}]_{\mathcal{R}_2} = ]\dot{\mathbf{p}}[ + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = [-\dot{\theta}y, \dot{\theta}x, 0]^T \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\mathbf{p} = [x, y, z]^T \quad (\text{B.4})$$

où  $] \dot{\mathbf{p}} [$  désigne la dérivée par rapport au temps des composantes du vecteur  $\mathbf{p}$  et  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$  est le produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire du repère dans lequel on a exprimé le vecteur  $\mathbf{p}$  par le vecteur  $\mathbf{p}$  ainsi la vitesse angulaire du repère  $\mathcal{R}_2$  est donné par

$$\boldsymbol{\omega} = [0, 0, \dot{\theta}]^T \quad (\text{B.5})$$

On voit donc que plusieurs termes sont inutiles, c'est pourquoi on a introduit l'opérateur  $\boxtimes$  qui permet de réécrire cette équation sous la forme :

$$[\dot{\mathbf{r}}]_{\mathcal{R}_2} = ]\dot{\mathbf{r}}[ + \dot{\boldsymbol{\beta}} \boxtimes \mathbf{r} = [-\dot{\beta}y, \dot{\beta}x]^T \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\mathbf{r} = [x, y]^T \quad (\text{B.7})$$

où  $]\dot{\mathbf{r}}[$  désigne la dérivée par rapport au temps des composantes du vecteur  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\beta} \boxtimes \mathbf{r}$  est la vitesse angulaire du repère dans lequel on a exprimé le vecteur  $\mathbf{r}$  par le vecteur  $\mathbf{r}$  selon la définition B.1.

La deuxième définition permet la projection de deux vecteurs dans le plan dans la direction perpendiculaire au plan.

On peut vouloir faire une telle chose lorsque l'on veut trouver le moment généré par une force. On sait que le moment est perpendiculaire au plan d'action de la force et du vecteur reliant la force au point où l'on calcule le moment. Si on prend un exemple 3D. On sait que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = [0, 0, x f_x - y f_y]^T \quad (\text{B.8})$$

où

$$\mathbf{r} = [x, y, 0]^T \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{F} = [f_x, f_y, 0]^T \quad (\text{B.10})$$

Si on réécrit cette équation en 2D en utilisant l'opérateur  $\boxtimes$ , on obtient :

$$\mathbf{r} \boxtimes \mathbf{F} = x f_x - y f_y \quad (\text{B.11})$$

où

$$\mathbf{r} = [x, y]^T \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{F} = [f_x, f_y]^T \quad (\text{B.13})$$

## Annexe C

# Écriture des angles intermédiaires en fonction de $\theta_3$

Dans la section 4.2.1, les équations présentées permettaient d'écrire les angles intermédiaires en fonction de l'angle d'entrée qui est  $\theta_1$ . Par contre, dans certains cas il peut être utile d'écrire les angles décrivant le positionnement d'un mécanisme à quatre barres en fonction d'un autre angle que  $\theta_1$ . Dans cette section l'écriture des angles se fera donc en fonction de l'angle  $\theta_3$ .

La première étape étant la plus facile, il ne s'agit que d'isoler les fonctions trigonométriques  $\cos \theta_1$  et  $\sin \theta_1$  des équations (3.13) et (3.14), pour simplifier l'écriture, les équations ont été divisées par  $d$  ce qui permet d'utiliser la notation donnée aux



équations (4.25 et 4.26). Les équations seront donc les suivantes :

$$C_1 = C_3 - C_2 + 1 \quad (\text{C.1})$$

$$S_1 = S_3 - S_2 \quad (\text{C.2})$$

En utilisant l'identité trigonométrique  $C_i^2 + S_i^2 = \Lambda_i$  et les équations (C.1) et (C.2), on trouve la relation qui permet d'exprimer  $S_2$  en fonction de  $C_2$  et  $\theta_1$ . Cette équation se présente comme suit :

$$S_2 = \frac{\Delta_3 - C_2(1 + C_3) + C_3}{S_3} \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\Delta_3 = \frac{1 - \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}{2} \quad (\text{C.4})$$

où  $\Lambda_i$  est donné à l'équation (4.32).

Puisqu'on connaît maintenant la valeur de  $S_2$ , on peut obtenir la valeur de  $C_2$  à l'aide de l'identité trigonométrique  $C_i^2 + S_i^2 = \Lambda_i$  et de l'équation (C.3), ce qui donne :

$$C_2 = \frac{-B_1 + Y_3}{2B_2} \quad (\text{C.5})$$

avec

$$Y_3 = \epsilon \sqrt{B_1^2 - 4B_2B_0} \quad (\text{C.6})$$

$$B_2 = 2C_3 + \Lambda_3 + 1 \quad (\text{C.7})$$

$$B_1 = -2 [C_3^2 + (1 + \Delta_3)C_3 + \Delta_3] \quad (\text{C.8})$$

$$B_0 = (1 + \Lambda_2)C_3^2 + 2\Delta_3C_3 + \Delta_3^2 - \Lambda_2\Lambda_3 \quad (\text{C.9})$$

avec  $\epsilon$  provenant de l'équation (4.38)

La variable  $\epsilon$  permet de choisir le mode d'assemblage du mécanisme. Deux modes d'assemblage sont possibles pour un mécanisme à quatre barres (Fig. 4.1), c'est-à-dire, le mode concave ( $\epsilon = -1$ ) où  $\psi'_2 < 180^\circ$  et le mode convexe ( $\epsilon = 1$ ) où  $\psi'_2 \geq 180^\circ$ .  $\psi'_2$  est donné à la figure 3.1. Ces configurations du mécanisme sont appelées modes d'assemblage puisqu'il peut arriver que la seule façon de passer d'un mode à l'autre soit par le démantèlement du mécanisme.

Il peut être utile d'avoir la dérivée des variables intermédiaires en fonction du temps. Pour les obtenir, il suffit de dériver les équations (3.13) et (3.14) et d'isoler les variables

voulues, ce qui donne :

$$\dot{\theta}_1 = \frac{-(C_3 S_2 - C_2 S_3) \dot{\theta}_3}{C_2 S_1 - C_1 S_2} \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{(C_3 S_1 - C_1 S_3) \dot{\theta}_3}{C_2 S_1 - C_1 S_2} \quad (\text{C.11})$$

# Annexe D

## Coefficients de l'équation (7.57)

Il est à noter que l'on a donné seulement les coefficients différents de zéro.

$$a_{3020,1} = 4(-I_2 + I_3) \tag{D.1}$$

$$a_{3010,1} = 4(-I_2 + I_3) \tag{D.2}$$

$$a_{3000,1} = 2(1 - \lambda_4^2)(-I_2 + I_3) \tag{D.3}$$

$$a_{2030,1} = 4(-I_2 + I_3) \tag{D.4}$$

$$a_{2020,1} = 2(-I_2 + I_3) \tag{D.5}$$

$$a_{2111,1} = 4(-I_2 + I_3) \tag{D.6}$$

$$a_{2101,1} = 4(-I_2 + I_3) \tag{D.7}$$

$$a_{2010,1} = 2 \left[ (2 + \lambda_1^2 - \Delta_2)I_2 - (1 + \Delta_2)I_3 + \lambda_4^2(3I_2 - 2I_3) \right] \tag{D.8}$$

$$a_{2000,1} = 2 \left[ (1 + \lambda_1^2 - \Delta_2)I_2 - \Delta_2 I_3 + \lambda_4^2(3I_2 - 2I_3) \right] \quad (\text{D.9})$$

$$a_{1121,1} = 4(-I_2 + I_3) \quad (\text{D.10})$$

$$a_{1111,1} = 2(-I_2 + I_3) \quad (\text{D.11})$$

$$a_{1101,1} = 2 \left[ (\lambda_1^2 - \Delta_2)I_2 + (1 - \Delta_2)I_3 + \lambda_4^2(2I_2 - I_3) \right] \quad (\text{D.12})$$

$$a_{1030,1} = 2(I_2 - I_3) \quad (\text{D.13})$$

$$a_{1020,1} = 2 \left[ (1 + \lambda_4^2 - \Delta_2)I_2 - \Delta_2 I_3 + \lambda_1^2(3I_2 - 2I_3) \right] \quad (\text{D.14})$$

$$a_{1010,1} = 2(-2\lambda_1^2 + \lambda_4^2)(-I_2 + I_3) \quad (\text{D.15})$$

$$a_{1000,1} = 2 \left\{ \lambda_4^2 \left[ (-1 - \lambda_4^2 + \Delta_2)I_2 + \Delta_2 I_3 \right] + \lambda_1^2 \left[ I_2 - I_3 + \lambda_4^2(-2I_2 + I_3) \right] \right\} \quad (\text{D.16})$$

$$a_{0121,1} = 2(I_2 - I_3) \quad (\text{D.17})$$

$$a_{0111,1} = 2 \left[ (2 + \lambda_4^2 - \Delta_2)I_2 - (1 + \Delta_2)I_3 + \lambda_1^2(2I_2 - I_3) \right] \quad (\text{D.18})$$

$$a_{0101,1} = 2 \left[ (1 + \lambda_4^2 - \Delta_2)I_2 - \Delta_2 I_3 + \lambda_1^2(2I_2 - I_3) \right] \quad (\text{D.19})$$

$$a_{0030,1} = 2\lambda_1^2(I_2 - I_3) \quad (\text{D.20})$$

$$a_{0010,1} = 2\lambda_1^2 \left[ (-2 - \lambda_1^2 + \Delta_2)I_2 + (1 + \Delta_2)I_3 + \lambda_4^2(-2I_2 + I_3) \right] \quad (\text{D.21})$$

$$a_{0000,1} = 2\lambda_1^2 \left[ (-1 - \lambda_1^2 + \Delta_2)I_2 + \Delta_2 I_3 + \lambda_4^2(-2I_2 + I_3) \right] \quad (\text{D.22})$$

$$b_{1010,1} = -2I_1 - I_2 - I_3 \quad (\text{D.23})$$

$$b_{1000,1} = -2I_1 - I_2 - I_3 \quad (\text{D.24})$$

$$b_{0101,1} = -2I_1 - I_2 - I_3 \quad (\text{D.25})$$

$$b_{0010,1} = 2I_1 \quad (\text{D.26})$$

$$b_{0000,1} = (1 + \lambda_4^2)I_1 + \lambda_1^2(I_1 + I_2 + I_3) \quad (\text{D.27})$$