

SAMUEL BOUCHARD

**GÉOMÉTRIE DES ROBOTS PARALLÈLES ENTRAÎNÉS
PAR DES CÂBLES.**

Thèse présentée

à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en génie mécanique
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2008

Résumé

Un robot entraîné par des câbles est un type de manipulateur parallèle utilisant comme moyen de transmission des câbles reliant une base fixe à une plate-forme mobile. Le contrôle coordonné des longueurs et/ou des tensions dans les câbles permet de déplacer et d'appliquer des efforts à la plate-forme.

L'objectif de cette thèse est de développer des outils pour analyser, optimiser et étalonner la géométrie des robots à câbles. La géométrie est définie par les positions des points d'attache des câbles au bâti et à la plate-forme. Ces positions ont une grande importance sur différentes propriétés des mécanismes à l'étude. Durant toute la thèse, les câbles sont considérés comme droits et non fléchis. Une des premières étapes est de définir les conditions pour que cette approximation soit valide.

Par la suite, des outils mathématiques permettant d'analyser la cinématique sont développés. Une méthode permettant de quantifier la sensibilité cinématique de la pose de la plate-forme à l'actionnement est présentée. Ensuite, une méthode générale permettant de déterminer la capacité d'un mécanisme à générer un ensemble de torseurs donné est expliquée. Cette méthode considère une tension minimale et maximale admissible dans chaque câble et est valide pour les mécanismes ayant entre deux et six degrés de liberté de mouvement à la plate-forme, tant que le nombre de câbles est supérieur ou égal à ce nombre de degrés de liberté. Cette capacité est une des quatre conditions pour qu'un robot puisse effectuer une tâche à une pose donnée. Les trois autres sont énoncées et expliquées. Ceci permet de développer une méthode pour l'optimisation de la géométrie en regard d'une tâche. Des méthodes d'étalonnage permettant de déterminer les points d'attache de façon expérimentale sont aussi présentées.

Finalement, une application de robot à câbles permettant de numériser l'apparence 3D d'objets est décrite. Ce dernier chapitre présente l'application des outils théoriques développés précédemment, de même que quelques résultats expérimentaux.

Avant-propos

“I learned that I don’t exist. I am (and you are) a collection of cells that lurches around driven by various forces, and calls itself I. But there’s no central, indivisible thing that your identity goes with.”
—Paul Graham

En effet, j’ai appris durant ces dernières années et au fil de lectures passionnantes sur les réseaux que les propriétés d’un système dépendent principalement non pas des éléments le composant, mais surtout des connexions qui les relient. Ainsi, j’ai tapé tous les caractères de cette thèse mais les résultats sous-jacents sont le fruit de collaborations, discussions et inspirations de gens qui m’ont entouré durant et avant cette période.

Merci donc en premier lieu à Clément Gosselin. Il est un modèle de compétence et de qualités humaines. Je lui serai éternellement reconnaissant pour ses enseignements sur la robotique, mais aussi sur la façon de guider une équipe. Je me considère extrêmement choyé d’avoir pu faire partie de son laboratoire durant toutes ces années.

Merci aux professeurs Philippe Cardou, Denis Laurendeau et Meyer Nahon qui ont pris le temps d’évaluer mon travail consciencieusement. Je suis content que le stress de la soutenance ait été productif, considérant que des améliorations significatives ont été apportées à la thèse suite aux suggestions reçues.

Je remercie aussi chaleureusement tous les gens que j’ai côtoyés du laboratoire. Merci particulier à Boris, Simon et Thierry qui sont le ciment de l’édifice. Vous avez tour à tour fait la différence pour que mon projet avance rondement. Merci à la communauté des câbles avec qui j’ai souvent échangé ou collaboré : Marc Gouttefarde, Gabriel Côté,

Simon Perreault, Benoit Cantin, Régis Poulin, Martin Otis et Catherine Leclerc. Merci à ceux avec qui j'ai eu la chance de travailler dans le cadre de cours, de ma recherche ou de projets parallèles : Jean-Philippe Jobin, Vincent Duchaine, Pierre-Luc Richard, Amélie Jeanneau, Louis-Alexis Allen-Demers et Brian Moore.

Au départ, le robot à câbles que j'avais à concevoir devait être une composante du Large Adaptive Reflector, un projet de radiotélescope démesuré qui me motivait énormément. Durant le temps que ça a duré, j'ai eu beaucoup de plaisir à collaborer avec les gens de DRAO et de McGill, notamment Peter Dewdney, Dean Chalmers, Meyer Nahon (bis), François Deschênes, Casey Lambert et Gabriel Meunier.

Quand le projet du LAR est tombé à l'eau en cours de route, j'ai pu récupérer beaucoup de matériel grâce à une collaboration très stimulante avec des collègues de vision, que je remercie à leur tour : Philippe Lambert, Jean-Daniel Deschênes, Nicolas Martel-Brisson, Simon Perreault, Nathaniel Zoso et Patrick Hébert.

Sur une note plus personnelle, merci à Nicolas, Marie-Élise, Jean-Sébastien et leurs équipes. Votre appui et votre compréhension m'ont permis de développer d'autres aptitudes parallèlement à mon cheminement académique.

Merci évidemment à mes parents, Louis et Lisette. Je suis la somme de vos deux influences. Merci pour toutes les opportunités que vous avez rendues possibles grâce à vos efforts et à vos choix.

Merci aussi à ma blonde Anick pour avoir couru à mes côtés durant ce marathon. Sa bonne humeur m'a aidé à garder l'équilibre durant cette période. Merci au petit nouveau, Léo, qui a été la meilleure motivation pour le dernier droit.

Je remercie finalement le FQRNT pour l'appui financier.

*En hommage à mon grand-père Gérard Beaulieu et à tous les autres
qui, comme lui, avaient certainement tout ce qu'il fallait pour faire
ce travail mieux que moi, mais qui n'en ont jamais eu la chance.*

Table des matières

Résumé	i
Avant-propos	iii
Table des matières	vi
Liste des tableaux	x
Liste des figures	xii
Convention de notation	xvi
1 Introduction	1
1.1 Robots entraînés par câbles	1
1.2 Objectifs et contributions de la thèse	11
2 Modèles cinématique et dynamique	14
2.1 Revue de la cinématique et de la dynamique pour des câbles rigides . .	15
2.1.1 Problème géométrique inverse	15
2.1.2 Équations de vitesse	16
2.1.3 Problème dynamique inverse	18
2.2 Étude du fléchissement	19
2.2.1 Câble élastique de masse non nulle	19
2.2.2 Condition pour le fléchissement	23
2.2.3 Surface de tension minimale	26
2.3 Résumé	30

3	Sensibilité cinématique	31
3.1	Pourquoi étudier la sensibilité cinématique des robots à câbles?	32
3.1.1	Revue des approches existantes	33
3.1.2	À propos du nombre de conditionnement	34
3.2	Indices de sensibilité cinématique	36
3.2.1	Représentation	40
3.2.1.1	Deux degrés de liberté ou moins	41
3.2.1.2	Trois degrés de liberté ou plus	43
3.3	Résumé	44
4	Capacité à générer un ensemble de torseurs donné	46
4.1	Définition du problème	47
4.2	Définition de l'ensemble des torseurs disponibles	49
4.2.1	Nature de l'ensemble	49
4.2.2	Cas particuliers	57
4.2.2.1	Tension minimale nulle, tension maximale indéfinie	62
4.2.2.2	Tension minimale nulle, tension maximale finie	64
4.2.2.3	Tension minimale non nulle, tension maximale finie	65
4.3	Construction de l'ensemble des torseurs disponibles	66
4.3.1	Méthode de l'enveloppe convexe	69
4.3.2	Méthode par translation des hyperplans	72
4.4	Relation avec l'ensemble des torseurs de la tâche	76
4.4.1	Point	76
4.4.2	Polytope convexe	77
4.4.3	Ellipsoïde	78
4.5	Résumé	80
5	Optimisation de la géométrie pour une tâche donnée	83
5.1	Définition du problème	84
5.2	Conditions nécessaires permettant la réalisation d'une tâche.	85
5.2.1	Espace de génération des torseurs	87
5.2.2	Espace libre d'interférence entre les câbles	87
5.2.3	Espace libre d'interférence câbles plate-forme	96
5.2.3.1	Méthode de la surface triangularisée	97
5.2.3.2	Méthode des plans supporteurs	99
5.2.4	Espace des longueurs permises	102
5.3	Processus d'optimisation	102

5.3.1	Fonction à maximiser	102
5.3.2	Description de la géométrie	103
5.3.3	Algorithme utilisé	104
5.4	Résumé	110
6	Étalonnage de la géométrie	112
6.1	Revue de littérature et particularités des robots à câbles	113
6.2	Sources d'erreur dans le positionnement du robot	116
6.3	Étalonnage à l'aide de points fixes connus	119
6.3.1	Un câble à la fois	120
6.3.1.1	Méthode des mesures absolues aux enrouleurs	120
6.3.1.2	Méthode des mesures relatives aux enrouleurs	122
6.3.1.3	Méthode des triangles	123
6.3.2	Étalonnage simultané de tous les câbles, sans plate-forme	125
6.3.2.1	Méthode de l'intersection de sphères	125
6.3.2.2	Méthode des triangles	127
6.4	Étalonnage à l'aide d'une mesure externe de la pose	128
6.5	Résumé et choix de la méthode	131
7	Application : mécanisme pour l'acquisition de l'apparence 3D d'objets	133
7.0.1	Pourquoi un robot à câbles ?	134
7.0.2	Fonctionnement général	136
7.1	Optimisation de l'architecture	138
7.1.1	Espace idéal désiré	138
7.1.2	Ensemble des torseurs de la tâche	139
7.1.3	Contraintes sur les points d'attache	141
7.1.4	Espace désiré ajusté, modification de la plate-forme et trajectoire	143
7.1.5	Fonction objectif	147
7.1.6	Résultat de l'optimisation	148
7.2	Sensibilité cinématique	157
7.3	Étalonnage de la géométrie	158
7.3.1	Simulation	158
7.3.2	Étalonnage expérimental	166
7.3.2.1	Câbles un à un, méthode des longueurs relatives	166
7.3.2.2	Méthode de la mesure externe de la pose	166
7.4	Résultats et discussion	168
7.4.1	Stabilité de la plate-forme	168

7.4.2	Répétabilité sur le positionnement du robot	170
7.4.3	Modèles numérisés	171
7.4.4	Résumé et améliorations possibles	173
8	Conclusion	175
8.1	Résumé des contributions	176
8.2	Pistes de travaux futurs	178
	Bibliographie	181
A	Liste des extensions multimédia sur le CD d'accompagnement.	195
B	Procédure Matlab pour définir un zonotope avec la méthode par translation des hyper-plans.	197
C	Équation analytique du point d'intersection entre trois sphères.	229

Liste des tableaux

1.1	Résumé des mécanismes à câbles utilisés en mode suspendu, construits et présentés dans la littérature.	6
1.2	Résumé des mécanismes à câbles utilisés en mode pleinement contraint, construits et présentés dans la littérature.	9
4.1	Classification des travaux dans la littérature sur la capacité d'un mécanisme à câble à générer des efforts.	62
4.2	Valeurs numériques utilisées dans différentes figures et extensions du présent chapitre.	81
6.1	Information utilisée par les différentes méthodes d'étalonnage présentées dans ce chapitre.	119
7.1	Positions des œillets situés à la sortie des poulies fixes et considérés comme les points d'attache à la base. Ces positions sont mesurées à l'aide d'un théodolite.	142
7.2	Points d'attache à la plate-forme de l'architecture optimisée.	150
7.3	Valeur de la fonction à maximiser pour les deux mécanismes comparés .	151
7.4	Points d'attache de l'architecture 3-3 comparée.	156
7.5	Points de mesures donnés par le théodolite.	160
7.6	Différence entre les positions mesurées avec le théodolite et celles obtenues avec l'étalonnage par la méthode des longueurs relatives.	166
7.7	Différence entre les positions mesurées par théodolites et celles obtenues avec l'étalonnage par photogrammétrie.	168

7.8	Dimension des objets et paramètres de l'acquisition	171
-----	---	-----

Liste des figures

1.1	Le chariot d'Héron	2
1.2	Schémas de mécanismes parallèles entraînés par câbles.	3
1.3	NIST Robocrane	4
1.4	Le robot Falcon	4
2.1	Notation utilisée pour décrire la cinématique.	15
2.2	Profil d'un câble fléchi, suspendu entre deux points fixes à différentes hauteurs.	20
2.3	Segment du câble et forces qui s'y appliquent.	21
2.4	Raideur en fonction de la tension pour différents angles avec l'horizontale.	27
2.5	Profil d'un câble et distribution de la raideur à son extrémité pour différentes tensions	28
2.6	Exemple de surface de tension minimale.	29
3.1	Illustration à 2-ddl de la transformation provoquée par \mathbf{J}	35
3.2	Indices de sensibilité cinématique tracés sur un espace à deux dimensions.	41
3.3	Mécanisme pour lequel les indices de sensibilité cinématique sont donnés en exemple dans ce chapitre.	42
3.4	Représentation des indices de sensibilité cinématique sur un espace donné décrit par un nombre de degrés de liberté supérieur à deux.	44
4.1	Mécanisme plan $n = 3$, $d = 2$ avec son ensemble des torseurs disponibles et des exemples d'ensemble des torseurs de la tâche.	50
4.2	Exemple de somme de Minkowski de deux ensembles A et B	52

4.3	Somme de Minkowski de quatre segments de droite.	53
4.4	Illustration des étapes de la construction mathématique du zonotope des torseurs disponibles pour $n = 3$ et $d = 2$	55
4.5	Illustration des étapes de la construction mathématique du zonotope des torseurs disponibles pour $n = d = 3$	56
4.6	Mécanisme $n = 3, d = 2$ à trois poses avec zonotopes de bases corres- pondant.	58
4.7	Mécanisme $n = 5, d = 2$ à trois poses avec zonotopes de bases corres- pondant.	59
4.8	Mécanisme $n = 4, d = 3$ à trois poses avec zonotopes de base correspon- dant.	60
4.9	Mécanisme $n = 6, d = 3$ à trois poses avec zonotopes de base correspon- dant.	61
4.10	Zones ceinturant un zonotope	62
4.11	Pose polyvalente près d'une limite du zonotope.	64
4.12	Vecteurs normaux à des hyperplan délimitant un polytope convexe. . .	68
4.13	Identification des sommets d'un zonotope	71
4.14	Translation de quatre hyperplans pour un mécanisme $d = 2, n = 4$	73
4.15	L'intersection de tous les mi-espaces délimités par les hyperplans sup- porteurs forment le zonotope.	74
4.16	Exemple d'ensembles des torseurs de la tâche pour différentes applications.	77
4.17	Exemple d'ellipse croisant une droite soutenant une face de l'espace des torseurs disponibles.	78
5.1	Deux câbles et la distance minimale les séparant.	88
5.2	Illustration des conditions nécessaires pour que la distance entre deux câbles soit insuffisante.	90
5.3	Croisement d'une zone où la distance minimale n'est pas respectée. . .	91
5.4	Interférence entre un segment et un rectangle.	92
5.5	Croisement d'une zone où la distance minimale n'est pas respectée. . .	94
5.6	Deux poses successives où la distance est respectée.	95
5.7	Croisement de câbles entre deux poses testées considérant une distance minimale entre les câbles nulle.	96
5.8	Intersection entre un segment et un triangle à la surface de la plate-forme.	97
5.9	Méthode des plans supporteurs pour vérifier l'interférence entre un câble et la plate-forme dont V_{pf} est de géométrie courbe et convexe.	100

5.10	Méthode des plans supporteurs lorsque le point d'attache est sur une arête.	101
5.11	Méthode des plans supporteurs lorsque le point d'attache est sur un sommet.	101
5.12	Illustration de l'utilisation des paramètres géométriques pour obtenir les points d'attache.	105
5.13	Algorithme utilisé pour l'optimisation.	109
5.14	Méthode de recombinaison des gènes conservant leur locus.	110
6.1	Chaîne de propagation de l'erreur dans le contrôle en position.	116
6.2	Étalonnage à l'aide de points fixes connus.	121
6.3	Triangle dont les sommets sont un point recherché et deux points connus.	123
6.4	Ensemble des triangles dont un des sommet est le point d'attache et les deux autres sommets des couples de points connus.	126
6.5	Repères impliqués dans l'étalonnage par mesure directe de la pose.	129
7.1	Le robot à câbles déplaçant une caméra utilisée pour capter des images d'un objet de plusieurs points de vue.	135
7.2	Les différents aspects du numériseur à câbles.	136
7.3	Code matriciel	138
7.4	Espace idéal désiré autour de l'objet.	140
7.5	Repère utilisé attaché à la plate-forme.	141
7.6	Paramètres géométriques utilisés dans l'optimisation du numériseur.	142
7.7	Interférence câbles plate-forme pour la trajectoire idéale.	143
7.8	Portion de la trajectoire modifiée.	145
7.9	Dispositif de rotation passive de la caméra sur la plate-forme.	146
7.10	Portion de la trajectoire effectuée par le robot durant une acquisition.	146
7.11	Élément de surface sur une sphère.	148
7.12	Portion de la surface de tension minimale utilisée dans l'espace désiré considéré dans l'optimisation.	149
7.13	Architecture issue de l'optimisation de la géométrie pour l'application du numériseur.	150
7.14	Distance minimale à la surface de tension minimale et espace atteignable en regard de la tâche. Architecture optimisée, $r = 2$ m.	152
7.15	Distance minimale à la surface de tension minimale et espace atteignable en regard de la tâche. Architecture 3-3, $r = 2$ m.	153
7.16	Distance minimale à la surface de tension minimale et espace atteignable en regard de la tâche. Architecture optimisée, $r = 1$ m.	154

7.17	Plate-forme qui s'incline.	155
7.18	Architecture 3-3	157
7.19	Sensibilité cinématique en orientation et en translation pour l'architecture optimisée.	158
7.20	Points de mesures pour l'étalonnage.	160
7.21	Résultats de la simulation, méthode de la section 6.3.1.1	161
7.22	Résultats de la simulation, méthode de la section 6.3.1.2	162
7.23	Résultats de la simulation, méthode de la section 6.3.1.3	163
7.24	Résultats de la simulation, méthode de la section 6.3.2.1	164
7.25	Résultats de la simulation, méthode de la section 6.3.2.2	165
7.26	Variation de la position de la cible après la fin d'une commande de déplacement de la plate-forme.	169
7.27	Histogrammes de répétabilité	170
7.28	Résultats de la modélisation de l'apparence	172
7.28	Résultats de la modélisation de l'apparence (suite)	173

Convention de notation

Type	Exemple	Utilisation
Lettre minuscule	a	Variable réelle
Lettre majuscule	A	Ensemble
Lettre calligraphique avec suffixe	\mathcal{R}_x	Repère
Lettre minuscule en gras sans préfixe	\mathbf{a}	Vecteur dans le repère fixe
Lettre minuscule en gras avec préfixe	${}^x\mathbf{a}$	Vecteur dans le repère \mathcal{R}_x
Lettre majuscule en gras	\mathbf{A}	Matrice
Variable avec un accent circonflexe	$\hat{\rho}$	Variable estimée
Variable avec un accent circonflexe inversé	$\check{\rho}$	Variable mesurée
Lettre Q en gras avec préfixe et suffixe	${}^x\mathbf{Q}_y$	Matrice de rotation entre \mathcal{R}_y et \mathcal{R}_x
Lettre T en gras avec préfixe et suffixe	${}^x\mathbf{T}_y$	Transformation rigide entre les repères \mathcal{R}_y et \mathcal{R}_x
Variable avec suffixe i	ρ_i	Attribut du câble i
Variable avec suffixe $i j$	$\rho_{i j}$	Attribut du câble i à la pose j

Chapitre 1

Introduction

“I can't define a robot, but I know when I see one.”

—Joseph Engelberger

1.1 Robots entraînés par câbles

Dans sa plus simple expression, un robot est une machine programmable. Ce n'est que récemment que les avancées en électronique puis en informatique ont permis un raffinement de la programmation des robots. Avant l'avènement de ces techniques, des inventeurs ingénieux réussissaient quand même à programmer des machines, mais mécaniquement. Selon [1], un des plus vieux exemples est attribué à l'ingénieur grec Héron et date de l'an 60. La Fig. 1.1 présente un modèle de cet automate qui était utilisé

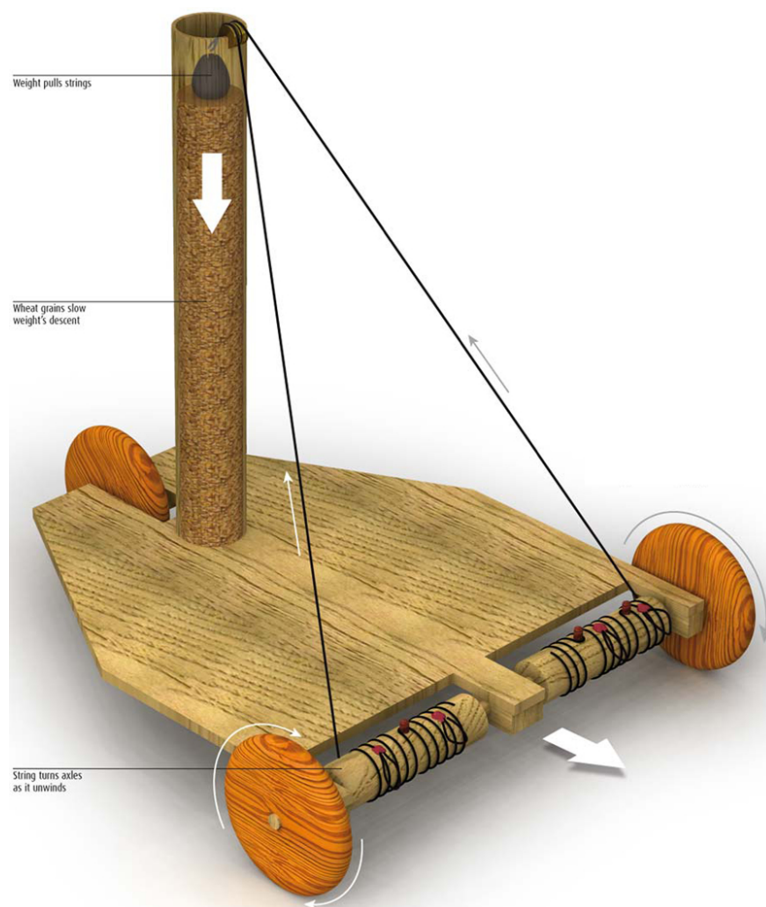


FIG. 1.1 – Le chariot d’Héron. Image tirée de [1]

au théâtre. Il s’agit d’un chariot à trois roues avec un mât central au bout duquel se trouvent deux poulies. Deux câbles qui suspendent une masse commune passent par ces poulies puis vont s’enrouler sur des essieux. Chacune des deux roues avant est liée à un essieu indépendant sur lequel des goujons sont placés. Ceux-ci permettent de changer la direction d’enroulement du câble sur l’essieu. Lorsque la masse est lâchée du haut du mât, les roues sont entraînées tantôt dans une direction, tantôt dans l’autre. L’action combinée des deux roues peut faire avancer, reculer et tourner le chariot.

L’utilisation de câbles pour entraîner une machine ne date donc pas d’hier. L’exemple du chariot d’Héro montre qu’un enroulement de câbles permet la programmation de mouvement de façon relativement simple. C’est la grande flexibilité des câbles qui a rendu son invention possible. Encore aujourd’hui, c’est précisément cette particularité des câbles qui est mise à profit pour les robots qui en utilisent pour leur entraînement mécanique.

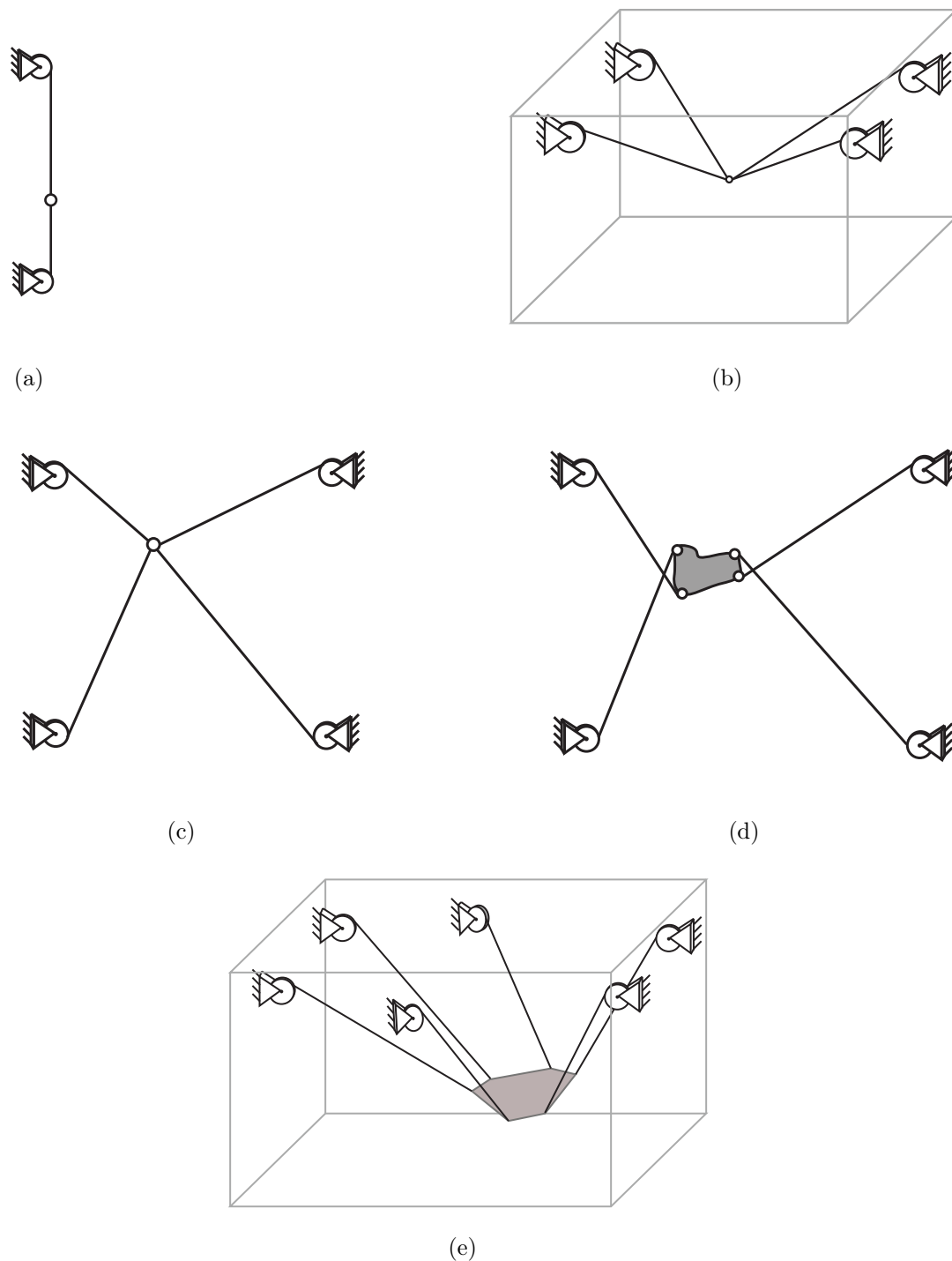


FIG. 1.2 – Schémas de mécanismes parallèles entraînés par câbles : Un degrés de liberté en position et deux câbles (a), trois degrés de liberté en position et quatre câbles (b), deux degrés de liberté en position et quatre câbles (c), trois degrés de liberté (deux en position, un en rotation) et quatre câbles (d), six degrés de liberté (trois en position et trois en rotation) et six câbles (e).



FIG. 1.3 – Une des version du NIST Robocrane, un des premiers robots suspendus entraîné par câble.

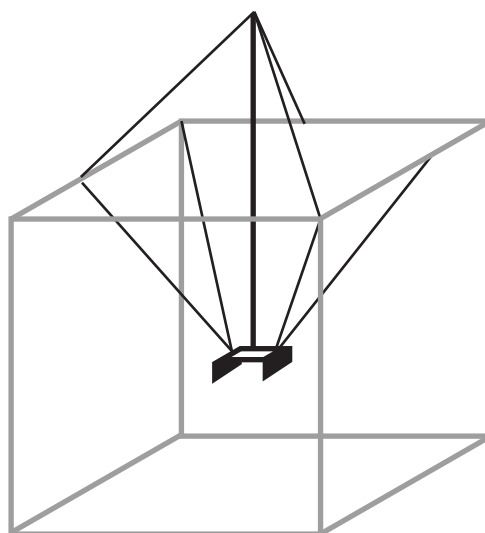


FIG. 1.4 – Schéma du robot Falcon, un des premiers robots à câbles pleinement contraint.

Il existe plusieurs types de robots entraînés par câbles présentant des caractéristiques et des problématiques différentes. Cette thèse traite des manipulateurs parallèles entraînés par câbles. Des schémas de différentes architectures sont montrées à la figure 1.2. Ces mécanismes permettent de déplacer, orienter ou appliquer des forces sur une plate-forme dans l'espace. Des moteurs équipés de poulies sont fixés sur une base. Sur ces poulies s'enroulent des câbles qui relient la base à la plate-forme mobile. En contrôlant l'enroulement des câbles de manière coordonnée, on impose le mouvement ou l'effort désiré à la plate-forme. Il existe deux modes d'opération des manipulateurs parallèles entraînés par câbles, décrits ci-dessous.

1. Mode suspendu

Un exemple de ce mode d'opération est montré à la figure 1.3. Dans ce mode, le robot ne peut générer des efforts que dans certaines directions. La gravité joue alors un rôle prédominant dans son fonctionnement car c'est elle qui garde les câbles en tension. Ce mode est possible pour des robots possédant plus ou autant de câbles que de degrés de liberté de mouvement à la plate-forme. Dans ce mode, les câbles ne peuvent pas créer de tension interne en travaillant les uns contre les autres.

2. Mode pleinement contraint

Un robot en mode pleinement contraint est dans une configuration polyvalente [2], où il peut générer des efforts dans toutes les directions. Un exemple est montré à la figure 1.4. Pour qu'un robot à n degrés de liberté se retrouve dans ce mode, une condition nécessaire mais non suffisante est qu'il possède au moins $n + 1$ câbles [3]. Dans l'espace des poses polyvalentes, les câbles peuvent travailler les uns contre les autres et les tensions doivent donc être gérées en plus des longueurs de câbles dans le contrôle.

Cette thèse présente des outils pouvant servir à l'analyse, l'optimisation et l'étalonnage de robots entraînés par câbles sans regard au mode d'opération. Il faut noter que de par leur architecture, certains mécanismes ne peuvent dans aucune configuration se retrouver dans le mode pleinement contraint. Par contre, tous les mécanismes peuvent se trouver en mode suspendu dans un ensemble de poses.

Le tableau 1.1 rassemble plusieurs robots parallèles à câbles utilisés en mode suspendu qui ont été construits, présentés dans la littérature ou disponibles commercialement. Le tableau 1.2 remplit la même fonction pour les robots utilisés en mode pleinement contraint. Dans les deux tableaux, les mécanismes sont rassemblés en grands types de tâche : déplacer un capteur, servir d'interface haptique, manipuler des objets

ou mesurer des positions. Il ne s'agit pas d'une revue de littérature de tout ce qui a été publié au sujet des robots à câbles, mais bien des publications présentant des réalisations physiques de robots de ce type. Plusieurs autres applications ont été suggérées par le passé, sans être réalisées. Notez que les manipulateurs comprenant des câbles et des membrures rigides travaillant en parallèle [4, 5, 6, 7] et ceux dont les treuils sont sur des robots mobiles [8, 9, 10] ont été omis. Les mains et les bras entraînés avec des tendons (voir [11]) ne sont pas inclus dans la liste non plus. Ces robots ne sont d'ailleurs pas abordés dans cette thèse.

TAB. 1.1: Résumé des mécanismes à câbles utilisés en mode suspendu, construits et présentés dans la littérature.

Identification	Référence	Description
Capteurs		
CableCam	[12]	Déplacer une caméra vidéo pour le cinéma et la télévision.
Carlina	[13]	Prototype fonctionnel d'hypertélescope optique, mécanisme gardé en tension par un ballon à l'hélium.
FAST	[14, 15, 16, 17]	Déplacer le récepteur d'un radiotélescope géant couvrant le creux d'une vallée.
Numériseur U-Laval	[18]	Déplacer et stabiliser une caméra photo pour faire l'acquisition de l'apparence d'objets de tailles diverses. Voir chapitre 7 de la thèse.
LAR	[19, 20, 21, 22, 23, 24]	Concept de radiotélescope géant avec treuils au sol. Les câbles servent à positionner le récepteur radio. Mécanisme tenu en tension par un ballon à l'hélium.
NIMS	[25, 26]	Système transportable. Tous les treuils sont dans une boîte et sont routés par des poulies sur des tours. Sert à déplacer un capteur dans un contexte de recherche en biologie environnementale.

Simulation UAV Australie	[27]	Tester le contrôle de véhicules aériens autonomes en embarquant les capteurs sur la plate-forme et en simulant la dynamique.
SkyCam	[28, 29]	Déplacer une caméra vidéo dans les amphithéâtres sportifs.
SpyderCam	[30]	Déplacer une caméra vidéo pour le cinéma et la télévision.
Target-Suspension System	[31]	Suspendre et orienter une cible pour tester des antennes radar.
U-Penn 6-DOF	[32]	Prototype à 6-ddl utilisé pour la recherche et la coordination d'agents mobiles au sol.
Haptique		
WireMan	[33, 34]	Sac à dos contenant les actionneur pour trois câbles. L'autre extrémité des câbles est fixée à un doigt de la personne pour simuler des forces.
Manipulation		
Cable Array Robot	[35, 36]	Prototype à trois ou quatre câbles pour le déplacement d'objets de tailles différentes dans l'espace.
CABLEV	[37, 38]	Prototype avec trois câbles de longueurs fixes. Des chariots sur des rails déplacent les attaches pour bouger l'effecteur.
Cassino rescue prototype	[39]	Prototype 3-ddl spatial à quatre câbles pour l'étude d'application de recherche et sauvetage après sinistre.
Disaster search and rescue	[40]	Prototype à 3-ddl spatial et 3 câbles pour des applications de recherche et sauvetage après un tremblement de terre.
Manipulateur suspendu d'Osumi	[41]	Plate-forme à trois câbles servant de base mobile à un manipulateur sériel. La base du robot à câbles est elle-même sur un pont roulant.

NIST Robocrane / Manipulation	[42, 43, 44, 45, 46]	Grue robotisée dont plusieurs versions ont été réalisées : manutention d'objets dangereux, plate-forme pour déplacer des travailleurs autour d'un bateau dans un chantier maritime ou d'un avion dans un hangar, grue transportable pour construction de route, déplacer un manipulateur sériel pour manipuler des déchets radioactifs, charger des conteneurs sur un bateau.
PRS	[47, 48]	Prototype de mécanisme avec 3 câbles de longueurs constantes se déplaçant sur des rails.
U. of Delaware 6-DOF	[49, 50, 51, 52]	Prototype à 6-ddl et six câbles pour la recherche.
U. of Ohio	[53]	Prototype, deux paires de câbles qui se déplacent sur deux chariots et dont les longueurs peuvent être modifiées.
Métrologie		
CATRASYs	[54]	Capteur de pose à 6 axes et 6 câbles contrôlés en tension.
Coordinate measuring machine	[55]	Capteur de pose à 6 axes et 6 câbles contrôlés en tension.
Wire-tracker	[56]	Capteur de pose à 6 axes utilisant trois câbles contrôlés en tension et une base qui peut tourner sur elle-même.
NIST Robocrane / Métrologie	[57]	Capteur de pose à 6 axes et 6 câbles contrôlés en tension.

TAB. 1.2: Résumé des mécanismes à câbles utilisés en mode pleinement contraint, construits et présentés dans la littérature.

Identification	Référence	Description
Haptique		
Cable Direct Drive Robot	[58, 59]	Palonnier à 3-ddl dans le plan entraîné par quatre câbles.
Feriba-3	[60]	Mécanisme haptique 3-ddl plan à quatre câbles.
Palonnier 6-ddl de Takeda	[61]	Interface haptique permettant un retour d'effort.
Maître Kawamura	[3]	Robot maître à sept câbles pour téléopération.
Maître NASA	[62]	Robot maître à neuf câbles pour téléopération.
Neli	[63, 64, 65]	Prototypes plan et spatial pour éventuellement arriver à simuler les sensations de la marche sur un sol quelconque pour une utilisateur embarqué.
Simulateur de vol de Tadokoro	[66]	Base mobile à 6-ddl, prototype pour une interface de simulation de mouvement.
SPIDAR	[67, 68]	Dans un environnement de réalité virtuelle, rétroaction tactile 3-ddl à un doigt de l'utilisateur grâce à 4 câbles.
SPIDAR-G	[69]	Mécanisme 6-ddl avec 7 câbles pour retour d'effort sur une sphère tenue par un utilisateur.
SPIDAR-G&G	[70]	Deux mécanismes haptiques à 6-ddl, un par main, pour permettre la manipulation à deux mains en réalité virtuelle.
Virtual Sports Training System	[71]	Mécanisme à quatre câbles pour simuler le lancer d'une balle.

Manipulation		
Charlotte	[72]	Plate-forme contenant les moteurs dont les câbles sortent pour s'accrocher à l'environnement. Conçu pour être utilisé dans la navette spatiale américaine.
Falcon	[73, 74]	Manipulation d'objet ultra-rapide.
SACSO	[75, 76]	Suspendre un avion dans une soufflerie et en contrôler l'attitude.
Robot en soufflerie de Zheng	[77]	Suspendre un avion dans une soufflerie et en contrôler l'attitude.
WARP	[78]	Manipulation d'objet ultra-rapide.
U. Laval Original	[79]	Prototype à 6-ddl et neuf câbles pour la recherche.
Marionet	[80]	Prototype à sept câbles pour la manipulation d'objet en 6-ddl utilisant des actionneurs linéaires.
U. of Delaware 3-DOF	[81, 82]	Prototype pour la recherche à 3-ddl dans le plan et quatre câbles.
SEGESTA	[83, 84, 85, 86, 87]	Prototype pour la manipulation d'objet.
Métrologie		
NIST Robocrane / Métrologie	[88]	Plate-forme à 7 câbles contrôlés en tension pour mesurer la pose de la plate-forme.

De façon générale, les robots à câbles présentent des caractéristiques qui peuvent être intéressantes pour plusieurs applications [89] :

1. Grands espaces de travail ;
2. Possibilité de s'adapter à plusieurs échelles ;
3. Facilement transportables et reconfigurables ;
4. Câbles peu visibles ;
5. Faible inertie ;
6. Faible coût.

Comme on le voit dans les deux tableaux résumant les mécanismes existants, selon l'application qu'on veut en faire, un type peut être plus approprié que l'autre. En effet, les caractéristiques 1, 2 et 3 sont surtout attribuées aux robots suspendus à câbles. C'est pour cette raison qu'ils ont été souvent présentés comme des architectures intéressantes pour des applications de manipulation ou de déplacement de capteurs sur de longues distances.

Pour les mécanismes pleinement contraints, c'est surtout la faible inertie qui présente un intérêt. Ceci permet de réaliser des mécanismes possédant une raideur intéressante et capables de générer d'importantes accélérations. Ces propriétés sont idéales pour réaliser des manipulateurs ultra-rapides, des simulateurs de vol, des interfaces haptiques ou d'immersion en réalité virtuelle.

Évidemment, les avantages conférés par les câbles apportent des inconvénients. Les défauts des mécanismes à câbles sont principalement leur sensibilité aux vibrations, leur faible précision et la difficulté de définir leurs espaces de travail.

Pour la suite du document, les expressions synonymes *robots à câbles* ou *mécanismes à câbles* référeront aux manipulateurs robotiques parallèles entraînés par des câbles.

1.2 Objectifs et contributions de la thèse

Comme on peut le constater selon le nombre de prototypes réalisés et la quantité de publications qui seront citées tout au long de cette thèse à leur propos, les robots à câbles ont passablement été étudiés. Le sujet n'est cependant pas épuisé et cette thèse vient ajouter quelques éléments nouveaux. L'objectif est ici de **présenter des outils d'analyse, de conception et d'étalonnage des robots à câbles qui serviront à tirer avantage de leurs caractéristiques uniques citées précédemment**. Plus particulièrement, ces outils ont été pensés dans un contexte de robot qui aurait à être reconfiguré ou transporté à l'occasion. Dans cette optique, on veut d'abord des méthodes qui s'utilisent de façon générale à différentes applications. On porte aussi une attention particulière aux calculs qu'elles requièrent afin de pouvoir les utiliser efficacement.

Le chapitre 2 résume les modèles connus pour décrire la cinématique et la dynamique des robots à câbles. Ces modèles sont utilisés pour la suite de la thèse. Dans la plupart des travaux sur les robots à câbles, on considère les câbles droits, sans fléchissement. La contribution de ce chapitre est de faire appel à l'équation de la caténaire élastique pour déterminer les conditions nécessaires afin de supposer un câble non fléchi. Cette approche permet de déterminer la tension minimale dans un câble pour le considérer comme non fléchi, ce qui est fait dans la suite de la thèse.

L'aspect étudié au chapitre suivant est la sensibilité cinématique des robots à câbles. Une méthode est présentée afin de quantifier la sensibilité de la position et de l'orientation de la plate-forme à l'actionnement. Cet aspect présente un intérêt pour ces mécanismes, considérant la grande disproportion entre la taille de leur base et celle de leur plate-forme mobile. Une nouvelle façon de quantifier la sensibilité cinématique afin d'en saisir la signification physique est présentée. Cette approche permet de comprendre dans quelle mesure l'actionnement influence la position ou l'orientation de la plate-forme.

Au chapitre 4, on présente une méthode pour déterminer l'ensemble des torseurs (forces et moments) qu'un mécanisme à câbles peut générer à une pose donnée, considérant une tension limite inférieure et supérieure dans chaque câble. L'approche, faisant appel au concept géométrique de zonotope, permet de décrire de façon élégante et générale l'ensemble des torseurs disponibles à la plate-forme. Elle s'applique autant aux robots pleinement contraints qu'aux robots suspendus. On démontre comment elle unifie plusieurs approches présentées dans la littérature s'appliquant chacune à des cas plus particuliers. Une méthode pour construire l'ensemble des torseurs disponibles de façon non itérative est présentée. La représentation obtenue sert à tester si l'ensemble des torseurs nécessaires à la tâche est un sous-ensemble de l'ensemble des torseurs disponibles.

Afin de profiter du fait que les mécanismes à câbles peuvent être facilement déployés et reconfigurés, une méthode pour optimiser leur géométrie en fonction d'une tâche donnée est présentée. Contrairement aux robots conventionnels avec des membrures rigides dont la géométrie ne sera optimisée qu'une seule fois, on peut imaginer qu'un robot à câbles puisse être optimisé régulièrement si son utilisation change ou s'il est transporté dans un lieu différent. La méthode considère donc l'espace des poses désirées, la capacité du mécanisme à générer les efforts nécessaires à la tâche dans cet espace,

de même que la nécessité d'éviter les interférences de câbles et de restreindre les points d'attache à une certaine plage pour arriver à une solution viable en pratique.

Pour profiter des mêmes avantages, il est intéressant de pouvoir déterminer la position des points d'attache des câbles d'un robot une fois qu'il est installé. En pratique, il peut être difficile de mesurer la position des points d'attache d'un robot, particulièrement ceux à la base qui seront en général très distancés. Ainsi, la question de l'étalonnage de la géométrie du robot est étudiée et plusieurs méthodes sont proposées.

Une fois les éléments plus théoriques présentés, on les applique à un prototype de robot à câbles automatisant l'acquisition de photographies pour modéliser l'apparence d'objets. Cette application, réalisée avec des collègues du Laboratoire de vision et de systèmes numériques, représente en soi un travail original qui est décrit dans le dernier chapitre de la thèse. Elle permet de numériser l'apparence 3D d'objets de tailles, de géométries et d'apparences variées. Cet exemple sert à illustrer la validité de chacun des outils présentés dans les chapitres précédents de la thèse et la possibilité d'utiliser un mécanisme à câbles pour cette application. Des résultats expérimentaux pour les méthodes d'étalonnage sont présentés et comparés.

La revue de littérature propre aux différents sujets sera effectuée à l'intérieur de chaque chapitre.

Chapitre 2

Modèles cinématique et dynamique

Dans ce chapitre, la cinématique et la dynamique des robots à câbles est d'abord revue. Un modèle de câble élastique avec une masse non nulle est ensuite présenté. Ce modèle est utilisé pour déterminer les conditions nécessaires pour que les câbles soient en régime tendu, sans fléchissement. Ces différents modèles sont réutilisés dans les autres chapitres de la thèse.

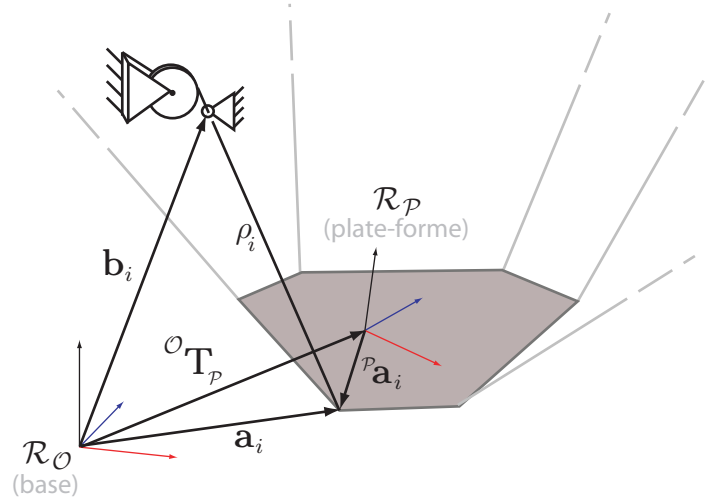


FIG. 2.1 – Notation utilisée pour décrire la cinématique.

2.1 Revue de la cinématique et de la dynamique pour des câbles rigides

2.1.1 Problème géométrique inverse

Les robots considérés dans ce travail sont composés de n câbles reliant une base à une plate-forme mobile se déplaçant dans d -ddl. Le problème géométrique inverse consiste à déterminer les longueurs de câbles (vecteur $\boldsymbol{\rho}$ à n éléments) à partir du vecteur à d éléments \mathbf{x} décrivant la pose de la plate-forme. L'actionnement des poulies sur lesquelles s'enroulent ces câbles permet de contrôler la pose de la plate-forme mobile. La pose est un vecteur \mathbf{x} décrivant en entier les degrés de liberté d'une plate-forme, la position d'un de ses points et/ou son orientation, selon le type de mouvement permis. La cinématique de ces robots est bien connue si les membrures sont considérées comme rigides car elle s'apparente à celle de la plate-forme de Gough-Stewart [90].

La notation suivante, illustrée dans la figure 2.1, est utilisée pour décrire la cinématique :

- \mathcal{R}_O est le repère fixe.
- \mathcal{R}_P est le repère associé à la plate-forme.
- ${}^P\mathbf{a}_i$ est la position du point d'attache du câble i sur la plate-forme, exprimée dans \mathcal{R}_P .

- \mathbf{b}_i est la position du point d'attache du câble i à la sortie de la poulie fixe exprimée dans \mathcal{R}_O .
- ${}^O\mathbf{T}_P$ est la transformation entre le repère \mathcal{R}_O et le repère \mathcal{R}_P

$${}^O\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} {}^O\mathbf{Q}_P & \mathbf{p}_P \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

tel que ${}^O\mathbf{Q}_P$ est la matrice de rotation entre \mathcal{R}_O et \mathcal{R}_P et \mathbf{p}_P est la position de la plate-forme, soit le vecteur reliant l'origine de \mathcal{R}_O à celle de \mathcal{R}_P . La pose d'un mécanisme \mathbf{x} est un vecteur contenant l'information pour décrire la transformation ${}^O\mathbf{T}_P$, soit \mathbf{p}_P et les angles permettant de définir ${}^O\mathbf{Q}_P$.

Le point d'attache du câble i sur la plate-forme, exprimé dans le repère fixe, est :

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{p}_P + {}^O\mathbf{Q}_P {}^P\mathbf{a}_i. \quad (2.2)$$

Le vecteur \mathbf{v}_i le long d'une liaison rigide relie les points d'attache :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i. \quad (2.3)$$

Le problème géométrique inverse consiste à déterminer ρ_i , le module du vecteur \mathbf{v}_i , qui correspond à la distance entre \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i :

$$\rho_i^2 = \|\mathbf{v}_i\|^2 \quad (2.4)$$

$$\rho_i = \sqrt{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i}. \quad (2.5)$$

Le vecteur unitaire donnant la direction entre les deux points d'attache est \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\rho_i}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Équations de vitesse

L'expression 2.5 peut être dérivée par rapport au temps afin d'obtenir une relation entre le vecteur des vitesses d'élongation des câbles $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ et la vitesse cartésienne de la plate-forme \mathbf{s} :

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (2.7)$$

où

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \cdots \rho_n]^T \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}[\rho_1 \cdots \rho_n] \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^T \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

On peut remanier l'équation de vitesse pour obtenir la forme

$$\mathbf{J}\mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.11)$$

où

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \quad (2.12)$$

est appelée la matrice jacobienne du mécanisme.

Selon le nombre de degrés de liberté et leur nature, le vecteur \mathbf{c}_i prendra différentes formes. Pour les mécanismes dont les degrés de libertés de la plate-forme sont tous en translation,

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_i. \quad (2.13)$$

La précédente équation est valide peu importe d . Le vecteur vitesse correspondant sera, respectivement pour un, deux et trois degrés de libertés en translation (ex. figure 1.2 a, b et c) :

$$\mathbf{s} = [\dot{x}], \quad (2.14)$$

$$\mathbf{s} = [\dot{x} \ \dot{y}]^T, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{s} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T. \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

Pour un mécanisme plan avec deux degrés de libertés en translation et un en rotation (ex. figure 1.2 d),

$$\mathbf{s} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \omega_z] \quad (2.18)$$

et

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{E} {}^O\mathbf{Q}_{\mathcal{P}} {}^{\mathcal{P}}\mathbf{a}_i \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

où

$${}^O\mathbf{Q}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Finalement, pour un mécanisme spatial à six degrés de liberté (ex. figure 1.2 e),

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ ({}^O\mathbf{Q}_P {}^P\mathbf{a}_i) \times \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

et

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T, \quad (2.23)$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_P^T & \boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.24)$$

$\boldsymbol{\omega}$ étant le vecteur de vitesse angulaire de la plate-forme.

2.1.3 Problème dynamique inverse

Ici, les câbles sont considérés droits, rigides et leur masse est négligée. Supposer une rectitude parfaite des câbles est acceptable dans des conditions qui sont énoncées plus tard dans ce chapitre. Utilisant le principe général de la dualité cinématique/statique [91], on développe une relation entre la tension nécessaire dans les câbles et un torseur à générer à la plate-forme.

La puissance transmise au système par les actionneurs, Π_a , est donnée par

$$\Pi_a = -\mathbf{t}^T \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.25)$$

où \mathbf{t} est le vecteur des tensions dans les câbles. Puisque les câbles sont sous tension, le signe $-$ signifie que la puissance est transmise au système par les actionneurs lorsque ceux-ci enroulent leurs câble respectifs. La puissance transmise par les câbles à la plate-forme, Π_p , est donnée par

$$\Pi_p = \mathbf{w}^T \mathbf{s}, \quad (2.26)$$

où \mathbf{w} est le vecteur représentant le torseur (vecteur de force et moment) à la plate-forme généré par les câbles. Considérant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, la puissance transmise par les actionneurs est entièrement transmise à la plate-forme :

$$\Pi_a = \Pi_p, \quad (2.27)$$

$$-\mathbf{t}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{w}^T \mathbf{s}. \quad (2.28)$$

Utilisant l'équation 2.7 avec la précédente, on obtient :

$$-\mathbf{t}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{w}^T \mathbf{s}, \quad (2.29)$$

$$-(\mathbf{t}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A})^T = (\mathbf{w}^T)^T, \quad (2.30)$$

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-T} \mathbf{t} = \mathbf{w}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{t} = \mathbf{w}. \quad (2.32)$$

La matrice \mathbf{W} est la matrice des torseurs unitaires dans les câbles. Sa i^{e} colonne est \mathbf{w}_i , le torseur que le i^{e} câble applique à la plate-forme pour une tension unitaire.

2.2 Étude du fléchissement

Un câble ne se comporte pas de la même manière s'il est fléchi par son propre poids et s'il ne l'est pas. Il s'agit de deux modes d'opérations différents. Certaines analyses (ex. [15, 24]) doivent considérer le fléchissement car les systèmes étudiés ont des câbles de plusieurs centaines de mètres. Cependant, la plupart des travaux portant sur les robots à câbles, incluant cette thèse, considèrent le second régime et les câbles y sont modélisés comme parfaitement droits. Cette approximation est largement rencontrée dans la littérature. Cependant, aucune ne présente les conditions nécessaires pour pouvoir négliger le fléchissement et modéliser les câbles comme des segments droits. Il s'agit de l'objectif de cette section.

2.2.1 Câble élastique de masse non nulle

Le modèle de câble élastique de masse non nulle présenté dans [93, 94] et repris dans [15] est utilisé. Ce modèle considère un câble dans un plan, dont les points d'attache sont à différentes hauteurs, tel qu'illustré à la figure 2.2. Il permet de déterminer le profil géométrique du câble, ainsi que la distribution de la tension dans le câble le long du profil. Une fois ces expressions déterminées, il sera possible de vérifier si un câble soumis à une certaine tension doit être considéré fléchi ou pas.

Le point d'attache supérieur \mathbf{b} se trouve à l'origine du repère cartésien utilisé possédant les axes x et z . À cette attache, la force appliquée sur le câble \mathbf{f}_b a comme com-

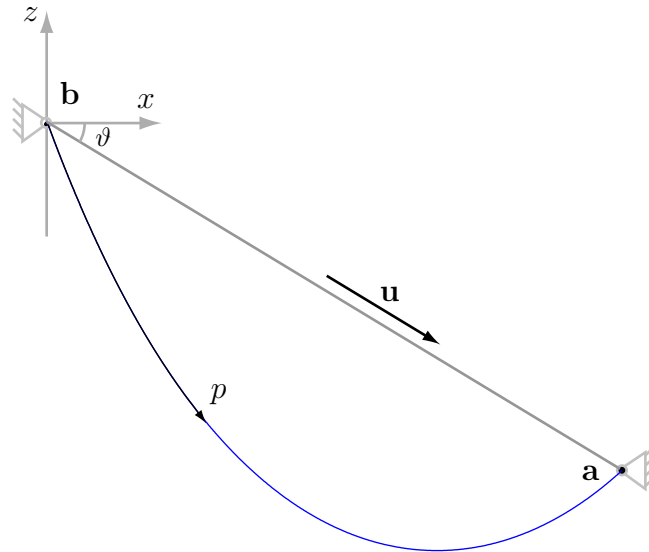


FIG. 2.2 – Profil d’un câble fléchi, suspendu entre deux points fixes à différentes hauteurs. La droite reliant \mathbf{b} et \mathbf{a} fait un angle ϑ avec l’horizontale.

posantes $[t_{bx} \ t_{bz}]^T$. Le point d’attache à l’effecteur \mathbf{a} possède les coordonnées $[a_x \ a_z]^T$. À cet endroit, la force s’appliquant sur le câble est \mathbf{f}_a . Le module de \mathbf{f}_a correspond à t_a , la tension dans le câble au point \mathbf{a} . Les forces s’appliquant sur un segment de câble sont illustrées à la figure 2.3.

Le câble a une longueur libre de l_0 et une longueur l une fois chargé. Un point sur le câble a la position cartésienne $[x \ z]^T$ et la coordonnée généralisée s représente sa position le long du profil libre à partir de l’origine. Lorsque le câble est chargé par son propre poids et la force en \mathbf{a} , le même point change de position cartésienne et se retrouve à une position p le long du profil déformé. Le module de la tension variable le long du profil est $t(s)$. La contrainte géométrique à respecter est

$$dx^2 + dz^2 = dp^2 \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1. \quad (2.34)$$

Le bilan des forces s’appliquant horizontalement et verticalement sur un segment de

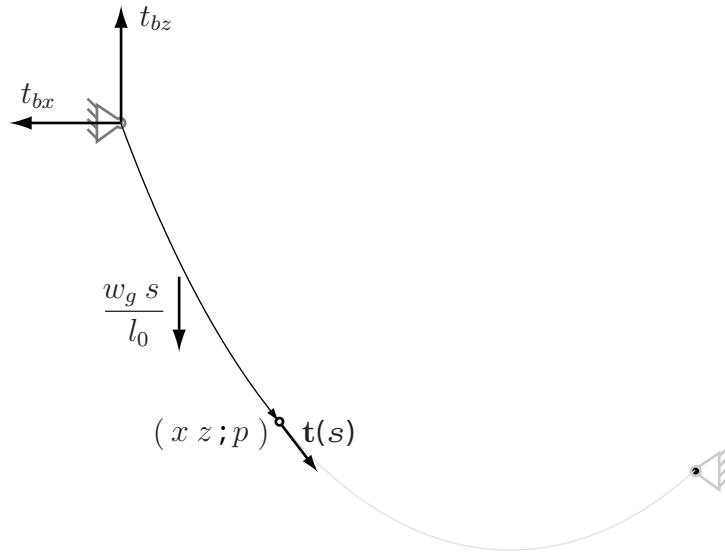


FIG. 2.3 – Segment du câble et forces qui s’y appliquent.

câble mène aux équations

$$t(s) \frac{dx}{dp} = t_{bx}, \quad (2.35)$$

$$t(s) \frac{dz}{dp} = t_{bz} - \frac{w_g s}{l_0} \quad (2.36)$$

où w_g est le poids du câble suspendu. Pour une densité linéaire de câble m' , le poids du câble s’exprime

$$w_g = m' g l_0. \quad (2.37)$$

Le câble est considéré linéairement élastique. La loi de Hooke dans ce cas peut s’exprimer

$$t(s) = k(p - s) \quad (2.38)$$

$$= \frac{k'}{s}(p - s) \quad (2.39)$$

$$= k' \left(\frac{dp}{ds} - 1 \right), \quad (2.40)$$

où k' est la constante de rappel d’un mètre ($l_0 = 1$) de câble.

Puisque la tension s’applique dans l’axe du câble, le vecteur de tension a la même direction que $\frac{dz}{dx}$. À partir des équations 2.35 et 2.36, on peut obtenir une expression de cette pente :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{t_{bz}}{t_{bx}} - \frac{w_g s}{t_{bx} l_0}. \quad (2.41)$$

Évaluée au point \mathbf{a} , $s = l_0$ et elle est

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\mathbf{a}} = \frac{t_{bz} - w_g}{t_{bx}}. \quad (2.42)$$

Pour déterminer la force à la base \mathbf{f}_b et la longueur libre l_0 , on reprend la suite du développement dans [94]. Les conditions limites du système sont au point \mathbf{b} ($s = 0$) :

$$x|_{\mathbf{b}} = 0 \quad (2.43)$$

$$z|_{\mathbf{b}} = 0 \quad (2.44)$$

$$p|_{\mathbf{b}} = 0 \quad (2.45)$$

et au point \mathbf{a} ($s = l_0$)

$$x|_{\mathbf{a}} = a_x \quad (2.46)$$

$$z|_{\mathbf{a}} = a_z \quad (2.47)$$

$$p|_{\mathbf{a}} = l \quad (2.48)$$

$$t|_{\mathbf{a}} = t_a. \quad (2.49)$$

En mettant au carré les équations 2.35 et 2.36, puis en les additionnant et en les réintroduisant dans 2.34, on obtient une expression du module de la tension le long du profil :

$$t(s) = \left\{ t_{bx}^2 + \left(t_{bz} - \frac{w_g s}{l_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.50)$$

Avec la condition limite de l'équation 2.49 pour $s = l_0$ et l'équation 2.37, la précédente relation se réécrit

$$t_a - \left\{ t_{bx}^2 + (t_{bz} - m' g l_0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.51)$$

Partant de l'équation 2.35, utilisant les dérivées en chaîne ainsi que l'équation 2.40, on obtient

$$t(s) \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dp} = t_{bx}, \quad (2.52)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{t_{bx}}{k'} + \frac{t_{bx}}{t(s)}. \quad (2.53)$$

Puis, avec 2.50, on obtient

$$\frac{dx}{ds} = \frac{t_{bx}}{k'} + \frac{t_{bx}}{\left\{ t_{bx}^2 + \left(t_{bz} - \frac{w_g s}{l_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.54)$$

En utilisant les conditions limites 2.43, la précédente équation s'intègre pour donner la position horizontale du câble en fonction de sa position sur le profil non chargé :

$$x(s) = \frac{t_{bx}s}{k'} + \frac{|t_{bx}|l_0}{w_g} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{t_{bz}}{t_{bx}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{t_{bz} - \frac{w_g s}{l_0}}{t_{bx}} \right) \right\}. \quad (2.55)$$

De la même manière, on arrive à une expression pour la position verticale du câble en fonction de sa position sur le profil non chargé :

$$z(s) = \frac{w_g s}{k'} \left(\frac{t_{bz}}{w_g} - \frac{s}{2l_0} \right) + \frac{l_0}{w_g} \left[\{t_{bx}^2 + t_{bz}^2\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ t_{bx}^2 + \left(t_{bz} - \frac{w_g s}{l_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.56)$$

Grâce à l'utilisation des conditions limites à la base, des expressions sont maintenant définies pour obtenir le profil du câble (équations 2.55 et 2.56) et la tension $t(s)$ le long de ce profil (équation 2.50). Cependant, ces expressions dépendent des composantes de la tension au point \mathbf{b} , qu'on doit déterminer. Pour ce faire, on utilise les conditions limites au point \mathbf{a} pour $x(s)$ et $z(s)$. On réintroduit donc la condition de l'équation 2.46 dans l'équation 2.55 pour obtenir

$$a_x = \frac{t_{bx}l_0}{k'} + \frac{|t_{bx}|l_0}{w_g} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{t_{bz}}{t_{bx}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{t_{bz} - w_g}{t_{bx}} \right) \right\}. \quad (2.57)$$

On réintroduit aussi l'équation 2.47 dans l'équation 2.56 pour obtenir

$$a_z = \frac{w_g l_0}{k'} \left(\frac{t_{bz}}{w_g} - \frac{1}{2} \right) + \frac{l_0}{w_g} \left[\{t_{bx}^2 + t_{bz}^2\}^{\frac{1}{2}} - \{t_{bx}^2 + (t_{bz} - w_g)^2\}^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.58)$$

Connaissant les valeurs de \mathbf{a} et t_a , on peut résoudre numériquement le système composé des équations non-linéaires 2.51, 2.57 et 2.58 afin d'obtenir les valeurs de l_0 , t_{bx} et t_{bz} .

2.2.2 Condition pour le fléchissement

Utilisant la définition précédente du profil d'un câble élastique de masse non nulle, on détermine maintenant la condition nécessaire pour qu'un câble dans un robot soit en mode fléchi. On considère que le fléchissement est négligeable lorsque la raideur du câble dans la direction de \mathbf{u} s'approche de la raideur du même câble si son poids est négligé. Cette approche comporte un niveau d'arbitraire. En effet, d'autres métriques

auraient pu être choisies, par exemple en considérant les angles entre le câble fléchi et le câble parfaitement droit, ou encore la distance maximale entre les deux profils. La raideur est utilisée parce qu'il est plus facile de comprendre son impact physique. Lorsque la raideur est nettement plus faible due au fléchissement, l'enroulement du câble ne sera pas transmis directement à la plate-forme. En effet, une partie de la puissance sera utilisée pour réduire le fléchissement. Pour les câbles très légers comparativement à l'inertie de la plate-forme (par exemple pour l'application du chapitre 7), cet actionnement n'aura aucun effet sur celle-ci. Les différentes étapes nécessaires pour vérifier si la raideur du câble fléchi s'approche suffisamment de la raideur d'un câble parfaitement droit sont décrites ci-dessous :

1. Partant de la pose du robot, on détermine la position du point \mathbf{a} avec l'équation 2.2.
2. Considérant un câble qui serait droit, la tension t_a dans le câble au point \mathbf{a} nécessaire pour générer l'effort est déterminée utilisant l'équation 2.32.
3. On se transpose dans le plan vertical contenant le câble avec un repère attaché à \mathbf{b} comme dans le développement de la caténaire élastique. On résout numériquement le système composé des équations non-linéaires 2.51, 2.57 et 2.58 afin d'obtenir les valeurs de l_0 , t_{bx} et t_{bz} . La fonction *fsolve* de Matlab est utilisée. Elle résout ce type de système d'équation en choisissant parmi une gamme d'algorithmes. Pour t_a suffisamment grand, il existera une solution unique. Si t_a n'est pas suffisant simplement pour soutenir le poids du câble, alors il n'y aura pas de solution physiquement acceptable.
4. Avec ces valeurs et avec l'équation 2.59, on détermine la matrice de raideur de l'extrémité du câble au point \mathbf{a} pour une tension t_a donnée.
5. On détermine la raideur dans la direction de \mathbf{u} utilisant l'équation 2.67.
6. Si le ratio entre cette raideur et la raideur d'un câble parfaitement droit sans masse est au dessus d'un certain seuil, on considère le câble non fléchi.

On utilise l'expression de la matrice de raideur \mathbf{K} à l'extrémité du câble développée dans [15]

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}, \quad (2.59)$$

où \mathbf{C} est la matrice de compliance obtenue en dérivant les équations 2.55 et 2.56 par rapport à t_{ax} et t_{az} , évaluées au point \mathbf{a} . Ainsi,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{ax} + \mathbf{C}_{fl} \quad (2.60)$$

où \mathbf{C}_{ax} est la matrice de compliance de l'effet ressort donnée par

$$\mathbf{C}_{ax} = \frac{l_0}{k'} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

et \mathbf{C}_{fl} est la matrice de compliance due au fléchissement donnée par

$$\mathbf{C}_{fl} = \frac{1}{m'g} \begin{bmatrix} C_{fl11} & C_{fl12} \\ C_{fl21} & C_{fl22} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

avec

$$C_{fl11} = \text{sign}(t_{ax}) \left(\sinh^{-1} \left(\frac{t_{az}}{t_{ax}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{-t_{bz}}{t_{ax}} \right) \right) - \frac{t_{az}}{t_a} - \frac{t_{bz}}{t_b}, \quad (2.63)$$

$$C_{fl12} = \frac{t_{ax}}{t_a} - \frac{t_{ax}}{t_b}, \quad (2.64)$$

$$C_{fl21} = \frac{t_{ax}}{t_a} - \frac{t_{ax}}{t_b}, \quad (2.65)$$

$$C_{fl22} = \frac{t_{az}}{t_a} - \frac{t_{bz}}{t_b}. \quad (2.66)$$

La raideur dans la direction de \mathbf{u} est ensuite simplement donnée par

$$k_u = \|\mathbf{K}\mathbf{u}\|. \quad (2.67)$$

Dans la direction le long du câble, la raideur k_0 d'un câble d'une longueur de l_0 m considéré parfaitement droit est [95] :

$$k_0 = \frac{k'}{l_0}. \quad (2.68)$$

La situation équivaut à mettre l_0 ressorts de raideur k' en série. Le câble est considéré non fléchi si l'équation suivante est respectée

$$\frac{k_u}{k_0} \geq r_k, \quad (2.69)$$

où r_k est un ratio à choisir selon le système. Il peut être par exemple de 90% ou 95%. Autrement dit, si la raideur dans la direction \mathbf{u} considérant la masse est supérieure à r_k fois la raideur théorique dans la même direction sans considérer la masse, alors le câble est considéré comme non fléchi.

On peut tracer ce ratio en fonction de t_a pour un câble donné dont la densité linéaire m' et la raideur unitaire k' sont connus. Quatre de ces courbes sont présentées à la figure 2.4 pour différentes positions angulaires de \mathbf{a} autour de \mathbf{b} . Ce graphique illustre

clairement que l'angle que fait le câble avec l'horizontale influence l'allure de la courbe. Pour un câble horizontal, il faudra appliquer une tension plus grande afin d'éliminer l'effet du fléchissement. À l'inverse, la raideur d'un câble parfaitement vertical n'est pas influencée par le fléchissement. En général, en dessous d'une certaine tension, le câble offrira peu de raideur. C'est une des raisons pourquoi il est préférable d'opérer un mécanisme dont les câbles sont en régime non fléchi si l'échelle le permet. À l'inverse, lorsque $\frac{k_u}{k_0}$ s'approche de l'unité, l'effet du fléchissement peut être négligé. Comme on peut le constater sur cette figure, pour de petites tensions t_a , la raideur d'un câble est très faible, à moins qu'il ne soit pratiquement vertical. Il est donc pertinent de vouloir imposer une tension minimale dans les câbles supérieure à zéro dans l'analyse et le contrôle d'un robot à câbles.

La figure 2.5 montre quatre profils du même câble pour quatre tensions différentes. L'allure de la raideur en fonction de l'orientation autour du point **a** est aussi tracée. La distribution pour la tension maximale de 100 N correspond pratiquement à la distribution pour un câble dont on ignore la masse. À l'œil, les profils de câble pour les tensions $t_a = 0,2$ N et $t_a = 5$ N sont assez semblables. Cependant, leur raideur au point **a** est considérablement différente. Le profil du câble pour la tension $t_a = 0,1$ N ne montre qu'un peu plus de fléchissement mais sa raideur à l'extrémité relativement à celle des autres est très faible. La distribution de la raideur montre d'ailleurs une raideur nettement inférieure aux profils avec des plus grandes tensions, et ce dans toutes les directions.

2.2.3 Surface de tension minimale

Pour des caractéristiques de câble et un seuil donné, on peut déterminer la tension minimale à appliquer au point **a** en fonction de la distance ρ et de l'angle avec l'horizontale ϑ . Un exemple de surface obtenue est montré à la figure 2.6. Cette *surface de tension minimale* est particulière à un câble avec une raideur et une densité linéaire donnée. Connaissant le type de câble utilisé et la plage de ρ possible pour une application, elle peut être calculée. Par la suite, on peut l'utiliser pour déterminer, à une pose donnée, la tension minimale requise dans un câble pour qu'il demeure non fléchi. La tension minimale variera donc en fonction du câble et de la pose considérée. Elle sera utilisée comme condition à respecter dans le calcul des tensions nécessaires pour

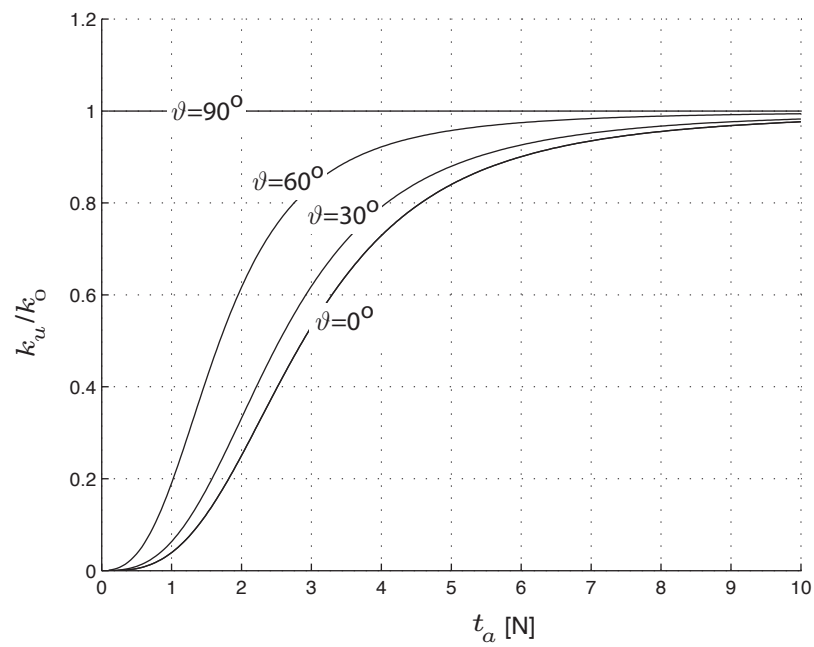


FIG. 2.4 – Graphique de la raideur en fonction de la tension imposée au point **a** pour $\rho = 10$ m et différentes valeurs de ϑ . Les propriétés physiques $k' = 3292$ N/m et $m' = 3$ g/m sont celles des câbles utilisés dans le prototype présenté au chapitre 7.

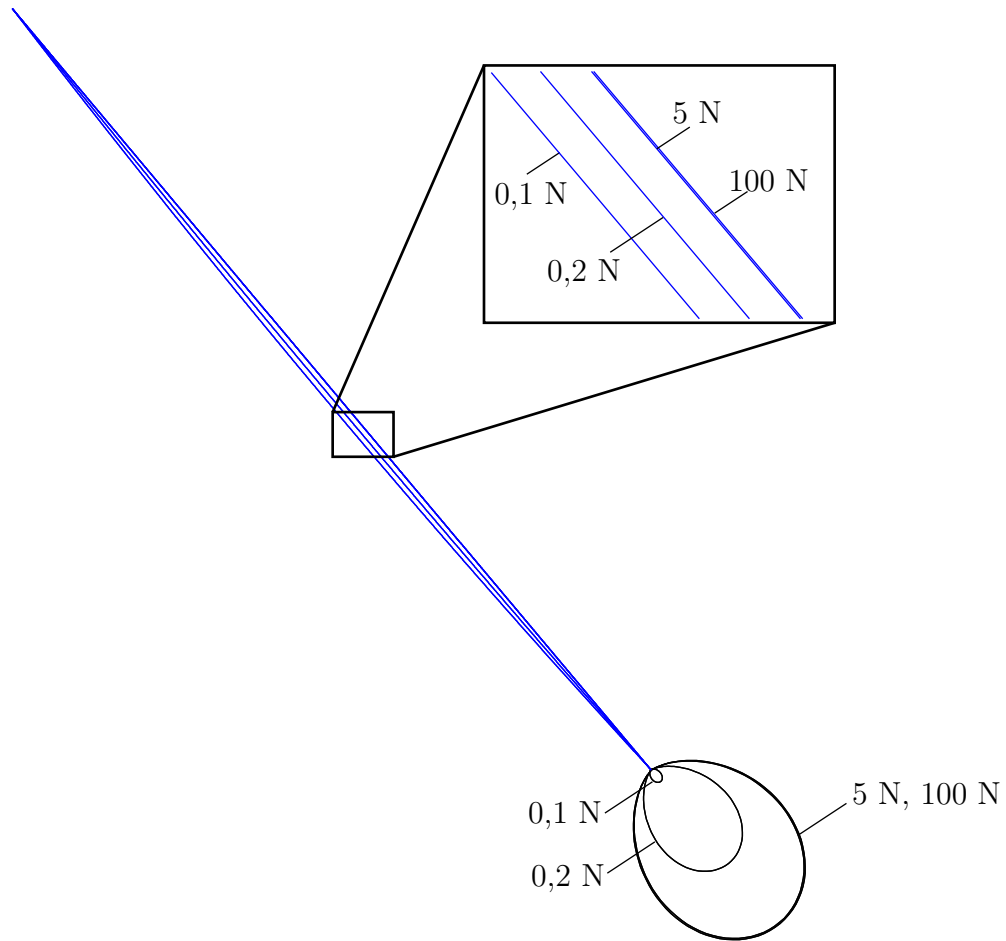


FIG. 2.5 – Profil d'un câble pour quatre tensions différentes. La carte de la raideur à son extrémité selon la direction pour différentes tensions indiquées sur l'image. $k' = 3292 \text{ N/m}$, $m_u = 3 \text{ g/m}$, $\vartheta = 45^\circ$, $\rho = 5 \text{ m}$.

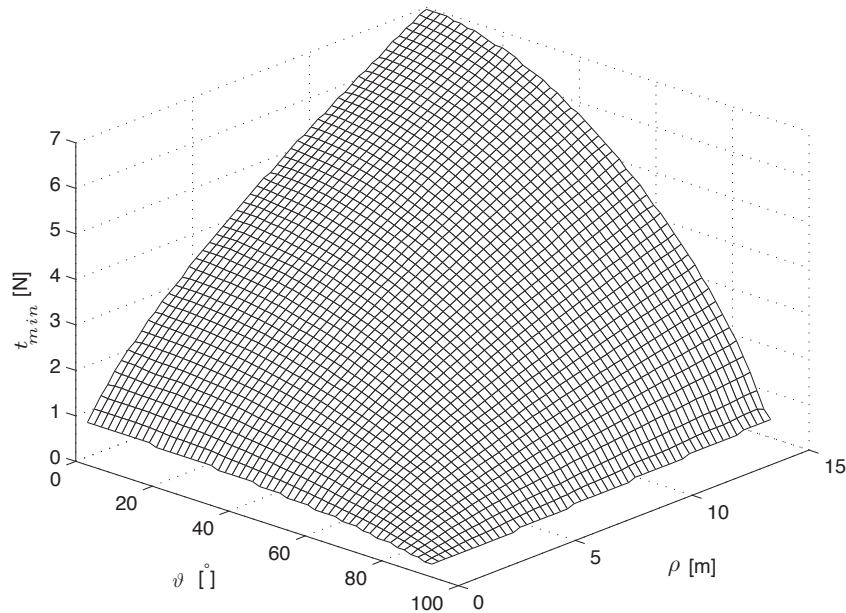


FIG. 2.6 – Surface de tension minimale à appliquer au point **a** afin de pouvoir considérer le câble non fléchi en fonction de la distance ρ et de l’angle qu’il fait avec l’horizontale ϑ . $k' = 3292$ N/m et $m' = 3$ g/m, seuil $\frac{k_u}{k_0} > 0,95$.

générer un torseur à la plate-forme dans l’équation 2.32. En fait, on devra trouver une solution pour le vecteur **t** dont toutes les tensions se situeront au dessus de la surface de tension minimale et en dessous d’une certaine tension maximale.

On voit que la surface de tension minimale varie considérablement. Pour des câbles très courts ou très verticaux, la tension minimale pour ne pas avoir de fléchissement est faible. Ainsi, si on impose la même tension minimale à tous les câbles et dans tout l’espace de travail, on agit de façon très conservatrice. Cette approche peut nous priver inutilement d’utiliser une partie de l’espace de travail, considérant que les torseurs nécessaires à la tâche ne pourraient pas être générés en respectant les contraintes de tensions minimales.

Tel que mentionné dans [22], cette analyse montre qu’il est avantageux que le rapport $\frac{k'}{m'}$ soit le plus grand possible afin de diminuer l’effet du fléchissement sur la raideur du mécanisme. Nous considérons pour la suite de la thèse le régime de câble non fléchi.

2.3 Résumé

Ce chapitre a d'abord présenté le modèle cinématique des robots à câbles. Ce modèle considère les câbles droits et non élastiques, une approximation qui sera utilisée tout le long de cette thèse. L'étude du fléchissement effectuée par la suite permet de définir les conditions pour que cette approximation soit valide. Les différentes équations décrivant la cinématique et la dynamique seront reprises à différents endroits.

- L'équation de vitesse obtenue permettra d'étudier la sensibilité cinématique du mécanisme au chapitre suivant.
- Le problème géométrique inverse sera utilisé tout au long de la thèse, et plus particulièrement dans le chapitre 5 portant sur l'optimisation et le chapitre 6 portant sur l'étalonnage de la géométrie.
- Les équations impliquant des quantités de forces seront utiles dans le chapitre 4 pour déterminer la capacité d'un mécanisme à générer des efforts à la plate-forme.
- La surface de tension minimale sera reprise au chapitre 7. L'analyse de l'espace atteignable en fonction de la tâche pour cette application illustrera ce qu'implique la prise en compte d'une tension minimale acceptable dans les câbles différente de zéro.

Chapitre 3

Sensibilité cinématique

Ce chapitre développe le concept de *sensibilité cinématique*. Celle-ci se définit comme étant la variation de la pose de la plate-forme en fonction de la variation des coordonnées associées aux actionneurs d'une amplitude donnée. Cette question a déjà été abordée de plusieurs façons qui sont référées dans le chapitre. Ces méthodes seront d'abord revues brièvement pour expliquer pourquoi elles ne sont pas satisfaisantes en général et particulièrement dans le contexte des mécanismes étudiés dans cette thèse. Par la suite, le problème est approché comme une optimisation avec contraintes pour obtenir une quantification de la sensibilité cinématique physiquement significative. Des indices du niveau de sensibilité cinématique sont ensuite présentés.

3.1 Pourquoi étudier la sensibilité cinématique des robots à câbles ?

Une particularité intéressante des robots entraînés par câbles est leur capacité à couvrir de grands espaces de travail grâce à l’allongement des câbles. Ces robots présentent donc une grande disproportion entre la taille de leur base et la taille de la plate-forme qu’ils déplacent. Une application célèbre d’un robot à câbles présentant une grande disproportion entre la taille de la base et celle de sa plate-forme mobile est la SkyCam [28, 29]. Dans ce cas, seule la position de la plate-forme est contrainte avec les câbles. C’est un mécanisme de stabilisation embarqué qui combine équilibrage statique et dynamique pour assurer l’orientation de la caméra. Cet exemple, comme d’autres systèmes similaires [12, 30], démontrent que la sensibilité cinématique des robots à câbles *en translation* est adéquate pour contrôler la plate-forme malgré le fait que de très longs câbles soient utilisés. Pour d’autres applications, on peut imaginer que l’approche d’embarquer un mécanisme pour contrôler l’orientation comme sur la SkyCam sans contraindre l’orientation de la plate-forme n’est pas viable. C’est le cas par exemple si de très grandes masses doivent être supportées, ce qui rend techniquement impossible l’équilibrage du mouvement de rotation de l’effecteur. Cette situation survient par exemple dans des concepts de radiotélescopes comme le LAR [20, 96] et le FAST [97], de même que certaines applications du Robocrane [43, 44, 46]. Pour ces mécanismes, l’orientation de la plate-forme doit être contrainte directement par les câbles.

La *sensibilité cinématique en translation* est définie comme étant le déplacement en translation de la plate-forme causée par une variation de la position des actionneurs. De la même manière, la *sensibilité cinématique en rotation* est la variation de l’orientation de la plate-forme soumise à une variation de la position des actionneurs d’une certaine amplitude. Bien qu’il ait été montré expérimentalement qu’il est possible de contrôler la position et l’orientation de plates-formes entraînées par câbles, l’étude de la sensibilité cinématique est utile pour comprendre l’effet du dimensionnement et de la géométrie du robot sur ses propriétés cinématiques. Elle peut être utilisée afin de déterminer si l’effet de l’actionnement sur la position et/ou l’orientation est adéquat pour permettre de le contrôler. Par adéquat, on entend que l’actionnement produit un effet mesuré sur la pose de la plate-forme. Selon l’application, la sensibilité cinématique devra se situer à un juste milieu entre un actionnement qui ne produit aucun changement de la pose (sensibilité nulle) et un petit actionnement qui produit un très grand changement de

la pose (sensibilité trop grande). La sensibilité cinématique en orientation des robots à six degrés de liberté est particulièrement intéressante car moins étudiée et intuitivement plus susceptible de causer des problèmes au niveau du contrôle. En effet, les outils actuels cités ci-après suggèrent que la sensibilité cinématique en orientation de mécanismes très disproportionnés entre la base et la plate-forme est très grande. La nouvelle formulation développée permettra de vérifier cette affirmation à l'aide d'indices qu'il est possible d'interpréter physiquement.

3.1.1 Revue des approches existantes

Se fiant sur des outils connus pour étudier les robots parallèles, il n'est pas évident qu'il soit possible de contrôler une plate-forme des dizaines, voire des centaines de fois plus petite que la base du robot. Ces outils suggèrent que l'orientation de la plate-forme est beaucoup trop sensible pour être contrôlée. Autrement dit, ils indiquent qu'une petite variation des positions aux actionneurs produit une très grande variation de l'orientation. De plus, les résultats qu'ils fournissent sont dans certains cas difficiles à interpréter physiquement pour différentes raisons.

La *manipulabilité* a été présentée dans [98] alors que l'utilisation du nombre de conditionnement de la matrice Jacobienne et de la *dextérité* ont été présentés entre autre dans [99, 100, 101, 102]. Ces deux indices font appel aux valeurs singulières de la matrice Jacobienne. Dans la plupart des exemples présentés dans ces articles, la signification physique du nombre de conditionnement est directe puisque tous les actionneurs sont du même type (rotation ou prismatique) et tous les degrés de liberté aussi (tous en rotation ou tous en translation). Lorsque ce n'est pas le cas, les éléments de la matrice Jacobienne n'ont pas tous les mêmes unités et l'indice de dextérité perd sa signification physique, tel qu'expliqué dans [103].

Pour éviter ce problème, les auteurs de [104, 105] ont reformulé les équations de vitesse en utilisant la vitesse de translation de différents points sur l'effecteur. Ceci permet d'éviter de traiter simultanément des vitesses en translation et en rotation. Dans cette méthode, le résultat dépend du choix des points, ce qui implique un certain niveau d'arbitraire. L'utilisation de la *longueur caractéristique* (ex. [106]) pour homogénéiser les unités dans la Jacobienne demande aussi de choisir des longueurs appropriées

qui n'ont rien d'absolu. Dans [107], les auteurs utilisent des matrices de différentes longueurs caractéristiques qui sont choisies pour une application en particulier. Ils utilisent cette méthode et un *indice d'isotropie global* afin d'optimiser des mécanismes pour des applications particulières. La matrice d'inertie de l'effecteur a été utilisée dans [108] et plus particulièrement pour les robots à câbles dans [109] pour résoudre le problème. Bien que cette valeur soit une propriété du mécanisme et est donc moins arbitraire que la valeur caractéristique, son interprétation pour comprendre la cinématique n'est pas claire.

3.1.2 À propos du nombre de conditionnement

Le concept mathématique qui est principalement utilisé dans les méthodes précédentes est le nombre de conditionnement de la matrice Jacobienne (équation 2.12) ou sa réciproque nommée la dextérité. Le nombre de conditionnement κ de la matrice Jacobienne \mathbf{J} est donné par :

$$\kappa(\mathbf{J}) = \sigma_{max}/\sigma_{min} \quad (3.1)$$

où σ_{max} et σ_{min} sont respectivement les la valeurs singulières maximale et minimale de \mathbf{J} . Cette définition est basée sur une norme deux de la matrice \mathbf{J} et on peut noter que le conditionnement peut aussi être défini utilisant d'autres normes.

Le nombre de conditionnement est un concept mathématique bien établi qui réfère habituellement à la qualité de la transformation provoquée par une matrice. Dans le contexte des robots étudiés dans cette thèse, la signification physique de cette transformation rend inappropriée son utilisation. La difficulté principale est que les éléments de la matrice \mathbf{J} n'ont pas tous les mêmes unités physiques si le robot possède à la fois des degrés de liberté en rotation et en translation. Si c'est le cas, pour que l'équation soit cohérente, les composantes de certaines colonnes de \mathbf{J} doivent avoir des unités de *m/rad* alors que d'autres colonnes doivent être sans dimension. Ainsi, dans ce cas, le nombre de conditionnement dépend des unités utilisées pour définir le problème. Un choix d'unités différent (ex. degrés au lieu de radians, millimètres au lieu de mètres, etc.) implique un nombre de conditionnement différent.

Pour ces raisons, l'interprétation physique du nombre de conditionnement de la matrice Jacobienne d'un robot peut être difficile, à moins que tous les actionneurs

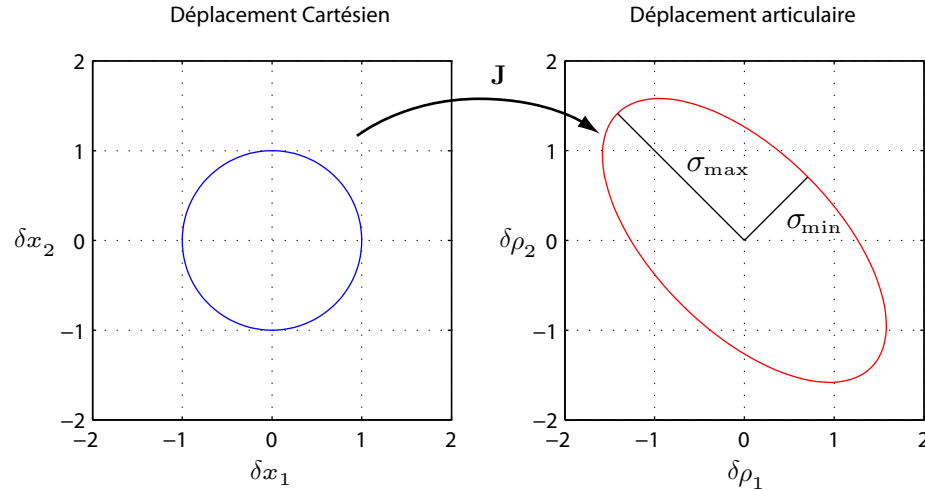


FIG. 3.1 – Illustration à 2-ddl de la transformation provoquée par \mathbf{J} .

soient du même type (ce qui est le cas pour les robots à câbles) et tous les degrés de liberté soient du même type (seulement position ou seulement orientation, ce qui n'est pas toujours le cas).

De plus, il est parfois accepté que le nombre de conditionnement de la Jacobienne d'un manipulateur est un indicateur de sa sensibilité cinématique relative. On suppose qu'un nombre de conditionnement près de l'unité signifie un manipulateur bien dimensionné pour permettre un mouvement de l'effecteur du même ordre de grandeur que l'actionnement. En fait, en analysant les équations (2.11) and (3.1), cette affirmation peut être modérée. L'effet de la Jacobienne est illustré de manière simplifiée dans la figure 3.1. Les valeurs singulières de \mathbf{J} indiquent son potentiel d'amplification dans les directions critiques de l'espace des déplacements cartésiens infinitésimaux correspondant à ses vecteurs propres. Elle transforme un ensemble de vecteurs de petits déplacements cartésiens (représentés par le cercle) dans un ensemble de vecteurs de petits déplacement articulaires (représentés par l'ellipse). Un nombre de conditionnement unitaire indique que la matrice amplifie un changement cartésien de $\delta\mathbf{x}$ pour provoquer un changement articulaire $\delta\boldsymbol{\rho}$ d'amplitude constante, peu importe la direction de $\delta\mathbf{x}$. Dans ce cas particulier, l'ellipse de la figure 3.1 serait un cercle dont le rayon pourrait être différent de celui du cercle dans le domaine cartésien. En divisant la plus grande valeur singulière par la plus petite pour obtenir le nombre de conditionnement, on obtient une estimation de l'anisotropie maximale de la transformation, mais aucune indication sur le degré de l'amplification d'un déplacement cartésien en déplacement

articulaire. Par exemple, un nombre de conditionnement de trois indique que \mathbf{J} peut amplifier un déplacement cartésien d'une amplitude $\|\delta\mathbf{x}\|$ pour provoquer un déplacement articulaire dont l'amplitude $\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$ se situe entre σ_{min} et $3\sigma_{min}$, selon la direction de $\delta\mathbf{x}$. La valeur de σ_{min} disparaît dans le nombre de conditionnement puisque celui-ci est un ratio de valeurs singulières. Ainsi, le nombre de conditionnement seul ne fournit pas d'information sur la relation directe entre un petit changement de pose cartésienne $\delta\mathbf{x}$ et un petit changement aux actionneurs $\delta\boldsymbol{\rho}$ qu'il nécessite.

En résumé, le nombre de conditionnement ne fournit pas une information suffisante et compréhensible sur la sensibilité cinématique des robots à câbles pour les deux raisons suivantes :

1. Les valeurs singulières utilisées dans le calcul du nombre de conditionnement sont obtenues d'une matrice dont les éléments n'ont pas nécessairement tous les mêmes unités physiques.
2. Le calcul du nombre de conditionnement ne considère pas les valeurs singulières en elles-mêmes, mais plutôt leur ratio, mettant de côté une information importante sur la cinématique du système.

L'objectif de la suite de ce chapitre consiste donc à développer des indices de sensibilité cinématique qui ne présentent pas ces inconvénients.

3.2 Indices de sensibilité cinématique

Dans cette section, une méthode est développée pour contourner le problème de l'hétérogénéité des unités des éléments de la matrice \mathbf{J} pour un mécanisme possédant d_t degrés de liberté en translation et d_r degrés de liberté en rotation. D'abord, l'équation 2.11 est modifiée légèrement pour exprimer la relation entre des déplacements infinitésimaux articulaires et cartésiens, soit

$$\delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{J}\delta\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Cette matrice peut être scindée en deux sous-matrices, qu'on suppose dans cette section de plein rang, une multipliant les degrés de liberté en translation et l'autre multipliant les degrés de liberté en rotation :

$$\delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{J}_t\delta\mathbf{p} + \mathbf{J}_r\delta\boldsymbol{\theta}, \quad (3.3)$$

où \mathbf{J}_t est une matrice $n \times d_t$ et \mathbf{J}_r est une matrice $n \times d_r$.

Tel que mentionné précédemment, on veut obtenir des indices de sensibilité cinématique qui quantifient le changement de pose à l'effecteur pour une variation de l'actionnement donnée. Pour éviter l'incohérence d'avoir des indices quantifiant la sensibilité de la pose dans son ensemble, on définit des indices en rotation k_r et des indices en translation k_t séparément, qui donnent le ratio entre les variations de l'orientation, de la position et la variation à l'actionnement. On désire obtenir des relations de la forme

$$\|\delta \mathbf{p}\| = k_t \|\delta \boldsymbol{\rho}\|, \quad (3.4)$$

$$\|\delta \boldsymbol{\theta}\| = k_r \|\delta \boldsymbol{\rho}\|. \quad (3.5)$$

Autrement dit, on cherche l'amplitude de variation de la position et l'amplitude de variation de l'orientation maximales qu'une amplitude de variation à l'actionnement $\|\delta \boldsymbol{\rho}\|$ peut provoquer. Le développement qui suit est effectué pour la rotation mais peut l'être de façon tout-à-fait analogue pour la translation. Mathématiquement, le problème se présente comme une optimisation soumise à certaines contraintes :

$$\|\delta \boldsymbol{\theta}\|^2 \rightarrow \min, \max_{\delta \mathbf{x}, \|\delta \boldsymbol{\rho}\|^2=1} \quad (3.6)$$

On cherche donc à trouver les extremums de

$$\eta = \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}^T \delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.7)$$

respectant la contrainte de l'équation 3.2 et pour un module de $\|\delta \boldsymbol{\rho}\|$ unitaire

$$\delta \boldsymbol{\rho}^T \delta \boldsymbol{\rho} = 1. \quad (3.8)$$

La fonction à optimiser peut être réécrite pour inclure la contrainte de l'équation 3.8 en utilisant un multiplicateur de Lagrange λ

$$\eta' = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}_r \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \lambda (\delta \boldsymbol{\rho}^T \delta \boldsymbol{\rho} - 1) \quad (3.9)$$

où la matrice

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{d_t \times d_t} & \mathbf{0}_{d_t \times d_r} \\ \mathbf{0}_{d_r \times d_t} & \mathbf{1}_{d_r \times d_r} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

est utilisée car on ne s'intéresse qu'à l'amplitude de la rotation provoquée. L'équation 3.9 peut être réécrite pour inclure l'autre contrainte, soit celle définie par l'équation 3.2 :

$$\eta'(\delta \mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}_r \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \lambda (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{x} - 1). \quad (3.11)$$

On écrit les dérivées partielles

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \delta \mathbf{x}} = \mathbf{H}_r \delta \mathbf{x} + \lambda \mathbf{J}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{x} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \delta \lambda} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{x} - 1) = 0. \quad (3.13)$$

On factorise $\delta \mathbf{x}$ de l'équation 3.12 pour obtenir une expression de la forme

$$\mathbf{M}_r \delta \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

où

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{H}_r + \lambda \mathbf{J}^T \mathbf{J}. \quad (3.15)$$

Une solution à l'équation 3.14 est $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondant, à moins qu'on ne se trouve dans une singularité, à une variation d'actionnement nulle. Les solutions non nulles surviennent lorsque le déterminant de \mathbf{M}_r est nul :

$$|\mathbf{M}_r| = 0. \quad (3.16)$$

La matrice \mathbf{M} a la forme suivante :

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t & \lambda \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_r \\ \lambda \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_t & \mathbf{1} + \lambda \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_r \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t & \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_r \\ \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_t & \frac{1}{\lambda} \mathbf{1} + \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_r \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

Ainsi,

$$|\mathbf{M}_r| = \lambda^d p(\mathbf{J}) \quad (3.20)$$

$$0 = \lambda^d p(\mathbf{J}) \quad (3.21)$$

où $p(\mathbf{J})$ est un polynome qui dépend des éléments de \mathbf{J} et qui contient des termes en λ allant de degré 0 à degré $-d_r$. Par exemple, pour $d = 6$, le polynome $p(\mathbf{J})$ contient des termes en λ^0 , λ^{-1} , λ^{-2} et λ^{-3} et le polynome exprimant le déterminant de \mathbf{M}_r est globalement de la forme

$$|\mathbf{M}_r| = \lambda^6 (a + b\lambda^{-1} + c\lambda^{-2} + d\lambda^{-3}), \quad (3.22)$$

$$= \lambda^3 (a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d). \quad (3.23)$$

En trouvant les zéros de l'équation précédente, on trouve les λ qui causent des amplitudes maximales et minimales de variation d'orientation pour une amplitude de

variation à l'actionnement donnée. On peut le faire aisément avec un logiciel de calcul symbolique tel que Maple. Il existe d_t solutions $\lambda = 0$ correspondant à autant de mouvements de translation pure. Les d_r solutions non nulles correspondent à des cas où les variations d'orientation sont maximales.

Une fois les λ identifiés, on désire obtenir $\delta\mathbf{x}_r$ dans le noyau de \mathbf{M}_r faisant en sorte que les équations 3.14 et 3.13 soient respectées. Ce sont ces vecteurs qui comportent des amplitudes de variation en orientation maximales. Les directions des $\delta\mathbf{x}_r$ sont obtenues en incluant les λ tour à tour dans l'expression de la matrice \mathbf{M}_r (équation 3.19). Avec une décomposition en valeur singulières, on trouve la direction du vecteur $\delta\mathbf{x}_r$ correspondant, nommée $\delta\mathbf{x}'_r$. $\delta\mathbf{x}_r$ est alors connu à une variable l_r près. On détermine ensuite l'amplitude des $\delta\mathbf{x}_r$ à l'aide de l'équation 3.13

$$l_r \delta\mathbf{x}'_r{}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} l_r \delta\mathbf{x}'_r - 1 = 0, \quad (3.24)$$

$$l_r = \frac{1}{\sqrt{\delta\mathbf{x}'_r{}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \delta\mathbf{x}'_r}}. \quad (3.25)$$

Ainsi,

$$\delta\mathbf{x}_r = l_r \delta\mathbf{x}'_r \quad (3.26)$$

puis le ratio entre l'amplitude de la variation d'orientation et l'amplitude de la variation à l'actionnement recherché à l'équation 3.5 est obtenu par

$$k_r = \sqrt{\delta\mathbf{x}'_r{}^T \mathbf{H}_r^T \mathbf{H}_r \delta\mathbf{x}'_r}. \quad (3.27)$$

Ces d_r k_r sont les indices de sensibilité cinématique en orientation. Avec $(k_r)_{max}$, l'indice de sensibilité cinématique en rotation maximal, il est possible de déterminer l'amplitude maximale de la variation d'orientation $\|\delta\boldsymbol{\theta}\|_{max}$ qui peut être induite par une variation dans l'actionnement $\delta\boldsymbol{\rho}$ unitaire. L'interprétation géométrique est que $(k_r)_{max}$ représente la valeur maximale que $\|\delta\boldsymbol{\theta}\|$ peut prendre pour n'importe quel $\delta\boldsymbol{\rho}$ situé sur une hypersphère de rayon unitaire dans l'espace à n dimensions des variations articulaires et respectant les équations de vitesse. Pour un mécanisme $n = d$, toutes les variations articulaires sont possibles. Pour les mécanismes à $n > d$, toutes les directions de $\delta\boldsymbol{\rho}$ ne seront pas nécessairement compatibles avec un déplacement cartésien. L'observation des mécanismes dans cette situation à la figure 1.2 permet de comprendre cette affirmation. En a), par exemple, on voit bien que les deux câbles ne peuvent pas varier de n'importe quelle manière et doivent respecter la contrainte qu'ils se rejoignent à la plate-forme. Dans ce cas, seulement la direction $\delta\boldsymbol{\rho} = [1 \ -1]^T$ est compatible avec

un déplacement cartésien. Les valeurs de k_r sont pour les directions $\delta\boldsymbol{\rho}$ qui respectent ces contraintes, qui apparaît entre autre dans l'équation 3.11.

Physiquement, $(k_r)_{max}$ représente l'amplitude maximale du vecteur de variation de l'orientation de la plate-forme qui peut être causée par une variation du vecteur des coordonnées articulaires d'une amplitude $\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$. Cette valeur indique la sensibilité cinématique en orientation maximale du mécanisme. Pour une variation dans l'actionnement d'une amplitude de $\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$, l'amplitude de la variation en orientation peut aller de zéro (translation pure) à $(k_r)_{max}\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$.

Pour obtenir la sensibilité cinématique en translation, le développement demeure valide. On n'a qu'à remplacer la matrice \mathbf{H}_r par la matrice \mathbf{H}_t

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{d_t \times d_t} & \mathbf{0}_{d_t \times d_r} \\ \mathbf{0}_{d_r \times d_t} & \mathbf{0}_{d_r \times d_r} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

ce qui produira au lieu de \mathbf{M}_r une matrice \mathbf{M}_t de la forme

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{1} + \lambda \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t & \lambda \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_r \\ \lambda \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_t & \lambda \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_r \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Au final, les indices de sensibilité cinématiques en translation sont donnés par

$$k_t = \sqrt{\delta \mathbf{x}_t^T \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t \delta \mathbf{x}_t} \quad (3.30)$$

où les \mathbf{x}_t sont obtenus de la même façon que les \mathbf{x}_r mais à partir de \mathbf{M}_t au lieu de \mathbf{M}_r .

3.2.1 Représentation

La sous-section précédente a permis de contourner le problème de l'hétérogénéité des unités dans les équations de vitesse pour arriver à une quantification de la sensibilité cinématique des mécanismes en rotation et en translation. En analysant directement les nouveaux indices de sensibilité cinématique au lieu de ratios des valeurs singulières de la matrice \mathbf{J} , l'amplification de l'actionnement dans le déplacement cartésien peut être mieux comprise. Partant de ces indices, une représentation graphique peut être obtenue.

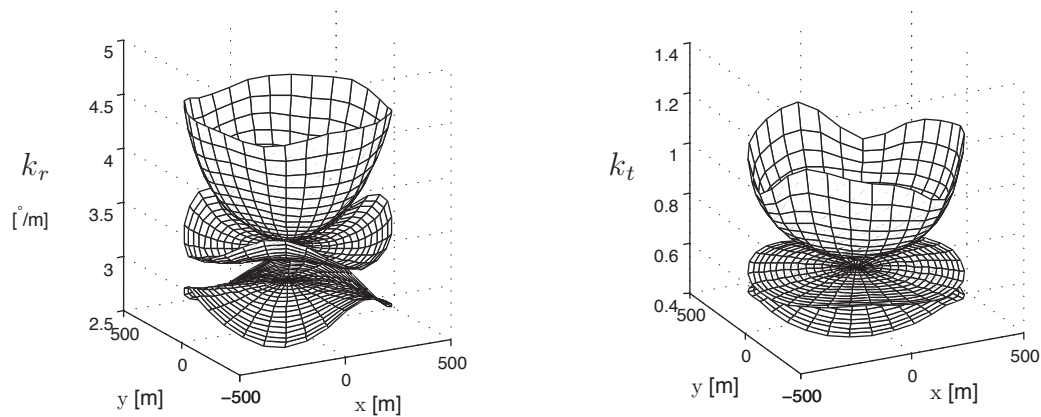


FIG. 3.2 – Indices de sensibilité cinématique en orientation (gauche) et en translation (droite) tracés sur un espace à deux dimensions.

3.2.1.1 Deux degrés de liberté ou moins

Les mécanismes étudiés dans cette thèse ont la capacité d’opérer selon d degrés de liberté dans l’espace cartésien. Pour certaines applications, il arrive que l’espace de travail puisse être défini par une ou deux variables. Par exemple, on peut vouloir analyser la sensibilité cinématique le long d’une trajectoire (une variable). De la même manière, le robot peut avoir à déplacer sa plate-forme sur une surface, ses six degrés de liberté étant couplés de telle manière que si deux d’entre eux sont connus, les quatre autres peuvent être déterminés. C’est le cas notamment pour le mécanisme du chapitre 7 de même que dans [20, 19]. Cette situation particulière facilite la représentation des indices de sensibilité cinématique. En effet, ils peuvent alors être tracés en fonction d’une ou de deux variables définissant la pose de la plate-forme. La figure 3.2 est un exemple des indices de sensibilité cinématique tracés sur un espace atteignable à 2-ddl pour le mécanisme illustré à la figure 3.3 et l’espace de travail discuté dans [19].

Comment un tel graphique peut-il être interprété ? D’abord, il permet d’observer si chacun des indices varie de façon significative selon l’endroit dans l’espace atteignable. Pour les rotations, deux des trois indices sont plutôt constants, indiquant qu’une variation de l’actionnement est amplifiée en variation d’orientation à peu près de la même manière partout dans l’espace. Le plus grand indice varie entre $3,2^\circ/\text{m}$ et $4,5^\circ/\text{m}$. Le plus petit indice oscille autour entre $2,6^\circ/\text{m}$ et $2,9^\circ/\text{m}$ alors que celui du milieu se situe entre $3,2^\circ/\text{m}$ et $3,7^\circ/\text{m}$. Ainsi, pour un module de variation dans l’actionnement

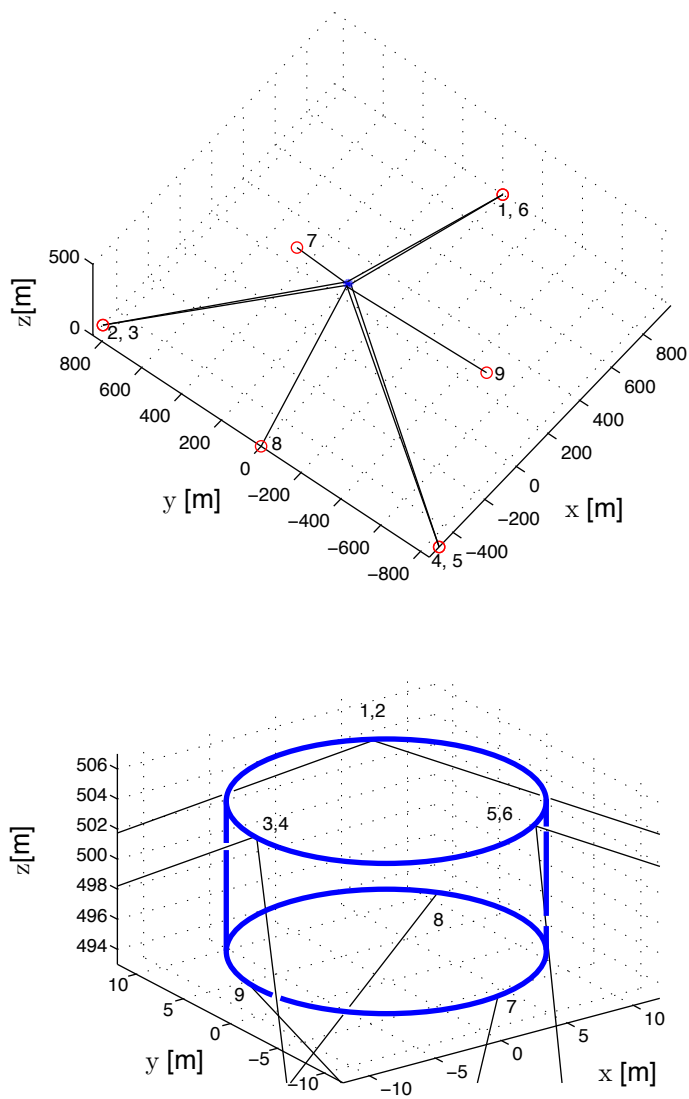


FIG. 3.3 – Mécanisme pour lequel les indices de sensibilité cinématique sont donnés en exemple dans ce chapitre.

$\|\delta\rho\| = 1$ m, le changement d'orientation peut aller de 0° (translation pure) à environ $4,5^\circ$.

Du point de vue de la translation, la situation est semblable. Les trois indices ont aussi des ordres de grandeur semblables, indiquant qu'un actionnement s'amplifie en translation du même ordre de grandeur selon les trois axes. Les indices n'ont pas d'unités puis qu'ils représentent des [m/m]. Le graphe montre que, pour un $\|\delta\rho\| = 1$ m, la position peut varier entre 0 m (rotation pure) et environ 1,1 m.

3.2.1.2 Trois degrés de liberté ou plus

Si la sensibilité cinématique doit être étudiée selon plus de 2-ddl cartésiens, la représentation précédente ne peut être utilisée, mais d'autres avenues sont possibles. D'abord, des indices globaux peuvent être définis. Par exemple, la moyenne de chacun des indices pourrait être utilisée. Cette approche a un des désavantages que présente le nombre de conditionnement, soit de dissimuler de l'information qui peut être significative pour la compréhension de la cinématique du robot. Une autre approche est de calculer les indices de sensibilité à travers l'espace d'intérêt comme pour l'approche précédente, puis de tracer des histogrammes semblables à ceux apparaissant à la figure 3.4. Dans ce cas, l'axe vertical représente le pourcentage de poses testées dans l'espace. Les valeurs des indices de sensibilité cinématique sont le long des axes identifiés k_r et k_t . Chacune des couleurs représente un des indices de sensibilité. Pour aider la compréhension, ces deux histogrammes ont été obtenus avec les mêmes données que celles utilisées à la figure 3.2. Cependant, cette approche peut s'appliquer à un nombre arbitraire de degrés de liberté de l'espace atteignable cartésien. Comme la représentation précédente, elle permet une vue d'ensemble, de constater la différence entre les indices, ainsi que la variation des indices dans l'espace. Cependant, elle ne permet pas d'associer une valeur de sensibilité à un pose particulière dans l'espace.

Selon la tâche à effectuer par le robot, ces deux approches peuvent être utilisées dans un contexte d'analyse ou d'optimisation d'architecture. Dans certains cas, on voudra que la sensibilité cinématique ne dépasse pas un certain seuil. Dans d'autres, on préférera qu'elle varie le moins possible à l'intérieur de l'espace. Même si cette procédure a été développée pour un robot à câbles présentant une grande disproportion entre la taille de sa base et celle de sa plate-forme, elle peut être utilisée pour étudier d'autres robots parallèles et sériels. La principale limite de cette approche est que tous les

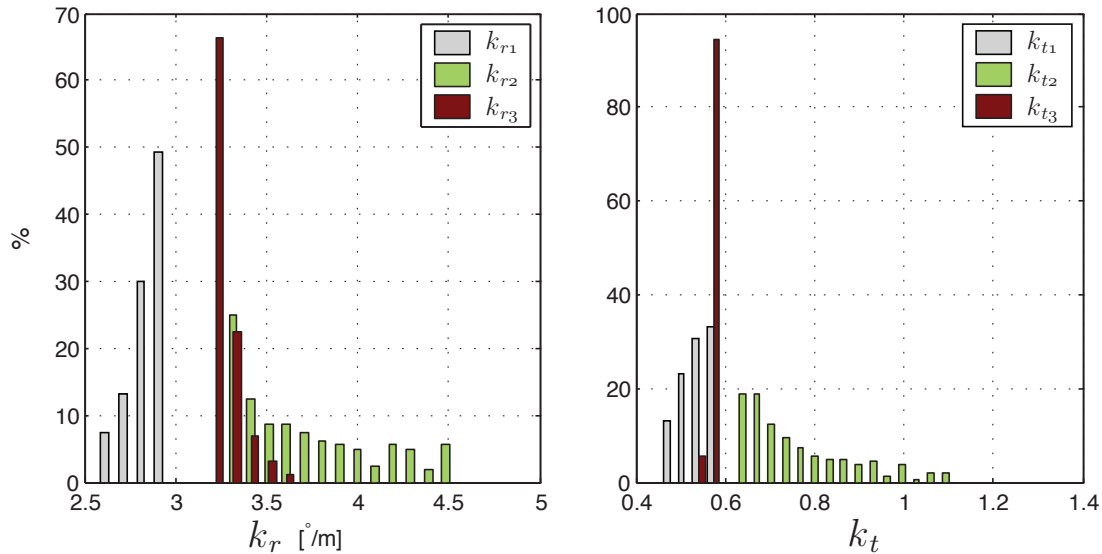


FIG. 3.4 – Représentation des indices de sensibilité cinématique sur un espace donné décrit par un nombre de degrés de liberté supérieur à deux.

actionneurs et/ou tous les degrés de liberté de l'effecteur doivent être du même type. L'idée d'aborder ce type de problème comme une optimisation peut aussi être mise à profit dans d'autres situations où il y a hétérogénéité des valeurs physiques en cause, comme dans l'étude de la raideur des mécanismes par exemple.

3.3 Résumé

Partant des équations de vitesse du chapitre précédent, on a développé dans ce chapitre des indices de sensibilité cinématique en rotation et en translation. Ces indices quantifient la variation d'orientation ou de position pour une amplitude de variation à l'actionnement donnée. Contrairement aux approches présentées par le passé dans la littérature, l'hétérogénéité des quantités dans les équations de vitesse n'est pas un obstacle à la cohérence ni à l'interprétation physique du résultat. Cette méthode s'avère utile dans le contexte de robots à câbles, où une grande disproportion de taille peut exister entre le bâti et la plate-forme. Elle sera mise en application au chapitre 7 pour déterminer si la cinématique du mécanisme construit permet de le contrôler adéquatement, même en rotation. Alors que ce chapitre s'intéresse aux mouvements que l'actionnement peut provoquer à la plate-forme, le chapitre suivant s'intéresse aux efforts que les

câbles peuvent y générer.

Chapitre 4

Capacité à générer un ensemble de torseurs donné

Ce chapitre présente une nouvelle méthode pour déterminer si un mécanisme à n câbles opérant dans un espace à d -ddl ($n \geq d$) peut générer un ensemble de torseurs à une pose donnée, considérant des tensions minimales et maximales dans les câbles. La nature de l'ensemble des torseurs que le mécanisme peut générer, nommé *l'ensemble des torseurs disponibles*, est étudiée. Il est démontré que son expression mathématique correspond à un ensemble en forme de zonotope, une classe particulière de polytope convexe. Utilisant les propriétés des zonotopes, une méthode pour construire l'ensemble de façon générale est développée. Une fois l'ensemble défini, il est expliqué comment on peut déterminer sa relation avec l'ensemble des torseurs nécessaires à une tâche. Si *l'ensemble des torseurs de la tâche* est inclus dans l'ensemble des torseurs disponibles, alors tous les torseurs possiblement nécessaires à la tâche peuvent être générés par le robot.

4.1 Définition du problème

Le fait qu'un câble ne puisse appliquer un effort que dans une direction a un impact majeur sur la capacité du mécanisme de générer des torseurs à la plate-forme. En pratique, une tension minimale et maximale devront être imposées dans chaque câble. Ce chapitre présente une méthode pour déterminer si un ensemble de torseurs peut être généré à une pose donnée, considérant ces contraintes. Cette approche géométrique considère de façon générale tous les cas pour lesquels $n \geq d$ et n'utilise pas un algorithme itératif.

Certains travaux présentent des méthodes pour tester si un ensemble de torseurs — de un torseur à l'ensemble de tous les torseurs possibles — peuvent être générés par un robot à câbles à une pose donnée, considérant que les câbles ne peuvent travailler qu'en tension. Certaines méthodes s'appliquent sur les mécanismes pleinement contraints alors que d'autres s'appliquent aux mécanismes suspendus. Dans tous les cas, une tension minimale et/ou une tension maximale dans les câbles est considérée. Une section complète de ce chapitre est dédiée à la comparaison de l'approche proposée et des méthodes existantes.

Ce chapitre ne s'attaque pas le problème de la détermination de l'espace atteignable de façon globale. Ce problème a été traité dans de nombreux travaux. Dans ces publications, il y a toujours une étape intermédiaire qui détermine la capacité d'un mécanisme à générer un ensemble d'efforts. La présente approche est aussi comparée à ces résultats intermédiaires.

La tâche que le mécanisme doit accomplir dicte la nature de l'ensemble des torseurs qui devront possiblement être générés à la plate-forme. Cet ensemble dépend donc de l'application du mécanisme (voir les tableaux 1.1 et 1.2). Par exemple, on peut vouloir atteindre certaines accélérations à l'intérieur d'un certain volume de travail ou le long d'une trajectoire. Dans d'autres cas, comme celui présenté au chapitre 7, on veut que le mécanisme puisse demeurer en équilibre statique sur une surface définie dans l'espace. Une tâche implique un ensemble de torseurs que les câbles doivent pouvoir générer à la plate-forme. Cet ensemble peut être constant ou varier à l'intérieur de l'espace désiré selon la pose. Cet *ensemble des torseurs de la tâche* est noté T . L'*ensemble des torseurs disponibles*, D , est l'ensemble des torseurs que les câbles peuvent générer sur la plate-

forme à une pose donnée. Cet ensemble dépend de l'architecture du robot, de la pose de la plate-forme dans l'espace cartésien, ainsi que des tensions minimales et maximales permises dans les câbles. Tous les torseurs qui peuvent possiblement être requis pour effectuer une tâche peuvent être générés si la condition suivante est rencontrée :

$$T \subseteq D. \quad (4.1)$$

Si l'ensemble des torseurs de la tâche est un sous-ensemble de l'ensemble des torseurs disponibles, alors tous les torseurs nécessaires à la tâche peuvent être générés par le robot. Prenons par exemple le mécanisme plan $d = 2$, $n = 3$ présenté à la figure 4.1. Sur la même figure, l'ensemble des torseurs disponibles est aussi montré, de même que trois différents T . Le torseur que le câble i peut générer est \mathbf{w}_i , dans ce cas une force dans la direction du câble. Son amplitude peut varier d'une tension minimale \underline{t}_i à une tension maximale \bar{t}_i . La plage de tension disponible correspondante est

$$\Delta t_i = \bar{t}_i - \underline{t}_i. \quad (4.2)$$

Tel qu'illustré dans la partie du bas de la figure 4.1, si l'ensemble des torseurs de la tâche est complètement à l'intérieur de l'ensemble des torseurs disponibles (ex. T_1), alors l'équation 4.1 est vérifiée et tous les torseurs possiblement nécessaires à la tâche peuvent être générés. Ce n'est pas le cas si T est partiellement (ex. T_2) ou complètement (ex. T_3) hors de D .

Cette idée avait été suggérée par [110]. On doit porter attention aux définitions des ensembles utilisées ici qui diffèrent de celles dans [110]. Dans leur cas, ils considèrent l'ensemble des torseurs disponibles pour une tension minimale de zéro dans tous les câbles. Ici, on généralise à une tension minimale quelconque variable selon le câble et la pose. Ils considèrent aussi un ensemble des torseurs désirés constant à travers l'espace de travail, ce qui n'est pas le cas ici. De plus, contrairement à leur approche, on considère la force pour équilibrer la gravité comme un sous-ensemble des torseurs nécessaires à la tâche. Alors qu'ils s'étaient limités à des cas à 3-ddl, l'approche présentée ici s'étend aux mécanismes à d -ddl avec $n \geq d$ câbles.

Si un torseur peut être généré par les câbles, il doit nécessairement exister une solution à l'équation 2.32 reprise ici :

$$\mathbf{W}\mathbf{t} = \mathbf{w} \quad (4.3)$$

respectant la condition

$$\underline{\mathbf{t}} \leq \mathbf{t} \leq \bar{\mathbf{t}} \quad (4.4)$$

pour tous les vecteurs $\mathbf{w} \in T$, où $\underline{\mathbf{t}}$ et $\bar{\mathbf{t}}$ sont les vecteurs comprenant respectivement les tensions minimales et maximales admissibles pour chacun des câbles. Autrement dit, pour que la tâche soit réalisable, il doit y avoir une combinaison de tensions dans les câbles permettant de générer l'ensemble des efforts qui y sont nécessaires, tout en respectant les limites de tensions. Les inégalités de vecteurs doivent être interprétées élément par élément. Par exemple, $\underline{\mathbf{t}} < \mathbf{t}$ signifie que $\underline{t}_1 < t_1, \underline{t}_2 < t_2, \dots, \underline{t}_n < t_n$.

Dans ce chapitre, on développe une méthode géométrique et non itérative pour déterminer si, à une pose \mathbf{x} donnée, tous les torseurs dans l'ensemble T peuvent être générés. L'algorithme est séparé en deux parties :

1. Définir l'ensemble des torseurs disponibles, D .
2. Déterminer si l'ensemble des torseurs de la tâche se trouve à l'intérieur de l'ensemble des torseurs disponibles.

Pour ce chapitre, bien que ce ne soit pas explicite dans la notation, il demeure entendu que $D, T, \mathbf{W}, \underline{\mathbf{t}}$ et $\bar{\mathbf{t}}$ peuvent varier en fonction de la pose \mathbf{x} .

4.2 Définition de l'ensemble des torseurs disponibles

4.2.1 Nature de l'ensemble

Les câbles ne peuvent que tirer. Ainsi, ils ne peuvent appliquer qu'une somme de torseurs unitaires pondérés par des poids positifs. Dans la présente analyse, ces poids varient entre la tension minimale et maximale admissible pour chacun des câbles. L'équation 4.3 peut donc servir à définir D , l'ensemble des torseurs disponibles :

$$D = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{w}_i, \underline{t}_i \leq t_i \leq \bar{t}_i\}. \quad (4.5)$$

En effectuant le changement de variable

$$\beta_i = t_i - \underline{t}_i, \quad (4.6)$$

l'équation 4.5 se réécrit

$$D = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{w}_i + \mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}, 0 \leq \beta_i \leq (\bar{t}_i - \underline{t}_i)\}. \quad (4.7)$$

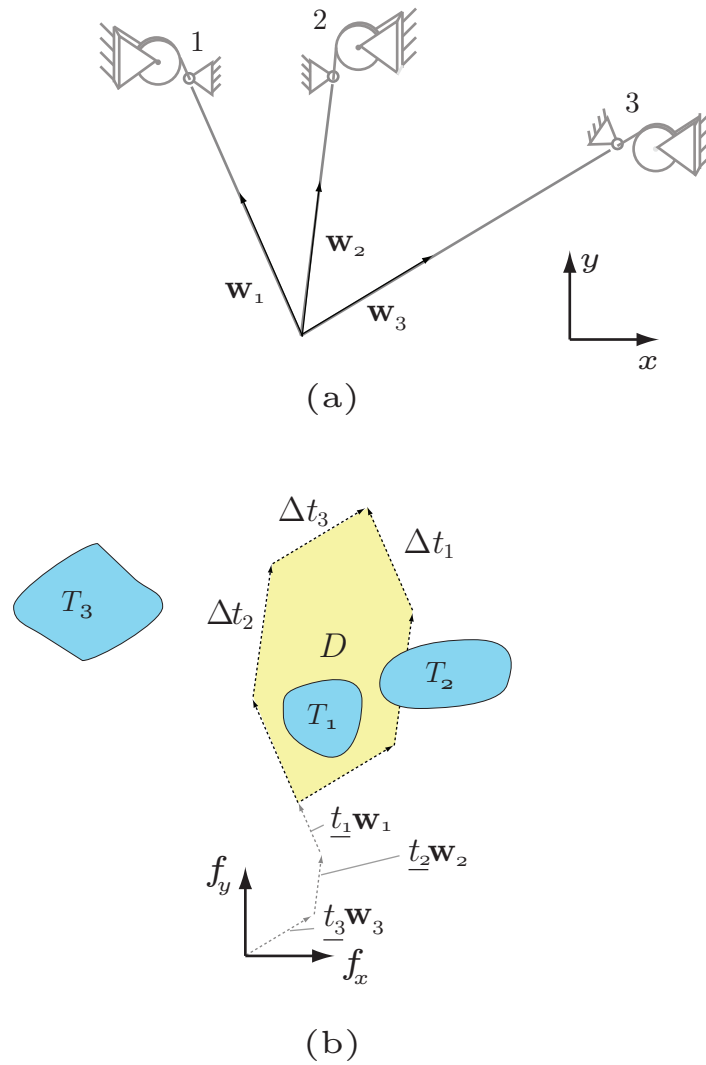


FIG. 4.1 – Mécanisme plan $n = 3$, $d = 2$: (a) schéma du mécanisme et (b) son ensemble des torseurs disponibles et des exemples d'ensembles des torseurs de la tâche.

En effectuant un nouveau changement de variable

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\Delta t_i}, \quad (4.8)$$

où $\Delta t_i = \bar{t}_i - \underline{t}_i$, l'équation 4.7 se réécrit maintenant

$$D = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta t_i \mathbf{w}_i + \mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}, 0 \leq \alpha_i \leq 1\}. \quad (4.9)$$

Or cette dernière expression de l'espace de torseurs disponibles correspond à la définition d'un zonotope [111] :

Un zonotope est une somme vectorielle d'un ensemble fini de segments de droite fermés dans un espace euclidien.

Le zonotope généré par l'ensemble des vecteurs $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\} \in \mathbb{R}^d$, noté $\text{zone}(Y)$, s'exprime donc

$$\text{zone}(Y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}_i, 0 \leq \alpha_i \leq 1\}. \quad (4.10)$$

On peut noter que certains auteurs utilisent différentes conventions pour la plage des α_i (ex. $-1 \leq \alpha_i \leq 1$). Les segments de droite utilisés dans la construction d'un zonotope sont appelés ses *générateurs*. Dans notre cas, les générateurs sont les $\Delta t_i \mathbf{w}_i$. Utilisant la définition d'un zonotope, l'équation 4.9 peut être réécrite

$$D = \text{zone}(G) \oplus \{\mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}\}, \quad (4.11)$$

où $G = \{\Delta t_1 \mathbf{w}_1, \Delta t_2 \mathbf{w}_2, \dots, \Delta t_n \mathbf{w}_n\}$ et où \oplus signifie la somme de Minkowski de deux ensembles. La somme de Minkowski de deux ensembles A et B est donnée par l'addition de chaque élément de A à chaque élément de B :

$$A \oplus B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}. \quad (4.12)$$

La figure 4.2 illustre ce type d'addition d'ensembles.

L'addition de $\{\mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}\}$, le torseur causé par une tension minimale dans tous les câbles, provoque une translation de $\text{zone}(G)$ qui ne modifie pas la forme de D . En effet, la forme

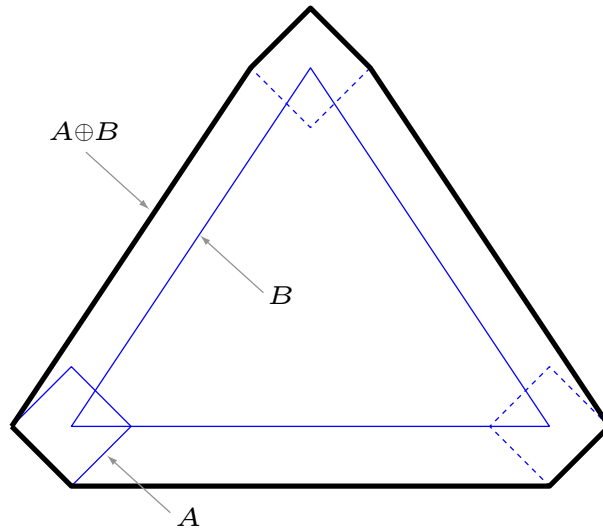


FIG. 4.2 – Exemple de somme de Minkowski de deux ensembles A et B .

du zonotope dépend seulement des directions des torseurs unitaires des câbles (\mathbf{W}) et des plages de tensions disponibles dans les câbles ($\Delta \mathbf{t}$). La translation dépend elle aussi de la matrice des torseurs unitaires, ainsi que du vecteur des tensions minimales. Le zonotope avant la translation est appelé le *zonotope de base* et ne dépend pas des tensions minimales permises. Ses propriétés seront utilisées afin de comparer l'approche proposée avec les autres approches présentées dans la littérature pour définir l'ensemble des torseurs disponibles.

Un zonotope est une sous-classe de polytope convexe. Un polytope convexe est une généralisation, à un nombre de dimensions arbitraire, du concept de polygone convexe en deux dimensions et d'un polyèdre convexe en trois dimensions. Un polytope convexe est le volume compris dans l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. L'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est la plus petite surface convexe contenant tous ces points. Un zonotope est un polytope convexe dont chaque face possède une autre face parallèle. Il présente d'autres caractéristiques intéressantes qui sont discutées tout au long de ce chapitre.

Une autre façon de définir un zonotope est par la somme de Minkowski de n segments de droites finis [112]. Utilisant cette définition, D peut être défini par

$$D = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n \oplus \{\mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}\}, \quad (4.13)$$

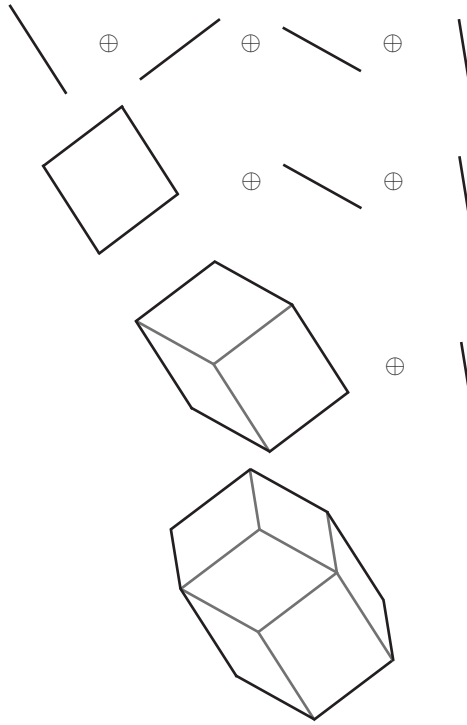


FIG. 4.3 – Somme de Minkowski de quatre segments de droite.

où S_i représente un segment de droite tel que

$$S_i = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{w} = \alpha_i \Delta t_i \mathbf{w}_i, 0 \leq \alpha_i \leq 1\}. \quad (4.14)$$

La figure 4.3 montre comment quatre segments de droites peuvent être additionnés de cette façon pour créer un zonotope.

Physiquement, cette définition sous forme de sommation combinatoire semble logique : pour obtenir l'ensemble des torseurs disponibles, on additionne chaque torseur qu'un câble peut générer avec chaque torseur que chacun des autres câbles peut générer. Il s'agit donc de l'ensemble de torseurs générés par toutes les combinaisons acceptables de tensions dans les câbles.

Une autre façon encore de définir un zonotope produit par n générateurs est l'image de l'hypercube unitaire à n dimensions ayant subi une transformation affine [113]. L'équation 4.9 peut être réécrite sous forme matricielle

$$D = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{w} = \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{W}\mathbf{t}, 0 \leq \alpha_i \leq 1\}, \quad (4.15)$$

où

$$\mathbf{M} = \mathbf{W} \text{diag}(\Delta \mathbf{t}), \quad (4.16)$$

$$\Delta \mathbf{t} = [\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n]^T, \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T. \quad (4.18)$$

Les étapes suivantes expliquent comment se construit mathématiquement le zonotope des torseurs disponibles à partir de l'hypercube.

1. Puisque les n α_i peuvent prendre des valeurs entre 0 et 1, ils représentent un hypercube dans un espace à n dimensions.
2. La matrice \mathbf{M} a deux effets sur l'hypercube. D'abord, elle modifie les longueurs de ses arêtes selon les Δt_i pour transformer l'hypercube en orthotope. Un orthotope est la généralisation du concept de prisme rectangulaire à un nombre arbitraire de dimensions. C'est la matrice carrée $\text{diag}(\Delta \mathbf{t})$ qui module la longueur des arêtes de l'hypercube.
3. Ensuite, la matrice des torseurs unitaires \mathbf{W} de taille $d \times n$ projette dans l'espace des torseurs à d dimensions l'orthotope, qui lui est défini dans l'espace des tensions des câbles à n dimensions. Si $d = n$, il y a autant de câbles que de degrés de liberté. L'effet de \mathbf{W} est alors apparent sous la forme d'une déformation de l'orthotope, qui conserve la même topologie. Si $d < n$, il y a plus de câbles que de degrés de liberté. Dans ce cas, l'orthotope est projeté dans un espace de plus petite dimension.
4. Finalement, le terme $\mathbf{W} \mathbf{t}$ translate l'orthotope projeté dans l'espace des torseurs pour que son origine coïncide avec le torseur provoqué par les tensions minimales dans tous les câbles.

Les quatre étapes sont illustrées à la figure 4.4 pour le cas $d < n$ et à la figure 4.5 pour $d = n$. Les exemples utilisés ont un petit nombre de degrés de liberté et de câbles pour permettre la visualisation de leur construction. Les problèmes à plus de degrés de liberté et de câbles s'énonçant de la même façon mathématiquement, la nature de l'ensemble des torseurs disponibles demeure la même. D'autres exemples de zonotopes sont montrés aux figures 4.6 à 4.9 pour trois différentes poses. Des animations entre les poses extrêmes correspondant à ces figures sont disponibles dans les extensions 1 à 4. Toutes les valeurs numériques qui ont servi à générer les figures et animations sont rassemblées dans le tableau 4.2 à la toute fin de ce chapitre. Dans tous les cas, des

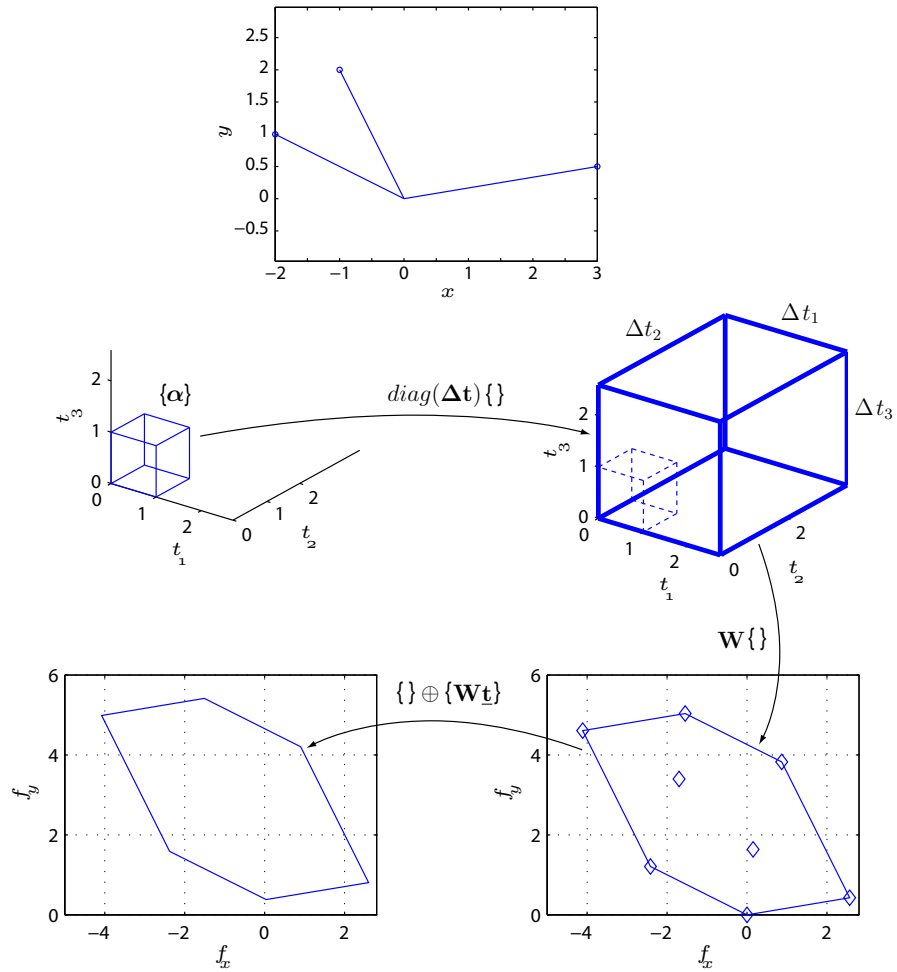


FIG. 4.4 – Illustration des quatre étapes de la construction mathématique du zonotope des torseurs disponibles pour $n = 3$ et $d = 2$. L'image en haut montre le mécanisme. Partant de l'hypercube, l'orthotope dans l'espace des tensions est obtenue par une multiplication par $\text{diag}(\Delta \mathbf{t})$. La matrice \mathbf{W} projette ensuite l'orthotope dans l'espace des torseurs. Les losanges représentent les sommets de l'orthotope projetés. Finalement, la translation $\mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}$ est effectuée.

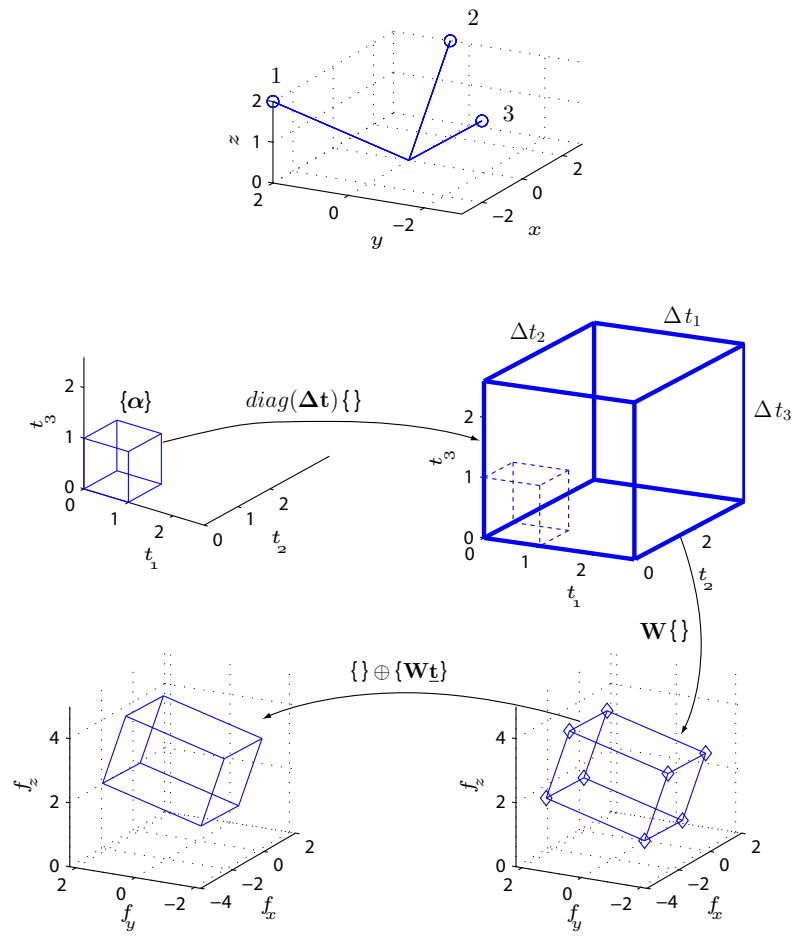


FIG. 4.5 – Illustration de la construction mathématique du zonotope des torseurs disponibles pour $n = d = 3$. La description des étapes est la même que dans la figure 4.4.

tensions maximales fixes sont imposées tout le long de la trajectoire. Dans tous les cas sauf un, toutes les tensions maximales sont aussi fixes. La seule exception est la figure 4.9 (extension 4) où la surface de tension minimale de la figure 2.6 a été utilisée. Les tensions minimales (en Newton) pour chacun des câbles sont dans ce cas inscrites à côté des points d'attache dans la représentation du mécanisme.

En résumé, on peut voir un zonotope des torseurs disponibles de trois façons différentes :

- L'ensemble des combinaisons linéaires bornées de vecteurs (équation 4.9) ;
- La somme de Minkowski de segments de droite (équation 4.13) ;
- La projection d'un hypercube (équation 4.15).

Ces trois approches permettent d'aborder de différentes perspectives la nature de l'ensemble des torseurs disponibles. Un zonotope possède d'autres caractéristiques particulières [113]. C'est un type de polytope qui est symétrique autour de son centre. Les faces d'un zonotope sont aussi des zonotopes. Ses arêtes correspondent toutes à des segments générateurs. Les faces qui ont un même segment générateur forment une zone en forme de ceinture autour de la surface du zonotope, tel qu'illustré à la figure 4.10. Toutes ces zones couvrent entièrement la surface. Le nombre de ces zones est la principale mesure de la complexité des zonotopes. Pour un robot à câbles, ce nombre coïncide avec le nombre de câbles.

4.2.2 Cas particuliers

Tel que mentionné précédemment, plusieurs travaux ont porté sur la capacité d'un mécanisme à câbles à générer des efforts. Cette sous-section vise à faire le lien avec ces travaux, en montrant comment la méthode présentée ici est en accord avec les autres approches. En fait, pour plusieurs, elles sont des cas limites du zonotope des torseurs disponibles où la tension minimale est nulle et/ou la tension maximale est indéterminée. Le tableau 4.1 classe les principales approches utilisées selon les conditions limites sur les tensions dans les câbles et selon la relation entre n et d . La ligne pour laquelle $\mathbf{t} \leq \infty$ indique des approches pour lesquelles aucune borne supérieure n'est imposée aux tensions. Les cases vides indiquent les cas non traités explicitement dans la littérature à ma connaissance. Le numéro de la section traitant de ces cas est indiqué dans la dernière colonne. Dans chacune de ces sections, les espaces des torseurs disponibles selon

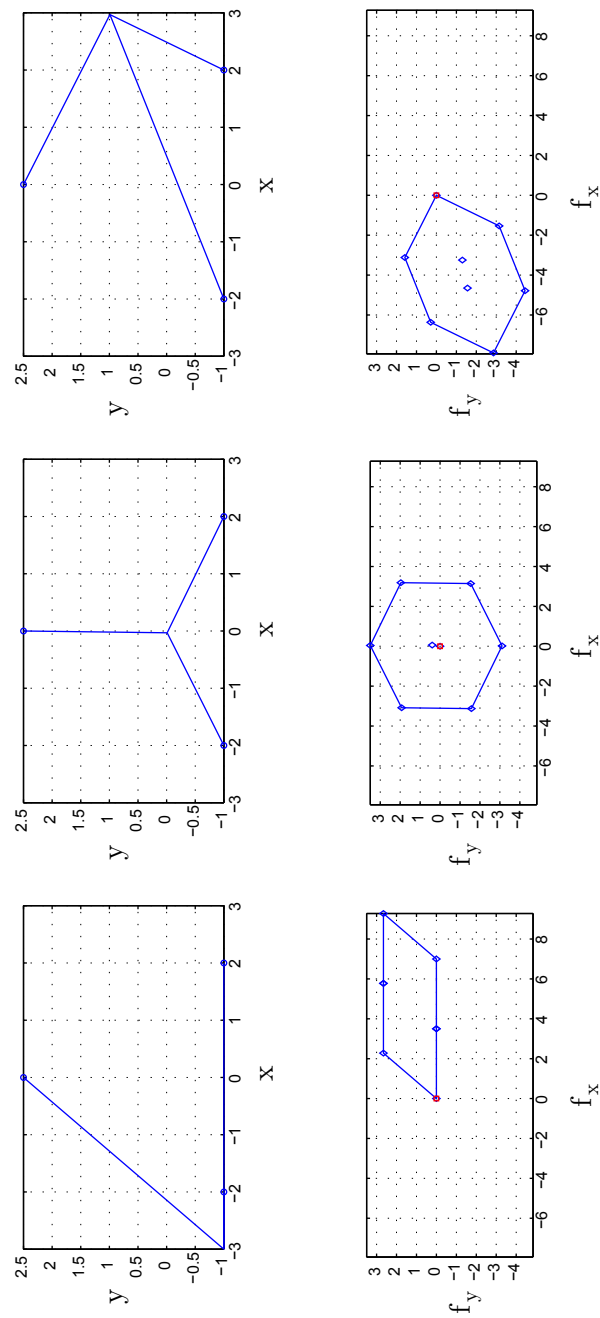


FIG. 4.6 – Mécanisme à $n = 3, d = 2$ dessiné à trois poses différentes. Les zonotopes de base des torseurs disponibles correspondants sont tracés à droite. Les losanges représentent les sommets de l'orthotope projetés.

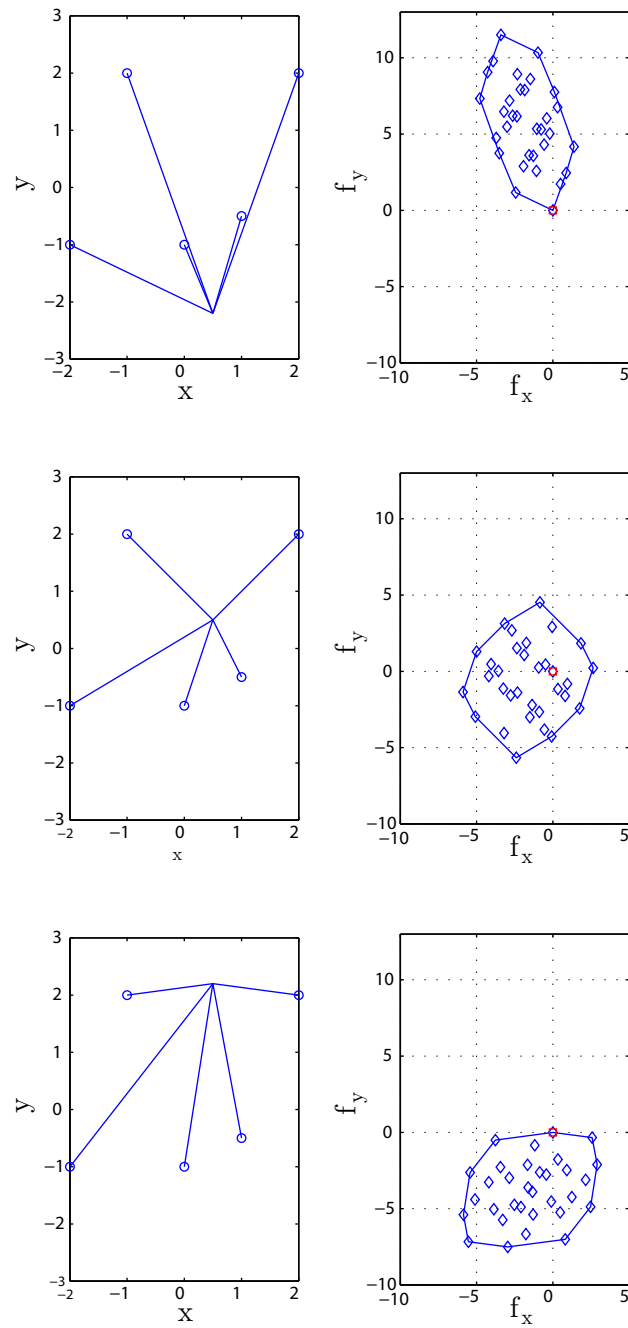


FIG. 4.7 – Mécanisme à $n = 5, d = 2$ dessiné à trois poses différentes. Les zonotopes de base des torseurs disponibles correspondants sont tracés à droite. Les losanges représentent les sommets de l'orthotope projetés.

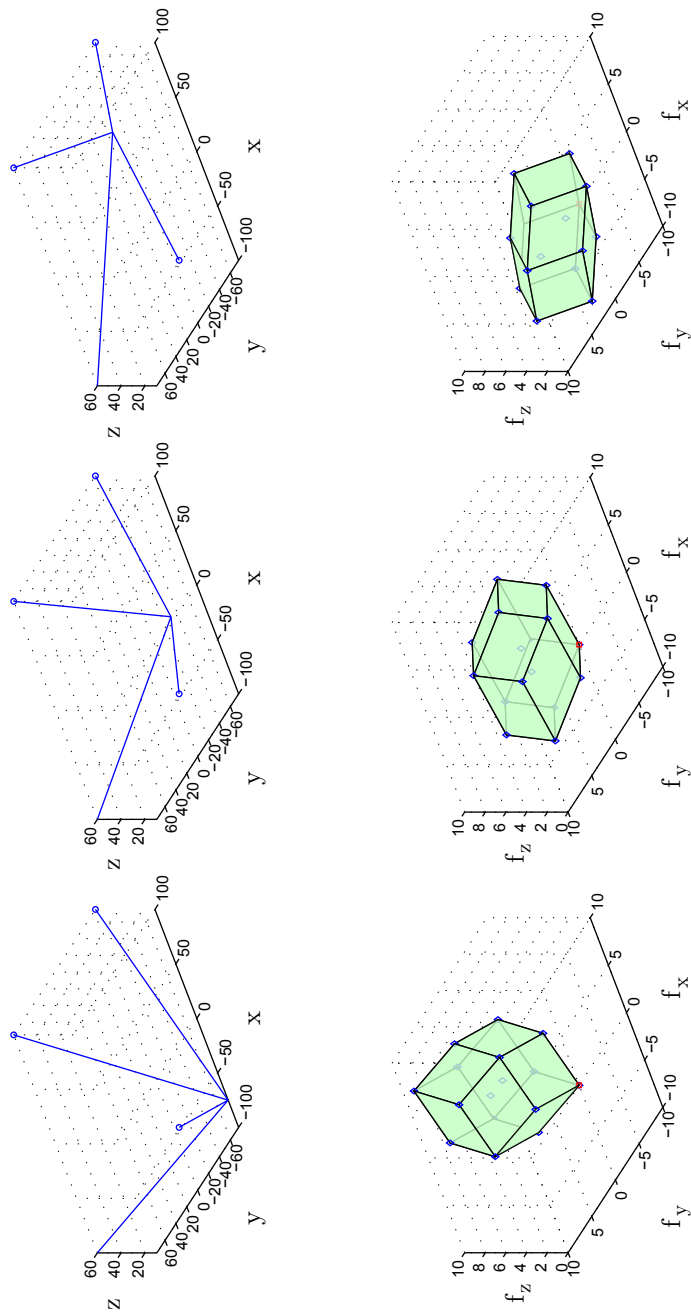


FIG. 4.8 – Mécanisme à $n = 4, d = 3$ dessiné à trois poses différentes. Les zonotopes de base des torseurs disponibles correspondants sont tracés à droite. Ce mécanisme présente une architecture qui s'apparente à celle de la SkyCam.

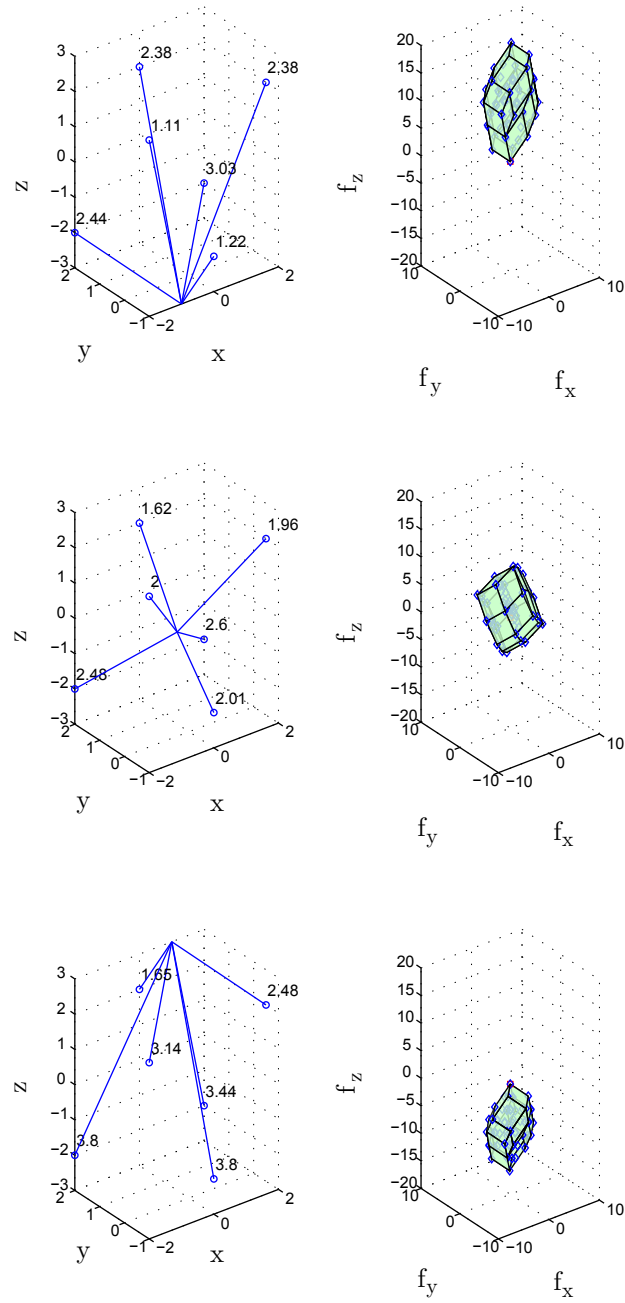


FIG. 4.9 – Mécanisme à $n = 6, d = 3$ dessiné à trois poses différentes. Les zonotopes de base des torseurs disponibles correspondants sont tracés à droite.

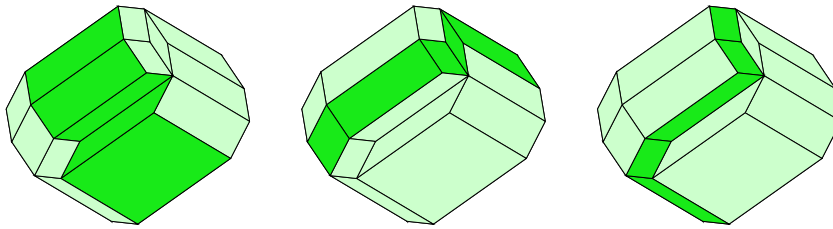


FIG. 4.10 – Trois différentes zones ceinturant un zonotope.

TAB. 4.1 – Classification des travaux dans la littérature sur la capacité d'un mécanisme à câble à générer des efforts.

$\underline{\mathbf{t}} \geq$	$\underline{\mathbf{t}} \leq$	$n = d$	$n > d$	Section
$\mathbf{0}$	∞	[50, 19]	[114, 82, 115, 116, 2, 121]	4.2.2.1
$\mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{t}}$	[110]	[117]	4.2.2.2
$\underline{\mathbf{t}}$	$\bar{\mathbf{t}}$		[86, 118, 119, 120]	4.2.2.3
$\underline{\mathbf{t}}$	∞			

chacun des types d'approche sont comparés pour un mécanisme donné. Ces approches s'adressent généralement soit aux mécanismes suspendus ou aux mécanismes pleinement contraints. Cette comparaison permettra de démontrer que la méthode présentée ici s'applique à tous ces cas.

Plusieurs de ces travaux étudient les espaces atteignables des mécanismes. Dans tous les cas, pour arriver à déterminer l'espace de travail, ils doivent d'abord déterminer les conditions pour qu'un ensemble de torseurs (parfois un seul torseur) puissent être générés dans une configuration donnée. Dans ce travail, on s'intéresse aux torseurs disponibles à une seule pose et non à l'espace de travail complet. Ainsi, la comparaison ne s'applique qu'à cette étape des différentes références.

4.2.2.1 Tension minimale nulle, tension maximale indéfinie

Dans [114], les auteurs étudient entre autres la statique des mécanismes à câbles considérant que les tensions dans les câbles doivent être positives. Ils y arrivent en étudiant les propriétés nécessaires de la matrice des torseurs unitaires \mathbf{W} . Ils suggèrent

que l'ensemble des torseurs disponibles est délimité par des hyperplans qui peuvent être définis à partir de $d - 1$ torseurs unitaires. Il s'agit d'un résultat important aussi utilisé dans [116] et plus tard dans ce chapitre pour la construction du zonotope. En fait, on verra que les faces du zonotope sont supportées par de tels hyperplans. Puisque l'analyse présentée dans [114] ne considère pas de tensions maximales, l'ensemble des torseurs disponibles délimité par les hyperplans correspond à l'enveloppe convexe ouverte des torseurs unitaires des câbles. Pour $n = d$, comme dans [19], l'enveloppe est un hypercône délimité par des hyperplans. Comme aucune tension maximale n'est considérée, les torseurs unitaires à l'intérieur de l'enveloppe convexe ne permettent pas de générer plus de torseurs à une pose donnée. En imposant une tension maximale, l'ensemble des torseurs disponibles devient un ensemble fermé et la forme de zonotope apparaît.

Les travaux dans [82, 115] traitent d'un mécanisme plan pleinement contraint. Pour une pose donnée, ils déterminent s'il existe une combinaison de tensions positives permettant de générer un torseur voulu. La solution correspond à la solution à norme minimale obtenue en utilisant la pseudo-inverse de \mathbf{W} , additionnée à $n - d$ vecteurs dans le noyau de la matrice \mathbf{W} . Dans la méthode présentée ici, si un torseur peut être généré, il sera à l'intérieur du zonotope. Ce point peut être projeté dans l'orthotope en utilisant l'inverse généralisée de \mathbf{W} , ce qui équivaut à aller de l'étape 3 à l'étape 2 dans la figure 4.4 ou la figure 4.5. Si $n > d$, il y aura aussi d'autres solutions qui seront ce point, additionné de vecteurs dans le noyau de la matrice \mathbf{W} . Dans le cas particulier où $n = d + 1$, le noyau sera une droite, tel que suggéré dans les autres publications. L'ensemble de toutes les combinaisons de tensions permettant de générer le torseur sera l'intersection du noyau de \mathbf{W} additionné de la solution à norme minimale et de l'orthotope.

Dans [2, 121], on définit les conditions pour qu'un mécanisme soit dans une *pose polyvalente*. Si c'est le cas, alors il peut générer un torseur dans n'importe quelle direction, considérant que les câbles doivent avoir une tension positive mais sans spécifier de tension maximale. D sera alors l'espace des torseurs dans son entier. Si on part de l'infini dans l'espace des torseurs et qu'on réduit la tension maximale admissible, alors la forme de zonotope apparaît. Si le mécanisme est dans une pose polyvalente, même si la tension maximale acceptable diminue, l'origine de l'espace des torseurs $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ demeurera strictement incluse dans le zonotope de base. Si le mécanisme n'est pas dans une pose polyvalente, alors l'origine de l'espace des torseurs sera un sommet du zonotope de base. Des exemples sont montrés aux figures 4.6, 4.7 et 4.9 où la pose du milieu

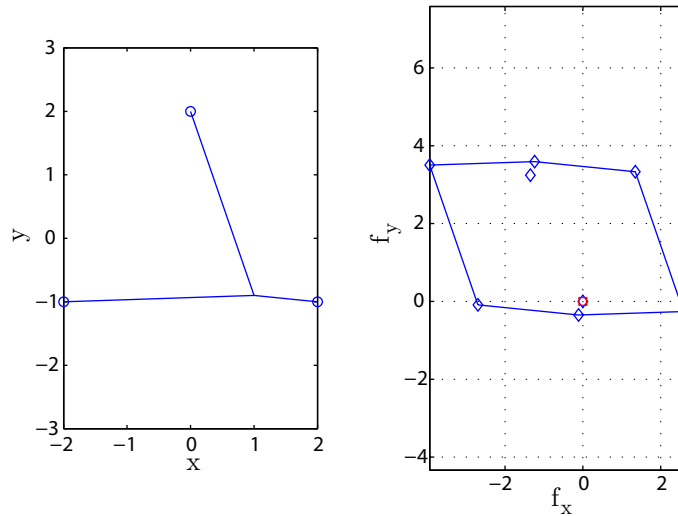


FIG. 4.11 – Exemple de pose polyvalente qui nécessiterait de très grandes tensions dans les câbles du bas pour générer une force en $-f_y$. Le zonotope de base tracé à droite montre qu'en respectant la limite de tension supérieure, l'amplitude de la force qu'il est possible de générer dans cette direction est très limitée.

dans chaque figure correspond à une pose polyvalente alors que les deux autres ne le sont pas.

En pratique, cette méthode peut être utilisée pour étudier ou optimiser un mécanisme [65], mais avec précaution. En effet, certains torseurs disponibles à une pose polyvalente peuvent nécessiter de très grandes tensions dans les câbles. La figure 4.11 montre un mécanisme dans une pose polyvalente. Son zonotope de base inclut par conséquent l'origine de l'espace des torseurs mais elle se trouve très près de la limite. En utilisant le zonotope, on se rend compte que la capacité de générer une force dans la direction $-f_y$ est très limitée si une tension maximale dans les câbles est imposée.

4.2.2.2 Tension minimale nulle, tension maximale finie

Dans [110], la limite sur les tensions maximales admissibles dans les câbles est imposée. Dans une publication du même groupe de chercheurs [117], on traite les cas jusqu'à $n = 4$, $d = 3$. Dans ces deux documents, le lecteur familier avec les zonotopes les reconnaîtra dans certaines des figures illustrant l'ensemble des torseurs disponibles. Cependant, les auteurs n'ont pas identifié cette entité géométrique et n'ont pu en arriver

à une façon générale de la construire pour un nombre arbitraire de câbles et de degrés de liberté. Ils ont remarqué, cependant, que l'ensemble des torseurs disponibles possède des faces parallèles et ont ainsi conclu qu'il s'agissait d'un hyperparallépipède, ce qui est presque vrai. En fait, un hyperparallépipède est un cas particulier de zonotope pour $n = d$ et leur affirmation n'est valide que dans cette condition. Puisqu'ils ne considèrent qu'une tension maximale et une tension minimale de zéro, l'espace des torseurs disponibles est le zonotope de base.

4.2.2.3 Tension minimale non nulle, tension maximale finie

On a vu au chapitre 2 qu'une tension minimale supérieure à zéro est nécessaire pour le fonctionnement du robot avec les câbles en régime tendu. On avait aussi montré qu'on aura avantage à varier la tension minimale selon le câble et la pose afin de tirer le maximum du mécanisme. Pour cette raison, d'autres chercheurs ont récemment porté leurs travaux sur la capacité des mécanismes à générer des efforts considérant à la fois une limite inférieure et supérieure de la tension.

Dans [86], les auteurs considèrent le problème homogène utilisant un rapport des tensions minimales et maximales. Ils considèrent ce rapport identique pour tous les câbles. L'ensemble des tensions disponibles définit donc un hypercube dans l'espace des tensions. Ces auteurs déterminent des conditions sur le rapport qui assurent qu'une solution se trouve dans l'hypercube. Si une solution existe, elle se trouve dans un ensemble formé de l'intersection du noyau de \mathbf{W} translaté et de l'hypercube. Les auteurs s'intéressent aussi aux problématiques pertinentes de déterminer la distribution optimale des tensions et d'assurer la continuité de la solution. La différence principale entre cette approche et celle présentée ici est qu'ici, on utilise les valeurs absolues des tensions et non leurs rapports. L'analyse présentée dans [86] est effectuée dans le domaine des tensions alors que celle présentée ici permet de tester la faisabilité d'un torseur directement dans l'espace des torseurs.

Une approche dans l'espace des tensions est aussi présentée dans [118]. Dans ce cas, l'objectif est de minimiser la norme du vecteur des tensions. Ils utilisent l'algorithme de projections alternatives de Dykstra pour trouver la projection d'un point sur l'intersection de deux ensembles convexes. Les ensembles convexes en question sont l'orthotope des tensions acceptables — celui illustré à l'étape deux des figures 4.4 et 4.5 — et le noyau de la matrice des torseurs unitaires translaté par la solution à norme minimale.

Grâce à l'algorithme de Dykstra, ils déterminent s'il existe un sous-ensemble commun à ces deux ensembles. Si une solution existe, la méthode détermine laquelle minimise la norme du vecteur des tensions. Sinon, elle retourne la distance minimale entre les deux ensembles, donnant une indication si le torseur à générer nécessite des tensions qui sont loin de l'orthotope. Bien que leur méthode converge à coup sûr, sa nature itérative fait qu'on ne peut prédire son temps de calcul, ce qui la rend inutilisable pour le contrôle en temps réel. Elle s'appliquera par ailleurs aussi au cas suspendu.

Dans [119], une analyse par intervalle est effectuée pour déterminer l'espace dans lequel le mécanisme peut générer des efforts dans toutes les directions considérant des tensions minimale et maximale quelconques pour chacun des câbles, mais constantes dans l'espace. Cette méthode les amène à définir une matrice d'intervalle des torseurs où chaque élément peut varier à l'intérieur d'une certaine plage dépendant de la plage de l'espace cartésien considérée. Comme ils s'intéressent à l'espace dans son ensemble et qu'ils le traitent numériquement, la nature de l'espace des torseurs à une pose n'est pas étudiée directement.

La capacité d'un mécanisme pleinement contraint à générer des efforts considérant des limites de tensions est présentée d'une autre façon dans [120]. Invoquant que l'analyse géométrique du problème devient compliquée pour les dimensions élevées, ils réduisent le problème en un système d'inégalités dans des dimensions plus petites. Leurs représentations des espaces des torseurs disponibles ont bel et bien l'allure de zonotopes. Cependant, leur méthode numérique ne couvre pas l'espace des torseurs uniformément et les limites de l'ensemble des torseurs disponibles ne sont par conséquent pas définies précisément. Encore une fois, les calculs nécessaires à cette méthode ne conviendraient probablement pas à un contexte de contrôle. Leur méthode ne s'appliquerait pas non plus au cas suspendu.

4.3 Construction de l'ensemble des torseurs disponibles

On sait que l'espace des torseurs disponibles a la forme d'un zonotope. On doit maintenant trouver la meilleure façon de le construire en vue de l'étape qui suivra, soit

de vérifier si un ensemble des torseurs de la tâche en fait partie ou pas.

Tel que mentionné précédemment, un zonotope est un polytope convexe. Deux représentations peuvent être utilisées pour décrire un polytope de ce type [122] : la représentation- \mathcal{V} (\mathcal{V} pour *vertex*, le terme anglais signifiant sommet) et la représentation- \mathcal{H} (\mathcal{H} pour hyperplan). La première consiste donc à définir les sommets du polytope alors que la seconde utilise les hyperplans qui supportent ses faces.

Un hyperplan est un objet géométrique qui sépare un espace en deux. Dans un espace en une dimension (une droite), un hyperplan est un point. Dans un espace à deux dimensions (un plan), un hyperplan est une droite. Pour un espace à trois dimensions, un hyperplan est un plan. Pour des dimensions supérieures, il ne possède pas de nom particulier mais l'idée reste la même : un hyperplan sépare un espace en deux mi-espaces. On dit d'un hyperplan qu'il *supporte* un ensemble E s'il remplit les deux conditions suivantes :

- E est complètement inclus dans un des deux mi-espaces séparés par l'hyperplan ;
- E a au moins un point contenu dans l'hyperplan.

Le théorème des plans supporteurs stipule que

si E est un ensemble convexe et \mathbf{p} est un point à la frontière de E , alors il existe un hyperplan supporteur qui contient \mathbf{p} .

Puisque les polytopes ont des faces planes et que dans notre cas ils sont convexes, ils peuvent être définis comme l'intersection de mi-espaces délimités par des hyperplans. Chaque face du polytope est comprise dans un hyperplan. Le polytope se trouve en entier d'un côté de chacun de ces hyperplans. Ainsi, soit le polytope des torseurs disponibles D , sa représentation- \mathcal{H} est

$$D = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{N}\mathbf{w} \leq \mathbf{d}\}, \quad (4.19)$$

où \mathbf{N} est une matrice dont chacune des lignes représente \mathbf{n}_j^T , un vecteur unitaire perpendiculaire à un hyperplan soutenant une face et pointant vers l'extérieur du polytope tel qu'illustré à la figure 4.12. Les éléments de \mathbf{d} peuvent être obtenus en fonction de la ligne \mathbf{n}_j^T correspondant et un point connu de l'hyperplan \mathbf{w}_{j_0} tel que

$$d_j = \mathbf{n}_j^T \mathbf{w}_{j_0}. \quad (4.20)$$

Pour un zonotope, chaque ligne de la matrice \mathbf{N} se répète à un signe près car chaque

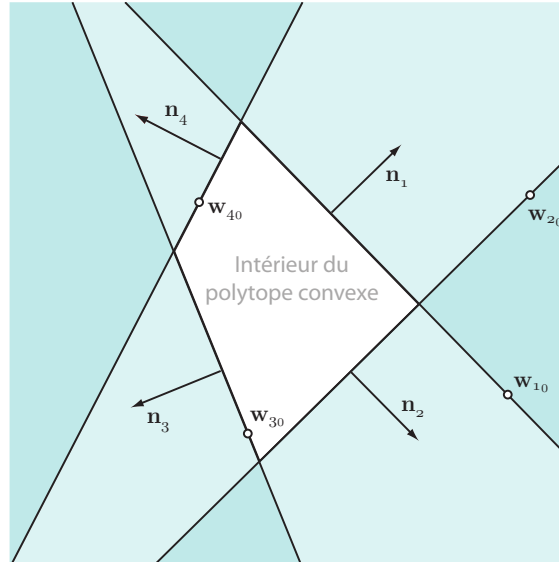


FIG. 4.12 – Vecteur normal et point dans un hyperplan pour illustrer l'équation 4.19.

hyperplan soutenant une face a un hyperplan qui lui est parallèle soutenant une face opposée. Cependant, les éléments de \mathbf{d} diffèrent pour chacune de ces deux lignes puisque les hyperplans contiennent des points différents.

Utilisant sa représentation- \mathcal{V} , le même polytope D peut se définir comme on décrit un maillage : une matrice contient l'information sur les position des sommets alors qu'une seconde matrice identifie les indices des sommets qui forment chacune des faces. Les deux représentations peuvent être utiles. La représentation- \mathcal{V} est bien adaptée à la visualisation. Toutes les figures de zonotope dans ce chapitre sont basées sur cette représentation. De l'autre côté, la représentation- \mathcal{H} est préférable pour la seconde étape de l'algorithme, qui consiste à tester la relation entre D et T . Quand tous les hyperplans supporteurs sont définis, on peut vérifier que T se trouve du côté de chacun d'eux correspondant à l'intérieur du zonotope, de façon similaire à ce qui a été fait dans [19, 114, 116]. La représentation- \mathcal{H} exprime ce problème de façon compacte, soit en un ensemble d'inégalités.

Deux méthodes pour la construction du zonotope sont expliquées : la *méthode de l'enveloppe convexe* et la *méthode par translation des hyperplans*. La première utilise un algorithme itératif et peut fournir les deux types de représentations. La seconde permet d'obtenir la représentation- \mathcal{H} et n'utilise pas d'algorithme itératif.

4.3.1 Méthode de l'enveloppe convexe

Soit l'ensemble $zone(Y)$ de l'équation 4.10 et l'ensemble H décrit par

$$H = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}_i, \alpha_i = \{0, 1\} \right\}, \quad (4.21)$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{0}, \mathbf{y}_i \} \right\}. \quad (4.22)$$

L'ensemble H est donc l'ensemble des points résultant des combinaisons possibles de vecteurs \mathbf{y}_i multipliés par 0 ou 1. Soit son enveloppe convexe dénotée $conv(H)$, on démontre dans [123] que

$$zone(Y) = conv(H). \quad (4.23)$$

Ainsi, un zonotope est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points dans l'équation 4.10 pour lesquels tous les α_i sont soit 0 ou 1 :

$$zone(Y) = conv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}_i, \alpha_i = \{0, 1\} \right\}. \quad (4.24)$$

Ceci implique qu'en calculant l'enveloppe convexe de toutes les combinaisons possibles de torseurs générés par soit une tension nulle ou une tension égale à Δt_i dans chaque câble, on obtient le zonotope de base. Ceci équivaut à dire que le zonotope de base est l'enveloppe convexe des sommets de l'orthotope projetés dans l'espace des torseurs. Les figures 4.4, 4.7 et 4.11 montrent ces combinaisons (losanges dans l'espace des torseurs) et leurs enveloppes convexes pour un mécanisme plan à 2-ddl et différents nombre de câbles.

Les sommets du zonotope correspondent donc à un changement de condition limite. Pour générer le torseur à un sommet du zonotope, chaque câble doit être à sa tension minimale ou maximale. Le long des arêtes, on passe d'une tension minimale à maximale dans un câble. Le nombre de points dont on a à déterminer l'enveloppe convexe pour obtenir le zonotope est 2^n . Il ne dépend donc que du nombre de câbles et non du nombre de degrés de liberté.

Il est possible d'obtenir rapidement une matrice \mathbf{C} dont les colonnes représentent toutes les combinaisons possibles de torseurs extrêmes :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{A}_\alpha, \quad (4.25)$$

où \mathbf{M} est donnée à l'équation 4.16. Chaque colonne de la matrice de permutation \mathbf{A}_α est un nombre binaire représentant un sommet de l'hypercube selon la convention $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$ où α_i sera 0 ou 1. Cette matrice a la dimension $n \times 2^n$. Par exemple, pour $n = 4$, elle prendra la forme :

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Chaque sommet de l'orthotope peut donc être identifié de façon unique par une combinaison de 0 et de 1 où chaque bit représente un câble, 0 indiquant la tension minimale et 1 la tension maximale. Par exemple, le vecteur $[1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ correspond à la situation où les câbles 1, 2 et 3 ont une tension maximale, alors que le câble 4 a une tension minimale. Ce sont ces sommets qui, une fois projetés dans l'espace des torseurs, deviendront possiblement les sommets du zonotope. Si $n = d$ (voir la figure 4.5), alors tous les sommets de l'orthotope deviendront des sommets du zonotope. Si $n > d$ (voir les figures 4.4 et 4.7), alors seulement certains sommets de l'orthotope seront convertis en sommets du zonotope. Les autres sommets, une fois projetés, se retrouveront à l'intérieur de l'enveloppe convexe qu'est le zonotope de base.

De par la symétrie centrale du zonotope, chaque sommet aura un sommet qui lui sera opposé se trouvant à la même distance du centre du zonotope et sur la droite reliant ce sommet au centre. De plus, les sommets opposés de la sorte correspondront à des conditions limites opposées. Par exemple, sur la figure 4.13, chaque sommet identifié par le nombre binaire \mathbf{n} aura comme sommet opposé $not(\mathbf{n})$.

Pour déterminer les hyperplans soutenant les faces du zonotope, on peut donc déterminer l'enveloppe convexe de cet ensemble de points extrêmes dans \mathbb{R}^d . On calcule alors l'enveloppe convexe de l'ensemble formé des vecteurs colonnes dans \mathbf{C} additionnés de $\mathbf{W}\mathbf{t}$. À cette fin, une procédure numérique tel que *quickhull* [124] mise en œuvre dans *Matlab* peut être utilisée. Cette méthode est largement répandue et produit l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Elle permet d'obtenir directement les coordonnées des hyperplans soutenant les faces sous forme d'un vecteur perpendiculaire unitaire pointant vers l'extérieur de l'enveloppe et d'un point compris dans l'hyperplan. Cette méthode permet donc d'obtenir une représentation du polytope sous la forme de l'équation 4.19. À la suite de cette opération, on aura en main une matrice des vecteurs perpendiculaires \mathbf{N} et un vecteur \mathbf{d} . Si la représentation- \mathcal{V} est préférable, le même

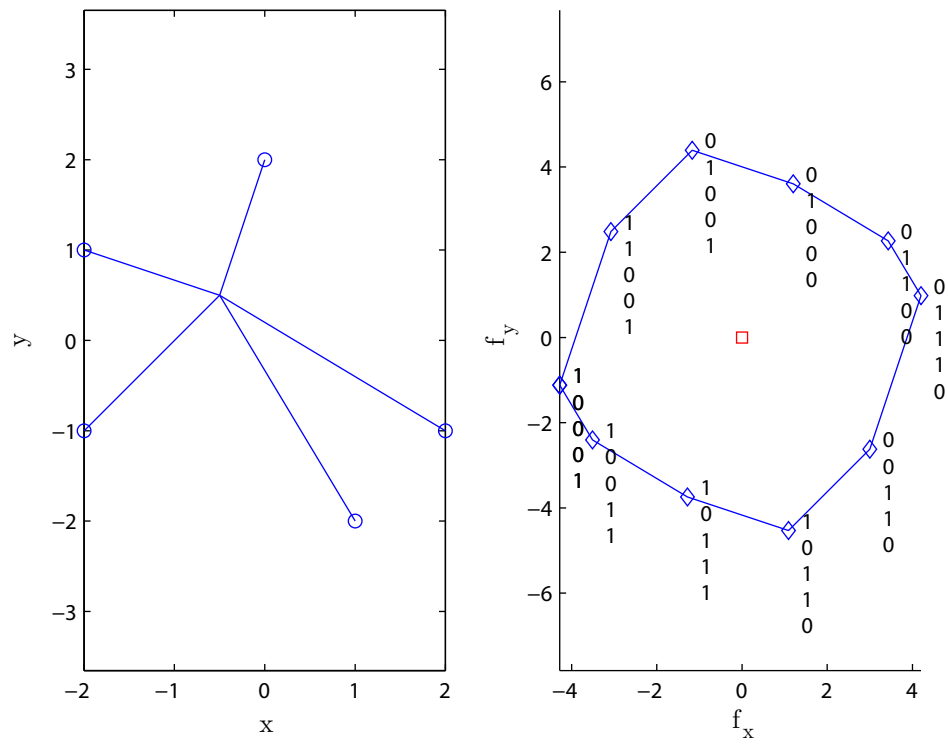


FIG. 4.13 – Mécanisme $n = 5, d = 2$ avec zonotope de base associé. Chaque sommet est identifié par le vecteur colonne de \mathbf{A}_α indiquant quelles conditions de tensions limites y sont rencontrées.

algorithme peut être utilisé sans problème. On aura alors une série de torseurs \mathbf{v}_i représentant les sommets du zonotope rassemblés trois par trois. Une procédure subséquente permettra de classer les sommets face par face.

4.3.2 Méthode par translation des hyperplans

Bien que *quickhull* soit habituellement rapide, une construction non itérative et robuste est tout de même désirable. Dans un contexte de contrôle en temps réel du robot, il est fortement souhaitable de pouvoir prédire le temps de calcul et que celui-ci soit constant, ce que *quickhull* ne peut garantir puisqu'il est itératif. Cet algorithme part de d points les plus espacés selon une dimension pour définir un hyperplan. À partir de cet hyperplan et de ces points, de nouveaux hyperplans sont obtenus en les combinant avec le point visible de l'hyperplan qui en est le plus loin. Cette étape est répétée avec tous les hyperplans intermédiaires générés jusqu'à ce que aucun point ne soit visible par un hyperplan.

C'est ce qui justifie la méthode par translation des hyperplans développée ici qui est inspirée de [111]. Ses différentes étapes sont expliquées ci-dessous. La deuxième étape est illustrée à la figure 4.14 pour les mêmes segments générateurs que ceux de la figure 4.3. Le résultat de cet exemple est montré à la figure 4.15. Si deux torseurs unitaires sont linéairement dépendants et que $n = d$, alors le mécanisme est dans une singularité et le robot ne peut plus contrôler tous les degrés de liberté. Dans ce cas, la méthode suivante ne fonctionnera pas. Si $n > d$, la méthode fonctionnera tant qu'il y aura un minimum de d torseurs unitaires linéairement indépendants.

1. **Définition d'un hyperplan initial** – On prend une combinaison possible de $d - 1$ torseurs unitaires \mathbf{w}_i qui peuvent définir \mathbf{n} , un vecteur unitaire perpendiculaire à un hyperplan. Les vecteurs restants qui ne sont pas utilisés pour définir l'hyperplan sont notés \mathbf{w}_j . De façon générale, \mathbf{n} se définit par :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad (4.27)$$

où

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 \times \cdots \times \mathbf{w}_{d-1}. \quad (4.28)$$

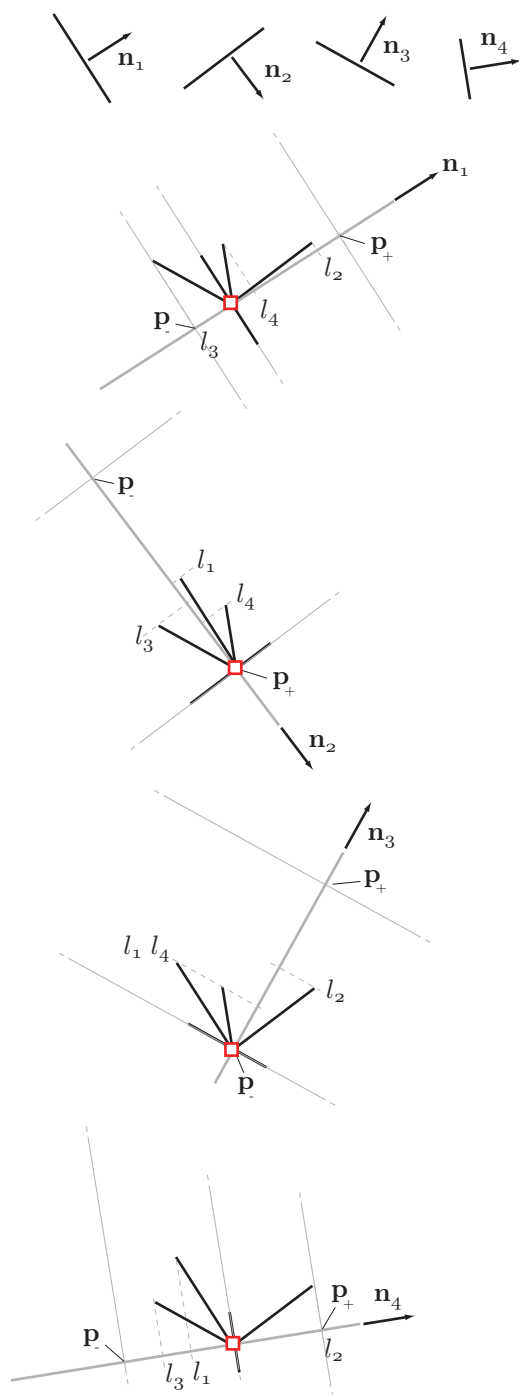


FIG. 4.14 – Translation de quatre hyperplans pour un mécanisme $d = 2, n = 4$.

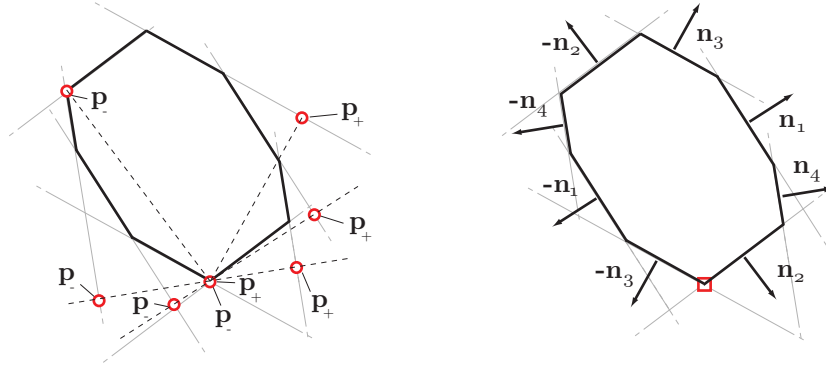


FIG. 4.15 – L'intersection de tous les mi-espaces délimités par les hyperplans supports forment le zonotope.

Le vecteur \mathbf{v} est donc obtenu en effectuant un généralisation du produit vectoriel. Sa k^e composante est

$$v_k = (-1)^{k+1} \det \begin{bmatrix} {}^k \mathbf{w}_1 & \dots & {}^k \mathbf{w}_{d-1} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

et la notation ${}^k \mathbf{w}_i$ représente \mathbf{w}_i avec sa k^e composante enlevée. Par exemple pour $d = 3$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$. Cette approche demande donc plusieurs opérations. Cependant, elle demandera toujours le même nombre d'opérations pour un mécanisme donné.

2. **Translation de l'hyperplan initial** – De par la nature du zonotope, deux de ses faces auront une normale parallèle à \mathbf{n} . Pour les définir complètement, nous avons besoin de cette normale et d'un point compris dans chacun de ces hyperplans, \mathbf{p}_+ et \mathbf{p}_- . On part de l'hyperplan initial possédant \mathbf{n} comme normale et contenant l'origine du repère. Ce sont donc les \mathbf{w}_i qui définissent l'orientation de deux faces parallèles à cet hyperplan. Puis, les \mathbf{w}_j définissent la position des faces ou encore de quelle façon l'hyperplan initial est translaté dans la direction de \mathbf{n} pour arriver aux plans supporteurs. Les points \mathbf{p}_+ et \mathbf{p}_- peuvent être définis selon une distance à partir de l'origine dans la direction de la normale. On cherche donc à déterminer ces deux distances h_+ et h_- , qui sont les projections des sommets de ces faces sur le vecteur \mathbf{n} . À cette fin, on obtient d'abord l_j , la projection des vecteurs \mathbf{w}_j sur la normale :

$$l_j = \mathbf{w}_j^T \mathbf{n}. \quad (4.30)$$

Aux sommets du zonotope, toutes les tensions sont minimales ou maximales. Pour cette raison, les deux distances recherchées seront le maximum et le minimum des

combinaisons de l_j pondérées par 0 ou Δt_j .

$$h_+ = \max \left(\sum_{j=1}^{n-(d-1)} \alpha_j \Delta t_j l_j, \alpha_j = \{0, 1\} \right), \quad (4.31)$$

$$h_- = \min \left(\sum_{j=1}^{n-(d-1)} \alpha_j \Delta t_j l_j, \alpha_j = \{0, 1\} \right). \quad (4.32)$$

L'hyperplan avec \mathbf{n} comme normale pointant vers l'extérieur contiendra donc le point

$$\mathbf{p}_+ = h_+ \mathbf{n} + \mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}, \quad (4.33)$$

alors que celui avec $-\mathbf{n}$ comme normale pointant vers l'extérieur contiendra le point

$$\mathbf{p}_- = h_- \mathbf{n} + \mathbf{W}\underline{\mathbf{t}}. \quad (4.34)$$

Il est à noter que ces points ne sont pas nécessairement sur des faces du zonotope, mais assurément sur les hyperplans supportant ces faces. Ils peuvent donc être sur le prolongement des faces. À chaque fois que cette étape est complétée, on obtient toute l'information nécessaire pour définir deux hyperplans supportant chacun une face du zonotope.

3. **Obtention de \mathbf{d} pour la représentation- \mathcal{H}** – Les étapes 1 et 2 sont répétées pour tous les hyperplans possibles avant de passer à l'étape 3. On détermine alors le vecteur \mathbf{d} grâce à l'équation 4.20 afin d'obtenir la représentation- \mathcal{H} de l'équation 4.19 .

De la même manière que la méthode de l'enveloppe convexe, la méthode par translation des hyperplans nécessite donc une analyse combinatoire. Elle pourrait être réalisée avec deux boucles, une pour les trois premières étapes et une à l'intérieur de l'étape 2. On préfère encore aborder le problème avec des matrices de permutation en évitant le plus possible les boucles de calculs imbriquées. La procédure Matlab effectuant ces opérations est à l'annexe B. Il s'agit en même temps d'un exemple utilisant des valeurs numériques.

4.4 Relation avec l'ensemble des torseurs de la tâche

Dans la section précédente, on a développé des façons de décrire l'ensemble des torseurs disponibles, soit par ses sommets ou par les hyperplans supportant ses faces. À partir de cette description et de la définition d'un espace des torseurs de la tâche T , on veut maintenant vérifier si l'expression 4.1 est vérifiée. Autrement dit, il faut déterminer si l'ensemble des torseurs de la tâche est complètement inclus dans l'ensemble des torseurs disponibles.

L'ensemble des torseurs de la tâche peut prendre une multitude de formes, selon l'application du mécanisme à câbles :

- Si on travaille en quasi-statique, T pourra être approximé à un point unique, soit le torseur nécessaire pour équilibrer la gravité.
- Si on veut pouvoir générer des efforts dans toutes les directions selon une certaine amplitude maximale, comme dans [110], T sera une hypersphère ou de façon plus générale un ellipsoïde.
- Si on veut générer plus ou moins une certaine amplitude d'effort dans toutes les directions de l'espace des torseurs, T sera alors un orthotope.
- Si on déplace la plate-forme principalement en suivant une surface, on voudra générer des accélérations dans le direction du plan tangent cette surface. T prendra alors la forme d'un disque autour de la position d'équilibre statique.

Ces exemples sont illustrés à la figure 4.16. Évidemment, il peut y avoir des formes plus particulières que les précédentes. Cependant, en pratique, ces formes sont typiques et apparaîtront dans une majorité de cas. Elles peuvent être regroupées en trois types génériques de forme d'ensemble : le point, le polytope convexe et l'ellipsoïde. Par ailleurs, un ensemble T de forme très irrégulière pourra être discrétisé et les méthodes suivantes utilisées.

4.4.1 Point

Si on ne considère qu'un torseur unique \mathbf{w}_0 , par exemple le torseur nécessaire à équilibrer la gravité, on est en présence du cas le plus simple où l'ensemble des torseurs de la tâche n'est qu'un point :

$$T = \{\mathbf{w}_0\}. \quad (4.35)$$

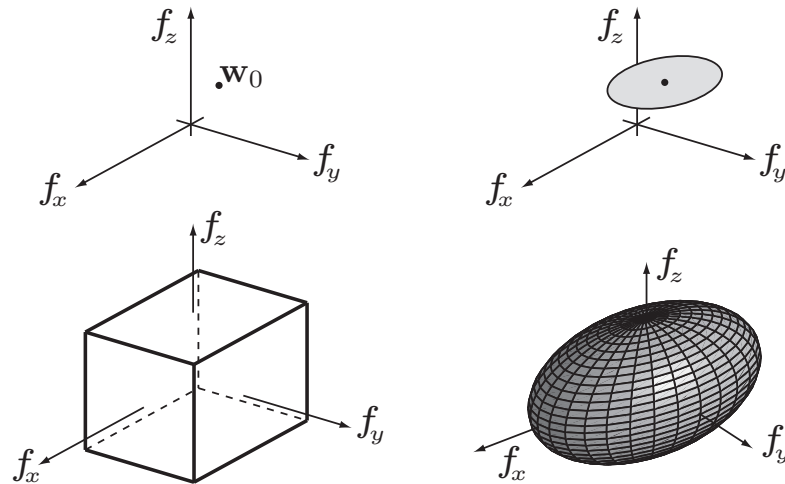


FIG. 4.16 – Exemple d'ensembles des torseurs de la tâche pour différentes applications.

Utilisant la représentation- \mathcal{H} , le problème consiste alors à vérifier directement l'inégalité vectorielle tirée de l'équation 4.19 :

$$\mathbf{N}\mathbf{w}_0 \leq \mathbf{d}. \quad (4.36)$$

Si et seulement si l'inégalité est vérifiée, alors le torseur se trouve du côté de tous les hyperplans correspondant à l'intérieur de D et il peut être généré.

4.4.2 Polytope convexe

Le polytope convexe le plus susceptible d'être rencontré en pratique est l'orthotope. Tel que mentionné précédemment, ce cas surviendra quand on voudra vérifier s'il est possible de générer toutes les combinaisons de torseurs entre un torseur minimal $\underline{\mathbf{w}}$ et un torseur maximal $\overline{\mathbf{w}}$ (voir à nouveau la figure 4.16).

D est un ensemble convexe. Pour qu'un ensemble soit défini de la sorte, il faut que tous les points sur un segment reliant deux points de l'ensemble fasse aussi partie de l'ensemble. Ainsi, si deux sommets reliés par un arête de T sont à l'intérieur de D , alors tous les points de cette arête sont aussi inclus dans D . De la même manière, si toutes les arêtes délimitant une face de T sont incluses dans D , alors tous les points de cette face font aussi partie dans D . Et comme T est aussi convexe, si toutes les faces le limitant sont dans D , alors $T \subset D$. Par conséquent, si les v_T sommets de T sont

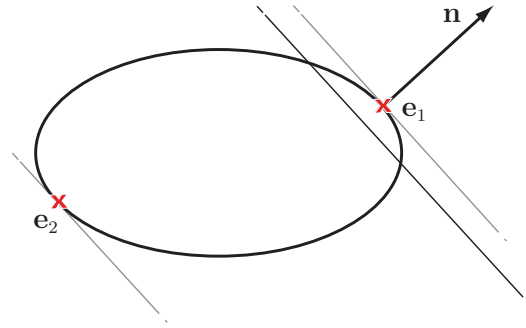


FIG. 4.17 – Exemple d’ellipse croisant une droite soutenant une face de l’espace des torseurs disponibles.

inclus dans T , alors tous les efforts désirés peuvent être générés. On peut donc modifier l’équation 4.36 pour obtenir un système d’inégalité matricielle :

$$\mathbf{NV} \leq \mathbf{D}, \quad (4.37)$$

où \mathbf{V} est une matrice $d \times v_T$ dont chaque colonne représente un sommet du polytope T et \mathbf{D} est une matrice dont toutes les colonnes sont le même vecteur \mathbf{d} . Pour que tous les torseurs désirés puissent être générés, il faut que tous les éléments de la matrice \mathbf{NV} soient inférieurs aux éléments correspondant de la matrice \mathbf{D} . Cette opération est très rapide à effectuer. Pour déterminer si un polytope convexe T est inclus dans D , l’idéal est donc d’avoir T dans sa représentation- \mathcal{V} et D dans sa représentation- \mathcal{H}

4.4.3 Ellipsoïde

Un espace désiré en forme d’hypersphère surviendra quand on voudra générer un effort d’une amplitude donnée dans toutes les directions du repère des torseurs. Comme dans certains cas certains axes seront des forces et d’autres axes des moments, l’hypersphère pourra être déformée en un ellipsoïde. En général, les axes de l’ellipsoïde seront alignés avec ceux du repère des torseurs et c’est le cas que l’on traite.

L’ellipsoïde est aussi un ensemble convexe. Puisque c’est un ensemble convexe fermé, continu et dont le gradient est continu, il existe en chaque point de la surface un seul hyperplan supporteur qui lui est tangent. Si un hyperplan croise un ellipsoïde, leur intersection est un sous-ensemble. À la limite, si ce sous-ensemble ne contient qu’un

point, alors ce sera assurément un point à la surface de l'ellipsoïde. L'hyperplan sera alors qualifié de supporteur. Il existera deux points $\mathbf{e}_{1,2}$ sur l'ellipsoïde qui auront une normale selon la direction d'un vecteur \mathbf{n} définissant l'orientation d'un hyperplan. Si ces deux points sont dans le même mi-espace délimité par l'hyperplan possédant \mathbf{n} comme normale, alors l'hyperplan ne croise pas l'ellipsoïde. Prenons par exemple un ellipsoïde en 2-ddl et un hyperplan, comme sur la figure 4.17. On peut affirmer que cet hyperplan intersecte l'ellipsoïde car les deux points \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont dans deux mi-espaces séparés par l'hyperplan. On visualise bien sur cette figure que, si la droite ne croisait pas l'ellipse, \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 seraient dans le même mi-espace délimité par la droite.

La méthode pour déterminer si un ellipsoïde est inclus dans D est donc la suivante :

1. Trouver tous les points à la surface de l'ellipsoïde ayant comme normale une des normales des hyperplans supportant les faces de D .
2. Tester le système d'inégalités de l'éq. 4.37 avec une matrice \mathbf{V} dont les colonnes sont les points déterminés à l'étape 1. Si tous ces points sont inclus dans D , alors $T \subset D$ et les efforts peuvent être générés.

On cherche à déterminer les coordonnées des points \mathbf{e} . L'équation d'un ellipsoïde dont les axes principaux sont alignés avec les axes du repère dans \mathbb{R}^d est donnée par

$$\frac{e_1^2}{a_1^2} + \frac{e_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{e_d^2}{a_d^2} = 1, \quad (4.38)$$

où e_j est la composante du point selon l'axe j du repère des torseurs et les différents a_j sont les demi-axes de l'ellipsoïde. Un vecteur perpendiculaire à la surface \mathbf{q} peut être obtenu en effectuant le gradient de l'expression de l'ellipse :

$$\mathbf{q} = \left[\frac{e_1}{a_1^2} \quad \frac{e_2}{a_2^2} \quad \cdots \quad \frac{e_d}{a_d^2} \right]^T, \quad (4.39)$$

$$= \text{diag}\left(\frac{1}{a_1^2}, \frac{1}{a_2^2}, \cdots, \frac{1}{a_d^2}\right)\mathbf{e} \quad (4.40)$$

Ce vecteur n'est pas normalisé. Si on veut l'égaliser au vecteur unitaire normal au plan \mathbf{n} , on obtient

$$\mathbf{q} = k\mathbf{n}. \quad (4.41)$$

Avec l'équation 4.40, la précédente devient :

$$\mathbf{e} = \text{diag}(a_1^2, a_2^2, \cdots, a_d^2)k\mathbf{n}. \quad (4.42)$$

À un facteur k près, on obtient la solution pour les coordonnées du point recherché. On utilise l'équation 4.38 décrivant l'ellipse pour établir la valeur de k permettant de

définir complètement les points \mathbf{e} .

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{(a_1 n_1)^2 + (a_2 n_2)^2 + \dots + (a_d n_d)^2}} \quad (4.43)$$

L'ambiguïté du signe vient de la racine carrée et correspond aux deux points sur l'ellipsoïde dont les normales sont parallèles à celle d'un hyperplan. Puisque chaque hyperplan supporteur en a un autre qui lui est parallèle sur le zonotope, en traitant seulement une moitié des hyperplans ayant tous des normales de directions différentes, on obtient tous les points sur l'ellipsoïde les plus susceptibles de se retrouver à l'extérieur du zonotope. Une fois tous ces points déterminés, on peut appliquer directement le même test que l'équation 4.37 avec une matrice \mathbf{V} donc chaque colonne est un des points \mathbf{e} identifié. Si l'ellipsoïde n'est pas centré à l'origine du repère mais plutôt à un torseur \mathbf{w}_0 , on peut additionner ce torseur aux points \mathbf{e} et fonctionner de la même façon.

4.5 Résumé

Dans ce chapitre, le concept d'ensemble des torseurs disponibles a été défini comme l'ensemble des torseurs que les câbles peuvent générer à la plate-forme, considérant que la tension dans chaque câble doit se situer à l'intérieur d'une certaine plage permise bornée. Pour qu'un torseur puisse être généré, il doit se trouver à l'intérieur de l'ensemble des torseurs disponibles qui, comme il a été démontré, forme un zonotope. La forme de ce zonotope dépend de la direction des torseurs unitaires des câbles et des plages de tensions disponibles dans chaque câble. Ces directions des torseurs unitaires des câbles, quant à elles, dépendent de l'architecture et de la pose du mécanisme.

Afin que n'importe quel torseur potentiellement nécessaire à une tâche puisse être généré, l'ensemble des torseurs de la tâche doit être un sous-ensemble de l'ensemble des torseurs disponibles. En exprimant ce dernier à l'aide d'un système d'inégalités, il est possible de tester rapidement cette condition² pour des ensembles de torseurs de la tâche de formes diverses.

La capacité de générer un effort à la plate-forme est une capacité fondamentale du mécanisme soumis à des contraintes pratiques de tensions minimales et maximales. Elle

est une des conditions à rencontrer pour qu'un mécanisme puisse accomplir une tâche à une pose donnée. Le chapitre suivante complète la liste des conditions nécessaires à l'optimisation de la géométrie d'un mécanisme en fonction d'une tâche donnée.

TAB. 4.2: Valeurs numériques utilisées dans différentes figures et extensions du présent chapitre. $\underline{\mathbf{t}}_{stm}$ signifie que la tension minimale est obtenue par la surface de tension minimale.

Fig. N°	Ext. N°	\mathbf{p} [m]	$[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]$ [m]	$\underline{\mathbf{t}}$ [N]	$\bar{\mathbf{t}}$ [N]
4.4	–	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0,5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
4.5	–	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 0,5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
4.6	1	$\begin{bmatrix} -3, \dots, 3 \\ -1, \dots, 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2,5 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$
4.7	2	$\begin{bmatrix} -1, \dots, 1 \\ -2, \dots, 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -0,5 & 2 & 1,5 & 0,3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,76 \\ 0,46 \\ 0,02 \\ 0,82 \\ 0,44 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6,2 \\ 7,9 \\ 9,2 \\ 7,4 \\ 1,8 \end{bmatrix}$
4.8	3	$\begin{bmatrix} -75, \dots, 75 \\ -75, \dots, 0 \\ 20, \dots, 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -100 & -100 & 100 & 100 \\ 75 & -75 & -75 & 75 \\ 60 & 60 & 60 & 60 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$
4.9	4	$\begin{bmatrix} -1, \dots, 1 \\ -1, \dots, 2 \\ -3, \dots, 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -0,5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$	$\underline{\mathbf{t}}_{stm}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

4.13	–	$\begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,05 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,4 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
------	---	--	---	---	---

Chapitre 5

Optimisation de la géométrie pour une tâche donnée

*“Everything that can be counted does not necessarily count;
everything that counts cannot necessarily be counted.”*
—Albert Einstein

Cette partie de la thèse présente une méthode qui a été utilisée pour optimiser l’architecture d’un mécanisme en fonction d’une tâche. On définit d’abord ce qui est entendu par tâche : un ensemble de poses à atteindre et un ensemble de torseurs à générer à chaque pose. Les quatre conditions nécessaires pour que le mécanisme puisse accomplir une tâche donnée sont énoncées. Ces pré-requis sont que le mécanisme doit être capable de générer les torseurs nécessaires, les câbles ne doivent pas interférer entre eux ou avec la plate-forme et les longueurs des câbles doivent demeurer à l’intérieur d’une certaine plage permise. Ces quatre conditions servent à définir quatre ensembles dont l’intersection constitue l’espace atteignable du mécanisme en regard de la tâche. Afin d’optimiser le mécanisme, on vise à maximiser la proportion de l’espace désiré qui est incluse dans l’espace atteignable. Cette fonction objectif est intégrée

dans un algorithme d'optimisation hybride pour obtenir une solution satisfaisante. L'approche fait appel, entre autres, à un algorithme génétique. Il est expliqué comment un tel algorithme peut être utilisé dans le contexte d'optimisation d'un robot à câbles.

5.1 Définition du problème

La géométrie d'un robot à câbles est définie par l'ensemble des points \mathbf{b}_i et ${}^{\mathcal{P}}\mathbf{a}_i$ correspondant aux points d'attache des câbles sur la base fixe et sur la plate-forme mobile respectivement, la dernière position étant exprimée dans le repère attaché à la plate-forme. Toutes ces variables peuvent être définies par les paramètres géométriques du robot rassemblés dans le vecteur $\boldsymbol{\xi}$. Ce vecteur contient le nombre minimum d'éléments permettant de décrire les points d'attache. Parfois, un point dans l'espace sera contraint dans certaines directions et moins de trois variables seront nécessaires pour le définir. C'est le cas s'il doit suivre un rail ou un mur, par exemple. Les positions de ces points ont un impact considérable sur la performance du robot selon la tâche qu'il doit accomplir. Une architecture peut tout à fait convenir pour une application et être très mauvaise pour une autre. Par exemple, l'architecture de la SkyCam [28] permet de déplacer efficacement une caméra sur de longues distances mais ne pourrait servir de palonnier capable de retour d'effort selon six degrés de liberté [62, 125].

Dans le contexte des robots à câbles déployables ou reconfigurables, on voudra spécialiser le mécanisme en regard d'une tâche donnée. En effet, la maximisation du volume de l'espace de travail ne donnera pas nécessairement le mécanisme le plus performant pour une tâche particulière, qui peut être très exigeante (ex. [19, 65]). De plus, le fait que les câbles ne peuvent que tirer réduit davantage l'espace de travail. Ainsi, pour qu'un robot à câbles réussisse à accomplir une tâche, il sera non seulement souhaitable, mais souvent nécessaire d'optimiser son architecture spécifiquement pour cette tâche.

L'optimisation de la géométrie des mécanismes traitée dans ce chapitre a donc pour objectif de déterminer la meilleure architecture en regard d'une tâche donnée. Une tâche est définie par deux types d'ensembles, un ensemble de poses et un ensemble de torseurs en fonction de la pose :

1. L'espace désiré P , l'ensemble des poses qui doivent idéalement être atteintes ;
2. L'ensemble des torseurs nécessaires à la tâche à chacune des poses $T(\mathbf{x})$.

5.2 Conditions nécessaires permettant la réalisation d'une tâche.

Pour qu'une tâche puisse être accomplie par un mécanisme à câbles à une pose donnée, quatre conditions doivent être respectées :

1. Les câbles doivent pouvoir générer les torseurs nécessaires à la tâche.

Le mécanisme doit être capable de générer les torseurs nécessaires à la tâche à une pose tout en respectant la plage de tensions acceptables selon l'équation 4.1. Tel que discuté au chapitre 2, en dessous d'une certaine tension, le câble présentera une faible raideur due au fléchissement. En deçà de cette tension seuil, le câble ne pourra être considéré droit et l'analyse de la capacité à générer des efforts présentée dans cette thèse ne tient plus. On devra alors complexifier le contrôle pour tenir compte du fléchissement comme dans [15, 22, 23, 24]. Puisqu'on ne s'intéresse ici qu'au cas où les câbles peuvent être considérés droits, on impose une tension minimale selon le câble et aussi selon la pose du mécanisme. Elle sera donnée par la surface de tension minimale présentée au chapitre 2, déterminée a priori en fonction du matériau du câble utilisé. À l'autre extrême, le câble aura une certaine résistance maximale et l'actionneur ne pourra excéder un certain couple, ce qui imposera une tension maximale acceptable. Généralement, les actionneurs et le matériau seront les mêmes pour tous les câbles, ce qui leur imposera une même tension maximale.

2. Les câbles ne doivent pas interférer entre eux.

Une interférence entre deux câbles signifie que les câbles se touchent à un endroit autre que leurs points d'attache, qui peuvent être communs. Aucune interférence de câbles ne doit survenir entre une pose donnée et la pose précédente dans la trajectoire. Cette problématique devient pertinente surtout pour les robots à six degrés de liberté. Comme les câbles ne peuvent travailler qu'en tension, les architectures aux câbles croisés permettent généralement de générer une plus grande variété de moments sur la plate-forme. Cependant, le croisement des câbles augmente le risque qu'ils interfèrent entre eux durant le fonctionnement, ce qui

doit évidemment être évité pour simplifier le contrôle. En pratique, il y aura une incertitude sur la position des points d'attache, un fléchissement infime et un diamètre du câble. Ainsi, pour s'assurer que les câbles n'interféreront pas, on fera en sorte que la distance entre les câbles ne soit pas en deçà d'une certaine distance minimale acceptable.

3. **Les câbles ne doivent pas interférer avec la plate-forme.**

On devra considérer une forme géométrique approximative de la plate-forme. Dans certains cas, on devra aussi considérer que les câbles n'interfèrent pas avec la fonctionnalité de la plate-forme. Par exemple, si le robot est utilisé pour déplacer une caméra et que le câble se trouve dans le champ de vue, ce sera aussi considéré comme une interférence avec la plate-forme.

4. **La longueur des câbles doit être comprise entre une longueur minimale et une longueur maximale.**

Pour une application réelle, la longueur des câbles doit demeurer à l'intérieur d'une certaine plage. La longueur minimale correspond généralement à un câble complètement enroulé, alors que la longueur maximale correspond approximativement à la longueur de câble enroulé à l'actionneur.

Ainsi, l'espace atteignable E d'un robot à câbles en regard d'une tâche donnée est l'intersection de quatre ensembles de poses :

1. E_T , **l'espace de génération des torseurs**, dans lequel les torseurs nécessaires à la tâche peuvent être générés tout en respectant les limites de tension dans les câbles ;
2. E_d , **l'espace libre d'interférence entre les câbles**, dans lequel tous les câbles demeurent à une certaine distance les uns des autres pour s'assurer qu'ils n'interfèrent pas entre eux ;
3. E_{pf} , **l'espace libre d'interférence câbles plate-forme**, dans lequel aucun câble n'interfère avec l'espace occupé par la plate-forme ;
4. E_ρ , **l'espace des longueurs permises**, dans lequel tous les câbles ont une longueur dans la plage permise.

Globalement, l'espace atteignable considéré s'énonce

$$E = E_T \cap E_d \cap E_{pf} \cap E_\rho. \quad (5.1)$$

5.2.1 Espace de génération des torseurs

L'espace de génération des torseurs est donné par

$$E_T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid T(\mathbf{x}) \subset D(\mathbf{x})\}. \quad (5.2)$$

où $T(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x})$ sont respectivement l'ensemble des torseurs nécessaires à la tâche et l'ensemble des torseurs disponibles. La relation entre les deux ensembles a été discutée en détails au chapitre précédent. Cet espace tient généralement compte des singularités de type parallèle à condition que les degrés de liberté sur lesquels le contrôle est perdu à la singularité se trouvent représentés dans l'ensemble des torseurs de la tâche. Si un mécanisme perd la capacité de générer des efforts selon une direction et que l'ensemble des torseurs de la tâche inclut des torseurs selon cette direction, alors cette pose ne fera pas partie de E_T .

5.2.2 Espace libre d'interférence entre les câbles

L'espace libre d'interférence entre les câbles est donné par

$$E_d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid d_{ij} \geq \underline{d}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j\}, \quad (5.3)$$

où d_{ij} est la distance minimale entre les câbles i et j . Une pose est dans E_d si tous les câbles ont une distance suffisante entre eux, la distance minimale requise étant \underline{d} . Deux câbles peuvent dans ce cas être considérés comme deux segments de droites dans l'espace \mathbb{R}^3 . L'occurrence de deux droites qui se croisent nécessite des conditions très précises. Une infime variation de ces conditions fera en sorte que les droites ne s'intersecteront plus. C'est pourquoi on impose une distance minimale entre les câbles afin d'éviter les lieux bien précis où les câbles se croisent.

Deux segments de droites représentant des câbles sont montrés à la figure 5.1. L'équation de boucle vectorielle allant du point \mathbf{a}_i jusqu'au point \mathbf{a}_j s'écrit :

$$\mathbf{a}_i + d_i \mathbf{u}_i + d_{ij} \mathbf{n}_{ij} - d_j \mathbf{u}_j = \mathbf{a}_j, \quad (5.4)$$

où d_i , d_j et d_{ij} sont des distances que l'on cherche à déterminer. Le vecteur \mathbf{u}_i est le vecteur unitaire dans la direction du câble i et le vecteur \mathbf{n}_{ij} est le vecteur unitaire

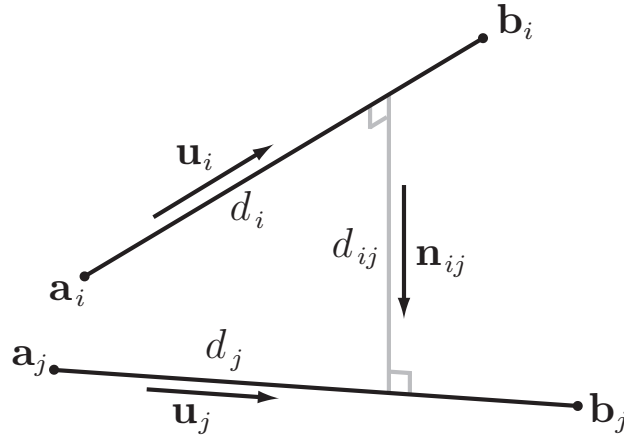


FIG. 5.1 – Deux câbles et la distance minimale les séparant.

perpendiculaire aux deux droites supportant les segments tel que

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j\|}. \quad (5.5)$$

L'équation 5.4 peut être remaniée pour obtenir la forme vectorielle

$$\mathbf{M}\mathbf{d} = \Delta\mathbf{a}, \quad (5.6)$$

où

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i & -\mathbf{u}_j & \mathbf{n}_{ij} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_i & d_j & d_{ij} \end{bmatrix}^T, \quad (5.8)$$

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i. \quad (5.9)$$

À une pose, on peut tester directement si deux câbles ont une distance insuffisante entre eux. Si c'est le cas, il existera une solution \mathbf{d} à l'équation 5.6 respectant les conditions

$$-\underline{d} \leq d_{ij} \leq \underline{d}, \quad (5.10)$$

$$0 < d_i < \rho_i, \quad (5.11)$$

$$0 < d_j < \rho_j, \quad (5.12)$$

où \underline{d} est la distance minimale entre deux câbles et $\rho_i = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i\|$ (la longueur du câble i). Ces conditions ne seront valides que pour des câbles qui n'ont pas de points d'attache en commun. Dans ce dernier cas, les câbles se croiseront mais ce sera soit à la base, ou plus souvent à la plate-forme. S'ils se croisent à l'un ou l'autre de ces endroits, il ne

se croiseront pas ailleurs. Cependant, puisque la méthode teste les deux points les plus rapprochés entre deux droites, il pourrait survenir des cas où la distance minimale serait entre deux points qui ne sont pas sur les segments, mais que les segments eux-mêmes ne seraient pas à une distance suffisante. On doit donc valider que

$$(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)^T(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) > \underline{d}^2, \quad (5.13)$$

$$(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_i)^T(\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_i) > \underline{d}^2, \quad (5.14)$$

$$(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_i)^T(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_i) > \underline{d}^2, \quad (5.15)$$

$$(\mathbf{a}_j - \mathbf{b}_i)^T(\mathbf{a}_j - \mathbf{b}_i) > \underline{d}^2. \quad (5.16)$$

Les conditions des équations 5.13 et 5.14 ne dépendent pas de la pose. Elles peuvent donc être testées une fois pour une architecture donnée. Les conditions des équations 5.15 et 5.16 dépendent de la pose. En pratique, pour la plupart des applications, elles sont peu susceptibles de survenir car elles impliqueraient que la plate-forme puisse se trouver à une distance inférieure à \underline{d} de la base. Si l'application considérée comporte un risque que cela survienne, alors ces conditions doivent aussi être testées. Sinon, on peut se contenter de tester les conditions découlant de l'équation 5.6, ce qui est fait pour la suite.

L'équation 5.6 devant respecter les inégalités précédentes a une forme similaire au problème de l'équation 4.3 respectant les conditions de l'équation 4.4. L'ensemble des $\Delta \mathbf{a}$ qui impliquent une distance insuffisante a donc la forme d'un zonoèdre peu complexe. Il n'est pas nécessaire de pousser aussi loin l'analyse car le problème est beaucoup plus simple. Contrairement à ce qui a été fait au chapitre précédent, les dimensions impliquées sont ici toujours les mêmes et la matrice \mathbf{M} est carrée. On peut tout de même utiliser ce bagage pour visualiser le présent problème, comme à la figure 5.2.

Dans l'espace des distances dont les axes sont d_i , d_j et d_{ij} , les conditions précédentes définissent la longueur des arêtes d'un prisme rectangulaire. Ce prisme est l'ensemble des longueurs pour lesquelles les deux câbles sont à une distance insuffisante. Pour que deux câbles soient trop proches, il faut que la distance minimale entre les deux droites les soutenant soit entre $\pm \underline{d}$, et que cette distance minimale soit entre deux points des droites qui sont sur les segments représentant les câbles. Ces segments correspondent à $0 < d_i < \rho_i$ et $0 < d_j < \rho_j$. La matrice \mathbf{M} déforme ce prisme et le projette dans l'espace cartésien. Si $\Delta \mathbf{a}$ est inclus dans cet ensemble, alors les câbles sont à une distance insuffisante. Comme le problème est déterminé, on peut utiliser l'inverse de la matrice \mathbf{M} pour projeter $\Delta \mathbf{a}$, qui est connu, dans l'espace des longueurs. On obtient directement

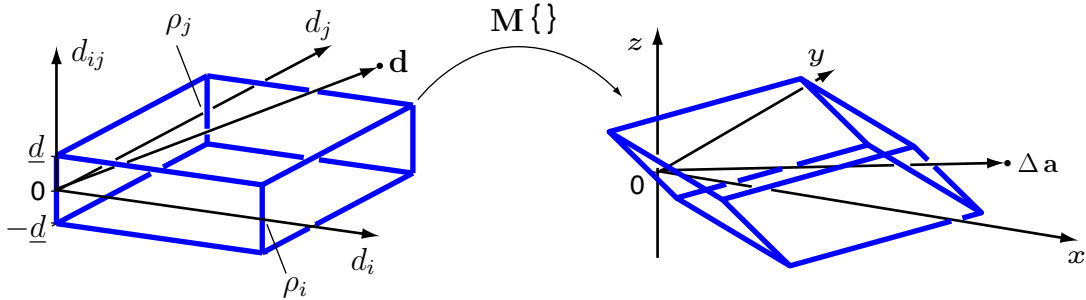


FIG. 5.2 – Illustration des conditions nécessaires pour que la distance entre deux câbles soit insuffisante. Dans cet exemple, la distance entre les câbles est suffisante car \mathbf{d} est à l'extérieur du prisme rectangulaire.

\mathbf{d} , puis les inégalités sont vérifiées. Ceci peut être accompli pour tester si, à une pose donnée, la distance entre les câbles est acceptable. L'espace E_d correspond donc à l'ensemble des poses pour lesquelles tous les vecteurs \mathbf{d} sont à l'extérieur du prisme rectangulaire de la figure 5.2.

Comme on le verra plus tard, on discrétise l'espace désiré dans le processus d'optimisation. Il se peut donc qu'entre deux poses testées, on saute par dessus une région où les câbles sont à une distance insuffisante, voire où ils se croisent. On devra donc vérifier qu'entre deux solutions consécutives de l'équation 5.6, on ne croise pas le prisme rectangulaire tel qu'illustré à la figure 5.3. On considère des poses assez proches l'une de l'autre pour approximer le trajet entre les deux vecteurs \mathbf{d} comme un segment de droite et on utilise les longueurs maximales de câbles entre les deux poses pour définir le prisme. Si entre les deux poses le prisme est croisé par ce segment, alors on traverse une région qui ne fait pas partie de l'espace libre d'interférence. Une itération est dénotée k et la suivante $k + 1$

1. Vérifier que les deux extrémités du segment ne sont pas dans le prisme ;
2. Si elles ne le sont pas, vérifier ensuite que le segment ne croise aucune des faces.

Or, dans [126], on présente une méthode demandant moins de calculs et qui est moins assujettie aux erreurs d'arrondis numériques. Elle est illustrée à la figure 5.4. Elle consiste à résoudre un système équivalent qui évite d'avoir à trouver le point d'intersection entre un segment et six parties de plans. Ce nouveau problème est de vérifier si un polyèdre particulier inclut \mathbf{c}_p , le point au centre du prisme. Ce polyèdre est le volume du prisme

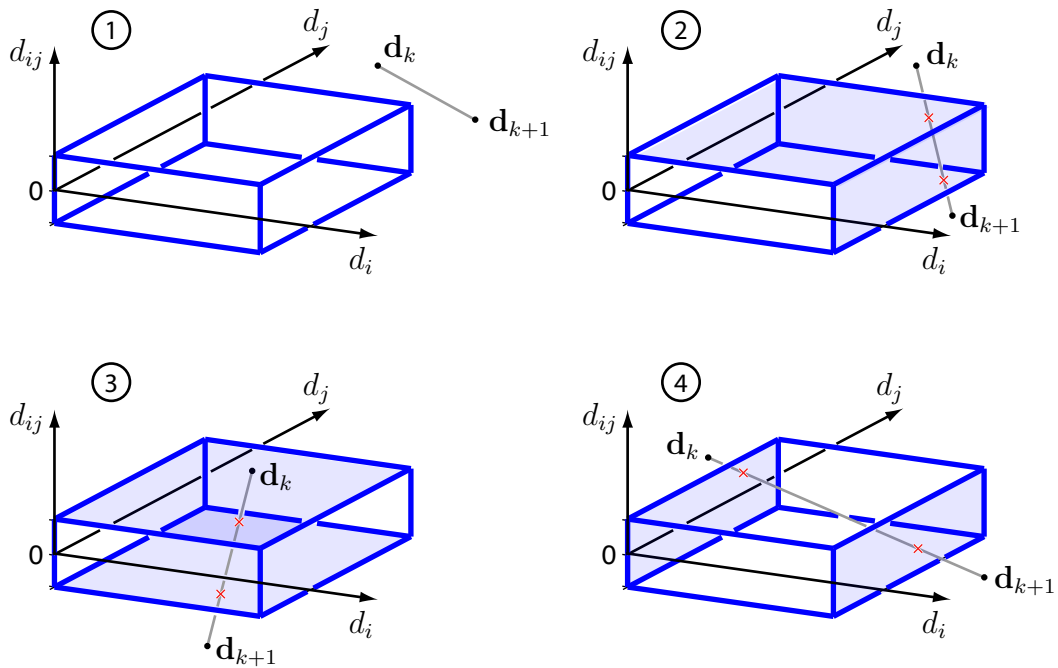


FIG. 5.3 – Différents cas possibles de deux solutions de \mathbf{d} pour deux poses consécutives testées, soit \mathbf{d}_k et \mathbf{d}_{k+1} . En 1, la trajectoire ne passe pas dans une zone où la distance minimale entre deux câbles n'est pas respectée. Dans les trois autres cas, on passe par une région où la distance minimale n'est pas respectée.

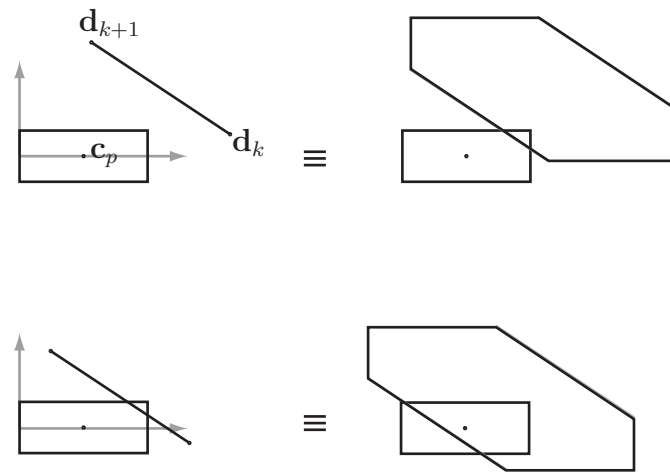


FIG. 5.4 – Illustration en 2D de la méthode pour vérifier l'interférence entre un segment et un polygone. À gauche on montre le problème initial et à droite un problème équivalent. Dans l'exemple du haut, il n'y a pas d'intersection entre le segment et le rectangle. Par conséquent, dans le problème équivalent de droite, le centre du rectangle est à l'extérieur du rectangle glissé le long du segment. Dans celui du bas, il y a une interférence et le centre du rectangle est inclus dans le rectangle glissé le long du segment.

déplacé le long du segment. Autrement dit, il s'agit de la somme de Minkowski de deux ensembles, un premier représentant le prisme et le second représentant le segment. Or, puisque le prisme peut lui-même être défini comme une somme de Minkowski de trois segments, il s'agit encore d'un zonotope, généré par quatre segments. Puisque le zonotope est obtenu en glissant un prisme rectangulaire le long d'un segment, le volume obtenu est de façon générale un dodécaèdre. Selon l'orientation du segment par rapport au prisme rectangulaire, il se pourrait aussi qu'il soit un octaèdre ou encore un prisme rectangulaire. Son expression est

$$V = zone\{S_i, S_j, S_{ij}, S_d\} \oplus \{\mathbf{d}_k - \mathbf{c}_p\}, \quad (5.17)$$

où les segments générateurs sont :

$$S_i = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{d} = \alpha \begin{bmatrix} \rho_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, 0 < \alpha < 1\}, \quad (5.18)$$

$$S_j = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{d} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & \rho_j & 0 \end{bmatrix}^T, 0 < \alpha < 1\}, \quad (5.19)$$

$$S_{ij} = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{d} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{d} \end{bmatrix}^T, -1 \leq \alpha \leq 1\}, \quad (5.20)$$

$$S_d = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{d} = \alpha(\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k), 0 \leq \alpha \leq 1\}. \quad (5.21)$$

Grâce à la méthode de translation des hyperplans présentée à la section 4.3.2, on peut obtenir une représentation- \mathcal{H} du polyèdre, puis tester un système d'inégalité

$$\mathbf{N}\mathbf{c}_p \leq \mathbf{d} \quad (5.22)$$

où \mathbf{N} et \mathbf{d} définissent les hyperplans supporteurs. La figure 5.5 montre un cas où il y a interférence entre le segment et le prisme. La figure 5.6 montre le cas inverse.

À la limite, si on considère la distance minimale nécessaire entre deux câbles comme étant zéro ($\underline{d} = 0$), on n'effectuera que le test entre deux poses puisque l'occurrence de l'intersection demande des conditions précises qu'il serait très improbable de rencontrer à une pose donnée de l'espace discrétisé. Dans ce cas, le prisme s'aplatit pour devenir un rectangle dans l'espace. Si entre deux poses le segment croise le plan $d_{ij} = 0$ pour $0 < d_i < \rho_i$ et $0 < d_j < \rho_j$, alors on considère qu'il y a intersection de câbles entre les deux poses (voir figure 5.7).

Chaque combinaison de deux câbles doit être testée à chaque pose. Ainsi, le nombre de paires de câbles à vérifier est le nombre de combinaisons différentes de n câbles pris deux par deux, soit $\frac{n!}{2(n-2)!}$.

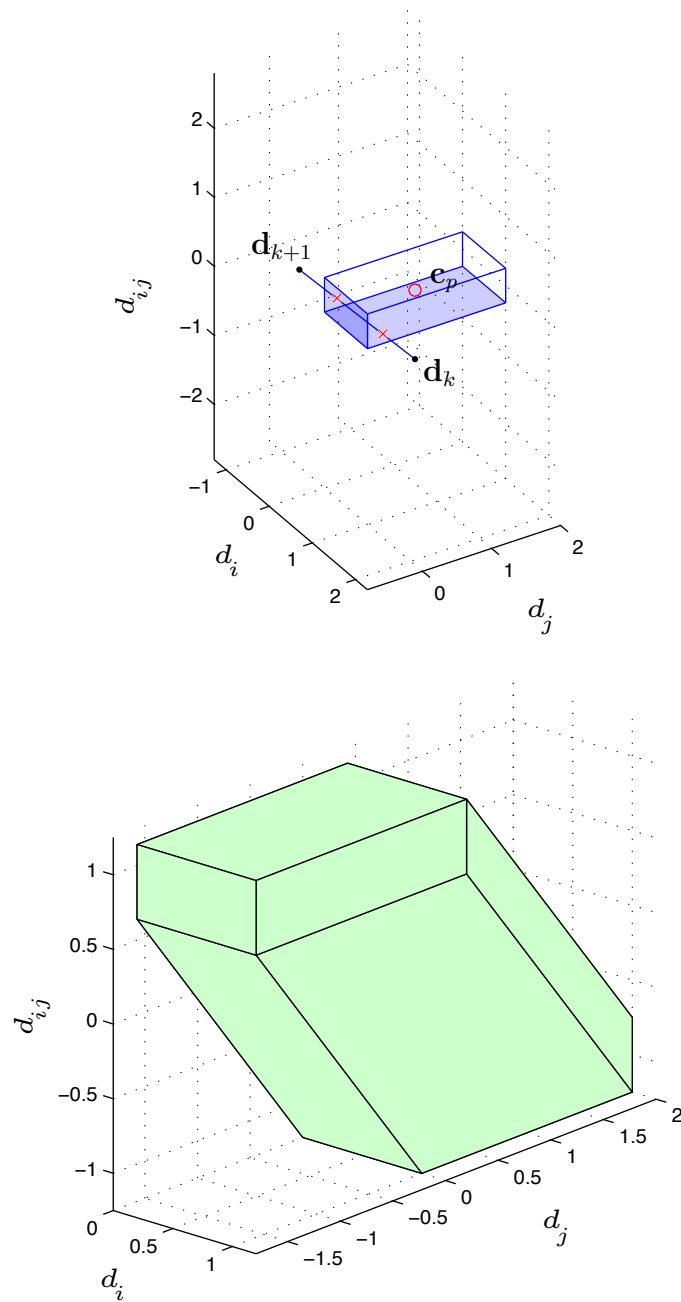


FIG. 5.5 – Deux poses successives où la distance minimale n'est pas respectée. Le centre du prisme initial est à l'intérieur de V .

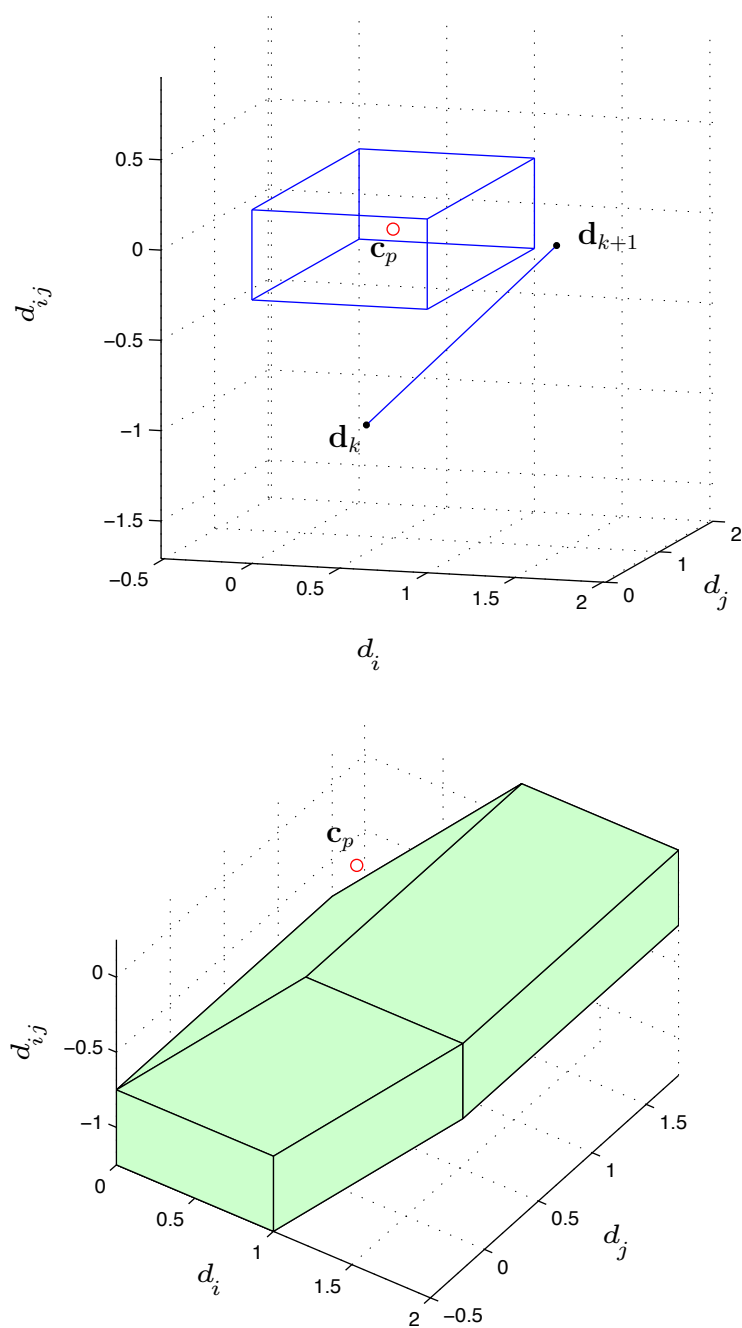


FIG. 5.6 – Deux poses successives où la distance est respectée. Le centre du prisme initial est à l'extérieur de V .

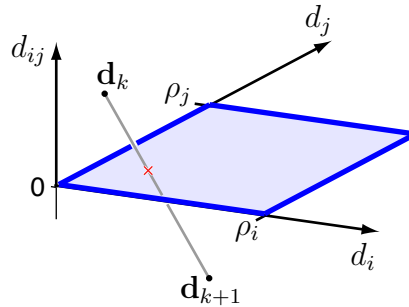


FIG. 5.7 – Croisement de câbles entre deux poses testées considérant une distance minimale entre les câbles nulle.

5.2.3 Espace libre d'interférence câbles plate-forme

Mis à part le cas d'une plate-forme ponctuelle, un certain espace qui dépendra de la pose devra être libre de câbles pour faire place à la plate-forme. Cet espace correspond à l'ensemble des positions de l'espace cartésien V_{pf} qu'occupe la plate-forme. Il peut aussi inclure un espace où aucun câble ne doit se trouver pour ne pas interférer avec un capteur embarqué, comme le champ de vue d'une caméra par exemple. Une particularité de ce problème d'intersection entre un segment et un volume est que le segment touchera toujours au volume à au moins un point, soit où le câble s'attache à la plate-forme. L'espace libre d'interférence câbles plate-forme se définit comme

$$E_{pf} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid V_{pf} \cap C_i = \emptyset, i = 1, \dots, n\}, \quad (5.23)$$

où C_i est l'ensemble des positions de l'espace cartésien occupés par le câble i , excluant le point d'attache à la plate-forme :

$$C_i = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{p} = \mathbf{a}_i + \alpha_i \mathbf{u}_i, 0 < \alpha_i \leq \rho_i, i = 1, \dots, n\}. \quad (5.24)$$

Pour une forme géométrique de plate-forme quelconque et lorsqu'une grande précision sera nécessaire, un algorithme de détection d'intersection entre un segment et un polyèdre sera utilisé. Ce type de problème est abondamment traité dans la littérature sur le rendu par ordinateur. Un problème analogue rencontré dans ce domaine est l'intersection d'un rayon projeté de la caméra et d'une surface. Comme toutes les formes peuvent être approximées avec plus ou moins de précision par une surface décomposée en triangles, cette approche est générale. Elle demande par contre un certain nombre de calculs simples et est expliquée ci-dessous. Si le volume de la plate-forme est convexe, une méthode simplifiée peut être utilisée. Elle est discutée par la suite.

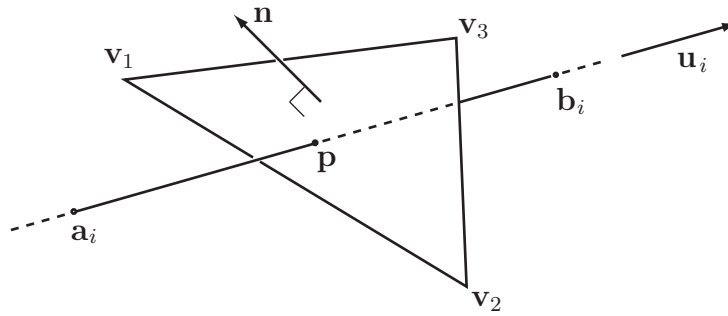


FIG. 5.8 – Intersection entre un segment et un triangle à la surface de la plate-forme.

5.2.3.1 Méthode de la surface triangularisée

Pour cette méthode, le polyèdre délimitant le volume occupé par la plate-forme est décomposé en k triangles. On se retrouve alors avec kn problèmes simplifiés, qui consistent à déterminer si un des n segments de droite intersecte un des k triangles dans l'espace, comme à la figure 5.8.

La première étape consiste à trouver l'intersection entre la droite supportant le segment et le plan supportant le triangle. Le segment de droite excluant l'attache est défini à l'équation 5.24. Le plan est défini à l'aide des trois sommets du triangle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 , $\mathbf{v}_j = [x_j \ y_j \ z_j]^T$. Avec ces trois points on peut déterminer \mathbf{n} , la normale unitaire au plan supporteur.

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)}{\|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)\|} \quad (5.25)$$

Pour un point quelconque $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$ aussi dans le plan, on a

$$\mathbf{n}^T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{p}) = 0, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{v}_1 = \mathbf{n}^T \mathbf{p}. \quad (5.27)$$

En réintroduisant l'expression d'un point sur la droite dans la précédente équation, on obtient

$$\mathbf{n}^T \mathbf{v}_1 = \mathbf{n}^T(\mathbf{a}_i + \alpha_i \mathbf{u}_i), \quad (5.28)$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{n}^T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{a}_i)}{\mathbf{n}^T \mathbf{u}_i}. \quad (5.29)$$

Pour que le segment croise le triangle, deux conditions sont nécessaires. Tout d'abord, il faut que

$$0 < \alpha \leq \rho_i. \quad (5.30)$$

Autrement dit, il faut que le point d'intersection sur la droite soit sur le segment représentant le câble, excluant le point d'attache à la plate-forme. Ensuite, il faut que le point d'intersection sur le plan soit à l'intérieur du triangle. Pour vérifier cette deuxième condition, on convertit les coordonnées du point \mathbf{p} en coordonnées barycentriques [127] :

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3, \quad (5.31)$$

Les coordonnées sont données par

$$\lambda_1 = \frac{b(f+i) - c(e+h)}{a(e+h) - b(d+g)}, \quad (5.32)$$

$$\lambda_2 = \frac{a(f+i) - c(d+g)}{b(d+g) - a(e+h)}, \quad (5.33)$$

$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad (5.34)$$

où

$$a = x_1 - x_3, \quad (5.35)$$

$$b = x_2 - x_3, \quad (5.36)$$

$$c = x_3 - x, \quad (5.37)$$

$$d = y_1 - y_3, \quad (5.38)$$

$$e = y_2 - y_3, \quad (5.39)$$

$$f = y_3 - y, \quad (5.40)$$

$$g = z_1 - z_3, \quad (5.41)$$

$$h = z_2 - z_3, \quad (5.42)$$

$$i = z_3 - z. \quad (5.43)$$

$$(5.44)$$

Si le point d'intersection est à l'intérieur du triangle, alors les coordonnées barycentriques sont toutes entre zéro et un :

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.45)$$

Chacun des câbles doit être testé avec chacun des triangles. Si les inégalités 5.30 et 5.45 sont satisfaites, alors le câble intersecte la surface. Si un des câbles intersecte, alors la pose est hors de E_{pf} et la procédure arête. Une façon de réduire le temps de calculs serait de tester les triangles visibles à partir d'un point d'attache à la base.

5.2.3.2 Méthode des plans supporteurs

Pour certaines surfaces plus simples, la méthode précédente ne sera pas nécessaire. Plus particulièrement, si on approxime la plate-forme par un prisme rectangulaire, la méthode présentée à la section 5.2.2 pour trouver l'intersection entre un prisme et un segment pourra être utilisée. Il faudra alors seulement exclure le point d'attache du segment.

D'autres cas surviendront aussi où il ne sera pas nécessaire de triangulariser le volume de la plate-forme. On pourra alors ne considérer que la plage d'orientations que le câble peut faire par rapport à la normale à la plate-forme. C'est le cas pour les volumes convexes. Dans ces conditions, la méthode des plans supporteurs décrite ci-après pourra être utilisée.

Pour les surfaces courbes et convexes (ex. sphère, côté d'un cylindre, ellipsoïde), le vecteur unitaire \mathbf{u}_i donnant la direction du câble devra se trouver du côté du plan supporteur au point d'attache alors que V_{pf} se trouve en entier de l'autre côté. La situation est illustrée à la figure 5.9. La condition est donc simplement dans ce cas :

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{n} > 0. \quad (5.46)$$

Si le volume convexe est un polyèdre, la situation se complexifie légèrement. Le test devra être adapté selon que le point d'attache se trouve sur une face, une arête ou un sommet. Si le point d'attache est sur une face, le test de l'équation 5.46 demeure valide pour déterminer si le câble interfère avec le volume. Cependant, si le point d'attache du câble est sur une arête ou un sommet, la plage d'orientations autour de la normale sera plus grande.

Une arête est définie par deux plans qui se croisent et qui supportent chacun une face. L'intersection de deux mi-espaces délimités par ces plans inclut V_{pf} en entier. La situation est illustrée à la figure 5.10. Si un point d'attache est sur une arête, le câble doit être hors de cet espace incluant le volume pour ne pas le croiser. Mathématiquement, cette condition est rencontrée si l'expression suivante est vraie

$$(\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}_1 > 0) \vee (\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}_2 > 0), \quad (5.47)$$

où \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont les normales aux plans qui s'intersectent, pointant vers l'extérieur de V_{pf} et où \vee est le symbole logique pour *ou*.

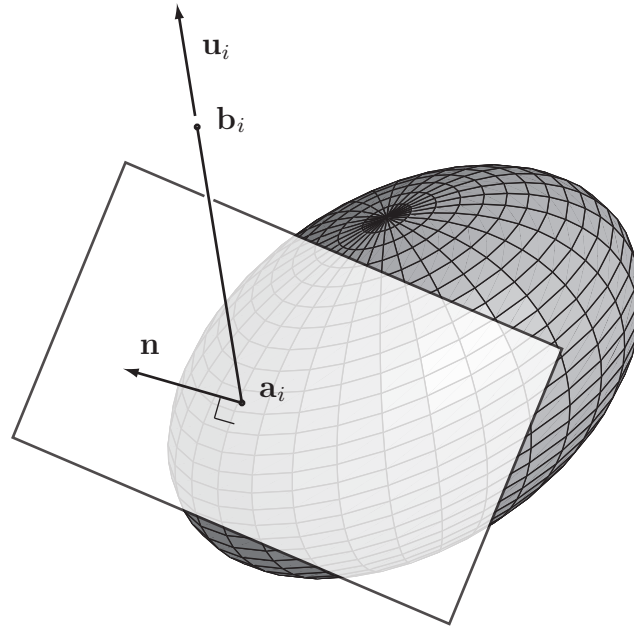


FIG. 5.9 – Méthode des plans supporteurs pour vérifier l’interférence entre un câble et la plate-forme dont V_{pf} est de géométrie courbe et convexe.

Un sommet est la rencontre de $f \geq 3$ faces. L’intersection des f mi-espaces délimités par les plans supporteurs définissent une pyramide à l’intérieure de laquelle V_{pf} est inclus. La figure 5.11 montre cette situation. Si le point d’attache est sur un sommet, le câble devra être à l’extérieur de cette pyramide pour ne pas interférer avec la plate-forme. Cette situation surviendra si l’expression suivante est vraie :

$$(\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}_1 > 0) \vee \dots \vee (\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}_f > 0). \quad (5.48)$$

Si la précision n’est pas si importante et/ou la rapidité de calcul l’est d’avantage, on pourra utiliser un volume convexe simple englobant complètement un V_{pf} de forme plus complexe pour utiliser la méthode des plans supporteurs au lieu de la méthode de la surface triangularisée.

Pour un mécanisme donné, peu importe laquelle des deux méthodes est choisie, les normales aux faces définissant V_{pf} sont définies une seule fois dans le repère de la plate-forme. À une pose donnée, on obtient leur orientation en les pré-multipliant par la matrice de rotation ${}^o\mathbf{Q}_p$. Dans les deux cas, on devra tester tous les câbles indépendamment.

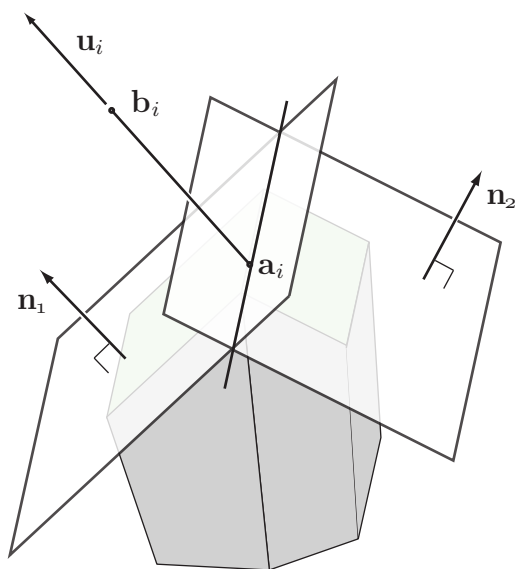


FIG. 5.10 – Méthode des plans supporteurs lorsque le point d'attache est sur une arête.

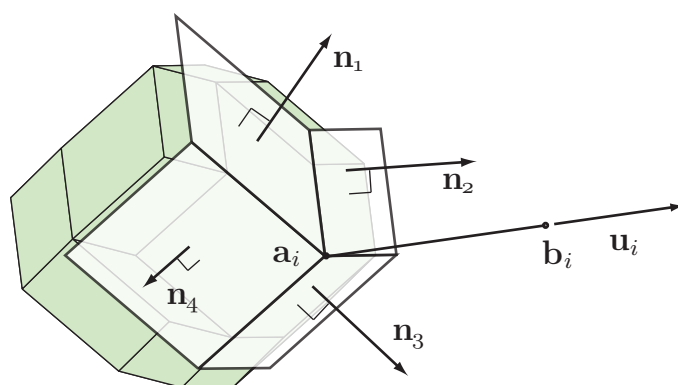


FIG. 5.11 – Méthode des plans supporteurs lorsque le point d'attache est sur un sommet.

5.2.4 Espace des longueurs permises

Le quatrième espace considéré, l'espace des longueurs permises E_ρ , est étudié dans plusieurs publications traitant des plates-formes de Gough-Stewart (ex. [128]). Chaque câble pouvant avoir une longueur entre deux bornes, l'espace que son extrémité peut occuper se situe entre une sphère dont le rayon est la longueur minimale et une autre dont la rayon est la longueur maximale acceptable. Or, la plate-forme a une géométrie donnée. Ainsi E_ρ correspond aux poses pour lesquelles les extrémités des câbles sont dans l'enveloppe de leurs sphères creuses respectives et leurs positions relatives respectent la géométrie de plate-forme :

$$E_\rho = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \underline{\rho} \leq \boldsymbol{\rho} \leq \bar{\rho}\}, \quad (5.49)$$

où $\underline{\rho}$ et $\bar{\rho}$ sont respectivement les vecteurs des longueurs minimales et maximales permises des câbles. En pratique, pour tester si une pose est dans E_ρ , on calcule simplement $\boldsymbol{\rho}$ à l'aide du problème géométrique inverse (équation 2.5) et on vérifie l'inégalité sur les longueurs de câbles.

5.3 Processus d'optimisation

5.3.1 Fonction à maximiser

L'idéal serait évidemment de définir de façon explicite les limites de chacun des quatre espaces décrits précédemment en fonction des paramètres géométriques. Or, ils auront en général des formes complexes. À part pour les cas très simples (ex. [110] pour l'espace de génération des torseurs), leurs limites ne pourront être décrites analytiquement. Leur intersection pour obtenir l'espace atteignable sera donc généralement lui aussi complexe. De plus, ils peuvent être discontinus. Ainsi, partant d'une pose atteignable donnée, il est possible que le robot ne puisse atteindre une autre portion de l'espace atteignable dont il est isolé par une zone infranchissable pour l'une ou plusieurs des quatre raisons.

Pour pouvoir traiter le problème de façon générale, on discrétise donc l'espace désiré en n_p poses. On teste ensuite à chacune des poses si les quatre conditions nécessaires

sont rencontrées pour que cette pose soit dans l'espace atteignable. Le nombre de poses pour lesquelles elles le sont est n_E . La fonction objectif à maximiser s'écrit ainsi

$$f(\boldsymbol{\xi}, P, T(\mathbf{x})) = \frac{n_E}{n_p}. \quad (5.50)$$

Il s'agit de la fraction du nombre de poses dans l'espace atteignable en regard de la tâche sur le nombre total de poses testées. Le but de l'optimisation est de trouver des paramètres géométriques $\boldsymbol{\xi}$ qui permettent de maximiser $f(\boldsymbol{\xi}, P, T(\mathbf{x}))$ et, idéalement, d'atteindre l'unité. La signification de la fonction est donc claire. Cette approche a aussi l'avantage d'encapsuler les quatre conditions nécessaires dans une seule fonction dont les unités sont cohérentes.

5.3.2 Description de la géométrie

En général, certaines limites seront imposées sur les paramètres géométriques. L'ensemble des paramètres géométriques acceptables K est donné par :

$$K = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \mid \mathbf{b}_i \in B_i, {}^P\mathbf{a}_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}, \quad (5.51)$$

où B_i est l'ensemble des positions possibles pour le point d'attache du câble i à la base et A_i l'ensemble des positions possibles pour le point d'attache à la plate-forme du même câble, dans le repère de la plate-forme. s est le nombre de paramètres géométriques utilisés pour décrire l'architecture du robot. Selon la nature des ensembles A_i et B_i , s peut être inférieur au nombre de coordonnées cartésiennes décrivant tous les points d'attache. Prenons par exemple un mécanisme déployable dans un lieu urbain pour servir dans des opérations de recherche après un désastre naturel tel qu'un tremblement de terre [39, 40]. Dans ce cas, on devra attacher les câbles sur des immeubles adjacents en bon état. L'ensemble des positions sur ces murs seront les positions possibles des points de départ des câbles. On devra dans l'optimisation limiter la recherche d'architectures à celles pour lesquelles les points d'attache sont sur ces surfaces. De façon similaire, au chapitre 7, on impose que les points d'attache à la plate-forme se trouvent sur une surface donnée afin d'éviter que les câbles n'interfèrent avec la caméra transportée et l'électronique s'y rattachant. Souvent, on devra faire preuve de jugement pour imposer certaines limites dès le départ afin de simplifier la définition de l'architecture. Pour le cas précédent de mécanisme dans un milieu urbain, on pourra par exemple imposer que certains câbles ne puissent être que sur un mur en particulier et non sur tous

les murs accessibles. La figure 5.12 montre un exemple de l'utilisation de paramètres géométriques pour définir les points d'attache.

5.3.3 Algorithme utilisé

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour minimiser la fonction et obtenir le mécanisme pouvant atteindre la plus grande proportion de l'espace désiré. Le choix de l'algorithme doit tenir compte du fait que la forme de la fonction à minimiser est inconnue, que le nombre de variables s peut être grand et que leur domaine de solution est limité. De plus, le gradient de la fonction est la plupart du temps impossible à obtenir sous forme symbolique explicite. Pour ces particularités du problème, un algorithme génétique combiné à une méthode du simplexe de Nelder-Mead [129] subséquente ont été utilisés dans Matlab. Nous verrons comment cette méthode s'applique à l'optimisation de la géométrie d'un mécanisme à câbles. Évidemment, d'autres types d'algorithmes auraient aussi pu être utilisés.

Un algorithme génétique est un algorithme inspiré de l'évolution des organismes vivants [130]. Ces algorithmes ont été utilisés à quelques reprises pour optimiser la géométrie de mécanismes (ex. [131, 19]). Ils imitent l'évolution d'une population d'une espèce en ne prenant en compte que sa génétique et une fonction de performance. Chaque individu a un code génétique qui lui est propre, présent dans ses chromosomes sous la forme d'une chaîne d'ADN. Les éléments individuels de la chaîne sont les gènes et leurs positions sur la chaîne sont appelées les loci. Tous ces gènes seront conjointement responsables de certaines caractéristiques de l'individu. Selon ces caractéristiques, un individu sera plus ou moins apte à survivre et à se reproduire. S'il se reproduit, ses gènes seront recombinaisonnés avec ceux d'un autre individu pour créer un enfant, un individu d'une nouvelle génération. Ainsi, les individus les mieux adaptés ont plus de chance de transmettre leur patrimoine génétique aux générations futures. Au fil de l'évolution, certaines mutations surviennent aléatoirement venant modifier l'ADN de quelques individus.

Pour les robots à câbles, les gènes sont les paramètres géométriques. Comme ceux-ci sont bornés, les gènes utilisés sont des nombres réels bornés. L'ADN d'un individu est donc le vecteur ξ avec s éléments compris dans une certaine plage. L'ensemble

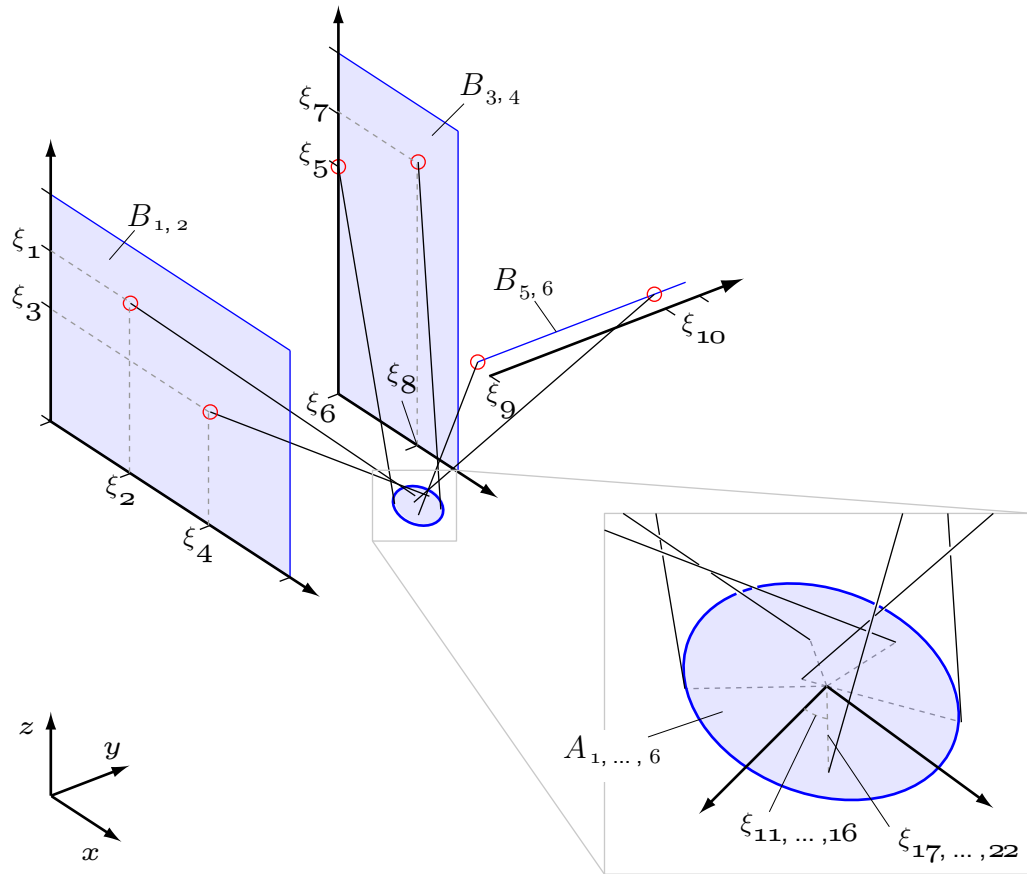


FIG. 5.12 – Illustration de l'utilisation des paramètres géométriques pour obtenir les points d'attache. Les paramètres 1 à 10 sont des distances qui définissent les points d'attache à la base. Les paramètres 1 à 8 sont limités sur une surface. Les paramètres 9 et 10 sont limités sur un segment. Les points d'attache à la plate-forme sont définis sur un cercle en coordonnées polaires. Les paramètres 11 à 16 sont des angles définissant la position angulaire. Ils sont limités entre 0 et 2π . Les paramètres 17 à 22 sont des distances indiquant les longueurs des rayons. Ils sont limités de 0 à r_{pf} , le rayon de la plate-forme. Les ensembles représentant les positions permises des points d'attache ($A_i, B_i, i = 1, \dots, 6$) sont indiqués.

des solutions possibles est donc encore une fois un hyperrectangle dans l'espace \mathbb{R}^s où chaque axe correspond à un paramètre géométrique. Utilisant les définitions des A_i et B_i , les points d'attache sont obtenus :

$${}^{\mathcal{P}}\mathbf{a}_i = g_{ai}(\boldsymbol{\xi}, A_i), i = 1, \dots, n, \quad (5.52)$$

$$\mathbf{b}_i = g_{bi}(\boldsymbol{\xi}, B_i), i = 1, \dots, n. \quad (5.53)$$

Dans la précédente équation $g_{ai}(\boldsymbol{\xi}, A_i)$ est une fonction qui permet d'obtenir le point d'attache ${}^{\mathcal{P}}\mathbf{a}_i$ en fonction des paramètres géométriques et de l'ensemble des positions possibles pour le point d'attache i à la plate-forme A_i . De la même manière, $g_{bi}(\boldsymbol{\xi}, B_i)$ est une fonction qui permet d'obtenir le point d'attache à la base \mathbf{b}_i . Ces fonctions peuvent prendre différentes forme mais consisteront en général en un changement de repère.

Les points d'attache sont donc les caractéristiques d'un individu issues de sa génétique. Ces caractéristiques sont ensuite utilisées pour vérifier à quel point un individu est bien adapté à la tâche en évaluant la fonction objective de l'équation 5.50. Plus un mécanisme couvre un grand pourcentage de l'espace atteignable, plus il a de chance de combiner ses gènes avec ceux d'un autre mécanisme pour produire un individu de la nouvelle génération. La probabilité qu'un individu se reproduise sera donnée par la valeur de sa fonction objective divisée par la somme des valeurs de la fonction objectif de tous les individus.

La figure 5.13 schématise l'algorithme utilisé.

1. Au départ, une population de n_i individus est générée aléatoirement de façon uniforme dans l'espace des gènes possibles. On obtient un ensemble de n_i vecteurs de paramètres géométriques.
2. On calcule des points d'attache à partir des paramètres géométriques à l'aide des équations 5.52 et 5.53.
3. Chacun de ces individus est testé pour déterminer le pourcentage d'espace de la tâche qu'il peut atteindre. À chaque pose :
 - (a) On détermine la position des points d'attache à la plate-forme dans le repère global avec l'équation 2.2.
 - (b) On calcule la longueur des câbles avec l'équation 2.5.
 - (c) On détermine la matrice des torseurs unitaires de l'équation 2.32.

- (d) On vérifie si la pose est dans E . À chacune des sous-étapes suivantes, si le test est réussi, on passe à l'étape suivante. Sinon la pose ne peut être atteinte.
- i. On vérifie si la pose est dans E_T avec l'équation 4.1 adaptée à la forme de $T(\mathbf{x})$. Pour ce faire, on doit préalablement extraire les tensions minimales pour chacun des câbles de la matrice décrivant la surface de tension minimale.
 - ii. On vérifie si la pose est dans E_d avec l'équation 5.6 et les conditions 5.10 à 5.12.
 - iii. On vérifie qu'on n'a pas traversé une zone où la distance minimale entre deux câbles n'était pas respectée avec l'équation 5.22.
 - iv. On vérifie qu'aucun câble n'interfère avec la plate-forme avec une des deux méthodes de la section 5.2.3.
 - v. On vérifie que les longueurs de câbles respectent la plage permise selon l'équation 5.49.
4. On vérifie si l'une des conditions de terminaison de l'algorithme est rencontrée. Ces conditions sont :
- Un nombre maximum de générations atteint ;
 - Une durée maximale du temps de calcul atteinte ;
 - Une variation trop faible de la fonction objectif pour le meilleur individu sur un certain nombre de générations ;
 - L'atteinte d'un maximum de la fonction objectif, soit 100%.
- Si l'une des trois premières conditions est rencontrée, l'algorithme génétique s'arrête et la meilleure solution obtenue est passée comme estimé initial à la méthode du simplex à l'étape 8. Si la dernière condition est rencontrée, on a la solution finale. Sinon, on passe à l'étape 5.
5. Plus ce pourcentage est grand, plus grande sera la probabilité que l'individu soit choisi pour générer la nouvelle génération. Les individus qui se reproduiront sont choisis selon ces probabilités.
6. Les individus choisis pour la reproduction sont regroupés par paires et leurs gènes sont recombinaisonnés.
7. On remplace un des individus par le meilleur de la génération précédente pour s'assurer de toujours garder le meilleur résultat dans le pool génétique. Certaines mutations sont aussi provoquées chez un nombre donné d'individu afin de favoriser

une plus grande diversité génétique et éviter de rester pris dans un optimum local. La nouvelle génération est ainsi obtenue et on retourne à l'étape 2.

8. La méthode du simplexe raffine la solution optimale autour de l'optimum approximatif obtenu avec l'algorithme génétique.

Dans un tel processus d'optimisation utilisant un espace discrétisé, une attention doit être portée à la réduction du temps de calcul nécessaire à chacune des poses testées. Ceci est particulièrement vrai pour un algorithme génétique où, à chaque itération, on calcule la fonction objective de plusieurs individus. Le nombre de calculs est donc considérable. Le souci d'obtenir des tests rapides à chacune des poses comme il a été fait au chapitre précédent pour la capacité à générer un ensemble de torseurs revêt toute son importance. Les deux autres conditions (interférence entre les câbles et limites sur les longueurs des câbles) se vérifient aussi avec relativement peu de calculs.

Les deux algorithmes sont utilisés successivement afin de tirer avantage de chacun d'eux. L'algorithme génétique couvre un grand espace de solution est bien adapté à un problème de cette complexité. En revanche, il n'obtient qu'une approximation d'un optimum. De son côté, la méthode du simplexe utilisée seule risquerait davantage de demeurer dans un optimum local. Cependant, elle permet de trouver plus précisément l'optimum dans une certaine région. Globalement, cette méthode ne garantit pas l'atteinte de l'optimum global. Encore une fois, plusieurs algorithmes différents sont disponibles pour résoudre un tel problème. À ce stade, le problème n'est plus au niveau de la compréhension du mécanisme mais plutôt au niveau des méthodes numériques.

À l'étape 6 de l'algorithme utilisé, plusieurs types de recombinaisons de gènes sont possibles. Rien n'indique qu'une valeur d'un gène qui a un impact positif sur les caractéristiques du mécanisme aura un impact positif si elle est attribuée à un autre gène. Ceci vient du fait que chaque gène — chaque élément de ξ — influence généralement la position d'un seul point d'attache. Si la valeur d'un gène est recombinaison pour se retrouver dans un locus différent chez le nouvel individu, il n'y a aucune raison particulière qui justifierait que son impact soit positif. Par exemple, un gène peut indiquer la position d'un point d'attache selon une direction sur un mur. Ce gène, à ce locus, peut avoir un impact positif. S'il est recombinaison dans un locus différent, il pourrait impacter l'angle définissant un point d'attache sur un cercle à la plate-forme. La valeur qui avait un impact positif lorsque son locus influençait la position d'un câble sur le mur n'aura pas nécessairement un impact positif si elle s'applique à un locus différent, qui lui influence la position angulaire d'un point sur la plate-forme. Ainsi, la méthode de recombinaison

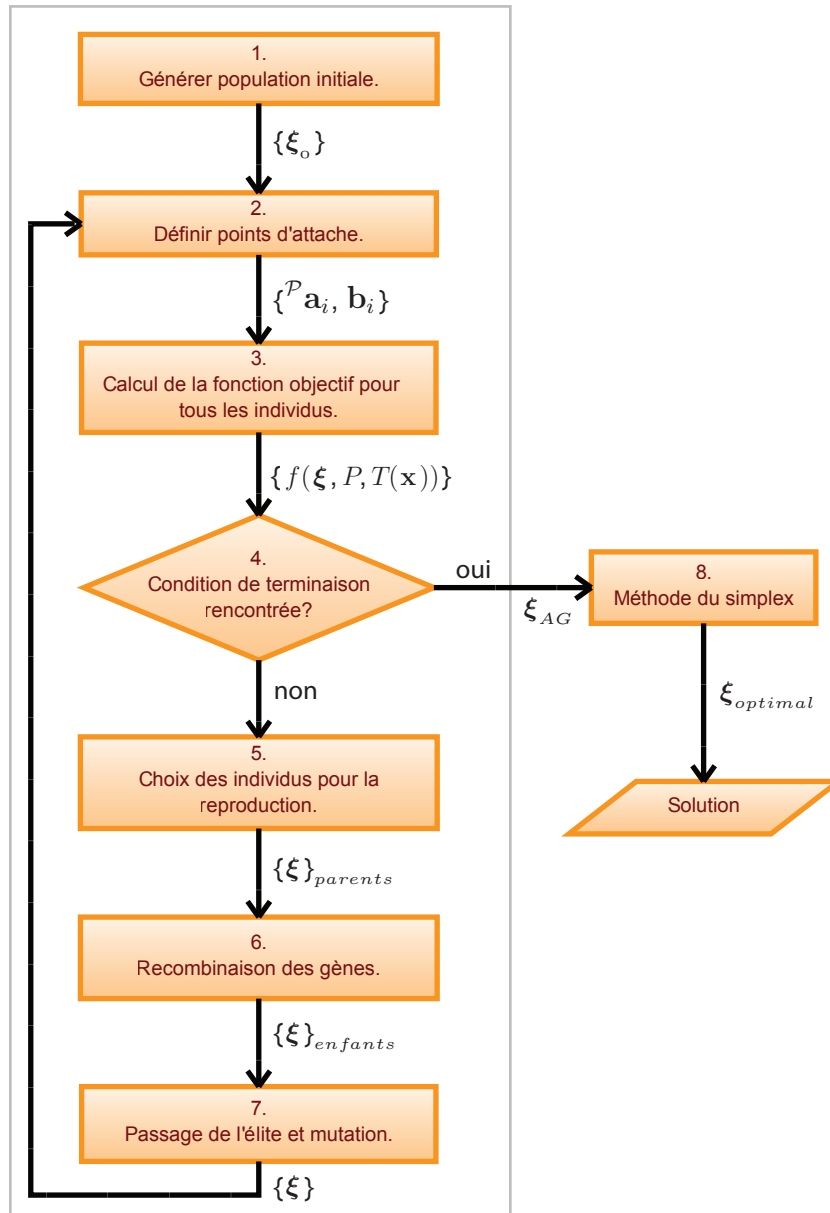


FIG. 5.13 – Algorithme utilisé pour l'optimisation. Les variables entre crochets sont des ensembles représentant une population. L'encadré gris délimite l'algorithme génétique.

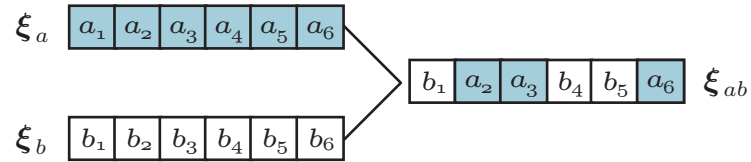


FIG. 5.14 – Méthode de recombinaison des gènes conservant leur locus. Les gènes des parents, ξ_a et ξ_b , sont recombinaison pour obtenir les gènes de l'enfant ξ_{ab} .

utilisée fait en sorte que les gènes des parents soient transmis tout en conservant leur locus. Ceci est illustré à la figure 5.14.

Selon l'application, les paramètres de l'algorithme génétique devront être ajustés. Souvent, on pourra commencer par des cas simplifiés (petit nombre de poses, petite population) pour valider que la représentation des paramètres géométriques utilisée peut donner des solutions plausibles. Par la suite, le nombre de poses et d'individus peuvent être augmenté, ce qui rallonge la durée des calculs. On pourra aussi inclure dans la population initiale la meilleure solution d'une optimisation simplifiée effectuée précédemment. Le taux de mutation doit aussi être suffisant pour éviter de demeurer pris dans un optimum local. Pour ce type d'algorithme, la diversité est importante car la recombinaison entre deux individus semblables donnera nécessairement un nouvel individu semblables aux deux parents, si ce n'est de la mutation aléatoire possible.

5.4 Résumé

La géométrie a un impact majeur sur les performances d'un mécanisme en regard d'une tâche donnée. Pour réaliser une tâche, le robot devra atteindre un certain ensemble de poses et être capable d'y générer une gamme d'efforts. Grâce à la théorie développée au chapitre précédent, il est possible de tester si les efforts nécessaires à la tâche peuvent être générés. Cependant, ce n'est pas l'unique condition qui doit être respectée pour que le mécanisme puisse atteindre un pose. Les trois autres conditions énoncées dans ce chapitre sont que les câbles ne doivent pas interférer entre eux, ils ne doivent pas interférer avec la plate-forme et leurs longueurs doivent être à l'intérieur d'une plage de longueurs permises.

Partant de ces conditions, une procédure a été développée pour optimiser la géométrie du mécanisme en fonction d'une tâche donnée. Cette optimisation maximise en fait la proportion de l'espace atteignable sur l'espace requis par la tâche. Devant la complexité de la nature de l'espace atteignable en regard d'une tâche, la méthode utilisée discrétise l'ensemble de poses à atteindre. Bien que d'autres types d'algorithmes puissent être utilisés, un algorithme hybride utilisant successivement un algorithme génétique et la méthode du simplexe a été proposé ici. C'est d'ailleurs cette combinaison qui est utilisée au chapitre 7 pour optimiser la géométrie d'un mécanisme pour une application de prise de photos automatisée.

Alors que ce chapitre et les précédents s'intéressent principalement à l'analyse et à la conception géométrique des robots à câbles, la section suivante attaque une problématique qui survient une fois que le mécanisme est construit, soit l'étalonnage de la position des points d'attache.

Chapitre 6

Étalonnage de la géométrie

Ce chapitre présente des méthodes pour déterminer expérimentalement la position des points d'attache d'un robot à câbles. Les sources d'erreur sur le positionnement de la plateforme sont d'abord énumérées pour comprendre l'impact des différents éléments du modèle géométrique et de l'actionnement. Ensuite, des méthodes simples pour étalonner les points d'attache au sol un à la fois sont présentées. Ces méthodes sont adaptées pour permettre l'étalonnage simultané de tous les câbles rassemblés en un point. Par la suite, une autre méthode utilisant des mesures de pose d'un capteur externe est expliquée. Selon l'application du robot à câbles, une méthode d'étalonnage sera préférable. Ce point est discuté brièvement pour clore le chapitre.

6.1 Revue de littérature et particularités des robots à câbles

Les grands espaces de travail, la transportabilité et la possibilité de reconfiguration rapide des robots à câbles sont souvent citées dans la littérature comme certains de leurs avantages importants [25, 89, 132]. Afin de pouvoir profiter pleinement de ces avantages, une méthode pour étalonner la géométrie précise, rapide, polyvalente et idéalement peu coûteuse est nécessaire. Une fois l'architecture modifiée ou nouvellement installée, on doit déterminer les positions des points d'attache pour être capable de contrôler le robot.

Les robots à câbles sont souvent contrôlés au niveau articulaire pour des raisons de simplicité et de coûts. Ceci évite en effet d'embarquer à l'effecteur des capteurs coûteux et des dispositifs de communication avec le poste de contrôle. Ainsi, pour une pose cartésienne donnée \mathbf{x} , les longueurs des câbles sont calculées puis utilisées pour déterminer les coordonnées des moteurs nécessaires sans rétroaction directe sur la pose réelle de la plate-forme. Le calcul des longueurs utilise les coordonnées des points d'attache du robot. Tel que mentionné précédemment, on peut rassembler toute l'information nécessaire à la définition de ces coordonnées par le vecteur des paramètres géométriques $\boldsymbol{\xi}$. Les positions des points d'attache à la base sont les plus difficiles à mesurer car ils sont habituellement très espacés. Une erreur dans le modèle géométrique résultera en une erreur de positionnement. L'impact sera plus ou moins grand selon l'architecture et la configuration du robot.

Le problème géométrique inverse (PGI) des robots parallèles est généralement facile à solutionner [133]. Pour cette raison, une méthode répandue pour les étalonner consiste à comparer les variables articulaires *mesurées* à celles *calculées par le PGI*. Pour ce faire, on mesure les variables articulaires à l'aide d'encodeurs et la pose réelle à l'aide d'un capteur externe. Ensuite, un algorithme est utilisé pour déterminer les paramètres géométriques qui minimisent la différence entre

- les coordonnées articulaires mesurées dans les encodeurs $\check{\boldsymbol{\rho}}$ et
- les longueurs de câbles calculées à l'aide du PGI et un estimé des paramètres géométriques $\hat{\boldsymbol{\xi}}$.

C'est notamment l'approche préconisée dans [134, 135].

Les auteurs de [136] suggèrent d'ailleurs que cette façon est la plus efficace numériquement pour l'étalonnage de structures parallèles. Le fait que l'utilisation du problème géométrique direct (PGD) soit évitée (contrairement à [137] par exemple) est une cause de son efficacité numérique. De plus, cette méthode permet d'utiliser tout l'espace atteignable du manipulateur, contrairement aux autres méthodes qui bloquent certaines articulations pour en étalonner les points de départ (ex. [138]). Tel que mentionné dans [139], ce type de méthode qui bloque l'orientation d'une patte n'est pas applicable pour les robots à câbles puisqu'on peut contraindre leur longueur, mais on ne peut pas bloquer leur orientation. Une autre méthode d'étalonnage consiste à utiliser une redondance de capteurs internes aux articulations passives pour éviter d'avoir recours à un capteur externe. Dans [140], les joints de cardan d'une plate-forme de Gough-Stewart sont instrumentés pour fournir les données nécessaires à l'étalonnage. Les articulations passives des robots à câbles étant des câbles en flexion, on peut donc difficilement appliquer cette méthode.

Les mécanismes à câbles discutés ici présentent la même cinématique qu'une plate-forme de Gough-Stewart, à la différence que les articulations aux points d'attache des câbles ne peuvent être considérés comme des joints de cardan. Ce qui s'applique à la plate-forme de Gough-Stewart d'un point de vue cinématique et qui ne dépend pas des cardans s'applique donc aussi en général à la cinématique des robots à câbles. Dans [141, 142], l'auteur présente des résultats qui indiquent que les meilleures poses pour augmenter la sensibilité de l'étalonnage de la géométrie d'une plate-forme de Gough-Stewart sont aux limites articulaires du robot. Ceci tend généralement à améliorer le conditionnement du système d'équations utilisé pour déterminer les paramètres géométriques. De plus, si la précision sur la mesure de la pose est constante dans l'espace atteignable, alors d'aller aux limites permet d'augmenter le rapport signal/bruit des mesures. Pour les robots à câbles, ceci implique d'être capable de mesurer la pose du robot précisément et à des endroits très éloignés. Plusieurs appareils permettent d'effectuer ces mesures selon la taille du mécanisme.

Les méthodes d'étalonnage spécifiques aux robots à câbles sont à ce jour peu étudiées. Dans [143] les auteurs reprennent la méthode présentée dans [144] pour étalonner un mécanisme spatial à 3-ddl et trois câbles à l'aide du nombre minimal de trois points connus de la plate-forme. Les câbles sont contrôlés individuellement pour apporter l'effeteur aux points connus, ce qui n'est pas nécessairement évident en pratique dû au couplage de l'action des câbles sur la position cartésienne. L'approche demeure concep-

tuelle, aucune expérimentation ni calcul de la précision qu'on peut atteindre sur la position des points d'attache ne sont effectués. D'ailleurs, dans le chapitre 7, la précision de cette méthode sera comparée en simulation à celle des autres. Elle présente par ailleurs une grande simplicité pour l'étalonnage des points à la base.

Dans [132], les câbles sont tendus et amenés manuellement au sommet d'un cube spécialement conçu pour l'étalonnage. Les auteurs reconnaissent que le choix des points pour l'étalonnage a un impact important sur la précision de la position des points d'attache. Ils doivent étudier tous les types de solutions possibles puisque l'étalonnage de leur concept de robot serait effectué par un non-expert. Ils présentent la possibilité d'utiliser plus que le minimum de trois mesures afin de minimiser l'erreur. Ils analysent la précision possible avec cet étalonnage et présentent des pistes pour l'améliorer. Ils suggèrent d'éviter que plusieurs points de mesure se trouvent sur une même droite ou un même plan afin que la matrice d'identification soit bien conditionnée. En accord avec [141], il proposent de prendre les points les plus espacés possible.

Dans [57], un mécanisme à câbles passif utilisé en métrologie est présenté. La méthode d'étalonnage utilisée est la même que [143] et [144] mais en incluant la pose de l'effecteur. Connaissant trois poses données, la géométrie de l'effecteur et les longueurs d'un câble à ces trois poses, on calcule la position du point d'attache comme l'intersection de trois sphères. Cette méthode n'étalonne que les points d'attache à la base et non ceux à l'effecteur qui sont considérés connus. De ce point de vue, il serait peut-être avantageux de détacher l'effecteur et d'utiliser exactement l'autre méthode pour éviter de propager les erreurs sur la géométrie de l'effecteur et surtout sur la mesure de son orientation.

Dans [139], l'approche est différente. Les auteurs de cet article présentent l'utilisation de deux inclinomètres pour effectuer un étalonnage en continu d'une architecture 3-3. Les longueurs mesurées des câbles sont utilisées pour déterminer la pose de l'effecteur. L'orientation calculée est comparée à l'orientation mesurée par deux inclinomètres et les paramètres géométriques sont ajustés afin de minimiser l'erreur entre les orientations. Le potentiel de l'approche est démontré en simulation.

L'article [17] traite de la procédure d'initialisation d'un gigantesque robot à câbles. Les longueurs initiales sont calculées en utilisant la mesure des tensions dans les câbles ainsi que la masse des câbles et de l'effecteur. L'étalonnage des points d'attache en tant

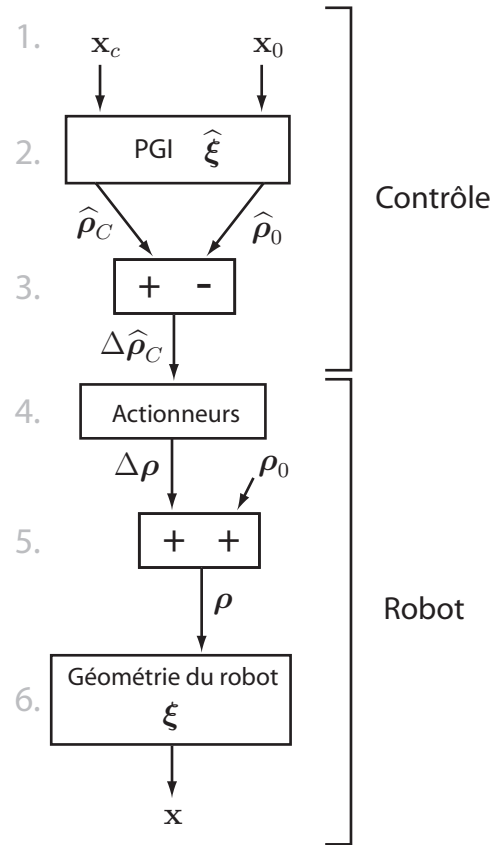


FIG. 6.1 – Chaîne de propagation de l’erreur dans le contrôle en position.

que tel n’est pas effectué et est considéré comme un aspect important en conclusion de l’article.

6.2 Sources d’erreur dans le positionnement du robot

La Fig. 6.1 présente la chaîne menant au positionnement de la plate-forme considérant que les encodeurs aux actionneurs fournissent des mesures relatives à leur position de départ et qu’aucune rétroaction n’est effectuée sur la pose réelle de la plate-forme. Les différentes étapes numérotées sont expliquées ci-dessous.

1. La pose de la plate-forme désirée est x_c . La pose initiale de la plate-forme est x_0 .
2. Utilisant le meilleur estimé des paramètres géométriques connus $\hat{\xi}$, le PGI est calculé pour obtenir les longueurs de câbles voulues $\hat{\rho}_C$ et un estimé des longueurs

initiales $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0$.

3. Ces deux valeurs sont soustraites pour obtenir $\widehat{\Delta\boldsymbol{\rho}}_C$, la variation de longueur calculée comme nécessaire pour atteindre la pose voulue.
4. La commande est envoyée aux actionneurs, qui produisent plutôt une variation de longueur réelle de $\Delta\boldsymbol{\rho}$.
5. Cette variation s'ajoute à la longueur initiale réelle des câbles $\boldsymbol{\rho}_0$ pour donner une longueur réelle $\boldsymbol{\rho}$.
6. Ces longueurs, combinées à la géométrie du robot définie par les paramètres géométriques réels $\boldsymbol{\xi}$, produisent la pose réelle de la plate-forme \mathbf{x} qui sera différente de celle voulue \mathbf{x}_c .

Le but de l'étalonnage de la géométrie est donc que la pose réelle \mathbf{x} s'approche le plus possible de la pose voulue \mathbf{x}_c . Le long de cette chaîne, plusieurs sources d'erreurs sont en cause :

– **Erreur sur le modèle géométrique.**

Tel que mentionné précédemment, le PGI est utilisé pour déterminer les longueurs de câbles nécessaires pour amener la plate-forme à une pose désirée. Les imprécisions sur le modèle géométrique induisent une erreur sur les longueurs calculées.

– **Erreur sur la pose de départ (initialisation).**

Puisque les encodeurs ne sont pas absolus, il doit y avoir dans le programme de contrôle une valeur de référence qui correspond à la longueur des câbles au démarrage du robot. Or, en pratique, la plate-forme ne sera jamais exactement à la pose de référence. De plus, les câbles ne sont initialement pas sous tension et un certain niveau de fléchissement doit être éliminé afin que le câble soit mis sous tension. Tout ceci implique une erreur entre la longueur initiale de câble réelle et celle qui est considérée dans le contrôle. Les procédures proposées dans ce chapitre pour étalonner les points d'attache peuvent être simplifiées pour servir lors de l'initialisation. Une fois qu'un estimé satisfaisant des positions des points d'attache est connu, les procédures peuvent être prises telles quelles en ne laissant que les n longueurs initiales comme inconnues. La minimisation des fonctions permettra alors de déterminer les longueurs initiales des câbles. Selon des travaux expérimentaux [145, 63], l'étalonnage d'initialisation semble améliorer considérablement la précision du positionnement de la plate-forme lors d'une séquence de mouvement qui la suit.

– **Erreur sur l'actionnement.**

L'enroulement des câbles ne peut être parfait. En approximant le rayon comme

constant pour convertir une longueur de câble en position angulaire de poulie, une erreur est induite. Sur de très grands espaces, cette erreur peut devenir importante étant donné que les poulies effectuent plusieurs tours.

– **Compliance du système.**

Plusieurs éléments du système présentent une compliance importante, principalement les câbles. Bien que moins importante, celle des actionneurs et de la plateforme peut aussi devenir significative pour certaines applications.

Les méthodes développées dans ce chapitre visent d’abord à minimiser les erreurs sur le modèle géométrique. Elles peuvent aussi être adaptées à l’initialisation pour déterminer les longueurs de câbles lors du démarrage du robot. Pour ce qui est de l’erreur sur l’actionnement, elle dépend surtout du matériel composant le robot. Il est possible de concevoir un système de poulies plus précis [80]. Une autre solution intéressante et inexplorée serait de mesurer directement à la sortie de la poulie la longueur de câble qui est déroulée au lieu de se fier à l’encodeur du moteur qui produit la rotation de la poulie.

Dans toute méthode d’étalonnage, on doit s’appuyer sur une information connue. Dans le cas des mécanismes à câbles, on pourra toujours mesurer les longueurs de câbles déroulées à l’aide d’encodeurs relatifs ou absolus, puisque ces encodeurs sont nécessaires pour le fonctionnement du robot. Selon les différentes méthodes proposées ci-après, les informations à partir desquelles les mécanismes sont étalonnés sont

1. Les mesures aux encodeurs ;
2. La position de points connus dans l’espace cartésien ;
3. Le fait que tous les câbles puissent être ramenés à un point d’intersection commun ;
4. Le fait qu’il existe un plan incluant tout ensemble de trois points dans l’espace ;
5. Les distances connues entre les points d’attache à la base ;
6. La mesure directe de la pose de la plate-forme.

Le tableau 6.1 résume les informations de cette liste que chaque méthode présentée dans les différentes sections utilise.

Dans ce chapitre on identifie une variable mesurée par un accent circonflexe arrondi inversé, comme par exemple $\check{\rho}$. Un estimé d’une quantité est plutôt identifié par un accent circonflexe, comme par exemple $\hat{\mathbf{b}}$. Une quantité estimée représente un estimé

TAB. 6.1 – Information utilisée par les différentes méthodes d'étalonnage présentées dans ce chapitre.

↓ Section \ Info. →	1	2	3	4	5	6
6.3.1.1	✓	✓				
6.3.1.2	✓	✓				
6.3.1.3	✓	✓				
6.3.2.1	✓	✓	✓			
6.3.2.2	✓	✓	✓	✓	✓	
6.4	✓					✓

initial ou un estimé qui est obtenu à l'aide de calcul faisant appel à des quantités mesurées et/ou elles-mêmes estimées.

Notez que les résultats expérimentaux et les simulations obtenus avec les méthodes présentées dans ce chapitre ne sont présentés que dans le dernier chapitre de la thèse. Ils sont alors comparés à des mesures directes des points d'attache à l'aide d'un théodolite pour un mécanisme particulier.

6.3 Étalonnage à l'aide de points fixes connus

Toutes les méthodes de la section 6.3 étalonnent les points d'attache au sol \mathbf{b}_i du robot et non tous les paramètres géométriques qui incluent aussi les points à la plate-forme. Le vecteur \mathbf{b}_\forall est un vecteur comprenant l'information sur tous les points d'attache à la base

$$\mathbf{b}_\forall = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

6.3.1 Un câble à la fois

Comme un robot à câbles peut être désassemblé facilement, il est possible de détacher la plate-forme des câbles et d'étalonner la position de leurs attaches indépendamment. Ceci simplifie les calculs. De plus, les méthodes présentées dans cette sous-section ne nécessitent pas d'estimé initial sur la position des points d'attache. Trois méthodes sont présentées. La méthode des mesures absolues aux enrouleurs est celle présentée dans [143, 144]. Elle est légèrement modifiée en utilisant l'origine du repère comme un des points de mesure, ce qui la simplifie.

6.3.1.1 Méthode des mesures absolues aux enrouleurs

Prenons un câble dont on peut mesurer la longueur absolue ρ , et n_c points dans l'espace cartésien \mathbf{c}_j dont la position est mesurée précisément. L'idée générale consiste à imposer une tension constante dans le câble et à déplacer manuellement son extrémité libre aux points connus. Le câble s'enroule et se déroule selon l'action manuelle de l'expérimentateur. L'utilisation d'une tension constante diminue l'erreur sur la mesure de câbles provenant de la compliance. On s'assure d'avoir une tension au dessus de la surface de tension minimale pour éviter que l'effet du fléchissement rajoute aux erreurs de mesure. De plus, en utilisant une mesure à l'origine du repère utilisé, le problème peut être simplifié à une régression linéaire. Cette méthode demeure générale puisque si un autre repère est utilisé par la suite, on n'a qu'à trouver la transformation entre ce repère et le repère utilisé dans l'étalonnage. En pratique, il sera la plupart du temps possible de faire concorder l'origine de ces deux repères. À chaque position à laquelle est amené le câble, une mesure d'encodeur est prise pour connaître sa longueur déroulée.

Un schéma de la géométrie du système est présenté à la figure 6.2. Malgré le fait que cet étalonnage puisse être effectué câble par câble, on utilise le suffixe i pour identifier un câble. Soit \mathbf{b}_i le point d'attache du câble i dans le repère fixe et \mathbf{c}_j la position cartésienne réelle du point où est amenée l'autre extrémité du câble lors de la j^e mesure. La longueur du câble i au point de mesure \mathbf{c}_j est $\rho_{i|j}$ et la longueur mesurée est $\check{\rho}_{i|j}$. La longueur initiale du câble mesuré lorsque $\check{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ est $\check{\rho}_{i|0}$. Or, la

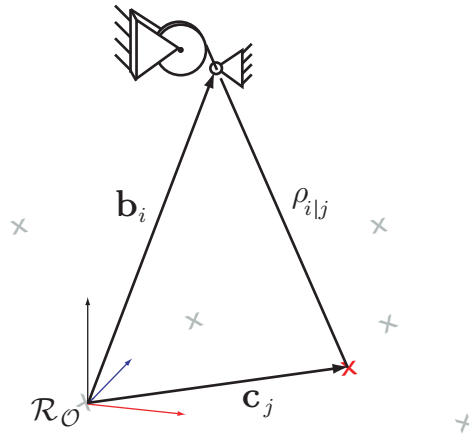


FIG. 6.2 – Étalonnage à l'aide de points fixes connus.

longueur de câble peut être aussi être calculée avec le PGI selon :

$$\rho_{i|j}^2 = \|\mathbf{c}_j - \mathbf{b}_i\|^2, \quad (6.2)$$

$$= (\mathbf{c}_j - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{c}_j - \mathbf{b}_i), \quad (6.3)$$

$$= \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j - 2\mathbf{c}_j^T \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i. \quad (6.4)$$

Puisque seul le câble est utilisé sans plate-forme, on utilise

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i = \check{\rho}_{i|0}^2. \quad (6.5)$$

Utilisant les mesures de positions, on égale la longueur mesurée au carré à la longueur calculée par le PGI au carré pour obtenir :

$$\check{\rho}_{i|j}^2 = \check{\mathbf{c}}_j^T \check{\mathbf{c}}_j - 2\check{\mathbf{c}}_j^T \hat{\mathbf{b}}_i + \check{\rho}_{i|0}^2. \quad (6.6)$$

Avec plusieurs mesures, on obtient le système d'équations

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{c}}_1^T \\ \check{\mathbf{c}}_2^T \\ \vdots \\ \check{\mathbf{c}}_{nc}^T \end{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{c}}_1^T \check{\mathbf{c}}_1 - \check{\rho}_{i|1}^2 + \check{\rho}_{i|0}^2 \\ \check{\mathbf{c}}_2^T \check{\mathbf{c}}_2 - \check{\rho}_{i|2}^2 + \check{\rho}_{i|0}^2 \\ \vdots \\ \check{\mathbf{c}}_{nc}^T \check{\mathbf{c}}_{nc} - \check{\rho}_{i|nc}^2 + \check{\rho}_{i|0}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\check{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{b}}_i = \check{\mathbf{m}}_i. \quad (6.8)$$

Des mesures à au moins trois points différents sont nécessaires. Afin de rendre la procédure plus robuste aux incertitudes sur les mesures, il est préférable de prendre $n_c \gg 3$

mesures. Dans ce cas, il s'agira d'un système surdéterminé et on pourra obtenir un estimé du vecteur recherché $\hat{\mathbf{b}}$ avec la solution aux moindres carrés :

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \hat{\mathbf{C}}_i^J \check{\mathbf{m}}_i \quad (6.9)$$

où $\hat{\mathbf{C}}_i^J$ est l'inverse généralisée de la matrice $\check{\mathbf{C}}_i$,

$$\hat{\mathbf{C}}_i^J = (\check{\mathbf{C}}_i^T \check{\mathbf{C}}_i)^{-1} \check{\mathbf{C}}_i^T. \quad (6.10)$$

Pour des raisons présentées dans [141], pour améliorer la précision, on a avantage à prendre les points le plus espacés possible dans l'espace. Tel que mentionné dans [132], il ne faudra pas prendre des points tous coplanaires afin que la matrice $\check{\mathbf{C}}$ soit bien conditionnée. De la même manière, les points choisis ne devront pas être colinéaires afin que la matrice $\check{\mathbf{C}}$ soit de plein rang. En effet, si tous les points connus sont coplanaires, il existera deux solutions au système : une autour de la position réelle et l'autre autour de la réflexion de la position réelle par rapport au plan contenant les points de mesures. Si tous les points de mesure sont colinéaires, il existera une infinité de solutions autour de la droite contenant les points.

6.3.1.2 Méthode des mesures relatives aux enrouleurs

La méthode précédente peut être adaptée s'il n'est pas possible de mesurer la longueur initiale des câbles. Dans ce cas, on ne pourra faire l'acquisition que des longueurs relatives des câbles. La longueur initiale sera alors une variable à estimer par la procédure, comme le point d'attache. Séparant la longueur initiale de la variation de longueur d'un point à l'autre, on a

$$\rho_{i|j} = \rho_{i|0} + \Delta\rho_{i|j}, \quad (6.11)$$

où $\Delta\rho_{i|j}$ est la variation de longueur du câble entre la position j et la position de référence. On reprend l'équation 6.4 pour obtenir

$$(\rho_{i|0} + \Delta\rho_{i|j})^2 = \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j - 2\mathbf{c}_j^T \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i \quad (6.12)$$

$$\rho_{i|0}^2 + 2\rho_{i|0}\Delta\rho_{i|j} + \Delta\rho_{i|j}^2 = \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j - 2\mathbf{c}_j^T \mathbf{b}_i + \rho_{i|0}^2 \quad (6.13)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\rho_{i|j} & \mathbf{c}_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{i|0} \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j - \Delta\rho_{i|j}^2). \quad (6.14)$$

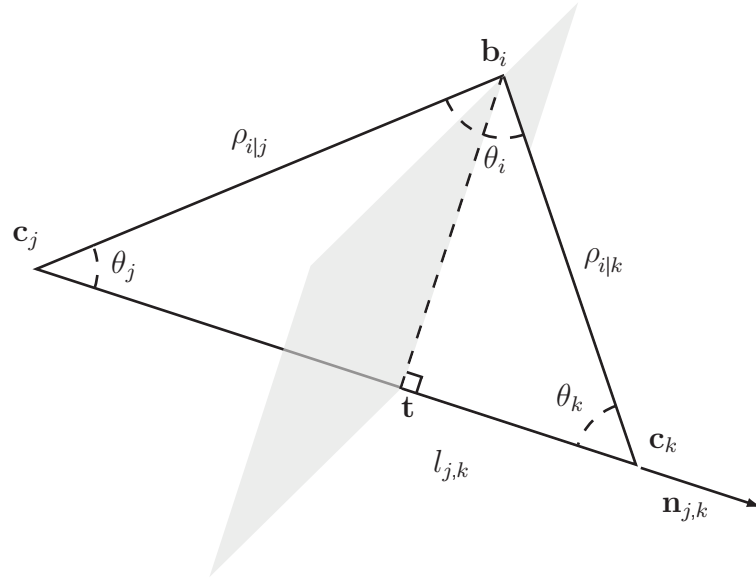


FIG. 6.3 – Triangle dont les sommets sont un point recherché et deux points connus.

Utilisant les mesures de variations de câbles et de positions de points connus, on obtient le système d'équation

$$\begin{bmatrix} \check{\Delta}\rho_{i|1} & \check{\mathbf{c}}_{i|1}^T \\ \check{\Delta}\rho_{i|2} & \check{\mathbf{c}}_{i|2}^T \\ \vdots & \\ \check{\Delta}\rho_{i|nc} & \check{\mathbf{c}}_{i|nc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{i|0} \\ \hat{\mathbf{b}}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{c}}_1^T \check{\mathbf{c}}_1 - \check{\Delta}\rho_{i|1}^2 \\ \check{\mathbf{c}}_2^T \check{\mathbf{c}}_2 - \check{\Delta}\rho_{i|2}^2 \\ \vdots \\ \check{\mathbf{c}}_{nc}^T \check{\mathbf{c}}_{nc} - \check{\Delta}\rho_{i|nc}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\check{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{v}}_i = \check{\mathbf{m}}_i \quad (6.16)$$

Encore une fois, ce système peut être résolu en utilisant les moindres carrés linéaires pour obtenir un estimé des valeurs recherchées $\hat{\mathbf{v}}$.

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{C}}^J \check{\mathbf{m}} \quad (6.17)$$

Cette fois, un minimum de quatre mesures seront nécessaires.

6.3.1.3 Méthode des triangles

Connaissant les trois longueurs des côtés d'un triangle, on peut connaître de façon unique la position relative de ses sommets. Prenons un triangle dont deux des sommets sont des points connus et le sommet restant le point d'attache recherché, comme à la figure 6.3. Utilisant les mesures absolues de longueurs de câbles en plus de la position connue des deux points de mesure, on peut obtenir les coordonnées d'un plan contenant

le point d'attache. Avec plusieurs triangles dont chacun possède le point d'attache comme sommet, on peut définir plusieurs plans. Leur intersection donne la position recherchée du point d'attache.

Grâce aux encodeurs et aux positions connues, on a une mesure des longueurs des côtés du triangle. Les sommets sont \mathbf{b}_i , \mathbf{c}_j et \mathbf{c}_k . Les angles à ces sommets sont respectivement θ_i , θ_j et θ_k . Les côtés opposés aux sommets ont respectivement les longueurs $l_{j,k}$, $\rho_{i|j}$ et $\rho_{i|k}$. Avec une mesure ou un estimé de toutes ces longueurs, on peut calculer les angles

$$\widehat{\theta}_i = \arccos \left[\frac{\widehat{l}_{j,k}^2 - \check{\rho}_{i|j}^2 - \check{\rho}_{i|k}^2}{-2\check{\rho}_{i|j}\check{\rho}_{i|k}} \right], \quad (6.18)$$

$$\widehat{\theta}_j = \arccos \left[\frac{\check{\rho}_{i|j}^2 - \widehat{l}_{j,k}^2 - \check{\rho}_{i|k}^2}{-2\widehat{l}_{j,k}\check{\rho}_{i|k}} \right], \quad (6.19)$$

$$\widehat{\theta}_k = \arccos \left[\frac{\check{\rho}_{i|k}^2 - \widehat{l}_{j,k}^2 - \check{\rho}_{i|j}^2}{-2\widehat{l}_{j,k}\check{\rho}_{i|j}} \right], \quad (6.20)$$

$\widehat{l}_{j,k}$ étant donné par les positions des points mesurés

$$\widehat{l}_{j,k} = \|\check{\mathbf{c}}_k - \check{\mathbf{c}}_j\|. \quad (6.21)$$

On cherche à définir un plan contenant \mathbf{b} . Ne connaissant pas \mathbf{b} , on ne peut obtenir le plan soutenant le triangle. On définira plutôt le plan contenant \mathbf{b} perpendiculaire au vecteur reliant \mathbf{c}_j et \mathbf{c}_k . Ce plan contiendra aussi le point \mathbf{t} illustré à la figure 6.3, le segment reliant ce point à \mathbf{b} étant perpendiculaire au segment reliant \mathbf{c}_j à \mathbf{c}_k . La position du point \mathbf{t} est estimée par

$$\widehat{\mathbf{t}} = \check{\mathbf{c}}_j + \widehat{\mathbf{n}}_{j,k} \check{\rho}_{i|j} \cos \widehat{\theta}_j, \quad (6.22)$$

$\widehat{\mathbf{n}}_{j,k}$ étant le vecteur unitaire donnant la direction entre $\check{\mathbf{c}}_j$ et $\check{\mathbf{c}}_k$:

$$\widehat{\mathbf{n}}_{j,k} = \frac{\check{\mathbf{c}}_k - \check{\mathbf{c}}_j}{\widehat{l}_{j,k}}. \quad (6.23)$$

Soit un plan contenant les points $\widehat{\mathbf{t}}$ et $\widehat{\mathbf{b}}_i$. Si ce plan est perpendiculaire au vecteur $\widehat{\mathbf{n}}_{j,k}$, il peut être défini par $\widehat{\mathbf{n}}_{j,k}$ et le point $\widehat{\mathbf{t}}$ définissent complètement un plan contenant $\widehat{\mathbf{b}}_i$. Utilisant l'équation du plan, on a ainsi

$$\widehat{\mathbf{n}}_{j,k}^T \widehat{\mathbf{b}}_i = \widehat{d}_{i|(j,k)} \quad (6.24)$$

où

$$\widehat{d}_{i|(j,k)} = \widehat{\mathbf{n}}_{j,k}^T \widehat{\mathbf{t}}. \quad (6.25)$$

Il y a n_b combinaisons uniques de deux points différents \mathbf{c} tel que

$$n_b = \frac{n_c!}{(n_c - 2)! \cdot 2}. \quad (6.26)$$

On peut donc déterminer n_b plans différents qui devraient contenir le point \mathbf{b}_i pour obtenir le système d'équations

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{n}}_{1,2}^T \\ \widehat{\mathbf{n}}_{1,3}^T \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{n}}_{nc-1,nc}^T \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{b}}_i = \begin{bmatrix} \widehat{d}_{i|(1,2)} \\ \widehat{d}_{i|(1,3)} \\ \vdots \\ \widehat{d}_{i|(nc-1,nc)} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$\widehat{\mathbf{N}}_i \widehat{\mathbf{b}}_i = \widehat{\mathbf{d}}_i. \quad (6.28)$$

Il représente l'intersection de n_b plans. De nouveau, on peut résoudre ce problème utilisant les moindres carrés linéaires :

$$\widehat{\mathbf{b}}_i = \widehat{\mathbf{N}}_i^+ \widehat{\mathbf{d}}_i. \quad (6.29)$$

L'intérêt de cette méthode deviendra plus clair lorsque l'étalonnage de tous les points sera fait simultanément. La figure 6.4 montre tous les triangles utilisés dans l'étalonnage d'un point utilisant cinq points de mesures.

6.3.2 Étalonnage simultané de tous les câbles, sans plate-forme

Toujours sans plate-forme, il est possible de rassembler tous les câbles en un point lors de l'étalonnage. On impose une certaine tension dans tous les câbles. L'utilisateur doit déplacer les câbles rassemblés en combattant la somme de ces forces. Le fait que les câbles se rencontrent tous à un même point devient alors une information supplémentaire qu'il est possible d'utiliser pour tenter d'obtenir une meilleure précision pour des points de mesure donnés.

6.3.2.1 Méthode de l'intersection de sphères

Ces n câbles qui se rejoignent en un point peuvent être modélisés par n sphères qui se croisent. Mesurant les points d'intersection $\check{\mathbf{c}}_j$ et les rayons des sphères $\check{\rho}_{i|j}$, il

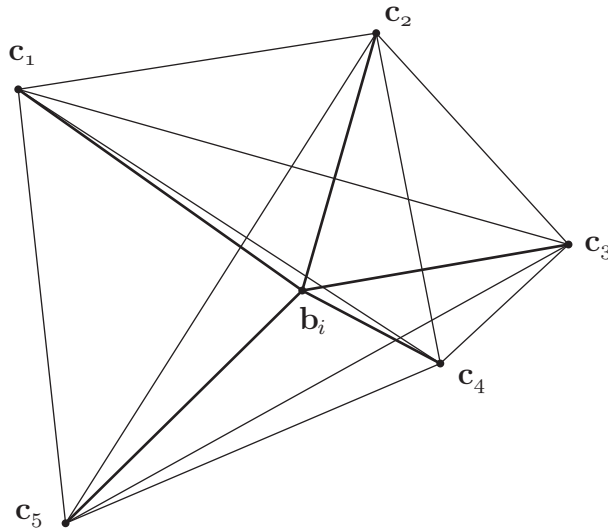


FIG. 6.4 – Ensemble des triangles dont un des sommet est le point d’attache et les deux autres sommets des couples de points connus.

est possible d’obtenir les centres des sphères, qui correspondent aux points d’attache recherchés $\widehat{\mathbf{b}}_i$.

L’expression symbolique explicite du point d’intersection entre trois sphères est utilisée (voir Annexe C). Il peut y avoir aucune, une ou plus souvent dans cette application deux solutions à ce problème. Lorsqu’il y a deux solutions, l’une est l’image de l’autre réfléchié par le plan contenant les centres des trois sphères. Selon le problème, il sera possible de choisir la solution qui correspond à la situation réelle. On pourra donc utiliser n_b combinaisons différentes de trois câbles.

$$n_b = \frac{n!}{(n-3)! 3!} \quad (6.30)$$

Pour chacune de ces combinaisons, le point d’intersection des trois sphères correspondant à l’intersection des trois câbles pourra être déterminé. On cherchera à trouver les positions des points d’attache qui minimisent la distance entre ces points d’intersection de sphères et les points de mesures connus. Cette méthode peut être utilisée avec des mesures absolues ou relatives aux encodeurs. La fonction à minimiser en fonction des points d’attache à la base s’énonce donc :

$$f(\widehat{\mathbf{b}}_{\forall}) = \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} \sum_{m=l+1}^n \|\widehat{\mathbf{s}}(\widehat{\mathbf{b}}_k, \widehat{\mathbf{b}}_l, \widehat{\mathbf{b}}_m, \check{\rho}_{k|j}, \check{\rho}_{l|j}, \check{\rho}_{m|j}) - \check{\mathbf{c}}_j\|^2 \quad (6.31)$$

où $\widehat{\mathbf{s}}(\widehat{\mathbf{b}}_k, \widehat{\mathbf{b}}_l, \widehat{\mathbf{b}}_m, \check{\rho}_{k|j}, \check{\rho}_{l|j}, \check{\rho}_{m|j})$ est la position du point d'intersection calculé des trois sphères correspondant aux câbles k , l et m , $\check{\rho}_{v|j}$ étant la longueur du câble v mesurée au point j .

Durant la minimisation, il est possible qu'un estimé des points d'attache, combiné à des erreurs de mesures, ne donne pas de solution au problème d'intersection des trois sphères. Pour considérer cette possibilité dans la fonction, la distance entre le point d'intersection et le point connu sera alors une grande valeur arbitraire pour pénaliser cet estimé, assurément loin de la solution réelle.

Pour minimiser cette fonction non-linéaire, une procédure numérique est nécessaire. De par la nature de la fonction utilisée pour déterminer le point d'intersection entre trois sphères, le gradient de la fonction 6.31 par rapport aux composantes des points d'attache comprend plusieurs dizaines de milliers de termes et est par conséquent difficile à utiliser. Pour cette raison, et aussi parce que son expression est une somme de distances au carré, la méthode qui semblait la plus appropriée à utiliser est la fonction *lsqnonlin* implémentée dans Matlab. Cette fonction calcule les moindres carrés non-linéaires en utilisant un algorithme choisi en fonction de la nature du problème.

6.3.2.2 Méthode des triangles

Bien qu'elle fonctionne bien dans l'exemple étudié au chapitre 7, la complexité du problème d'intersection entre trois sphères a incité le développement d'une solution d'étalonnage faisant plutôt appel à une interférence entre des plans. La méthode des triangles présentée précédemment peut être adaptée pour étalonner tous les points simultanément de cette façon.

On peut concevoir qu'il soit possible de mesurer, grâce aux encodeurs, les distances entre les points d'attache. Cela pourrait se faire en utilisant, par exemple, une bille au point où les câbles se rassemblent qui soit tout juste assez grosse pour bloquer à l'œillet du point d'attache. Il s'agirait de contrôler un câble en position et de l'enrouler jusqu'au point d'attache, tout en contrôlant les autres en tensions. Il serait alors possible de mesurer la distance entre le point du câble contrôlé en position et les autres points.

Avec cette nouvelle information, la méthode des triangles peut être adaptée pour considérer tous les triangles formés de trois points dont au moins un est un point à

déterminer. Dans la méthode des triangles à un câble, tous les triangles formés étaient de type **b, c, c**, soit un point d'attache recherché et deux points de mesures connus. Dans cette méthode des câbles en simultané, on pourra en plus utiliser des triangles de type **b, b, c** et **b, b, b**. Un système d'équation ayant la même forme que l'équation 6.28 pourra être formé pour déterminer la position d'un point d'attache \mathbf{b}_i , utilisant l'information sur tous les autres points d'attache :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{N}}_{bcc} \\ \widehat{\mathbf{N}}_{bbc} \\ \widehat{\mathbf{N}}_{bbb} \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{b}}_i = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{d}}_{bcc} \\ \widehat{\mathbf{d}}_{bbc} \\ \widehat{\mathbf{d}}_{bbb} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$\widehat{\mathbf{N}}_i \widehat{\mathbf{b}}_i = \widehat{\mathbf{d}}_i \quad (6.33)$$

Cette fois, il ne pourra être résolu en utilisant l'inverse généralisée puisque les parties $\widehat{\mathbf{N}}_{bbc}$ et $\widehat{\mathbf{N}}_{bbb}$ de la matrice $\widehat{\mathbf{N}}_i$, de même que les parties $\widehat{\mathbf{d}}_{bbc}$ et $\widehat{\mathbf{d}}_{bbb}$ du vecteur $\widehat{\mathbf{d}}_i$ dépendront de la position de certains points d'attache recherchés. Le sous-système d'équations $\widehat{\mathbf{N}}_{bbc} \widehat{\mathbf{b}}_i = \widehat{\mathbf{d}}_{bbc}$ est composé de la même manière que l'équation 6.28, c'est-à-dire en prenant deux points d'attache (dont $\widehat{\mathbf{b}}_i$) et un point de mesure comme sommets. Le sous-système $\widehat{\mathbf{N}}_{bbb} \widehat{\mathbf{b}}_i = \widehat{\mathbf{d}}_{bbb}$ est aussi formé de la même manière, cette fois avec des triangles dont tous les sommets sont des points d'attache, dont un qui est toujours $\widehat{\mathbf{b}}_i$.

On veut déterminer tous les points d'attache simultanément partant de n systèmes comme l'équation 6.33. Chacun de ces systèmes représente l'intersection d'un grand nombre de plans. Encore une fois, une procédure numérique est utilisée. Elle a pour objectif de minimiser la fonction suivante, qui est la somme des erreurs moyennes aux carrés pour tous les câbles :

$$f(\widehat{\mathbf{b}}_v) = \sum_{i=1}^n \|\widehat{\mathbf{N}}_i \widehat{\mathbf{b}}_i - \widehat{\mathbf{d}}_i\|^2 \quad (6.34)$$

6.4 Étalonnage à l'aide d'une mesure externe de la pose

S'il est possible de mesurer directement la pose de la plate-forme, cette information peut être utilisée pour étalonner la géométrie du robot. Dans un environnement de quelques centaines de mètres cubes, comme c'est le cas pour le prototype à l'étude au

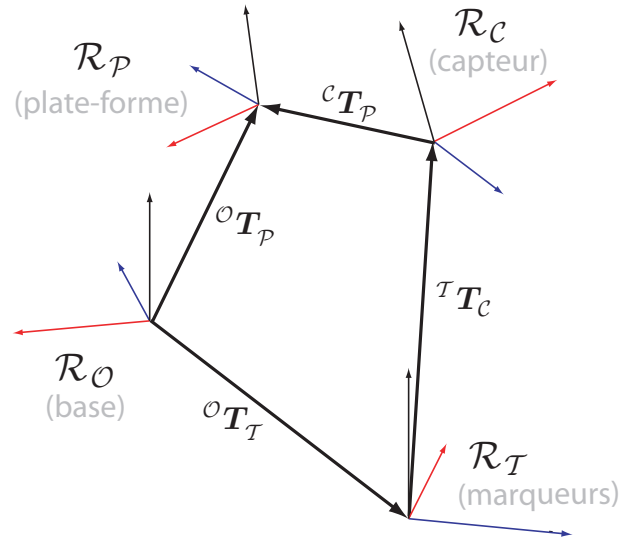


FIG. 6.5 – Repères impliqués dans l'étalonnage par mesure directe de la pose.

chapitre 7, l'utilisation d'autres câbles, des grilles de points connus, un théodolite [134], un GPS intérieur [146] ou encore une caméra [147, 148] sont des solutions imaginables. On traite ici ce problème de façon générale, s'appliquant à n'importe quel capteur. Au chapitre 7, la méthode est utilisée avec une caméra embarquée sur la plate-forme.

L'idée utilisée est encore la même : Un algorithme optimise les paramètres géométriques du mécanisme pour minimiser l'erreur entre les variations de longueurs de câbles *mesurées par les encodeurs* et les variations de longueurs de câbles *calculées à l'aide des mesures externes de la pose et du PGI*.

Pour ce type d'étalonnage, un capteur mesurera habituellement une pose relative à certains marqueurs. Parfois, le capteur pourra être embarqué et les repères fixés aux sol. D'autres fois, ce sera l'inverse. Dans un cas comme dans l'autre, chacun de ces repères utilisés pour la mesure sera rigidement attachés au sol ou à la plate-forme. Autant le capteur que les marqueurs auront généralement un repère qui leur sera associé et qui ne coïncidera pas nécessairement avec le repère du corps sur lequel ils sont attachés. Pour la suite, comme ce sera le cas au chapitre 7, on considère le capteur rigidement attaché à la plate-forme et les marqueurs rigidement attachés au sol. La méthode présentée peut être adaptée au cas inverse.

La figure 6.5 illustre les différents repères impliqués dans cet étalonnage ainsi que les transformations ${}^M\mathbf{T}_N$ qui expriment la pose relative du repère \mathcal{R}_N par rapport à

\mathcal{R}_M tel que

$${}^M\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} {}^M\mathbf{Q}_N & {}^M\mathbf{p}_N \\ [0 & 0 & 0] & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

\mathcal{R}_O est le repère fixé à la base et \mathcal{R}_T est le repère associé aux marqueurs. Les deux sont immobiles et ${}^O\mathbf{T}_T$ est la transformation rigide les reliant. \mathcal{R}_C est le repère du capteur et \mathcal{R}_P est celui de la plate-forme. Les deux sont mobiles mais sont rigidement attachés ensemble suivant la transformation ${}^P\mathbf{T}_C$. ${}^O\mathbf{T}_P$ représente la transformation de \mathcal{R}_P dans le repère fixe \mathcal{R}_O . C'est cette transformation qui définit la pose qui est commandée au robot. ${}^T\mathbf{T}_C$ définit la pose du capteur par rapport aux marqueurs, qui peut être mesurée. Ainsi, cette méthode doit étalonner les positions des points d'attache à la base et à la plate-forme, en plus de déterminer toutes les transformations rigides inconnues (${}^P\mathbf{T}_C$ et ${}^O\mathbf{T}_T$). Elle peut aussi être adaptée pour ne déterminer que les points à la base si les attaches à la plate-forme sont connues.

La position d'un point d'attache sur la plate-forme \mathbf{a}_i lorsque la plate-forme est à la j^e pose, s'exprime dans le repère fixe par

$$\mathbf{a}_{i|j} = \mathbf{p}_T + {}^O\mathbf{Q}_T {}^T\mathbf{p}_{C|j} + {}^O\mathbf{Q}_T {}^T\mathbf{Q}_{C|j} {}^C\mathbf{p}_P + {}^O\mathbf{Q}_T {}^T\mathbf{Q}_{C|j} {}^C\mathbf{Q}_P {}^P\mathbf{a}_i. \quad (6.36)$$

Utilisant l'information du capteur de même que les équations du PGI considérant tous les repères (équation 2.5 et 6.36), on obtient l'expression pour la longueur de câble

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i|j} &= \|\hat{\mathbf{b}}_i - \hat{\mathbf{a}}_{i|j}\|, & (6.37) \\ \hat{\rho}_{i|j} &= \|\hat{\mathbf{b}}_i - (\hat{\mathbf{p}}_T + {}^O\hat{\mathbf{Q}}_T {}^T\hat{\mathbf{p}}_{C|j} + {}^O\hat{\mathbf{Q}}_T {}^T\hat{\mathbf{Q}}_{C|j} {}^C\hat{\mathbf{p}}_P + {}^O\hat{\mathbf{Q}}_T {}^T\hat{\mathbf{Q}}_{C|j} {}^C\hat{\mathbf{Q}}_P {}^P\hat{\mathbf{a}}_i)\|. & (6.38) \end{aligned}$$

La différence entre cette valeur estimée et la longueur initiale du câble $\rho_{i|0}$ est

$$\widehat{\Delta\rho}_{i|j} = \hat{\rho}_{i|j} - \hat{\rho}_{i|0}, \quad (6.39)$$

où $\rho_{i|0}$ est une variable inconnue qui sera aussi déterminée avec les autres paramètres géométriques.

La variation de longueur de câbles est aussi mesurée à l'aide des encodeurs $\check{\Delta\rho}_i$. L'erreur entre la valeur mesurée et la valeur calculée de variation de longueur du câble i est, pour une mesure j :

$$\epsilon_{i|j} = \widehat{\Delta\rho}_{i|j} - \check{\Delta\rho}_{i|j}. \quad (6.40)$$

Un vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$ contenant tous les $\epsilon_{i|j}$ est formé en prenant n_c mesures :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{1|1} & \epsilon_{1|2} & \cdots & \epsilon_{n|(n_c-1)} & \epsilon_{n|n_c} \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

La fonction à minimiser est dans ce cas

$$f(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6.42)$$

C'est donc la norme de $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui est minimisée pour étalonner les paramètres géométriques du robot. Les mesures qui sont prises aux différentes poses sont la variation de longueurs selon les encodeurs $\check{\Delta}\rho_{ij}$ et la pose du capteur exprimée dans le repère des marqueurs ${}^T\check{\mathbf{T}}_{C_j}$.

Puisque les mesures sont prises dans un repère intermédiaire, il n'y a pas que les points d'attache qui soient étalonnés. La transformation rigide entre les repères fixes de la base et des cibles ${}^O\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$, la transformation rigide entre les repères de la caméra et de la plate-forme ${}^P\mathbf{T}_C$ et les longueurs de câble initiales $\rho_{i|0}$ sont aussi déterminées par la procédure. Pour un mécanisme à 6-ddl, les deux transformations rigides sont représentées en utilisant quatre quaternions pour l'orientation et un vecteur de translation. Elles sont donc définies par sept variables chacune. Le nombre total de variables étalonnées par la procédure est $7n + 14$: les coordonnées de n points d'attache à la base ($3n$ variables), n points à la plate-forme ($3n$ variables), deux transformations rigides (14 variables) et n longueurs initiales. La plate-forme est déplacée à $n_c \geq (7n + 14)$ différentes poses couvrant le plus grand espace articulaire dans lequel il est possible de prendre des mesures de la pose. À chaque pose, une mesure de pose est prise et la position angulaire des encodeurs est enregistrée. Le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est déterminé avec ces mesures. Sa norme peut être minimisée avec la méthode des moindres carrés non-linéaires de Levenberg-Marquardt.

6.5 Résumé et choix de la méthode

Pour contrôler adéquatement un robot, il est important de connaître ses paramètres géométriques. Pour un robot à câbles, ceci implique en général la mesure de points d'attache très espacés. Dans un contexte de robot à câbles transportable et reconfigurable, une méthode d'étalonnage de ces points est souhaitable. Ce chapitre en a présenté plusieurs qui utilisent différentes sources d'informations. Certaines étalonnent les points pris individuellement, d'autres l'ensemble des points simultanément.

Au chapitre suivant, les différentes méthodes sont simulées pour un mécanisme

particulier et un ensemble de points donné. Des résultats expérimentaux de deux des méthodes sont aussi présentés. Elles sont comparées à des mesures prises avec un théodolite, dont la précision est nettement supérieure à la taille même des œillets considérés comme les points d'attache à la base. Comme ces méthodes nécessitent des mesures précises de points dans l'espace ou de la pose de la plate-forme, on peut se demander s'il ne vaudrait pas mieux mesurer directement la position des points d'attache, justement avec un théodolite par exemple. La réponse dépendra de la situation.

Dans le cas où un robot est installé une seule fois à un endroit, pour une longue période, où il y a peu de contraintes budgétaires et où une très grande précision est importante, il est clair que la méthode de mesure directe par théodolite est la meilleure. Sa précision est supérieure à des mesures de longueurs de câbles prises par des encodeurs. Le désavantage de la méthode de mesure directe par théodolite est qu'elle demande un équipement et des opérateurs spécialisés. Si un robot est modifié régulièrement, l'étalonnage devient cher, en plus de dépendre de la disponibilité des experts.

Le désavantage des méthodes où les points doivent être amenés manuellement est qu'elle limite l'espace des points connus qui peuvent être échantillonnés. Avec le capteur adéquat, ce problème n'est pas rencontré en utilisant la méthode de la mesure directe de la pose. Certaines des méthodes présentées nécessitent un estimé initial de la position des points d'attache. Cet estimé peut être obtenu rapidement avec les méthodes étalonnant la position des attaches indépendamment.

Comme on le verra dans les résultats de simulation présentés au chapitre 7, la précision des mesures des longueurs des câbles a une grande influence sur la précision aux points d'attache. Pour la plupart des méthodes sans plate-forme, la précision est du même ordre de grandeur. Elle semble donc dépendre davantage de la précision aux encodeurs et des points de mesure utilisés que de la méthode choisie.

Chapitre 7

Application : mécanisme pour l'acquisition de l'apparence 3D d'objets

Ce chapitre présente l'application des outils expliqués dans les chapitres précédents pour concevoir, analyser et étalonner un robot à câbles. La construction du prototype visait aussi à étudier la possibilité d'utiliser un robot à câbles pour numériser l'apparence 3D d'objets fixes. Le rôle du robot est de déplacer de façon automatisée une caméra autour d'un objet et de prendre des photos. On énonce d'abord les raisons qui font d'un mécanisme à câbles une option intéressante pour cette application. Le fonctionnement général de l'appareil est ensuite expliqué. Les requis de l'application sont par la suite présentés. Il s'agit de l'espace désiré, de l'ensemble des torseurs de la tâche ainsi que des contraintes à respecter sur les points d'attache. La géométrie résultant de l'optimisation en regard de la tâche est présentée et analysée. La réalisation physique du mécanisme effectuée, on a pu tester certaines méthodes d'étalonnage et les résultats sont inclus dans ce chapitre. Pour conclure, des modèles d'objets numérisés issus du processus sont présentés. Il est à noter que l'aspect vision a été réalisé par des collègues du Laboratoire de vision et systèmes numériques.

7.0.1 Pourquoi un robot à câbles ?

La modélisation de l'apparence pour une grande variété d'objets est en ce moment un défi qui motive plusieurs recherches. Une application évidente est la visualisation réaliste et en temps réel d'objets de n'importe quel point de vue. Dans ce cas, l'apparence est captée, modélisée puis rendue considérant les rayons de lumière qui émanent de l'objet. Une approche reconnue consiste à mesurer le champ de lumière d'un objet [149]. Le champ de lumière peut être ensuite compressé en modélisant une géométrie approximative avant d'encoder les rayons qui émanent de la surface de l'objet [150, 151]. Afin de produire un tel modèle, une grande quantité d'images doivent être saisies de plusieurs points de vue entourant l'objet.

Saisir et traiter toutes ces images requiert essentiellement l'automatisation du processus, de l'acquisition jusqu'à la modélisation. Quelques systèmes du genre ont été développés dans les quinze dernières années, notamment ceux présentés dans [152, 153]. Pour les objets en mouvement ou qui se déforment, un ensemble de plusieurs caméras est habituellement utilisé. Cependant, pour les objets statiques, il est avantageux d'utiliser un manipulateur robotique avec une caméra montée comme effecteur [153]. Ceci permet de faire l'acquisition d'une bonne densité de points de vue.

Un robot à câbles peut être utilisé pour positionner et orienter une caméra. La figure 7.1 montre celui adapté à cette fin dans le cadre de cette thèse. Ce type de manipulateur présente plusieurs avantages pour une telle application :

- **Utilisation de petite à grande échelle.**

Son avantage principal est que, contrairement à la plupart des systèmes mécaniques, il peut être utilisé à plusieurs échelles. Ceci permet de photographier des objets de tailles diverses allant de quelques centimètres à quelques mètres. Un bras robotique conventionnel pourrait photographier un objet d'une certaine taille maximale. Pour photographier un objet deux fois plus gros, il faudrait un autre bras. Pour le robot à câbles, il ne s'agit que d'enrouler d'avantage de câble.

- **Faible interférence avec l'éclairage.**

Les câbles n'interfèrent pas de façon significative avec l'éclairage de l'environnement, qui demeure fixe durant toute l'acquisition. Seulement la plate-forme mobile projette une ombre. Puisqu'elle est de petite taille, cet effet est aussi négligeable.

- **Déployable.**

Pratiquement n'importe quelle salle avec un éclairage adéquat peut recevoir un tel

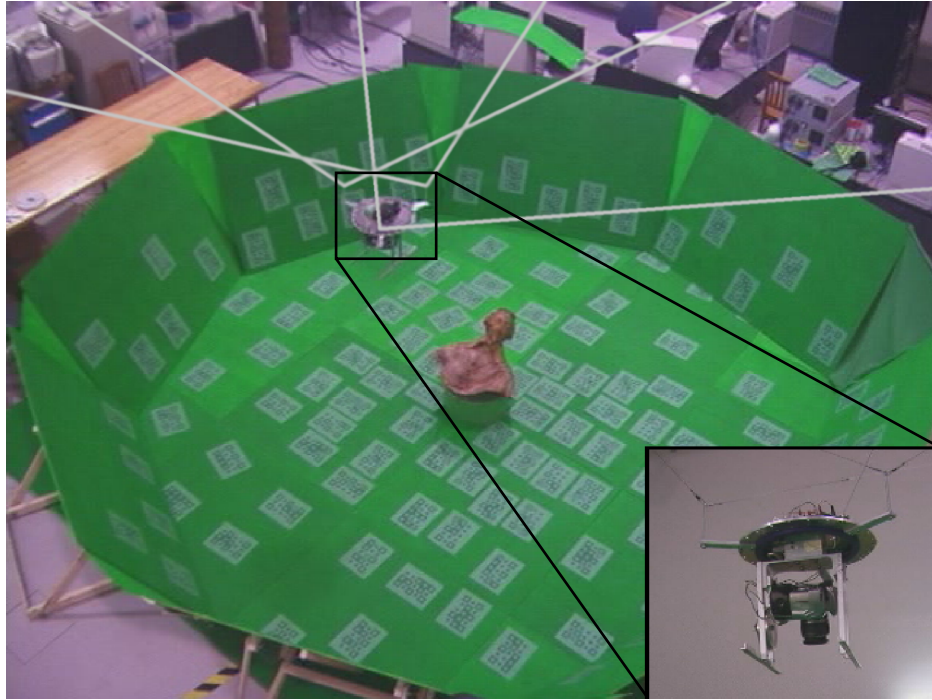


FIG. 7.1 – Le robot à câbles déplaçant une caméra utilisée pour capter des images d'un objet de plusieurs points de vue.

système. Dans un contexte de numérisation, il est souvent avantageux ou même nécessaire de transporter le numériseur et non l'objet, qui peut être de grande valeur ou fragile (ex. musée, lieux de fouille archéologique, etc.). Un mécanisme à câbles se transporte et s'installe relativement aisément. Il ne s'agit au fond que d'une plate-forme, de treuils, de câbles et d'un ordinateur.

– **Faible coût.**

L'objet déplacé étant peu pesant, les câbles et les treuils utilisés n'ont pas besoin de présenter des propriétés exceptionnelles et sont disponibles commercialement. L'aspect mécanique coûte donc moins cher qu'un bras robotique ou un manipulateur de type Gantry, particulièrement pour les objets de très grandes tailles. De la même manière, l'appareil photo conventionnel est un capteur abordable.

– **Imprécision du robot compensée par un système de vision.**

Un des désavantages d'un robot à câbles est l'imprécision sur la pose de la plate-forme due à l'élasticité des câbles et à l'imprécision sur le modèle géométrique. Le système envisagé contourne ce problème en mesurant la pose à l'aide de la caméra embarquée et d'un ensemble de cibles.

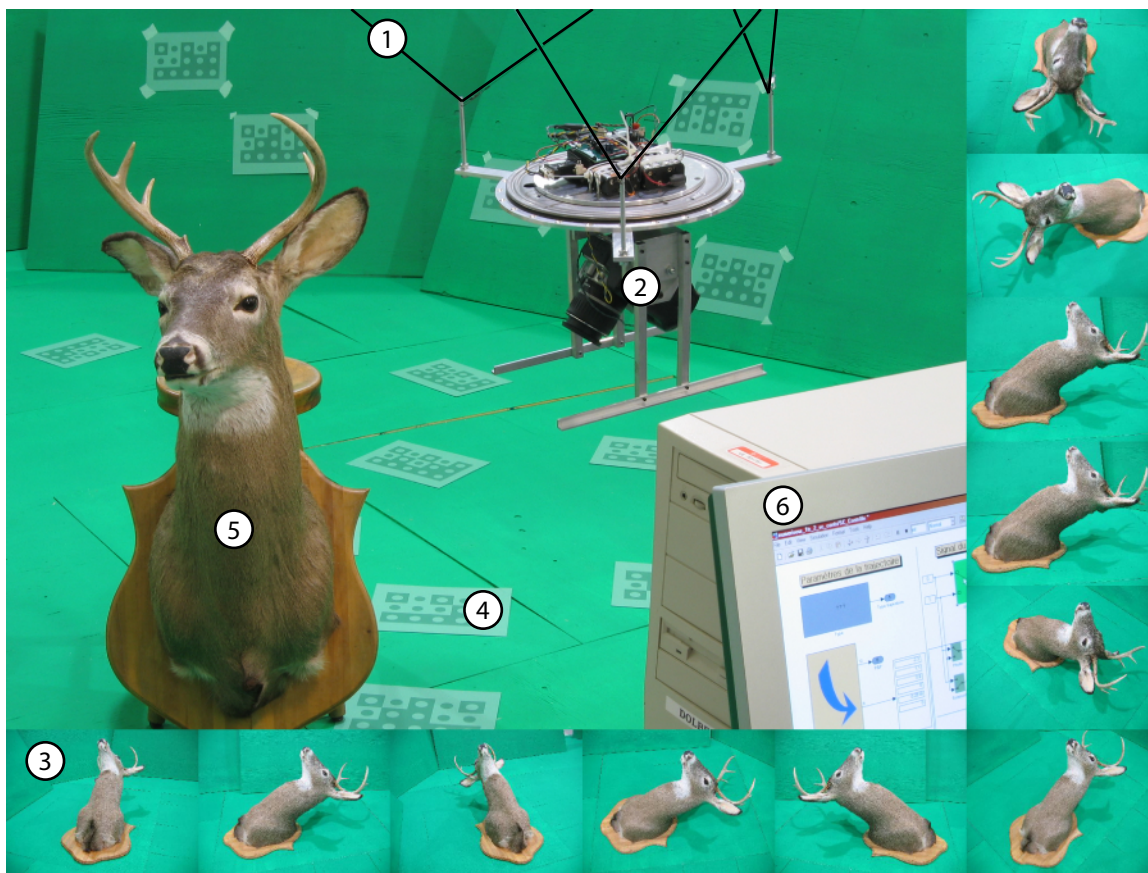


FIG. 7.2 – Les différents aspects du numériseur à câbles.

7.0.2 Fonctionnement général

Les différents aspects du système sont illustrés à la figure 7.2 et sont décrits ci-dessous.

1. Robot à câbles.

Le robot à six câbles déplace et oriente une plate-forme autour d'un objet dont on veut numériser l'apparence. Le robot se stabilise, une photographie est prise, puis il se déplace à la pose suivante. Un dispositif passif pouvant être bloqué par un solénoïde permet à la caméra de tourner autour de l'axe central de la plate-forme (voir figure 7.9). Son utilité sera expliquée plus loin.

2. Caméra photo numérique.

La caméra en est une de type SLR (déclenchement réflex, une seule lentille) de moyenne gamme disponible commercialement. La prise de photo est contrôlée par ordinateur via une interface sans fil. Le déclenchement de la caméra est effectué

lorsque la pose désirée est atteinte et qu'un certain délai est écoulé afin d'assurer la stabilité. Les clichés peuvent nécessiter des temps d'exposition allant jusqu'à quelques secondes.

3. Photographies de l'objet.

Plusieurs centaines d'images doivent être captées puis analysées afin de produire le modèle final. Les images ont un double rôle : déterminer la pose de la caméra précisément et mesurer l'apparence de l'objet.

4. Cibles de positionnement.

Les cibles colorées sont utilisées pour permettre la mesure de la pose de la caméra dans l'espace. Chaque cible a un code l'identifiant de façon unique tel qu'expliqué à la figure 7.3. Elles sont imprimées par jet d'encre sur un carton mat pour éviter les reflets, qui pourraient nuire au traitement des images. Dans chacune des photos, plusieurs cibles sont toujours en vue. Elles permettent de déterminer la pose de la caméra à partir des photographies.

5. Objet numérisé.

Contrairement aux technologies existantes, ce système d'acquisition permet la modélisation d'objets de tailles très variées et d'apparence complexe. Un environnement vert entoure l'objet afin de pouvoir le distinguer de l'arrière-plan. Les limitations de ce système quant à la nature de l'objet numérisé sont que celui-ci ne doit pas avoir une grande réflectance, il ne doit pas être transparent ni comporter de vert se rapprochant de celui de l'enclos. De plus, une certaine portion de l'objet, celle près du sol, ne peut être numérisée.

6. Postes de contrôle et de traitement.

Des trajectoires sont programmées dans le poste contrôlant le déplacement du robot, le déclenchement de l'appareil photo et l'actionnement du solénoïde. La prise des photos le long de la trajectoire est par conséquent complètement automatisée. La seule intervention humaine nécessaire est l'initialisation du système. Une fois la trajectoire complétée, les photos sont transférées sur un poste de traitement qui produit le modèle de l'apparence de l'objet. Les différentes étapes de l'analyse des photos réalisées par des collègues sont présentées dans [18] et à l'extension 7.

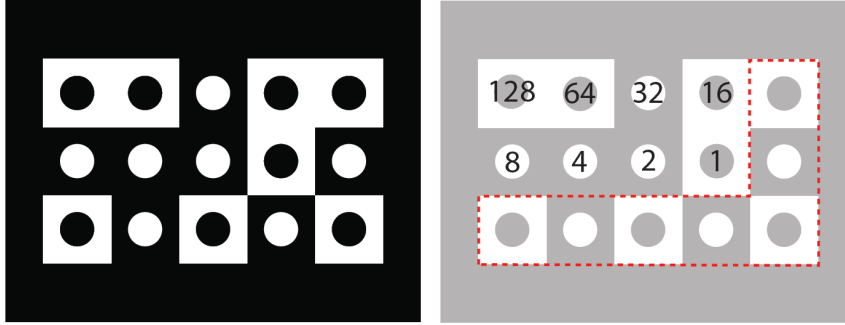


FIG. 7.3 – Code matriciel représentant la valeur 46. L’image de droite montre l’arrangement utilisé pour déterminer l’orientation (L pointillé) et le poids de chaque bit. Un cercle noir indique une valeur de 0 et un cercle blanc une valeur de 1. Ces codes sont imprimés sur des cartons qui sont fixés dans l’espace.

7.1 Optimisation de l’architecture

7.1.1 Espace idéal désiré

Afin d’obtenir les différents points de vue nécessaires pour construire la représentation de l’apparence, la caméra est typiquement déplacée sur une surface hémisphérique centrée sur l’objet, tel que montré à la figure 7.4. Les coordonnées sphériques sont utilisées pour définir la position de la plate-forme sur cette surface. Elles sont θ_a , l’angle par rapport à l’azimut, θ_z , l’angle par rapport au zénith et r , le rayon de la sphère. Idéalement, la caméra devrait être orientée de façon à ce que son axe optique intersecte le centre de l’objet pour toutes les photographies. Le rayon de l’hémisphère dépend de la taille de l’objet modélisé et des caractéristiques de la caméra. Ainsi, sur l’espace idéal désiré, les six degrés de liberté sont couplés de telle manière que si deux d’entre eux sont spécifiés, les quatre autres peuvent être déduits. Ceci simplifie considérablement l’analyse et l’optimisation du mécanisme.

Soit une pose \mathbf{x} étant définie par

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{\mathcal{P}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{P}} \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

où $\mathbf{p}_{\mathcal{P}}$ est la position d'un point de la plate-forme

$$\mathbf{p}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

et

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

ϕ , θ et σ étant des angles décrivant l'orientation de la plate-forme pouvant faire appel à différentes conventions. Celle qui est utilisée est la convention Tilt-Torsion [154] où les angles ϕ , θ et σ dans l'équation 7.3 sont tels que la matrice de rotation soit définie par

$${}^{\mathcal{O}}\mathbf{Q}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} c_{\phi}c_{\theta}c_{\sigma-\phi} - s_{\phi}s_{\sigma-\phi} & -c_{\phi}c_{\theta}s_{\sigma-\phi} - s_{\phi}c_{\sigma-\phi} & c_{\phi}s_{\theta} \\ s_{\phi}c_{\theta}c_{\sigma-\phi} + c_{\phi}s_{\sigma-\phi} & -s_{\phi}c_{\theta}s_{\sigma-\phi} + c_{\phi}c_{\sigma-\phi} & s_{\phi}s_{\theta} \\ -s_{\theta}c_{\sigma-\phi} & s_{\theta}s_{\sigma-\phi} & c_{\theta} \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Les symboles c_a et s_a dans la précédente équation indiquent respectivement $\cos a$ et $\sin a$. Cette représentation de l'orientation est particulièrement bien adaptée à l'application, comme le montre la simplicité avec laquelle on peut exprimer l'orientation dans l'équation 7.5 décrivant l'ensemble des poses de l'espace idéal désiré :

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{p}_{\mathcal{P}} = r \begin{bmatrix} \sin \theta_z \cos \theta_a \\ \sin \theta_z \sin \theta_a \\ \cos \theta_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_z \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \leq \theta_a < 2\pi, 0 \leq \theta_z \leq \pi/2 \right\}. \quad (7.5)$$

7.1.2 Ensemble des torseurs de la tâche

L'objectif premier du mécanisme est de se stabiliser aux différentes poses incluses dans P . Ainsi, il devrait idéalement être capable d'équilibrer les forces et les couples causés par la gravité à la plate-forme lorsqu'elle se trouve à une pose dans P . On choisit un point au centre de la plate-forme dans le plan horizontal et touchant au sol à l'initialisation comme origine du repère $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ (voir figure 7.5). Il a été mesuré que le centre de masse se situe approximativement au dessus de ce point à une hauteur $h = 15$ cm. La gravité applique donc une force vers le sol et un moment autour du point choisi comme origine. Les câbles doivent s'attacher au dessus de la plate-forme pour éviter

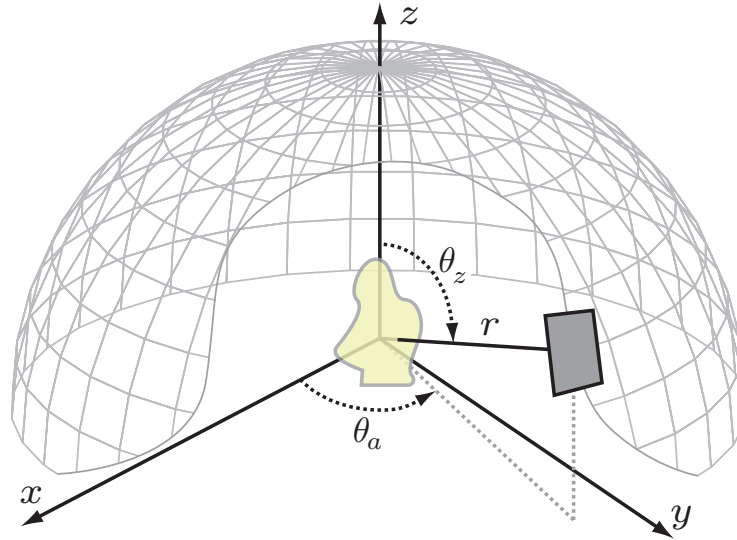


FIG. 7.4 – Espace idéal désiré autour de l’objet. La portion frontale a été enlevée pour plus de clarté.

d’interférer avec le champ de vue de la caméra ou avec l’électronique embarquée. Ils s’attachent par conséquent au dessus de l’origine de \mathcal{R}_P et génèrent des moments par rapport à ce point.

L’ensemble des torseurs que le robot doit générer à une pose donnée $T(\mathbf{x})$ ne contient qu’un torseur, mais celui-ci varie selon la pose :

$$T(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = {}^{\mathcal{O}}\mathbf{Q}_P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \times \mathbf{f} \right\} \quad (7.6)$$

Dans la précédente équation, \mathbf{f} et $\boldsymbol{\tau}$ sont respectivement la force et le couple à générer, $m = 5.0$ kg est la masse de la plate-forme et $g = 9.81$ m/s² est l’accélération gravitationnelle. Il s’agit du cas le plus simple d’ensemble de torseurs de la tâche discuté au chapitre 4, ne contenant qu’un seul point. Pour plus de robustesse face à l’imprécision du modèle (masse, position du centre de masse, etc.), il aurait été possible de prendre un ensemble de torseurs autour de ce torseur unique.

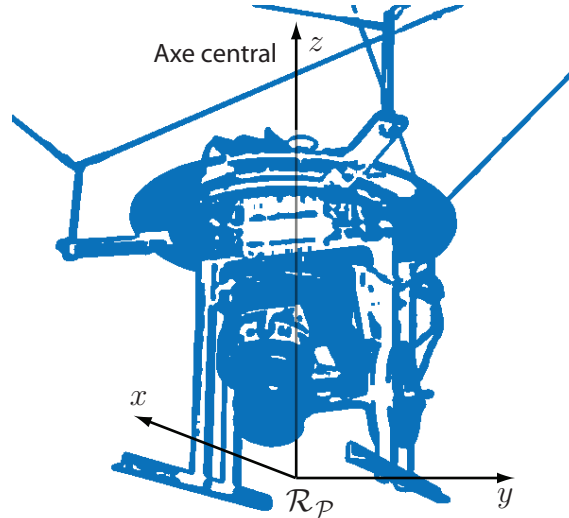


FIG. 7.5 – Repère utilisé attaché à la plate-forme. Lorsqu'on parle d'inclinaison dans le texte, cela signifie une rotation autour d'un axe dans le plan $x y$.

7.1.3 Contraintes sur les points d'attache

Un mécanisme déjà existant a été adapté pour cette application. Ce mécanisme possède six câbles qui passent par des poulies à environ 6 m au-dessus du sol. Ces poulies sont installées sur les murs d'une salle rectangulaire d'approximativement 10,3 m par 12,3 m. Ces points sont répartis à peu près uniformément autour de la salle rectangulaire. Leurs coordonnées mesurées à l'aide d'un théodolite sont données dans le tableau 7.1. Puisqu'on ne voulait pas installer de nouvelles poulies sur les murs dans cette salle, ces points devaient demeurer à cet endroit et sont donc fixes dans l'optimisation.

L'optimisation n'a donc considéré que les points d'attache à la plate-forme. Ceux-ci devaient se situer au-dessus de la plate-forme pour libérer de l'espace nécessaire à la caméra et à l'électronique embarquée. Aussi, un diamètre maximal de l'effecteur de 60 cm a été imposé afin qu'il ne soit pas trop lourd pour être déplacé par les actionneurs. Pour simplifier la construction de l'effecteur, les points d'attache devaient se trouver à l'intérieur d'un cercle de 60 cm de diamètre à une hauteur $h_a = 36$ cm au-dessus du centre du repère. Cette hauteur était la distance minimale permettant d'avoir les câbles au dessus de la caméra et de l'électronique. Les paramètres géométriques utilisés sont ainsi les coordonnées polaires de ces points sur ce cercle, tel qu'illustré à la figure 7.6. Il y avait donc 12 variables en fonction desquelles l'optimisation devait se faire.

TAB. 7.1 – Positions des œillets situés à la sortie des poulies fixes et considérés comme les points d’attache à la base. Ces positions sont mesurées à l’aide d’un théodolite.

i	$\check{\mathbf{b}}_i^T$ [m]
1	[6,338 0,088 5,830]
2	[4,027 5,462 6,147]
3	[-3,767 5,467 6,012]
4	[-5,975 0,141 6,154]
5	[-3,772 -4,782 5,708]
6	[4,004 -4,799 6,133]

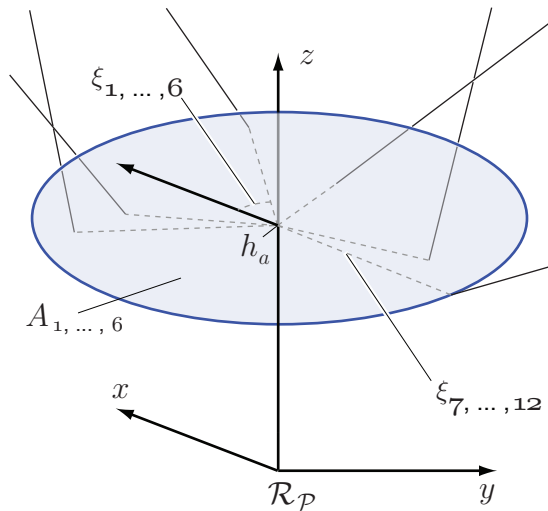


FIG. 7.6 – Paramètres géométriques utilisés dans l’optimisation du numériseur. Les six premiers sont des angles limités sur un tour, calculés à partir de l’axe x dans le plan $x y$. Les six derniers sont des rayons limités entre zéro et 30 cm. Le cercle A est situé à $h_a = 36$ cm.

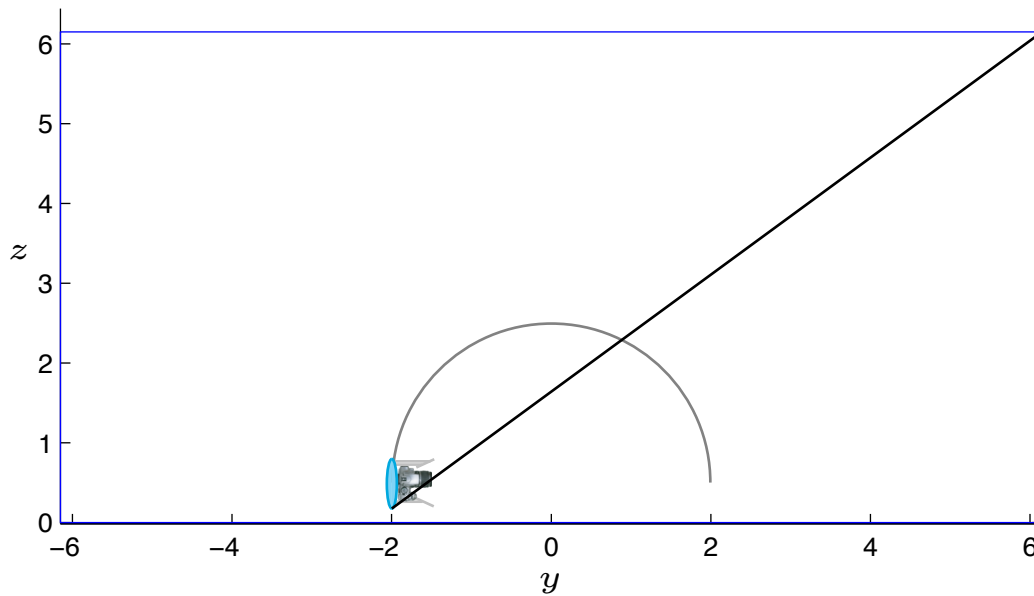


FIG. 7.7 – Interférence entre les câbles et la plate-forme pour l'espace idéal désiré.

7.1.4 Espace désiré ajusté, modification de la plate-forme et trajectoire

Seulement à partir de l'espace idéal désiré P et des contraintes aux points d'attache, on réalise que des problèmes d'interférence entre les câbles et la plate-forme vont assurément survenir. En effet, comme on le voit à la figure 7.7, lorsque la plate-forme est inclinée de 90° , le segment représentant un câble traversera le volume occupé par la plate-forme. Cette figure représente le pire cas possible, au bas de la trajectoire, dans la direction la plus large de la salle : avec un câble attaché du côté opposé de la plate-forme. On ajuste donc la trajectoire afin d'éviter ce problème. On doit conséquemment modifier la plate-forme pour compenser la limitation en orientation.

L'inclinaison maximale à ne pas dépasser sur la trajectoire afin d'éviter l'interférence entre les câbles et la plate-forme est $\theta_{max} = 25^\circ$. On impose une inclinaison maximale de 25° partout sur l'espace désiré ajusté. Partant de cette nouvelle contrainte, la trajectoire est modifiée de telle sorte que l'angle d'inclinaison de la plate-forme diffère de l'angle θ_z selon :

$$\theta = f\theta_z + \delta. \quad (7.7)$$

L'espace idéal désiré est alors adapté pour définir l'espace désiré ajusté. Pour profiter

de la plage complète d'inclinaisons possibles de $\pm 25^\circ$, on modifie les poses idéales de façon à ce que l'inclinaison de la plate-forme $\theta = -25^\circ$ quand l'angle par rapport au zénith $\theta_z = 0^\circ$ et $\theta = 25^\circ$ quand $\theta_z = 90^\circ$. L'angle d'inclinaison varie linéairement entre ces deux extrêmes et par conséquent $f = \frac{5}{9}$ et $\delta = -\frac{5\pi}{36}$ dans l'équation 7.7. Une façon de compenser la limite en orientation est de centrer la trajectoire h m au dessus du centre de l'objet. L'espace désiré considéré dans l'optimisation est donc

$$P' = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{p}_{\mathcal{P}} = r \begin{bmatrix} \sin \theta_z \cos \theta_a \\ \sin \theta_z \sin \theta_a \\ \cos \theta_z + \frac{h}{r} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \frac{5}{9}\theta_z - \frac{5\pi}{36} \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \leq \theta_a < 2\pi, 0 \leq \theta_z \leq \pi/2 \right\}. \quad (7.8)$$

Afin de compenser pour la limite en orientation du mécanisme, on modifie la plate-forme. Une solution aurait été d'y ajouter un autre mécanisme pour orienter la caméra, alors que le robot à câbles aurait déplacé une plate-forme en conservant une orientation fixe. Ceci présenterait d'abord le désavantage d'ajouter du poids à la plate-forme, ce qui aurait nécessité d'autres moteurs. De plus, il aurait fallu transmettre le signal de contrôle et assurer l'alimentation électrique du mécanisme. Dans un contexte de preuve de concept, on a préféré éviter cet ajout de complexité.

Il est possible de tirer avantage du fait que la caméra possède un champ de vue plus grand à l'horizontale (Θ_h) qu'à la verticale (Θ_v). Au lieu d'avoir l'axe optique de la caméra qui coïncide avec l'axe central de la plate-forme, on le décale de 30° . Aussi pour compenser la limite, le centre de la trajectoire est décalé au dessus du centre de l'objet. La situation est illustrée à la figure 7.8.

Afin de s'assurer que les photographies soient prises dans l'orientation portrait pour tous les angles θ_a , la caméra doit être pivotée autour de l'axe central de la plate-forme à certains endroits dans la trajectoire. À cette fin, un mécanisme simple, montré à la figure 7.9, utilise la gravité pour orienter de façon passive la caméra autour de cet axe. La caméra est installée sur un roulement à billes plat dont l'axe de rotation coïncide avec l'axe central de la plate-forme. La partie de la plate-forme sur laquelle s'attachent les câbles ne tourne pas et elle est équipée d'un engrenage interne sur son pourtour. La partie sur laquelle la caméra est installée peut tourner. Sur cette partie se trouve un solénoïde. Lorsqu'il n'est pas alimenté, il bloque l'engrenage et empêche la rotation de la caméra. Lorsqu'il est alimenté, la caméra peut tourner librement autour de l'axe central de la plate-forme. Comme le centre de masse de la partie mobile n'est pas exactement

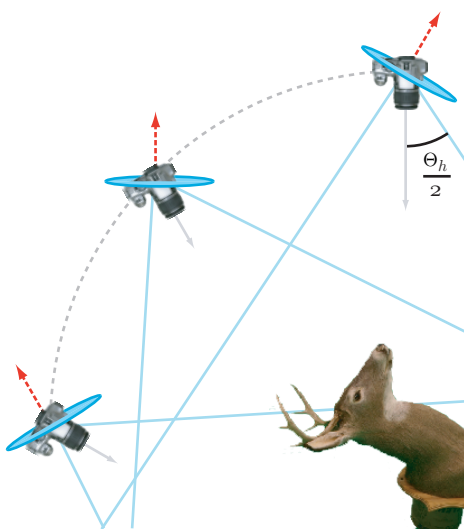


FIG. 7.8 – Portion de trajectoire montrant l'angle relatif entre la caméra et la plate-forme. La flèche pleine indique l'axe optique de la caméra. La flèche pointillée représente l'axe central de la plate-forme. Les rayons tracés indiquent le champ de vue horizontal de la caméra.

sur l'axe, lorsque le solénoïde est débloqué et que la plate-forme est inclinée, la caméra tourne sous l'action de la gravité. On peut voir une rotation passive de la caméra dans l'extension 5.

Pour utiliser ce dispositif, on adapte la trajectoire en conséquence. Elle est illustrée à la Fig. 7.10. La plate-forme, pour un angle azimuthal θ_a donné, se déplace du pôle de l'hémisphère vers le bas. Pour l'incrément azimuthal suivant, la plate-forme remonte vers le pôle, et ainsi de suite jusqu'à la couverture complète de P' . À chaque incrément de θ_a , l'orientation de la caméra est ajustée avec le mécanisme passif. Cette trajectoire présente le désavantage de produire une densité non uniforme de points de vue, plus de photos étant prises près du pôle qu'au bas de l'hémisphère. En ce sens, une trajectoire amenant la caméra aux sommet d'un dôme géodésique (Bucky Ball) serait préférable. Elle est cependant nécessaire pour utiliser le dispositif d'orientation passive. On peut voir un vidéo de cette trajectoire à l'extension 5.

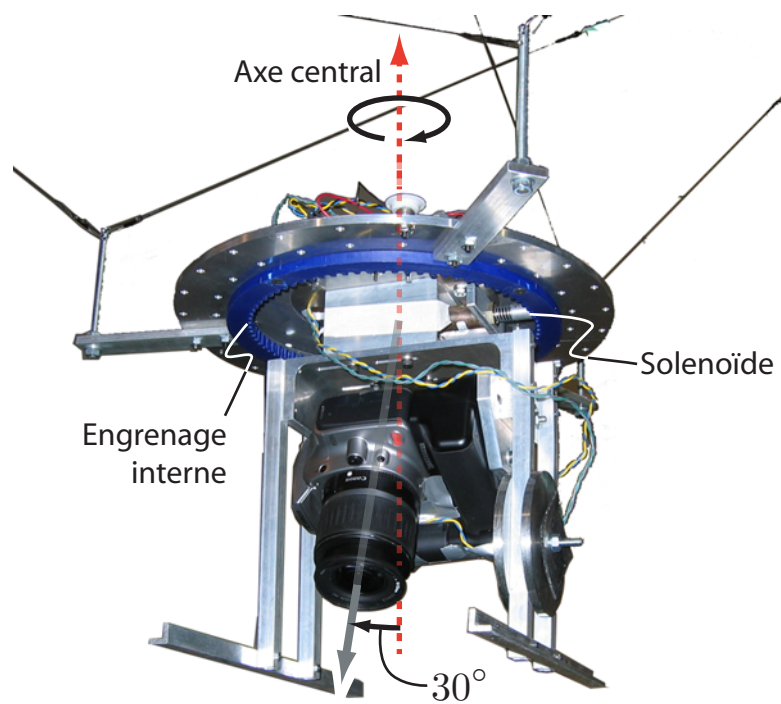


FIG. 7.9 – Dispositif de rotation passive de la caméra sur la plate-forme.

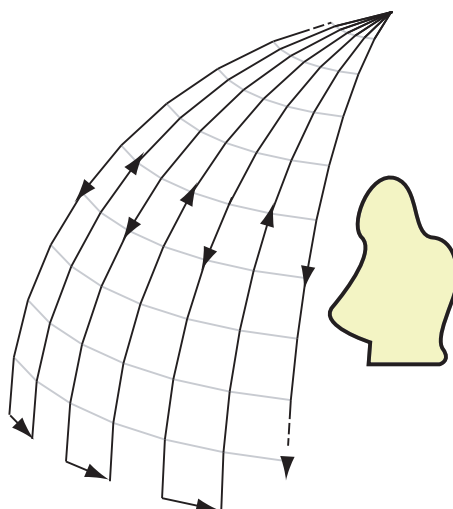


FIG. 7.10 – Portion de la trajectoire effectuée par le robot durant une acquisition.

7.1.5 Fonction objectif

La fonction à maximiser a la forme de celle obtenue à l'équation 5.50. On la modifie légèrement pour prendre en considération qu'il y a une plus grande densité de photos près du pôle avec la trajectoire choisie. Plus on s'approche des côtés de l'hémisphère, plus on attribue un poids important à une pose atteignable. Le poids est proportionnel à l'unité de surface entourant un point, tel qu'illustré à la figure 7.11. L'aire d'un élément de surface entourant un point est approximée par

$$\Delta a = r^2 \sin \theta_z \Delta \theta_a \Delta \theta_z, \quad (7.9)$$

où $\Delta \theta_a$ et $\Delta \theta_z$ sont les pas entre chaque itération dans la discrétisation de la surface et $r = 2$ m est le rayon de la sphère utilisé dans l'optimisation. Soit n_a le nombre de pas autour de l'azimut et n_z le nombre de pas du zénith jusqu'à la limite inférieure de P' , les pas sont donnés par

$$\Delta \theta_a = \frac{2\pi}{n_a}, \quad (7.10)$$

$$\Delta \theta_z = \frac{\pi}{2n_z}. \quad (7.11)$$

La fonction à maximiser dans ce cas s'énonce donc

$$f(\boldsymbol{\xi}, P', T(\mathbf{x})) = \frac{\sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^{n_z} e_a(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, T(\mathbf{x})) \Delta a}{\sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^{n_z} \Delta a}, \quad (7.12)$$

où $e_a(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$ est une fonction qui retourne 1 si la pose testée à l'itération i, j est dans l'espace atteignable en regard de la tâche et 0 si elle ne l'est pas, selon la définition présentée au chapitre 5.

Dans ce test, tel qu'expliqué au chapitre 5, on vérifie d'abord si les torseurs nécessaires peuvent être générés. On vérifie donc si la pose se trouve dans E_T . Pour le mécanisme considéré, on n'a pas besoin d'utiliser tout l'attirail développé au chapitre 4. Nous sommes en effet dans un cas simple où le problème de l'équation 2.32 est déterminé et où l'ensemble des torseurs nécessaires à la tâche ne contient qu'un seul torseur. On peut donc déterminer le vecteur des tensions et vérifier qu'il se trouve ou pas à l'intérieur de la plage permise.

Par ailleurs, les caractéristiques du câble utilisé ont été mesurées expérimentalement. Ce câble, typiquement utilisé pour les cerfs-volants, est en polyéthylène. La surface de

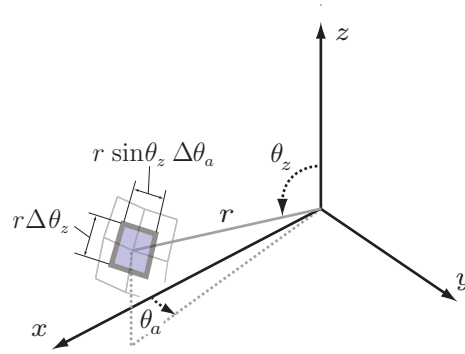


FIG. 7.11 – Le poids accordé à une pose est proportionnel à l’unité de surface qu’il couvre sur la sphère.

tension minimale pour ses caractéristiques a été présentée à la figure 2.6. Cette figure est reprise à la figure 7.12 où on montre en plus foncé la région de la surface qui s’applique aux conditions des câbles dans P' pour l’architecture obtenue dans l’optimisation.

La tension maximale dans les câbles est imposée par le couple maximal $\bar{\tau}$ que les moteurs peuvent fournir. Elle est la même pour tous les câbles. Elle est fonction du rayon des poulies utilisées r_p et du facteur de réduction aux moteurs κ :

$$\bar{t} = \frac{\kappa \bar{\tau}}{r_p}. \quad (7.13)$$

Comme le couple continu admissible au moteur est de 0,88 Nm, que $r_p = 0,039$ m et que $\kappa = 5,9$, la tension maximale admissible dans les câbles considérée est de 133 N.

Pour la condition de l’interférence entre les câbles (E_d), la distance minimale imposée entre deux câbles est nulle durant l’optimisation. La nature de P' et les contraintes aux points d’attache font en sorte qu’il n’y aura pas d’interférence entre les câbles et la plate-forme. De la même manière, il n’est pas nécessaire de tester si on se trouve dans la plage de longueurs disponibles puisque la quantité de câble enroulé peut couvrir toute la salle dans laquelle se trouve le mécanisme.

7.1.6 Résultat de l’optimisation

La méthodologie présentée au chapitre 5 a été utilisée afin d’optimiser la position des points d’attache à plate-forme pour l’application du numériseur avec un rayon de

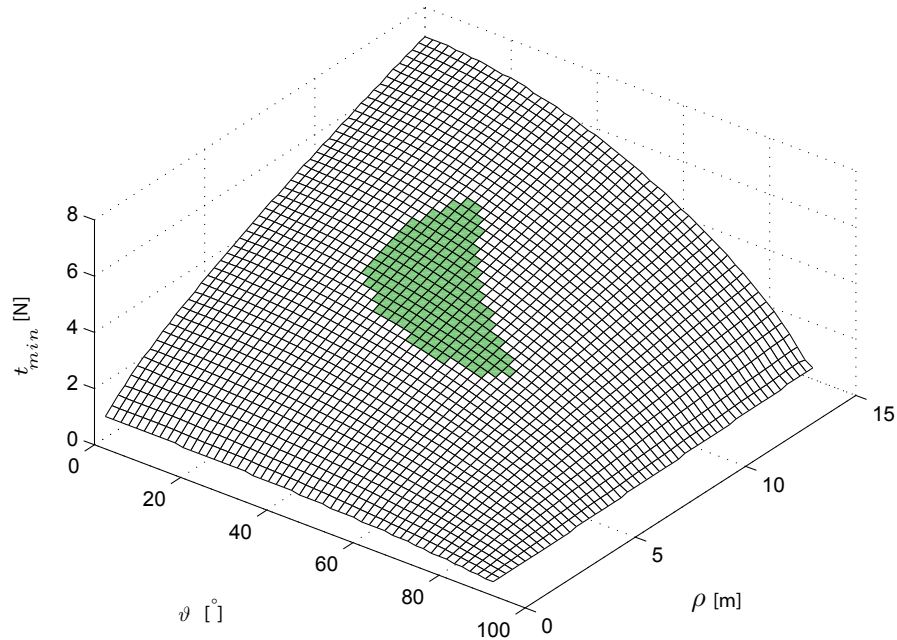


FIG. 7.12 – Portion de la surface de tension minimale utilisée dans l'espace désiré considéré dans l'optimisation.

trajectoire $r = 2$ m.

Le défi de l'optimisation est de concevoir un mécanisme capable de couvrir la grande plage de mouvement demandée, à la fois en position et en orientation, tout en respectant les contraintes sur les points d'attache. L'espace en translation pour l'orientation de référence peut être atteint sans problème mais c'est l'espace en rotation demandé qui est plus exigeant. Durant l'optimisation, il a été impossible d'obtenir une architecture capable d'atteindre tout P' considérant $T(\mathbf{x})$. La meilleure architecture issue de l'optimisation est montrée à la figure 7.13. Les coordonnées des points à la plate-forme sont indiquées dans le tableau 7.2.

Les figures 7.14 à 7.16 montrent la capacité de ce mécanisme à générer le torseur de la tâche sur P' . Chacune de ces figures présente deux graphiques où P' est vu de haut. Le premier graphique sur chacune des figures représente la distance minimale à la surface de tension minimale. Il s'agit de la plus petite différence entre la tension dans un câble et la surface de tension minimale à une pose donnée. Les nombres indiqués sont en Newton. Le graphique du bas dans les figures montre deux courbes, une foncée et une pâle. La pâle indique à quel endroit au moins une des tensions dans les câbles

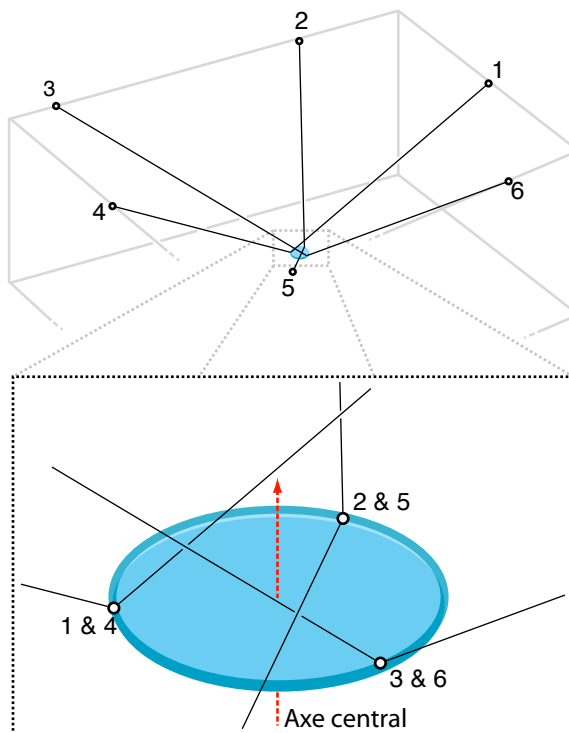


FIG. 7.13 – Architecture issue de l’optimisation de la géométrie pour l’application du numérisateur.

TAB. 7.2 – Points d’attache à la plate-forme de l’architecture optimisée.

i	${}^{\mathcal{P}}\mathbf{a}_i$ [m]
1	[-0,217 0,125 0,360]
2	[0,217 0,125 0,360]
3	[0,000 -0,250 0,360]
4	[-0,217 0,125 0,360]
5	[0,217 0,125 0,360]
6	[0,000 -0,250 0,360]

TAB. 7.3 – Valeur de la fonction à maximiser pour les deux mécanismes comparés

Architecture	r [m]	$f(\boldsymbol{\xi}, P', T(\mathbf{x}))$ [%]	Figure
Optimisée	2	58,9	7.14
Optimisée	1	80,4	7.16
3-3	2	36,9	7.15

devient inférieure à zéro. La foncée indique à quel endroit au moins une des tensions devient sous la surface de tension minimale. Les deux ont été tracées pour montrer l'impact de considérer une tension minimale différente de zéro. C'est principalement la capacité à générer des efforts qui limite l'espace atteignable en regard de la tâche. La courbe foncée dans le deuxième graphique des figures 7.14 à 7.16 correspond donc à la limite de l'espace de génération des torseurs en regard de la tâche. Pour l'architecture optimisée, certaines interférences surviennent autour du pôle. Comme la densité de photographies est grande dans cette région, l'inclinaison commandée au mécanisme est saturée dans la mise en œuvre. Sur le graphique du bas, les cercles concentriques indiquent des plages de θ_z par incrément de 15° . La figure 7.14 est pour l'architecture optimisée et $r = 2$ m. La figure 7.16 est aussi pour l'architecture optimisée, cette fois pour un rayon de l'hémisphère $r = 1$ m. La figure 7.15 montre l'espace atteignable en regard de la tâche pour l'architecture de référence 3-3 décrite plus bas, avec $r = 2$ m. Les valeurs de la fonction à maximiser pour les différents cas sont présentées dans le tableau 7.3. Puisque la trajectoire et les contraintes au points d'attache à la plateforme permettent d'éviter les interférences des câbles, l'espace de travail est limité par la capacité à générer les efforts. Les limites sont dues à une ou des tensions qui passent sous la surface de tension minimale.

La performance de l'architecture en regard de la tâche est comparée avec celle d'une architecture de type 3-3 qui serait adaptée aux dimensions du local disponible. Cette architecture, montrée à la figure 7.18 et dont les points d'attache sont rassemblés dans le tableau 7.4, est souvent rencontrée dans la littérature sur les plates-formes de Gough-Stewart et les robots à câbles suspendus [42, 32]. Elle est reconnue pour être une géométrie bien conditionnée. Son espace atteignable en regard de la tâche est présenté à la figure 7.15. À rayon égal de l'hémisphère, le pourcentage P' inclus dans l'espace atteignable en regard de la tâche est significativement plus grand pour l'architecture optimisée. De plus, l'architecture 3-3 ne peut accomplir la tâche dans une zone autour de $\theta_z = 0$. L'architecture optimisée se compare donc avantageusement à cette architecture

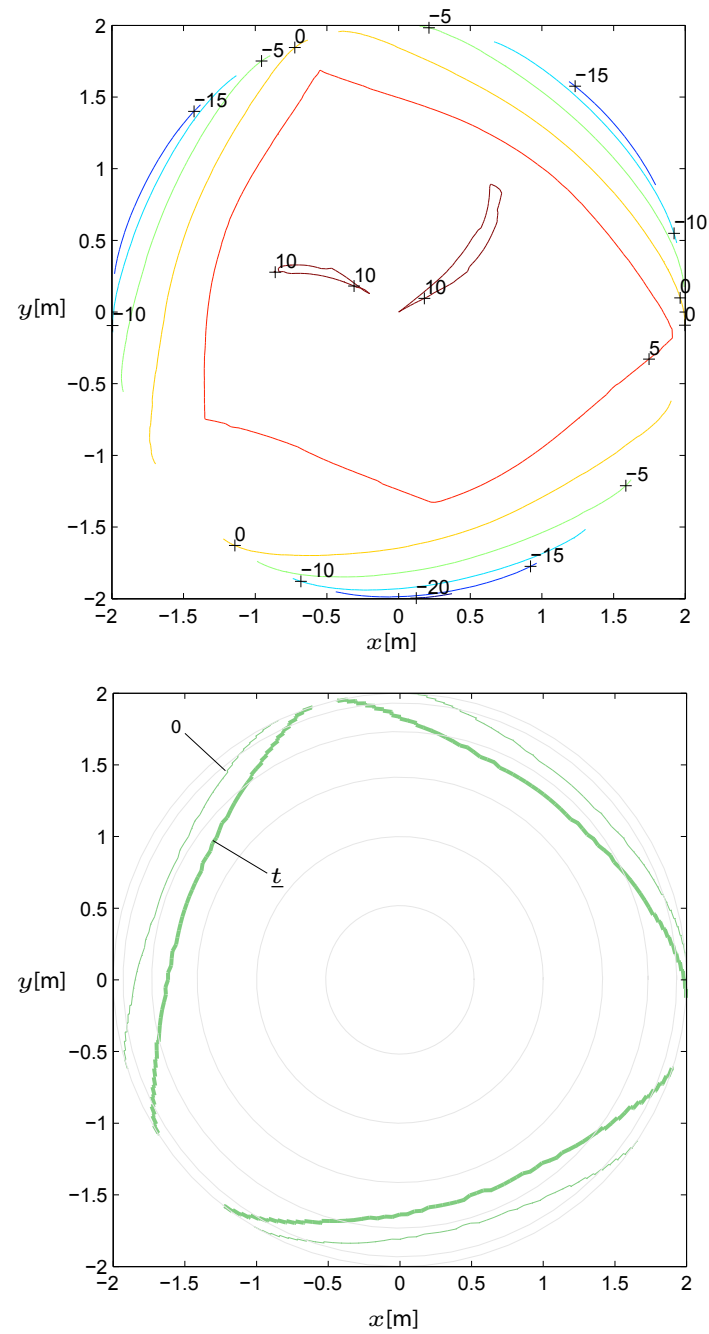


FIG. 7.14 – Distance minimale à la surface de tension minimale (haut) et espace atteignable en regard de la tâche (bas). Architecture optimisée, $r = 2$ m.

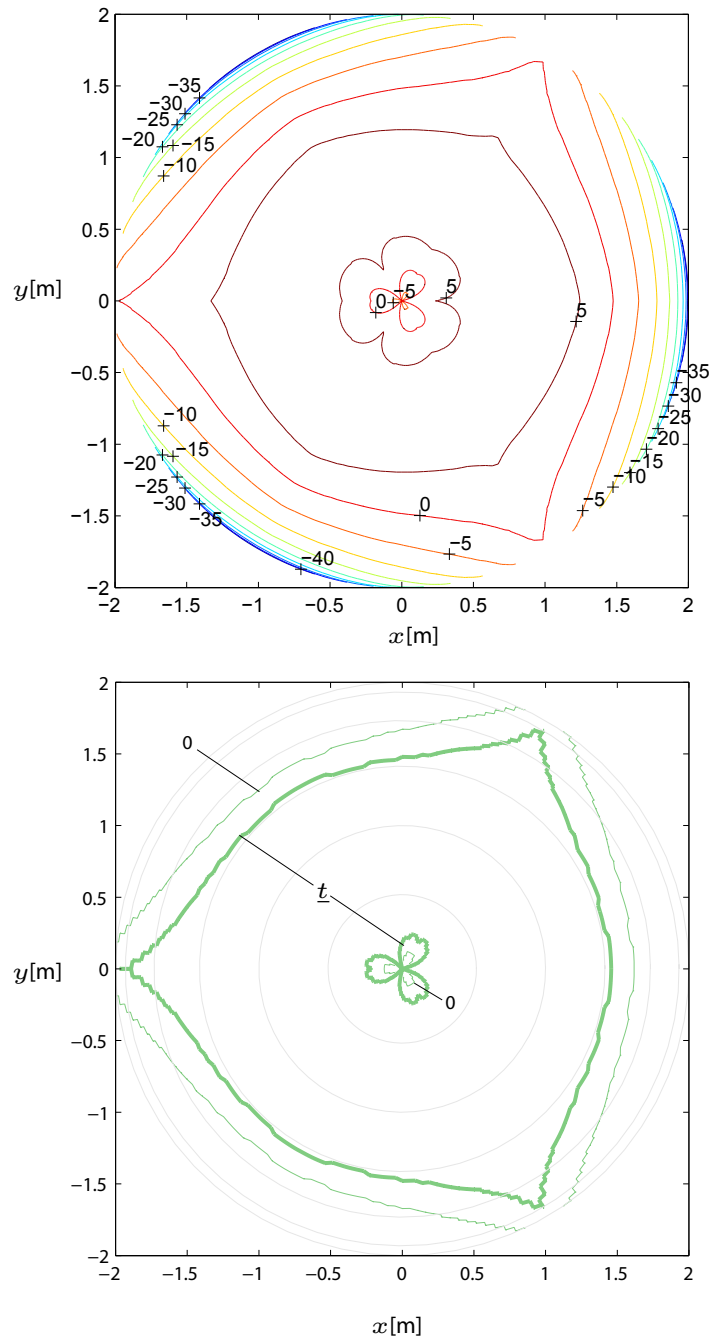


FIG. 7.15 – Distance minimale à la surface de tension minimale (haut) et espace atteignable en regard de la tâche (bas). Architecture 3-3, $r = 2$ m.

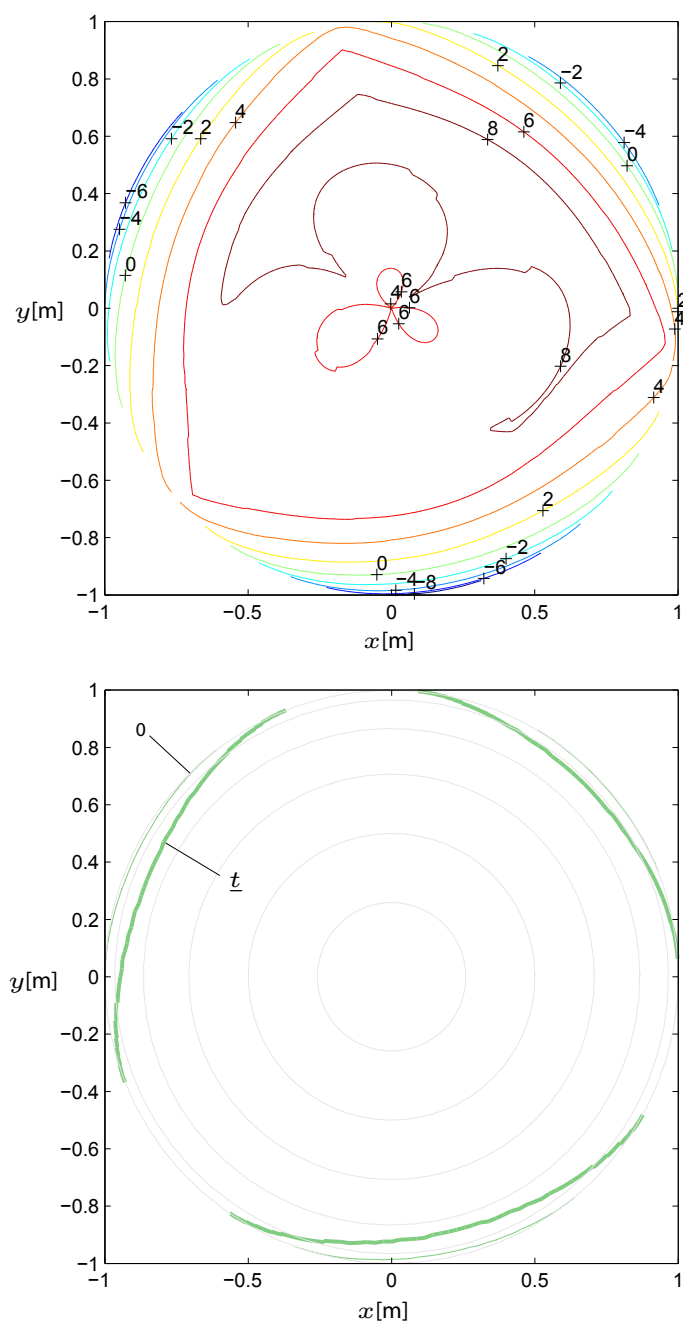


FIG. 7.16 – Distance minimale à la surface de tension minimale (haut) et espace atteignable en regard de la tâche (bas). Architecture optimisée, $r = 1$ m.

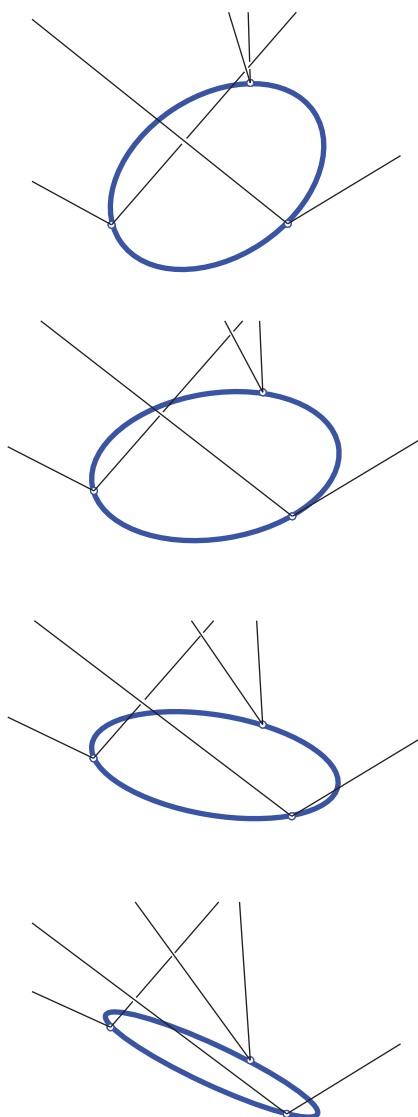


FIG. 7.17 – Séquence montrant la plate-forme de l'architecture optimisée qui s'incline.

pour la tâche donnée.

TAB. 7.4 – Points d’attache de l’architecture 3-3 comparée.

i	\mathbf{b}_i [m]	${}^{\mathcal{P}}\mathbf{a}_i$ [m]
1	[5,95 0,00 6,15]	[0,150 0,260 0,360]
2	[-2,98 5,15 6,15]	[0,150 0,260 0,360]
3	[-2,98 5,15 6,15]	[-0,300 0,000 0,360]
4	[-2,98 -5,15 6,15]	[-0,300 0,000 0,360]
5	[-2,98 -5,15 6,15]	[0,150 -0,260 0,360]
6	[5,95 0,00 6,15]	[0,150 -0,260 0,360]

On voit comment l’optimisation a permis d’augmenter la plage des orientations possibles de la plate-forme. Tout d’abord, chaque câble est regroupé à un autre câble sur la plate-forme, éliminant les possibilités d’interférence au sein de ces couples. Ensuite, ces trois points sont répartis de telle façon que, lorsqu’une grande inclinaison survient, le câble qui devient pratiquement parallèle au plan horizontal de la plate-forme se trouve au-dessus d’un des trois points d’attache, à l’endroit où il a le plus d’espace avant d’interférer avec un autre câble. La figure 7.17 montre une séquence où la plate-forme s’incline. Le fait que les câbles soient répartis sur le pourtour de la plate-forme permet d’appliquer des couples importants grâce au plus grand bras de levier disponible.

L’architecture optimisée présente donc un premier avantage d’éviter les interférences. Par ailleurs, elle a aussi une meilleure capacité à générer les torseurs de la tâche. Ceci est dû aux à la position des câbles à la plate-forme. Dans l’architecture 3-3, les câbles s’attachent à la plate-forme du même côté d’où ils proviennent de la base. Dans l’architecture optimisée, les câbles s’attachent au côté opposé. Ceci permet d’appliquer un plus grande variété de couples autour des axes horizontaux. Or, étant donné que le centre de masse se situe sous la surface où s’attachent les câbles, des couples de ce type doivent être générés à toutes les poses où la plate-forme n’est pas parfaitement horizontale, c’est-à-dire à dans la grande majorité des poses.

Connaissant la forme de l’espace atteignable en regard de la tâche, la programmation des déplacements du robot a ensuite pu être adaptée en conséquence lors de la prise de photos avec différents rayons de trajectoire.

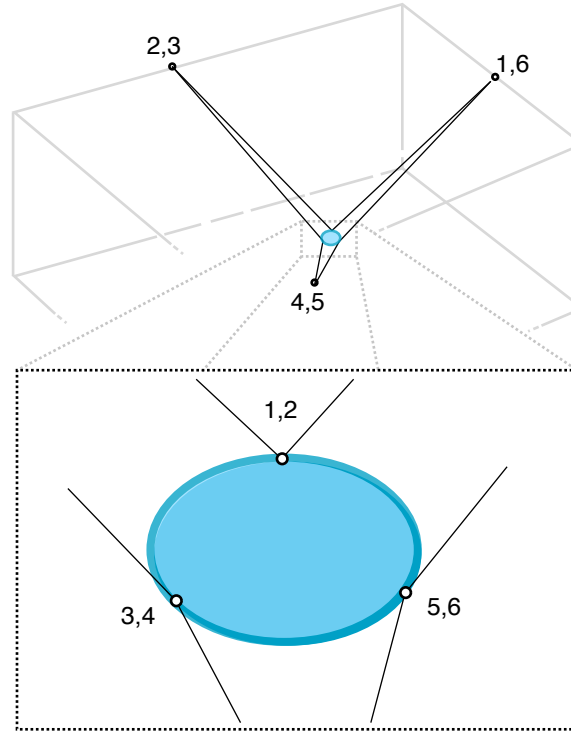


FIG. 7.18 – Architecture 3-3 couramment rencontrée dans la littérature adaptée au local.

7.2 Sensibilité cinématique

Comme la disproportion entre la taille de la plate-forme et la taille de l’empreinte des points d’attache aux murs est grande, il vaut la peine de vérifier à quel point la pose de la plate-forme est sensible à l’actionnement. La sensibilité cinématique, telle que décrite au chapitre 3, est calculée pour l’architecture optimisée sur P' avec un rayon de 2 m. On présente la sensibilité cinématique en orientation et celle en translation à la figure 7.19.

En orientation, une variation du vecteur de longueurs de câbles $\|\Delta\rho\|$ de 1 cm peut produire un changement d’orientation allant environ de $0,8^\circ$ à $6,4^\circ$, selon la direction de $\Delta\rho$. Ceci est tout à fait adéquat pour le prototype compte tenu de la résolution de l’actionnement de l’ordre du millimètre. À aucun endroit la sensibilité ne tombe à zéro ou tend vers l’infini, ce qui indiquerait une singularité. Les trois valeurs singulières sont d’un ordre de grandeur similaire sur tout P' . La discontinuité de la surface autour du zénith vient du fait que plusieurs orientations sont testées autour de ce point. La sensi-

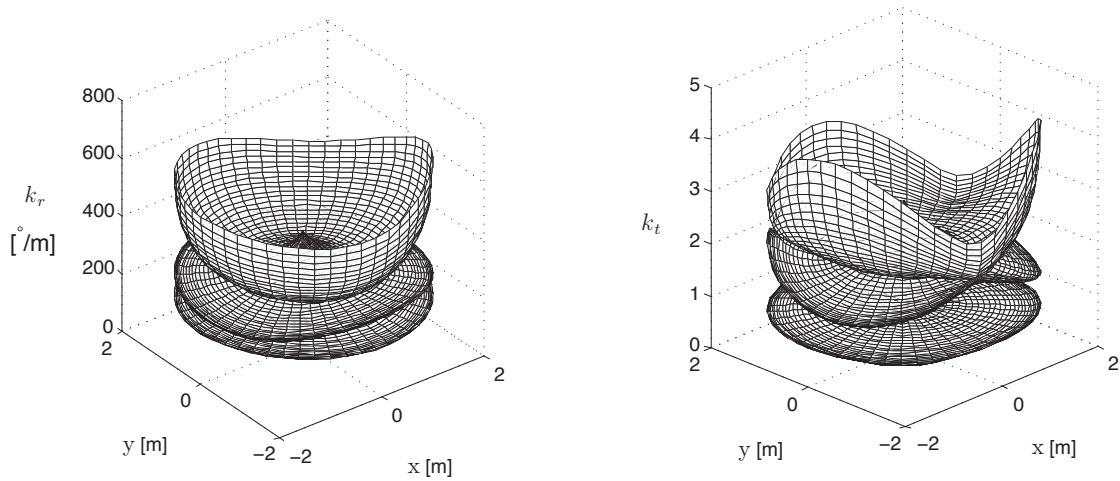


FIG. 7.19 – Sensibilité cinématique en orientation (gauche) et en translation (droite) pour l’architecture optimisée.

bilité cinématique en translation indique que la translation est aussi bien proportionnée en fonction de l’actionnement.

7.3 Étalonnage de la géométrie

Toutes les méthodes d’étalonnage du chapitre 6 utilisant des mesures à des points de l’espace cartésien sont simulées pour l’architecture utilisée (section 7.3.1). Une de ces méthodes est aussi testée expérimentalement (section 7.3.2.1), tout comme la méthode de mesure directe de la pose avec un capteur externe (section 7.3.2.2).

7.3.1 Simulation

Les points d’attache du robot et douze points dans l’espace cartésien ont été mesurés à l’aide d’un théodolite. La précision sur ces mesures est de l’ordre du dixième de millimètre. Le point mesuré est l’endroit où le câble entre en contact avec l’œillet quand le mécanisme est à l’origine du repère fixe. Les points d’attache issus de cette procédure

ont été présentés dans le tableau 7.1. Les douze points de mesures sont présentés dans le tableau 7.5 et à la figure 7.20. Des simulations utilisant ces informations comme points de mesure ont été effectuées.

Les simulations visent à avoir une idée de la performance des méthodes en fonction de l'erreur relative sur la mesure des longueurs de câbles. Ainsi, pour des erreurs relatives allant de 0 à 5% en distribution uniforme sur les longueurs de câbles, on simule plusieurs centaines d'erreurs différentes sur les mesures et on calcule les points d'attache. Dans les simulations, on ne considère aucune erreur sur la position des points de mesure. Ces simulations permettent donc d'isoler l'effet de l'imprécision sur les mesures de longueurs de câbles, utilisées dans toutes les méthodes.

Les figures 7.21 à 7.25 montrent les résultats. Les courbes représentent la distance moyenne entre les points étalonnés et les points exacts dans la simulation. Chacune de ces figures s'applique à une méthode. L'image du bas dans chaque figure montre les résultats pour l'étalonnage utilisant les douze points de mesures en plus de l'origine. L'image du haut montre les résultats pour l'étalonnage n'utilisant que quatre points de mesure en plus de l'origine, soit les points $j = 2, 10, 11, 12$, identifiés par des cercles dans la figure 7.20. Ceci permet de constater la robustesse des méthodes en regard du nombre de points utilisés.

Ces graphiques montrent clairement l'impact qu'a l'imprécision des mesures des longueurs de câbles sur la précision de l'étalonnage. Ils montrent aussi que les méthodes sont plus ou moins précises selon le nombre de points de mesure disponibles. Les méthodes étalonnant les câbles un à un (figures 7.21 à 7.23) sont nettement plus précises en utilisant plus de points. C'est particulièrement vrai pour la méthode de mesure relative des longueurs de câbles pour laquelle quatre points est le nombre minimal de mesures. De combiner l'information entre les points d'attache (figures 7.24 et 7.25) semble rendre les méthodes plus robustes lorsqu'un petit nombre de points de mesure est disponible. Pour la méthode des triangles avec câbles en simultané, la précision est bonne pour de petites erreurs sur les longueurs de câbles. En fait, c'est la méthode qui utilise le plus d'information. Aucune de ces méthodes ne s'approche de la mesure par théodolites, qui offre à cette échelle une précision en dessous du millimètre.

TAB. 7.5 – Points de mesures donnés par le théodolite.

j	\check{c}_j^T [m]
0	[0,0000 0,0000 0,0000]
1	[2,1220 2,7997 -0,0014]
2	[2,0688 -2,2020 -0,0082]
3	[-1,6215 2,8260 -0,0065]
4	[-1,6111 -2,1808 -0,0009]
5	[1,0941 -4,9074 2,5542]
6	[-6,1023 0,2502 2,6236]
7	[0,2098 5,3409 2,3926]
8	[6,4631 -1,2207 1,9204]
9	[0,7714 -4,7972 1,7106]
10	[-5,9981 -0,2571 1,7052]
11	[0,9678 5,4712 1,7064]
12	[6,3093 0,3887 1,7176]

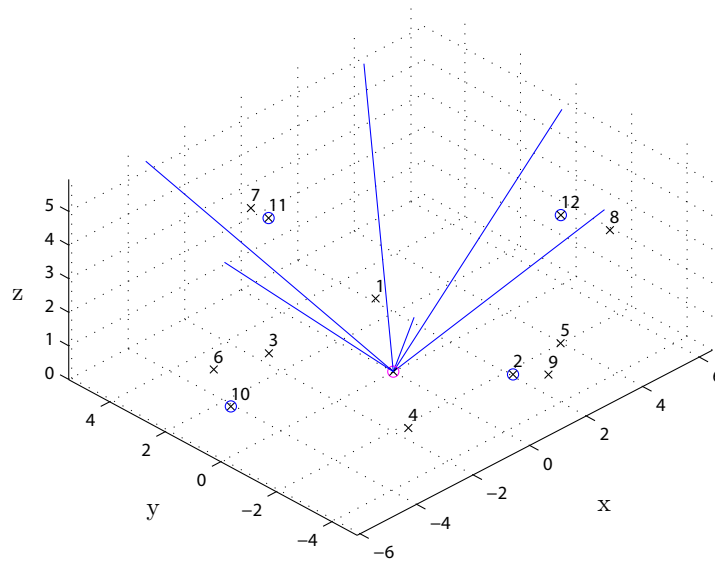


FIG. 7.20 – Points de mesures pour l'étalonnage.

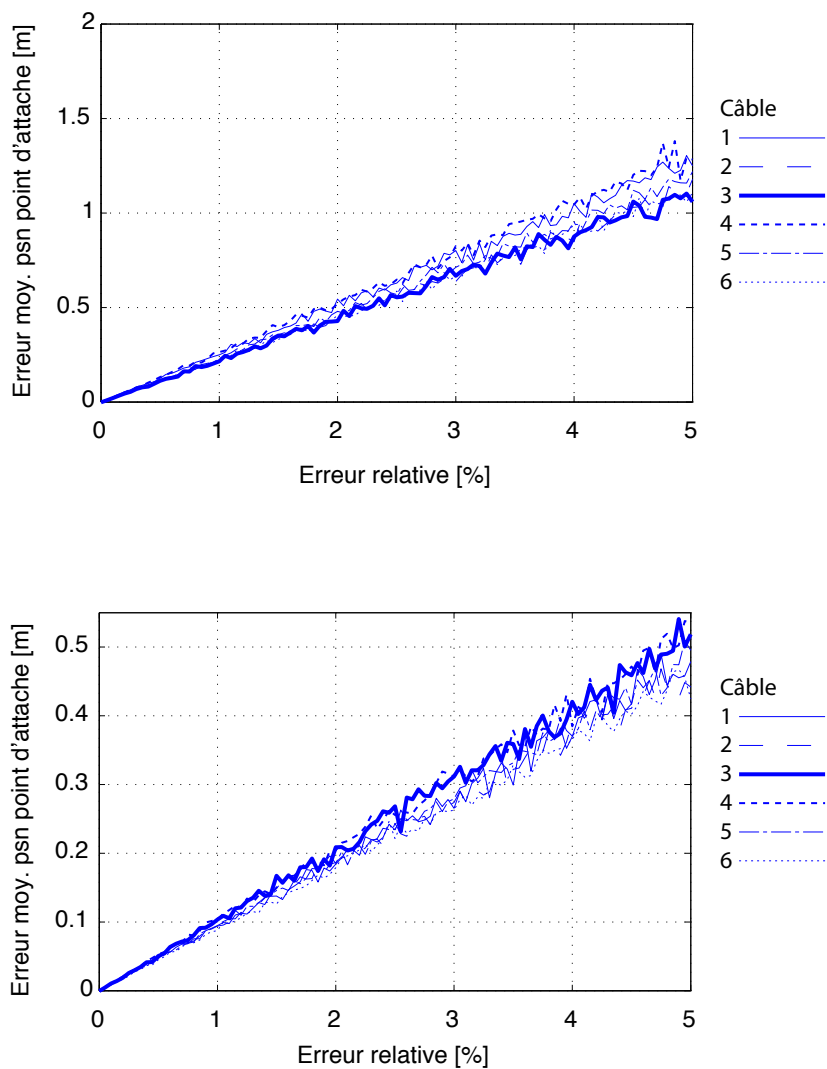


FIG. 7.21 – Résultats de la simulation. Câbles un par un, mesure absolue des longueurs de câbles (section 6.3.1.1), 4 points de mesure (haut) et 12 points de mesure (bas).

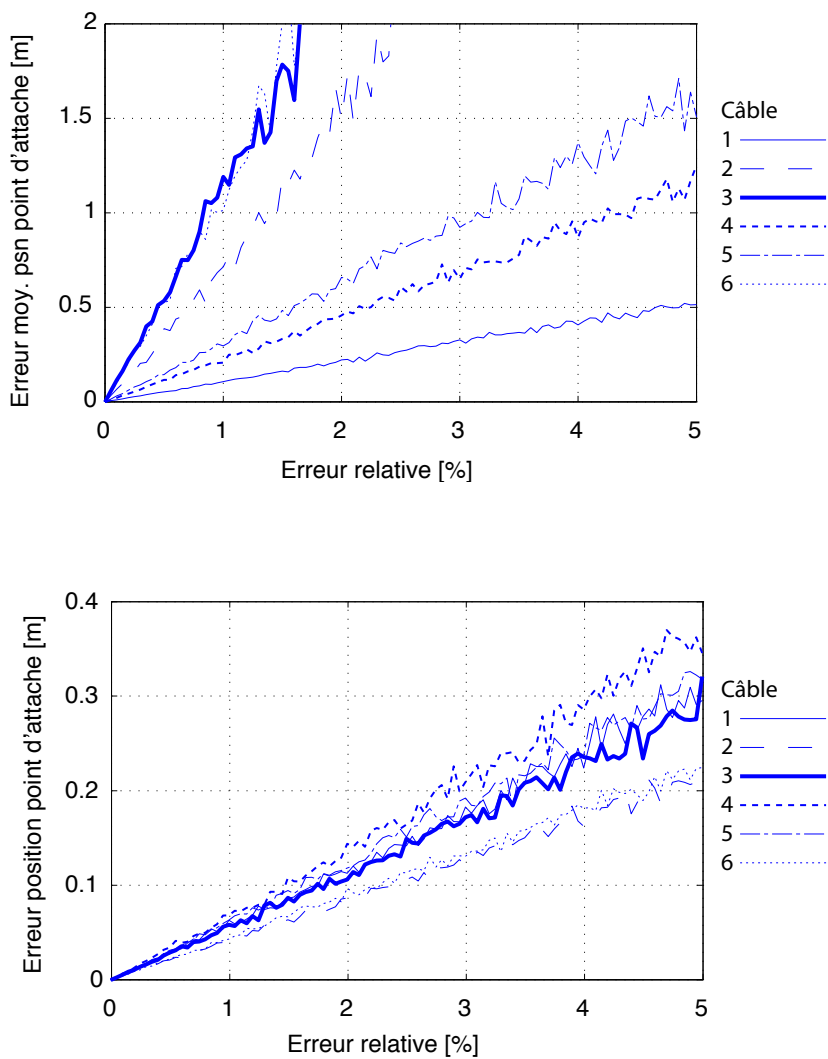


FIG. 7.22 – Résultats de la simulation. Câbles un par un, mesure relative des longueurs de câbles (section 6.3.1.2), 4 points de mesure (haut) et 12 points de mesure (bas).

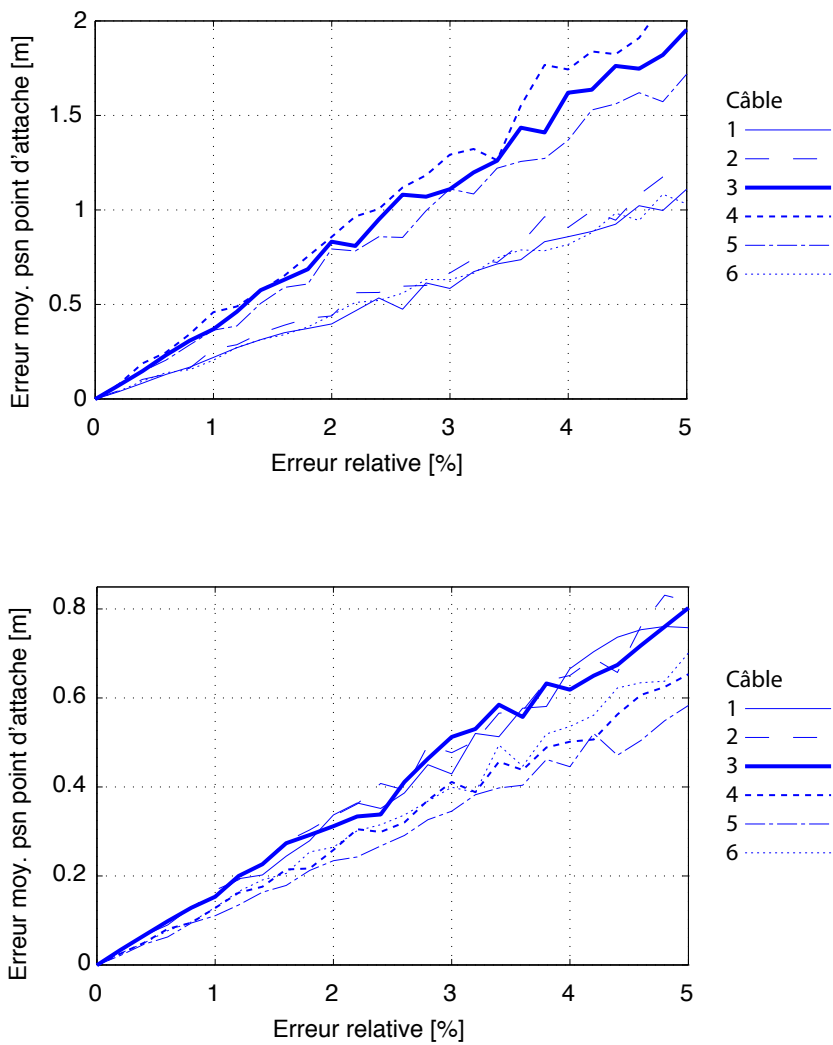


FIG. 7.23 – Résultats de la simulation. Câbles un par un, méthode des triangles (section 6.3.1.3), 4 points de mesure (haut) et 12 points de mesure (bas).

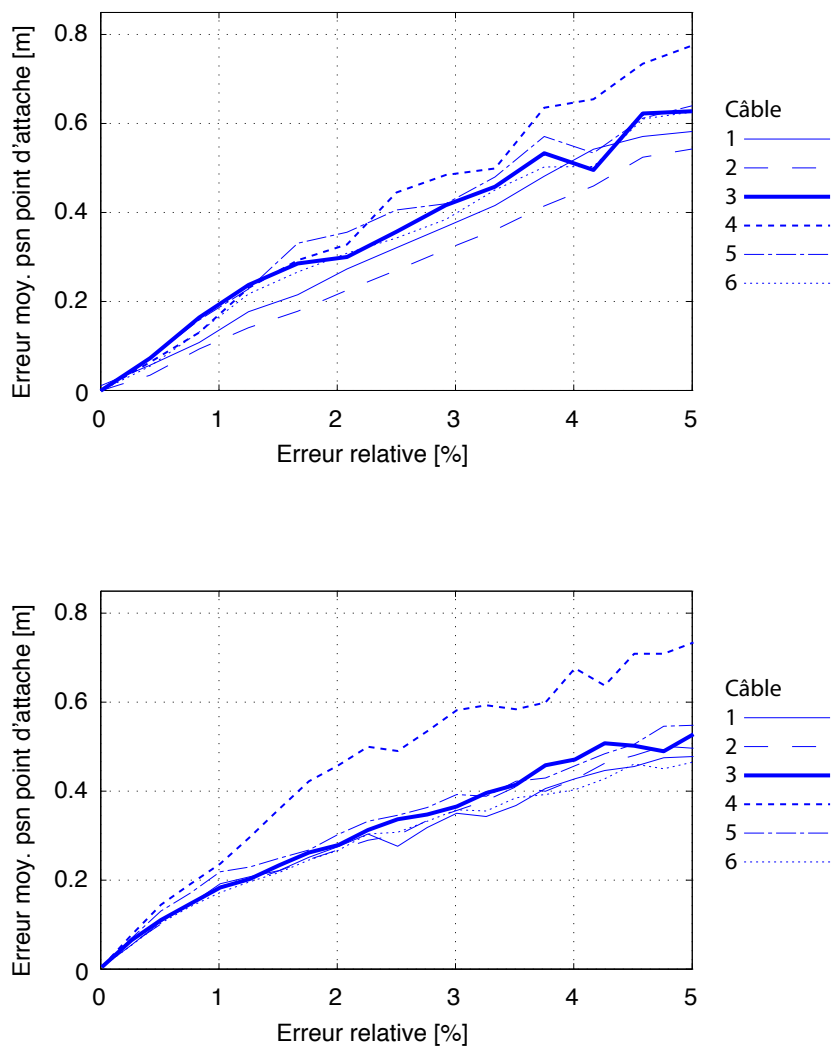


FIG. 7.24 – Résultats de la simulation. Câbles en simultan e amen es à un point, méthode de la mesure des intersections de sphères (section 6.3.2.1), 4 points de mesure (haut) et 12 points de mesure (bas).

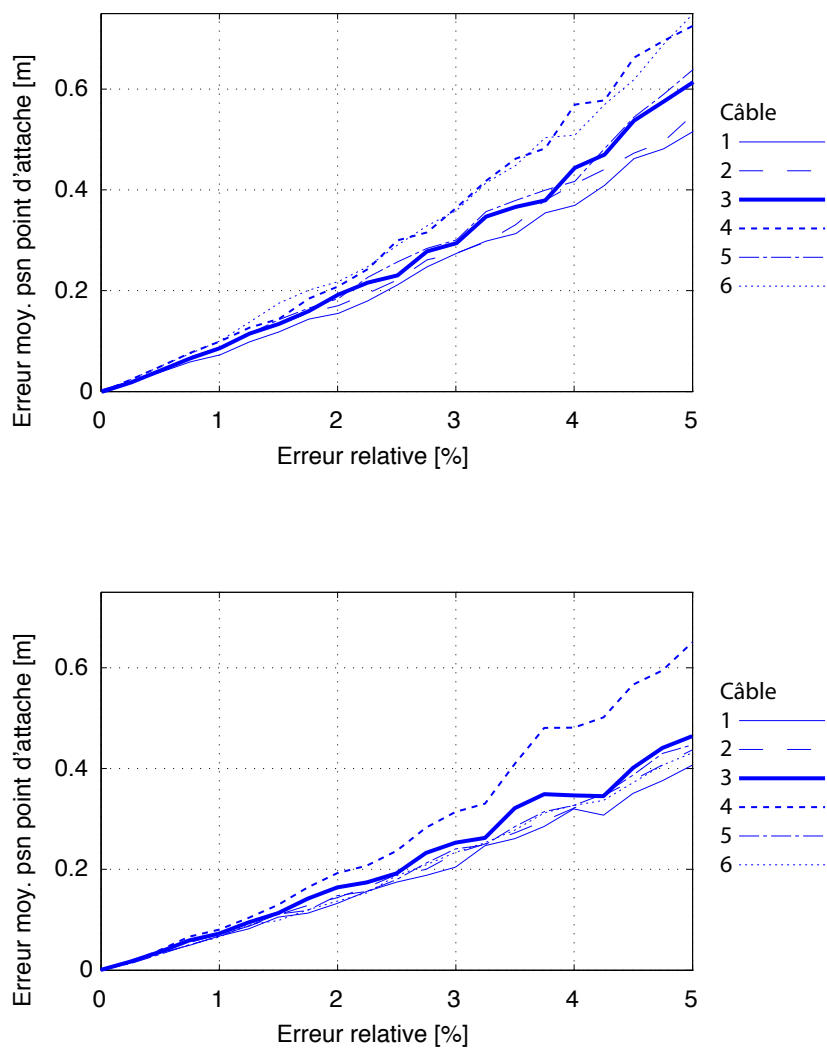


FIG. 7.25 – Résultats de la simulation. Câbles en simultan e amen es à un point, méthode des triangles (section 6.3.2.2), 4 points de mesure (haut) et 12 points de mesure (bas).

TAB. 7.6 – Différence entre les positions mesurées avec le théodolite et celles obtenues avec l'étalonnage par la méthode des longueurs relatives.

i	$\hat{\mathbf{b}}_i - \check{\mathbf{b}}_i$ [m]
1	[0,028 0,001 -0,012]
2	[0,098 0,108 0,153]
3	[-0,102 0,117 0,127]
4	[-0,064 0,002 0,089]
5	[0,028 0,038 -0,018]
6	[0,022 0,014 0,191]

7.3.2 Étalonnage expérimental

7.3.2.1 Câbles un à un, méthode des longueurs relatives

La méthode des longueurs relative a été testée expérimentalement. Chacun des câbles a été amené successivement à chacun des points connus dans la salle et des mesures d'encodeur ont été prises. Le tableau 7.6 montre la différence entre les points d'attache obtenus dans l'étalonnage et ceux obtenus par le théodolite. La distance entre chacun des points pour tous les câbles est entre 3 cm et 22 cm. La principale lacune de cette méthode est qu'il est difficile dans la prise de mesures de couvrir une grande portion de l'espace dans lequel le robot peut évoluer. Ceci est dû au fait que le câble soit amené manuellement à différents points.

7.3.2.2 Méthode de la mesure externe de la pose

Plusieurs cibles uniquement identifiées par un code matriciel sont réparties et fixées sur le sol. Après l'acquisition de plusieurs photographies, toutes ces cibles peuvent être regroupées en un modèle pour devenir une cible en 3-D couvrant une grande partie de la salle. Connaissant la géométrie de ce modèle, la pose de la caméra peut être obtenue pour chacune des photos prises sur lesquelles la densité de cibles est suffisante. Cette méthode est expliquée dans [18]. La Fig. 7.3 montre une des cibles avec la convention utilisée pour l'identification.

La caméra embarquée joue donc le rôle de capteur et les cibles au sol, le rôle de marqueurs. La plate-forme est déplacée à différentes poses pour prendre des photos. À chacune de ces poses, les mesures aux encodeurs sont aussi enregistrées. Par photogrammétrie, on détermine la pose de la caméra dans le repère des cibles. Avec toute cette information, on peut appliquer la méthode présentée à la section 6.4 pour déterminer expérimentalement la position des points d'attache.

Cette méthode est dérivée de celle utilisée dans [148]. Dans leur cas, la géométrie d'un robot parallèle de petite taille est étalonnée par photogrammétrie. Une cible est fixée à l'effecteur et la caméra est liée au repère fixe de la base. Pour un robot à câbles, la taille de l'espace de travail rend impraticable l'utilisation d'une cible à l'effecteur et d'une caméra au sol puisqu'on ne peut changer les paramètres optiques de la caméra lors de l'acquisition pour l'étalonner. Il serait donc difficile d'avoir une résolution suffisante de la cible pour mesurer précisément la pose sur une grande plage de l'espace de travail.

80 poses couvrant le plus grand espace possible permis par les mesures par photogrammétrie (boîte d'environ 4 m d'arête de côté et 2,5 m de haut) ont été utilisées. Les résultats obtenus sont comparés aux mesures par théodolite dans le tableau 7.7. La distance entre chacun des points pour tous les câbles est entre 8 cm et 39 cm. La précision obtenue est moins bonne que celle obtenue avec la méthode des longueurs relatives de câbles pris un à un. Une raison possible est l'élasticité des câbles qui prend plus d'importance lorsque la plate-forme est déplacée. D'abord les câbles sont parfois plus étirés à cause de la masse importante suspendue. De plus, cet étirement varie en fonction de la pose. Comme les longueurs de câbles sont mesurées indirectement aux encodeurs, une plus grande erreur sur les mesures de câble résulte de cette situation.

Dans un contexte de robot déployable, les avantages de cette méthode sont de deux ordres. D'abord, le coût d'une caméra numérique est déjà faible comparativement à d'autres capteurs (lasers, théodolites, GPS intérieur, etc.) et ne cesse de diminuer alors que la qualité augmente. Ensuite, cette méthode se prête bien aux robots à câbles. Comme ceux-ci, elle peut fonctionner à différentes échelles. On n'a qu'à utiliser plus ou moins de codes matriciels. La disposition exacte des codes dans l'espace n'a pas d'importance. L'important est que la densité de codes soit suffisante pour qu'il y en ait plusieurs sur chacune des photos et qu'ils se retrouvent sur plusieurs photos. Un autre aspect à surveiller est qu'il ne faut pas placer toutes les cibles sur un même plan (comme le plancher par exemple) car ceci augmente l'erreur dans l'obtention du modèle 3D. Si le

TAB. 7.7 – Différence entre les positions mesurées par théodolites et celle obtenues avec l'étalonnage par photogramétrie.

i	$\widehat{\mathbf{b}}_i - \check{\mathbf{b}}_i$ [m]
1	[0,011 0,064 0,219]
2	[-0,053 -0,044 -0,056]
3	[0,120 -0,266 -0,119]
4	[0,300 0,089 -0,114]
5	[0,071 0,154 0,038]
6	[-0,044 0,064 0,097]

robot est installé à un endroit pour une longue période, alors il est plus avantageux de faire mesurer les points directement grâce à un théodolite. Cependant, dans le contexte d'un robot transportable ou modifié régulièrement, la méthode présentée peut s'avérer avantageuse. De plus, elle peut être adaptée pour servir lors de l'initialisation du robot.

7.4 Résultats et discussion

7.4.1 Stabilité de la plate-forme

Puisque la modélisation 3D et le positionnement de la caméra utilisent les photographies, il faut que les objets et les cibles de positionnement soient au foyer sur l'image. Ceci requiert une grande profondeur de champ, donc une petite ouverture combinée à un long temps d'exposition allant jusqu'à quelques secondes. Ceci implique que le robot, lorsqu'une photo est prise, soit complètement stable pour éviter des images floues.

Une expérience a été réalisée pour vérifier la stabilité du robot. La rotation à la plate-forme a d'abord été bloquée. La caméra photo a été remplacée à la plate-forme par une caméra vidéo Sony 3CCD. Une sphère blanche de 15 cm de diamètre a été placée sur un sol contrastant. L'expérience consistait à filmer la sphère tout en effectuant une portion de la trajectoire avec des temps d'arrêt et de stabilisation. Le mouvement perçu du robot a été obtenu en calculant le déplacement de la sphère dans l'image entre chaque

image de la séquence vidéo. La figure 7.26 montre la diminution du mouvement après la fin d'un déplacement de la plate-forme. Ce résultat est typique le long de la trajectoire, tant que la plate-forme ne se trouve pas près d'une limite de l'espace atteignable en regard de la tâche. Il suggère qu'après un délai de 7 secondes, le robot est assez stable puisque le niveau de bruit est sous un pixel (0,1 dans ce cas). Typiquement, entre chaque pose, le robot se déplace durant 5 secondes puis prend 7 secondes pour se stabiliser avant de prendre la photo. La prise de photo pouvant durer jusqu'à deux secondes, environ 14 secondes sont requises pour chaque image. Près des limites de l'espace atteignable en regard de la tâche, la tension dans certains câbles devient faible et/ou des câbles se croisent. À ces endroits, la plate-forme peut prendre plusieurs dizaines de seconde pour se stabiliser et il n'est par conséquent pas possible d'y capter de cliché de qualité satisfaisante pour l'application.

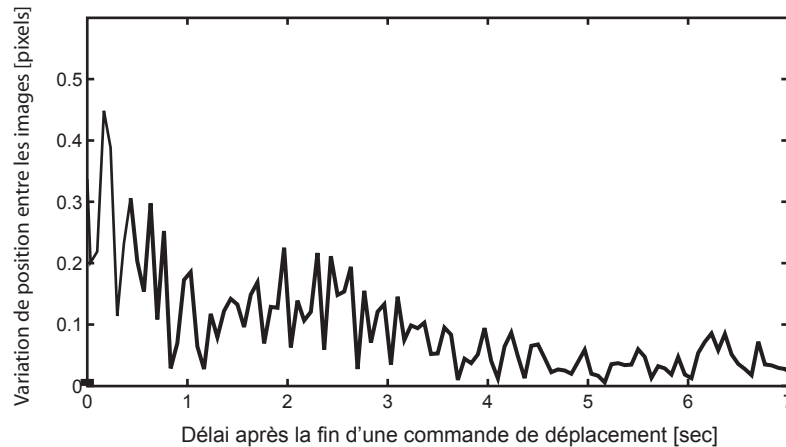


FIG. 7.26 – Variation de la position de la cible (en pixels) après la fin d'une commande de déplacement de la plate-forme par le robot.

Comme aucune perturbation extérieure ne vient agir sur le robot, les vibrations sont causées par du frottement des câbles aux points d'attache et par l'actionnement en lui-même. Cette trajectoire est un polynôme de degré 5 lissé pour avoir des accélérations et des vitesses nulles, à la fois au départ et à l'arrêt. Bien qu'une trajectoire de ce type permette des déplacements fluides pour des robots aux membrures plus rigides, elle n'est peut-être pas nécessairement la meilleure pour un robot aux membrures plus élastiques comme les câbles. Une meilleure compréhension des fréquences naturelles du mécanisme en fonction de la pose permettrait probablement d'ajuster la trajectoire pour éviter d'exciter les modes les plus sensibles. Encore une fois, pour être utilisée en pratique, cette approche demanderait un bon modèle des composantes du robot

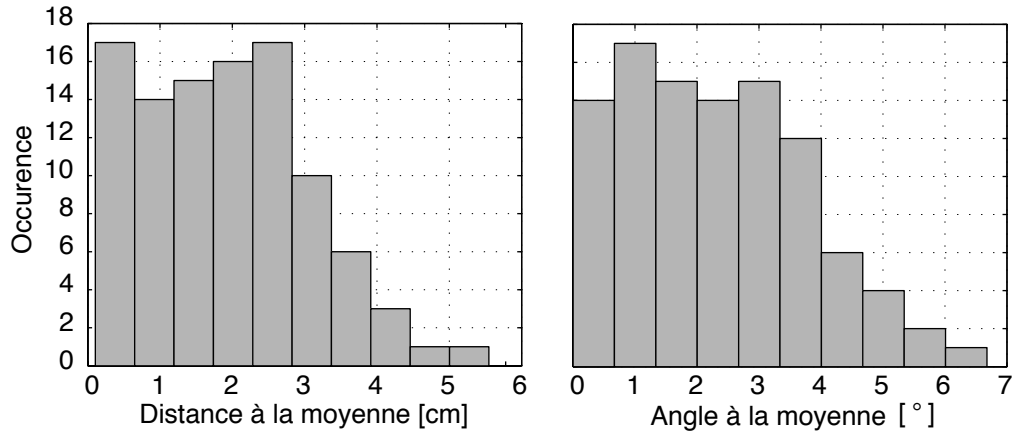


FIG. 7.27 – Histogrammes de répétabilité, en translation à gauche et en orientation à droite.

(raideur et amortissement des câbles, propriétés inertielles de la plate-forme, nature du frottement.)

7.4.2 Répétabilité sur le positionnement du robot

Le robot est contrôlé avec une rétroaction sur la position des moteurs. La rotation de la plate-forme est aussi bloquée pour le test de répétabilité. Le robot se stabilise à quatre différentes poses 25 fois. Les quatre poses sont aux coins d'un carré de 3 m de côté. Des photos sont prises et la pose est déterminée par photogrammétrie. Les positions et orientations moyennes sont calculées pour les quatre poses. La déviation en orientation est l'angle entre le vecteur de l'axe optique et le vecteur moyen de l'axe optique.

Les distributions des distances et des orientations par rapport à leurs moyennes respectives sont présentées dans les histogrammes à la figure 7.27. De cette figure, on peut voir que la déviation maximale est sous 6 cm en translation et sous 7° en rotation. Ceci est suffisant pour l'application considérant que les poses sont mesurées précisément avec la caméra. Au fil d'une acquisition, on remarquait une dérive de la position vers le bas. L'origine exacte de cette dérive est inconnue. On peut supposer qu'elle est causée par l'allongement des câbles ou encore par le resserrement de l'enroulement sur les poulies au fur et à mesure que le robot se déplace. La distribution en translation reflète cette situation. Si ce n'était de cette dérive, elle serait plus compacte.

TAB. 7.8 – Dimension des objets et paramètres de l’acquisition

Nom	Taille [m]	n ^{bre} de photos	r [m]
Motoneige	2,8 x 1,0 x 1,3	600	2,7
Panache	0,6 x 0,8 x 1,0	105	1,5
Buste	0,7 x 0,6 x 0,5	212	1,5
Statuette	0,1 x 0,1 x 0,2	242	0,8

7.4.3 Modèles numérisés

Un des objectifs de ce prototype était d’étudier la possibilité d’utiliser un robot à câbles déplaçant une caméra afin de numériser l’apparence 3D d’objets de tailles diverses. Les images dans la figure 7.28 montrent le modèle de quatre objets numérisés. Pour chaque objet, la géométrie approximative obtenue et deux vues du rendu final sont montrées. Des animations montrent aussi les modèles obtenus en mouvement à l’extension 6. Ces objets ont été choisis pour démontrer la variété d’objets qui peuvent être saisis ainsi que la capacité du système à être utilisé à plusieurs échelles. Le tableau 7.8 résume les conditions expérimentales de chaque acquisition. Le nombre de photos prises pour chaque objet varie de 105 à 600 et le rayon des trajectoires varie de 0,8 m à 2,7 m.

Le premier objet présenté est une motoneige dont la longueur est pratiquement 3 m. Il s’agit de la taille maximale d’un objet pouvant être numérisé par le système. Une lentille d’une longueur focale plus petite a dû être utilisée pour permettre de voir la motoneige en entier ainsi qu’un nombre suffisant de cibles sur chaque photo. Cet objet est particulièrement intéressant pour sa grande taille et les reflets à sa surface. Le panache de chevreuil et le buste du Cardinal de Richelieu sont deux objets de taille moyenne. Tel que montré dans la figure 7.28 (d), les bois du panache forment une structure fine qui démontre la précision du positionnement ainsi que la stabilité de la prise de photo. Le dernier objet est une statuette sombre mesurant moins de 20 cm. Pour un petit objet, la densité de cibles a dû être augmentée autour de l’objet pour assurer le positionnement de la caméra.

L’aspect vision de ce système est une contribution qui n’est pas attribuable à l’auteur. Le lecteur intéressé par le traitement des images peut consulter l’extension 7 ou se référer à [18].

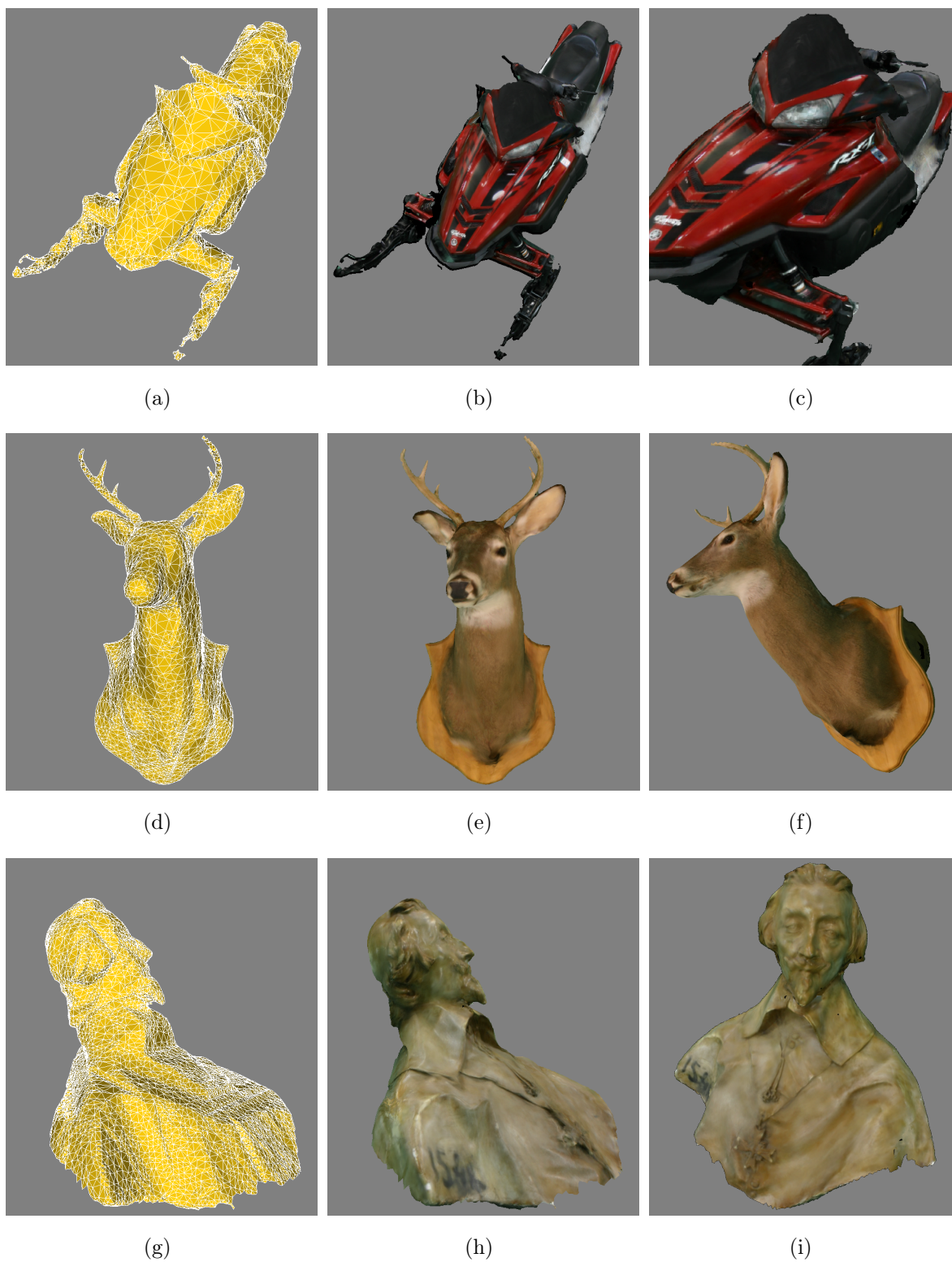


FIG. 7.28 – Résultat de la modélisation de l'apparence d'une motoneige, d'un panache de chevreuil, d'un buste et d'une statuette.

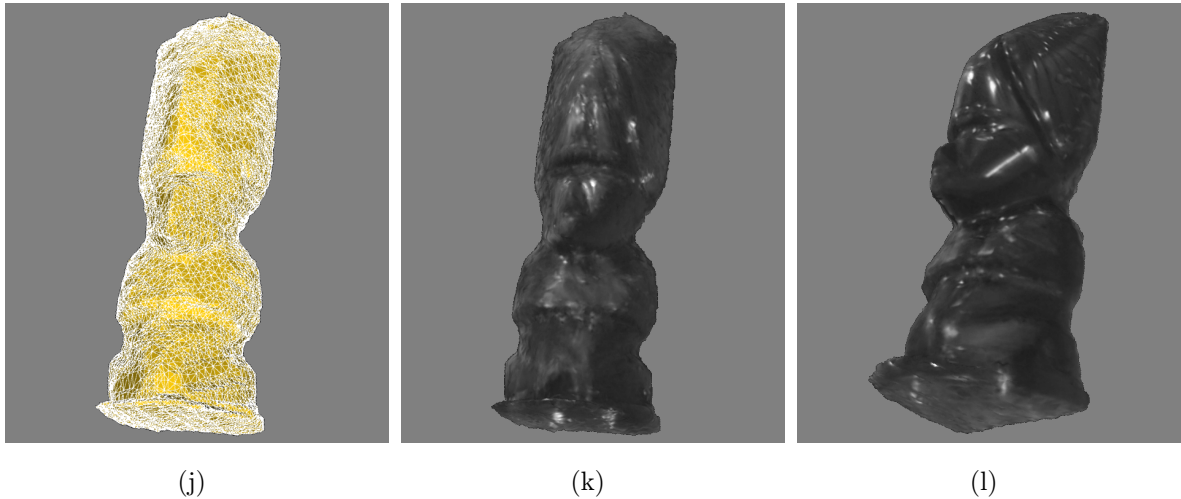


FIG. 7.28 – Résultat de la modélisation de l'apparence d'une motoneige, d'un panache de chevreuil, d'un buste et d'une statuette. (suite)

7.4.4 Résumé et améliorations possibles

L'élaboration de cette application a motivé le développement de plusieurs outils théoriques présentés dans les chapitres précédents. Le présent chapitre a donc été l'occasion de les appliquer à un exemple concret. Les modèles cinématique et statique, de même que la surface de tension minimale du chapitre 2 ont été utilisés dans une optimisation tel que décrite au chapitre 5. L'architecture obtenue a été analysée en regard de la sensibilité cinématique selon la méthode introduite au chapitre 3. Le mécanisme a été construit et étalonné expérimentalement avec deux des méthodes du chapitre 6. Les autres méthodes de ce chapitre ont aussi été utilisées en simulation pour voir l'impact du nombre de mesures et de leur précision sur la qualité de l'étalonnage. Des résultats de tests de stabilité et de répétabilité ont aussi été présentés. Cette stabilité a été suffisante pour pouvoir prendre des photos de façon automatique de plusieurs objets de tailles diverses. Les modèles de l'apparence 3D de ces objets obtenus grâce aux photographies sont présentés à la toute fin.

Le prototype développé n'est qu'une preuve de concept visant à étudier la viabilité de l'approche et la validité des outils théoriques développés. De toute évidence, plusieurs modifications pourraient y être apportées pour améliorer sa performance :

- D'avoir un mécanisme embarqué servant à orienter la caméra permettrait d'atteindre l'espace désiré idéal. De plus, des plus grands espaces seraient atteignables

et il serait plus facile d'adapter la trajectoire pour obtenir une distribution plus uniforme des points de vue.

- Le modèle du mécanisme (propriétés inertielles de la plate-forme, élasticité dans les câbles) et le contrôle (génération de trajectoire entre deux poses, loi de contrôle) pourraient être raffinés pour permettre la numérisation d'objets plus rapidement.
- La transmission sans fil des photos permettrait de calculer des poses de la plate-forme et d'ajuster les longueurs des câbles selon une procédure d'initialisation comme celles discutées dans [145, 63], et d'ainsi améliorer la précision du positionnement.
- Un système de sécurité devrait être mis en place pour éviter que la plate-forme ne tombe au sol lors d'un arrêt imprévu du système.

Chapitre 8

Conclusion

Durant la réalisation de cette thèse, l'application du numériseur a servi de prétexte au développement d'outils mathématiques de conception, d'analyse et d'étalonnage de robots à câbles, qui ont par la suite été généralisés. Ces outils ont donc été conçus avec un souci de pouvoir les appliquer en pratique afin de profiter des avantages qu'offrent les robots à câbles. Ce faisant, ce travail contribue à la compréhension de la cinématique des robots à câbles. Évidemment, les nouvelles connaissances ont soulevé tout autant de questions. Les contributions et les pistes de travaux futurs qu'elles suggèrent sont ici résumées.

8.1 Résumé des contributions

Surface de tension minimale – La première contribution d'intérêt pour la réalisation de mécanismes à câbles est la définition de la surface de tension minimale. Bien que de nombreuses publications considèrent que les câbles sont droits et sans fléchissement, la surface de tension minimale est le premier effort permettant de justifier cette approximation. Intuitivement, l'expérimentateur qui construit un robot à câbles comprend qu'une tension minimale au dessus de zéro doit être imposée dans les câbles à tout moment. Sous cette tension minimale, le câble n'offre pas une raideur suffisante pour plusieurs applications demandant une grande stabilité en regard des perturbations ou de grandes accélérations. La surface de tension minimale permet de quantifier cette tension minimale de façon assez précise en fonction des propriétés du câble (raideur et densité linéaire), de sa longueur et de l'angle qu'il fait avec l'horizontale. Cette précision permet de ne pas niveler vers le haut la tension minimale, ce qui serait souvent trop conservateur, limitant l'espace de travail du robot inutilement.

Sensibilité cinématique – Le chapitre sur la sensibilité cinématique a permis de revisiter des concepts bien connus en robotique mais aussi controversés comme, par exemple, la dextérité d'un manipulateur. Ce pourquoi la dextérité ne fait pas l'unanimité dans la communauté robotique devient encore plus évident pour un manipulateur possédant une grande disproportion entre sa base et la plate-forme mobile, comme les robots à câbles. Bien que ces outils mathématiques suggèrent une trop grande sensibilité cinématique du mécanisme, particulièrement en orientation, la réalisation expérimentale suggère le contraire. Ainsi, une nouvelle façon de quantifier indépendamment les sensibilités cinématiques en orientation et en translation a été développée. Cette méthode, qui consiste en une optimisation, fonctionne tant que tous les actionneurs sont de même type (rotoïde ou prismatique). Elle pourrait donc être aussi utilisée pour des manipulateurs autres que ceux entraînés par câbles.

Capacité à générer un ensemble de torseurs donné – Une des propriétés fondamentales de tout robot à câbles est sa capacité à générer les efforts nécessaires à la tâche à accomplir. Comme la recherche sur les robots à câbles est relativement mature, cette question avait été abordée de différentes façons dans différentes publications, la plupart du temps pour des cas particuliers (mécanisme pleinement contraint ou suspendu, tension minimale nulle ou pas, tension maximale définie ou pas). Aucune

méthode n'englobait tous les cas. La contribution principale de cette thèse est donc probablement d'avoir démontré que la forme de l'ensemble des torseurs disponibles d'un robot à câbles soumis à des contraintes de tensions minimales et maximales dans tous les câbles est un zonotope. Cette approche s'applique de façon générale aux mécanismes de $2 \leq d \leq 6$ degrés de liberté à $n \geq d$ câbles, tant qu'ils ne se trouvent pas en singularité. Après avoir déterminé la forme de cet ensemble, des méthodes pour le construire dans un cas donné ont été expliquées. Une fois cet ensemble des torseurs disponibles défini dans la représentation appropriée, un système d'inégalités permet de vérifier rapidement si les torseurs potentiellement nécessaires à une tâche peuvent être générés par les câbles à la plate-forme.

Optimisation des architectures – Quatre conditions ont été énoncées pour qu'une pose d'un robot à câbles se trouve à l'intérieur de son espace de travail en regard d'une tâche donnée :

1. L'ensemble des torseurs disponibles doit inclure l'ensemble des torseurs de la tâche ;
2. Les câbles doivent être à une distance suffisante les uns des autres ;
3. Les câbles ne doivent pas interférer avec la plate-forme ;
4. Les longueurs des câbles doivent se trouver à l'intérieur de la plage permise.

Chacune des conditions 1 à 3 a été expliquée en détails, encore une fois de façon à pouvoir les utiliser en pratique dans la conception de robots à câbles. La condition 2 est même le sujet du chapitre 4. Comme, dans la majorité des cas, ces conditions définissent des limites d'un espace de travail de forme complexe, une méthode d'espace discrétisé faisant appel aux algorithmes génétiques a été présentée afin d'optimiser la position des points d'attache en fonction d'une tâche donnée.

Étalonnage de la géométrie – L'étalonnage des robots à câbles est à ce jour peu étudié. Qu'on puisse les transporter et les reconfigurer est une de leurs caractéristiques uniques qui rendent l'étalonnage des robots à câbles d'autant plus important que pour d'autres types de manipulateurs. De plus, leur grande taille rend parfois difficile la mesure directe des points d'attache à la base. Ainsi, des méthodes permettant de déterminer via un étalonnage la position des points d'attache ont été présentées. Toutes ces méthodes font appel aux mesures de longueurs de câbles prises par des encodeurs aux actionneurs. La précision sur ces mesures a donc un impact important sur la précision de l'étalonnage. Cette affirmation a été vérifiée en simulation pour le mécanisme du

chapitre 7. Deux des méthodes ont aussi été testées expérimentalement et comparées avec une mesure très précise de la position des points d'attache à l'aide d'un théodolite.

Numériseur 3D entraîné par câbles – Au chapitre 7, la réalisation d'un système pour numériser les apparences 3D d'objets de textures et de formes diverses a été présentée. Ce système est une application originale tirant avantage des propriétés des robots à câbles : utilisation à différentes échelles, grands espaces de travail, faible interférence des membrures avec l'éclairage. Comme on parlait d'un mécanisme déjà existant, la reconfigurabilité a aussi été mise en évidence. L'optimisation des points d'attache à la plate-forme en regard de la tâche a permis d'obtenir un mécanisme qui soit le mieux adapté possible à l'application. Bien que les requis sur l'espace de travail n'ont pas été pleinement rencontrés, le système réalisé et les modèles numérisés constituent une démonstration intéressante des capacités des mécanismes entraînés par câbles et des méthodes de conception proposées dans cette thèse.

8.2 Pistes de travaux futurs

En théorie, si le fléchissement est négligé et que les tensions dans les câbles sont connues, il est facile de modéliser l'élasticité des câbles, à tout le moins dans le PGI. Cette analyse avait été amorcée durant mes travaux mais n'a pas été présentée dans cette thèse. La raison est qu'en pratique, beaucoup d'incertitudes demeurent sur ce qui se passe aux enrouleurs. Afin qu'une telle analyse trouve une application, il faut une façon de mesurer rapidement et précisément la longueur réelle du câble, qui peut différer de la longueur déroulée estimée à partir de mesures aux encodeurs. Soumis à une tension, l'élongation d'un câble peut être calculée. Cependant, ce qui se passe dans l'enrouleur est difficile à modéliser et peut avoir un impact aussi important [64]. Ainsi, des avancées techniques rendront ce raffinement du modèle cinématique pertinent. Il pourra s'agir d'enrouleurs linéaires comme ceux suggérés dans [80] ou encore de système qui mesurera directement la longueur de câble entre les deux points d'attache.

Les vibrations sont souvent perçues de façon négative lorsqu'on contrôle un mécanisme à câbles. C'était le cas au chapitre 7, où on voulait que la caméra se stabilise le plus rapidement possible. Comme les vibrations ont une influence significative sur les performances de ces robots, il semble souhaitable d'effectuer une analyse de leurs

fréquences propres. Cette analyse permettrait, de l'avis de l'auteur, de développer un contrôle plus performant pour ces robots. Souvent, les perturbations ne viendront que de l'actionnement du système. Connaissant les modes principaux, les trajectoires pourraient être adaptées afin d'éviter d'exciter ces modes et ainsi diminuer les vibrations. À l'inverse, il serait peut-être possible de tirer avantage de l'élasticité des câbles pour améliorer les performances dynamiques du système.

Toujours d'un point de vue pratique, l'utilisation de la programmation quadratique afin de choisir la combinaison de tension pour produire un torseur désiré, largement utilisée, est discutable. Ceci survient pour le contrôle de mécanismes à $n > d$ câbles. Il est possible que l'approche géométrique du zonotope puisse servir d'élément de base pour arriver à une autre méthode de calcul, non itérative. Cette approche porte à croire que la solution à norme minimale sous contrainte donnée par la programmation quadratique n'est pas nécessairement la meilleure solution pour le contrôle d'un robot à câbles. On peut en effet penser qu'il est avantageux de demeurer le plus loin possible des limites du zonotope des torseurs disponibles, plutôt que de tenter de minimiser la norme du vecteur de tension, ce que la programmation quadratique fait en tentant de respecter les contraintes de limites de tension. La programmation quadratique risque donc de produire des solutions près ou sur les limites du zonotope, ce qui risque de causer des problèmes de continuité dans l'application des tensions. Pour accélérer la construction du zonotope, une méthode de continuation pourrait être adaptée à la méthode de translation des hyperplans. La symétrie centrale du zonotope pourrait probablement être mieux utilisée afin d'accélérer les calculs. Par ailleurs, l'approche du zonotope pourrait aussi servir de point de départ pour déterminer les expressions symboliques explicites des limites de l'espace de génération des torseurs en regard d'une tâche donnée, considérant des tensions minimales et maximales permises dans les câbles.

L'étude de l'étalonnage des robots à câbles présentée dans la thèse est un point de départ et est, par conséquent, loin d'être exhaustive. Les méthodes présentées dépendent largement de la précision des mesures et d'autres méthodes sont assurément possibles. La solution souhaitée aurait été de rassembler les câbles en un point et de le déplacer à une grande quantité d'endroits. L'algorithme aurait permis d'obtenir une solution un peu comme certains systèmes optiques réussissent à s'auto-étalonner. Les systèmes d'équations menant à l'étalonnage pourraient probablement être étudiés plus en détails pour obtenir des estimés de la sensibilité aux mesures, sans avoir à effectuer de simulation. Une fois l'imprécision sur les points d'attache calculée à partir de l'imprécision

sur les mesures, il serait intéressant d'analyser ses répercussions sur l'imprécision de la pose de la plate-forme qui est ce qui nous intéresse vraiment. Une bonne compréhension de la géométrie des robots à câbles et des méthodes numériques seront nécessaires à cette analyse.

Bibliographie

- [1] N. SHARKEY, « The programmable robot of ancient greece », *New Scientist*, n° 2611, p. 32–35, 2007.
- [2] M. GOUTTEFARDE, *Analyse de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 2005.
- [3] S. KAWAMURA et K. ITO, « A new type of master robot for teleoperation using a radial wiredrive system », *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 1, 1993.
- [4] S. SAHIN et L. NOTASH, « Kinematics, workspace and stiffness analysis of wire-actuated parallel manipulators », *Comptes rendus – 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, (Tianjin, Chine), Avril 2004.
- [5] S. SAHIN et L. NOTASH, « Force and stiffness analysis of wire-actuated parallel manipulators », *Comptes rendus – 12th IFToMM World Congress*, (Besançon, France), Juin 2007.
- [6] T. ARAI, K. YUASA, Y. MAE, K. INOUE, K. MIYAWAKI et N. KOYACHI, « A hybrid drive parallel arm for heavy material handling », *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 9, n° 1, p. 45–54, 2002.
- [7] S. LANDSBERGER et T. SHERIDAN, « A minimal, minimal linkage : The tension compression parallel link manipulator », *Comptes rendus – IMACS/SICE Int.*

- Symp. on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, (Kobe, Japan), p. 81–88, 1993.
- [8] E. F. FUKUSHIMA, P. DEBENEST et S. HIROSE, « Autonomous control of an engine-driven mobile platform for field robotic system », *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Maui, États-Unis), p. 84–89, Novembre 2001.
- [9] H. KINO et S. KAWAMURA, « Development of a serial link structure/parallel wire system for a force display », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, (Washington, DC, États-Unis), 2002.
- [10] T. KOBAYASHI et Y. TAKAHASHI, « Vibration control for two dimensional wire-driven positioning robot », *Comptes rendus – SICE Annual Conference*, p. 869–874, Juillet 1998.
- [11] L.-W. TSAI, *Robot Analysis*. Wiley-Interscience, 1999.
- [12] CABLECAM. <http://www.cablecam.com/>.
- [13] D. FOSSÉ, « Projet Carlina, Ballon d’essai pour un hypertélescope », *Ciel et Espace*, Octobre 2005.
- [14] K. KOZAK, Q. ZHOU et J. WANG, « Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass », *Comptes rendus – IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*, (Singapore), Décembre 2004.
- [15] K. KOZAK, Q. ZHOU et J. WANG, « Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass », *IEEE Transactions on Robotics*, n° 3, p. 425–433.
- [16] Y. SU, C. ZHENG et D. B.Y., « Fuzzy learning tracking of a parallel cable manipulator for the square kilometre array », *Mechatronics*, vol. 15, p. 731–746, 2005.
- [17] Y. QIU, Y. SHENG et B. DUAN, « Indirect calibration of initial cable lengths of a huge parallel cable robot », *Comptes rendus – 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, (Tianjin, Chine), Avril 2004.
- [18] J.-D. DESCHÊNES, P. LAMBERT, S. PERREAULT, N. MARTEL-BRISSON, N. ZOSO, A. ZACCARIN, P. HÉBERT, S. BOUCHARD et C. M. GOSSELIN, « A cable-driven parallel mechanism for capturing object appearance from multiple viewpoints », *Comptes rendus – 6th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, (Montréal, Canada), Août 2007.
- [19] S. BOUCHARD et C. GOSSELIN, « Workspace optimization of a very large cable-driven parallel mechanism for a radiotelescope application », *Comptes rendus –*

- ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Las Vegas, États-Unis), Septembre 2007.
- [20] S. BOUCHARD et C. M. GOSSELIN, « Kinematic sensitivity of a very large cable-driven parallel mechanism », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE, Mech. and Robotics Conference*, (Philadelphie, États-Unis), Septembre 2006.
- [21] P. DEWDNEY, M. NAHON et B. VEIDT, « The large adaptive reflector : A giant radiotelescope with an aero twist », *Canadian Aerospace Journal*, vol. 48, p. 239–250, Décembre 2002.
- [22] C. LAMBERT, *Dynamics and Control of a Multi-Tethered Aerostat Positioning System*. Thèse de doctorat, McGill University, Montréal, Canada, Octobre 2006.
- [23] G. MEUNIER, « Control of an overactuated cable-driven parallel manipulator », Mémoire de maîtrise, McGill University, Montréal, Canada, Septembre 2006.
- [24] M. NAHON, G. GILARDI et C. LAMBERT, « Dynamics and control of a radiotelescope receiver supported by a tethered aerostat », *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 25, p. 1107–1115, Décembre 2003.
- [25] H. BORGSTROM, M. STEALEY, M. A. BATALIN et W. J. KAISER, « NIMS RD-3D : A novel rapidly deployable robot for 3-dimensional applications », *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Pékin, Chine), Octobre 2006.
- [26] B. JORDAN, M. BATALIN et W. KAISER, « NIMS RD : A rapidly deployable cable based robot », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Rome, Italie), p. 144–150, 2007.
- [27] K. USHER, G. WINSTANLEY, P. CORKE, D. STAUFFACHER et R. CARNIE, « Air vehicle simulator : an application for a cable array robot », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Barcelone, Espagne), p. 2253–2258, Avril 2005.
- [28] L. L. CONE, « Skycam, an aerial robotic camera system », *Byte*, vol. 10, p. 122–132, Octobre 1985.
- [29] G. W. BROWN, « Suspension system for supporting and conveying equipment, such as a camera ». U.S. Patent number 4,710,819, Décembre 1987.
- [30] SPYDERCAM. <http://www.spydercam.com/>.
- [31] A. BUTERBAUGH, B. M. KENT, C. MENTZER, M. SCOTT et W. FORSTER, « Demonstration of an inverted Stewart platform target-suspension system using lightweight, high-tensile strings », *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 49, n° 5, p. 184, 2007.

- [32] D. THEODORAKOTOS, E. STUMP et V. KUMAR, « Kinematics and pose estimation for cable actuated parallel manipulators », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Las Vegas, États-Unis), Septembre 2007.
- [33] C. MELCHIORRI et G. VASSURA, « Development and application of wire-actuated haptic interfaces », *Journal of Robotic Systems*, vol. 18, n° 12, p. 755–768, 2001.
- [34] R. L. WILLIAMS II, V. CHADARAM et F. GIACOMETTI, « Three-cable haptic interface », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Philadelphie, États-Unis), Septembre 2006.
- [35] J. GORMAN, K. JABLOKOW et D. CANNON, « The cable array robot : Theory and experiment », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Séoul, Corée), p. 2804–2810, Mai 2001.
- [36] W.-J. SHIANG, D. CANNON et J. GORMAN, « Optimal force distribution applied to a robotic crane with flexible cables », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, États-Unis), p. 1948 – 1954, Avril 2000.
- [37] T. HEYDEN, T. MAIER et C. WOERNLE, « Trajectory tracking control for a cable suspension manipulator », *Comptes rendus – Advances in Robot Kinematics*, p. 125–134, 2002.
- [38] T. MAIER et C. WOERNLE, « Flatness-based control of underconstrained cable-suspension manipulators », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Las Vegas, États-Unis), Septembre 1999.
- [39] E. OTTAVIANO, M. CECCARELLI, A. PAONE et G. CARBONE, « A low-cost easy operation 4-cable driven parallel manipulator », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Barcelone, Espagne), p. 4008–4013, Avril 2005.
- [40] S. TADOKORO et S. KOBAYASHI, « A portable parallel motion platform for urban search and surveillance in disasters », *Advanced Robotics*, vol. 16, n° 6, p. 537–540, 2002.
- [41] H. OSUMI, Y. UTSUGI et M. KOSHIKAWA, « Development of a manipulator suspended by parallel wire structure », *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, p. 498–503, 2000.
- [42] J. ALBUS, R. BOSTELMAN et N. DAGALAKIS, « The NIST Robocrane », *Journal of Robotics Systems*, vol. 10, n° 5, p. 709–724, 1993.

- [43] J. S. ALBUS, « Phase II final report : Air transportable expeditionary crane (ATEC) project », rapport technique, United States National Institute of Standards and Technology, Octobre 1996.
- [44] R. BOSTELMAN, J. ALBUS et B. STONE, « Toward next-generation construction machines », *Comptes rendus – 9th IEEE International Topical Meeting on Robotics and Remote Systems*, (Seattle, Washington, États-Unis), Mars 2001.
- [45] R. V. BOSTELMAN, J. S. ALBUS et R. E. GRAHAM, « Robocrane and Emma applied to waste storage tank remediation », *Comptes rendus – American Nuclear Society Seventh Topical Meeting on Robotics and Remote Systems*, (Augusta, États-Unis), Avril-Mai 1997.
- [46] N. DAGALAKIS, J. S. ALBUS, B.-L. WANG, J. UNGER et J. LEE, « Stiffness study of a parallel link robot crane for shipbuilding applications », *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 111, p. 183–193, Août 1989.
- [47] M. YAMAMOTO, N. YANAI et A. MOHRI, « Trajectory control of incompletely restrained parallel-wire-suspended mechanism based on inverse dynamics », *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 20, p. 840–850, Octobre 2004.
- [48] N. YANAI, M. YAMAMOTO et A. MOHRI, « Feedback control for wire-suspended mechanism with exact linearization », *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Lausanne, Suisse), p. 2213–2218, Octobre 2002.
- [49] B. A. ABDULLAH et S. K. AGRAWAL, « Cable suspended robots : Design, planning and control », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Washington, DC, États-Unis), p. 4275–4280, 2002.
- [50] S.-R. OH et S. K. AGRAWAL, « Guaranteed reachable domain and control design for a cable robot subject to input constraints », *Comptes rendus – American Control Conference*, (Portland, Orégon, États-Unis), p. 3379–3384, Juin 2005.
- [51] S.-R. OH et S. K. AGRAWAL, « Generation of feasible set points and control of a cable robot », *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, p. 551–558, Juin 2006.
- [52] S.-R. OH et S. K. AGRAWAL, « A reference governor-based controller for a cable robot under input constraints », *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, p. 639–645, Juillet 2005.
- [53] M. A. RAHIMI, H. HEMAMI et Y. F. ZHENG, « Experimental study of a cable-driven suspended platform », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Détroit, États-Unis), p. 2342–2347, Mai 1999.

- [54] E. OTTAVIANO, « A system for tension monitoring in cable-based parallel architectures », *Comptes rendus – 12th IFToMM World Congress*, (Besançon, France), Juin 2007.
- [55] J.-W. JEONG, S.-H. KIM et Y.-K. KWAK, « Design and kinematic analysis of the wire parallel mechanism for robot pose measurement », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Louvain, Belgique), p. 2941–2946, Mai 1998.
- [56] J. ANDRADE-CETTON et F. THOMAS, « Wire-based tracking using mutual information », *Comptes rendus – Advances in Robot Kinematics*, p. 3–14, Juin 2006.
- [57] R. L. WILLIAMS II, J. S. ALBUS et R. V. BOSTELMAN, « 3D cable-based Cartesian metrology system », *Journal of Robotic Systems*, vol. 21, n° 5, p. 237–257, 2004.
- [58] R. L. WILLIAMS II, « Cable-suspended haptic interface », *International Journal of Virtual Reality*, vol. 3, n° 3, p. 13–21, 1998.
- [59] R. L. WILLIAMS II et J. VADIA, « Planar translational cable-direct-driven robots : Hardware implementation », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Chicago, États-Unis), Septembre 2003.
- [60] P. GALLINA, G. ROSATI et A. ROSSI, « 3-DOF wire driven planar haptic interface », *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 32, n° 1, p. 23–36, 2001.
- [61] Y. TAKEDA et H. FUNABASHI, « Kinematic synthesis of spatial in-parallel wire-driven mechanism with six degrees of freedom with high force transmissibility », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Baltimore, États-Unis), Septembre 2000.
- [62] R. LINDEMANN et D. TESAR, « Construction and demonstration of a 9-string 6-DOF force reflecting joystick for telerobotics », *Comptes rendus – NASA Conference on Space Telerobotics*, vol. 4, p. 55–63, 1989.
- [63] B. CANTIN, « Étude des performances, analyse et optimisation d'un mécanisme parallèle spatial à 6 degrés de liberté entraîné par câbles », Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2004.
- [64] R. POULIN, « Architecture et commande d'une interface de locomotion utilisant un mécanisme parallèle entraîné à l'aide de câbles. », Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2005.
- [65] S. PERREault et C. GOSSELIN, « Cable-driven parallel mechanisms : Application to a locomotion interface », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Las Vegas, États-Unis), Septembre 2007.

- [66] S. TADOKORO, Y. MURAO, M. HILLER, R. MURATA, H. KOHKAWA et T. MATSUSHIMA, « A motion base with 6-DOF by parallel cable drive architecture », *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 7, n° 2, p. 115–123, 2002.
- [67] M. SATO, « Development of string-based force display : SPIDAR », *Comptes rendus – 8th International Conference on Virtual Systems and Multimedia*, 2002.
- [68] N. TARRIN, S. COQUILLART, S. HASEGAWA, L. BOUGUILA et M. SATO, « The Stringed Haptic Workbench : a New Haptic Workbench Solution », *Comptes rendus – Computer Graphics Forum*, vol. 22, p. 583–589, 2003.
- [69] S. KIM, M. ISHII, Y. KOIKE et M. SATO, « Development of tension based haptic interface and possibility of its application to virtual reality », *Comptes rendus – ACM symposium on Virtual reality software and technology*, (Séoul, Corée), p. 199–205, ACM Press New York, États-Unis, 2000.
- [70] J. MURAYAMA, L. BOUGRILA, Y. LUO, K. AKAHANE, S. HASEGAWA, B. HIRSBRUNNER et M. SATO, « SPIDAR G&G : A two-handed haptic interface for bimanual VR interaction », *Comptes rendus – Eurohaptics Conference*, (Munich, Allemagne), Juin 2004.
- [71] T. MORIZONO, K. KURAHASHI et S. KAWAMURA, « Realization of a virtual sport training system with parallel wire mechanism », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Albuquerque, États-Unis), Avril 1997.
- [72] P. L. CAMPBELL, P. D. abd Swaim et T. C. J., « Charlotte robot technology for space and terrestrial applications », *SAE Transactions*, vol. 104, n° 1, p. 641–648, 1995.
- [73] S. KAWAMURA, W. CHOE, S. TANAKA et S. PANDIAN, « Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drive system », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, (Nagoya, Japon), p. 215–220, 1995.
- [74] S. KAWAMURA, H. KINO et C. WON, « High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots », *Robotica*, vol. 18, p. 13–21, 2000.
- [75] P. LAFOUCARDE et M. LLIBRE, « Design of a parallel wire-driven manipulator for wind tunnel », *Comptes rendus – Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators* (C. GOSSELIN et I. EBERT-UPHOFF, édés), (Québec, Canada), Octobre 2002.

- [76] P. LAFOUCARDE, Y.-Q. ZHENG et X.-W. LIU *Comptes rendus – 11th World Congress in Mechanism and Machine Science* (T. HUANG, éd.), (Tianjin, Chine), Avril.
- [77] Y. ZHENG, Q. LIN et X. LIU, « Initial test of a wire-driven parallel suspension system for low speed wind tunnels », *Comptes rendus – 12th World Congress in Mechanism and Machine Science*, (Besançon, France), Juin 2007.
- [78] K. MAEDA, S. TADOKORO, T. TAKAMORI, M. HILLER et R. VERHOEVEN, « On design of a redundant wire-driven parallel robot WARP manipulator », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, (Détroit, États-Unis), p. 895–900, 1999.
- [79] S. BOUCHARD et C. M. GOSSELIN, « A simple control strategy for overconstrained parallel cable mechanisms », *Comptes rendus – 20th Canadian Congress of Applied Mechanics (CANCAM)*, (Montréal, Canada), Mai-Juin 2005.
- [80] J.-P. MERLET, « Kinematics of the wire-driven robot marionet using linear actuators », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Pasadena, États-Unis), Avril 2008.
- [81] A. FATTAH et S. K. AGRAWAL, « On the design of cable-suspended planar parallel robots », *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, p. 1021–1028, Septembre 2005.
- [82] S.-R. OH et S. K. AGRAWAL, « Cable suspended planar robots with redundant cables : Controllers with positive tensions », *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, n° 3, p. 457–465, 2005.
- [83] T. BRUCKMANN, A. POTT et M. HILLER, « Calculating force distributions for redundantly actuated tendon-based Stewart platforms », *Comptes rendus – Advances in Robot Kinematics*, p. 403–412, 2006.
- [84] S. FANG, D. FRANITZA, M. TORLO, F. BEKES et M. HILLER, « Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution », *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 9, p. 561–567, Septembre 2004.
- [85] M. HILLER, S. FANG, S. MIELCZAREK, R. VERHOEVEN et D. FRANITZA, « Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 40, p. 429–445, 2005.
- [86] R. VERHOEVEN et M. HILLER, « Tension distribution in tendon-based Stewart platforms », *Comptes rendus – 8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, (Caldes de Malavella, Espagne), p. 117–124, 2002.
- [87] R. VERHOEVEN, M. HILLER et S. TODOKORO, « Workspace, stiffness, singularities and classification of tendon-driven Stewart platforms », *Comptes rendus –*

- Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control* (H. M. L. LENARČIČ, J., éd.), Kluwer Academic Publishers.
- [88] R. L. WILLIAMS II, B. SNYDER, J. S. ALBUS et R. V. BOLSTELMAN, « Seven-DOF cable-suspended robot with independent metrology », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Salt Lake City, États-Unis), Octobre 2004.
- [89] A. T. RIECHEL, P. BOSSCHER, H. LIPKIN et I. EBERT-UPHOFF, « Concept paper : Cable-driven robots for use in hazardous environments », *Comptes rendus – 10th International Topical Meeting on Robotics and Remote Systems for Hazardous Environments*, (Gainesville, États-Unis), Mars-Avril 2004.
- [90] G. BARRETTE, « Analyse des mécanismes parallèles actionnés par câbles », Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada, 2000.
- [91] C. M. GOSSELIN, *Éléments de robotique*. Notes de cours, Janvier 2003.
- [92] V. DUCHAINE, S. BOUCHARD et C. GOSSELIN, « Computationally Efficient Predictive Robot Control », *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 12, p. 570–578, Octobre 2007.
- [93] H. M. IRVINE et G. SINCLAIR, « The suspended elastic cable under the action of concentrated vertical loads », *International Journal of Solids and Structure*, vol. 12, p. 309–317, 1976.
- [94] M. IRVINE, *Cable Structures*, chap. 1. The MIT Press, 1981.
- [95] R. VERHOEVEN, *Analysis of the Workspace of Tendon-Based Stewart-Platforms*. Thèse de doctorat, Universität Duisburg-Essen, Allemagne, 2004.
- [96] T. LEGG, « A proposed new design for a large radiotelescope », *Astronomy and Astrophysics Supplement*, vol. 130, p. 369–379, Juin 1998.
- [97] Z. QIAN et Z. HUI, « Simulation and experimental analysis of the Stewart parallel mechanism for vibration control », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 4, p. 3548–3552, Octobre 2003.
- [98] T. YOSHIKAWA, *Foundations of Robotics*, chap. 4. The MIT Press, 1990.
- [99] C. M. GOSSELIN et J. ANGELES, « A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators », *Journal of Mechanical Design*, vol. 113, p. 220–226, Septembre 1991.
- [100] C. A. KLEIN et B. E. BLAHO, « Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators », *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, p. 72–83, 1987.

- [101] R. KURTZ et V. HAYWARD, « Multiple-goal kinematic optimization of a parallel spherical mechanism with actuator redundancy », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, p. 644–651, Octobre 1992.
- [102] J. SALISBURY et J. CRAIG, « Articulated hands : force control and kinematic issues », *International Journal of Robotics Research*, vol. 1, n° 1, 1982.
- [103] H. LIPKIN et J. DUFFY, « Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator », *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 110, p. 138–144, Juin 1988.
- [104] C. M. GOSSELIN, « The optimum design of robotic manipulators using dexterity indices », *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 9, n° 4, p. 213–226, 1992.
- [105] S. KIM, *Three end-effector point coordinate formulation for parallel mechanism robots*. Thèse de doctorat, Kwan Ju Institute of Science and Technology, Corée, 2003.
- [106] M. TANDICRI, J. ANGELES et F. RANJBARAN, « The characteristic point and the characteristic length of robotic manipulators », *Comptes rendus – ASME 22nd Biennial Conference on Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems*, vol. 45, (Scotsdale, États-Unis), p. 203–208, Septembre 1992.
- [107] L. STOCO, S. E. SALCUDEAN et F. SASSANI, « Matrix normalization for optimal robot design », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Louvain, Belgique), Mai 1998.
- [108] K. L. DOTY, C. MERCHIRRIO, E. M. SCHWARTZ et C. BONIVENTO, « Robot manipulability », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, p. 462–468, Juin 1995.
- [109] P. BOSSCHER, *Disturbance Robustness Measures and Wrench-Feasible Workspace Generation Techniques for Cable-Driven Robots*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology, États-Unis, 2004.
- [110] A. T. RIECHEL et I. EBERT-UPHOFF, « Force-Feasible Workspace Analysis for Underconstrained, Point-Mass Cable Robots », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 5, (Nouvelle-Orléans, États-Unis), p. 4956–4962, Avril 2004.
- [111] P. MCMULLEN, « On Zonotopes », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 159, p. 91–109, 1971.
- [112] M. de BERG, *Computational Geometry : Algorithms and Applications*. Springer, 2000.

- [113] G. ZIEGLER, *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, 1995.
- [114] R. d. G. ROBERTS, T. GRAHAM et T. LIPPITT, « On the inverse kinematics, statics, and fault tolerance of cable-suspended robots », *Journal of Robotic Systems*, vol. 15, n° 10, p. 581–597, 1998.
- [115] S. OH et S. AGRAWAL, « Cable-suspended planar parallel robots with redundant cables : Controllers with positive cable tensions », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, (Taipei, Taiwan), p. 3023–3028, Septembre 2003.
- [116] E. STUMP et V. KUMAR, « Workspace delienation of cable-actuated parallel manipulators », *Comptes rendus – ASME International Design Engineering Technical Conferences, Mechanics and Robotics Conference*, (Salt Lake City, États-Unis), Septembre 2004.
- [117] P. BOSSCHER et I. EBERT-UPHOFF, « Wrench-based analysis of cable-driven robots », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 5, (Nouvelle-Orléans, États-Unis), p. 4950–4955, Avril 2004.
- [118] M. HASSAN et A. KHAJEPOUR, « Minimization of bounded cable tensions in cable-based parallel manipulators », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Las Vegas, États-Unis), Septembre 2007.
- [119] M. GOUTTEFARDE, J. MERLET et D. DANAY, « Wrench-feasible workspace of parallel cable-driven mechanisms », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Rome, Italie), p. 1492–1497, Avril 2007.
- [120] C. B. PHAM, S. H. YEO et G. YANG, « Tension analysis of cable-driven mechanisms », *Comptes rendus – IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Edmonton, Canada), p. 257–262, Octobre 2005.
- [121] M. GOUTTEFARDE et C. M. GOSSELIN, « On the properties and the determination of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven mechanisms », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Salt Lake City, États-Unis), Septembre 2004.
- [122] B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*. Springer, 2003.
- [123] S. ONN et U. G. ROTHBLUM, « The use of edge-directions and linear programming to enumerate vertices », *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 14, n° 2-3, p. 153–164, 2007.
- [124] C. BARBER, D. DOBKIN et H. HUHDANPAA, « The quickhull algorithm for convex hulls », *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 22, n° 4, p. 469–483, 1996.

- [125] M. ISHII et M. SATO, « A 3D spatial interface device using tensed strings », *Presence*, vol. 3, n° 1, p. 81–86, 1994.
- [126] D. GREEN et D. HATCH, « Fast polygon-cube intersection testing », *Graphics Gems V*, p. 375–379, 1995.
- [127] H. COXETER, *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, 1969.
- [128] C. M. GOSSELIN, « Determination of the workspace of 6-DOF parallel manipulators », *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 112, n° 3, p. 331–336, 1990.
- [129] J. LAGARIAS, J. REEDS, M. WRIGHT et P. WRIGHT, « Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, p. 112, 1998.
- [130] D. GOLDBERG, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Co., Mars 1998.
- [131] M. ARSENAULT et R. BOUDREAU, « Synthesis of planar parallel mechanisms while considering workspace, dexterity, stiffness and singularity avoidance », *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, p. 69–78, Janvier 2006.
- [132] S. TADOKORO, R. VERHOEVEN, M. HILLER et T. TAKAMORI, « A portable parallel manipulator for search and rescue at large-scale urban earthquakes and an identification algorithm for the installation in unstructured environments », *Comptes rendus – NATO Advanced Study Institute of Computational Methods in Mechanics*, vol. 1, p. 157–186, Octobre 1997.
- [133] J.-P. MERLET, *Parallel robots*. Kluwer, 2000.
- [134] H. ZHUANG, O. MASORY et J. YAN, « Kinematic calibration of a Stewart platform using pose measurements obtained by a single theodolite », *Comptes rendus – International Conference of Intelligent Robot systems*, (Pittsburg, États-Unis), p. 329–334, 1995.
- [135] H. ZHUANG, J. YAN et O. MASORY, « Calibration of Stewart platforms and other parallel manipulators by minimizing inverse kinematic residuals », *Journal of Robotic Systems*, vol. 15, p. 395–405, 1998.
- [136] S. BESNARD et W. KHALIL, « Identifiable parameters for parallel robots kinematic calibration », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Séoul, Corée), p. 2859 – 2866, 2001.
- [137] S. BAI et Y. TEO, « Kinematic calibration and pose measurement of a medical parallel manipulator by optical position sensors », *Journal of Robotic Systems*, vol. 20, p. 201–209, 2003.

- [138] D. DANEY, « Self calibration of Gough platform using leg mobility constraints », *Comptes rendus – Tenth World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms*, (Oulu, Finlande), p. 329–334, Juin 1999.
- [139] S. JOSHI et A. SURIANARAYAN, « Calibration of a 6-DOF cable robot using two inclinometers », *Comptes rendus – Performance Metrics for Intelligent Systems*, (Gaithersburg, États-Unis), Septembre 2003.
- [140] H. ZHUANG, J. YAN et O. MASORY, « Self-calibration of parallel mechanisms with a case study on Stewart platforms », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 13, p. 387–397, Juin 1997.
- [141] D. DANEY, « Optimal measurement configurations for Gough platform calibration », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Washington, DC, États-Unis), p. 147 – 152, Mai 2002.
- [142] D. DANEY, Y. PAPEGAY et B. MADELINE, « Choosing measurement poses for robot calibration with the local convergence method and tabu search », *International Journal of Robotics Research*, vol. 24, p. 501–518, Juin 2005.
- [143] P. BOSSCHER, « A concept for rapidly-deployable cable robot search and rescue systems », *Comptes rendus – ASME IDETC/CIE Mech. and Robotics Conference*, (Long Beach, Californie, États-Unis), Septembre 2005.
- [144] S. HAVLIK, « A cable suspended robotic manipulator for large workspace operations », *Journal of Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 15, n° 6, 2000.
- [145] S. BOUCHARD, « Contrôle d'un mécanisme parallèle à 6 degrés de liberté actionné par des câbles », rapport de stage, Université Laval, Québec, Canada, 2002.
- [146] S.-H. KANG et D. TESAR, « A noble 6-DOF measurement tool with indoor GPS for metrology and calibration of modular reconfigurable robots », *Comptes rendus – IEEE International Conference on Mechatronics*, (Istanbul, Turquie), 2004.
- [147] D. DANEY, « Interval method for calibration of parallel robots : A vision-based experimentation », *Comptes rendus – International Workshop on Computational Kinematics*, (Cassino, Italie), Mai 2005.
- [148] P. RENAUD, N. ANDREFF, J.-M. LAVEST et M. DHOME, « Simplifying the kinematic calibration of parallel mechanisms using vision-based metrology », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 22, p. 12–22, Février 2006.
- [149] M. LEVOY et P. HANRAHAN, « Light field rendering », *Computer Graphics*, vol. 30, p. 31–42, 1996.

- [150] W. CHEN, J. BOUGUET, M. CHU et R. GRZESZCZUK, « Light field mapping : efficient representation and hardware rendering of surface light fields », *ACM Transactions on Graphics*, vol. 21, n° 3, p. 447–456, 2002.
- [151] N. WOOD DANIEL, I. AZUMA DANIEL *et al.*, « Surface light fields for 3D photography », *Comptes rendus – SIGGRAPH*, (Nouvelle-Orléans, États-Unis), p. 287–296, Juillet 2000.
- [152] « The Stanford Spherical Gantry ». <http://graphics.stanford.edu/projects/...gantry/>.
- [153] T. KANADE, P. RANDEP et P. J. NARAYANAN, « Virtualized reality : Constructing virtual worlds from real scenes », *IEEE MultiMedia*, vol. 4, n° 1, p. 34–47, 1997.
- [154] I. BONEV, D. ZLATANOV et C. GOSSELIN, « Advantages of the modified Euler angles in the design and control of PKMs », *Comptes rendus – Parallel Kinematic Machines International Conference*, p. 171–188, 2002.

Annexe A

Liste des extensions multimédia sur le CD d'accompagnement.

La liste suivante identifie tous les éléments appelés comme des *extensions* dans le texte. Ces extensions font référence à des fichiers inclus sur de CD d'accompagnement. Les noms des fichiers correspondent à leur numéro d'extension. Certains des vidéos ayant été présentés dans le cadre de conférences n'ont pas été traduits. Leurs textes sont uniquement en anglais.

1. **Animation d'un mécanisme $n = 3, d = 2$.**

Animation d'un mécanisme sur une trajectoire définie avec zonotope de base associé.

2. **Animation d'un mécanisme $n = 5, d = 2$.**

Animation d'un mécanisme sur une trajectoire définie avec zonotope de base associé.

3. **Animation d'un mécanisme $n = 4, d = 3$.**

Animation d'un mécanisme sur une trajectoire définie avec zonotope de base associé.

4. **Animation d'un mécanisme $n = 6, d = 3$.**

Animation d'un mécanisme sur une trajectoire définie avec zonotope de base associé.

5. **Trajectoire du numériseur**

Vidéo montrant le numériseur effectuant une trajectoire autour d'un objet.

6. **Modèles obtenus**

Dans cette animation, on voit les quatre objets numérisés montrés à la figure 7.28 en mouvement. L'animation permet de mieux apprécier le résultat de la modélisation que les images.

7. **Explication du traitement des images**

Explique sommairement les différentes étapes pour obtenir un modèle de l'apparence d'un objet à partir des photographies.

Annexe B

Procédure Matlab pour définir un zonotope avec la méthode par translation des hyper-plans.

Contents

- DEFINITION DU PROBLEME
- CALCULS
- Capable de generer les efforts desires?

% Ensemble des torseurs disponible dans sa representation-H

% Test si un ensemble de torseurs peuvent etre generes.

```

addpath('/gmc/usr/samuel/Numeriseur/')
addpath('/gmc/usr/samuel/Numeriseur/OptimArch')

```

DEFINITION DU PROBLEME

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CONFIGURATION %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% position
p = [0;0;4];

% orientation, convention tilt & torsion
ang1 = 0*pi/180;
ang2 = 0*pi/180;
ang3 = -63*pi/180;
angTT = [ang1;ang2;ang3];
% Fonction qui retourne matrice de rotation selon convention tilt &
% torsion.
Q = Rot_mat(ang1, ang2, ang3)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ARCHITECTURE %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Choix de l'architecture

% Les differentes architectures sont dans une fonction.
% base: matrice des points a la base
% Eff: matrice des points a la plate-forme dans le repere de celle-ci
% nb_cbl: nombre de cables

NoArch = 12;
[base,Eff,nb_cbl] = Architectures00370(NoArch,1,1)

```

```

n    = size(base,2);
d    = 6;

%%%%%%%%%%
% TENSIONS %
%%%%%%%%%%
tmin = .1*ones(n,1);
tmax = 100*ones(n,1);
dt   = tmax-tmin;

%%%%%%%%%%
% TORSEURS A GENERER %
%%%%%%%%%%
D    = [0,1000;0,1;100,0;0,40;.0,40;0,20]

%%%%%%%%%%
% INITIALISATION %
%%%%%%%%%%
% Matrices de permutation
% La matrice mat01 est pregeneree. Elle contient toutes les combinaisons de
% 10 bits. Elle pourrait etre plus grande au besoin.
load('mat01');

n2      = n-(d-1);
n_hp    = 2^n2;
alpha_hp = mat01(1:n_hp,(end-n2+1):end)';
mzero   = zeros(n,n_hp)

Q =

    0.4540    0.8910    0
   -0.8910    0.4540    0
         0         0    1.0000

```

base =

Columns 1 through 7

3.8513	-6.2500	-4.0000	6.2500	3.8490	0.3500	-3.9700
-5.2500	-0.1400	5.2500	-0.2500	5.2500	-5.2500	-5.2500
1.6700	1.6700	2.0000	1.6700	6.1620	6.1620	5.7150

Column 8

0.3500
5.2500
6.1620

Eff =

Columns 1 through 7

0.3750	0.3750	-0.3750	-0.3750	0.3750	0.3750	-0.3750
-0.3750	-0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	-0.3750
0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	-0.3750	-0.3750	-0.3750

Column 8

-0.3750
-0.3750
-0.3750

nb_cbl =

8

D =

```

      0      1000
      0       1
    100       0
      0      40
      0      40
      0      20

```

```
alpha_hp =
```

```

      0      0      0      0      1      1      1      1
      0      0      1      1      0      0      1      1
      0      1      0      1      0      1      0      1

```

```
mzero =
```

```

      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      0      0

```

CALCULS

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% TORSEURS UNITAIRES %
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
mp = p*ones(1,n)
```

```

% Points d'attache sur la plate-forme dans le repere du sol:
qb = Q*Eff
B_s = mp+qb

% Vecteurs correspondant aux cables pointant vers vers la base:
V = base-B_s

% Longueurs des cables:
rho = sqrt(dot(V,V))

% Vecteurs unitaires le long des cables
U = V./[rho;rho;rho]

% Matrice des torseurs unitaires Wt = w;
W = [U;cross(qb,U)]

% Ponderee par plage de tensions disponible
T = diag(dt)
M = W*T

% Torseur cause par les tensions minimales.
wmin = W*tmin

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CONSTRUCTION DU ZONOTOPE %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Methode par translation des hyper-plans %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ind_hp = combinaisons_vect(n,d)
% Sort matrice de 0 et 1, les 1 indiquant quels torseurs unitaires forment

```

```

% une combinaison.

nb_comb = size(ind_hp,1)
% Nombre de combinaisons differentes de torseurs formant un h-p

N      = zeros(nb_comb*2,d);
% Matrice des normales aux h-p

d      = zeros(nb_comb*2,1);
% Vecteur d obtenu à partir des normales et des points sur les h-p

for i = 1:nb_comb
    ind = find(ind_hp(i,:));
    % Quels vecteurs genèrent h-p

    indn = find(ind_hp(i,)==0);
    % Quels vecteurs restant

    np      = cross_prod(W(:,ind));
    % Vecteur perpendiculaire à un h-p obtenu avec produit vectoriel
    % generalise

    np      = np/sqrt(dot(np,np));
    % Normalise

    Mnp     = np*ones(1,n);
    % Matrice avec vecteur np comme colonnes

    Mpv     = dot(Mnp,M)'*ones(1,n_hp);
    % Produit scalaire entre np et chaque torseur n'ayant pas servi à
    % generer h-p

    M_perm  = mzero;
    M_perm(indn,:) = alpha_hp;
    % Matrice de toutes les combinaisons 0-1 possibles de translation du
    % h-p le long de vecteur np

```



```

comb_pv      = M_perm.*Mpv;
% Ponderation des combinaisons possibles par les distances de
% translations de l'h-p

somme_comb   = sum(comb_pv,1);
% Deplacement total pour chaque combinaison

[mx, ind_mx] = max(somme_comb);
% Deplacement maximal de h-p le long de la normale

[mn, ind_mn] = min(somme_comb);
% Deplacement minimal de h-p le long de la normale

p1           = mx*np+wmin;
% Point dans h-p 1

p2           = mn*np+wmin;
% Point dans h-p 2

d1           = p1'*np;
d2           = -p2'*np;
ind_         = (2*i-1):2*i;
% Indexation dans les matrices de resultat decrivant tous les h-p

N(ind_,:)    = [np';-np'];
d(ind_)      = [d1;d2];
P(:,ind_)    = [p1,p2];
end

% Exemples montrant la forme des variables dans la boucle precedente
ind          = ind
indn         = indn
Mnp          = Mnp
Mpv          = Mpv
M_perm       = M_perm(indn,:)

```

```

comb_pv    = comb_pv
somme_comb = somme_comb
N          = N
d          = d
P          = P

```

mp =

```

    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0
    4    4    4    4    4    4    4    4

```

qb =

Columns 1 through 7

```

-0.1639  -0.1639   0.1639   0.1639   0.5044   0.5044  -0.5044
-0.5044  -0.5044   0.5044   0.5044  -0.1639  -0.1639   0.1639
 0.3750   0.3750   0.3750   0.3750  -0.3750  -0.3750  -0.3750

```

Column 8

```

-0.5044
 0.1639
-0.3750

```

B_s =

Columns 1 through 7

```

-0.1639  -0.1639   0.1639   0.1639   0.5044   0.5044  -0.5044
-0.5044  -0.5044   0.5044   0.5044  -0.1639  -0.1639   0.1639
 4.3750   4.3750   4.3750   4.3750   3.6250   3.6250   3.6250

```

Column 8

-0.5044

0.1639

3.6250

V =

Columns 1 through 7

4.0152	-6.0861	-4.1639	6.0861	3.3446	-0.1544	-3.4656
-4.7456	0.3644	4.7456	-0.7544	5.4139	-5.0861	-5.4139
-2.7050	-2.7050	-2.3750	-2.7050	2.5370	2.5370	2.0900

Column 8

0.8544

5.0861

2.5370

rho =

Columns 1 through 7

6.7794	6.6701	6.7453	6.7028	6.8508	5.6858	6.7593
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Column 8

5.7476

U =

Columns 1 through 7

0.5923	-0.9124	-0.6173	0.9080	0.4882	-0.0272	-0.5127
-0.7000	0.0546	0.7035	-0.1125	0.7903	-0.8945	-0.8009
-0.3990	-0.4055	-0.3521	-0.4036	0.3703	0.4462	0.3092

Column 8

0.1486
0.8849
0.4414

W =

Columns 1 through 7

0.5923	-0.9124	-0.6173	0.9080	0.4882	-0.0272	-0.5127
-0.7000	0.0546	0.7035	-0.1125	0.7903	-0.8945	-0.8009
-0.3990	-0.4055	-0.3521	-0.4036	0.3703	0.4462	0.3092
0.4638	0.1841	-0.4414	-0.1613	0.2357	-0.4086	-0.2497
0.1567	-0.4086	-0.1738	0.4066	-0.3699	-0.2149	0.3482
0.4134	-0.4692	0.4266	-0.4764	0.4786	-0.4556	0.4880

Column 8

0.1486
0.8849
0.4414
0.4042
0.1669
-0.4707

T =

Columns 1 through 7

99.9000	0	0	0	0	0	0	0
0	99.9000	0	0	0	0	0	0
0	0	99.9000	0	0	0	0	0
0	0	0	99.9000	0	0	0	0
0	0	0	0	99.9000	0	0	0
0	0	0	0	0	99.9000	0	0
0	0	0	0	0	0	99.9000	0
0	0	0	0	0	0	0	99.9000
0	0	0	0	0	0	0	0

Column 8

0
0
0
0
0
0
0
0
99.9000

M =

Columns 1 through 7

59.1674	-91.1531	-61.6681	90.7094	48.7724	-2.7123	-51.2203
-69.9311	5.4573	70.2839	-11.2434	78.9469	-89.3629	-80.0146
-39.8606	-40.5134	-35.1743	-40.3162	36.9953	44.5750	30.8892
46.3288	18.3874	-44.0975	-16.1181	23.5423	-40.8161	-24.9433
15.6554	-40.8218	-17.3611	40.6231	-36.9491	-21.4653	34.7873
41.3029	-46.8696	42.6220	-47.5941	47.8116	-45.5168	48.7513

Column 8

14.8500
88.4027
44.0960
40.3775
16.6721
-47.0216

wmin =

0.0068
-0.0075
0.0007
0.0027
-0.0089
-0.0065

ind_hp =

1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1

1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1

0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

nb_comb =

56

ind =

4	5	6	7	8
---	---	---	---	---

indn =

1	2	3
---	---	---

Mnp =

Columns 1 through 7

0.1515	0.1515	0.1515	0.1515	0.1515	0.1515	0.1515
-0.4065	-0.4065	-0.4065	-0.4065	-0.4065	-0.4065	-0.4065
-0.0083	-0.0083	-0.0083	-0.0083	-0.0083	-0.0083	-0.0083
0.8969	0.8969	0.8969	0.8969	0.8969	0.8969	0.8969
-0.0841	-0.0841	-0.0841	-0.0841	-0.0841	-0.0841	-0.0841
0.0163	0.0163	0.0163	0.0163	0.0163	0.0163	0.0163

Column 8

0.1515
-0.4065

-0.0083
 0.8969
 -0.0841
 0.0163

Mpv =

Columns 1 through 7

78.6269	78.6269	78.6269	78.6269	78.6269	78.6269	78.6269
3.4660	3.4660	3.4660	3.4660	3.4660	3.4660	3.4660
-75.0177	-75.0177	-75.0177	-75.0177	-75.0177	-75.0177	-75.0177
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000

Column 8

78.6269
 3.4660
 -75.0177
 -0.0000
 -0.0000
 0.0000
 0.0000
 -0.0000

M_perm =

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

comb_pv =

Columns 1 through 7

0	0	0	0	78.6269	78.6269	78.6269
0	0	3.4660	3.4660	0	0	3.4660
0	-75.0177	0	-75.0177	0	-75.0177	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Column 8

78.6269
 3.4660
 -75.0177
 0
 0
 0
 0
 0

somme_comb =

Columns 1 through 7

0	-75.0177	3.4660	-71.5517	78.6269	3.6092	82.0929
---	----------	--------	----------	---------	--------	---------

Column 8

7.0752

N =

-0.2097	0.3337	-0.0014	0.5209	0.7572	-0.0073
0.2097	-0.3337	0.0014	-0.5209	-0.7572	0.0073
0.4222	0.1837	-0.0017	0.0441	-0.8865	-0.0089
-0.4222	-0.1837	0.0017	-0.0441	0.8865	0.0089
0.2215	-0.3161	0.0013	-0.5038	-0.7728	0.0068
-0.2215	0.3161	-0.0013	0.5038	0.7728	-0.0068
-0.4087	-0.1157	0.0013	0.0367	0.9045	0.0069
0.4087	0.1157	-0.0013	-0.0367	-0.9045	-0.0069
-0.5272	-0.1804	0.5299	0.3610	0.2676	0.4547
0.5272	0.1804	-0.5299	-0.3610	-0.2676	-0.4547
-0.2256	0.3214	0.0182	0.5255	0.7544	0.0096
0.2256	-0.3214	-0.0182	-0.5255	-0.7544	-0.0096
0.5258	0.1619	-0.5191	-0.3770	-0.2960	-0.4451
-0.5258	-0.1619	0.5191	0.3770	0.2960	0.4451
-0.0307	0.0306	0.4745	0.3708	-0.6899	0.3994
0.0307	-0.0306	-0.4745	-0.3708	0.6899	-0.3994
0.4550	0.1436	-0.5888	-0.4152	-0.0221	-0.5029
-0.4550	-0.1436	0.5888	0.4152	0.0221	0.5029
-0.0007	-0.0115	0.4509	0.2874	-0.7546	0.3802
0.0007	0.0115	-0.4509	-0.2874	0.7546	-0.3802
0.0443	-0.0179	-0.4654	-0.6934	-0.3917	0.3833
-0.0443	0.0179	0.4654	0.6934	0.3917	-0.3833
-0.2449	0.4181	-0.2533	0.2930	0.7590	0.1978
0.2449	-0.4181	0.2533	-0.2930	-0.7590	-0.1978
0.2312	-0.4249	0.5072	0.0590	-0.5832	-0.4064
-0.2312	0.4249	-0.5072	-0.0590	0.5832	0.4064
0.0848	0.0011	-0.4482	-0.6630	-0.4658	0.3681
-0.0848	-0.0011	0.4482	0.6630	0.4658	-0.3681
-0.4072	-0.1724	0.0605	0.0459	0.8928	-0.0401
0.4072	0.1724	-0.0605	-0.0459	-0.8928	0.0401
-0.2134	0.4472	-0.5250	-0.0634	0.5462	0.4202
0.2134	-0.4472	0.5250	0.0634	-0.5462	-0.4202

-0.0874	0.0018	0.4915	0.6957	0.3984	-0.3287
0.0874	-0.0018	-0.4915	-0.6957	-0.3984	0.3287
0.5199	0.1767	-0.5380	-0.3803	-0.2774	-0.4330
-0.5199	-0.1767	0.5380	0.3803	0.2774	0.4330
0.2071	-0.4347	0.5344	0.0774	-0.5717	-0.3869
-0.2071	0.4347	-0.5344	-0.0774	0.5717	0.3869
0.0210	-0.0305	-0.4214	-0.2944	0.7369	-0.4375
-0.0210	0.0305	0.4214	0.2944	-0.7369	0.4375
0.0207	-0.0284	0.4345	-0.3121	0.7366	0.4125
-0.0207	0.0284	-0.4345	0.3121	-0.7366	-0.4125
-0.2051	0.3267	0.0175	0.4984	0.7761	0.0107
0.2051	-0.3267	-0.0175	-0.4984	-0.7761	-0.0107
-0.0109	0.0129	-0.4267	0.2831	-0.7574	-0.4048
0.0109	-0.0129	0.4267	-0.2831	0.7574	0.4048
0.5410	0.1893	0.5331	-0.3306	-0.1752	0.4972
-0.5410	-0.1893	-0.5331	0.3306	0.1752	-0.4972
-0.1655	-0.0274	-0.5170	0.3571	-0.5818	-0.4884
0.1655	0.0274	0.5170	-0.3571	0.5818	0.4884
0.5397	0.1339	0.5016	-0.3812	-0.2726	0.4686
-0.5397	-0.1339	-0.5016	0.3812	0.2726	-0.4686
-0.4997	-0.1332	0.0164	0.6602	-0.5437	-0.0283
0.4997	0.1332	-0.0164	-0.6602	0.5437	0.0283
0.5464	0.1517	-0.0960	-0.6708	0.4664	-0.0429
-0.5464	-0.1517	0.0960	0.6708	-0.4664	0.0429
-0.4980	-0.1356	0.0163	0.6562	-0.5494	-0.0283
0.4980	0.1356	-0.0163	-0.6562	0.5494	0.0283
-0.5159	-0.1398	-0.0111	0.6621	-0.5225	-0.0529
0.5159	0.1398	0.0111	-0.6621	0.5225	0.0529
0.0414	-0.0147	-0.5022	-0.6493	-0.4609	0.3342
-0.0414	0.0147	0.5022	0.6493	0.4609	-0.3342
0.0189	-0.0276	0.4496	-0.2848	0.7474	0.3962
-0.0189	0.0276	-0.4496	0.2848	-0.7474	-0.3962
-0.2368	0.4348	-0.5425	-0.0441	0.5523	0.3919
0.2368	-0.4348	0.5425	0.0441	-0.5523	-0.3919
0.5290	0.1817	0.4586	-0.3953	-0.2230	0.5204
-0.5290	-0.1817	-0.4586	0.3953	0.2230	-0.5204

-0.5001	-0.1335	0.0133	0.6570	-0.5473	-0.0262
0.5001	0.1335	-0.0133	-0.6570	0.5473	0.0262
0.2063	-0.4356	-0.5254	0.0971	-0.5032	0.4786
-0.2063	0.4356	0.5254	-0.0971	0.5032	-0.4786
-0.1744	0.2459	-0.1564	0.6129	0.7010	0.1328
0.1744	-0.2459	0.1564	-0.6129	-0.7010	-0.1328
0.0737	-0.0305	0.4260	-0.6755	-0.4613	-0.3783
-0.0737	0.0305	-0.4260	0.6755	0.4613	0.3783
0.2548	-0.3729	-0.4840	0.0962	-0.5995	0.4394
-0.2548	0.3729	0.4840	-0.0962	0.5995	-0.4394
-0.4218	-0.1263	0.0588	-0.0523	0.8933	-0.0437
0.4218	0.1263	-0.0588	0.0523	-0.8933	0.0437
-0.0363	0.0433	-0.4444	0.7008	0.3914	0.3938
0.0363	-0.0433	0.4444	-0.7008	-0.3914	-0.3938
-0.2716	0.3953	0.5797	-0.0439	0.5223	-0.3990
0.2716	-0.3953	-0.5797	0.0439	-0.5223	0.3990
0.5303	0.1653	-0.5432	-0.3555	-0.2819	-0.4364
-0.5303	-0.1653	0.5432	0.3555	0.2819	0.4364
0.0356	-0.0436	0.4764	-0.6643	-0.4507	-0.3542
-0.0356	0.0436	-0.4764	0.6643	0.4507	0.3542
0.0045	0.0070	-0.4079	-0.3650	0.7203	-0.4260
-0.0045	-0.0070	0.4079	0.3650	-0.7203	0.4260
-0.1028	0.3093	-0.1683	-0.9196	-0.0952	0.1036
0.1028	-0.3093	0.1683	0.9196	0.0952	-0.1036
0.1544	-0.4131	0.0128	0.8953	-0.0500	0.0352
-0.1544	0.4131	-0.0128	-0.8953	0.0500	-0.0352
-0.2362	0.5211	-0.2989	-0.6361	0.3674	0.2089
0.2362	-0.5211	0.2989	0.6361	-0.3674	-0.2089
0.1744	-0.4042	0.0098	0.8921	-0.0940	0.0371
-0.1744	0.4042	-0.0098	-0.8921	0.0940	-0.0371
-0.1778	0.4114	0.0091	-0.8916	0.0620	-0.0179
0.1778	-0.4114	-0.0091	0.8916	-0.0620	0.0179
-0.1876	0.3986	0.5537	-0.1384	0.5803	-0.3787
0.1876	-0.3986	-0.5537	0.1384	-0.5803	0.3787
-0.0138	0.0142	-0.4453	0.3109	-0.7425	-0.3916
0.0138	-0.0142	0.4453	-0.3109	0.7425	0.3916

0.0752	-0.0319	0.4666	-0.7053	-0.3984	-0.3456
-0.0752	0.0319	-0.4666	0.7053	0.3984	0.3456
-0.5598	-0.1452	-0.4709	0.3144	0.2380	-0.5370
0.5598	0.1452	0.4709	-0.3144	-0.2380	0.5370
0.4977	0.1352	-0.0132	-0.6597	0.5459	0.0261
-0.4977	-0.1352	0.0132	0.6597	-0.5459	-0.0261
0.1515	-0.4065	-0.0083	0.8969	-0.0841	0.0163
-0.1515	0.4065	0.0083	-0.8969	0.0841	-0.0163

d =

60.3152
69.5125
78.2642
68.7394
67.4662
58.1324
61.1070
70.9804
80.2740
86.5020
59.2074
68.4813
85.0184
78.5058
79.6608
75.2619
93.1256
89.1596
76.8616
71.4841
73.2401
74.0024
73.0518
85.2553

88.5730
75.4950
70.4642
70.2449
64.4739
73.4366
78.1456
91.0547
70.7234
70.5240
84.7505
78.6556
88.8427
76.0161
74.7344
79.1268
68.1365
77.5464
59.1560
68.6039
76.4414
66.7863
92.1533
92.1147
89.0951
81.0614
87.9657
86.6262
80.2724
75.8713
83.5204
86.6768
80.3210
75.8495
82.7042
78.4048

72.6728
72.4521
67.5351
76.8703
77.4961
90.3014
88.4305
88.3676
80.3792
75.9710
91.4666
85.5780
66.0085
74.5892
76.2142
70.4298
84.1752
77.2898
63.7675
73.4176
73.4602
78.5135
82.1653
88.7033
85.7544
79.3791
77.9520
72.5129
72.1917
77.0833
80.6151
86.0220
82.8607
76.1182
92.2728
104.2941

82.8054
 75.6271
 77.0293
 84.1116
 78.7530
 85.6667
 76.3132
 66.8443
 76.5205
 71.5390
 90.5428
 91.3366
 75.7205
 80.1522
 82.1000
 75.0106

P =

Columns 1 through 7

-12.6403	14.5782	33.0480	-29.0209	14.9476	-12.8709	-24.9728
20.1207	-23.1984	14.3669	-12.6357	-21.3304	18.3710	-7.0775
-0.0829	0.0970	-0.1303	0.1158	0.0866	-0.0733	0.0799
31.4253	-36.2012	3.4527	-3.0283	-33.9815	29.2940	2.2453
45.6677	-52.6356	-69.3850	60.9400	-52.1375	44.9213	55.2731
-0.4498	0.5042	-0.7013	0.6039	0.4491	-0.3993	0.4137

Columns 8 through 14

29.0136	-42.3137	45.6038	-13.3532	15.4547	44.7067	-41.2756
8.2024	-14.4933	15.5999	19.0273	-22.0172	13.7520	-12.7149
-0.0913	42.5443	-45.8368	1.0783	-1.2453	-44.1287	40.7562
-2.6016	28.9860	-31.2246	31.1229	-35.9815	-32.0443	29.5995
-64.2038	21.4758	-23.1570	44.6661	-51.6664	-25.1748	23.2330

-0.4945 36.4965 -39.3358 0.5594 -0.6609 -37.8468 34.9407

Columns 15 through 21

-2.4354 2.3143 42.3770 -40.5626 -0.0441 0.0540 3.2478
 2.4307 -2.3113 13.3622 -12.8089 -0.8946 0.8177 -1.3213
 37.8010 -35.7163 -54.8264 52.4975 34.6546 -32.2334 -34.0862
 29.5356 -27.9026 -38.6576 37.0197 22.0924 -20.5446 -50.7803
 -54.9656 51.9191 -2.0685 1.9632 -58.0043 53.9369 -28.6983
 31.8045 -30.0643 -46.8337 44.8303 29.2128 -27.1855 28.0663

Columns 22 through 28

-3.2680 -17.8838 20.8795 20.4811 -17.4501 5.9853 -5.9533
 1.3200 30.5390 -35.6457 -37.6403 32.0791 0.0710 -0.0857
 34.4417 -18.5092 21.5961 44.9151 -38.2943 -31.5778 31.4811
 51.3132 21.4125 -24.9759 5.2309 -4.4550 -46.7147 46.5750
 28.9786 55.4476 -64.7094 -51.6578 44.0281 -32.8281 32.7085
 -28.3709 14.4425 -16.8641 -35.9952 30.6782 25.9281 -25.8606

Columns 29 through 35

-26.2499 29.9056 -16.6684 19.4305 -6.1768 6.1729 44.0625
 -11.1266 12.6540 34.9411 -40.7168 0.1197 -0.1343 14.9698
 3.9033 -4.4433 -41.0319 47.7969 34.7616 -34.6624 -45.5919
 2.9600 -3.3649 -4.9549 5.7774 49.2028 -49.0591 -32.2241
 57.5614 -65.5650 42.6834 -49.7384 28.1707 -28.1091 -23.5189
 -2.5915 2.9371 32.8325 -38.2586 -23.2543 23.1759 -36.7001

Columns 36 through 42

-40.8868 18.4000 -15.7359 1.5770 -1.6556 1.4165 -1.5973
 -13.9097 -38.6201 33.0408 -2.2883 2.4072 -1.9418 2.1934
 42.3208 47.4725 -40.6301 -31.4932 33.3419 29.6081 -33.6868
 29.9163 6.8766 -5.8807 -22.0033 23.2994 -21.2626 24.1984
 21.8137 -50.7959 43.4594 55.0641 -58.3120 50.1841 -57.1189

34.0533	-34.3775	29.4113	-32.7029	34.6076	28.1004	-31.9868
---------	----------	---------	----------	---------	---------	----------

Columns 43 through 49

-12.1305	14.0783	-0.8267	0.7351	49.8645	-49.8301	-14.7337
19.3211	-22.4163	0.9782	-0.8689	17.4390	-17.4466	-2.4525
1.0372	-1.2010	-32.6099	28.5001	49.1320	-49.1100	-46.0611
29.4885	-34.1822	21.6407	-18.9074	-30.4600	30.4526	31.8120
45.9124	-53.2484	-57.9000	50.5838	-16.1528	16.1283	-51.8407
0.6267	-0.7407	-30.9437	27.0304	45.8146	-45.8084	-43.5173

Columns 50 through 56

13.4206	47.4834	-46.7483	-40.1045	37.9231	45.6418	-47.3495
2.2175	11.7718	-11.6077	-10.6985	10.0985	12.6638	-13.1567
41.9170	44.1206	-43.4487	1.3175	-1.2441	-8.0182	8.3221
-28.9439	-33.5304	33.0261	52.9951	-50.0901	-56.0209	58.1392
47.1582	-23.9917	23.6095	-43.6512	41.2454	38.9436	-40.4304
39.5884	41.2092	-40.5959	-2.2755	2.1383	-3.5882	3.7103

Columns 57 through 63

-39.9921	37.7832	-42.6615	40.4612	3.0127	-2.9901	1.2863
-10.9012	10.2810	-11.5699	10.9551	-1.0762	1.0580	-1.8703
1.3072	-1.2333	-0.9174	0.8711	-36.4984	36.3891	30.3676
52.7080	-49.7742	54.7562	-51.9100	-47.1871	47.0494	-19.2340
-44.1386	41.6689	-43.2183	40.9586	-33.5069	33.3876	50.4766
-2.2827	2.1432	-4.3842	4.1440	24.2824	-24.2218	26.7546

Columns 64 through 70

-1.4493	-18.3455	21.3850	46.7886	-46.7419	-40.1900	38.0033
2.1123	33.6931	-39.2647	16.0648	-16.0683	-10.7341	10.1321
-34.5548	-42.0470	48.9812	40.5576	-40.5274	1.0702	-1.0103
21.8927	-3.4141	3.9828	-34.9516	34.9321	52.8112	-49.9153
-57.4579	42.8013	-49.8776	-19.7257	19.6940	-43.9969	41.5714

-30.4589 30.3695 -35.3910 46.0116 -45.9920 -2.1146 1.9862

Columns 71 through 77

18.8712 -17.6456 -11.5043 13.0109 5.6204 -5.1817 21.4512
 -39.8456 37.2708 16.2245 -18.3451 -2.3351 2.1438 -31.3928
 -48.0484 44.9624 -10.3249 11.6657 32.4661 -30.0055 -40.7390
 8.8836 -8.3076 40.4644 -45.7077 -51.4742 47.5801 8.0985
 -46.0330 43.0580 46.2685 -52.2892 -35.1653 32.4845 -50.4715
 43.7693 -40.9695 8.7632 -9.9138 -28.8326 26.6360 36.9755

Columns 78 through 84

-19.6869 -26.8955 30.9714 -2.6600 2.8566 -22.3091 24.0946
 28.8155 -8.0634 9.2650 3.1750 -3.4084 32.4735 -35.0676
 37.4143 3.7496 -4.3144 -32.6459 34.8884 47.6394 -51.4208
 -7.4322 -3.3311 3.8398 51.4846 -55.0134 -3.6064 3.8983
 46.3339 56.9644 -65.5855 28.7460 -30.7377 42.9054 -46.3308
 -33.9692 -2.7945 3.2025 28.9220 -30.9209 -32.7951 35.3857

Columns 85 through 91

45.4773 -42.0899 2.7854 -2.5784 0.3346 -0.3432 -8.2839
 14.1697 -13.1327 -3.4072 3.1555 0.5005 -0.5498 24.9269
 -46.5810 43.1260 37.1336 -34.5463 -29.4515 31.4443 -13.5664
 -30.4849 28.2281 -51.7746 48.1742 -26.3506 28.1379 -74.1350
 -24.1847 22.3731 -35.1423 32.6778 51.9946 -55.5287 -7.6857
 -37.4278 34.6380 -27.6162 25.6804 -30.7588 32.8251 8.3492

Columns 92 through 98

8.8524 12.8030 -11.7502 -21.7933 24.6408 14.4464 -13.1835
 -26.6107 -34.2368 31.4419 48.0861 -54.3534 -33.4739 30.5634
 14.4758 1.0651 -0.9773 -27.5866 31.1744 0.8158 -0.7439
 79.1025 74.1822 -68.1523 -58.6964 66.3328 73.8695 -67.4730
 8.1818 -4.1503 3.7962 33.9008 -38.3270 -7.7941 7.1027

```
-8.9215    2.9099   -2.6861   19.2742  -21.7938    3.0689   -2.8159
```

Columns 99 through 105

```
-13.6935   14.9640  -14.7706   16.0787   -1.0500    0.9326    5.7582
 31.6819  -34.6044   31.3871  -34.1524    1.0725   -0.9537   -2.4484
  0.6998   -0.7626   43.6134  -47.4327  -33.9739   29.7676   35.7009
-68.6811   74.9882  -10.9001   11.8605   23.7249  -20.7817  -53.9655
  4.7705   -5.2268   45.6946  -49.7163  -56.6659   49.6313  -30.4919
 -1.3845    1.4979  -29.8291   32.4287  -29.8888   26.1749  -26.4508
```

Columns 106 through 112

```
-5.3710  -50.6768   51.1337   37.6916  -39.8792   12.4476  -11.3619
  2.2749  -13.1508   13.2508   10.2303  -10.8432  -33.3745   30.4838
-33.3800  -42.6384   43.0129   -1.0003    1.0601   -0.6776    0.6205
 50.4643   28.4667  -28.7105  -49.9509   52.8738   73.6311  -67.2801
 28.4936   21.5412  -21.7475   41.3319  -43.7642   -6.9169    6.3038
 24.7195  -48.6262   49.0385    1.9664   -2.0947    1.3304   -1.2282
```

Capable de generer les efforts desires ?

```
test      = N*D<(d*ones(1,size(D,2)))
% Oui si la matrice contient seulement des "1".
testHP    = (sum(test) == size(test,1))
% Si la ieme colonne de la matrice ne contient que des uns, alors cette
% egalite est verifiee et le ieme torseud dans D peut etre genere
```

```
test =
```

```
 1    1
 1    0
```

1	0
1	1
1	0
1	1
1	1
1	0
1	1
1	0
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	1
1	0
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	1
1	1
1	0
1	1
1	0
1	1
1	1
1	0
1	1
1	0
1	1

1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	0
1	1
1	1
1	0
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	0

1	1
1	1
1	0
1	1
1	1
1	0
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1
1	1
1	0
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	0
1	0
1	1


```
1 0
1 1
```

```
testHP =
```

```
1 0
```

Annexe C

Équation analytique du point d'intersection entre trois sphères.

Soit trois sphères centrées sur trois points d'attaches à la base $\mathbf{b}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$, $i = 1, 2, 3$. La sphère i a le rayon ρ_i . On cherche le point d'intersection des trois sphères noté $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ correspondant à l'endroit où les trois câbles sont reliés. L'expression de la sphère i est l'équivalent du PGI est donnée par

$$\rho_i^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i). \quad (\text{C.1})$$

En soustrayant cette équation pour le câble 2 de cette même expression pour le câble 1, on obtient

$$0 = a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z + k_{12}, \quad (\text{C.2})$$

où

$$a_{12} = -2x_1 + 2x_2, \quad (\text{C.3})$$

$$b_{12} = -2y_1 + 2y_2, \quad (\text{C.4})$$

$$c_{12} = -2z_1 + 2z_2, \quad (\text{C.5})$$

$$k_{12} = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 - \rho_1^2 + \rho_2^2. \quad (\text{C.6})$$

De la même manière, en soustrayant l'équation C.1 pour $i = 3$ à celle pour $i = 1$, on obtient

$$0 = a_{13}x + b_{13}y + c_{13}z + k_{13}, \quad (\text{C.7})$$

où

$$a_{13} = -2x_1 + 2x_3, \quad (\text{C.8})$$

$$b_{13} = -2y_1 + 2y_3, \quad (\text{C.9})$$

$$c_{13} = -2z_1 + 2z_3, \quad (\text{C.10})$$

$$k_{13} = x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + z_1^2 - z_3^2 - \rho_1^2 + \rho_3^2. \quad (\text{C.11})$$

En combinant l'équation C.2 à l'équation C.7, on peut obtenir une expression pour y en fonction de z .

$$y = d_y z + l_y \quad (\text{C.12})$$

où

$$d_y = \frac{-a_{13}c_{12} + a_{12}c_{13}}{a_{13}b_{12} - a_{12}b_{13}}, \quad (\text{C.13})$$

$$l_y = \frac{-a_{13}k_{12} + a_{12}k_{13}}{a_{13}b_{12} - a_{12}b_{13}}. \quad (\text{C.14})$$

De la même manière, on peut obtenir une expression et une expression pour x en fonction de z :

$$x = d_x z + l_x \quad (\text{C.15})$$

où

$$d_x = \frac{-b_{12}c_{13} + b_{13}c_{12}}{-a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12}}, \quad (\text{C.16})$$

$$l_x = \frac{-b_{12}k_{13} + b_{13}k_{12}}{-a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12}}. \quad (\text{C.17})$$

Par la suite, on peut réintroduire les expressions pour x et y des équations C.12 et C.15 dans une des trois expressions C.1. On obtient ainsi une expression du type

$$0 = az^2 + bz + c, \quad (\text{C.18})$$

où

$$a = d_x^2 + d_y^2 + 1, \quad (\text{C.19})$$

$$b = 2(d_x l_x + d_y l_y - d_x x_i - d_y y_i), \quad (\text{C.20})$$

$$c = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \rho_i^2 + l_x^2 + l_y^2 - 2x_i l_x - 2y_i l_y. \quad (\text{C.21})$$

On peut résoudre pour z . Il peut alors y avoir aucune, une ou deux solutions. Dans la plupart des cas, il y en aura deux, qui correspondront au point d'intersection des trois câbles et à sa réflexion par le plan contenant les trois centres des sphères. Le contexte permettra de choisir la solution correspondant à la situation réelle.