

SERGE MONTAMBAULT

**ANALYSE ET OPTIMISATION
DE PRÉHENSEURS MÉCANIQUES SOUS-ACTIONNÉS**

Thèse
présentée
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

AVRIL 1997

© Serge Montambault, 1997

RÉSUMÉ COURT

Cette thèse présente un modèle d'analyse systématique ainsi qu'une méthodologie applicable au design et à l'optimisation de mécanismes sous-actionnés. Un mécanisme est dit sous-actionné lorsqu'il comporte moins d'actionneurs que de degrés de liberté.

Les mécanismes sous-actionnés sont présentés et leur application au design de mains articulées est discutée. On présente un modèle général d'analyse des mécanismes sous-actionnés qui est appliqué à trois mécanismes de topologie différente pour lesquels une étude complète est effectuée. Des critères de stabilité sont développés et sont appliqués au design de mécanismes.

On développe ensuite un algorithme d'optimisation qui permet d'obtenir des mécanismes stables ayant les caractéristiques nécessaires à la réalisation des tâches visées. Finalement, on démontre qu'il est possible de construire, pour une topologie particulière, une infinité de mécanismes ayant le même comportement statique. On démontre aussi qu'il est possible de construire des mécanismes de topologie différente qui ont des comportements statiques similaires.

Serge Montambault

Clément Gosselin

RÉSUMÉ

Cette thèse présente un modèle d'analyse systématique ainsi qu'une méthodologie applicable au design et à l'optimisation de mécanismes sous-actionnés. Un mécanisme est dit sous-actionné lorsqu'il comporte moins d'actionneurs que de degrés de liberté. En effet, le remplacement de certains actionneurs par des éléments passifs (éléments élastiques) permet d'obtenir des mécanismes capables de saisir un objet tout en s'adaptant à la forme de ce dernier.

Les mécanismes sous-actionnés sont présentés et leur application au design de mains articulées est discutée. Jusqu'à présent, ces mécanismes ont été utilisés de façon plutôt intuitive. En effet, aucune étude systématique basée sur les équations régissant le comportement de ces mécanismes n'a été trouvée dans la littérature sur le sujet.

On présente d'abord la modélisation cinématique des mécanismes sous-actionnés. Ce modèle général permet d'exprimer les vitesses cartésiennes des points de contact entre les phalanges et l'objet à saisir en fonction des vitesses articulaires des liaisons actionnées (motorisées et actionnées à l'aide d'éléments passifs). La matrice Jacobienne résultante est ensuite utilisée pour la modélisation statique des mécanismes. On peut donc exprimer les efforts appliqués sur l'objet en fonction des efforts générés aux moteurs et aux éléments passifs. Les modélisations cinématique et statique sont appliquées à trois mécanismes de topologie différente pour lesquels une étude complète est effectuée.

Des critères de stabilité sont développés suite aux différentes situations d'instabilité

rencontrées lors de l'utilisation de mécanismes sous-actionnés dans les préhenseurs. Ces critères de stabilité sont utilisés pour le design de mécanismes stables.

On développe ensuite un algorithme d'optimisation qui permet d'imposer des contraintes liées à la stabilité des prises et de définir des objectifs liés à la spécificité des tâches à accomplir. On obtient alors des mécanismes stables ayant les caractéristiques nécessaires à la réalisation des tâches visées.

Finalement, une méthodologie permettant la génération de mécanismes homologues est développée. On démontre qu'il est possible de construire, pour une topologie particulière, une infinité de mécanismes ayant le même comportement statique. On démontre aussi qu'il est possible de construire des mécanismes de topologie différente qui ont des comportements statiques similaires.

Serge Montambault

Clément Gosselin

AVANT-PROPOS

Je tiens premièrement à remercier mon directeur de thèse, Clément Gosselin, pour sa rigueur et sa grande disponibilité.

Je remercie également les professeurs Michel Guillot et Alain Curodeau, du département de génie mécanique de l'Université Laval, ainsi que le professeur Jorge Angeles, du département de génie mécanique de l'Université McGill, pour avoir participé à l'évaluation de cette thèse.

Des remerciements à mes collègues du laboratoire de robotique qui ont su mettre de la couleur sur des paysages parfois gris (quel poète ...).

Je tiens également à remercier le Conseil National de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada, le Fonds pour la Formation des Chercheurs et l'aide à la Recherche du Québec et l'Institut de Recherche en Santé et en Sécurité du Travail du Québec pour leur soutien financier.

Enfin, un merci particulier à mes parents, Micheline et Valmont, ma soeur et mon frère, Lyne et Alain et ma compagne, Julie; cette thèse vous est dédiée.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé court	i
Résumé	ii
Avant-propos	iv
Table des matières	v
Liste des Tableaux	viii
Liste des Figures	x
Liste des Principales Variables	xv
1 Introduction	1
1.1 Généralités	1
1.2 Contexte et pertinence du projet	4
1.3 Plan de la thèse	7
2 Systèmes mécaniques sous-actionnés	8
2.1 Définition du sous-actionnement(SA)	8
2.2 Exemple de mécanisme sous-actionné	10
2.3 Formulation des problèmes liés au sous-actionnement	12
2.4 Applications du sous-actionnement (design de préhenseurs)	14
3 Analyse de mécanismes sous-actionnés	15
3.1 Définitions et hypothèses	15

3.2	Types de prises étudiées et séquences de saisie	17
3.3	Modélisation cinématique	18
3.4	Modélisation statique	23
3.5	Modélisation de mécanismes	25
3.5.1	Mécanisme 1: 2 degrés de liberté (rotoïde, 5 barres)	25
3.5.2	Mécanisme 2: 2 degrés de liberté (prismatique, 5 barres)	32
3.5.3	Mécanisme 3: 2 degrés de liberté (rotoïde, 7 barres)	38
3.6	Utilisation du modèle cinématique	45
3.6.1	Imposition des efforts articulaires	47
3.6.2	Imposition des efforts cartésiens	51
3.6.3	Cas mixte cartésien-articulaire	52
3.6.4	Design	54
3.7	Conclusion sur l'analyse de mécanismes	55
4	Étude du comportement des préhenseurs sous-actionnés	56
4.1	Considérations générales	56
4.1.1	L'étape de contact de la prise ferme	57
4.1.2	L'étape de serrage de la prise ferme	59
4.1.3	L'étape de serrage de la prise de pincée	61
4.2	Algorithme de Newton-Gauss	66
4.3	Analyse des mécanismes	67
4.3.1	Mécanisme 1: 2 degrés de liberté (rotoïde, 5 barres)	68
4.3.1.1	Développement des équations statiques	68
4.3.1.2	Hypothèses et généralités	73
4.3.1.3	Imposition des conditions de stabilité	77
4.3.1.4	Génération d'un mécanisme stable	82
4.3.2	Mécanisme 2: 2 degrés de liberté (prismatique, 5 barres)	88
4.3.2.1	Développement des équations statiques	88
4.3.2.2	Hypothèses et généralités	93
4.3.2.3	Imposition des conditions de stabilité	97
4.3.2.4	Génération d'un mécanisme stable	98
4.3.3	Mécanisme 3: 2 degrés de liberté (rotoïde, 7 barres)	104
4.3.3.1	Développement des équations statiques	104
4.3.3.2	Hypothèses et généralités	108

4.3.3.3	Imposition des conditions de stabilité	112
4.3.3.4	Génération d'un mécanisme stable	114
4.4	Conclusion sur l'étude du comportement des préhenseurs sous-actionnés	119
5	Optimisation de mécanismes sous-actionnés	122
5.1	Introduction sur l'optimisation	122
5.1.1	Choix des variables	124
5.1.2	Définition de la fonction objectif	125
5.1.3	Détermination des contraintes	125
5.1.4	Choix de la méthode d'optimisation	126
5.2	Algorithme de décomposition orthogonale	128
5.3	Optimisation de mécanismes	130
5.3.1	Mécanisme 1: 2 degrés de liberté (rotoïde, 5 barres)	130
5.3.2	Mécanisme 2: 2 degrés de liberté (prismatique, 5 barres)	140
5.3.3	Mécanisme 3: 2 degrés de liberté (rotoïde, 7 barres)	146
5.3.3.1	Mécanismes équivalents	164
5.4	Comparaison des mécanismes	176
5.5	Conclusion sur l'optimisation	180
6	Conclusion	181
6.1	Contributions de la thèse	181
6.2	Développements futurs	183
	Bibliographie	186
A	Modélisation de mécanismes à 3 degrés de liberté	195
A.1	Mécanisme 4: 3 degrés de liberté (rotoïde, 8 barres)	195
A.2	Mécanisme 5: 3 degrés de liberté (rotoïde, 10 barres)	204
B	Algorithme de décomposition orthogonale	216
C	Algorithme de décomposition en valeurs singulières	220

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Valeurs des variables pour les mécanismes EST1 et MEC11.	86
4.2	Performances des mécanismes EST1 et MEC11 et objectifs visés.	86
4.3	Valeurs des variables pour les mécanismes EST2 et MEC21.	102
4.4	Performances des mécanismes EST2 et MEC21 et objectifs visés.	102
4.5	Valeurs des variables pour les mécanismes EST3 et MEC31.	118
4.6	Performances des mécanismes EST3 et MEC31 et objectifs visés.	118
5.1	Valeurs des variables pour les mécanismes MEC12 et OPT1.	136
5.2	Comparaison des performances des mécanismes MEC12 et OPT1.	137
5.3	Performances du mécanisme OPT1 et contraintes imposées.	139
5.4	Performances du mécanisme OPT1 et objectifs visés.	139
5.5	Valeurs des variables pour les mécanismes MEC22 et OPT2.	144
5.6	Comparaison des performances des mécanismes MEC22 et OPT2.	144
5.7	Performances du mécanisme OPT2 et contraintes imposées.	145
5.8	Performances du mécanisme OPT2 et objectifs visés.	146
5.9	Valeurs des variables pour les mécanismes MEC32, OPT31 et OPT32.	151

5.10 Performances des mécanismes optimaux.	154
5.11 Performances du mécanisme OPT31 et contraintes imposées.	154
5.12 Performances du mécanisme OPT31 et objectifs visés.	155
5.13 Performances du mécanisme OPT32 et contraintes imposées.	156
5.14 Performances du mécanisme OPT32 et objectifs visés.	158
5.15 Mécanismes issus de la séquence d'optimisation.	159
5.16 Performances du mécanisme OPT33 et contraintes imposées.	161
5.17 Performances du mécanisme OPT33 et objectifs visés.	163
5.18 Valeurs des variables pour les mécanismes OPT2 et EMUL2.	177
5.19 Résultats des émulations.	178
5.20 Valeurs des variables pour les différents mécanismes.	179

LISTE DES FIGURES

1.1	<i>MANUS COLOBI</i> : une main articulée robuste.	3
1.2	Système de retour passif des phalanges.	4
2.1	Mécanisme sous-actionné à deux degrés de liberté.	10
2.2	Préhenseur plan à quatre degrés de liberté.	11
2.3	Prises étudiées.	11
3.1	Points d'application des forces lors d'une saisie.	18
3.2	Paramétrisation du mécanisme 1.	26
3.3	Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 1). . .	30
3.4	Paramétrisation du mécanisme 2.	33
3.5	Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 2). . .	36
3.6	Paramétrisation du mécanisme 3.	39
3.7	Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 3). . .	43
3.8	Configurations utilisées pour les prises.	47
3.9	Efforts cartésiens en fonction du couple à l'actionneur.	50
3.10	Efforts aux actionneurs en fonction de la force distale.	52

3.11	Force distale en fonction du couple au moteur.	53
3.12	Effort à l'actionneur passif en fonction du couple au moteur.	54
4.1	Configurations pertinentes à l'étape de contact de la prise ferme.	57
4.2	Graphe général de la force proximale en fonction de l'orientation de la phalange distale pour la période de contact de la prise ferme.	58
4.3	Graphe général des forces cartésiennes en fonction du couple au moteur pour la période de serrage de la prise ferme.	60
4.4	Instabilité durant la période de serrage de la prise ferme.	61
4.5	Instabilité durant la période de serrage de la prise de pincée.	62
4.6	Diagramme de Corps Libres de la phalange distale du mécanisme 1.	63
4.7	Graphe général de l'effort à la butée mécanique en fonction du couple au moteur pour la prise de pincée.	65
4.8	Diagrammes de Corps Libres des membrures du mécanisme 1.	69
4.9	Diagramme de Corps Libres de l'ensemble proximal-distal (étape de con- tact de la prise ferme, $g_1 = 0$).	71
4.10	Mécanisme 1 en configurations extrêmes.	75
4.11	Configurations étudiées pour le mécanisme 1.	76
4.12	Séries de configurations étudiées pour la période de contact de la prise ferme du mécanisme 1.	78
4.13	Mécanisme EST1 en configurations extrêmes.	83
4.14	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (EST1).	83
4.15	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (EST1).	84
4.16	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (EST1).	85
4.17	Mécanisme MEC11 en configurations extrêmes.	85
4.18	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC11).	87

4.19	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC11).	87
4.20	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC11).	88
4.21	Diagrammes de Corps Libres des membrures du mécanisme 2.	89
4.22	Mécanisme 2 en configurations extrêmes.	94
4.23	Configurations étudiées pour le mécanisme 2.	95
4.24	Séries de configurations étudiées pour la période de contact de la prise ferme pour le mécanisme 2.	96
4.25	Mécanisme EST2 en configurations extrêmes.	99
4.26	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (EST2).	100
4.27	Forces proximale et distale en fonction de la force au moteur (EST2).	100
4.28	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (EST2).	101
4.29	Mécanisme MEC21 en configurations extrêmes.	102
4.30	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC21).	103
4.31	Forces proximale et distale en fonction de la force au moteur (MEC21).	103
4.32	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC21).	104
4.33	Diagrammes de Corps Libres des membrures du mécanisme 3.	106
4.34	Mécanisme 3 en configurations extrêmes.	109
4.35	Configurations étudiées pour la prise de pincée (mécanisme 3).	110
4.36	Configurations étudiées pour la période de serrage de la prise ferme (mécanisme 3).	111
4.37	Configurations étudiées pour la période de contact de la prise ferme (mécanisme 3).	112
4.38	Mécanisme EST3 en configurations extrêmes.	114
4.39	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (EST3).	115
4.40	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (EST3).	116

4.41	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (EST3).	117
4.42	Mécanisme MEC31 en configurations extrêmes.	117
4.43	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC31).	119
4.44	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC31).	120
4.45	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC31).	121
5.1	Nouvel estimé initial du mécanisme 1.	131
5.2	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC12).	131
5.3	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC12).	132
5.4	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC12).	132
5.5	Mécanisme OPT1 en configurations extrêmes.	137
5.6	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT1).	138
5.7	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT1).	138
5.8	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT1).	139
5.9	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC22).	140
5.10	Forces proximale et distale en fonction de la force au moteur (MEC22).	141
5.11	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC22).	141
5.12	Mécanisme OPT2 en configurations extrêmes.	143
5.13	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT2).	144
5.14	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT2).	145
5.15	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT2).	146
5.16	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC32).	147
5.17	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC32).	148
5.18	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC32).	149
5.19	Mécanisme OPT31 en configurations extrêmes.	150

5.20	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT31).	151
5.21	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT31).	152
5.22	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT31).	153
5.23	Mécanisme OPT32 en configurations extrêmes.	155
5.24	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT32).	156
5.25	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT32).	157
5.26	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT32).	158
5.27	Mécanisme OPT33 en configurations extrêmes.	160
5.28	Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT33).	161
5.29	Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT33).	162
5.30	Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT33).	163
5.31	Modélisation des mécanismes équivalents.	165
5.32	Modélisation de la phalange proximale du mécanisme 3.	166
5.33	Génération de mécanismes équivalents.	172
5.34	Longueurs l_1 et l_5 des mécanismes équivalents.	173
5.35	Mécanismes homologues générés avec $\lambda > 1$.	175
5.36	Mécanisme EMUL2.	177
5.37	Comparaison des mécanismes OPT1 et EMUL3.	179
A.1	Paramétrisation du mécanisme 4.	196
A.2	Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 4).	201
A.3	Paramétrisation du mécanisme 5.	205
A.4	Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 5).	211

LISTE DES PRINCIPALES VARIABLES

- g_1 : Force appliquée par la phalange distale
- g_2 : Force appliquée par la phalange proximale
- f_m : Effort à l'actionneur
- f_p : Effort à l'actionneur passif
- f_{po} : Effort initial à l'actionneur passif
- k : Raideur de l'actionneur passif

- Les lettres minuscules en caractères gras représentent des vecteurs.
- Les lettres majuscules en caractères gras représentent des matrices.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Généralités

Les robots sont souvent implantés en industrie afin d'accroître la productivité. Ils sont notamment utilisés dans les tâches associées à la soudure, à la peinture, à l'assemblage, au positionnement (*pick and place*) et à l'inspection. Un robot peut travailler rapidement sans commettre d'erreurs causées par l'inattention ou la fatigue. De plus, son apprentissage pour accomplir une nouvelle tâche est très rapide: il suffit de le reprogrammer. La robotisation permet donc de produire plus et à moindre coût.

Les robots sont aussi utilisés pour accomplir des tâches présentant certains dangers pour l'opérateur. Ces dangers peuvent être liés à la tâche elle-même comme lors d'un travail à proximité d'un arbre tournant à grande vitesse, près d'une scie circulaire ou durant la manipulation de composants sous tension (Lessard *et al.* 1992). Le danger peut aussi être lié au milieu dans lequel les tâches sont effectuées tel un milieu radioactif ou lors d'un travail dans l'espace, dans les mines ou sous l'eau.

Depuis quelques années, beaucoup d'argent et d'énergie ont été investis dans les domaines de la téléopération et de la miniaturisation des robots. La technologie de téléopération permet à un opérateur d'effectuer des tâches en toute sécurité en l'éloignant de la source de danger (Jacobsen *et al.* 1990; 1991; Oomichi et Okino 1992; Engler et Groover 1989). On utilise aussi de plus en plus cette technologie pour l'assistance en chirurgie (Russell *et al.* 1995). Pour ce qui est de la miniaturisation des composantes, elle a permis le développement d'une forme de manipulateur qui suscite de plus en plus d'intérêt, les préhenseurs. En effet, plusieurs pinces et mains articulées ont été développés dans le but d'accomplir des tâches industrielles (Mason et Salisbury 1985; Venkataraman et Iberall 1990; Cutkosky 1985; 1989; Chen 1982; Bonivento *et al.* 1991; Melchiorri et Vassura 1992; Doll et Schneebeli 1988; Jau 1992; Boissonnat *et al.* 1988; Kerr et Roth 1986; Lian *et al.* 1983; Reynaerts et Van Brussel 1993).

Le design d'une main articulée représente un défi de taille. En effet, le mouvement de la main humaine implique 35 muscles et 47 articulations (Tubiana et Thomine 1990). Un total de 19 os, 17 articulations et 19 muscles siègent entièrement dans la main, sans parler des nombreux tendons, ligaments et organes de sensibilité. L'espace occupé par ces composantes est minimal et il serait optimiste, avec la technologie actuelle, d'envisager un système de commande dont les performances s'approcheraient de celles du cerveau humain.

Malgré la complexité de la main humaine qui peut sembler difficile à imiter, plusieurs mains articulées performantes ont été développées. Parmi celles-ci, on retrouve la main Utah/MIT (Jacobsen *et al.* 1984; 1986), la main Stanford/JPL (Salisbury et Craig 1982), la main développée par Okada (Okada 1979; 1982), la main UPenn (Ulrich et Kumar 1988; Ulrich *et al.* 1988), la main USC/Belgrad (Tomovic et Boni 1962; Bekey *et al.* 1990) et la main GRASPAR (Crisman *et al.* 1996), pour n'en nommer que quelques unes. Ces mains articulées possèdent une grande dextérité due à leurs nombreux degrés de liberté. Elles permettent de saisir et même de manipuler des objets de forme complexe et de dimension variable. La description de plusieurs de ces prototypes de main articulée a déjà été faite dans (Montambault 1992; Guo *et al.* 1992a; Grupen *et al.* 1989; Ichiro 1982).

Un autre exemple de préhenseur est *Manus Colobi* (Montambault 1992; Gosselin *et al.* 1993; Gosselin 1992), une main articulée robuste qui a été développée au

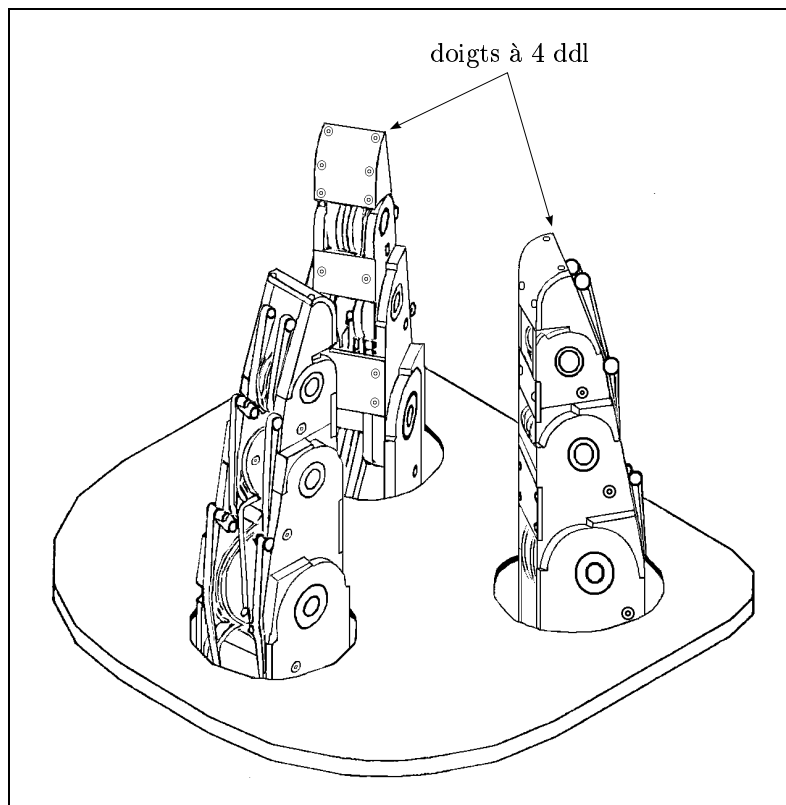


Figure 1.1: *MANUS COLOBI*: une main articulée robuste.

département de génie mécanique de l'Université Laval (Figure 1.1). Elle comporte dix degrés de liberté et est actionnée à l'aide de tendons. Les trois doigts et la paume ont été développés de façon à simplifier le design sans pour autant limiter sa dextérité. Deux des doigts ont un degré de liberté supplémentaire leur permettant une rotation selon un axe perpendiculaire à la paume. Cette caractéristique permet d'atteindre les configurations nécessaires à l'accomplissement des tâches visées.

Dix actionneurs sont utilisés pour le mouvement de fermeture des doigts tandis qu'un système de retour passif est utilisé pour ramener les doigts en position initiale (Figure 1.2). Ce système permet l'élimination d'actionneurs supplémentaires normalement nécessaires lorsque des tendons sont utilisés pour la transmission des efforts. En effet, chaque doigt de la main Stanford/JPL utilise $n + 1$ actionneurs pour contrôler ses n degrés de liberté. Dans la main Utah/MIT, deux actionneurs sont utilisés pour chaque degré de liberté (fermeture et ouverture des doigts), soit $2n$ actionneurs en tout, alors que *Manus Colobi* utilise n actionneurs seulement.

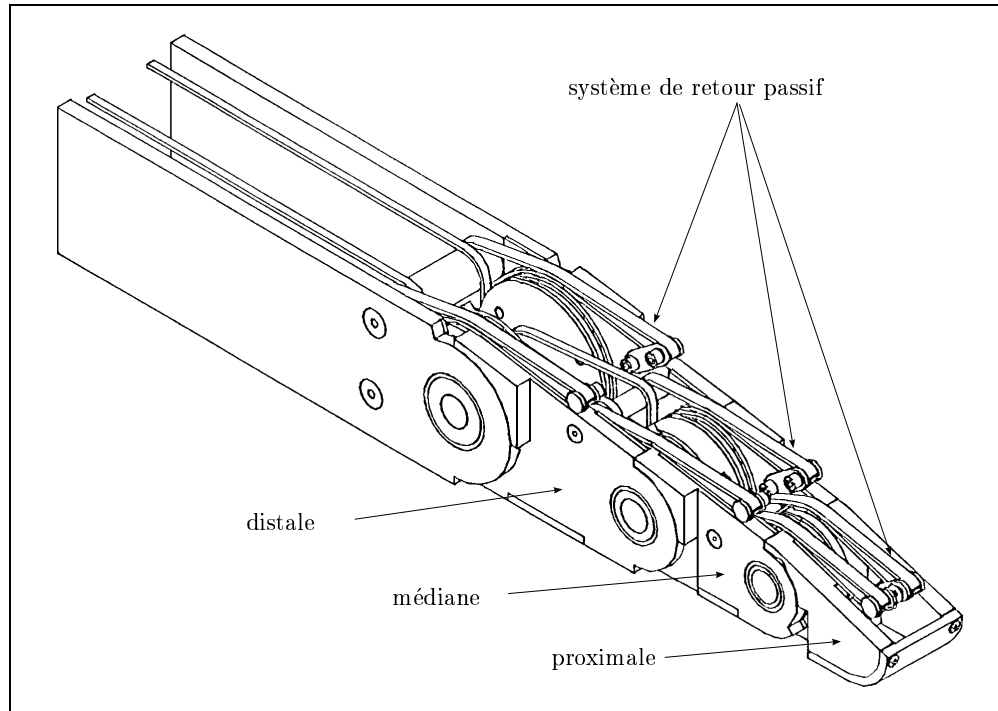


Figure 1.2: Système de retour passif des phalanges.

Le design de *Manus Colobi* permet l'élimination de quelques actionneurs supplémentaires en éliminant l'annulaire et l'auriculaire, les deux doigts souvent considérés comme les moins importants. En effet, leur rôle est surtout de permettre l'application d'une force de serrage plus importante et d'offrir une plus grande stabilité des prises. La reconfiguration des trois autres doigts permet toutefois de compenser l'absence des deux doigts éliminés. Les deux degrés de liberté ajoutés (rotation autour de l'axe perpendiculaire à la paume) permettent de remplir les fonctions du doigt auquel on attribue 50% de la fonction globale de la main, soit le pouce (Pagé 1994). On lui attribue cette importance en raison de sa mobilité, de sa force, des relations privilégiées et irremplaçables qu'il entretient avec les autres doigts lui permettant de s'opposer à chacun d'entre eux et à la paume.

1.2 Contexte et pertinence du projet

Malgré le nombre réduit de doigts et la présence d'un système de retour passif des doigts qui permet de simplifier le design, dix actionneurs sont nécessaires pour faire fonctionner

Manus Colobi. Ces actionneurs représentent une contribution majeure au poids de la main et au volume de l'avant-bras. Comme la main articulée doit éventuellement être greffée à un robot dont la charge utile est limitée, il est impératif de minimiser le poids de la main. De plus, la commande et la coordination de dix actionneurs représentent un défi considérable compte tenu que la main doit oeuvrer dans un environnement non-structuré et que la commande est faite en temps réel.

Pour ces raisons, la présence de plusieurs actionneurs représente un inconvénient majeur dans la plupart des mains existantes. L'objectif est donc de réduire le nombre d'actionneurs sans toutefois réduire le nombre de degrés de liberté afin d'éviter de réduire la dextérité de la main articulée à celle d'une simple pince. En effet, les pinces sont suffisantes pour effectuer des tâches répétitives dans des environnements structurés, mais des milieux hostiles dictent souvent des tâches complexes qui nécessitent l'utilisation de mains articulées à grande dextérité. Ces dernières permettent notamment une plus grande stabilité des prises due aux nombreux points de contact avec l'objet. De plus, elles permettent une plus grande diversité de prises.

Plusieurs auteurs ont développé des mains articulées dans lesquelles on retrouve moins d'actionneurs que de degrés de liberté. Ces mains permettent d'effectuer des tâches complexes tout en étant plus légères et compactes. Il est donc possible de réduire le nombre d'actionneurs sans réduire le nombre de degrés de liberté en utilisant des éléments passifs. Ces derniers permettent de construire des préhenseurs qui reproduisent le comportement global de la main humaine sans avoir le contrôle sur chaque articulation. Tout comme la main humaine, ces préhenseurs permettent d'effectuer des tâches complexes. Cependant, tout ceci est valide à la condition de s'intéresser uniquement à la préhension et non à la manipulation d'objets.

Certaines de ces mains utilisent des mécanismes à barres comme organes de transmission (Bartholet 1992; Crowder et Whatley 1989; Crowder 1991; Caldwell et Lavest 1991; Itoh 1975) tandis que d'autres auteurs ont prouvé que cette simplification est aussi possible lorsque la transmission des efforts est faite par tendons (Bekey *et al.* 1990; Tomovic et Boni 1962; Crisman *et al.* 1996; Graham 1993; Rakic 1989; Erb 1992; Mullen 1972; Hirose et Umetami 1978; Rovetta 1979; 1981; De Sam Lazaro 1990). Dans la plupart des mains articulées possédant moins d'actionneurs que de degrés de liberté,

la transmission des efforts est faite par tendon. En effet, ce schème d'actionnement permet la construction de préhenseurs très compacts puisqu'un seul tendon est nécessaire pour actionner les n degrés de liberté du doigt.

Les mécanismes à barres permettent pour leur part de générer des efforts plus importants, mais leur contribution au poids et au volume du préhenseur est non-négligeable. Dans (Bartholet 1992), la main décrite comprend trois doigts à deux phalanges. Un seul actionneur est nécessaire pour le mouvement des deux degrés de liberté associés à chaque doigt. De plus, chaque doigt est muni d'un mécanisme parallèle permettant à la phalange distale de demeurer en tout temps perpendiculaire à la paume lorsqu'aucun contact n'est établi avec la phalange proximale. Cette caractéristique permet au préhenseur de pouvoir se comporter comme une pince, en cas de besoin.

La main décrite dans (Crowder et Whatley 1989; Crowder 1991) est aussi mue par mécanismes à barres. Elle comprend quatre doigts à deux degrés de liberté et un pouce à un degré de liberté. On retrouve un actionneur par doigt, qui permet aux trois phalanges de bouger comme un mécanisme à deux degrés de liberté. En effet, le mouvement de la phalange distale est couplé de façon mécanique au mouvement de la phalange médiane.

Une autre façon de réduire le nombre d'actionneurs est donc de coupler le mouvement des phalanges. Ce principe est notamment appliqué dans le développement de prothèses (Zhang *et al.* 1992; Guo *et al.* 1990; 1992b; Shirkhodaie et Soni 1988; Leaver et McCarthy 1987; Ali *et al.* 1993). Ce schème d'actionnement présente toutefois le désavantage de limiter le mouvement de fermeture du doigt à une seule trajectoire. Un tel design est restrictif au niveau des formes et dimensions d'objets à saisir puisque la plupart des degrés de liberté sont éliminés. Il n'y a donc pas de possibilité pour ces mécanismes de s'adapter à la forme de l'objet à saisir.

Il est aussi possible de remplacer certains actionneurs par des freins et des embrayages qui permettent de bloquer momentanément certains degrés de liberté (Ulrich et Kumar 1988; Ulrich *et al.* 1988; Lee 1990; Arai et Tachi 1991; Arai *et al.* 1993). Ces composantes permettent de réduire considérablement le poids de la main et minimisent l'espace réservé aux actionneurs. Il faut toutefois tenir compte de ces composantes dans l'algorithme de commande. De plus, les doigts ne s'adaptent pas à la forme de l'objet

puisque la présence de freins à certaines articulations empêche le mouvement simultané des phalanges.

1.3 Plan de la thèse

La thèse comporte cinq chapitres. Le premier chapitre présente une revue des différentes réalisations en matière de développement de mains articulées. On y présente les prototypes existants et on soulève le problème rencontré dans la plupart des designs, c'est-à-dire le nombre élevé d'actionneurs. Au deuxième chapitre, on définit la notion de sous-actionnement et on présente un exemple de mécanisme sous-actionné. On définit la problématique liée à l'utilisation du sous-actionnement et on donne des exemples d'application de ce principe. Le troisième chapitre présente une méthode générale permettant la modélisation cinématique et statique des mécanismes sous-actionnés. Le modèle est appliqué à trois mécanismes de topologie différente. On donne ensuite des exemples d'utilisation du modèle. Le quatrième chapitre permet de définir les différentes étapes de saisie étudiées ainsi que les particularités associées à chacune d'elles. On développe des critères de stabilité des prises et on les applique aux mécanismes présentés au chapitre 3 afin de générer des mécanismes stables pour les trois topologies étudiées. Le dernier chapitre présente l'algorithme d'optimisation utilisé afin d'obtenir un mécanisme répondant à toutes les exigences des tâches visées. On utilise les mécanismes stables développés au quatrième chapitre comme estimés initiaux à l'algorithme. On présente la notion de mécanismes équivalents applicable à la topologie du mécanisme 3. Il est en effet possible de construire une infinité de mécanismes de cette topologie qui présentent exactement les mêmes comportements statiques. On génère ensuite des mécanismes de différentes topologies qui approximent le comportement d'un cas particulier du mécanisme 1. Finalement, la conclusion permet de faire le point sur la contribution de la thèse et sur les développements possibles et les travaux futurs.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS-ACTIONNÉS

2.1 Définition du sous-actionnement (SA)

Un mécanisme est dit sous-actionné lorsqu'il comporte moins d'actionneurs que de degrés de liberté. En effet, le sous-actionnement permet l'utilisation de $n - m$ actionneurs pour contrôler n degrés de liberté où m éléments élastiques passifs remplacent certains des actionneurs. Ceci implique donc que le nombre de variables nécessaires au contrôle du mécanisme est plus petit que le nombre de variables qu'il faut pour spécifier la configuration complète de celui-ci. L'utilisation d'éléments élastiques passifs rend possible l'application du sous-actionnement. Ces éléments sont considérés comme des actionneurs passifs qui ne peuvent être commandés. Ils sont petits, légers, simples et mènent à l'élimination de plusieurs actionneurs, ce qui représente l'avantage principal du sous-actionnement.

Le sous-actionnement peut être implanté dans les mains articulées de façon à développer des doigts qui enveloppent automatiquement les objets, ce qui résulte en une

séquence de saisie stable sans une coordination active de chacun des degrés de liberté. Tel que mentionné au chapitre précédent, cette façon de saisir les objets est en fait plus près de la saisie humaine que l'actionnement indépendant de chacun de degrés de liberté (Tubiana et Thomine 1990; Phillips 1986). En effet, le lecteur pourra expérimenter qu'il est assez difficile de fléchir uniquement la phalange distale d'un doigt (la plus éloignée de la paume) sans préalablement bloquer le mouvement des deux phalanges précédentes.

Des doigts sous-actionnés ont été implantés dans quelques prototypes de mains articulées (Bartholet 1992; Crowder *et al.* 1989; Crowder 1991; Crisman *et al.* 1996; Saliba et De Silva 1991). Le sous-actionnement peut aussi être utilisé de façon globale en actionnant plusieurs doigts à l'aide du même actionneur, comme c'est le cas dans la main USC/Belgrad (Bekey *et al.* 1990; Tomovic et Boni 1962).

Jusqu'à présent, l'utilisation du sous-actionnement a été faite de façon plutôt intuitive. La seule étude du comportement d'un mécanisme sous-actionné appliqué à la préhension a été faite par Shimojima *et al.* (1987). Ces auteurs ont fait une synthèse de mécanismes dans lesquels le sous-actionnement est applicable. Ils ont aussi développé un algorithme qui permet une analyse statique d'un mécanisme sous-actionné. Itoh (1975) a aussi étudié le sous-actionnement en l'appliquant au design d'un préhenseur sous-actionné capable d'éviter les obstacles avant de saisir un objet. Cet obstacle peut être par exemple la surface sur laquelle repose l'objet à saisir.

Le sous-actionnement est aussi appliqué à des mécanismes utilisés pour générer des efforts (Okada 1986; Gosselin 1996). On y retrouve des éléments passifs qui permettent de générer des efforts en réaction à une force extérieure. On retrouve ce genre de mécanisme dans des systèmes robotiques et des systèmes de suspension. On peut aussi associer ce genre de mécanisme aux manipulateurs statiquement équilibrés.

Une dernière application du sous-actionnement est l'utilisation de mécanismes ayant des liaisons libres (Jain et Rodriguez 1993; Mukherjee et Chen 1993). On retrouve certains manipulateurs composés de chaînes sérielles dans lesquelles certaines des liaisons ne comportent ni actionneur, ni élément passif, ni frein ou embrayage. On obtient donc un mécanisme ayant plus de degrés de liberté que d'actionneurs, mais où certaines des liaisons ne pourront jamais être contrôlées. Ces mécanismes sont utilisés notamment dans des applications spatiales (récupération de satellites). De tels mécanismes sont

avantageux du point de vue de leur masse réduite et de leur faible consommation de carburant, caractéristiques importantes pour des opérations dans l'espace.

2.2 Exemple de mécanisme sous-actionné

Un exemple simple de mécanisme plan sous-actionné est présenté à la Figure 2.1. Pour la saisie d'objets, un deuxième mécanisme symétrique au premier est utilisé tel qu'illustré à la Figure 2.2. Les membrures appelées à entrer en contact avec l'objet sont appelées phalanges. La membrure 4 (Figure 2.1) est appelée *phalange proximale* et la membrure 3 est appelée *phalange distale*.

Le doigt consiste en un mécanisme à cinq barres avec un actionneur rotoïde situé à la liaison O_1 et un ressort en torsion (*actionneur passif*) situé à la liaison O_4 . Une butée mécanique, située à la liaison O_4 , permet à la phalange distale de reposer contre la phalange proximale lorsqu'aucun contact n'est établi avec l'objet. Le doigt est alors en position complètement ouverte.

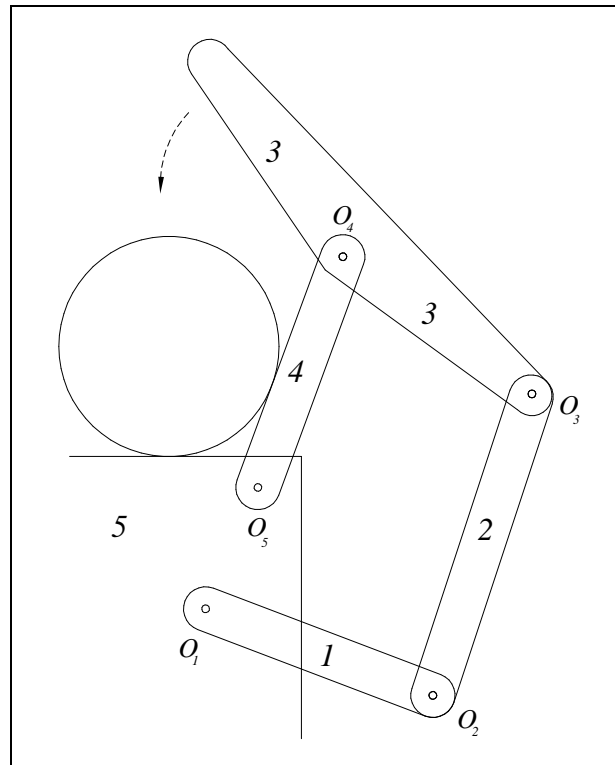


Figure 2.1: Mécanisme sous-actionné à deux degrés de liberté.

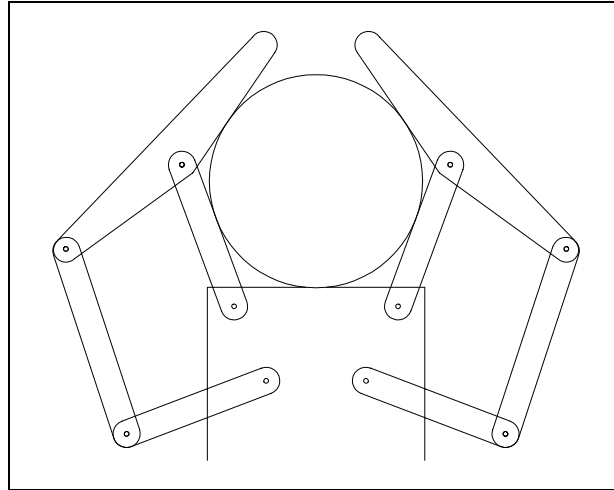
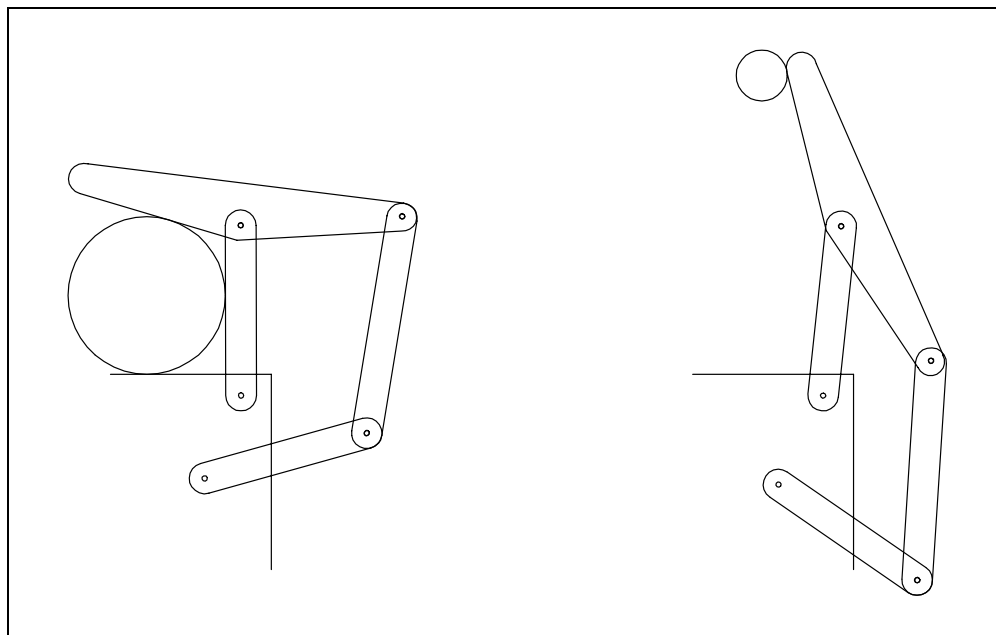


Figure 2.2: Préhenseur plan à quatre degrés de liberté.



(a) Prise ferme.

(b) Prise de pincée.

Figure 2.3: Prises étudiées.

Deux prises principales sont présentées à la Figure 2.3. Lors de la saisie en prise *ferme* (Figure 2.3(a)), le mécanisme se referme sur l'objet et la phalange proximale entre alors en contact avec l'objet. Cette phalange s'immobilise contre l'objet et une première force est appliquée sur celui-ci (*force proximale*). Le moment à l'actionneur passif est ensuite vaincu par le moteur et la phalange distale se met en mouvement vers l'objet. Aussitôt que cette dernière s'immobilise contre l'objet, la prise est complétée et une deuxième force est appliquée sur l'objet (*force distale*).

Une seconde prise, appelée prise de *pincée*, consiste en un contact unique entre le doigt et l'objet, soit à l'aide de la phalange distale. La butée mécanique joue alors un rôle crucial puisque qu'elle empêche alors le doigt d'atteindre une configuration d'hyper-extension. Cette prise est illustrée à la Figure 2.3(b). Le contact est normalement effectué avec le bout des doigts. Plusieurs prototypes existants ont le bout des phalanges distales arrondi afin de permettre cette saisie (Dario et Buttazo 1987).

Cet exemple simple démontre clairement la propriété d'adaptabilité de forme du mécanisme, permettant la saisie d'objets de formes et de dimensions diverses, en contrôlant un seul actionneur.

Dans les prochaines sections, les liaisons libres (O_2 , O_3 et O_5) seront appelées liaisons *dépendantes*. Les liaisons où se trouve un actionneur (actif ou passif) seront appelées les liaisons *actionnées*. Les liaisons où se retrouvent un élément élastique et une butée mécanique seront appelées liaisons *actionnées passivement* et les liaisons où se retrouve un actionneur actif seront appelées liaisons *motorisées*.

2.3 Formulation des problèmes liés au sous-actionnement

Comme il a été démontré dans la section précédente, le sous-actionnement permet la saisie d'un objet sans la commande coordonnée de tous les degrés de liberté. Ceci implique donc l'élimination d'actionneurs et de composantes liées à la transmission des efforts. Dans le design global d'une main articulée, l'élimination de ces composantes représente une réduction notable du poids et des dimensions de la main. Enfin, le fait d'avoir plusieurs actionneurs en moins a un impact majeur au niveau de l'algorithme de commande et du temps de calcul.

Le sous-actionnement n'amène cependant pas que des avantages. En effet, la commande d'un mécanisme sous-actionné est réduite à la commande d'un nombre de degrés de liberté équivalent au nombre de liaisons *motorisées*. Conséquemment, il n'est pas possible de contrôler exactement la configuration du mécanisme puisque celle-ci dépend des coordonnées des liaisons motorisées mais aussi des interactions avec l'objet saisi ou à saisir.

Pour ce qui est de la prise ferme par exemple, lorsque le doigt se met en mouvement, la phalange distale est inactive puisqu'elle repose contre la butée en position complètement ouverte. Le degré de liberté momentanément actionné est donc celui associé à la phalange proximale. Lorsque cette dernière est immobilisée contre l'objet, le degré de liberté actif devient celui associé à la phalange distale. Il n'est donc pas possible de bouger la phalange distale tant que la phalange proximale n'est pas immobilisée contre un objet ou une butée mécanique.

Si l'objet se met à bouger en cours de saisie ou de serrage, les phalanges se mettront alors en mouvement, puisque le mécanisme a cette propriété de pouvoir s'adapter à la forme de l'objet, forme qui varie au point de vue des points d'application des forces. Puisque le nombre de degrés de liberté en mouvement est supérieur au nombre de variables de commande, le mécanisme entre alors dans une phase de changement de configuration qui n'est pas contrôlable à partir des liaisons motorisées (Kaneko et Hayashi 1993). L'issue de cette instabilité peut alors être un retour à la stabilité ou la perte de l'objet. Comme la stabilité de la prise dépend alors de la friction entre les doigts et l'objet et que l'objet est déplacé (considérations dynamiques), il n'est pas possible de garantir une saisie stable et sécuritaire.

Pour ces raisons, le comportement du mécanisme sous-actionné doit être parfaitement connu et prévisible de façon à élaborer des stratégies de saisie qui conduiront à des prises stables.

Une autre particularité des mécanismes sous-actionnés est l'existence d'un point critique sur la phalange distale, notion qui est définie en détail au Chapitre 4. La stabilité de la prise de pincée dépend de la position de ce point. Ce phénomène est aussi directement relié au fait que la configuration du mécanisme n'est pas contrôlable.

Lorsque le design d'un mécanisme sous-actionné est terminé, son comportement pour chaque point d'application d'une force est déterminé et ne peut être modifié. Si le comportement du mécanisme est inadéquat, il est toujours possible modifier la stratégie de saisie, c'est-à-dire de recommencer la prise, mais il est impossible d'en changer les propriétés intrinsèques.

Il est donc important d'analyser correctement les tâches visées et les performances qu'elles exigent afin de développer un mécanisme sous-actionné permettant d'accomplir

avec succès la saisie d'objets. Il est aussi important d'établir une procédure de design adéquate qui permettra de synthétiser des mécanismes dont le comportement sera approprié puisque celui-ci ne pourra être modifié par la suite.

Au meilleur de la connaissance de l'auteur, aucune étude systématique des mécanismes sous-actionnés n'a été faite. On vise donc une formulation mathématique générale permettant d'analyser ces mécanismes et d'intervenir au niveau du design afin de développer des mécanismes ayant un comportement connu et adéquat.

2.4 Applications du sous-actionnement (design de préhenseurs)

Les mécanismes sous-actionnés peuvent être implantés dans des préhenseurs appelés à exécuter des tâches industrielles. Selon la complexité des tâches à accomplir, ces mécanismes auront une importance variable dépendant de la nécessité de minimiser le nombre d'actionneurs. Les préhenseurs développés peuvent être utilisés dans des tâches où les simples pinces ne sont pas adéquates. À l'aide de la téléopération et de préhenseurs très performants, il est même possible d'effectuer des tâches de manipulation (produits hautement toxiques ou produits biologiques dangereux).

Une seconde application, soit le design de prothèses pour les membres supérieurs, est certainement un des domaines où la minimisation du nombre d'actionneurs est le plus crucial (Vinet 1990). En effet, le poids des prothèses doit être minimisé pour le confort du patient. De plus, pour des raisons esthétiques évidentes, les dimensions d'une prothèse doivent être très près des dimensions de la main humaine. Enfin, la commande de ces prothèses fait appel à la technologie myoélectrique, soit la commande des actionneurs par influx nerveux provenant de la contraction de muscles. Il faut donc rendre l'utilisation de ces prothèses la plus simple possible. Les prothèses déjà existantes n'ont souvent qu'un seul degré de liberté qui ne permet que de fermer et d'ouvrir la main. Un mécanisme sous-actionné pourrait permettre d'augmenter la dextérité de telles prothèses de façon significative.

CHAPITRE 3

ANALYSE DE MÉCANISMES SOUS-ACTIONNÉS

3.1 Définitions et hypothèses

Comme il a été mentionné auparavant, l'analyse détaillée des mécanismes sous-actionnés est très importante afin de pouvoir développer les mécanismes adéquats permettant d'effectuer avec succès les tâches visées. Pour ce faire, la modélisation de ces mécanismes doit être faite afin de simuler efficacement leur comportement.

Cette modélisation, élaborée dans les sections à venir, est basée sur quelques hypothèses faites afin de simplifier le problème et de simuler de la façon la plus réaliste possible la saisie d'un objet avec ces mécanismes. On pose donc les hypothèses suivantes:

- On étudie le sous-actionnement applicable aux préhenseurs et non le sous-actionnement en général.

- Le modèle est développé pour l'analyse de mécanismes à barres seulement.
- On néglige toute friction entre l'objet et le préhenseur.
- Le nombre de phalanges, noté n , est égal au nombre de degrés de liberté du mécanisme.
- Le nombre d'actionneurs (passif ou actif) est aussi égal au nombre de degrés de liberté du mécanisme.
- Le contact entre une phalange et l'objet est considéré comme ponctuel (Salisbury et Craig 1982) et est le point cartésien d'intérêt sur la phalange. Il y a donc au plus un contact par phalange.
- L'analyse et l'optimisation des mécanismes sous-actionnés sont faites en fonction de tâches relatives à la préhension et non à la manipulation d'objets.
- On procède à l'étude statique des mécanismes. L'aspect dynamique est donc négligé.
- Les membrures et les liaisons sont supposées indéformables. L'élasticité des composantes n'est donc pas considérée.

Le modèle est complètement général et permet de traiter des mécanismes plans et spatiaux. Dans le cadre de ces travaux, il est appliqué à des mécanismes plans pour des raisons de simplicité, le but étant ici de cerner le comportement de ces mécanismes et d'analyser en détail l'influence de chacun des paramètres de design sur leurs performances.

On considère en tout temps que deux mécanismes symétriques travaillent en coopération, tel qu'illustré à la Figure 2.2.

Le modèle est développé pour les mécanismes à barres, mais pourrait être légèrement modifié afin de pouvoir s'appliquer aux mécanismes actionnés à l'aide de tendons.

Le problème de saisie d'objets sans friction représente souvent le cas le plus défavorable de saisie. En effet, il est souvent avantageux d'avoir le coefficient de friction le plus élevé possible entre le main et l'objet pour éviter d'échapper celui-ci. Puisque la friction n'est pas considérée, quatre points de contact sont nécessaires pour une saisie

stable dans le plan et sept points de contact sont nécessaires pour une saisie stable dans l'espace. Plusieurs études sur les conditions de saisie sont faites dans (Mukherjee et Waldron 1992; Mirza *et al.* 1995; Montana 1991; Kobayashi 1985; Siegel 1991; Park et Starr 1992; Salisbury et Craig 1982).

Enfin, le fait que le nombre de phalanges soit égal au nombre de degrés de liberté du mécanisme représente une condition nécessaire à la propriété d'adaptabilité de forme du mécanisme (mouvement indépendant des phalanges sous l'effet des forces de contact).

3.2 Types de prises étudiées et séquences de saisie

Des nombreuses études sur les types de prises effectuées par la main humaine ont été faites (Crowder 1991; Cutkosky 1989; Shimojima *et al.* 1987; Ulrich *et al.* 1988; Jacobsen *et al.* 1990; Chao *et al.* 1976; Laliberté et Gosselin 1996). L'étude faite ici considère deux types de prises: la prise ferme et la prise de pincée. Ces deux prises sont illustrées à la Figure 2.3.

La prise ferme est celle utilisée pour saisir la plupart des outils et objets lourds. Des forces de contact importantes sont normalement impliquées dans une telle saisie. Dans la plupart des cas de prise ferme, toutes les phalanges et la paume sont en contact avec l'objet. La prise de pincée est utilisée pour saisir les objets du bout des doigts. C'est une prise délicate où les objets saisis sont normalement de petite dimension et où l'intensité des forces impliquées est modérée. La phalange proximale n'est alors pas en contact avec l'objet. La Figure 3.1 montre l'équivalent de ces prises pour un doigt humain (à trois phalanges) et l'endroit approximatif d'application des forces.

Il est aussi important de distinguer les trois étapes d'une saisie: l'approche, le contact et le serrage. L'étape d'approche n'est pas d'un grand intérêt puisqu'elle n'est que le mouvement du mécanisme vers l'objet. Le doigt est alors en position complètement ouverte, la phalange distale reposant contre la butée mécanique.

La période de contact s'applique à la prise ferme seulement et est illustrée à la Figure 2.1. La phalange proximale est en contact avec l'objet et une force proximale est appliquée. Le moment à l'actionneur passif est vaincu par le moteur et la phalange distale se met en mouvement vers l'objet. La valeur de la force proximale croît alors

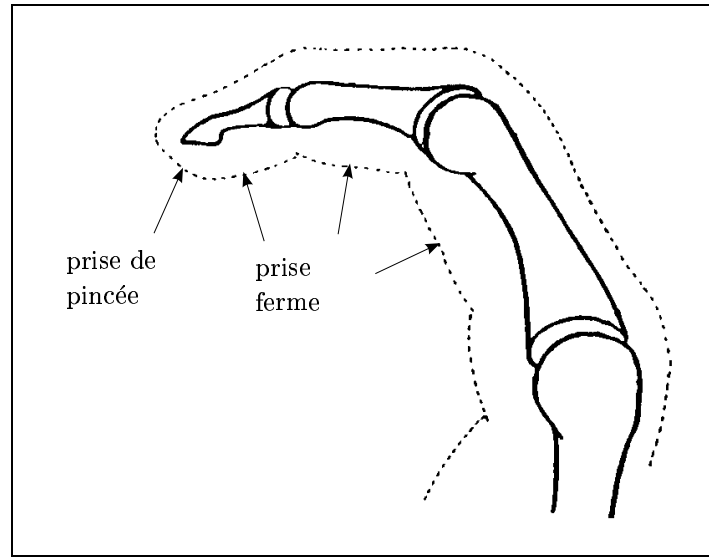


Figure 3.1: Points d'application des forces lors d'une saisie.

avec la compression du ressort. Aussitôt que la phalange distale touche à l'objet, l'étape de contact est terminée et l'étape de serrage commence.

Durant l'étape de serrage, le mécanisme est immobilisé contre l'objet et les forces appliquées contre celui-ci sont augmentées. Dans le cas de la prise ferme, toutes les phalanges sont en contact avec l'objet alors que pour la prise de pincée, seule la phalange distale est en contact avec l'objet.

3.3 Modélisation cinématique

On tente d'abord d'obtenir la vitesse cartésienne des membrures que l'on appelle phalanges. A cette fin, on choisit un point d'intérêt sur chacune des phalanges (point de contact présumé par exemple). On s'intéresse à la transmission de forces et de moments en ces points de contact. Ainsi, on s'intéressera à la vitesse des points de contact et à la vitesse angulaire des phalanges. On doit donc établir la relation entre les vitesses articulaires et le torseur cinématique des phalanges. En considérant des chaînes cinématiques reliant la base à chacune des phalanges, on peut écrire

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.1)$$

où \mathbf{v} est le vecteur des vitesses cartésiennes des phalanges, de dimension $6n$ et où n est le nombre de phalanges. Le vecteur des vitesses cartésiennes est défini par

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

avec

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

où le vecteur \mathbf{v}_i représente la vitesse généralisée (torseur cinématique) de la $i^{\text{ème}}$ phalange. En effet, $\boldsymbol{\omega}_i$ est le vecteur de vitesse angulaire de la $i^{\text{ème}}$ phalange et $\dot{\mathbf{p}}_i$ le vecteur vitesse du point d'intérêt sur cette phalange.

Le vecteur des vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, de dimension q , comprend les vitesses articulaires des liaisons dites actionnées, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$, de dimension n , et celles des articulations dites dépendantes, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$, de dimension p . On note donc que $q = n + p$ où q représente le nombre total d'articulations dans le préhenseur. On a donc

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Le vecteur des vitesses articulaires actionnées est à son tour défini comme

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_p \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

où le vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}_m$, de dimension b , contient les vitesses articulaires des liaisons dites motorisées et le vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}_p$, de dimension c , contient les vitesses articulaires des liaisons dites actionnées passivement (ressorts, élastomères ou autres éléments élastiques). On a donc $n = b + c$ où b est le nombre de liaisons motorisées et c est le nombre de liaisons actionnées passivement.

La matrice Jacobienne générale du préhenseur introduite à l'équation (3.1) est définie comme

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où la matrice \mathbf{J}_i est définie comme la matrice Jacobienne associée à une chaîne cinématique reliant la base du préhenseur à la $i^{\text{ème}}$ phalange (Angeles 1985). On a donc

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

avec

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1i} & \mathbf{a}_{2i} & \dots & \mathbf{a}_{ji} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, q \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1i} & \mathbf{b}_{2i} & \dots & \mathbf{b}_{ji} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, q \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

où $\mathbf{a}_{ji} = \mathbf{e}_j$ pour les liaisons rotoïdes, $\mathbf{a}_{ji} = \mathbf{0}$ pour les liaisons prismatiques et $\mathbf{a}_{ji} = \mathbf{0}$ pour une liaison qui ne fait pas partie de la chaîne cinématique considérée pour la détermination de \mathbf{J}_i . Le vecteur \mathbf{e}_j est défini comme un vecteur unitaire le long de l'axe de la $j^{\text{ème}}$ articulation. De façon similaire, $\mathbf{b}_{ji} = \mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{ji}$ pour les liaisons rotoïdes et $\mathbf{b}_{ji} = \mathbf{e}_j$ pour les liaisons prismatiques et $\mathbf{b}_{ji} = \mathbf{0}$ pour une liaison qui ne fait pas partie de la chaîne cinématique considérée pour la détermination de \mathbf{J}_i . Le vecteur \mathbf{r}_{ji} est défini comme un vecteur reliant l'origine du repère j , associé à la $j^{\text{ème}}$ articulation, au point d'intérêt sur la $i^{\text{ème}}$ phalange.

Quand la matrice Jacobienne est déterminée, il est possible de scinder celle-ci de la façon suivante

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_a & \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où les blocs \mathbf{J}_a et \mathbf{J}_d sont associés aux liaisons actionnées et dépendantes, respectivement. L'équation (3.1) devient donc

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_a & \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a \dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{J}_d \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \quad (3.11)$$

Comme les articulations dépendantes sont des articulations où on ne retrouve pas d'actionneur, il serait intéressant de pouvoir exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des vitesses articulaires actionnées (motorisées et actionnées passivement) seulement. La méthode développée plus haut est basée sur le principe que l'étude de l'architecture d'un préhenseur peut être simplifiée par le démantèlement de celui-ci en chaînes arborescentes. Les chaînes sont développées de façon à obtenir une série de manipulateurs ayant une phalange comme organe terminal. Il est alors possible d'exprimer le modèle cinématique de ces chaînes. En considérant toutes les phalanges et à partir des

équations (3.2) et (3.11), on obtient

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ai} & \mathbf{J}_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{ai}\dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{J}_{di}\dot{\boldsymbol{\theta}}_d \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

Ces n équations ne sont pas suffisantes pour décrire le modèle du préhenseur. En effet, il faut générer des équations supplémentaires, dites de compatibilité. Celles-ci proviennent du fait que le mécanisme du préhenseur comportera en général des chaînes cinématiques fermées et que les contraintes associées à ces boucles doivent par conséquent être respectées. Il est possible de déterminer le nombre d'équations de boucle ainsi obtenues en définissant le graphe associé à la chaîne cinématique globale, qui est formé de noeuds représentant chacun des corps rigides de la chaîne et de segments reliant ces noeuds qui représentent les liaisons mécaniques. Dans un tel graphe, le nombre de boucles indépendantes est donné par (Harary 1969)

$$k = e - v + 1 \quad (3.13)$$

où k désigne le nombre de boucles indépendantes, e le nombre de liaisons et v le nombre de noeuds dans le graphe. Pour chaque boucle indépendante, on peut écrire une équation de compatibilité de vitesse sous la forme

$$\mathbf{J}_{0i}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

où

$$\mathbf{J}_{0i} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ai} & \mathbf{K}_{di} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

On obtient alors

$$\mathbf{K}_{ai}\dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_{di}\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, k \quad (3.16)$$

où les matrices Jacobiennes \mathbf{K}_{ai} et \mathbf{K}_{di} sont définies comme les matrices \mathbf{J}_i . En assemblant toutes les équations obtenues, on trouve finalement

$$\mathbf{K}_a\dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_d\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

où

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a1} \\ \mathbf{K}_{a2} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{ak} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

et

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d1} \\ \mathbf{K}_{d2} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{dk} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Puisque toutes les boucles indépendantes de la chaîne cinématique ont été utilisées, l'équation (3.17) permet d'écrire les vitesses des articulations dépendantes en fonction des vitesses des articulations indépendantes, c'est-à-dire

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (3.20)$$

où

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{K}_a \quad (3.21)$$

En substituant l'équation (3.20) dans l'équation (3.11), on obtient alors

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_r \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (3.22)$$

où

$$\mathbf{J}_r = \mathbf{J}_a + \mathbf{J}_d \mathbf{C} \quad (3.23)$$

La Jacobienne résultante \mathbf{J}_r , de dimension $6n \times n$ permet donc de lier les vitesses cartésiennes des phalanges aux vitesses articulaires associées aux liaisons actionnées. On peut exprimer cette matrice à l'aide de sous-matrices qui, selon le cas, permettront de résoudre plus facilement le système d'équations. On peut par exemple exprimer la matrice Jacobienne résultante de façon à mettre en évidence les blocs se rapportant aux vitesses cartésiennes, comme à l'équation (3.24).

$$\mathbf{J}_r = \left[\mathbf{J}_{r1}^T \quad \mathbf{J}_{r2}^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_{rn}^T \right]^T \quad (3.24)$$

On voudra aussi utiliser une autre notation s'il est important de mettre l'emphase sur les vitesses articulaires.

$$\mathbf{J}_r = \left[\mathbf{J}_{rm1} \quad \mathbf{J}_{rm2} \quad \dots \quad \mathbf{J}_{rmb} \quad \mathbf{J}_{rp1} \quad \mathbf{J}_{rp2} \quad \dots \quad \mathbf{J}_{rpc} \right] = \left[\mathbf{J}_{rm} \quad \mathbf{J}_{rp} \right] \quad (3.25)$$

Cette notation permet d'isoler les composantes de la matrice jacobienne s'appliquant à chacune des vitesses des articulations motorisées et des articulations actionnées passivement.

3.4 Modélisation statique

À l'aide de la Jacobienne résultante \mathbf{J}_r , il est possible de relier les efforts cartésiens aux efforts articulaires. On s'intéresse aux efforts appliqués sur l'objet, donc aux forces au niveau des points de contact des phalanges. La Jacobienne résultante permet d'exprimer le rapport entre les efforts articulaires et cartésiens, tout en éliminant les efforts dans les membrures autres que les phalanges.

En effet, en utilisant le principe du travail virtuel, on peut écrire

$$T_{\text{cart}} = T_{\text{arti}} \quad (3.26)$$

où T_{cart} est le travail virtuel associé aux efforts cartésiens sur l'objet et T_{arti} est le travail virtuel associé aux actionneurs. De plus, on définit le vecteur des efforts articulaires \mathbf{f} , comme

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

où \mathbf{f}_m regroupe les efforts articulaires associés aux liaisons motorisées et \mathbf{f}_p regroupe les efforts articulaires associés aux liaisons actionnées passivement, c'est-à-dire

$$\mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} f_{m1} \\ f_{m2} \\ \vdots \\ f_{mb} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

et

$$\mathbf{f}_p = \begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{p2} \\ \vdots \\ f_{pc} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

De façon similaire, on définit le vecteur \mathbf{t} comme le vecteur des efforts cartésiens aux points de contact, c'est-à-dire

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

où \mathbf{t}_i est le torseur d'efforts au $i^{\text{ème}}$ contact, soit

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{g}_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

où \mathbf{n}_i désigne le moment de force associé au contact i et \mathbf{g}_i désigne la force associée à ce contact. Il est à noter que les moments seront identiquement nuls si le contact considéré est ponctuel. L'équation (3.26), peut alors s'écrire

$$\mathbf{t}^T \delta \mathbf{x} = \mathbf{f}^T \delta \boldsymbol{\theta}_a \quad (3.32)$$

L'équation (3.22) nous permet d'écrire

$$\mathbf{t}^T \mathbf{J}_r \delta \boldsymbol{\theta}_a = \mathbf{f}^T \delta \boldsymbol{\theta}_a \quad (3.33)$$

Puisque cette équation doit être vérifiée pour toute valeur de $\delta \boldsymbol{\theta}_a$, on a

$$\mathbf{t}^T \mathbf{J}_r = \mathbf{f}^T \quad (3.34)$$

Finalement, en transposant cette dernière équation, on trouve

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}_r^T \mathbf{t} \quad (3.35)$$

On peut réécrire l'équation (3.35) sous la forme suivante:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{rm}^T \\ \mathbf{J}_{rp}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{J}_{rm}^T \mathbf{t} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{J}_{rp}^T \mathbf{t} \quad (3.38)$$

On peut maintenant se servir de ces deux dernières équations pour déterminer les efforts articulaires ou cartésiens.

3.5 Modélisation de mécanismes

À l'aide du modèle général développé dans les sections précédentes, il est possible d'analyser des mécanismes sous-actionnés de topologies multiples. La topologie d'un mécanisme peut varier selon le type de liaisons utilisées (rotoïdes, prismatiques), selon le type d'éléments passifs utilisés (ressorts en torsion ou en tension), selon l'organe de transmission de la force (mécanismes à barres, engrenages, tendons, crémaillères) s'il y a lieu, selon le nombre de membrures et leur arrangement, et selon le nombre de degrés de liberté du mécanisme.

On modélise ici trois mécanismes à deux degrés de liberté qui seront par la suite analysés et optimisés. Deux autres mécanismes sont modélisés à l'Annexe A afin de démontrer l'application du modèle sur des mécanismes à trois degrés de liberté comprenant deux et trois chaînes cinématiques fermées.

Dans le texte, on parle des mécanismes 1, 2 et 3 en référence aux topologies illustrées aux Figures 3.2, 3.4 et 3.6.

3.5.1 Mécanisme 1: 2 degrés de liberté (rotoïde, 5 barres)

Le premier préhenseur étudié est un mécanisme à cinq barres où l'actionneur motorisé est rotoïde et l'actionneur passif est un ressort en torsion (Figure 3.2). L'actionneur motorisé est monté sur l'articulation centrée en O_1 alors que l'actionneur passif est monté sur l'articulation centrée en O_4 . Les angles sont positifs lorsque mesurés dans le sens anti-horaire. À la Figure 3.2, l'angle θ_1 tel que représenté aurait alors une valeur négative. De plus, les longueurs l_6 et l_7 ne sont pas nécessairement positives puisqu'elles sont mesurées par rapport à l'origine du repère $x - y$.

On écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.39)$$

où le vecteur \mathbf{v} est défini comme suit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

puisque le préhenseur comprend deux membrures actives, soit deux phalanges. Les

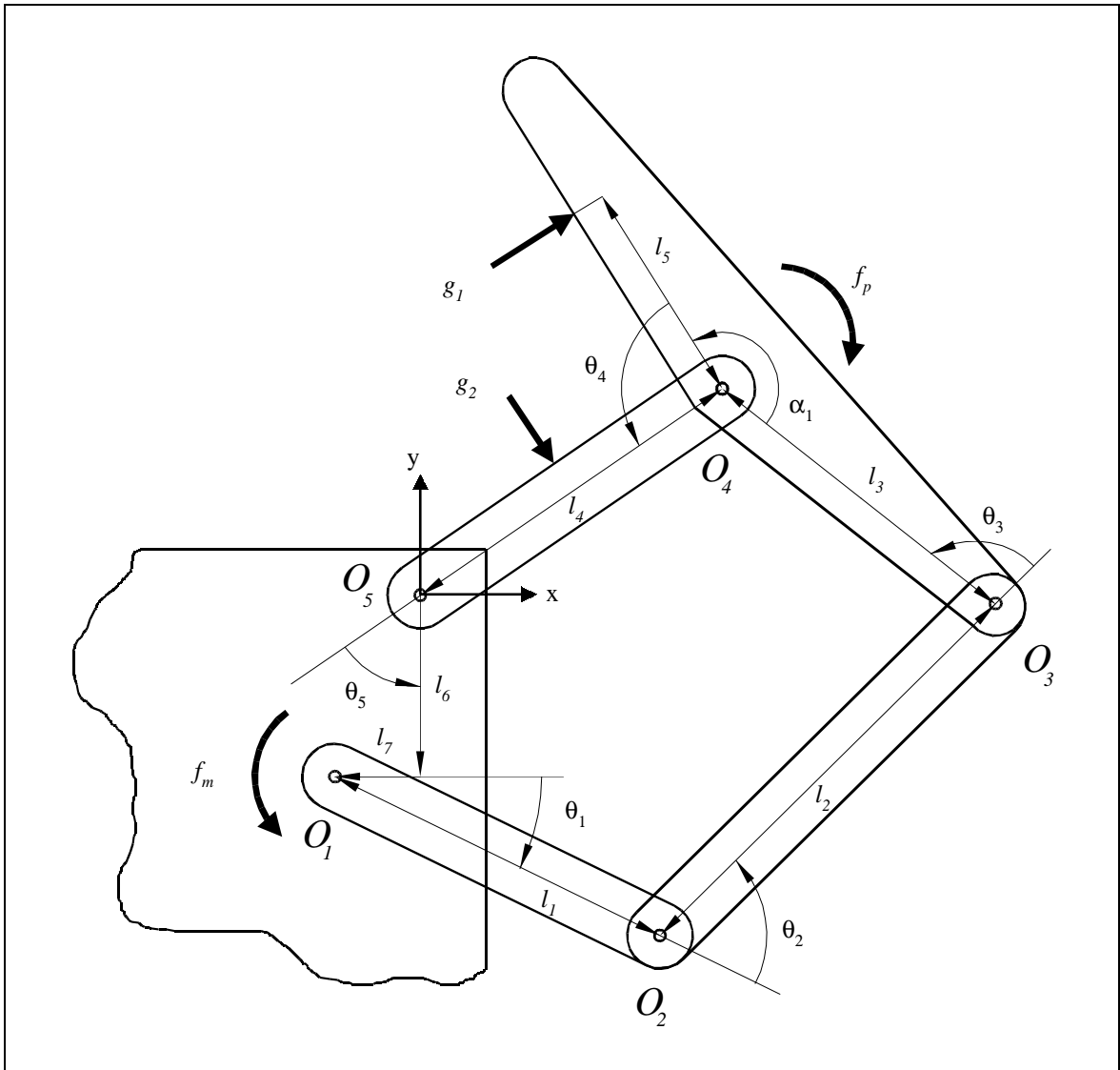


Figure 3.2: Paramétrisation du mécanisme 1.

vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont définis comme les vecteurs de vitesse (deux composantes dans le plan) des points de contact présumés sur les phalanges (points d'application des forces g_1 et g_2 sur la Figure 3.2). Le vecteur des vitesses articulaires est défini par

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ est le vecteur des vitesses articulaires des liaisons actionnées qui contient la vitesse articulaire de la liaison motorisée, $\dot{\theta}_m$, et la vitesse articulaire de la liaison actionnée

passivement, $\dot{\theta}_p$. On a

$$\dot{\theta}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Le vecteur $\dot{\theta}_d$ est le vecteur des articulations dépendantes et est défini par

$$\dot{\theta}_d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Des équations (3.39) et (3.40), on tire deux équations qui sont

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_1 \dot{\theta} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_2 \dot{\theta} \quad (3.45)$$

On détermine maintenant ces deux matrices \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 . Pour ce premier mécanisme, une procédure de modélisation est établie. En effet, on décide de modéliser les chaînes arborescentes en partant de l'articulation reliant l'actionneur motorisé à la base. Cette méthode ne permet pas toujours d'emprunter le chemin le plus court, mais elle fonctionne bien et c'est pourquoi on en fait une méthode standard qui sera appliquée à tous les mécanismes. L'équation (3.44) permet donc de modéliser la chaîne arborescente qui a comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_1 . On emprunte le chemin passant par les liaisons O_1 , O_2 et O_3 (Figure 3.2). La matrice Jacobienne associée à la première chaîne cinématique, tirée de l'équation (3.7) aura donc la forme suivante:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{21} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{31} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

On remarque que les liaisons O_4 et O_5 n'interviennent pas dans cette chaîne. On note aussi qu'il aurait été possible d'emprunter un autre chemin, soit celui passant par les liaisons O_5 et O_4 , qui permet de partir de la base pour se rendre au point d'application de la force g_1 . Enfin, on remarque que la matrice \mathbf{A} n'apparaît pas dans cette Jacobienne, puisque la vitesse angulaire de la phalange 1 ne nous intéresse pas pour l'instant.

On trouve les vecteurs \mathbf{r}_{j1} qui relient le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont:

$$\mathbf{r}_{31} = \begin{bmatrix} r_{31x} \\ r_{31y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_5 c_{1a} \\ l_3 s_{13} + l_5 s_{1a} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{r}_{21} = \begin{bmatrix} r_{21x} \\ r_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{31} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{bmatrix} r_{11x} \\ r_{11y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{21} \quad (3.49)$$

où on définit

$$c_1 = \cos \theta_1 \quad (3.50)$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.51)$$

$$c_{13} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (3.52)$$

$$c_{1a} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_1) \quad (3.53)$$

$$c_{14} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_1 + \theta_4) \quad (3.54)$$

et où à chaque c_i correspond un s_i qui représente le sinus du même angle. On définit chacun des angles en incluant toute l'information nécessaire (valeur π par exemple) au suivi facile du cheminement à l'intérieur des chaînes arborescentes. Les indices utilisés pour définir ces angles font référence aux premier et dernier angles inclus entre les parenthèses.

Les vecteurs \mathbf{r}_{j1} ont en réalité une troisième composante en z égale à zéro. On élimine cette troisième composante afin d'alléger les calculs ultérieurs. Par contre, cette démarche rend impossible le produit vectoriel $\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{ji}$ étant donné que cette opération exige deux vecteurs de dimension 3. Pour palier à cette impossibilité, on utilise un artifice de calcul (Sinatra et Angeles 1995) qui est la multiplication du vecteur \mathbf{r}_{ji} par la matrice

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Cette opération a le même effet que le produit vectoriel initial. La matrice \mathbf{J}_1 devient donc

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{21} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{31} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Après les multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la première boucle

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 & -r_{21y} & -r_{31y} & 0 \\ r_{11x} & 0 & r_{21x} & r_{31x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

On peut exprimer cette Jacobienne sous la forme présentée à l'équation (3.10) et on obtient

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 \\ r_{11x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} -r_{21y} & -r_{31y} & 0 \\ r_{21x} & r_{31x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

De la même façon, on détermine la Jacobienne de la deuxième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_2 (au milieu de la phalange proximale, soit en $\frac{l_4}{2}$). On emprunte le chemin passant par les liaisons O_1 , O_2 , O_3 et O_4 (Figure 3.2). On obtient alors

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}r_{12} & \mathbf{E}r_{42} & \mathbf{E}r_{22} & \mathbf{E}r_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

qui ne fait pas intervenir O_5 . On note qu'il aurait été possible d'emprunter un autre chemin, soit celui partant de la liaison O_5 et menant directement au point d'application de la force g_2 .

On obtient les nouvelles valeurs de \mathbf{r}_{j2} qui sont:

$$\mathbf{r}_{42} = \begin{bmatrix} r_{42x} \\ r_{42y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_4}{2}c_{14} \\ \frac{l_4}{2}s_{14} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{r}_{32} = \begin{bmatrix} r_{32x} \\ r_{32y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3c_{13} \\ l_3s_{13} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{42} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{r}_{22} = \begin{bmatrix} r_{22x} \\ r_{22y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2c_{12} \\ l_2s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{32} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} r_{12x} \\ r_{12y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1c_1 \\ l_1s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{22} \quad (3.64)$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{42y} & -r_{22y} & -r_{32y} & 0 \\ r_{12x} & r_{42x} & r_{22x} & r_{32x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Sous la forme de l'équation (3.10) on obtient

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{42y} \\ r_{12x} & r_{42x} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} -r_{22y} & -r_{32y} & 0 \\ r_{22x} & r_{32x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

En traçant le graphe associé à la chaîne cinématique globale (Harary 1969), on trouve une seule boucle indépendante (Figure 3.3). On note sur ce graphe que les noeuds représentent les corps rigides et que les segments reliant ces noeuds représentent les liaisons mécaniques. On calcule alors le nombre de boucles indépendantes à l'aide de l'équation (3.13). La seule boucle indépendante origine de la base du préhenseur et se termine aussi sur la base en passant par toutes les liaisons du mécanisme. De plus, on

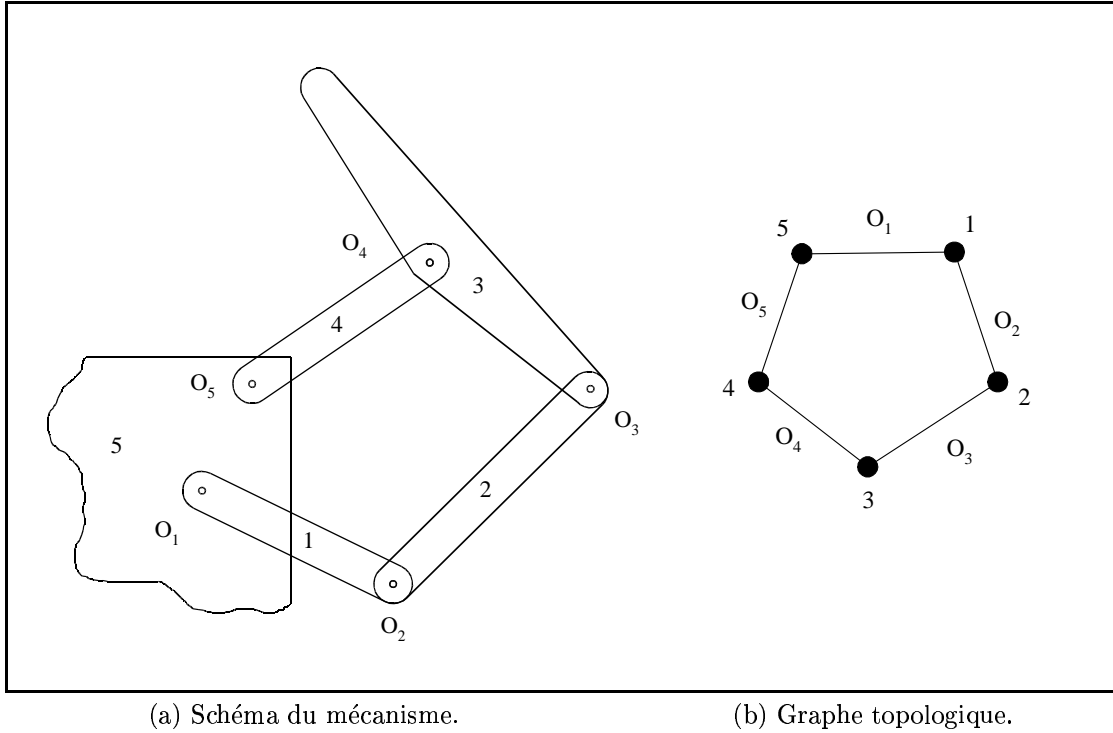


Figure 3.3: Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 1).

s'intéresse maintenant à la vitesse angulaire de l'organe terminal (membrure 5), puisque cette vitesse ω_5 est nulle. En effet, en se référant à la Figure 3.2 on peut dire que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = cte. \quad (3.68)$$

En dérivant cette dernière équation on obtient

$$\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 = 0 \quad (3.69)$$

qui prouve que la vitesse angulaire de la base est égale à zéro. On inclut donc la matrice \mathbf{A} dans la Jacobienne \mathbf{J}_0 . Puisque l'on travaille dans le plan, la matrice \mathbf{A} peut être

réduite à une seule ligne et la matrice \mathbf{J}_0 devient donc

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{10} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{40} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{20} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{30} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j0} comme suit:

$$\mathbf{r}_{40} = \begin{bmatrix} r_{40x} \\ r_{40y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4 c_{14} \\ l_4 s_{14} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{r}_{30} = \begin{bmatrix} r_{30x} \\ r_{30y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} \\ l_3 s_{13} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{40} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{r}_{20} = \begin{bmatrix} r_{20x} \\ r_{20y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{30} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{r}_{10} = \begin{bmatrix} r_{10x} \\ r_{10y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{20} \quad (3.74)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (3.70), on obtient

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -r_{10y} & -r_{40y} & -r_{20y} & -r_{30y} & 0 \\ r_{10x} & r_{40x} & r_{20x} & r_{30x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

L'étape suivante vise à exprimer les vitesses articulaires dépendantes en fonction des vitesses articulaires actionnées. À partir du modèle présenté à l'équation (3.17), on peut donc écrire

$$\mathbf{K}_{a1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_{d1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

où

$$\mathbf{K}_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -r_{10y} & -r_{40y} \\ r_{10x} & r_{40x} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{K}_{d1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -r_{20y} & -r_{30y} & 0 \\ r_{20x} & r_{30x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Les vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ sont définis respectivement par les équations (3.42) et (3.43). On peut maintenant trouver la matrice \mathbf{C} de l'équation (3.21) qui donne

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}_{d1}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \quad (3.79)$$

Cette matrice \mathbf{C} permet, à l'aide de l'équation (3.20), d'exprimer les vitesses articulaires dépendantes en fonction des vitesses articulaires des liaisons actionnées. De cette nouvelle forme, on tire une matrice résultante \mathbf{J}_r que l'on exprime selon l'équation (3.23) où

$$\mathbf{J}_{r1} = \mathbf{J}_{a1} + \mathbf{J}_{d1}\mathbf{C} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{J}_{r2} = \mathbf{J}_{a2} + \mathbf{J}_{d2}\mathbf{C} \quad (3.81)$$

On peut maintenant exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des deux vitesses articulaires pertinentes ($\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_4$), soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_r \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (3.82)$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r1} \\ \mathbf{J}_{r2} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

La matrice Jacobienne résultante, \mathbf{J}_r , est de dimension 4×2 . Elle est fonction de l'architecture du préhenseur (paramètres géométriques), mais aussi de sa configuration (valeur des variables articulaires). On pourra exprimer cette matrice Jacobienne résultante sous les formes présentées aux équations (3.24) et (3.25), selon le problème à traiter. Finalement, en transposant cette matrice, on peut, à l'aide de l'équation (3.35), exprimer les efforts articulaires en fonction des efforts cartésiens.

3.5.2 Mécanisme 2: 2 degrés de liberté (prismatique, 5 barres)

On modélise maintenant un mécanisme à cinq barres incluant un vérin (Figure 3.4). On y retrouve un actionneur prismatique en O_2 et un ressort en torsion ainsi qu'une butée mécanique en O_4 .

Les variables articulaires sont maintenant θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 et x_1 . La longueur x_1 représente la distance entre O_1 et O_3 . On écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.84)$$

où le vecteur \mathbf{v} est défini comme suit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

passivement, $\dot{\theta}_p$. On a

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Le vecteur $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ contient les vitesses angulaires des articulations dépendantes. On écrit

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Des équations (3.84) et (3.85), on tire deux équations qui sont

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.90)$$

On détermine maintenant ces deux matrices \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 . L'équation (3.44) permet de modéliser la chaîne arborescente qui a comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_1 . On emprunte le chemin passant par O_1 , O_2 et O_3 (Figure 3.4). La matrice Jacobienne associée à cette chaîne cinématique, tirée de l'équation (3.7), aura la forme suivante:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{11} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{31} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

On remarque que les liaisons O_4 et O_5 n'interviennent pas dans cette chaîne. On note aussi qu'il aurait été possible d'emprunter un autre chemin en passant par les liaisons O_5 et O_4 , qui permet de partir de la base pour se rendre au point d'application de la force g_1 .

On trouve les vecteurs \mathbf{r}_{j1} qui relient le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont:

$$\mathbf{r}_{31} = \begin{bmatrix} r_{31x} \\ r_{31y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_{12} + l_2 c_{1a} \\ l_1 s_{12} + l_2 s_{1a} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{bmatrix} r_{11x} \\ r_{11y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 c_1 \\ x_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{31} \quad (3.93)$$

où on définit

$$c_1 = \cos \theta_1 \quad (3.94)$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.95)$$

$$c_{1a} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \pi + \alpha_1) \quad (3.96)$$

$$c_{13} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \pi + \alpha_1 + \theta_3) \quad (3.97)$$

et où à chaque c_i correspond un s_i qui représente le sinus du même angle. On obtient donc

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{11} & \mathbf{E}r_{31} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

où \mathbf{e}_2 est un vecteur contenu dans le plan (deux composantes). Après les multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la première boucle

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -r_{11y} & -r_{31y} & 0 \\ s_1 & 0 & r_{11x} & r_{31x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

On peut exprimer cette Jacobienne sous la forme présentée à l'équation (3.10) et on obtient

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} -r_{11y} & -r_{31y} & 0 \\ r_{11x} & r_{31x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

De la même façon, on détermine la Jacobienne de la deuxième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_2 (au milieu de la phalange proximale, soit en $\frac{l_3}{2}$). On emprunte le chemin passant par O_1, O_2, O_3 et O_4 (Figure 3.4). On obtient alors

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{E}r_{42} & \mathbf{E}r_{12} & \mathbf{E}r_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

qui ne fait pas intervenir O_5 . On note qu'il aurait été possible d'emprunter un autre chemin, soit celui partant de la liaison O_5 et menant directement au point d'application de la force g_2 .

On obtient les nouvelles valeurs de \mathbf{r}_{j2} qui sont:

$$\mathbf{r}_{42} = \begin{bmatrix} r_{42x} \\ r_{42y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_3}{2} c_{13} \\ \frac{l_3}{2} s_{13} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{r}_{32} = \begin{bmatrix} r_{32x} \\ r_{32y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_{12} \\ l_1 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{42} \quad (3.104)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} r_{12x} \\ r_{12y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 c_1 \\ x_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{12} \quad (3.105)$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -r_{42y} & -r_{12y} & -r_{32y} & 0 \\ s_1 & r_{42x} & r_{12x} & r_{32x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Sous la forme de l'équation (3.10) on obtient

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} c_1 & -r_{42y} \\ s_1 & r_{42x} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{32y} & 0 \\ r_{12x} & r_{32x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

En traçant le graphe associé à la chaîne cinématique globale, on trouve une seule boucle indépendante. Illustrée à la Figure 3.5, elle a comme origine O_1 et comme organe terminal le point O_5 , en passant par chacune des liaisons du mécanisme. Cette boucle origine donc de la base du préhenseur et pour se terminer aussi sur la base. De plus, on

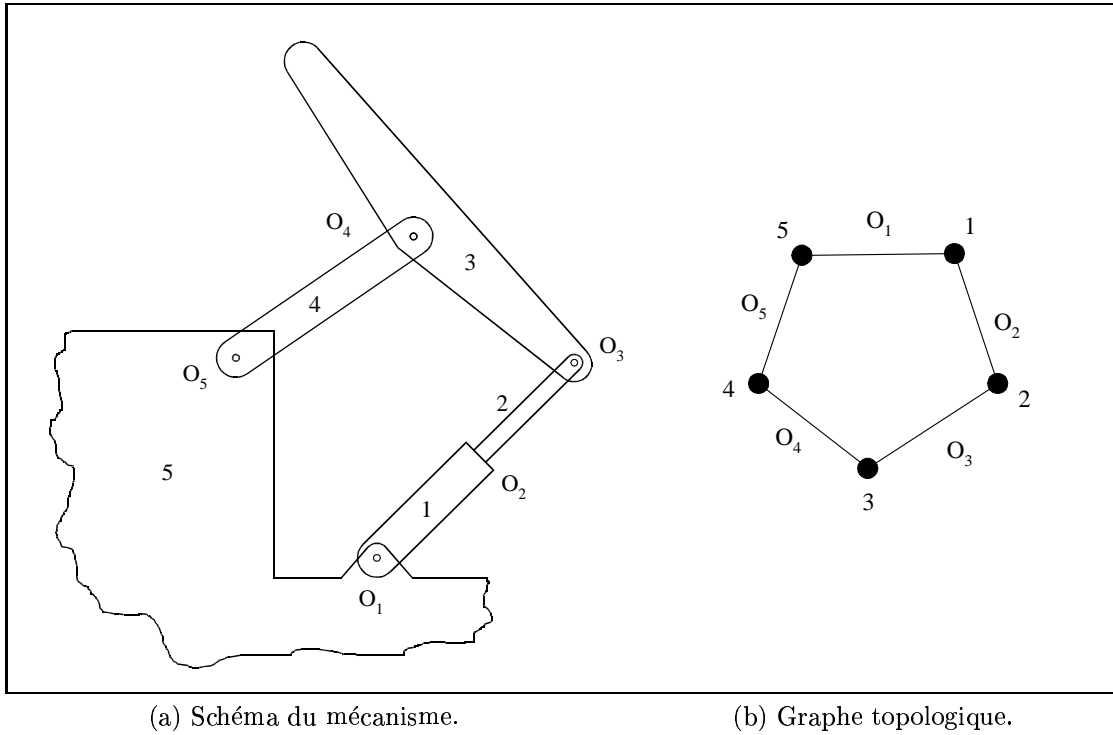


Figure 3.5: Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 2).

s'intéresse maintenant à la vitesse angulaire de l'organe terminal, puisque cette vitesse

ω_5 est nulle. On inclut donc la matrice \mathbf{A} dans la Jacobienne \mathbf{J}_0 qui devient

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{E}r_{40} & \mathbf{E}r_{10} & \mathbf{E}r_{30} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j0} comme suit:

$$\mathbf{r}_{40} = \begin{bmatrix} r_{40x} \\ r_{40y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} \\ l_3 s_{13} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{r}_{30} = \begin{bmatrix} r_{30x} \\ r_{30y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_{12} \\ l_1 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{40} \quad (3.111)$$

$$\mathbf{r}_{10} = \begin{bmatrix} r_{10x} \\ r_{10y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 c_1 \\ x_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{30} \quad (3.112)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (3.109), on obtient

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_1 & -r_{40y} & -r_{10y} & -r_{30y} & 0 \\ s_1 & r_{40x} & r_{10x} & r_{30x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

L'étape suivante vise à exprimer les vitesses articulaires dépendantes en fonction des vitesses articulaires actionnées. À partir du modèle présenté à l'équation (3.17), on peut donc dire

$$\mathbf{K}_{a1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_{d1} \dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad (3.114)$$

où

$$\mathbf{K}_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & -r_{40y} \\ s_1 & r_{40x} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{K}_{d1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -r_{10y} & -r_{30y} & 0 \\ r_{10x} & r_{30x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Les vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ sont définis respectivement par les équations (3.87) et (3.88). On peut maintenant trouver la matrice \mathbf{C} de l'équation (3.21) qui donne

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}_{d1}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \quad (3.117)$$

Cette matrice \mathbf{C} nous permet, à l'aide de l'équation (3.20), d'exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des vitesses articulaires des liaisons actionnées. De cette nouvelle forme, on tire une matrice résultante \mathbf{J}_r que l'on exprime selon l'équation (3.23) où

$$\mathbf{J}_{r1} = \mathbf{J}_{a1} + \mathbf{J}_{d1}\mathbf{C} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{J}_{r2} = \mathbf{J}_{a2} + \mathbf{J}_{d2}\mathbf{C} \quad (3.119)$$

On peut maintenant exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des deux vitesses articulaires pertinentes (\dot{x}_1 et $\dot{\theta}_3$), soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_r \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (3.120)$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r1} \\ \mathbf{J}_{r2} \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

3.5.3 Mécanisme 3: 2 degrés de liberté (rotoïde, 7 barres)

Le prochain mécanisme à être modélisé est présenté à la Figure 3.6. Il s'agit d'un mécanisme à sept barres avec un actionneur rotoïde en O_1 et un ressort en torsion ainsi qu'une butée mécanique en O_7 . Les variables articulaires sont maintenant θ_1 à θ_8 . On écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.122)$$

où le vecteur \mathbf{v} est défini comme suit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

puisque le préhenseur comprend deux phalanges. Le vecteur des vitesses articulaires est défini par

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ est le vecteur des vitesses articulaires des liaisons actionnées qui contient la vitesse articulaire de la liaison motorisée, $\dot{\theta}_m$, et la vitesse articulaire de la liaison actionnée passivement, $\dot{\theta}_p$. On a

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_7 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

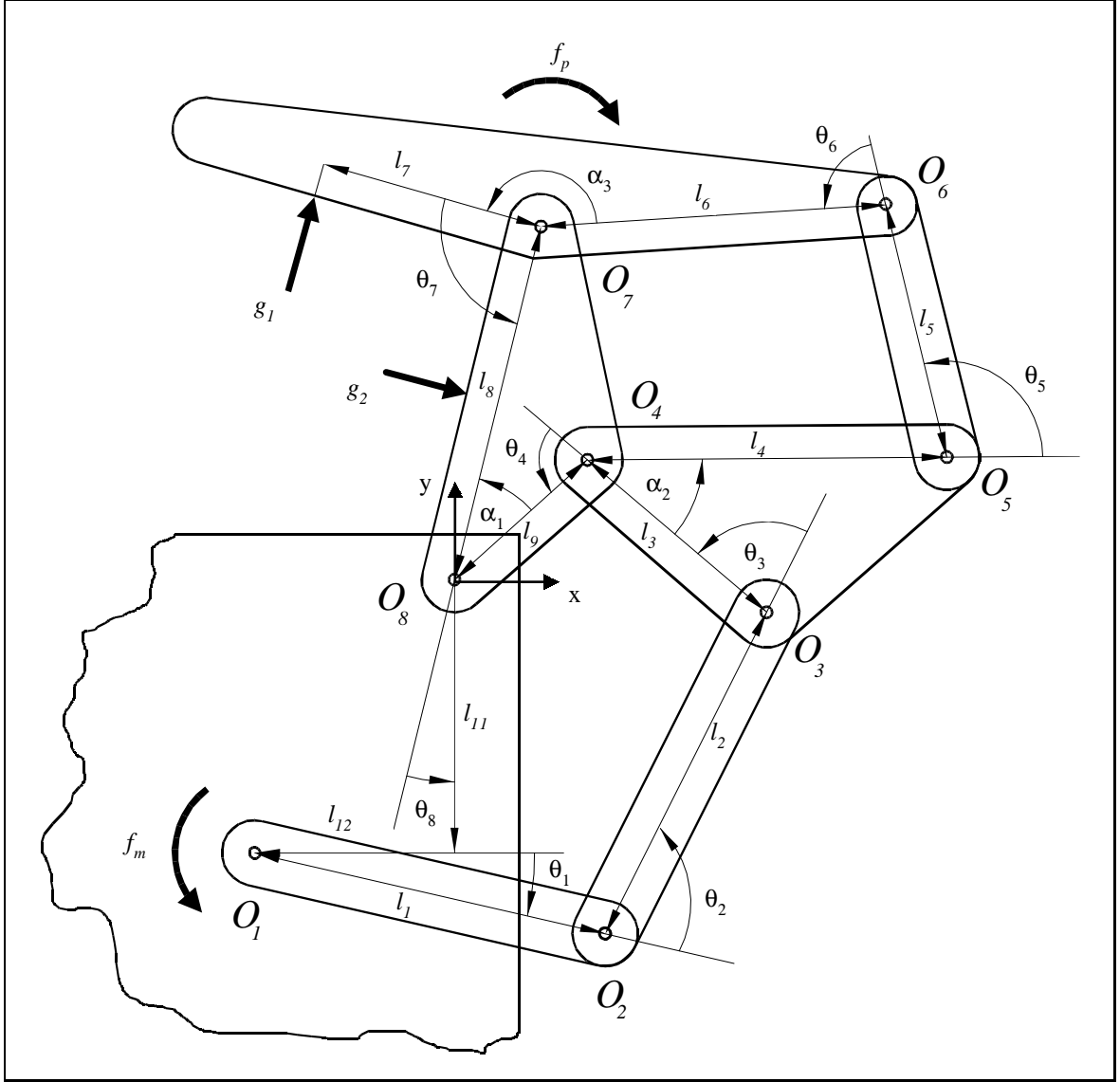


Figure 3.6: Paramétrisation du mécanisme 3.

et où $\dot{\theta}_d$ est le vecteur des articulations dépendantes et est défini comme

$$\dot{\theta}_d = \left[\dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\theta}_5 \quad \dot{\theta}_6 \quad \dot{\theta}_8 \right]^T \quad (3.126)$$

Des équations (3.122) et (3.123), on tire deux équations qui sont

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_1 \dot{\theta} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_2 \dot{\theta} \quad (3.128)$$

On détermine maintenant ces deux matrices \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 . L'équation (3.44) permet de modéliser la chaîne arborescente qui a comme origine O_1 et qui a comme organe terminal

le point d'application de la force g_1 . On emprunte donc le chemin suivant: O_1, O_2, O_3, O_5 et O_6 (Figure 3.6). La matrice Jacobienne associée à cette chaîne cinématique, tirée de l'équation (3.7) aura la forme suivante:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{21} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{51} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{61} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

On remarque que les liaisons O_4, O_7 et O_8 n'interviennent pas dans cette chaîne. On note aussi que plusieurs autres chemins auraient pu être empruntés pour partir de la base et se rendre au point d'application de la force g_1 .

On trouve les vecteurs \mathbf{r}_{j1} qui relie le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont:

$$\mathbf{r}_{61} = \begin{bmatrix} r_{61x} \\ r_{61y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} + l_7 c_{1a3} \\ l_6 c_{16} + l_7 c_{1a3} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$\mathbf{r}_{51} = \begin{bmatrix} r_{51x} \\ r_{51y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 c_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{61} \quad (3.131)$$

$$\mathbf{r}_{31} = \begin{bmatrix} r_{31x} \\ r_{31y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{51} \quad (3.132)$$

$$\mathbf{r}_{21} = \begin{bmatrix} r_{21x} \\ r_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 c_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{31} \quad (3.133)$$

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{bmatrix} r_{11x} \\ r_{11y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{21} \quad (3.134)$$

où on définit

$$c_1 = \cos \theta_1 \quad (3.135)$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.136)$$

$$c_{13} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (3.137)$$

$$c_{14} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (3.138)$$

$$c_{1a2} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2) \quad (3.139)$$

$$c_{15} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5) \quad (3.140)$$

$$c_{16} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6) \quad (3.141)$$

$$c_{1a3} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_3) \quad (3.142)$$

$$c_{17} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_3 + \theta_7) \quad (3.143)$$

et où à chaque c_i correspond un s_i qui représente le sinus du même angle. On obtient donc

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}r_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{21} & \mathbf{E}r_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{51} & \mathbf{E}r_{61} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Après les multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la première boucle

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 & -r_{21y} & -r_{31y} & 0 & -r_{51y} & -r_{61y} & 0 \\ r_{11x} & 0 & r_{21x} & r_{31x} & 0 & r_{51x} & r_{61x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

On peut exprimer cette Jacobienne sous la forme présentée à l'équation (3.10) et on obtient

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 \\ r_{11x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} -r_{21y} & -r_{31y} & 0 & -r_{51y} & -r_{61y} & 0 \\ r_{21x} & r_{31x} & 0 & r_{51x} & r_{61x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

De la même façon, on détermine la Jacobienne de la deuxième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_2 (au milieu de la phalange proximale, soit en $\frac{l_8}{2}$). On emprunte donc le chemin suivant: O_1, O_2, O_3, O_5, O_6 et O_7 (Figure 3.6). On obtient alors

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{12} & \mathbf{e}_7 \times \mathbf{r}_{72} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{22} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{52} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{62} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

qui ne fait pas intervenir O_4 et O_8 . On note aussi que plusieurs autres chemins auraient pu être empruntés pour partir de la base et se rendre au point d'application de la force g_2 .

On obtient les nouvelles valeurs de \mathbf{r}_{j2} qui sont:

$$\mathbf{r}_{72} = \begin{bmatrix} r_{72x} \\ r_{72y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_8}{2} c_{17} \\ \frac{l_8}{2} s_{17} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{r}_{62} = \begin{bmatrix} r_{62x} \\ r_{62y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} \\ l_6 s_{16} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{72} \quad (3.150)$$

$$\mathbf{r}_{52} = \begin{bmatrix} r_{52x} \\ r_{52y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{62} \quad (3.151)$$

$$\mathbf{r}_{32} = \begin{bmatrix} r_{32x} \\ r_{32y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{52} \quad (3.152)$$

$$\mathbf{r}_{22} = \begin{bmatrix} r_{22x} \\ r_{22y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 c_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{32} \quad (3.153)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} r_{12x} \\ r_{12y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{22} \quad (3.154)$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{72y} & -r_{22y} & -r_{32y} & 0 & -r_{52y} & -r_{62y} & 0 \\ r_{12x} & r_{72x} & r_{22x} & r_{32x} & 0 & r_{52x} & r_{62x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

Sous la forme de l'équation (3.10) on obtient

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{72y} \\ r_{12x} & r_{72x} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} -r_{22y} & -r_{32y} & 0 & -r_{52y} & -r_{62y} & 0 \\ r_{22x} & r_{32x} & 0 & r_{52x} & r_{62x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

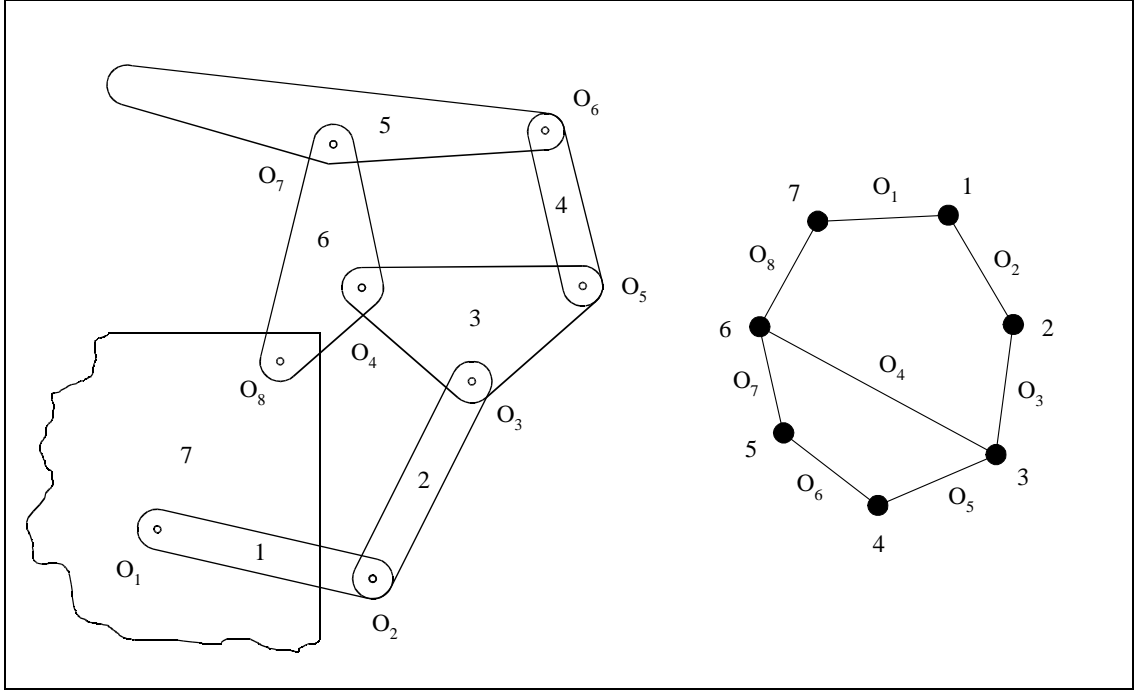
La Figure 3.7 présente le graphe associé à la chaîne cinématique globale. On y trouve deux boucles indépendantes. Les deux ont comme origine O_1 et comme organe terminal le point O_8 . La première emprunte le chemin O_1, O_2, O_3, O_4, O_8 et la deuxième emprunte le chemin $O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_7, O_8$. On note que pour la deuxième boucle, on aurait pu emprunter le chemin O_4, O_5, O_6, O_7 . Ces chaînes cinématiques fermées représentent les contraintes d'assemblage du mécanisme. On inclut la sous-matrice \mathbf{A} dans les Jacobiennes \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 qui modélisent les deux chaînes cinématiques fermées. En effet, on sait que la vitesse angulaire de la base par rapport à l'organe terminal est nulle pour les deux boucles. On a donc

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{23} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{33} & \mathbf{E}\mathbf{r}_{43} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j3} comme suit:

$$\mathbf{r}_{43} = \begin{bmatrix} r_{43x} \\ r_{43y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{14} \\ l_9 s_{14} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

$$\mathbf{r}_{33} = \begin{bmatrix} r_{33x} \\ r_{33y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} \\ l_3 s_{13} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{43} \quad (3.160)$$



(a) Schéma du mécanisme.

(b) Graphe topologique.

Figure 3.7: Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 3).

$$\mathbf{r}_{23} = \begin{bmatrix} r_{23x} \\ r_{23y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{33} \quad (3.161)$$

$$\mathbf{r}_{13} = \begin{bmatrix} r_{13x} \\ r_{13y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{23} \quad (3.162)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (3.158), on obtient

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -r_{13y} & 0 & -r_{23y} & -r_{33y} & -r_{43y} & 0 & 0 & 0 \\ r_{13x} & 0 & r_{23x} & r_{33x} & r_{43x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

On a

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a3} & \mathbf{K}_{d3} \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

où

$$\mathbf{K}_{a3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r_{13y} & 0 \\ r_{13x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$\mathbf{K}_{d3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -r_{23y} & -r_{33y} & -r_{43y} & 0 & 0 & 0 \\ r_{23x} & r_{33x} & r_{43x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

De la même façon, on a

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{E}r_{14} & \mathbf{E}r_{74} & \mathbf{E}r_{24} & \mathbf{E}r_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{54} & \mathbf{E}r_{64} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j4} comme suit:

$$\mathbf{r}_{74} = \begin{bmatrix} r_{74x} \\ r_{74y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{17} \\ l_8 s_{17} \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

$$\mathbf{r}_{64} = \begin{bmatrix} r_{64x} \\ r_{64y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} \\ l_6 s_{16} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{74} \quad (3.169)$$

$$\mathbf{r}_{54} = \begin{bmatrix} r_{54x} \\ r_{54y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{64} \quad (3.170)$$

$$\mathbf{r}_{34} = \begin{bmatrix} r_{34x} \\ r_{34y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{54} \quad (3.171)$$

$$\mathbf{r}_{24} = \begin{bmatrix} r_{24x} \\ r_{24y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{34} \quad (3.172)$$

$$\mathbf{r}_{14} = \begin{bmatrix} r_{14x} \\ r_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{24} \quad (3.173)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (3.167), on obtient

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r_{14y} & -r_{74y} & -r_{24y} & -r_{34y} & 0 & -r_{54y} & -r_{64y} & 0 \\ r_{14x} & r_{74x} & r_{24x} & r_{34x} & 0 & r_{54x} & r_{64x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

On a

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a4} & \mathbf{K}_{d4} \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

où

$$\mathbf{K}_{a4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -r_{14y} & -r_{74y} \\ r_{14x} & r_{74x} \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$$\mathbf{K}_{d4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r_{24y} & -r_{34y} & 0 & -r_{54y} & -r_{64y} & 0 \\ r_{24x} & r_{34x} & 0 & r_{54x} & r_{64x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

L'étape suivante vise à exprimer les vitesses articulaires dépendantes en fonction des vitesses articulaires actionnées. À partir du modèle présenté à l'équation (3.17), on peut dire

$$\mathbf{K}_a \dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_d \dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad (3.178)$$

où

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a3} \\ \mathbf{K}_{a4} \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d3} \\ \mathbf{K}_{d4} \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

Les vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ sont définis respectivement par les équations (3.125) et (3.126). On peut maintenant trouver la matrice \mathbf{C} de l'équation (3.21) qui donne

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{K}_a \quad (3.181)$$

Cette matrice \mathbf{C} nous permet, à l'aide de l'équation (3.20), d'exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des vitesses articulaires des liaisons actionnées. De cette nouvelle forme, on tire une matrice résultante \mathbf{J}_r que l'on exprime selon l'équation (3.23) où

$$\mathbf{J}_{r1} = \mathbf{J}_{a1} + \mathbf{J}_{d1} \mathbf{C} \quad (3.182)$$

$$\mathbf{J}_{r2} = \mathbf{J}_{a2} + \mathbf{J}_{d2} \mathbf{C} \quad (3.183)$$

On peut maintenant exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des deux vitesses articulaires pertinentes ($\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_7$), soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_r \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (3.184)$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r1} \\ \mathbf{J}_{r2} \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

3.6 Utilisation du modèle cinématique

Le modèle cinématique du préhenseur étant déterminé, il est possible de traiter différents problèmes liés à la conception ou la commande du préhenseur. Pour illustrer

chacune de ces applications, on traite un cas particulier du mécanisme 1 modélisé à la section 3.5.1. On donne donc les valeurs suivantes aux différents paramètres géométriques du mécanisme 1 de la Figure 3.2:

$$l_1 = 0.070 \text{ m}, l_2 = 0.100 \text{ m}, l_3 = 0.055 \text{ m}, l_4 = 0.075 \text{ m}, \\ l_5 = 0.040 \text{ m}, l_6 = 0.050 \text{ m}, l_7 = 0.035 \text{ m}, \theta_{4o} = 160^\circ, \alpha_1 = 180^\circ$$

où θ_{4o} est défini plus bas.

On étudiera les deux prises présentées précédemment, soit la prise ferme et la prise pincée. Pour chacune de ces prises, deux configurations sont utilisées afin de simuler la saisie d'objets de différentes formes et dimensions.

Pour la prise ferme, on utilise les deux configurations suivantes, illustrées à la Figure 3.8(a):

$$pw1: \theta_4 = 155^\circ, \theta_5 = 15^\circ$$

$$pw2: \theta_4 = 95^\circ, \theta_5 = -25^\circ$$

où $pw1$ est en noir et $pw2$ est en gris.

De la même façon, on étudie les deux configurations suivantes pour la prise pincée, illustrées à la Figure 3.8(b):

$$pc1: \theta_4 = 160^\circ, \theta_5 = 15^\circ$$

$$pc2: \theta_4 = 160^\circ, \theta_5 = 5^\circ$$

où $pc1$ est en noir et $pc2$ est en gris. Les efforts articulaires sont f_m , le couple généré au moteur et f_p , le moment généré à l'actionneur passif. Ce dernier est défini comme

$$f_p = f_{po} + k(\theta_{4o} - \theta_4) \quad (3.186)$$

où θ_{4o} est la valeur maximum de l'angle θ_4 , c'est-à-dire lorsque que le doigt est en configuration complètement ouverte et que la phalange distale repose contre la butée mécanique située sur la phalange proximale. Les caractéristiques de l'actionneur passif f_{po} et k sont respectivement le moment initial à l'actionneur passif et la raideur du ressort.

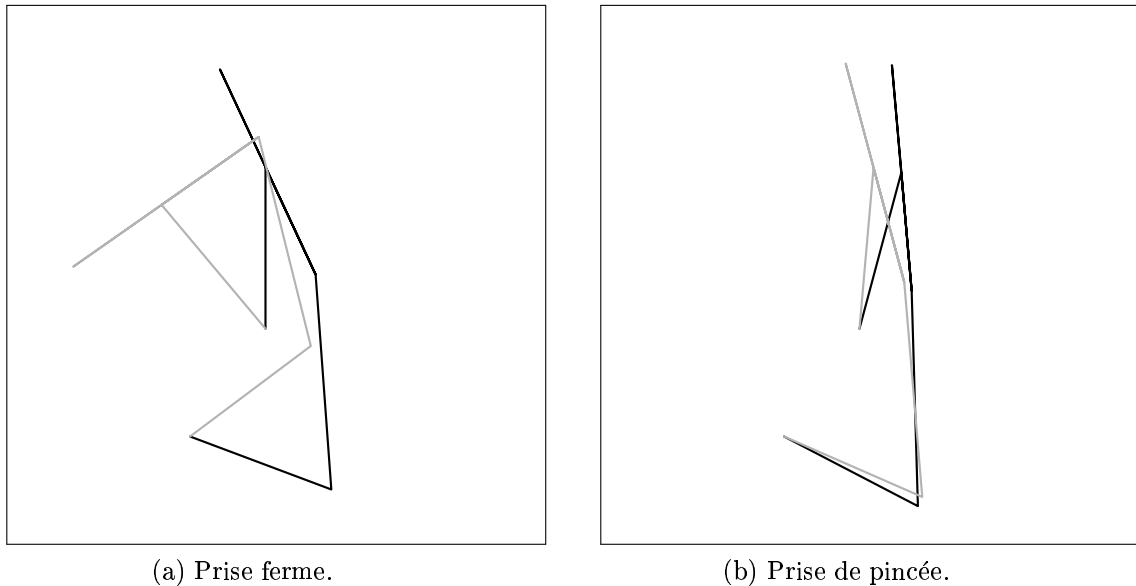


Figure 3.8: Configurations utilisées pour les prises.

3.6.1 Imposition des efforts articulaires

Cette première utilisation du modèle général est appliquée à l'étape de serrage de la prise ferme.

L'architecture du préhenseur étant connue, on désire connaître les forces sur les phalanges (vecteur \mathbf{t}) de façon à pouvoir connaître précisément les forces appliquées sur l'objet à saisir. On connaît f_m , l'effort à l'articulation motorisée. De plus, on connaît les caractéristiques de l'actionneur passif (f_{po} et k) ainsi que la configuration du mécanisme (vecteur $\boldsymbol{\theta}$). L'équation (3.186) permet alors de déterminer l'effort généré à l'actionneur passif (f_p).

La première étape est de déterminer la Jacobienne du préhenseur et de l'exprimer sous la forme présentée à l'équation (3.22). Puisque les efforts générés aux actionneurs (actif et passif) sont connus, on utilise les équations (3.37) et (3.38) pour obtenir un système de n équations à r inconnues, où r est le nombre de composantes dans le vecteur \mathbf{t} . Dans le cas isostatique, on aura $n = r$ et il sera possible de déterminer exactement le vecteur \mathbf{t} grâce à la simple résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. Dans le cas où $r > n$, le système est hyperstatique, et on ne peut déterminer la valeur du vecteur \mathbf{t} . Dans ce cas, on peut obtenir un vecteur correspondant à la solution à norme minimale de \mathbf{t} pour avoir un estimé de celui-ci. Cette solution suppose une

minimisation des efforts de contact, ce qui n'est pas forcément vérifié.

On impose maintenant les efforts articulaires au mécanisme 1 décrit plus haut afin de démontrer une première utilisation du modèle. On utilise les valeurs suivantes:

$$f_{po} = 1 \text{ Nm}, \quad k = 3 \text{ Nm/rad}, \quad 0 \text{ Nm} \leq f_m \leq 15 \text{ Nm}$$

où la valeur de f_m est inspirée de l'utilisation récente de moteurs compacts et où les caractéristiques de l'actionneur passif sont totalement arbitraires. Le seul critère considéré dans le choix de ces caractéristiques est le fait que le couple au moteur doit permettre de vaincre le moment généré à l'actionneur passif afin de permettre le mouvement de la phalange distale.

Puisqu'on étudie l'étape de serrage de la prise ferme, on fait varier le couple appliqué au moteur et on observe l'évolution de deux forces de contact sur l'objet (g_1 et g_2). On trouve la valeur de ces forces à l'aide des équations (3.37) et (3.38). Le vecteur efforts cartésiens est défini à l'équation (3.187) et on remarque que le système d'équations résultant est hyperstatique (deux équations, quatre inconnues ($g_{1x}, g_{1y}, g_{2x}, g_{2y}$)). Par contre, en supposant des *contacts ponctuels sans friction*, les forces appliquées sont perpendiculaires aux phalanges. Les composantes en x et en y de chacun des efforts sont donc dépendantes. De cette façon, le nombre de variables indépendantes est ramené à deux (g_1 et g_2). On simplifie alors la résolution du système ce qui permet d'obtenir l'évolution des forces cartésiennes en fonction de l'augmentation du couple généré à l'actionneur. Le vecteur \mathbf{t} est défini comme suit:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{2x} & g_{2y} \end{bmatrix}^T \quad (3.187)$$

où

$$g_{1x} = g_1 \cos \phi_1 \quad (3.188)$$

$$g_{1y} = g_1 \sin \phi_1 \quad (3.189)$$

$$g_{2x} = g_2 \cos \phi_2 \quad (3.190)$$

$$g_{2y} = g_2 \sin \phi_2 \quad (3.191)$$

Les angles ϕ_1 et ϕ_2 sont des angles qui dépendent de la configuration et qui donnent l'orientation des forces cartésiennes (perpendiculaires aux phalanges) par rapport à

l'axe x du repère de base (Figure 3.2). L'équation (3.36) devient:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{rm}^T \\ \mathbf{J}_{rp}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \cos \phi_1 \\ g_1 \sin \phi_1 \\ g_2 \cos \phi_2 \\ g_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

où

$$\mathbf{J}_{rm}^T = \begin{bmatrix} j_{rm1} & j_{rm2} & j_{rm3} & j_{rm4} \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

$$\mathbf{J}_{rp}^T = \begin{bmatrix} j_{rp1} & j_{rp2} & j_{rp3} & j_{rp4} \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

On peut donc exprimer (3.192) sous la forme

$$\mathbf{f} = \mathbf{L} \mathbf{t}_{12} \quad (3.195)$$

où

$$\mathbf{t}_{12} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.196)$$

et où

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix} \quad (3.197)$$

où

$$q = j_{rm1} \cos \phi_1 + j_{rm2} \sin \phi_1 \quad (3.198)$$

$$r = j_{rm3} \cos \phi_2 + j_{rm4} \sin \phi_2 \quad (3.199)$$

$$s = j_{rp1} \cos \phi_1 + j_{rp2} \sin \phi_1 \quad (3.200)$$

$$t = j_{rp3} \cos \phi_2 + j_{rp4} \sin \phi_2 \quad (3.201)$$

L'équation (3.195) peut donc être inversée pour écrire

$$\mathbf{t}_{12} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f} \quad (3.202)$$

Cette nouvelle équation permet de trouver la valeur des forces de contact entre les phalanges et l'objet (g_1 et g_2).

Les efforts cartésiens en fonction du couple généré à l'actionneur sont montrés à la Figure 3.9. Les courbes en noir sont associées à la configuration *pw1* et les courbes en gris sont associées à la configuration *pw2*. De plus, les courbes en trait continu sont

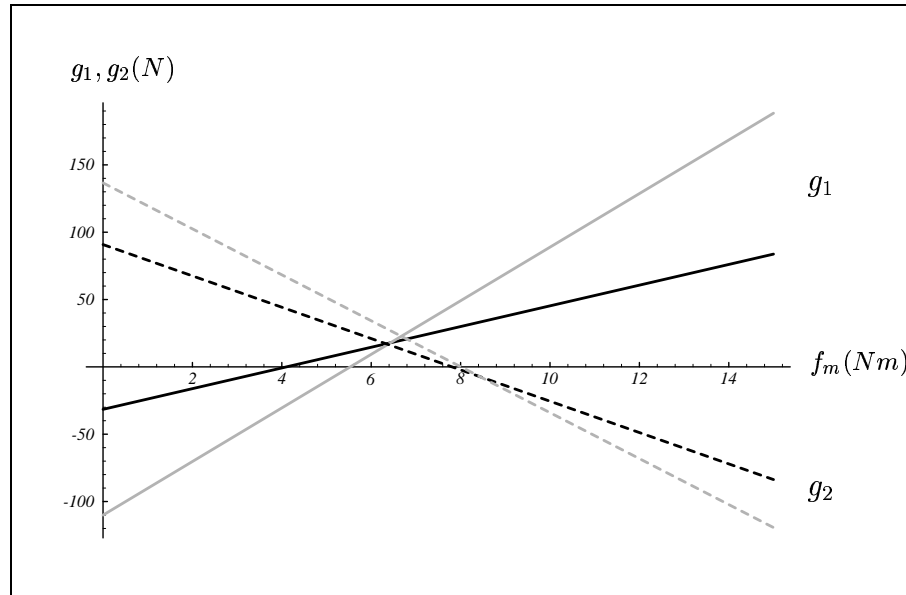


Figure 3.9: Efforts cartésiens en fonction du couple à l'actionneur.

associées à la *force distale* g_1 et les courbes en trait pointillé sont associées à la *force proximale* g_2 .

Afin de respecter l'unilatéralité des contacts, la valeur des forces proximale et distale doit demeurer positive en tout temps. La valeur de la force distale g_1 sera négative tant que la valeur du couple au moteur ne sera pas suffisamment élevée pour permettre l'application d'une force distale. En effet, le début de l'étape de serrage implique qu'une force proximale est appliquée et que le moment à l'actionneur passif est vaincu. Pour ce faire, un couple minimal doit être appliqué au moteur. Lorsqu'on atteint cette valeur minimale, on commence à appliquer une force distale, étape représentée par l'intersection de la courbe de l'effort distal (en trait continu) avec l'axe f_m . Pour cette raison, le cas où le couple à l'actionneur est inférieur à cette valeur minimale requise n'est pas réaliste.

Lorsque la valeur de la force proximale (en traits pointillés) devient négative, la prise est instable et on observe alors un mouvement des phalanges par rapport à l'objet. En effet, cette valeur négative signifie que l'objet devrait tirer sur la phalange proximale pour maintenir la prise stable. La phalange proximale s'éloigne donc de l'objet jusqu'à ce qu'un état d'équilibre soit atteint, sinon, l'objet est échappé. Ce phénomène d'instabilité est discuté en détail à la section 4.1.2.

Les courbes de la Figure 3.9 sont donc valides seulement pour des efforts positifs sur les phalanges, efforts qui évoluent alors de façon linéaire lorsque le couple à l'actionneur augmente. En effet, la configuration est fixée et le mécanisme se comporte comme une structure rigide sur laquelle les efforts à la sortie (forces sur l'objet) varient proportionnellement à l'effort à l'entrée (couple à l'actionneur). Pour la prise *pw1*, la plage de validité du graphe de la Figure 3.9 est donc d'environ $f_m = 4$ à $8 Nm$ et d'environ $f_m = 5.5$ à $8 Nm$ pour *pw2*.

Le cas où les efforts articulaires sont imposés permet donc l'analyse des forces appliquées par un mécanisme dont la géométrie est fixée. On peut alors déterminer pour n'importe quelle configuration si le mécanisme est stable et quelles efforts sur l'objet il permet de générer.

3.6.2 Imposition des efforts cartésiens

On étudie maintenant le mécanisme de la section précédente pour lequel on connaît les efforts cartésiens (g_1 et g_2) et on tente de déterminer les efforts articulaires (f_m et f_p). Il est alors possible d'imposer des valeurs de forces proximale et distale générant une prise stable. Les équations (3.37) et (3.38) permettent de trouver respectivement les forces articulaires des liaisons motorisées et les forces articulaires des liaisons actionnées passivement pour des valeurs d'efforts cartésiens imposées.

La cas étudié ici est en fait la fin de la période de contact et le début de la période de serrage. On considère donc, pour les configurations *pw1* (en noir) et *pw2* (en gris), qu'une force proximale de $100 N$ est appliquée et que la force distale varie de $0 N$ à $100 N$. Les résultats sont montrés à la Figure 3.10 où f_m est en trait continu et f_p est en trait pointillé. En imposant la valeur des forces proximale et distale, on suppose que les moments générés aux liaisons actionnées passivement peuvent varier. Cependant, puisque le mécanisme est immobilisé contre l'objet et que l'état de compression du ressort ne change pas, le moment à l'actionneur passif demeure constant, ce qui ne permet pas d'augmenter la valeur de la force distale tout en maintenant la force proximale constante. Le graphe de la Figure 3.10 doit donc être interprété comme un outil d'analyse permettant d'estimer les caractéristiques nécessaires du mécanisme et

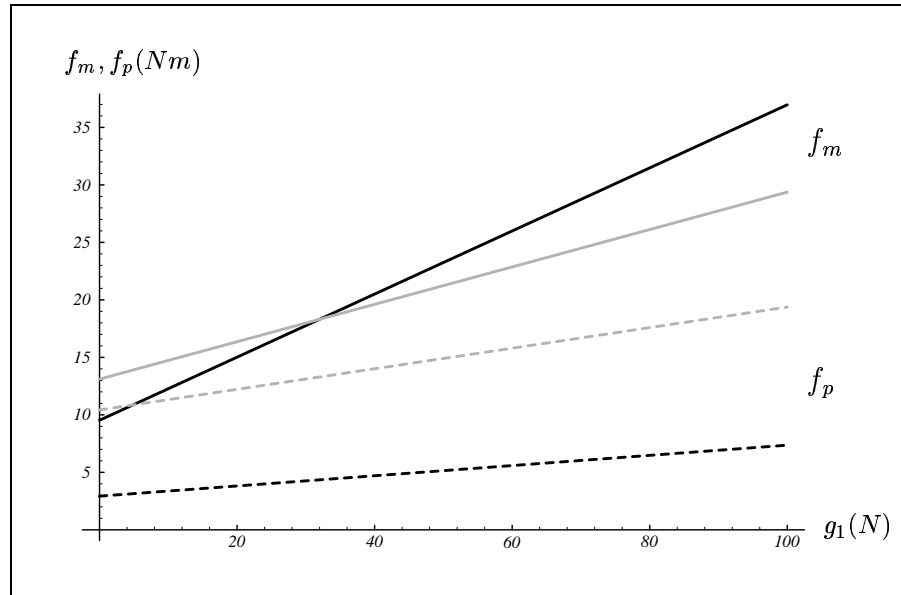


Figure 3.10: Efforts aux actionneurs en fonction de la force distale.

non pas comme une simulation du comportement réel du mécanisme. Enfin, on pourrait obtenir une bonne approximation du comportement désiré en utilisant un ressort non-linéaire.

3.6.3 Cas mixte cartésien-articulaire

Il est aussi possible de spécifier partiellement les efforts cartésiens et articulaires. Le plus bel exemple de cas mixte est celui relatif à la prise de pincée. En effet, la prise de pincée est caractérisée par l'absence de contact sur la phalange proximale. En imposant une valeur nulle pour la force proximale, la condition première de la prise de pincée est satisfaite. En imposant un effort au moteur, on veut voir quelle force distale peut être appliquée et de quelle façon la butée mécanique est sollicitée. Cette dernière information est importante puisque la condition nécessaire à la réalisation d'une prise de pincée stable est l'application d'une force positive par la butée mécanique sur la phalange distale. En effet, si cette valeur est nulle, la stabilité de la prise dépend alors des caractéristiques de l'actionneur passif. Si le moment initial à l'actionneur passif est vaincu et que la phalange distale n'est plus en butée, cette dernière se met en mouvement autour de l'objet et la stabilité de la prise est compromise. On élabore plus en détail sur ce phénomène à la section 4.1.3.

On impose donc les valeurs suivantes:

$$0 \text{ Nm} \leq f_m \leq 15 \text{ Nm}, \quad g_2 = 0 \text{ N}$$

Comme prévu et illustré à la Figure 3.11, la force distale appliquée sur l'objet augmente linéairement lorsque le couple au moteur est augmenté.

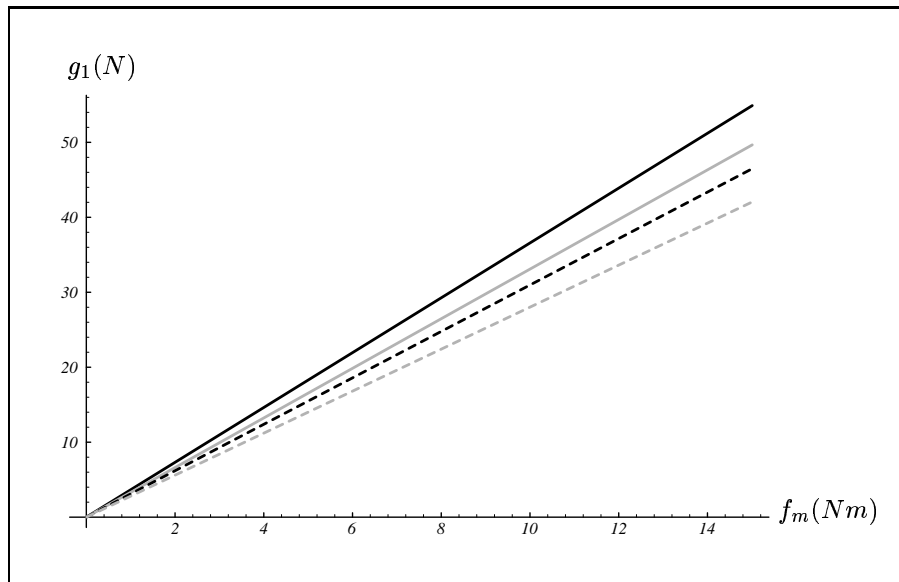


Figure 3.11: Force distale en fonction du couple au moteur.

L'effort à l'actionneur passif en fonction du couple au moteur est illustré à la Figure 3.12. Pour les Figures 3.11 et 3.12, les configurations *pc1* et *pc2* sont respectivement représentées par les courbes en noir et en gris. Les courbes en trait continu traitent le cas où le contact se fait à la mi-phalange, soit à $l_5 = 0.040 \text{ m}$ (Figure 3.2). Les courbes en trait pointillé représentent le cas où le point d'application de la force distale se fait au bout du doigt, soit à $l_5 = 0.060 \text{ m}$.

À la Figure 3.11, on voit qu'une variation de la position du point d'application (l_5) de la force distale (g_1) ne fait que légèrement varier la valeur de cette force. Par contre, la Figure 3.12 démontre que la position de ce point a un impact important sur la valeur de l'effort à la butée mécanique, donc sur la stabilité de la prise. On considère ici que f_p est la valeur de l'effort appliqué à la *liaison actionnée passivement*. Une valeur négative de f_p signifie que l'effort à l'articulation actionnée passivement doit être généré par la butée mécanique, qui empêche tout mouvement relatif entre les phalanges distale et

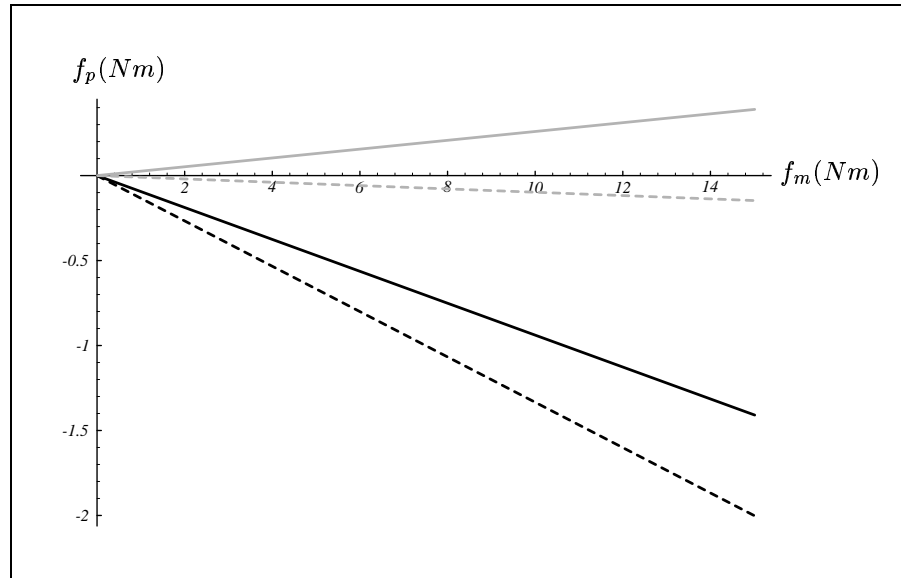


Figure 3.12: Effort à l'actionneur passif en fonction du couple au moteur.

proximale. Une valeur positive de f_p signifie que l'actionneur passif doit générer un moment afin de maintenir la phalange distale en butée. Si la valeur du moment initial (f_{po}) à l'actionneur passif est faible (il est considéré nul pour l'exemple traité ici), le moment pouvant être généré par l'actionneur passif est négligeable (nul dans ce cas-ci). Conséquemment, en regardant la figure 3.12 on conclut que la prise de pincée effectuée avec le point d'application de la force à la mi-phalange ($l_5 = 0.040\text{ m}$) est instable pour la configuration *pc2* (courbe en gris et en trait continu de la Figure 3.12). Cette courbe ne représente pas un cas réaliste de saisie puisque le moment à l'actionneur passif ne peut pas être augmenté. En effet, la prise de pincée suppose que la phalange distale ne bouge pas par rapport à la phalange proximale, donc que l'état de compression du ressort ne change pas. En déplaçant le point d'application de la force distale vers le bout de la phalange ($l_5 = 0.060\text{ m}$), on voit que la prise de pincée est stable pour les deux configurations et que le mécanisme favorise de façon naturelle une augmentation de l'effort sur la butée.

3.6.4 Design

Le problème le plus complexe à traiter est celui de la conception cinématique du préhenseur. À partir d'une topologie de préhenseur donnée, on cherche à établir les paramètres

géométriques ainsi que les paramètres de raideur des liaisons à actionnement passif. On définit le vecteur des inconnues comme

$$\mathbf{x} = [l_1 \quad \dots \quad l_m \quad \theta_1^o \quad \dots \quad \theta_c^o \quad k_1 \quad \dots \quad k_c \quad f_{po1} \quad \dots \quad f_{poc}] \quad (3.203)$$

où les l_i désignent les paramètres dimensionnels du mécanisme, les θ_i^o les angles libres des liaisons à actionnement passif, les k_i les constantes de raideur des actionneurs passifs et les f_{poi} les moments initiaux aux actionneurs passifs.

Le problème de la conception se pose comme suit: étant donné les forces appliquées sur l'objet et les efforts aux actionneurs pour un ensemble de configurations données, déterminer le vecteur \mathbf{x} . En général, on utilisera un nombre de configurations suffisant pour rendre le problème surdéterminé et on cherchera alors une solution minimisant les erreurs. À cette fin, on écrit l'équation (3.35) pour chacune des configurations visées et on obtient finalement un système surdéterminé de la forme

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.204)$$

que l'on solutionne en utilisant une méthode numérique appropriée.

Ce dernier problème est celui qui sera plus particulièrement traité dans la suite de ces travaux.

3.7 Conclusion sur l'analyse de mécanismes

Les modélisations cinématique et statique des mécanismes sous-actionnés ont été présentés dans ce chapitre. Ce modèle général permet d'exprimer les efforts appliqués sur l'objet à saisir en fonction des efforts générés aux actionneurs (motorisés et actionnés passivement). Il permet donc d'analyser le comportement des mécanismes sous-actionnés et de développer de façon systématique des préhenseurs efficaces.

Des exemples d'utilisation du modèle ont été présentés en l'appliquant à un mécanisme sous-actionné à deux degrés de liberté. L'analyse préliminaire issue de ces exemples permet déjà de cerner une caractéristique importante sur laquelle une attention particulière sera portée, l'instabilité associée aux mécanismes sous-actionnés.

CHAPITRE 4

ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES PRÉHENSEURS SOUS-ACTIONNÉS

4.1 Considérations générales

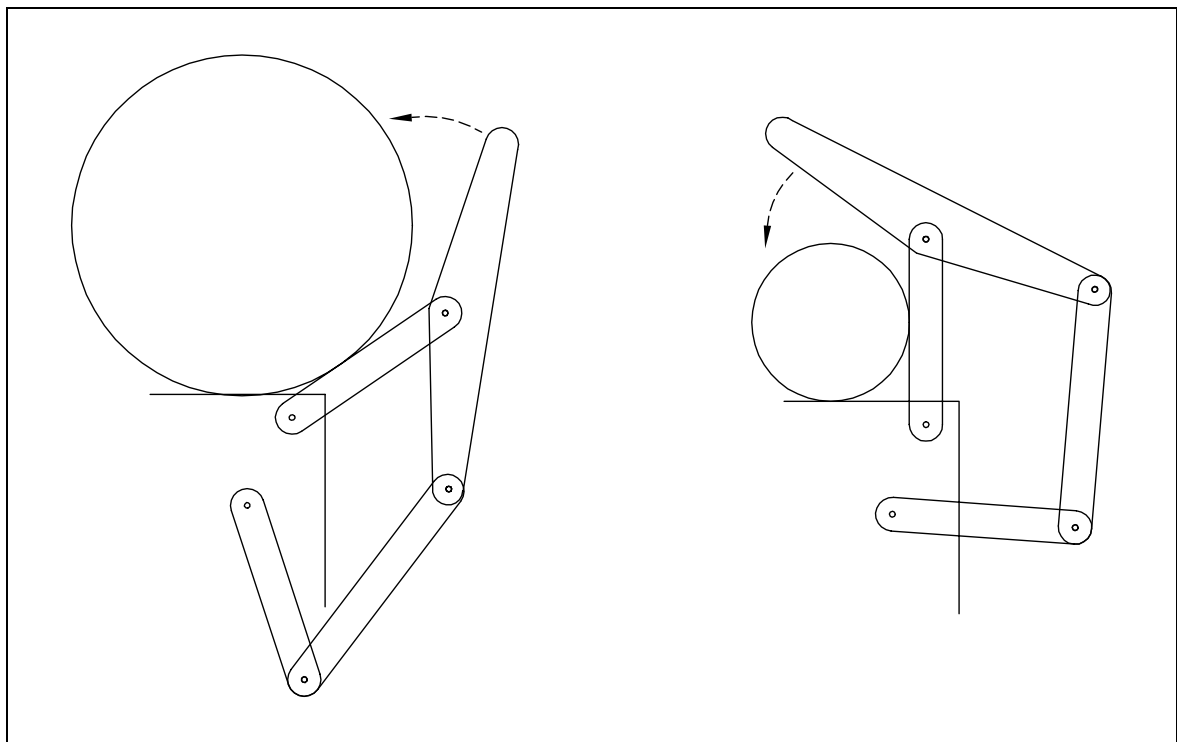
L'étude des mécanismes sous-actionnés est motivée par les situations d'instabilité parfois rencontrées lors de la saisie d'objets et le degré d'intervention limité de l'algorithme de commande sur le comportement du mécanisme. Il faut s'assurer que le mécanisme puisse effectuer les prises avec succès et de façon sécuritaire.

Pour ce faire, on concentre l'étude sur les trois cas de saisie représentant des risques d'instabilité, soit les étapes de contact et de serrage de la prise ferme et l'étape de serrage de la prise de pincée.

4.1.1 L'étape de contact de la prise ferme

L'étape de contact de la prise ferme génère les conditions initiales pour l'étape de serrage. En effet, lorsque l'orientation de la phalange proximale est fixée et que la phalange distale est en mouvement vers l'objet, le mécanisme passe par une série de configurations représentant chacune la condition initiale pour l'étape de serrage d'un objet de forme et dimension différente. On connaît alors le couple à l'actionneur ainsi que la force proximale pour chacune de ces configurations.

Si on néglige le frottement et qu'on suppose que la saisie est effectuée par un mécanisme plan, la configuration montrée à la Figure 4.1(a) présente de grands dangers d'éjection de l'objet. En effet, l'objet aura tendance à s'éloigner de la paume lorsque la force proximale est appliquée sur celui-ci. La configuration de la Figure 4.1(b) représente un cas de saisie plus réaliste puisque la force proximale est dirigée vers la phalange proximale du mécanisme travaillant en coopération avec le premier.



(a) Risques potentiels d'éjection de l'objet.

(b) Prise sécuritaire.

Figure 4.1: Configurations pertinentes à l'étape de contact de la prise ferme.

Évidemment, si on suppose que l'objet est fixé à un support ou qu'une surface l'empêche de s'éloigner du préhenseur (saisie conventionnelle d'un objet sur une table

par exemple), alors la saisie illustrée à la Figure 4.1(a) peut être effectuée sans problème.

La première étape de l'étude est donc de déterminer les configurations pertinentes au cas de la prise ferme. Ces configurations dépendent évidemment de la dimension des objets à saisir mais aussi de la longueur des phalanges, du nombre de doigts et de leur disposition, des configurations extrêmes des doigts (positions ouverte et fermée), de la géométrie de la paume et de la stratégie de saisie.

Lorsque les configurations à étudier sont déterminées, on voudra minimiser la valeur de la force proximale durant l'étape de contact afin de réduire les risques d'éjection de l'objet. Un graphe général de l'effort proximal en fonction de la fermeture de la phalange distale est présenté à la Figure 4.2. Le mécanisme de la Figure 3.2 est pris ici comme exemple.

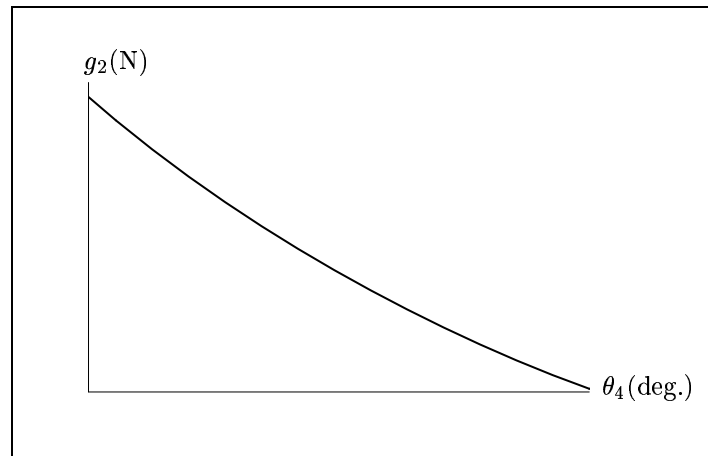


Figure 4.2: Graphe général de la force proximale en fonction de l'orientation de la phalange distale pour la période de contact de la prise ferme.

On doit lire le graphique de droite à gauche. En effet, l'extrême droite de la courbe représente le contact initial de la phalange proximale avec l'objet pour une valeur quelconque de θ_5 . La phalange distale est alors en butée (la valeur de θ_4 est maximale). En se déplaçant vers la gauche du graphique, la valeur de θ_4 diminue (la phalange distale est en mouvement vers l'objet) et la valeur de la force proximale augmente due à la compression du ressort (actionneur passif) et au changement d'orientation de la membrure 2 par rapport à la membrure 3 (Figure 3.3). La valeur de cette force proximale dépend donc du moment initial à l'actionneur passif, de la raideur du ressort et de l'efficacité de transmission des efforts du mécanisme, qui dépend alors de sa

configuration.

La courbe de la Figure 4.2 représente, pour une valeur donnée de θ_5 , l'ensemble des configurations pertinentes à la saisie d'objets de différentes formes et dimensions. Il est donc possible de déterminer le comportement du mécanisme en période de contact pour la saisie d'un objet de forme et de dimension quelconque en traçant la courbe de la Figure 4.2 pour différentes valeurs de θ_5 .

Le critère important pour éviter l'éjection de l'objet est donc la minimisation de la valeur de g_2 pour toute la durée de la période de contact de la prise ferme pour des objets de formes et dimensions variées.

4.1.2 L'étape de serrage de la prise ferme

Lorsque la période de contact est terminée, on connaît la valeur de la force proximale. Une deuxième force est alors appliquée, la force distale g_2 .

La Figure 4.3 présente le graphe général de l'évolution des efforts sur l'objet en fonction du couple au moteur. Les courbes de g_1 et g_2 sont présentées pour une configuration donnée du mécanisme de la Figure 3.2. La partie du graphe à gauche du trait vertical gris, appelée *étape de contact*, n'est pas valide. En effet, la fin de la phase de contact de la prise ferme implique que le ressort (actionneur passif) est comprimé et qu'une force proximale (g_2) est appliquée. Un couple minimum doit donc nécessairement être appliqué par l'actionneur et sa valeur est celle associée au point a_1 , représentant le début de la période de serrage. On peut interpréter la courbe g_1 de la zone *étape de contact* comme étant la valeur de force distale (négative) nécessaire pour permettre à la phalange distale d'être dans la configuration visée. Puisque le couple généré à l'actionneur n'est pas suffisant pour permettre d'atteindre cette configuration, on doit tirer sur la phalange distale jusqu'à ce que la valeur de f_m soit suffisante (point a_1). À ce moment, la période de serrage commence et une force distale peut alors être appliquée sur l'objet. La valeur initiale de la force proximale pour la période de serrage (b'_2) peut être trouvée à l'aide de la courbe de la Figure 4.2.

La section *Prise stable* du graphe représente le comportement statique du mécanisme lorsqu'il est immobilisé contre l'objet et que les forces de serrage sont augmentées. La

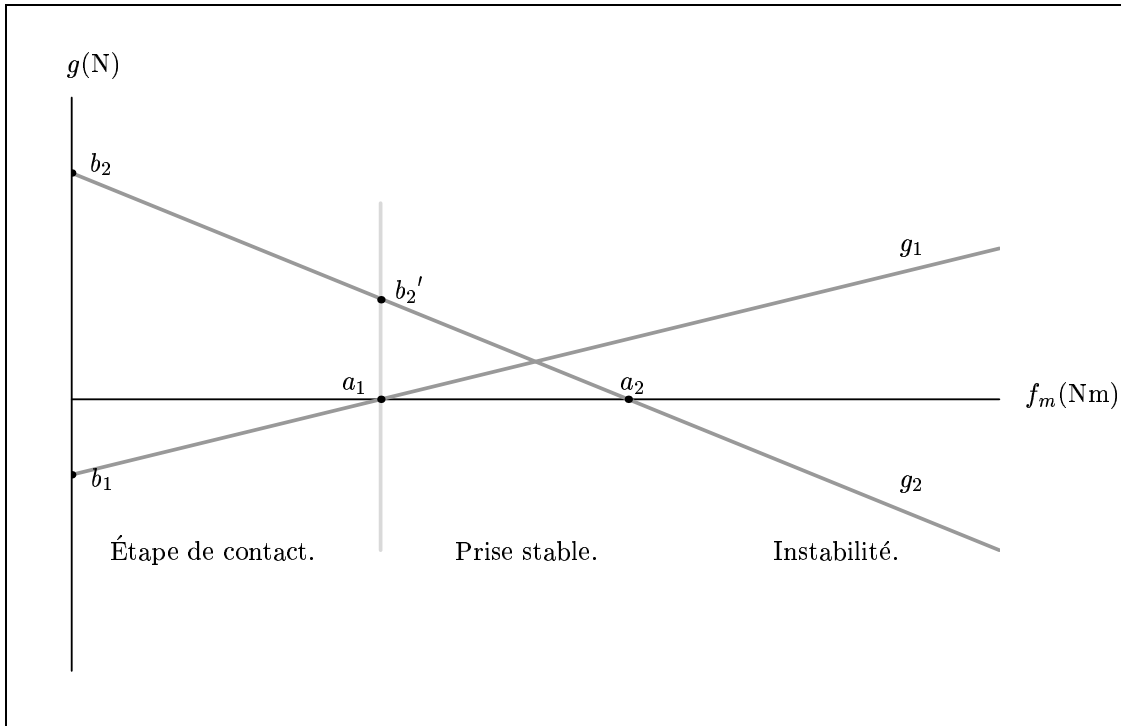
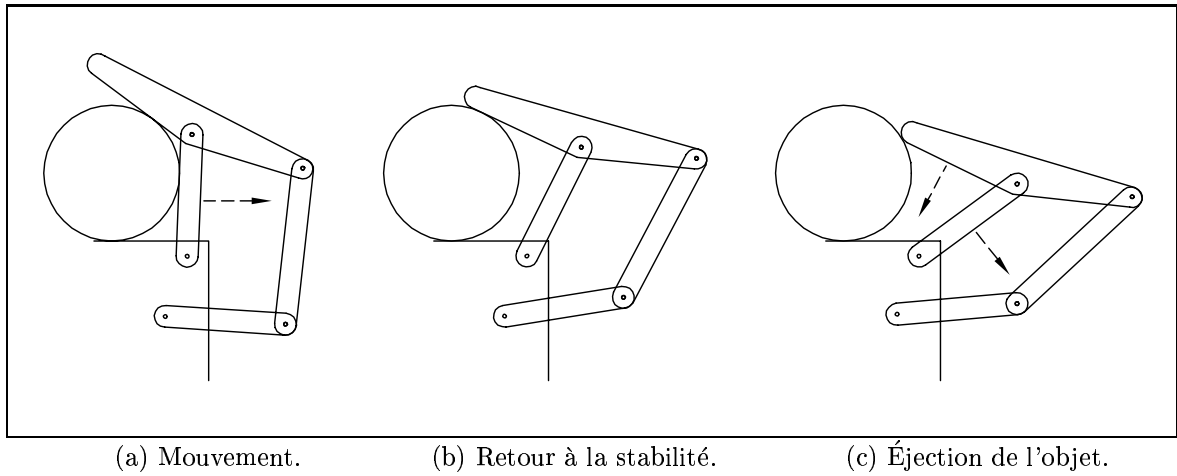


Figure 4.3: Graphe général des forces cartésiennes en fonction du couple au moteur pour la période de serrage de la prise ferme.

force distale (g_1) évolue de façon linéaire, mais il arrive parfois que la force proximale (g_2) diminue jusqu'à atteindre une valeur nulle. À ce moment, l'unilatéralité du contact proximal n'est plus respectée. Dans ce cas, pour que la prise demeure stable il faudrait que l'objet tire sur la phalange proximale, ce qui ne se produit évidemment pas.

Il se produit plutôt ce qui est illustré à la Figure 4.4(a), soit un mouvement du mécanisme autour de l'objet. Deux dénouements sont alors possibles. Le mécanisme peut s'immobiliser dans une nouvelle configuration stable, avec un contact sur la phalange distale seulement (Figure 4.4(b)). Ce comportement est comparable au *Self-Posture-Changing-Motion* observé avec la commande hybride de manipulateurs sériels (Kaneko et Tanie 1990; Kaneko et Hayashi 1993). En effet, cette capacité d'un mécanisme à changer sa configuration tout en maintenant un contact avec l'objet a été observée par ces auteurs sur des architectures sérielles lorsque certaines articulations sont commandées en force et d'autres en position. La configuration finale du mécanisme dépend alors de la force de frottement qui existe entre les surfaces de la phalange, de la paume et de l'objet.

Si le retour à l'équilibre statique n'est pas possible, le doigt contourne l'objet et l'échappe (Figure 4.4(c)).



(a) Mouvement.

(b) Retour à la stabilité.

(c) Éjection de l'objet.

Figure 4.4: Instabilité durant la période de serrage de la prise ferme.

Lorsque le mécanisme est en mouvement et que le couple à l'actionneur continue d'augmenter, il n'y a aucun moyen d'intervenir sur le comportement du mécanisme. On voudra donc éviter cette situation et imposer une valeur positive de force proximale, pour toutes les configurations pertinentes (forme et dimension des objets à saisir). La plage de validité du graphe de la Figure 4.3 est donc limitée à la zone située entre les points a_1 et a_2 .

Enfin, pour éviter l'éjection de l'objet hors de la main, la force résultante (la somme des forces proximale et distale) doit être dirigée vers la paume ou au moins, vers le mécanisme qui travaille en coopération avec le premier. Le rapport des forces proximale et distale devrait donc idéalement varier d'une configuration à l'autre afin de toujours permettre une force résultante adéquate.

4.1.3 L'étape de serrage de la prise de pincée

Comme il a été mentionné auparavant, la prise de pincée s'effectue avec le bout des doigts. Un seul contact est donc établi avec l'objet, soit celui avec la phalange distale. Pour un doigt à trois degrés de liberté, une prise de pincée, dite de deuxième ordre, peut être accomplie à l'aide de la phalange médiane et la phalange distale.

La prise de pincée a la particularité d'être accomplie à l'aide de très peu de contacts. L'absence de contact avec la paume rend plus instable l'équilibre des forces sur l'objet. La stabilité de la prise est donc ici une condition nécessaire au succès de la saisie.

La butée mécanique joue un grand rôle dans le succès de la prise de pincée. En effet, elle empêche l'hyper-extension du doigt et permet de transmettre les efforts internes qui génèrent la force distale. La phalange distale doit en tout temps demeurer en position complètement ouverte, soit reposer contre la phalange proximale via la butée mécanique. Aussitôt que la contrainte d'unilatéralité du contact entre la butée et la phalange distale n'est pas respectée, cette dernière se met en mouvement autour de l'objet, comme illustré à la Figure 4.5. Il est alors fort improbable que le mécanisme

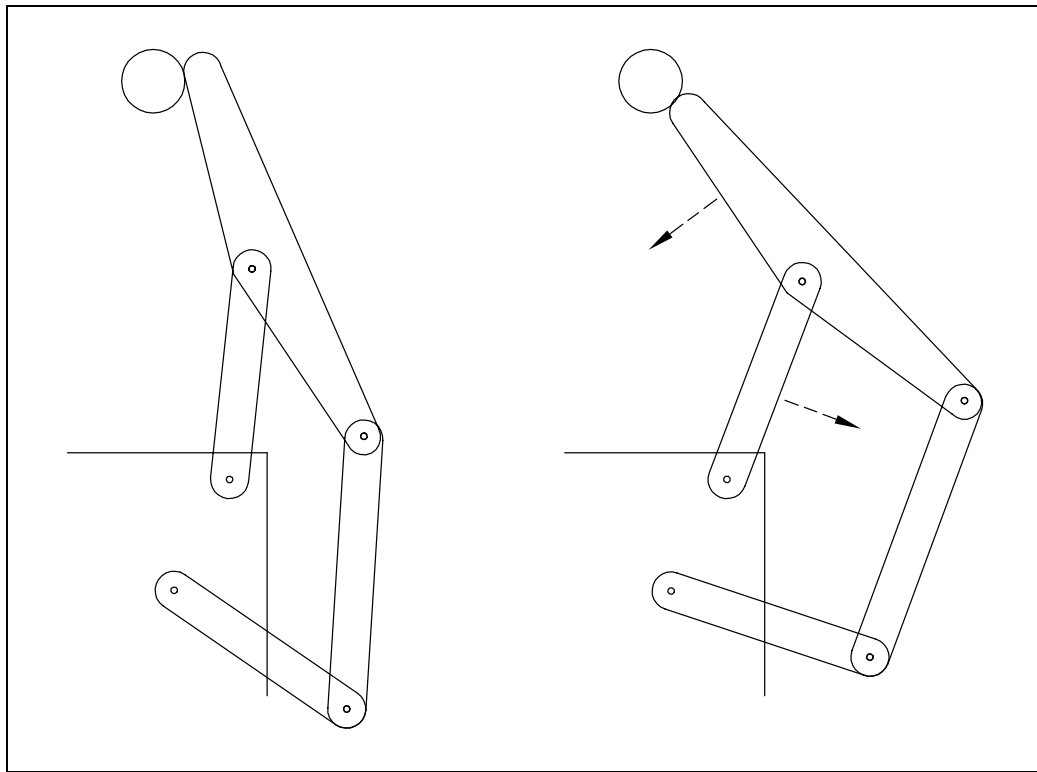


Figure 4.5: Instabilité durant la période de serrage de la prise de pincée.

retrouve une position d'équilibre puisque l'absence de contact entre l'objet et la paume rend la stabilité de la prise très précaire. La force distale doit donc être orientée vers la phalange distale du mécanisme qui travaille en coopération, sinon l'objet est échappé. Si un mouvement de la phalange distale se produit, l'orientation de la force distale devient vite inadéquate.

On introduit ici la notion de *point critique*, qui régit la stabilité de la prise de pincée. Le *point critique* est défini comme le point sur la phalange distale, le plus près de la liaison distale, où la prise de pincée peut être accomplie avec succès. Tout contact au-delà de ce point, c'est-à-dire plus près du bout du doigt, générera une prise stable. Un contact établi entre le *point critique* et la liaison distale générera une prise instable.

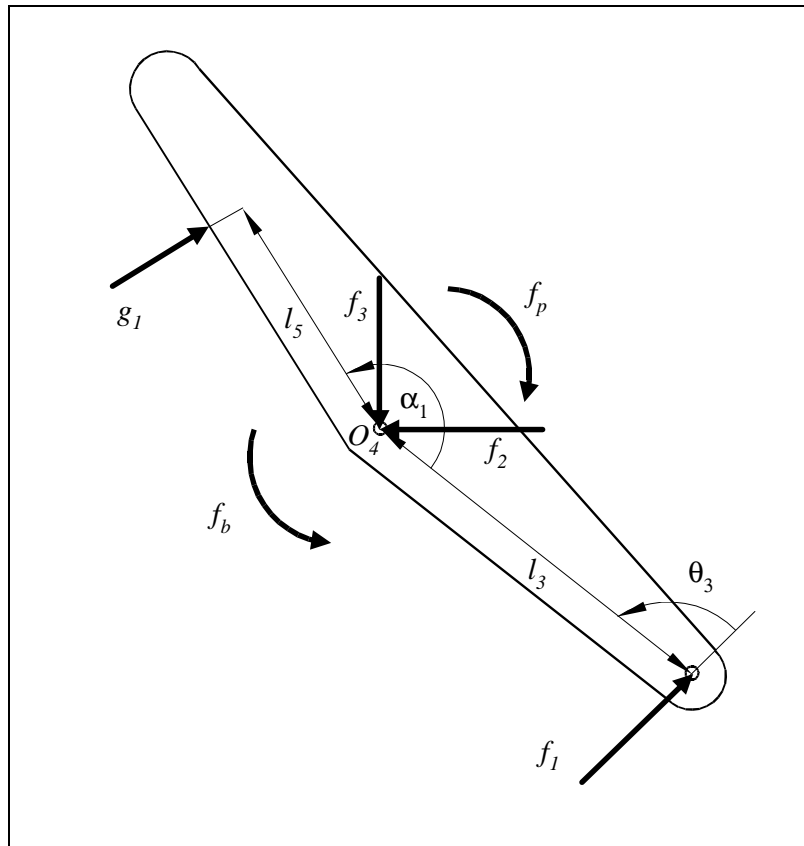


Figure 4.6: Diagramme de Corps Libres de la phalange distale du mécanisme 1.

On traite l'exemple du mécanisme 1 de la Figure 3.2. La position du *point critique* est exprimée par la longueur l_5 minimale (l_{5crit}) qui génère une prise de pincée stable. On trouve facilement la position du point critique en faisant une étude statique du Diagramme de Corps Libres (DCL) de la phalange distale (Figure 4.6). À l'aide de la somme des moments autour de la liaison O_4 , on peut écrire

$$l_5 = \frac{f_1 l_3 \sin \theta_3 - f_p + f_b}{g_1} \quad (4.1)$$

où g_1 est la force distale (perpendiculaire à la phalange) et où f_1 , f_2 et f_3 sont des

efforts internes. L'effort généré à l'actionneur passif, f_p , est défini comme

$$f_p = f_{po} + k(\theta_{4o} - \theta_4) \quad (4.2)$$

où f_{po} et k sont respectivement le moment initial et la raideur du ressort. Évidemment, si la phalange distale est en butée, la raideur du ressort n'a aucune influence sur la valeur de f_p ($\theta_{4o} = \theta_4$). Enfin, f_b représente le moment généré par la butée mécanique.

Puisque la position du *point critique* est déterminée pour le cas où la force entre la butée mécanique et la phalange distale devient nulle (cas limite), on pose $f_b = 0$. L'équation (4.1) devient

$$l_{5crit} = \frac{f_1 l_3 \sin \theta_3 - f_p}{g_1} \quad (4.3)$$

La position du *point critique* dépend donc de la configuration du mécanisme, de sa géométrie, des caractéristiques de l'actionneur passif (plus particulièrement de f_{po}) et de l'intensité de la force distale. En éliminant les paramètres dépendants, l_{5crit} est défini par

$$l_{5crit} = f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_6, l_7, \alpha_1, f_{po}, \theta_4, \theta_5, f_1, g_1) \quad (4.4)$$

Puisque le point d'application de la force g_1 dépend de la dimension de l'objet, il est difficile de prédire la position du point d'application de la force distale pour toutes prises de pincée. Il est donc impératif de localiser le *point critique* le plus près possible de la liaison distale afin de conserver une plage intéressante pour le point de contact. Il faut cependant garder en tête qu'une prise de pincée est normalement effectuée sur le bout du doigt. Il serait donc pénalisant d'imposer un *point critique* trop près de la liaison distale. De plus, on doit imposer la position du *point critique* pour la configuration la plus instable, qui est généralement la plus fermée (d'après plusieurs essais).

La façon la plus évidente de minimiser l_{5crit} de l'équation (4.3) serait de maximiser la valeur de f_p , donc la valeur f_{po} (puisque la phalange distale est en butée). Par contre, après plusieurs essais on conclut que plus cette valeur est élevée, plus l'effort proximal est élevé durant l'étape de contact de la prise ferme (Figure 4.2). Puisqu'on veut minimiser cet effort, on voudra minimiser la valeur du moment initial à l'actionneur passif.

Le cas limite le plus défavorable à la stabilité de la prise de pincée est donc celui où le moment initial à l'actionneur passif est nul. À ce moment, aucune structure

mécanique (butée mécanique et ressort en torsion) ne joue en faveur de la stabilité. En faisant cette hypothèse, le terme f_p disparaît de l'équation (4.3) qui devient

$$l_{5crit} = \frac{f_1 l_3 \sin \theta_3}{g_1} \quad (4.5)$$

Le ratio $\frac{f_1}{g_1}$ étant constant, on peut exprimer l'équation (4.5) comme

$$l_{5crit} = f(l_1, l_2, l_3, l_4, l_6, l_7, \alpha_1, \theta_4, \theta_5,) \quad (4.6)$$

Dans ces conditions, le *point critique* dépend uniquement des paramètres géométriques du mécanisme et de sa configuration. On peut maintenant déterminer sa position pour la configuration la plus instable. En imposant cette position du *point critique*, on s'assure de la stabilité de la prise de pincée pour toutes les configurations.

La relation entre le moment généré par l'effort sur la butée mécanique et le couple au moteur est illustrée à la Figure 4.7. Le moment initial à l'actionneur passif (f_{po}) n'est pas négligé afin de modéliser le comportement du mécanisme de la façon la plus réaliste possible.

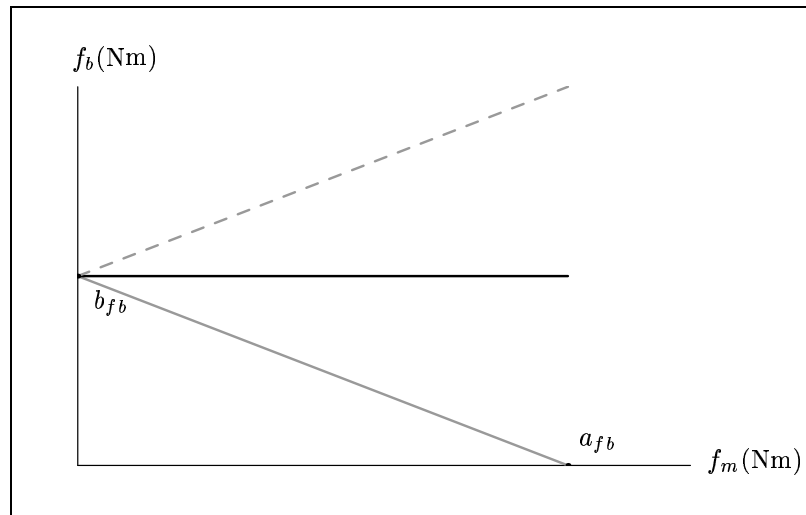


Figure 4.7: Graphe général de l'effort à la butée mécanique en fonction du couple au moteur pour la prise de pincée.

Le point b_{fb} représente l'ordonnée à l'origine qui est en fait la valeur de f_{po} , puisque la butée mécanique génère alors un effort de réaction au moment initial à l'actionneur passif. Si le point d'application de la force distale est situé exactement sur le *point*

critique, la pente de la courbe de la Figure 4.7 (en trait continu noir) est nulle et le mécanisme demeurera toujours en butée, mais aussi près de l'instabilité que f_{po} est près de 0.

Si la force distale est appliquée au dessus du *point critique*, la pente de la courbe est positive (en trait pointillé gris), alors la force sur la butée augmentera avec le couple au moteur. On est alors assuré d'une prise stable.

Enfin, si le point d'application de la force est plus près de la liaison distale que le *point critique*, la pente est négative (en trait continu gris). La prise devient instable aussitôt que f_{po} est vaincu et que la valeur de f_b devient négative, ce qui correspond à $f_m = a_{fb}$ sur le graphe.

4.2 Algorithme de Newton-Gauss

Afin de permettre la formulation mathématique des problèmes définis à la section précédente, on introduit maintenant l'algorithme de *Newton-Gauss* (Ortega et Rheinboldt 1970, Angeles 1985). Cet algorithme permet de résoudre un système surdéterminé d'équations non-linéaires (plus d'équations que d'inconnues). Il consiste à obtenir itérativement une solution approximée en utilisant la méthode des *moindres carrés*. Le problème est défini comme

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

où \mathbf{f} est le vecteur objectif (de dimension m , c'est-à-dire les m équations). Le vecteur \mathbf{x} (de dimension n) contient les inconnues, où $m > n$.

L'algorithme de *Newton-Gauss* génère une séquence de vecteurs, définie comme

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_k \quad (4.8)$$

qui permet de converger vers une solution approximative. Le vecteur \mathbf{x}_{k+1} est trouvé avec

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k \quad (4.9)$$

où

$$\Delta \mathbf{x}_k = -\mathbf{F}^J(\mathbf{x}_k)\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (4.10)$$

dans laquelle

$$\mathbf{F}^I = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \quad (4.11)$$

et où la matrice \mathbf{F} est la matrice de dérivées partielles de \mathbf{f} par rapport à \mathbf{x} . Lorsqu'il y a convergence, $\Delta \mathbf{x}_k$ tend vers zéro et la solution \mathbf{x} est obtenue.

Le succès de cet algorithme dépend de la qualité de l'estimé initial, même si le principe de *continuation* est utilisé, ce qui est le cas ici. Ce dernier est notamment utilisé pour la résolution du problème géométrique inverse des manipulateurs sériels (Angeles et Rojas 1987). Cette méthode consiste à fixer une série d'objectifs intermédiaires facilitant le cheminement de l'algorithme de l'estimé initial vers l'objectif global. Elle permet donc de débiter l'algorithme avec un estimé initial de moins bonne qualité et de converger à travers une séquence de boucles d'itérations. L'estimé initial doit tout de même se situer dans le domaine de faisabilité, sinon l'algorithme divergera.

4.3 Analyse des mécanismes

On passe maintenant à l'analyse détaillée des trois mécanismes plans modélisés au chapitre précédent. On développe les équations régissant le comportement des mécanismes et on impose certaines caractéristiques à ces derniers de façon à pouvoir réaliser avec succès les prises visées. On veut obtenir un mécanisme qui représente un bon estimé initial servant de point de départ dans l'algorithme d'optimisation présenté au prochain chapitre. L'algorithme de *Newton-Gauss* utilisé dans ce chapitre a été programmé en langage *Mathematica* (version 2.2 pour *SiliconGraphics*) et tous les calculs ont été effectués sur une station de travail *SiliconGraphics* Indigo 2 (CPU:MIPS4400, RAM:96MB, Système:IRIX 5.3e).

On étudie, pour les trois mécanismes, les trois cas de saisie pertinents à l'étude de la stabilité, soit les étapes de contact et de serrage de la prise ferme ainsi que l'étape de serrage de la prise de pincée.

Les équations sont développées à l'aide de la modélisation statique des mécanismes (Diagrammes de Corps Libres). En effet, on veut ainsi éviter l'effet "boîte noire" que l'utilisation du modèle général du chapitre précédent pourrait avoir. De cette façon, le lecteur pourra facilement suivre le cheminement de l'auteur en ce qui a trait à la

modélisation des mécanismes.

4.3.1 Mécanisme 1: 2 degrés de liberté (rotoïde, 5 barres)

Le premier mécanisme étudié est celui présenté à la Figure 3.2. Il s'agit d'un mécanisme à cinq barres avec un actionneur rotoïde à la liaison O_1 et un actionneur passif et une butée mécanique à la liaison O_5 .

On remarquera que les expressions développées pour ce mécanisme incluent certaines variables dépendantes, soient θ_1 , θ_2 et θ_3 . Afin de conserver des expressions simples, donc plus facile à analyser, ces variables n'ont pas été remplacées explicitement par leurs expressions en fonction des variables indépendantes. Par ailleurs, les équations du mécanisme 2 (section suivante) ont été développées en fonction des variables indépendantes seulement. On verra alors que pour ce mécanisme très simple, les équations deviennent vite très difficiles à analyser lorsque les substitutions sont faites. Ainsi, pour ce premier exemple, les expressions simples incluant les variables dépendantes seront utilisées afin de simplifier la discussion.

4.3.1.1 Développement des équations statiques

La Figure 4.8 présente les Diagrammes de Corps Libres associés au mécanisme 1. On développe les équations d'équilibre statique ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ et $\Sigma M = 0$) pour les membrures du mécanisme. Ainsi, pour la membrure 1, on obtient

$$\Sigma M_{O_1} = f_m - f_1 \sin \theta_2 l_1 = 0 \quad (4.12)$$

Pour la membrure 3 on obtient

$$\Sigma M_{O_4} = f_1 \sin \theta_3 l_3 - g_1 l_5 - f_p + f_b = 0 \quad (4.13)$$

$$\Sigma F_x = f_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) - g_1 \cos(\theta_4 + \theta_5) - f_2 = 0 \quad (4.14)$$

$$\Sigma F_y = f_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + g_1 \sin(\theta_4 + \theta_5) - f_3 = 0 \quad (4.15)$$

Enfin, pour la membrure 4 on obtient

$$\Sigma M_{O_5} = f_3 \sin \theta_5 l_4 - f_2 \cos \theta_5 l_4 - \frac{g_2 l_4}{2} + f_p - f_b = 0 \quad (4.16)$$

Dans les équations (4.12) à (4.16), les forces f_1 , f_2 et f_3 sont des efforts internes (qu'on élimine facilement par substitution), f_p est l'effort associé à l'actionneur passif, f_b est l'effort généré par la butée mécanique (nul lorsque le doigt n'est pas en butée) et les efforts g_1 et g_2 sont respectivement les forces distale et proximale (respectivement perpendiculaires aux phalanges distale et proximale). L'indice O_i associé à la somme des moments (ΣM_{O_i}) indique autour de quel point cette dernière a été faite.

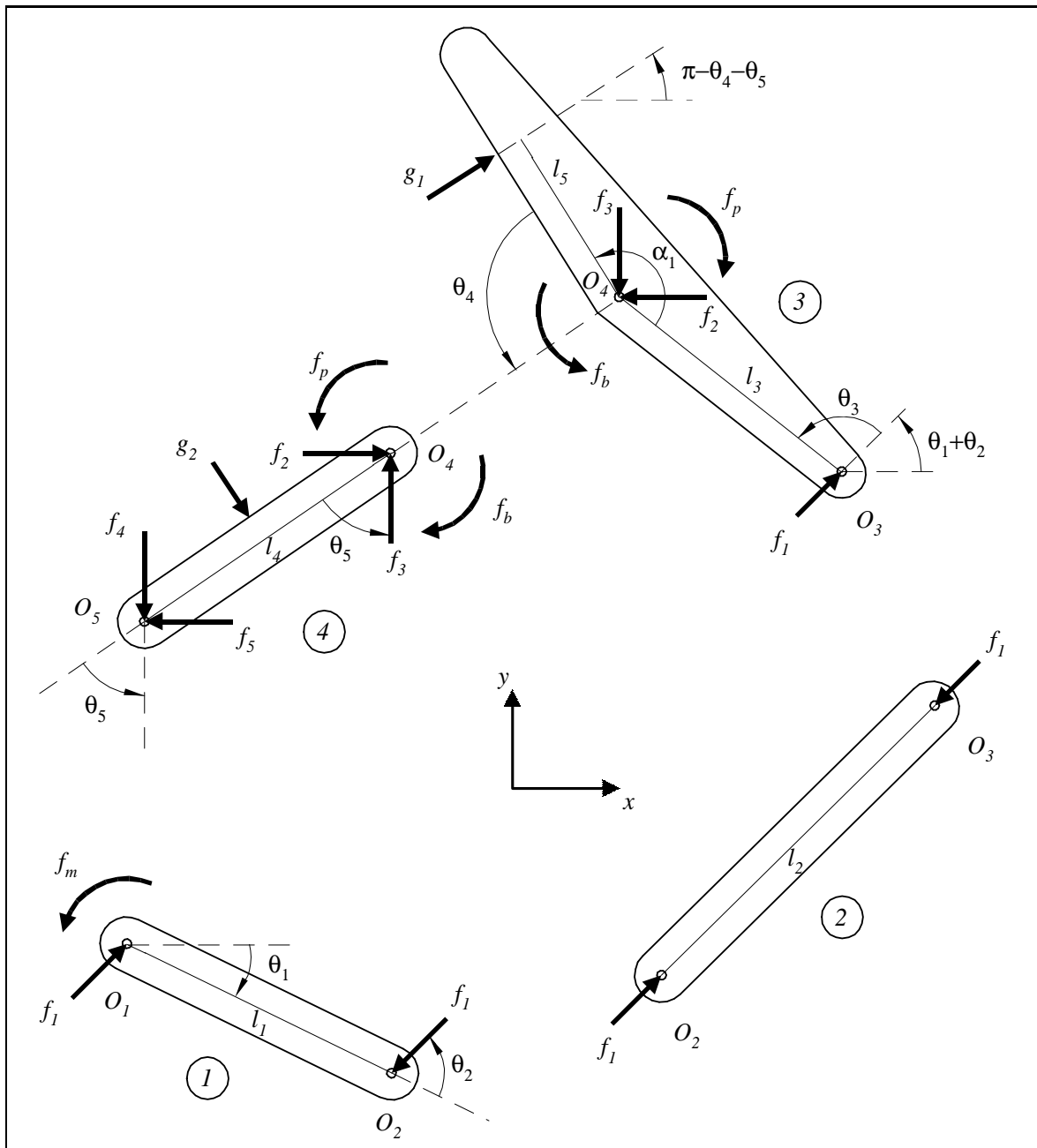


Figure 4.8: Diagrammes de Corps Libres des membrures du mécanisme 1.

La première étape pour laquelle ces équations sont utilisées est l'étape de contact de la prise ferme. Le graphe général de l'évolution de la seule force appliquée sur l'objet, soit la force proximale g_2 , en fonction du mouvement de fermeture de la phalange distale sur l'objet est illustré à la Figure 4.2. Il faut se rappeler qu'on veut minimiser la force proximale durant la période de contact afin de réduire les possibilités d'éjection de l'objet.

À partir des DCL de la Figure 4.8, des équations (4.12) à (4.16) et en notant qu'aucune force distale n'est appliquée ($g_1 = 0$) et que la phalange distale n'est pas en butée ($f_b = 0$), on trouve que la force proximale est définie par

$$g_2 = 2f_p \left(\frac{1}{l_4} - \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_5 - \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_5}{l_3 \sin \theta_3} \right) \quad (4.17)$$

qui dépend directement du moment généré à l'actionneur passif, défini par

$$f_p = f_{po} + k(\theta_{4o} - \theta_4) \quad (4.18)$$

où f_{po} et k sont respectivement le moment initial et la raideur du ressort. L'équation (4.17) peut être réécrite sous la forme

$$g_2 = 2f_p \left(\frac{1}{l_4} + \frac{\sin \theta_{crit}}{l_3 \sin \theta_3} \right) \quad (4.19)$$

où

$$\theta_{crit} = (\theta_1 + \theta_2 - \pi/2 + \theta_5) \quad (4.20)$$

est appelé *l'angle critique*. Cet angle, illustré à la Figure 4.9, représente la différence entre la direction de l'effort interne f_1 , soit l'angle $(\theta_1 + \theta_2)$, et la direction de la perpendiculaire à l'effort proximal, soit l'angle $(\pi/2 - \theta_5)$.

Cet angle représente une des trois caractéristiques intéressantes émergeant de l'équation (4.19). En effet, le second terme de la partie de droite de cette équation tend vers zéro lorsque la valeur de *l'angle critique* tend vers zéro. On voit clairement que la capacité du mécanisme à générer de grandes valeurs de g_2 (via l'effort interne f_1) est alors diminuée. De la même façon, si la valeur de cet angle est négative, la valeur de g_2 tend alors vers zéro.

L'angle θ_3 représente le facteur d'efficacité de transmission de l'effort interne f_1 . En effet, lorsque la valeur de cet angle approche 90° , la force f_1 vainc plus facilement le

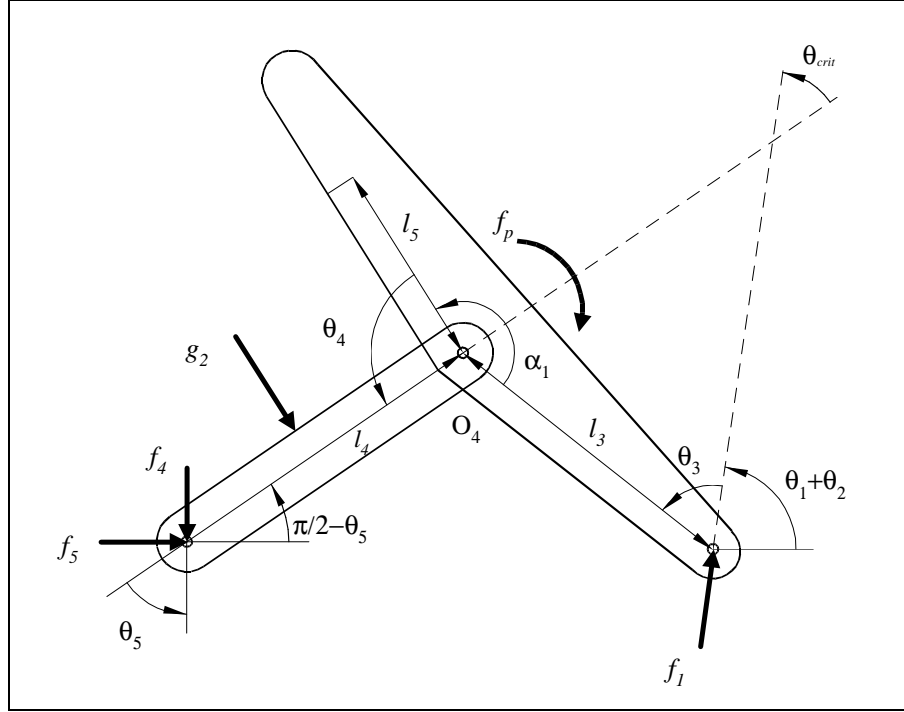


Figure 4.9: Diagramme de Corps Libres de l'ensemble proximal-distal (étape de contact de la prise ferme, $g_1 = 0$).

moment généré à l'actionneur passif et atteint donc sa valeur minimum. La valeur de g_2 devient donc moins grande.

Enfin, les caractéristiques de l'actionneur passif jouent ici un rôle très important. Un moment initial élevé générera une valeur élevée de la force f_1 au début de la période de contact afin de vaincre ce moment. La valeur de la force proximale sera donc elle aussi élevée. De plus, une constante de raideur élevée aura une grande influence sur la valeur de g_2 à mesure que la phalange distale se refermera sur l'objet. Ces influences se manifestent via le terme f_p de l'équation (4.19).

On développe aussi l'équation qui nous permet de calculer le couple au moteur nécessaire durant toute l'étape de contact. À partir des équations (4.12) et (4.13), on obtient

$$f_m = \frac{f_p l_1 \sin \theta_2}{l_3 \sin \theta_3} \quad (4.21)$$

Cet effort dépend évidemment de l'efficacité de transmission des efforts du mécanisme exprimée à travers les variables l_1, l_3, θ_2 et θ_3 et de la valeur du moment généré à l'actionneur passif.

La première conclusion à tirer de ces équations est l'influence majeure de l'actionneur passif sur le comportement du mécanisme durant la période de contact. Les paramètres géométriques et la configuration du mécanisme jouent aussi un grand rôle au niveau de l'intensité de g_2 .

Les équations régissant les efforts générés durant l'étape de serrage de la prise ferme sont maintenant développées. Les équations qui suivent sont obtenues à l'aide du DCL de la Figure 4.8 et des équations (4.12) à (4.16). On note que la phalange distale n'est pas en butée ($f_b = 0$).

L'expression de la force distale, qui représente l'équation de la droite g_1 de la Figure 4.3, est définie comme

$$g_1 = m_1 f_m + b_1 \quad (4.22)$$

où m_1 et b_1 sont respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite. La pente m_1 est définie comme

$$m_1 = \frac{l_3 \sin \theta_3}{l_1 l_5 \sin \theta_2} \quad (4.23)$$

et b_1 est définie comme

$$b_1 = -\frac{f_p}{l_5} \quad (4.24)$$

On remarque que la valeur de b_1 est toujours négative. En effet, le cas où le couple au moteur est nul, alors que la phalange distale n'est pas en butée, est irréaliste. On peut aussi écrire l'expression de l'abscisse à l'origine comme

$$a_1 = -\frac{b_1}{m_1} = \frac{f_p l_1 \sin \theta_2}{l_3 \sin \theta_3} \quad (4.25)$$

Ces expressions sont relativement simples et permettent de cerner l'influence de certains paramètres géométriques sur le comportement du mécanisme. Par contre, les paramètres dépendants θ_2 et θ_3 cachent des relations complexes qui rendent l'analyse intuitive des équations plus ardue.

L'expression de la force proximale est définie par

$$g_2 = m_2 f_m + b_2 \quad (4.26)$$

qui représente l'équation de la droite g_2 de la Figure 4.3. La pente m_2 s'écrit

$$m_2 = \frac{2l_3 \sin \theta_3 \cos \theta_4 + 2l_5 \sin \theta_{crit}}{l_1 l_5 \sin \theta_2} \quad (4.27)$$

De la même façon, on écrit

$$b_2 = 2f_p \left(\frac{l_5 - l_4 \cos \theta_4}{l_4 l_5} \right) \quad (4.28)$$

Finalement, l'abscisse à l'origine est définie comme

$$a_2 = -\frac{b_2}{m_2} = \frac{f_p l_1 \sin \theta_2 (l_4 \cos \theta_4 - l_5)}{l_4 (l_3 \sin \theta_3 \cos \theta_4 + l_5 \sin \theta_{crit})} \quad (4.29)$$

On développe maintenant les équations régissant le comportement du mécanisme pendant la prise de pincée. On utilise les Diagrammes de Corps Libres de la Figure 4.8 et les équation (4.12) à (4.16). On note qu'en prise de pincée, aucune force proximale n'est appliquée ($g_2 = 0$). L'équation de la droite présentée au graphe général de la Figure 4.7 est exprimée par

$$f_b = b_{fb} + f_m m_{fb} \quad (4.30)$$

où f_b est l'effort généré par la butée mécanique. L'ordonnée à l'origine b_{fb} est f_{po} , le moment initial à l'actionneur passif. La pente m_{fb} est définie comme

$$m_{fb} = \frac{l_4 (l_3 \cos \theta_4 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_{crit})}{l_1 \sin \theta_2 (l_5 - l_4 \cos \theta_4)} \quad (4.31)$$

L'abscisse à l'origine est définie comme

$$a_{fb} = -\frac{f_{po}}{m_{fb}} \quad (4.32)$$

Ce dernier paramètre est important puisqu'il représente le passage entre une prise stable et instable.

4.3.1.2 Hypothèses et généralités

Comme il a été démontré dans les sections précédentes, les mécanismes sous-actionnés peuvent générer des prises instables. Une étude des tâches à effectuer et le design des mécanismes en fonction de ces tâches permet le développement d'un préhenseur efficace. Il faut donc, dans le processus de design, imposer le comportement adéquat permettant d'accomplir les tâches avec succès, puisqu'il n'est pas possible de modifier le comportement du mécanisme lorsqu'il est construit.

Il faut choisir, parmi les paramètres géométriques et architecturaux du mécanisme, ceux qui seront calculés par l'algorithme d'optimisation. En effet, il est possible de

fixer la valeur de certains de ces paramètres. Les variables indépendantes du problème sont les suivantes: $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, \alpha_1, k, f_{po}, \theta_4$ et θ_5 (Figure 3.2). Les variables θ_4 et θ_5 sont les angles fixant la configuration du mécanisme. Elles font donc partie des paramètres configuratifs. La longueur de la phalange proximale (l_4) peut être fixée en fonction de la dimension des objets à saisir. Puisque les tâches visées sont habituellement accomplies par un opérateur, on choisit de fixer cette longueur à 0.075 m , soit la longueur approximative de la phalange proximale d'une main humaine. De plus, il a été démontré que le ratio de longueur idéal entre les deux phalanges d'un doigt plan à deux degrés de liberté peut être obtenu à l'aide de l'optimisation de sa dextérité cinématique locale (Salisbury et Craig 1982) ou globale (Gosselin et Angeles 1991). Dans les deux cas, le ratio idéal de longueur est de $\sqrt{2}/2$. De plus, ce ratio de longueur est à peu près respecté pour deux phalanges consécutives de la main humaine. Pour ces raisons, la longueur de la phalange distale est fixée à 0.055 m . La longueur l_5 représente la position du *point critique* sur la phalange distale. En imposant cette longueur à la mi-phalange, on s'assure que toute prise de pincée effectuée au delà de ce point générera une prise stable. On fixe donc l_5 à 0.030 m .

Jusqu'à maintenant, les paramètres fixés ne limitent en rien la généralité du problème. Il est en effet important d'éviter les hypothèses restrictives ou arbitraires. Le problème est réduit à sept variables si la longueur l_7 est fixée. Cette longueur permet de déplacer, selon l'axe des x , la position de la liaison entre la base et l'actionneur (liaison O_1 , Figure 3.2). On fixe donc cette longueur à 0 tout en permettant à la position de l'actionneur de varier selon l'axe des y (variable l_6). Un schème d'actionnement différent (actionneur linéaire) peut dicter la spécification de l_6 plutôt que de l_7 . Cette dernière étape représente par contre la dernière simplification possible avant d'affecter la généralité du problème.

Une analyse des tâches à accomplir et des objets à saisir permet de fixer certains paramètres globaux du design, soit le nombre de doigts, le nombre de phalanges par doigt, la géométrie de la paume et la position relative des doigts les uns par rapport aux autres. Des caractéristiques intéressantes peuvent en effet être implantées. La main développée par Rovetta (1979; 1981) utilise par exemple un paume mobile qui permet de saisir une plus grande variété d'objets. Un autre design (Bartholet 1992) utilise un mécanisme parallèle au mécanisme d'actionnement afin de permettre à la phalange

distale de demeurer perpendiculaire à la paume pour toutes les configurations de prise de pincée. Ceci permet d'effectuer des prises de pincée avec les phalanges distales en configuration idéale (parallèles entre elles). Cette caractéristique permet aussi d'imiter le comportement des pinces fréquemment utilisées comme organe terminal pour des applications industrielles.

Pour tous les calculs, on utilise les unités suivantes: le *mètre* pour les longueurs, le *Newton* pour les forces et le *Newton×mètre* pour les moments. De plus, on suppose que l'actionneur rotoïde peut générer un couple maximum de $15 Nm$, basé sur l'utilisation récente de moteurs électriques compacts. On utilise dans ce qui suit des valeurs de forces correspondant à une application industrielle de faible puissance. Bien que ce choix soit arbitraire, il ne sert qu'à définir des systèmes d'équations numériques. La méthode elle-même n'est pas limitée à ce genre d'application et pourrait être reprise directement avec des valeurs totalement différentes.

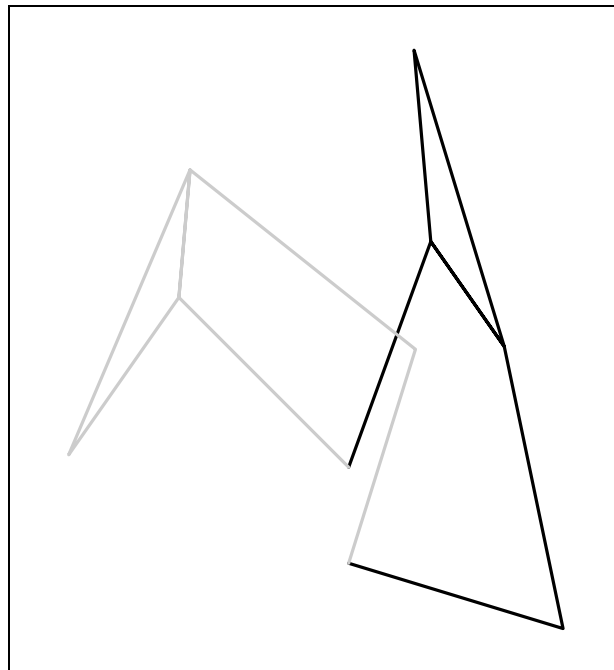


Figure 4.10: Mécanisme 1 en configurations extrêmes.

On fixe les configurations extrêmes du mécanisme, illustrées à la Figure 4.10. Le respect de ces configurations extrêmes est assuré par la présence de butées mécaniques limitant le mouvement des phalanges. Le mécanisme est en position complètement ouverte quand $\theta_4 = 155^\circ$ et $\theta_5 = 20^\circ$ et est en position complètement fermée quand

$\theta_4 = 80^\circ$ et $\theta_5 = -45^\circ$ (Figure 3.2).

Il est aussi important de déterminer les configurations pertinentes à chaque type de prise. En effet, la prise de pincée s'effectue dans une certaine plage de configurations qui permet de saisir des objets de différentes dimensions sur le bout des doigts. On étudie donc trois configurations qui couvrent l'ensemble des prises de pincée. Ces trois configurations sont illustrées à la Figure 4.11(a) et sont définies comme

$$pc1: \theta_4 = 155^\circ, \theta_5 = 15^\circ$$

$$pc2: \theta_4 = 155^\circ, \theta_5 = 10^\circ$$

$$pc3: \theta_4 = 155^\circ, \theta_5 = 5^\circ$$

où $pc1$, $pc2$ et $pc3$ sont respectivement illustrées par les mécanismes de niveaux de gris de plus en plus pâles.

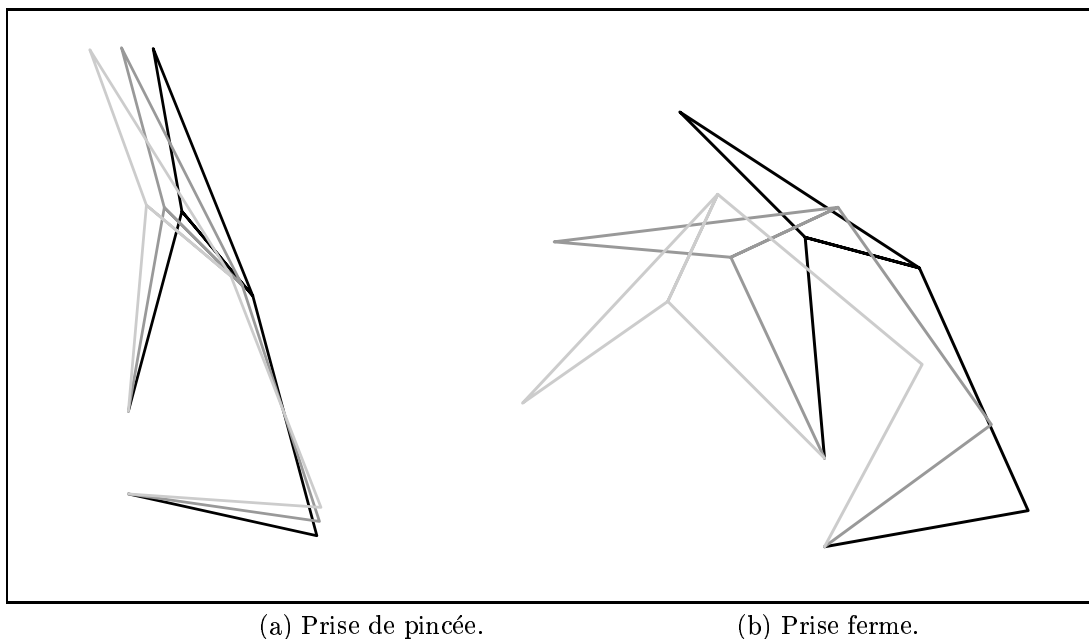


Figure 4.11: Configurations étudiées pour le mécanisme 1.

Les configurations pertinentes à la prise de pincée peuvent sembler irréalistes en raison de l'orientation de la phalange distale (contacts qui ne sont pas perpendiculaires avec la paume). Dario et Buttazzo (1987) parlent de l'importance de la forme arrondie du bout du doigt (Figure 3.1) qui permet la saisie d'objets de différentes formes et dimensions. Il est alors possible d'avoir en tout temps une surface de contact perpendiculaire à la paume. Une autre façon d'obtenir des contacts adéquats pour une prise

de pincée stable est l'utilisation d'un mécanisme parallèle qui permet en tout temps d'appliquer une force distale perpendiculaire à la paume (Bartholet 1992). Finalement, on aura toujours avantage à maximiser le coefficient de friction entre les doigts et l'objet. Même si l'hypothèse de contact sans friction est faite ici, il ne faut pas oublier que le cas idéal de saisie implique les forces de friction.

De la même façon, on choisit trois configurations pertinentes à l'étape de serrage de la prise ferme et permettant de couvrir une plage de configurations relative à la saisie d'objets de différentes formes et dimensions. Elles sont illustrées à la Figure 4.11(b) et sont définies comme

$$pw1: \theta_4 = 140^\circ, \theta_5 = -5^\circ$$

$$pw2: \theta_4 = 120^\circ, \theta_5 = -25^\circ$$

$$pw3: \theta_4 = 100^\circ, \theta_5 = -45^\circ$$

où $pw1$, $pw2$ et $pw3$ sont respectivement illustrées par les mécanismes de niveaux de gris de plus en plus pâles.

Enfin, on définit les configurations importantes à étudier pendant la période de contact de la prise ferme. Ces configurations incluent évidemment celles définies pour l'étape de serrage de la prise ferme puisque chaque configuration atteinte durant la période de contact représente les conditions initiales de la période de serrage pour la prise ferme d'un objet quelconque. Pour cette raison, on étudiera trois séries de configurations avec des configurations initiale et finale différentes (Figure 4.12). Elles sont définies comme

$$co1: \theta_5 = 0^\circ, 155^\circ < \theta_4 < 80^\circ$$

$$co2: \theta_5 = -20^\circ, 155^\circ < \theta_4 < 80^\circ$$

$$co3: \theta_5 = -40^\circ, 155^\circ < \theta_4 < 80^\circ$$

4.3.1.3 Imposition des conditions de stabilité

Certains paramètres géométriques du mécanisme sont fixés et les conditions de saisie sont établies. Le problème est réduit à sept variables, soit l_1 , l_2 , l_3 , l_6 , α_1 , k et f_{po} .

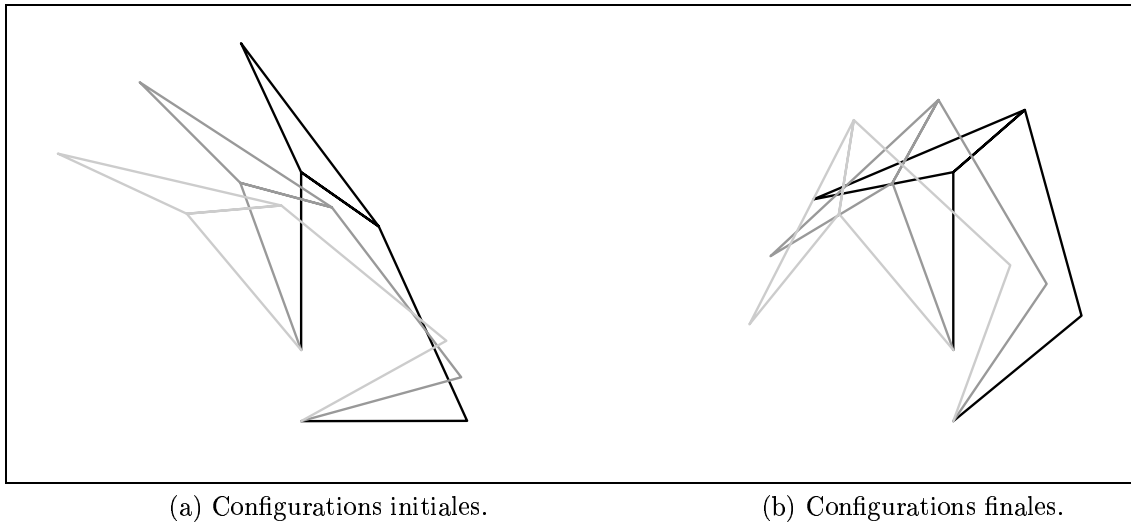


Figure 4.12: Séries de configurations étudiées pour la période de contact de la prise ferme du mécanisme 1.

On veut maintenant imposer les conditions de stabilité nécessaires au succès des prises pour les configurations visées.

La prise de pincée ne peut être effectuée de façon stable que si l'unilatéralité du contact entre la butée mécanique et la phalange distale est respectée, c'est-à-dire seulement si la valeur de f_b demeure positive. C'est la condition sine qua non pour éviter tout mouvement relatif entre les phalanges durant la saisie. Après plusieurs expérimentations, on conclut que la configuration de prise de pincée la plus sujette à l'instabilité est la configuration la plus fermée (*pc3*). En imposant un critère de stabilité pour cette configuration, toutes les autres configurations généreront une saisie stable. On impose donc la position du *point critique* pour cette configuration ($l_5 = 0.030\text{ m}$). Pour les autres configurations, le *point critique* sera situé encore plus près de la liaison distale. Cette caractéristique est souhaitable puisque plus l'objet est petit, plus il devra être saisi près du bout du doigt. À l'opposé, un objet plus gros sera généralement saisi plus près de la mi-phalange.

La condition limite au problème de stabilité pour la prise de pincée est d'imposer une valeur nulle de f_b pour la configuration la plus instable et pour la valeur maximale de couple au moteur (Figure 4.7). En imposant la valeur de a_{fp} dans l'équation (4.32), on peut isoler f_{po} qui est alors exprimé en fonction des six variables indépendantes qui restent. Par contre, en imposant la valeur de l'effort à la butée mécanique pour la

valeur maximale de f_m , il est possible que l'on impose par le fait même une condition qui nuira aux autres étapes de saisie. En effet, le véritable objectif est d'obtenir une valeur positive de f_b pour f_m maximal et non pas une valeur précise. Pour l'optimisation du mécanisme (au Chapitre 5), on utilisera plutôt la contrainte d'inégalité de l'équation (4.33), considérée moins restrictive.

$$f_b > 0 \text{ pour } (f_m)_{\max} \text{ pour } pc3 \quad (4.33)$$

Puisque le but de la présente étape est d'obtenir un bon estimé initial pour l'algorithme d'optimisation, on impose les valeurs suivantes pour la configuration la plus fermée (*pc3*): $f_b = 2.8 Nm$ à $f_m = 15 Nm$. La valeur de l'effort à la butée mécanique est établie de façon à s'éloigner suffisamment de l'instabilité, donc de $f_b = 0 Nm$. Sa valeur exacte demeure toutefois arbitraire et l'équation (4.34) pourrait être reprise avec des valeurs totalement différentes. L'équation (4.30) devient

$$f_{po} = 2.8 - 15m_{fb} \quad (4.34)$$

où m_{fb} est définie à l'équation (4.31). La valeur de b_{fb} est toujours la valeur du moment initial à l'actionneur passif. La constante de raideur k n'intervient pas lors de la prise de pincée puisque l'état de compression du ressort ne change pas. L'équation (4.34) assure donc la stabilité de la prise de pincée en plus de permettre l'élimination d'une variable du problème (f_{po}), en l'exprimant en fonction des variables indépendantes qui restent.

De la même façon, on s'assure de la stabilité de la prise ferme en imposant une valeur positive de la force proximale g_2 durant toute la période de serrage et pour toutes les configurations. Le problème diffère cependant de celui associé à la prise de pincée puisqu'aucune configuration ne peut être identifiée comme étant la plus instable. On doit donc s'assurer de la stabilité de la prise pour toutes les configurations. On impose alors une valeur de g_2 pour chacune des trois configurations choisies pour l'étude de la prise ferme. On a

$$pw1: g_2 = 115 N \text{ pour } f_m = 15 Nm$$

$$pw2: g_2 = 65 N \text{ pour } f_m = 15 Nm$$

$$pw3: g_2 = 125 N \text{ pour } f_m = 15 Nm$$

Ces valeurs, introduites dans l'équation (4.26), donnent trois nouvelles équations, soit

$$115 = 15m_{2(\text{pw1})} + b_{2(\text{pw1})} \quad (4.35)$$

$$65 = 15m_{2(\text{pw2})} + b_{2(\text{pw2})} \quad (4.36)$$

$$125 = 15m_{2(\text{pw3})} + b_{2(\text{pw3})} \quad (4.37)$$

où $m_{2(\text{pwi})}$ et $b_{2(\text{pwi})}$ sont respectivement définis aux équations (4.27) et (4.28) et sont évalués pour la configuration correspondant à pwi puisque leur valeur dépend de la configuration étudiée. Le choix des valeurs de forces distales est basé sur l'objectif visant une force totale de 200 N par doigt, répartie sur les deux phalanges.

L'imposition d'une valeur précise de g_2 pour chaque configuration est quelque peu restrictive. En effet, ces valeurs peuvent être incompatibles avec d'autres cas de saisies (prise de pincée ou étape de serrage). Comme le but de cette première étape est d'obtenir un estimé initial de bonne qualité pour l'optimisation, cette méthode simple est utilisée. Par contre, le critère pour l'optimisation sera plutôt l'imposition d'une valeur positive de g_2 . Il prendra la forme de

$$g_2 > 0 \text{ pour } (f_m)_{\max} \text{ pour toutes configurations} \quad (4.38)$$

qui permet beaucoup plus de flexibilité à l'algorithme et qui améliore les chances de convergence.

On introduit l'expression de $b_{2(\text{pw1})}$ de l'équation (4.28) dans l'équation (4.35) afin de faire apparaître les variables k et f_{po} . Comme la valeur de f_{po} est exprimée selon les six variables indépendantes qui restent (équation (4.34)), on introduit son expression dans l'équation (4.35), ce qui permet d'exprimer k en fonction des variables indépendantes, qui sont maintenant au nombre de cinq. On a

$$k = \frac{l_4 l_5 (115 - 15m_{2(\text{pw1})}) / (2l_5 - 2l_4 \cos \theta_4) - f_{po}}{\theta_{4o} - \theta_4} \quad (4.39)$$

Les variables indépendantes sont maintenant l_1, l_2, l_3, l_6 et α_1 . Aucune autre variable ne peut être éliminée en raison de la complexité des relations entre ces cinq variables.

Puisque le problème comporte cinq variables, on veut obtenir un système surdéterminé qui nécessite un minimum de six équations. Les équations (4.36) et (4.37) représentent les deux premières équations de ce système tandis que les équations (4.34) et (4.35) servent à faire passer le nombre de variables indépendantes de sept à cinq.

La période de contact de la prise ferme présente certains risques d'éjection de l'objet en cours de saisie. Après quelques expérimentations, on s'aperçoit que la saisie de gros objets représente de plus grands risques (Figure 4.1). On applique donc les critères de stabilité aux configurations extrêmes associées à la série de configurations *co1*. Au début de la période de contact (θ_{4max} et θ_{5max}), la force proximale peut atteindre une valeur importante due à une configuration peu efficace au niveau de la transmission des efforts. De plus, à la fin de la période de serrage (θ_{4min} et θ_{5max}), l'efficacité du mécanisme est accrue, mais la compression du ressort à l'actionneur passif favorise une augmentation de la valeur de la force proximale. On impose donc une valeur d'effort de force proximale pour ces deux configurations. On a donc

$$\begin{aligned} g_2 &= 70 \text{ N pour } \theta_4 = 155^\circ \text{ et } \theta_5 = 0^\circ \\ g_2 &= 90 \text{ N pour } \theta_4 = 85^\circ \text{ et } \theta_5 = 0^\circ \end{aligned}$$

On introduit ces valeurs dans l'équation (4.17), ce qui permet d'obtenir deux autres équations. Ces valeurs sont choisies de façon à éviter d'obtenir des efforts trop importants durant la période de contact. Par contre, ces valeurs objectifs sont plus ou moins arbitraires, puisqu'on tentera de les minimiser durant l'optimisation (Chapitre 5).

Les équations supplémentaires sont liées à l'intensité et à la direction de la force résultante sur l'objet. On veut en effet que la force totale sur l'objet soit d'environ 200N et qu'elle soit dirigée vers la paume. Cette force totale de 200N par doigt vient de l'objectif original qui était une force de 600N pour une main articulée à trois doigts (Montambault 1992). On a donc

$$g_{tot} = g_1 + g_2 \tag{4.40}$$

où

$$\begin{aligned} 190 \text{ N} &< g_{tot} < 250 \text{ N} \\ \text{pour } f_m &= 15 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Puisque les valeurs de g_2 sont déjà fixées pour les trois configurations, on obtient directement les valeurs de g_1 en fixant les forces totales à $g_{tot1} = 195 \text{ N}$, $g_{tot2} = 190 \text{ N}$ et $g_{tot3} = 250 \text{ N}$, pour les configurations *pw1*, *pw2* et *pw3* respectivement. Encore

une fois, ces valeurs peuvent varier puisque la méthode développée est complètement générale (autant au niveau du nombre d'équations utilisées qu'au niveau des valeurs visées). On obtient donc

$$\begin{aligned} pw1: & g_1 = 80 \text{ N pour } f_m = 15 \text{ Nm} \\ pw2: & g_1 = 125 \text{ N pour } f_m = 15 \text{ Nm} \\ pw3: & g_1 = 125 \text{ N pour } f_m = 15 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Ces valeurs, introduites dans l'équation (4.22), donnent trois équations supplémentaires qui permettent d'obtenir le système surdéterminé d'équations (sept équations à cinq inconnues).

4.3.1.4 Génération d'un mécanisme stable

Le système surdéterminé développé dans la section précédente est résolu à l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss*, décrit à la section 4.2. Puisqu'on doit fournir un estimé initial à cet algorithme, on fixe les paramètres géométriques et architecturaux du mécanisme initial de façon à ce qu'il puisse atteindre toutes les configurations visées sans interférence mécanique. On fixe donc les valeurs des variables indépendantes à

$$l_1 = 0.07 \text{ m}, l_2 = 0.09 \text{ m}, l_3 = 0.04 \text{ m}, l_6 = -0.03 \text{ m}, \alpha_1 = 150^\circ$$

Les valeurs des paramètres, fixées précédemment, sont répétées ici:

$$l_4 = 0.075 \text{ m}, l_5 = 0.030 \text{ m}, l_7 = 0.000 \text{ m}$$

Le mécanisme résultant, que l'on nomme EST1 est présenté à la Figure 4.13 en configurations extrêmes définies précédemment.

On étudie premièrement le comportement du mécanisme EST1 pour les différentes étapes de saisie considérées comme importantes. Le graphique de la Figure 4.14 montre l'évolution du couple au moteur (en (a)) et de la force proximale (en (b)) en fonction de la fermeture de la phalange distale sur l'objet (étape de contact de la prise ferme). Le couple généré à l'actionneur atteint des valeurs raisonnables (20% de $f_{m(max)}$) et les valeurs de la force proximale sont relativement basses (60 N). Comme on s'y attendait,

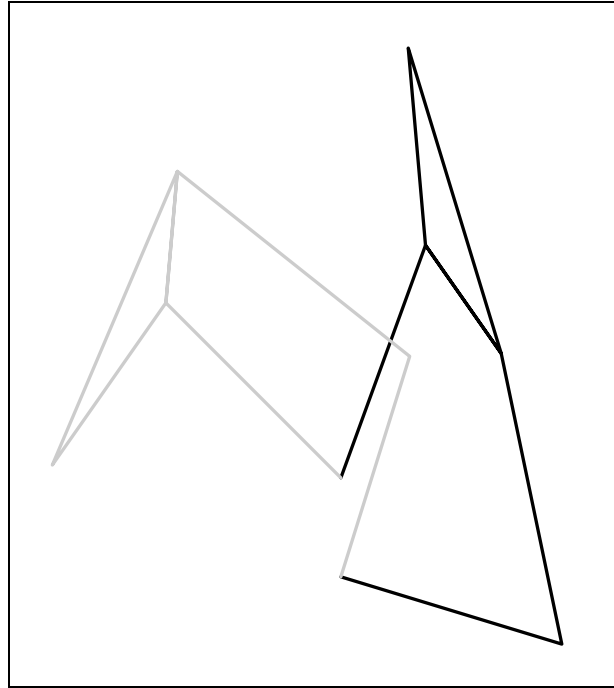
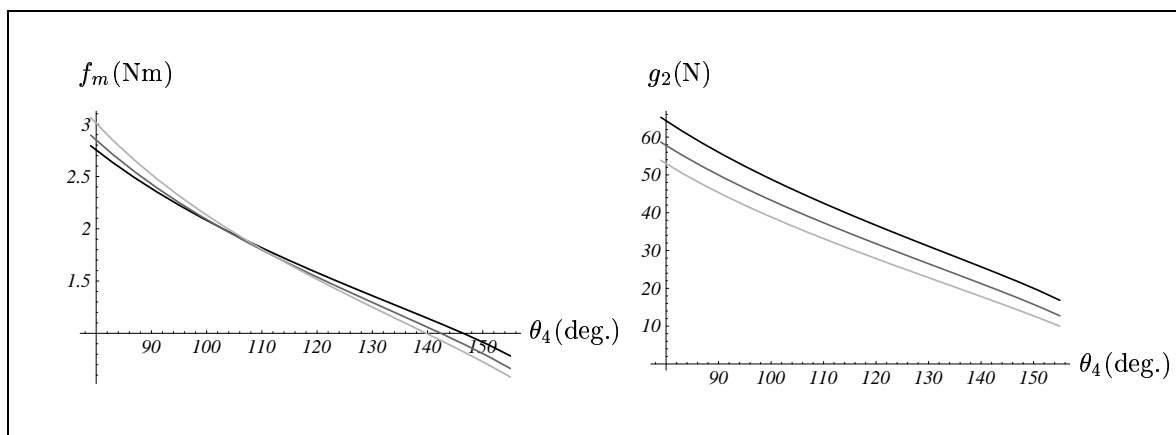


Figure 4.13: Mécanisme EST1 en configurations extrêmes.

la série de configurations *co1* (courbe en noir de la Figure 4.14) présente les plus grands risques d'éjection de l'objet, la valeur de la force proximale étant la plus élevée pour toutes valeurs de θ_4 . Les valeurs limites de g_2 pour cette configuration (pour $\theta_4 = 155^\circ$ et $\theta_4 = 85^\circ$) sont les valeurs pour lesquelles des objectifs ont été fixés.

Aussitôt que la phalange distale touche à l'objet, l'étape de serrage de la prise ferme commence et les courbes des efforts proximal et distal en fonction du couple au moteur



(a) Couple au moteur.

(b) Force proximale.

Figure 4.14: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (EST1).

sont montrées à la Figure 4.15.

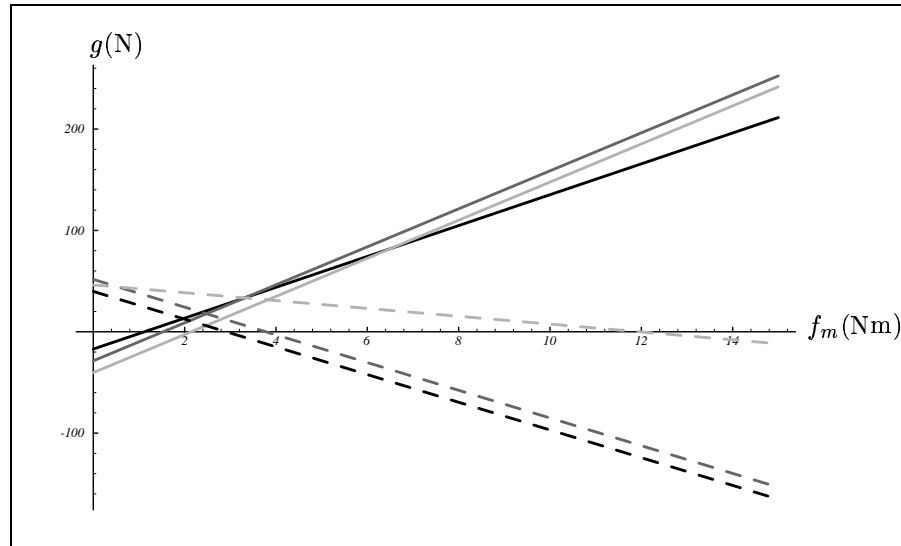


Figure 4.15: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (EST1).

On voit immédiatement que les trois configurations étudiées mènent à des prises instables, c'est-à-dire que la force proximale g_2 (en trait pointillé) atteint une valeur négative. Cette instabilité résulte en un mouvement du mécanisme, tel qu'illustré à la Figure 4.4. Ce phénomène a été observé chez beaucoup de mécanismes étudiés jusqu'à présent. Les configurations $pw1$ et $pw2$, respectivement en noir et gris foncé, conduisent très rapidement à l'instabilité.

De plus, la force distale g_1 (en trait continu) atteint des valeurs allant jusqu'à 230 N , ce qui est relativement élevé. En effet, si on veut appliquer une force bien répartie sur l'objet, il faut que la valeur des forces proximale et distale ne soit pas trop différente. Par contre, on voudra favoriser une valeur de force distale supérieure à la force proximale de façon à générer une force résultante dirigée vers la paume. Afin d'obtenir un mécanisme satisfaisant ces exigences, des objectifs ont été fixés sur les valeurs limites de g_1 et de g_2 .

Enfin, les performances du mécanisme EST1 durant la prise de pincée sont montrées à la Figure 4.16. On voit que les configurations $pc2$ et $pc3$, respectivement en gris foncé et en gris pâle, conduisent à l'instabilité de la prise au moment où l'effort généré à la butée mécanique devient nul. À ce moment, la phalange distale ne repose plus contre la butée et il y a mouvement du mécanisme, tel qu'illustré à la Figure 4.5. La configuration

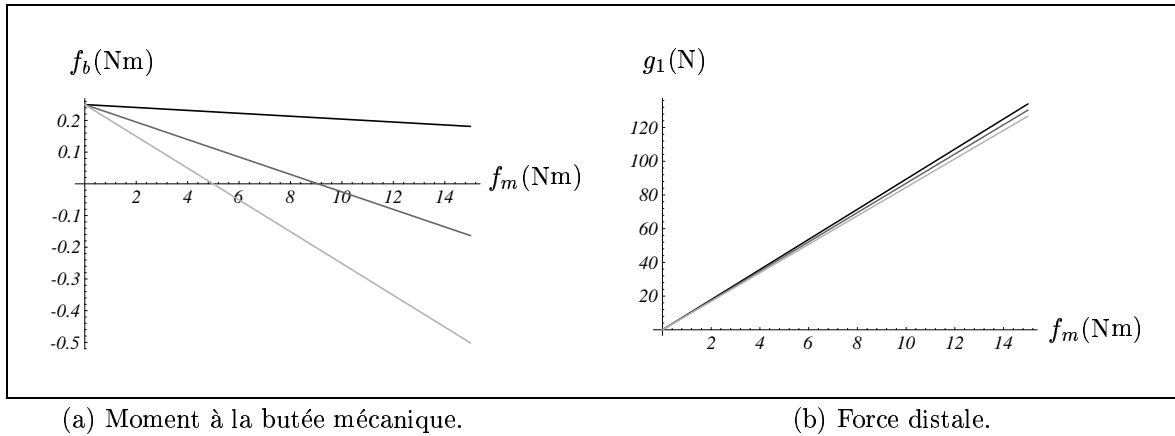


Figure 4.16: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (EST1).

la plus instable est celle prévue, soit $pc3$.

Le système de sept équations à cinq inconnues est solutionné à l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss* (2 minutes et 28 secondes de temps-CPU, 4 objectifs intermédiaires (principe de continuation), 13 itérations au total). Le mécanisme obtenu, que l'on nomme MEC11, est présenté en configurations extrêmes à la Figure 4.17. Les valeurs finales des variables sont

$$l_1 = 0.0997 m, l_2 = 0.0490 m, l_3 = 0.0314 m, l_6 = -0.0321 m, \alpha_1 = 135.604^\circ$$

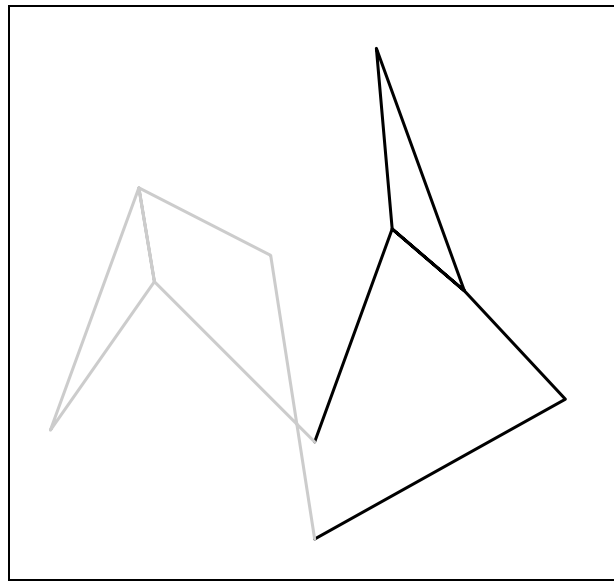


Figure 4.17: Mécanisme MEC11 en configurations extrêmes.

On observe maintenant les performances du nouveau mécanisme pour les différentes étapes de saisie. Le respect des critères de stabilité imposés dans les équations dépend directement de la qualité de la solution, puisque le mécanisme final représente une solution approximative au système d'équations développé.

Le Tableau 4.1 présente les dimensions des mécanismes EST1 et MEC11 ainsi que les caractéristiques de l'actionneur passif pour les deux mécanismes. Au Tableau 4.2, on présente les performances des deux mécanismes ainsi que les conditions de stabilité visées.

	l_1 (m)	l_2 (m)	l_3 (m)	l_6 (m)	α_1 (deg.)	f_{po} (Nm)	k (Nm/rad.)
EST1	0.0700	0.0900	0.0400	-0.0300	150.0	0.250	1.000
MEC11	0.0997	0.0490	0.0314	-0.0321	135.6	0.232	1.026

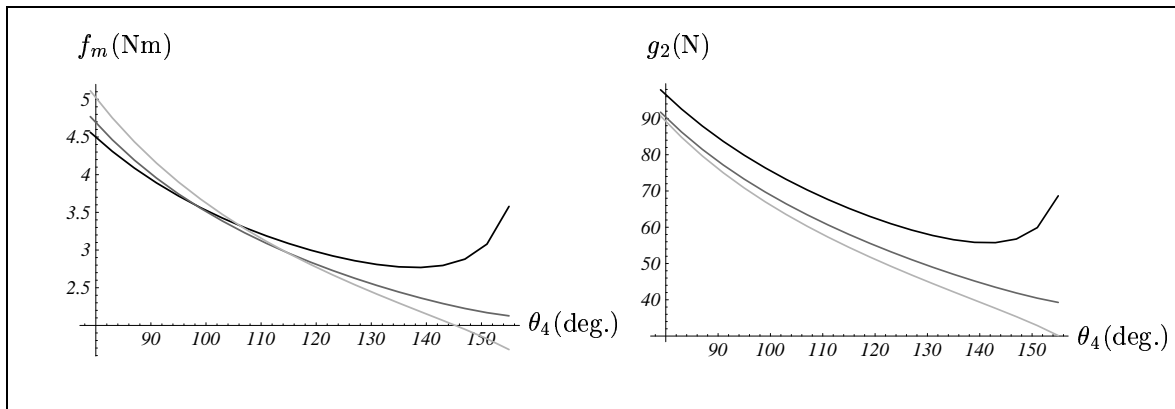
Tableau 4.1: Valeurs des variables pour les mécanismes EST1 et MEC11.

La Figure 4.18 présente les performances du mécanisme MEC11 durant la période de contact. La force proximale est plus élevée que pour le mécanisme EST1, et ce, pour toutes les configurations. Ces valeurs sont par contre très près des objectifs visés. On aurait donc pu imposer des critères plus sévères sur la valeur de la force proximale durant la période de contact. Par contre, des exigences modérées pour la période de contact permettent une plus grande flexibilité pour les autres étapes de saisie. Enfin, le couple à fournir à l'actionneur est lui aussi un peu plus élevé pour le mécanisme EST1.

Une amélioration considérable a été faite du côté de l'étape de serrage de la prise ferme. En effet, la Figure 4.19 montre que la stabilité est assurée pour les trois configurations et que les rapports d'efforts proximal-distal sont très près de ceux imposés.

	g_1 (N)			g_2 (N)			g_2 (co1)(N)		f_b (Nm)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw1$	$pw2$	$pw3$	θ_{4max}	θ_{4min}	$pc3$
EST1	211.37	252.52	241.70	-165.25	-153.44	-11.81	16.83	60.01	-0.50
MEC11	78.00	125.18	125.60	115.00	63.27	126.47	68.66	90.25	2.8
Obj.	80.00	125.00	125.00	115.00	65.00	125.00	70.00	90.00	2.80

Tableau 4.2: Performances des mécanismes EST1 et MEC11 et objectifs visés.



(a) Couple au moteur.

(b) Force proximale.

Figure 4.18: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC11).

Enfin, les conditions de stabilité pour la prise de pincée sont aussi respectées (Figure 4.20). En effet, la valeur du moment généré à la butée mécanique est positive pour toutes les configurations. La valeur de la force distale appliquée varie peu par rapport à celle obtenue avec le mécanisme EST1.

On peut voir que l'amélioration des performances du mécanisme est majeure puisque ce dernier permet maintenant d'accomplir des prises stables pour une diversité d'objets. Les efforts sur l'objet permettent d'éviter son éjection en cours de saisie ou de serrage. La répartition des efforts sur l'objet est acceptable et permet théoriquement d'effectuer une saisie sans risque pour l'objet et le préhenseur.

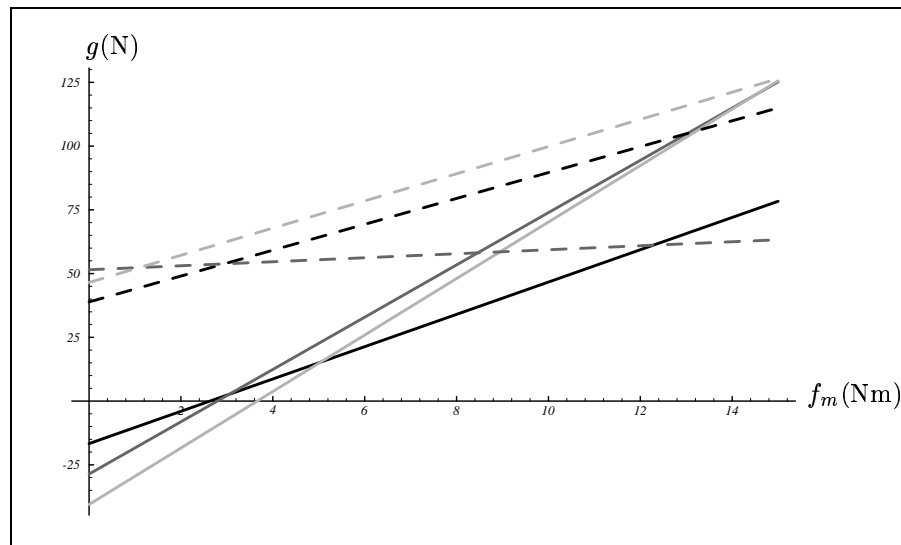


Figure 4.19: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC11).

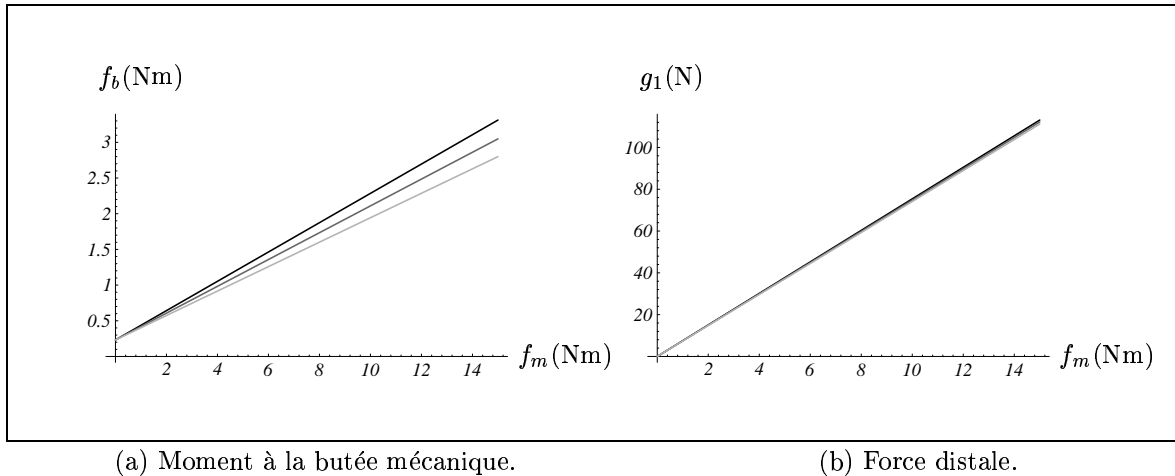


Figure 4.20: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC11).

Ce mécanisme final représente donc un bon estimé initial pour le design et l'optimisation d'un préhenseur appelé à effectuer des tâches spécifiques et à saisir les outils ou objets que ces tâches impliquent.

4.3.2 Mécanisme 2: 2 degrés de liberté (prismatique, 5 barres)

On étudie maintenant le mécanisme de la Figure 3.4. On développe les équations régissant le comportement du mécanisme et on élimine les variables dépendantes pour les exprimer en fonction des variables indépendantes seulement.

4.3.2.1 Développement des équations statiques

La Figure 4.21 présente les Diagrammes de Corps Libres associés au mécanisme 2. On développe les équations d'équilibre statique ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ et $\Sigma M = 0$) pour les membrures du mécanisme.

Ainsi, pour la membrure 3, on obtient

$$\Sigma M_{O_4} = f_m \sin \theta_2 l_1 - g_1 l_2 - f_p + f_b = 0 \quad (4.41)$$

$$\Sigma F_x = f_m \cos \theta_1 - g_1 \cos(\theta_3 + \theta_4) - f_1 = 0 \quad (4.42)$$

$$\Sigma F_y = f_m \sin \theta_1 + g_1 \sin(\theta_3 + \theta_4) - f_2 = 0 \quad (4.43)$$

Enfin, pour la membrure 4 on obtient

$$\Sigma M_{O_5} = -f_1 l_3 \cos \theta_4 + f_2 l_3 \sin \theta_4 + f_p - f_b - \frac{g_2 l_3}{2} = 0 \quad (4.44)$$

Dans les équations (4.41) à (4.44), les forces f_1 et f_2 sont des efforts internes (qu'on élimine facilement par substitution), f_p est l'effort associé à l'actionneur passif, f_b est l'effort généré par la butée mécanique (nul lorsque le doigt n'est pas en butée) et les efforts g_1 et g_2 sont respectivement les forces distale et proximale (respectivement perpendiculaires aux phalanges distale et proximale). L'indice O_i associé à la somme des moments (ΣM_{O_i}) indique autour de quel point cette dernière a été faite.

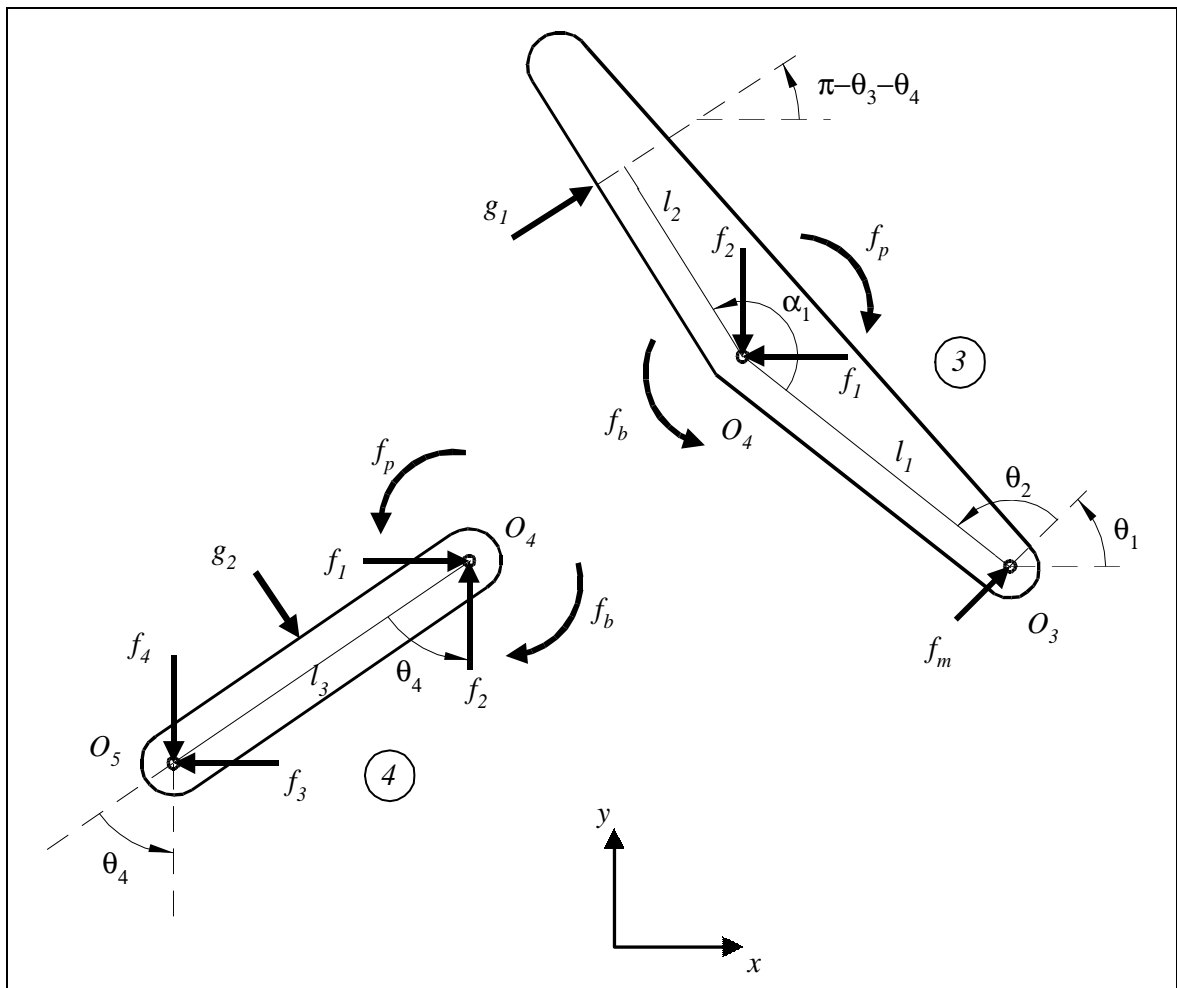


Figure 4.21: Diagrammes de Corps Libres des membrures du mécanisme 2.

La première étape étudiée est la période de serrage de la prise de puissance. On veut développer les équations en fonction des variables indépendantes qui sont l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 , θ_3 , θ_4 , α_1 et f_p (k et f_{p0}).

À l'aide des DCL de la Figure 4.21, des équations (4.41) à (4.44) et en notant qu'aucun effort n'est généré à la butée mécanique ($f_b = 0$), la force distale est définie comme

$$g_1 = \frac{f_m \sin \theta_2 l_1 - f_p}{l_2} \quad (4.45)$$

où

$$f_p = f_{po} + k(\theta_{3o} - \theta_3) \quad (4.46)$$

est le moment à l'actionneur passif et où f_m est la force générée à l'actionneur prismatique. Les variables f_{po} et k sont respectivement le moment initial à l'actionneur passif et sa constante de raideur.

La seule variable dépendante de l'équation (4.45) est θ_2 . On y voit clairement l'influence des longueurs l_1 et l_2 qui sont respectivement les bras de levier des forces f_m et g_1 dans la somme des moments sur la phalange distale, calculée autour de O_4 . L'efficacité de transmission des efforts est exprimée par l'angle θ_2 . On doit donc éliminer l'expression $(\sin \theta_2)$ de l'équation (4.45) afin d'obtenir une équation en fonction des variables indépendantes seulement. Par substitutions trigonométriques, on trouve que

$$\sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \quad (4.47)$$

On doit donc développer l'expression trigonométrique de l'équation (4.47) en fonction des variables indépendantes. À l'aide de la Figure 3.4, on trouve

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{O_{4y} - O_{1y}}{L_{14}} \quad (4.48)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{O_{4x} - O_{1x}}{L_{14}} \quad (4.49)$$

où on définit les coordonnées en x et y de la liaison O_i respectivement par O_{ix} et O_{iy} et où

$$L_{14} = \sqrt{(O_{4x} - O_{1x})^2 + (O_{4y} - O_{1y})^2} \quad (4.50)$$

est la distance euclidienne entre les liaisons O_1 et O_4 .

Toujours en se référant à la Figure 3.4, on trouve

$$O_{1x} = l_5 \quad (4.51)$$

$$O_{1y} = l_4 \quad (4.52)$$

$$O_{4x} = l_3 \sin \theta_4 \quad (4.53)$$

$$O_{4y} = l_3 \cos \theta_4 \quad (4.54)$$

$$O_{3x} = l_3 \sin \theta_4 - l_1 \sin(\theta_3 + \theta_4 + \alpha_1) \quad (4.55)$$

$$O_{3y} = l_3 \cos \theta_4 - l_1 \cos(\theta_3 + \theta_4 + \alpha_1) \quad (4.56)$$

et

$$\sin \theta_1 = \frac{O_{3y} - O_{1y}}{x_1} \quad (4.57)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{O_{3x} - O_{1x}}{x_1} \quad (4.58)$$

où

$$x_1 = \sqrt{(O_{3x} - O_{1x})^2 + (O_{3y} - O_{1y})^2} \quad (4.59)$$

est la distance euclidienne entre les liaisons O_1 et O_3 .

En substituant les équations (4.47) à (4.59) dans l'équation (4.45) on obtient

$$g_1 = \frac{f_m l_1 A}{l_2 B} - \frac{f_p}{l_2} \quad (4.60)$$

où

$$A = l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4 + \alpha_1) - l_3 \sin(\theta_3 + \alpha_1) - l_5 \cos(\theta_3 + \theta_4 + \alpha_1) \quad (4.61)$$

et

$$B = \sqrt{C + D} \quad (4.62)$$

où

$$C = l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - 2l_3 l_4 \cos \theta_4 - 2l_3 l_5 \sin \theta_4 - 2l_1 l_3 \cos(\theta_3 + \alpha_1) \quad (4.63)$$

et

$$D = 2l_1 l_5 \sin(\theta_3 + \theta_4 + \alpha_1) + 2l_1 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4 + \alpha_1) \quad (4.64)$$

On voit donc que la valeur de l'angle θ_2 dépend de toutes les variables sauf l_2 . L'équation (4.60) peut être réécrite sous la forme de l'équation de la droite g_1 de la Figure 4.3. On a

$$g_1 = m_1 f_m + b_1 \quad (4.65)$$

où

$$m_1 = \frac{l_1 A}{l_2 B} \quad (4.66)$$

et

$$b_1 = -\frac{f_p}{l_2} \quad (4.67)$$

De la même façon, on définit l'effort proximal par

$$g_2 = 2g_1 \cos \theta_3 + 2f_m \sin \theta_4 \sin \theta_1 - 2f_m \cos \theta_4 \cos \theta_1 + \frac{2f_p}{l_3} \quad (4.68)$$

où θ_1 et θ_2 sont les deux variables dépendantes qui restent. On élimine ces dernières et on obtient

$$g_2 = \frac{2f_m}{B} \left(\frac{l_1 A \cos \theta_3}{l_2} - l_4 \sin \theta_4 + l_5 \cos \theta_4 + l_1 \sin(\theta_3 + \alpha_1) \right) + 2f_p \left(\frac{1}{l_3} - \frac{\cos \theta_3}{l_2} \right) \quad (4.69)$$

L'équation (4.69) peut être réécrite sous la forme de l'équation de la droite g_2 de la Figure 4.3. On a

$$g_2 = m_2 f_m + b_2 \quad (4.70)$$

où

$$m_2 = \frac{2}{B} \left(\frac{l_1 A \cos \theta_3}{l_2} - l_4 \sin \theta_4 + l_5 \cos \theta_4 + l_1 \sin(\theta_3 + \alpha_1) \right) \quad (4.71)$$

et

$$b_2 = 2f_p \left(\frac{1}{l_3} - \frac{\cos \theta_3}{l_2} \right) \quad (4.72)$$

L'élimination des variables dépendantes a pour but de cerner l'influence de chaque variable indépendante sur le comportement du mécanisme. Pour ce faire, les équations doivent être assez simples pour pouvoir facilement être analysées, ce qui n'est pas le cas ici. De plus, si certaines variables pouvaient être isolées, ces équations permettraient l'élimination de variables lors de la génération du mécanisme stable. Pour le mécanisme 1 par exemple, on a pu éliminer les variables k et f_{po} pour réduire le problème à cinq variables.

Comme les expressions sont trop complexes pour isoler les variables ou cerner leur influence sur le comportement du mécanisme, les équations qui suivent comprennent des variables dépendantes. Les équations sont donc beaucoup plus simples.

À l'aide des DCL de la Figure 4.21, des équations (4.41) à (4.44) et en notant que $g_1 = f_b = 0$, on développe les équations pour la période de contact de la prise ferme. La force proximale est définie par

$$g_2 = 2f_p \left(\frac{1}{l_3} + \frac{\sin(\theta_1 - \pi/2 + \theta_4)}{\sin \theta_2 l_1} \right) \quad (4.73)$$

qui dépend du moment généré à l'actionneur passif, qu'on aura avantage à minimiser afin de minimiser g_2 durant toute la période de contact. L'angle $(\theta_1 - \pi/2 + \theta_4)$ est équivalent à l'*angle critique* défini pour le mécanisme 1. Cet angle représente la capacité du mécanisme à générer une force proximale durant la période de contact, soit la différence entre la direction de f_m , l'angle θ_1 , et la direction de la perpendiculaire à l'effort proximal, l'angle $(\pi/2 - \theta_4)$.

On définit l'effort à l'actionneur prismatique par

$$f_m = \frac{f_p}{\sin \theta_2 l_1} \quad (4.74)$$

qui dépend de l'efficacité du mécanisme à combattre le moment à l'actionneur passif.

On traite maintenant le cas de la prise de pincée qui implique qu'aucune force proximale n'est appliquée et que la phalange distale est en butée. L'équation de la droite présentée au graphe général de la Figure 4.7 est

$$f_b = b_{fb} + f_m m_{fb} \quad (4.75)$$

où f_b est l'effort généré par la butée mécanique. L'ordonnée à l'origine b_{fb} est f_{po} . La pente m_{fb} est définie comme

$$m_{fb} = \frac{l_3(l_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_4))}{(l_2 - l_3 \cos \theta_3)} \quad (4.76)$$

Finalement, on définit l'abscisse à l'origine comme

$$a_{fb} = -\frac{f_{po}}{m_{fb}} \quad (4.77)$$

4.3.2.2 Hypothèses et généralités

La première étape de l'analyse du mécanisme 2 est de baliser les conditions d'utilisation du mécanisme et de fixer des objectifs liés à la stabilité des prises.

On suppose que l'actionneur prismatique peut générer une force maximale de 300 N. Cette force représente l'équivalent de la force f_1 du mécanisme 1 (Figure 4.8) qui est en fait l'effort interne résultant de l'application du couple f_m .

De plus, on décide d'imposer les caractéristiques de l'actionneur passif obtenues avec le mécanisme 1, soit $k = 1 \text{ Nm/rad}$ et $f_{po} = 0.25 \text{ Nm}$. Ces valeurs n'ont pas beaucoup varié au cours de la génération du mécanisme stable du mécanisme 1.

Les variables indépendantes liées à la paramétrisation du mécanisme sont les suivantes: l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 , α_1 , θ_3 et θ_4 . Puisque θ_3 et θ_4 sont les angles qui fixent la configuration du mécanisme, ils sont considérés comme des paramètres configuratifs. On fixe les longueurs l_2 et l_3 qui sont respectivement la position du point critique sur la phalange distale et la longueur de la phalange proximale. On a donc $l_2 = 0.030 m$ et $l_3 = 0.075 m$ comme pour le mécanisme 1. La longueur de la phalange distale est de $0.055 m$.

Contrairement à ce qui a été décidé pour le mécanisme 1, on ne fixe pas la position de l'actionneur. En effet, la position de l'actionneur prend une grande importance avec l'utilisation d'un actionneur prismatique. On doit pouvoir atteindre les configurations visées tout en évitant l'interférence mécanique qui risque de se produire plus fréquemment avec ce genre d'actionneur. Le problème est donc réduit à quatre variables, soient l_1 , l_4 , l_5 et α_1 .

On vise les mêmes configurations extrêmes que pour le mécanisme 1, soit celles présentées à la Figure 4.22.

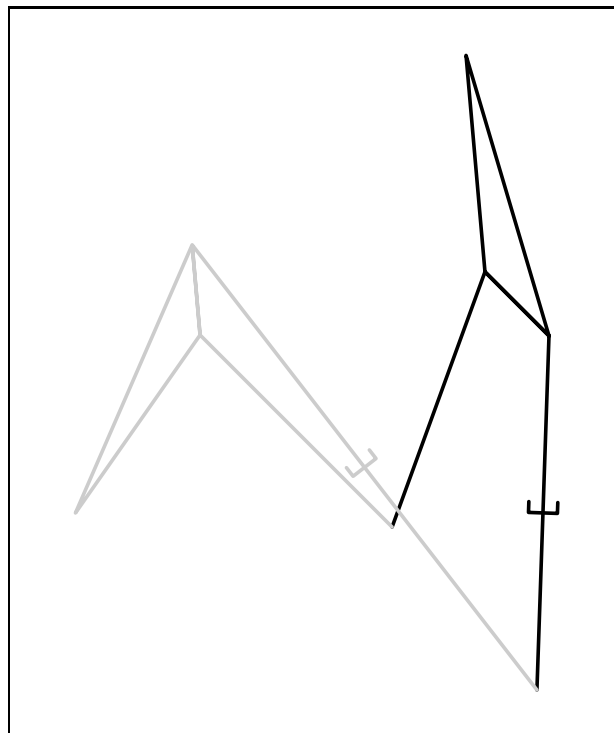


Figure 4.22: Mécanisme 2 en configurations extrêmes.

Le respect de ces configurations extrêmes est assuré par la présence de butées mécaniques limitant le mouvement des phalanges. Le mécanisme est en position complètement ouverte quand $\theta_3 = 155^\circ$ et $\theta_4 = 20^\circ$ et est en position complètement fermée quand $\theta_3 = 80^\circ$ et $\theta_4 = -45^\circ$.

Il est aussi important de déterminer les configurations pertinentes à chaque type de prise. On étudie donc trois configurations qui couvrent l'ensemble des prises de pincée. Ces trois configurations sont illustrées à la Figure 4.23(a) et sont définies comme

$$pc1: \theta_3 = 155^\circ, \theta_4 = 15^\circ$$

$$pc2: \theta_3 = 155^\circ, \theta_4 = 10^\circ$$

$$pc3: \theta_3 = 155^\circ, \theta_4 = 5^\circ$$

où $pc1$, $pc2$ et $pc3$ sont respectivement illustrées par les mécanismes de niveaux de gris de plus en plus pâles.

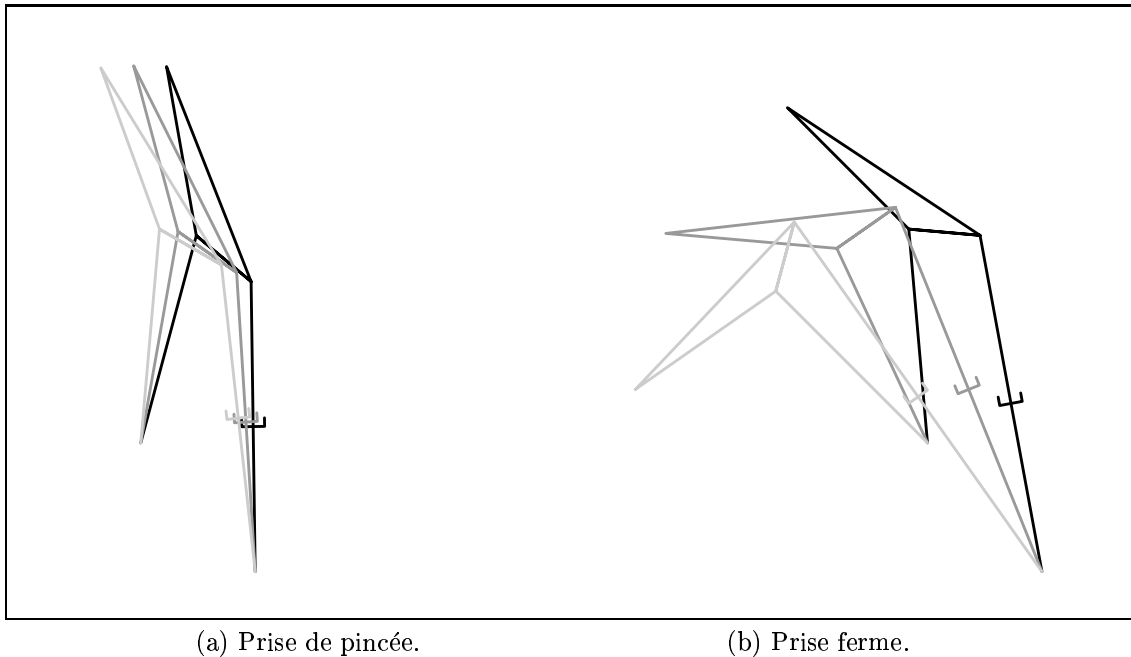


Figure 4.23: Configurations étudiées pour le mécanisme 2.

De la même façon, on définit trois configurations pertinentes à l'étape de serrage de la prise ferme couvrant la plage d'objets potentiels à saisir. Elles sont illustrées à la Figure 4.11(b) et sont définies comme

$$pw1: \theta_3 = 140^\circ, \theta_4 = -5^\circ$$

$$pw2: \theta_3 = 120^\circ, \theta_4 = -25^\circ$$

$$pw3: \theta_3 = 100^\circ, \theta_4 = -45^\circ$$

où $pw1$, $pw2$ et $pw3$ sont respectivement illustrées par les mécanismes de niveaux de gris de plus en plus pâles.

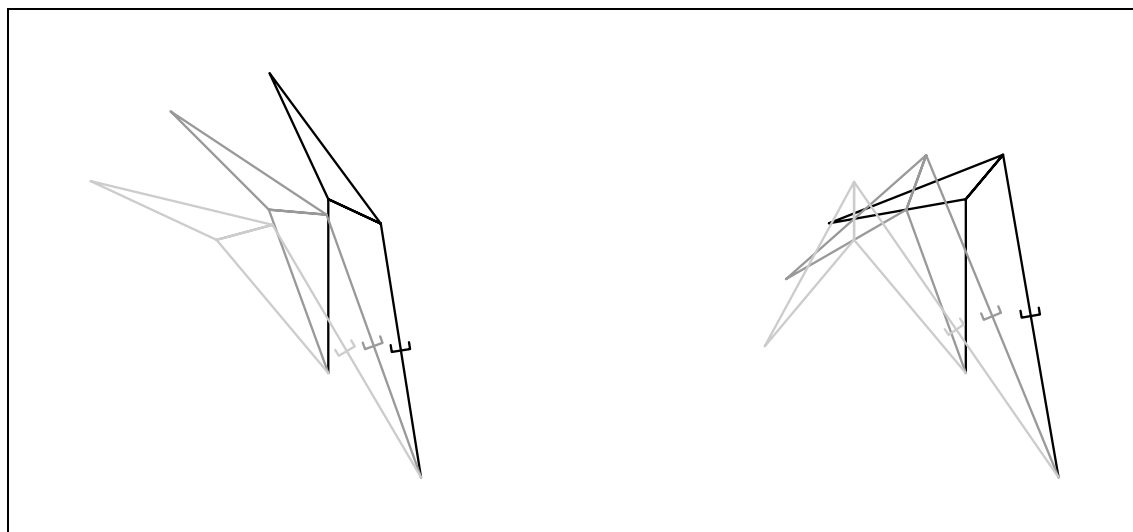
Enfin, on définit les configurations importantes à étudier pendant la période de contact de la prise ferme. Ces configurations englobent évidemment celles définies pour l'étape de serrage de la prise ferme puisque toutes les configurations atteintes durant la période de contact peuvent représenter le début de la période de serrage pour une prise ferme. Pour cette raison, on étudiera trois séries de configurations avec des positions initiale et finale différentes (Figure 4.24). Elles sont définies comme

$$co1: \theta_4 = 0^\circ, 155^\circ < \theta_3 < 80^\circ$$

$$co2: \theta_4 = -20^\circ, 155^\circ < \theta_3 < 80^\circ$$

$$co3: \theta_4 = -40^\circ, 155^\circ < \theta_3 < 80^\circ$$

où les séries de configurations $co1$, $co2$ et $co3$ sont respectivement illustrées par les mécanismes de niveaux de gris de plus en plus pâles.



(a) Configurations initiales.

(b) Configurations finales.

Figure 4.24: Séries de configurations étudiées pour la période de contact de la prise ferme pour le mécanisme 2.

Les configurations initiales représentent le moment où la phalange proximale entre

en contact avec l'objet, chaque configuration représentant la saisie d'un objet de dimension différente. Les configurations finales représentent la fin de la période de contact et le début de la période de serrage. Toutes les configurations intermédiaires représentent potentiellement le début de la période de serrage d'un objet quelconque.

4.3.2.3 Imposition des conditions de stabilité

On définit maintenant une série de conditions qui doivent être respectées afin d'assurer la stabilité de toutes les prises pour toutes les configurations.

On impose une condition pour la prise de pincée qui assure la stabilité pour l'effort maximal à l'actionneur. On vise, comme pour le mécanisme 1, une valeur d'effort à la butée de $f_b = 2.8 Nm$ (stabilité de la prise) pour $f_m = 300 N$ (force maximale à l'actionneur) pour la configuration de pincée la plus instable, soit *pc3*. L'équation (4.75) devient

$$0.25 = 2.8 - 300m_{fb} \quad (4.78)$$

où m_{fb} est définie à l'équation (4.76).

On fixe maintenant les objectifs relatifs à la prise ferme et qui permettent d'obtenir des valeurs positives de force proximale pour la valeur maximale de force à l'actionneur. Pour les trois configurations étudiées, on fixe les mêmes objectifs que pour le mécanisme 1. On vise donc

$$pw1: g_2 = 115 N \text{ pour } f_m = 300 N$$

$$pw2: g_2 = 65 N \text{ pour } f_m = 300 N$$

$$pw3: g_2 = 125 N \text{ pour } f_m = 300 N$$

Ces valeurs, introduites dans l'équation (4.69), donnent trois nouvelles équations, soit

$$115 = 300m_{2(pw1)} + b_{2(pw1)} \quad (4.79)$$

$$65 = 300m_{2(pw2)} + b_{2(pw2)} \quad (4.80)$$

$$125 = 300m_{2(pw3)} + b_{2(pw3)} \quad (4.81)$$

où $m_{2(pwi)}$ et $b_{2(pwi)}$ sont respectivement définies aux équations (4.71) et (4.72) et sont évalués à la configuration *pwi*.

On s'assure maintenant d'éviter l'éjection de l'objet durant la période de contact en imposant de basses valeurs d'effort proximal pour la série de configurations la moins stable, soit *co1*. On fixe donc ces valeurs à

$$\begin{aligned} g_2 &= 70 \text{ N pour } \theta_3 = 155^\circ \text{ et } \theta_4 = 0^\circ \\ g_2 &= 90 \text{ N pour } \theta_3 = 85^\circ \text{ et } \theta_4 = 0^\circ \end{aligned}$$

comme pour le mécanisme 1.

Ces valeurs introduites dans l'équation(4.73) génèrent deux équations. Ces critères permettent donc de limiter la valeur de la force proximale durant la période de contact.

Les équations supplémentaires sont liées à l'intensité et à la direction de la force résultante sur l'objet. On veut en effet que la force totale sur l'objet soit d'environ 200N et qu'elle soit dirigée vers la paume. On a donc

$$g_{tot} = g_1 + g_2 \tag{4.82}$$

où

$$\begin{aligned} 190 \text{ N} &< g_{tot} < 250 \text{ N} \\ \text{pour } f_m &= 300 \text{ N} \end{aligned}$$

Puisque les valeurs de g_2 sont déjà fixées pour les trois configurations, on fixe les valeurs de g_1 de façon à obtenir $g_{tot1} = 195 \text{ N}$, $g_{tot2} = 190 \text{ N}$ et $g_{tot3} = 250 \text{ N}$, pour les configurations *pw1*, *pw2* et *pw3* respectivement. On obtient donc

$$\begin{aligned} \text{pw1: } g_1 &= 80 \text{ N pour } f_m = 300 \text{ N} \\ \text{pw2: } g_1 &= 125 \text{ N pour } f_m = 300 \text{ N} \\ \text{pw3: } g_1 &= 125 \text{ N pour } f_m = 300 \text{ N} \end{aligned}$$

Ces valeurs, introduites dans l'équation (4.60) donnent 3 équations supplémentaires.

4.3.2.4 Génération d'un mécanisme stable

Les équations développées dans la section précédente ont permis d'obtenir un système d'équations surdéterminé de neuf équations et quatre inconnues. On résout ce système

à l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss* auquel un estimé initial des variables doit être fourni. On fixe donc les valeurs initiales des variables indépendantes à

$$l_1 = 0.025 \text{ m}, l_4 = -0.045 \text{ m}, l_5 = 0.04 \text{ m}, \alpha_1 = 140^\circ$$

qui génèrent un mécanisme permettant d'atteindre toutes les configurations visées. Les valeurs des paramètres, fixées précédemment, sont répétées ici:

$$l_2 = 0.030 \text{ m}, l_3 = 0.075 \text{ m}, k = 1 \text{ Nm/rad}, f_{po} = 0.25 \text{ Nm}$$

Le mécanisme résultant, que l'on nomme EST2, est présenté à la Figure 4.25 en configurations extrêmes.

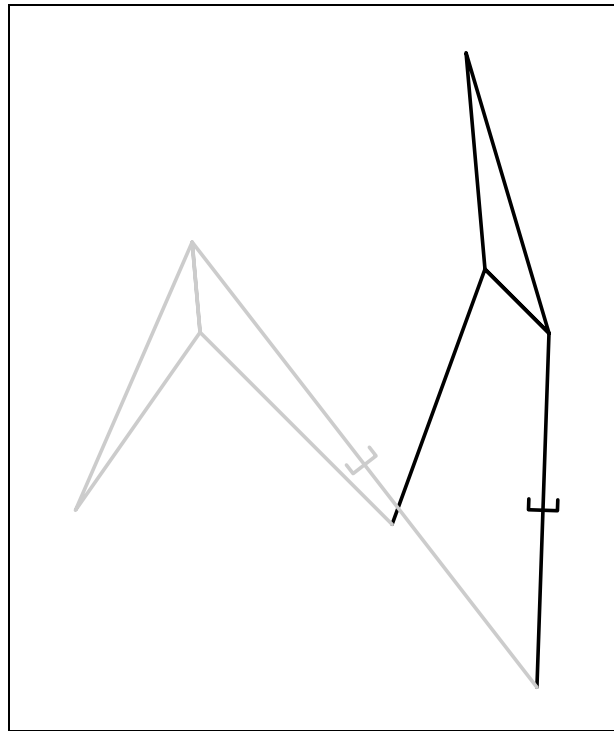


Figure 4.25: Mécanisme EST2 en configurations extrêmes.

On étudie le comportement du mécanisme EST2 pour les différentes étapes de saisie considérées comme importantes. Le graphique de la Figure 4.26 montre l'évolution de la force au moteur (en (a)) et de la force proximale (en (b)) en fonction de la fermeture de la phalange distale sur l'objet (étape de contact de la prise ferme) pour les trois séries de configurations étudiées. La force générée à l'actionneur atteint des valeurs

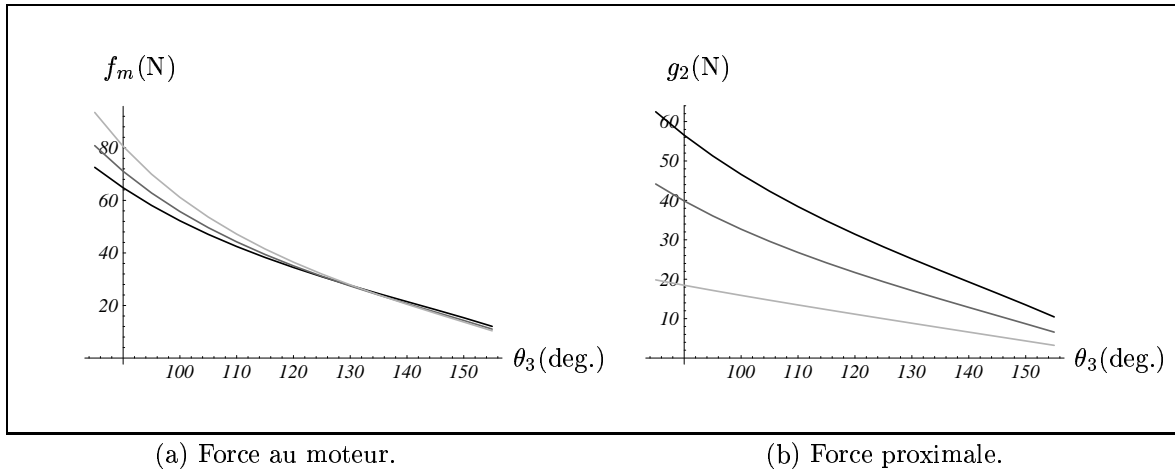


Figure 4.26: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (EST2).

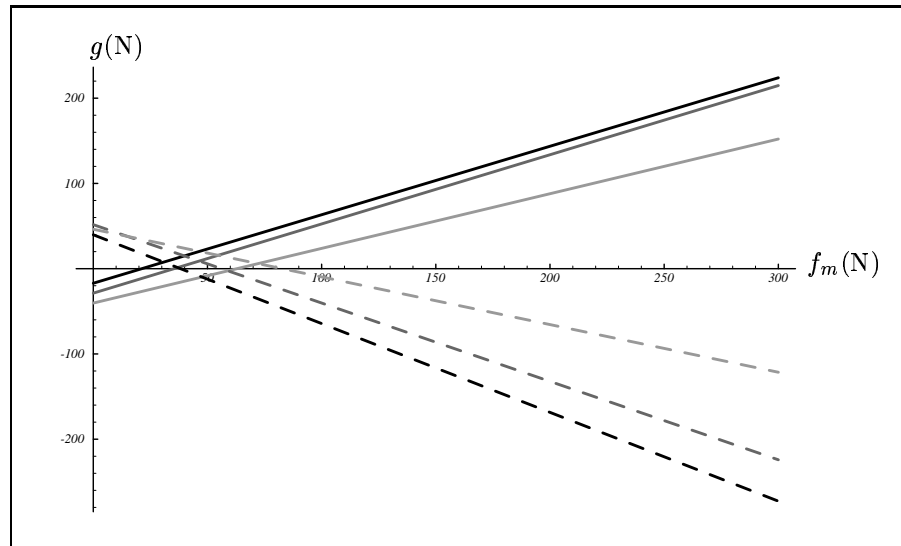


Figure 4.27: Forces proximale et distale en fonction de la force au moteur (EST2).

raisonnables (30% de $f_{m(max)}$) et les valeurs de g_2 sont relativement basses (60 N). Comme prévu, la série de configurations *col* (courbe en noir) présente les plus grands risques d'éjection de l'objet.

Aussitôt que la phalange distale touche à l'objet, l'étape de serrage de la prise ferme commence et les courbes des efforts proximal et distal en fonction de la force au moteur sont montrées à la Figure 4.27. On voit que les trois configurations étudiées mènent à des prises instables, c'est-à-dire que la force proximale (courbes en trait pointillé) atteint une valeur négative. De plus, la force distale (courbes en trait continu) atteint des valeurs relativement élevées (220 N).

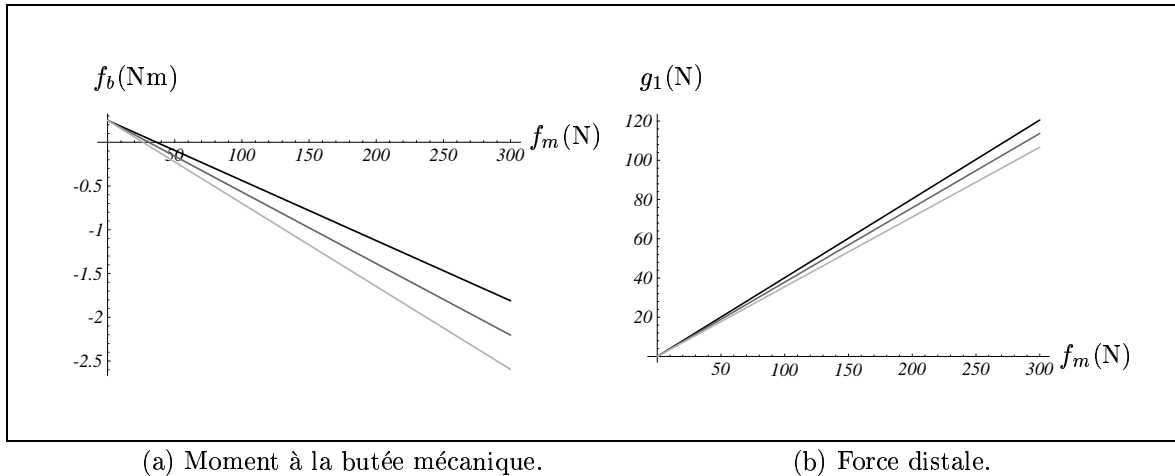


Figure 4.28: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (EST2).

Dans le système d'équations développé à la section précédente, des objectifs ont été fixés sur les valeurs limites de g_2 (pour $f_m = 300$ N) afin d'éviter l'instabilité de la prise. On a aussi inclus des objectifs pour les valeurs limites de g_1 .

Enfin, les performances du mécanisme EST2 durant la prise de pincée sont montrées à la Figure 4.28. On voit que les trois configurations conduisent à l'instabilité de la prise au moment où l'effort à la butée mécanique devient nul. À ce moment, la phalange distale ne repose plus contre la butée et il y a mouvement du mécanisme. La configuration la plus instable est celle prévue, soit *pc3* (la courbe la plus pâle).

Le système de neuf équations à quatre inconnues est solutionné à l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss* (1 minute et 4 secondes de temps-CPU, 4 objectifs intermédiaires (principe de continuation), 15 itérations au total). Le mécanisme obtenu, que l'on nomme MEC21, est présenté à la Figure 4.29 en configurations extrêmes. Les valeurs finales des variables sont

$$l_1 = 0.0183 m, l_4 = 0.0169 m, l_5 = 0.0366 m, \alpha_1 = 163.8^\circ$$

Le Tableau 4.3 présente les valeurs des variables pour les mécanismes initial et final. Au Tableau 4.4, les performances des deux mécanismes ainsi que les critères de stabilité visés sont montrés.

La Figure 4.30 présente les performances du mécanisme MEC21 durant la période de contact. La force proximale est plus élevée que pour le mécanisme EST2, et ce, pour

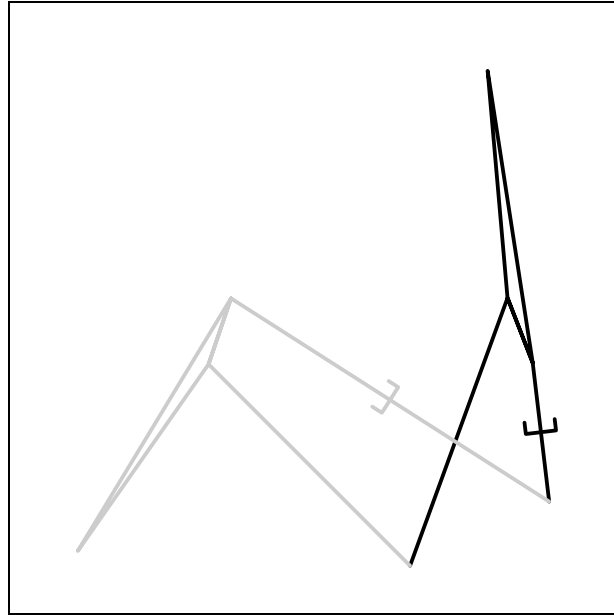


Figure 4.29: Mécanisme MEC21 en configurations extrêmes.

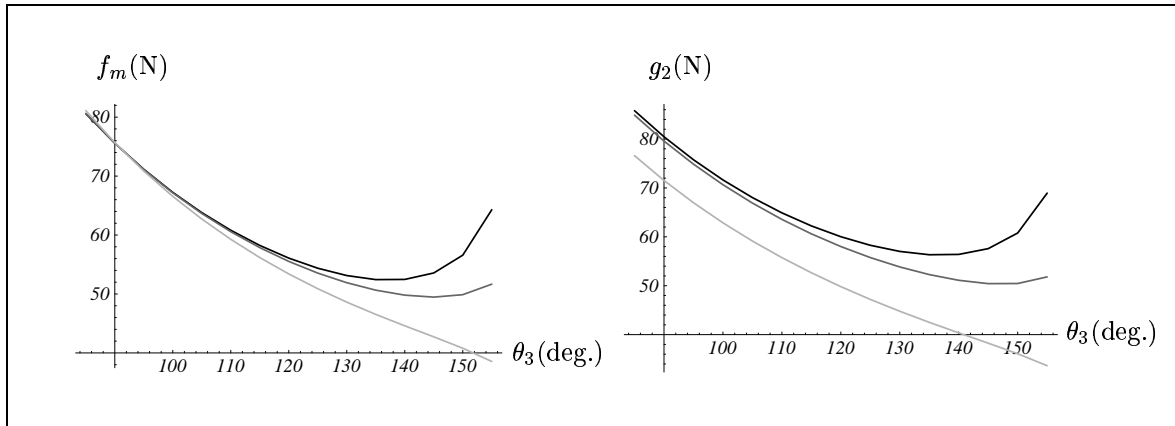
	l_1 (m)	l_4 (m)	l_5 (m)	α_1 (deg.)
EST2	0.0250	- 0.0450	0.0400	140.0
MEC21	0.0183	0.0169	0.0366	163.8

Tableau 4.3: Valeurs des variables pour les mécanismes EST2 et MEC21.

	g_1 (N)			g_2 (N)			g_2 (co1)(N)		f_b (Nm)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw1$	$pw2$	$pw3$	θ_{4max}	θ_{4min}	$pc3$
EST2	223.93	214.81	152.07	-272.68	-224.15	-121.47	10.44	62.47	-2.59
MEC21	80.78	127.61	141.86	133.27	77.23	109.51	68.93	85.80	2.80
Obj.	80.00	125.00	125.00	115.00	65.00	125.00	70.00	90.00	2.80

Tableau 4.4: Performances des mécanismes EST2 et MEC21 et objectifs visés.

toutes les configurations. Ces valeurs sont par contre très près des objectifs visés. On aurait peut être pu imposer des critères plus sévères durant la période de contact. Par contre, une tolérance plus élevée durant cette période permet une plus grande flexibilité pour les autres étapes de saisie.



(a) Force au moteur.

(b) Force proximale.

Figure 4.30: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC21).

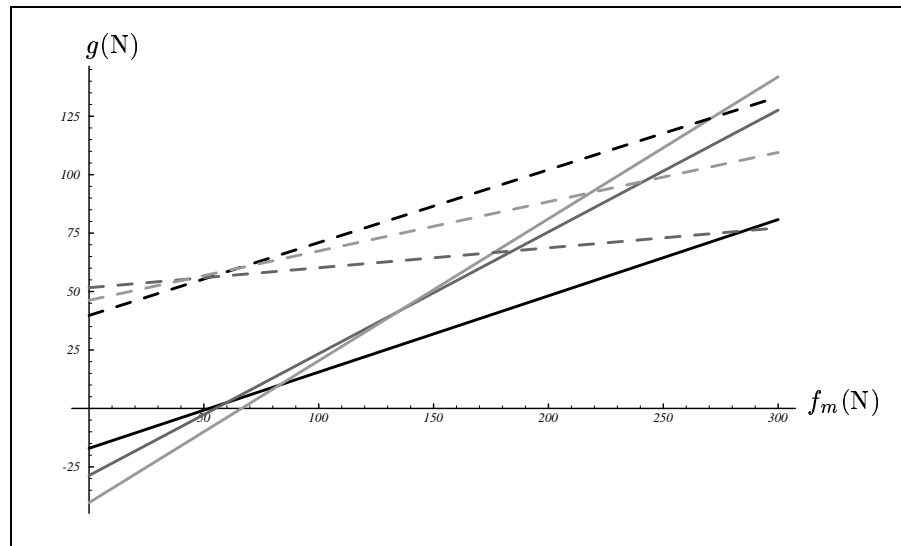


Figure 4.31: Forces proximale et distale en fonction de la force au moteur (MEC21).

Une amélioration considérable a été faite du côté de l'étape de serrage de la prise ferme. En effet, la Figure 4.31 montre que la stabilité est assurée pour les trois configurations et que l'effort total appliqué est maintenant mieux réparti entre les deux phalanges.

Enfin, les conditions de stabilité pour la prise de pincée sont aussi respectées (Figure 4.32). En effet, la valeur du moment généré à la butée mécanique est positive pour toutes les configurations. La valeur de la force distale appliquée varie peu par rapport à celle obtenue avec le mécanisme EST2.

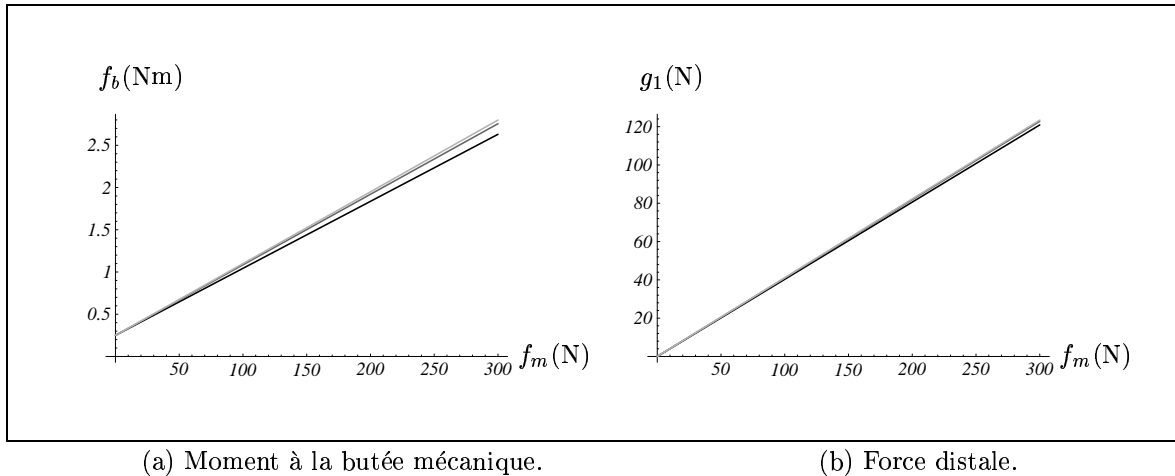


Figure 4.32: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC21).

On peut donc voir que l'amélioration des performances du mécanisme est majeure puisque ce dernier permet maintenant d'accomplir des prises stables pour une diversité d'objets. La répartition des efforts sur l'objet est acceptable et permet théoriquement d'effectuer une saisie sans risque pour l'objet et le préhenseur.

Ce mécanisme final représente un bon estimé initial pour le design et l'optimisation d'un préhenseur appelé à effectuer des tâches spécifiques et à saisir les outils ou objets que ces tâches impliquent.

4.3.3 Mécanisme 3: 2 degrés de liberté (rotoïde, 7 barres)

Le dernier mécanisme étudié est celui présenté à la Figure 3.6. Il s'agit d'un mécanisme à sept barres avec un actionneur rotoïde et un actionneur passif.

4.3.3.1 Développement des équations statiques

La Figure 4.33 présente les Diagrammes de Corps Libres associés au mécanisme 3. On développe les équations d'équilibre statique ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ et $\Sigma M = 0$) pour les membrures du mécanisme. Ainsi, pour la membrure 1, on obtient

$$\Sigma M_{O_1} = f_m - f_1 \sin \theta_2 l_1 = 0 \quad (4.83)$$

Pour la membrure 3 on obtient

$$\Sigma M_{O_4} = f_1 \sin \theta_3 l_3 - f_2 \sin \theta_5 l_4 = 0 \quad (4.84)$$

$$\Sigma F_x = -f_2 \cos(\theta_5 + \alpha_{45}) - f_1 \cos(\theta_3 - \alpha_{43}) - f_3 = 0 \quad (4.85)$$

$$\Sigma F_y = f_1 \sin(\theta_3 - \alpha_{43}) - f_2 \sin(\theta_5 + \alpha_{45}) - f_4 = 0 \quad (4.86)$$

D'après le DCL de la membrure 5 on obtient

$$\Sigma M_{O_7} = f_2 \sin \theta_6 l_6 - g_1 l_7 - f_p + f_b = 0 \quad (4.87)$$

$$\Sigma F_x = f_2 \sin(\theta_6 + \theta_7 + \theta_8 + \alpha_3) - g_1 \cos(\theta_7 + \theta_8) - f_5 = 0 \quad (4.88)$$

$$\Sigma F_y = g_1 \sin(\theta_7 + \theta_8) + f_2 \cos(\theta_6 + \theta_7 + \theta_8 + \alpha_3) - f_6 = 0 \quad (4.89)$$

Enfin, pour la membrure 6 on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma M_{O_8} = & f_p - f_b - \frac{g_2 l_8}{2} + f_6 l_8 \sin \theta_8 - f_5 l_8 \cos \theta_8 - f_3 l_9 \cos(\theta_8 + \alpha_1) + \\ & f_4 l_9 \sin(\theta_8 + \alpha_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Dans les équations (4.83) à (4.90), les forces f_1 à f_6 sont des efforts internes (qu'on élimine facilement par substitution), f_p est l'effort associé à l'actionneur passif, f_b est l'effort généré par la butée mécanique (nul lorsque le doigt n'est pas en butée) et les efforts g_1 et g_2 sont respectivement les forces distale et proximale (respectivement perpendiculaires aux phalanges distale et proximale). L'indice O_i associé à la somme des moments (ΣM_{O_i}) indique autour de quel point cette dernière a été faite. Les α_{ij} représentent les angles entre les segments reliant les liaisons O_i et O_j et l'horizontale.

On utilise les équations (4.83) à (4.90) afin de développer les équations des forces proximale et distale pour la période de serrage de la prise ferme. On note que la phalange distale n'est pas en butée ($f_b = 0$). On veut trouver les expressions algébriques représentant les droites g_1 et g_2 de la Figure 4.3. L'expression de la force distale est

$$g_1 = \frac{f_m \sin \theta_3 \sin \theta_6 l_3 l_6}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l_1 l_4 l_7} - \frac{f_p}{l_7} \quad (4.91)$$

où

$$f_p = f_{po} + k(\theta_{7o} - \theta_7) \quad (4.92)$$

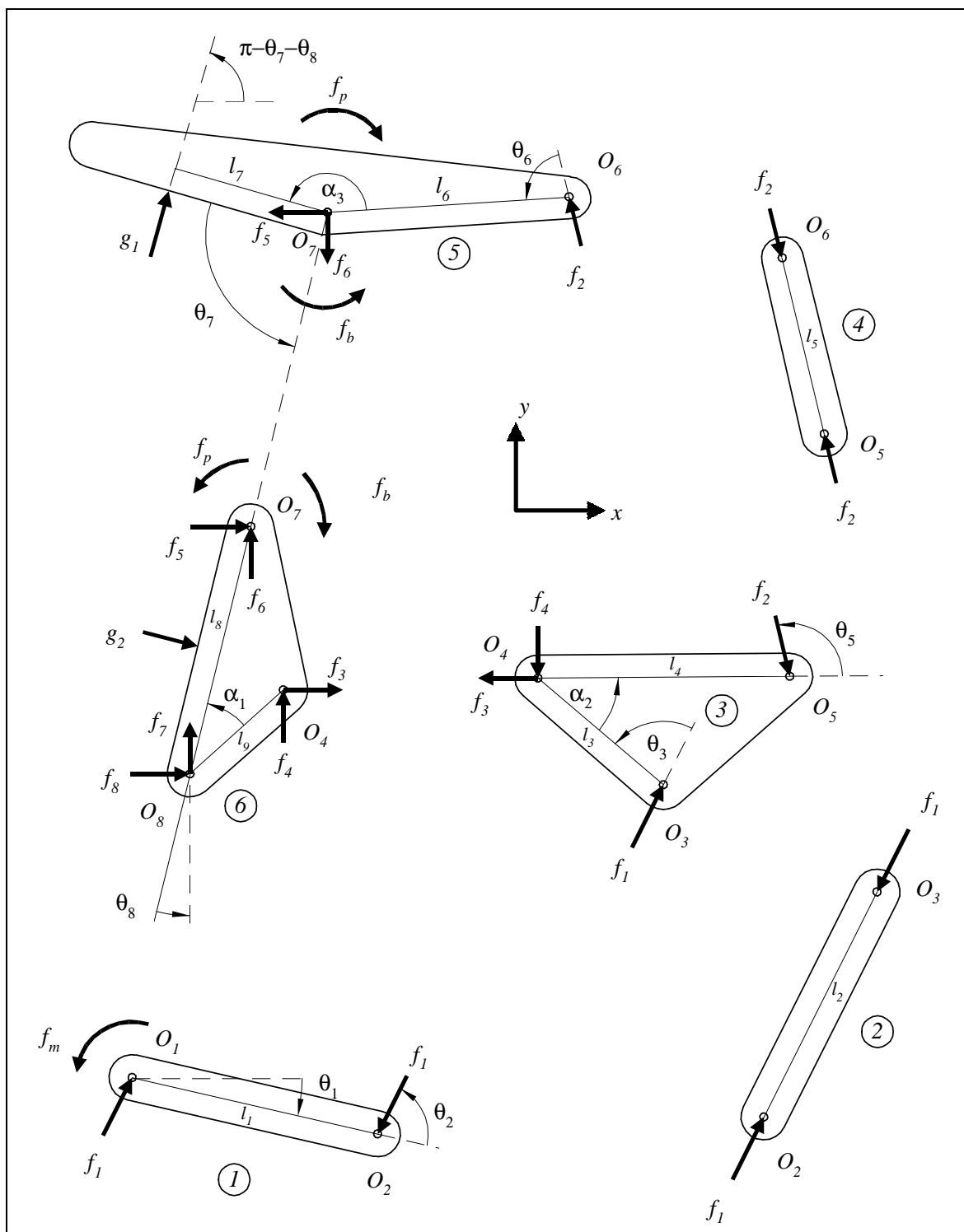


Figure 4.33: Diagrammes de Corps Libres des membrures du mécanisme 3.

est le moment à l'actionneur passif et où f_m est le couple généré à l'actionneur rotoïde. Les variables f_{po} et k sont respectivement le moment initial à l'actionneur passif et sa

constante de raideur. Sous la forme de l'équation d'une droite, on a

$$g_1 = m_1 f_m + b_1 \quad (4.93)$$

où

$$m_1 = \frac{l_3 l_6 \sin \theta_3 \sin \theta_6}{l_1 l_4 l_7 \sin \theta_2 \sin \theta_5} \quad (4.94)$$

et

$$b_1 = -\frac{f_p}{l_7} \quad (4.95)$$

De la même façon, on définit l'effort proximal par

$$g_2 = m_2 f_m + b_2 \quad (4.96)$$

où

$$m_2 = \frac{2}{l_1 l_8 \sin \theta_2} (A + B + C) \quad (4.97)$$

$$A = l_9 \cos(\theta_3 - \alpha_{43} - \alpha_1 - \theta_8) \quad (4.98)$$

$$B = \frac{l_3 l_6 l_8 \sin \theta_3 \sin \theta_6 \cos \theta_7}{l_7 l_4 \sin \theta_5} \quad (4.99)$$

$$C = \frac{l_3 l_9 \sin \theta_3 \cos(\theta_5 + \theta_8 + \alpha_{45} + \alpha_1) - l_3 l_8 \sin \theta_3 \sin(\alpha_3 + \theta_6 + \theta_7)}{l_4 \sin \theta_5} \quad (4.100)$$

et où l'ordonnée à l'origine est définie par

$$b_2 = \frac{2f_p}{l_8 l_7} (l_7 - l_8 \cos \theta_7) \quad (4.101)$$

On traite maintenant le cas de la phase de contact de la prise ferme. La force proximale est la seule force appliquée ($g_1 = f_b = 0$). Elle est définie par

$$g_2 = \frac{2f_p}{l_8} \left(1 + \frac{1}{\sin \theta_6 l_6} (D - E)\right) \quad (4.102)$$

où

$$D = l_9 \cos(\theta_5 + \theta_8 + \alpha_{45} + \alpha_1) + \frac{l_4 l_9 \sin \theta_5 \cos(\theta_3 - \alpha_{43} - \alpha_1 - \theta_8)}{\sin \theta_3 l_3} \quad (4.103)$$

$$E = l_8 \sin(\alpha_3 + \theta_6 + \theta_7) \quad (4.104)$$

Le couple généré à l'actionneur peut être déterminé à l'aide de

$$f_m = \frac{f_p l_1 l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_5}{l_3 l_6 \sin \theta_3 \sin \theta_6} \quad (4.105)$$

Enfin, toujours à l'aide des équations (4.83) à (4.90), on développe l'expression de l'effort sur la butée mécanique durant la prise de pincée. On note que la force proximale est alors nulle ($g_2 = 0$). L'expression générale de la courbe est

$$f_b = b_{fb} + f_m m_{fb} \quad (4.106)$$

où f_b est l'effort généré par la butée mécanique. L'ordonnée à l'origine b_{fb} est f_{po} , le moment initial à l'actionneur passif. La pente m_{fb} est définie comme

$$m_{fb} = F(G - H) \quad (4.107)$$

où

$$F = -\frac{l_7}{(l_7 - l_8 \cos \theta_7) \sin \theta_2 l_1} \quad (4.108)$$

$$G = l_9 \cos(\theta_3 - \alpha_{43} - \alpha_1 - \theta_8) + \frac{\sin \theta_3 \sin \theta_6 \cos \theta_7 l_3 l_6 l_8}{\sin \theta_5 l_4 l_7} \quad (4.109)$$

$$H = \frac{\sin \theta_3 l_3}{\sin \theta_5 l_4} (l_8 \sin(\theta_6 + \theta_7 + \alpha_3) - l_9 \cos(\theta_5 + \theta_8 + \alpha_{45} + \alpha_1)) \quad (4.110)$$

4.3.3.2 Hypothèses et généralités

Les équations qui régissent le comportement statique du mécanisme 3 sont développées. On balise maintenant l'utilisation du mécanisme en faisant quelques hypothèses.

Comme pour le mécanisme 1, l'actionneur rotoïde peut générer un couple variant entre 0 et 15 Nm. De plus, on impose les caractéristiques de l'actionneur passif à $k = 1 \text{ Nm/rad}$ et $f_{po} = 0.25 \text{ Nm}$ pour les mêmes raisons que les deux mécanismes précédents. On fixe la longueur de la phalange proximale et la position du point critique sur la phalange distale, soient respectivement $l_8 = 0.075 \text{ m}$ et $l_7 = 0.030 \text{ m}$. La phalange distale a une longueur de 0.055 m. Les angles fixant la configuration du mécanisme sont θ_7 et θ_8 . Enfin, on fixe la position verticale de l'actionneur, soit $l_{12} = 0 \text{ m}$.

Les variables indépendantes liées au problème sont donc $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_9, l_{11}, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 (Figure 3.6).

Les configurations extrêmes du mécanisme sont celles montrées à la Figure 4.34. Le respect de ces configurations extrêmes est assuré par la présence de butées mécaniques limitant le mouvement des phalanges. Le mécanisme est en configuration complètement ouverte quand $\theta_7 = 170^\circ$ et $\theta_8 = 20^\circ$ et est en configuration complètement fermée quand $\theta_7 = 90^\circ$ et $\theta_8 = -50^\circ$.

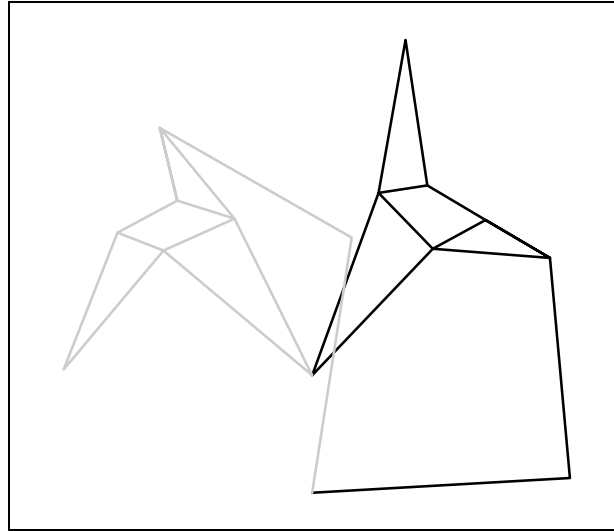


Figure 4.34: Mécanisme 3 en configurations extrêmes.

On étudie trois configurations pour la prise de pincée, soit celles illustrées à la Figure 4.35. Ces dernières sont définies comme

$$pc1: \theta_7 = 170^\circ, \theta_8 = 15^\circ$$

$$pc2: \theta_7 = 170^\circ, \theta_8 = 10^\circ$$

$$pc3: \theta_7 = 170^\circ, \theta_8 = 5^\circ$$

où $pc1$, $pc2$ et $pc3$ sont respectivement illustrées par les mécanismes en niveaux de gris de plus en plus pâles.

Pour l'étude de la prise ferme, on utilise huit configurations qui permettront de générer seize équations. Les configurations utilisées sont illustrées à la Figure 4.36 et sont définies par

$$pw1: \theta_7 = 165^\circ, \theta_8 = 0^\circ$$

$$pw2: \theta_7 = 150^\circ, \theta_8 = -10^\circ$$

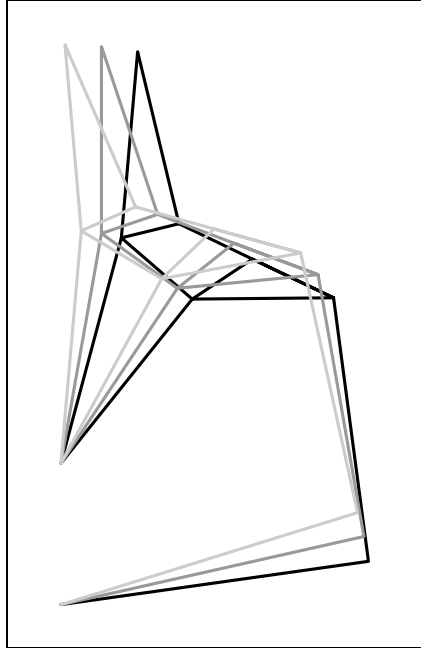


Figure 4.35: Configurations étudiées pour la prise de pincée (mécanisme 3).

$$pw3: \theta_7 = 135^\circ, \theta_8 = -20^\circ$$

$$pw4: \theta_7 = 120^\circ, \theta_8 = -30^\circ$$

$$pw5: \theta_7 = 105^\circ, \theta_8 = -40^\circ$$

$$pw6: \theta_7 = 90^\circ, \theta_8 = -50^\circ$$

$$pw7: \theta_7 = 90^\circ, \theta_8 = 0^\circ$$

$$pw8: \theta_7 = 125^\circ, \theta_8 = 0^\circ$$

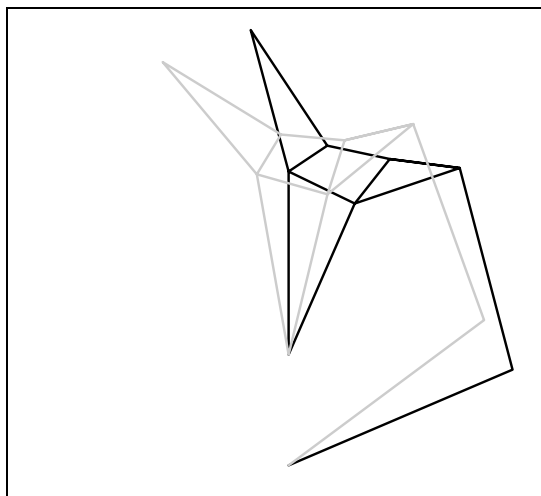
Enfin, on étudie trois séries de configurations pour la période de contact de la prise ferme. Elles sont définies comme

$$co1: \theta_8 = 0^\circ, 170^\circ < \theta_7 < 90^\circ$$

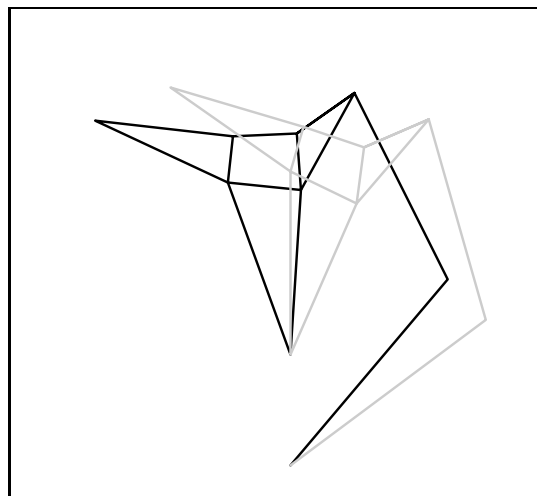
$$co2: \theta_8 = -25^\circ, 170^\circ < \theta_7 < 90^\circ$$

$$co3: \theta_8 = -50^\circ, 170^\circ < \theta_7 < 90^\circ$$

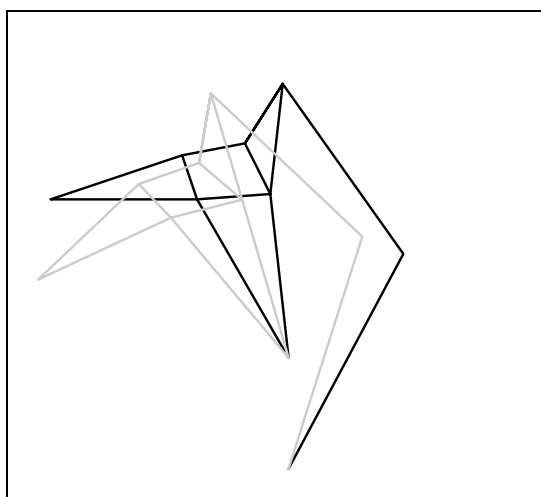
et sont illustrées à la Figure 4.37. Les séries de configurations *co1*, *co2* et *co3* sont respectivement illustrées par les mécanismes en niveaux de gris de plus en plus pâles.



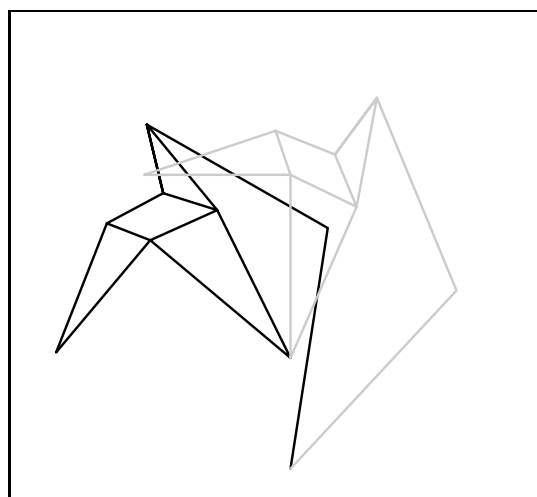
(a) Configurations $pw1$ (noir) et $pw2$ (gris).



(b) Configurations $pw3$ (noir) et $pw7$ (gris).



(c) Configurations $pw4$ (noir) et $pw5$ (gris).



(d) Configurations $pw6$ (noir) et $pw8$ (gris).

Figure 4.36: Configurations étudiées pour la période de serrage de la prise ferme (mécanisme 3).

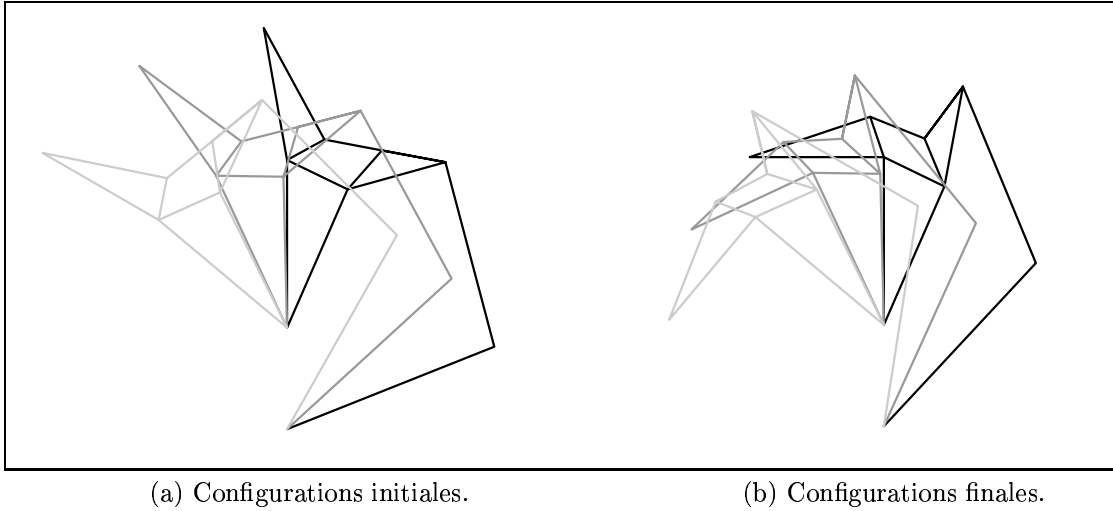


Figure 4.37: Configurations étudiées pour la période de contact de la prise ferme (mécanisme 3).

4.3.3.3 Imposition des conditions de stabilité

On génère maintenant les équations qui permettent d'imposer les conditions de stabilité relatives aux différentes étapes de saisie.

La stabilité de la prise de pincée est assurée par le respect de l'unilatéralité du contact entre la phalange distale et la butée mécanique fixée à la phalange proximale. On impose donc une valeur positive d'effort à la butée mécanique, pour la valeur maximale du couple généré à l'actionneur et pour la configuration la moins stable ($pc3$). On impose un moment résultant de l'effort sur la butée de $f_b = 0.2 Nm$ pour un couple à l'actionneur de $f_m = 15 Nm$. La valeur de l'effort à la butée est réduite par rapport aux deux autres mécanismes ($f_b = 2.8 Nm$). Cette nouvelle valeur vise encore la stabilité de la prise, mais la condition étant moins sévère, elle permet plus de flexibilité pour atteindre les autres objectifs. Ces valeurs sont donc introduites dans l'équation (4.106) et donnent

$$0.25 = 0.2 - 15m_{fb} \quad (4.111)$$

où m_{fb} est définie à l'équation (4.107).

On fixe maintenant les objectifs qui visent la stabilité de la prise ferme pour les huit configurations étudiées. On vise donc

$$g_2 = 100 N \text{ pour } f_m = 15 N \text{ pour toutes les configurations}$$

Ces valeurs donnent huit nouvelles équations issues de l'équation (4.96). La valeur de $100 N$ représente l'objectif visant la distribution de l'effort total (environ $200 N$) sur les deux phalanges.

On évite l'éjection de l'objet durant la période de contact en minimisant la valeur de l'effort proximal. On vise donc une valeur modérée de g_2 pour la série de configurations présentant les plus grands risques d'éjection de l'objet. On fixe donc pour la série *col*

$$g_2 = 22 N \text{ pour } \theta_7 = 170^\circ \text{ et } \theta_8 = 0^\circ$$

$$g_2 = 80 N \text{ pour } \theta_7 = 90^\circ \text{ et } \theta_8 = 0^\circ$$

qu'on introduit dans l'équation (4.102) pour obtenir deux autres équations. Ces valeurs sont toutefois arbitraires puisqu'on voudra simplement minimiser g_2 lors de l'optimisation.

Finalement, on génère huit équations supplémentaires en fixant des objectifs pour la valeurs de la force distale pour les configurations pertinentes à la prise ferme. Ces équations visent à obtenir un effort réparti sur les deux phalanges et à éviter l'éjection de l'objet durant le serrage. On vise donc

$$pw1: g_1 = 170 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw2: g_1 = 170 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw3: g_1 = 160 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw4: g_1 = 125 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw5: g_1 = 85 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw6: g_1 = 40 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw7: g_1 = 75 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

$$pw8: g_1 = 145 N \text{ pour } f_m = 15 N$$

La différence entre les objectifs s'explique par le fait que certaines valeurs obtenues avec le mécanisme initial (Figure 4.40) sont soit négatives (instabilité), soit très élevées (éjection de l'objet). On vise donc des objectifs qui favoriseront le rapprochement des valeurs extrêmes vers la valeur de $100 N$ désirée.

4.3.3.4 Génération d'un mécanisme stable

Les équations développées à la section précédente servent à construire un système de 19 équations à 11 inconnues. Pour résoudre ce système surdéterminé, on utilise l'algorithme de *Newton-Gauss*. On a donc besoin d'un estimé initial qui servira de point de départ pour l'algorithme.

On fixe donc la valeur des variables indépendantes qui sont présentées au Tableau 4.5. Le mécanisme résultant, que l'on nomme EST3, est illustré à la Figure 4.38 en configurations extrêmes.

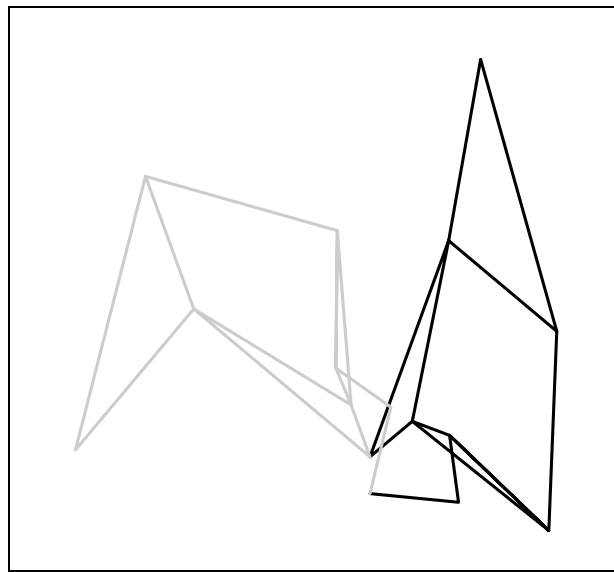


Figure 4.38: Mécanisme EST3 en configurations extrêmes.

On étudie d'abord le comportement du mécanisme durant la période de contact de la prise ferme. La Figure 4.39(a) montre l'évolution de la force proximale en fonction de la fermeture de la phalange distale sur l'objet. On voit que l'effort proximal est élevé pour les trois configurations. Il y a donc risque d'éjection de l'objet pendant cette étape. En (b), on montre l'évolution du couple généré au moteur qui atteint la moitié de la valeur maximale possible.

Les résultats obtenus pour la période de serrage de la prise ferme sont montrés à la Figure 4.40. En (a), on traite les configurations $pw1$, $pw2$, $pw3$ et $pw4$ qui sont respectivement illustrées par des lignes de niveaux de gris de plus en plus pâles. De plus, l'effort distal g_1 est représenté en trait continu et l'effort proximal g_2 est représenté en

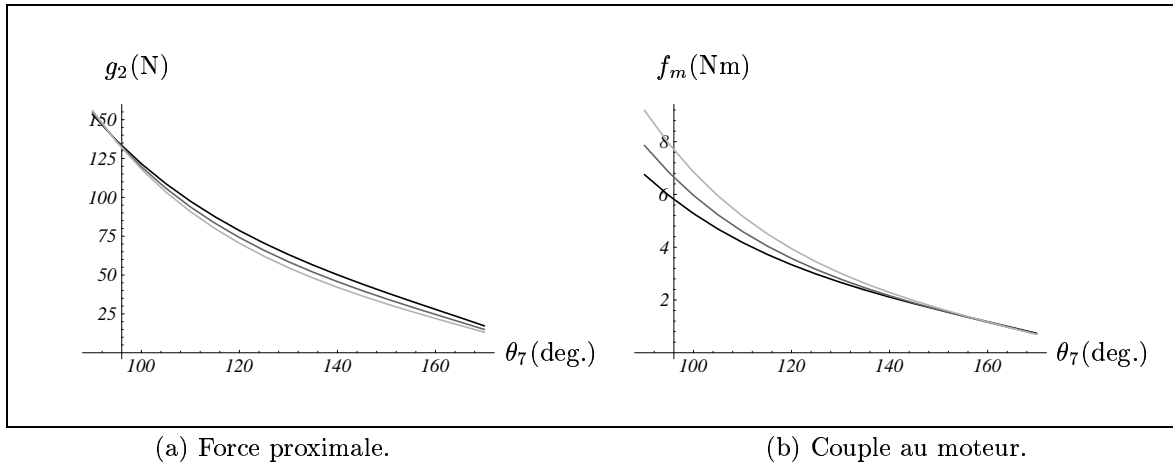


Figure 4.39: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (EST3).

trait pointillé. On voit que les configurations *pw1*, *pw2* et *pw3* mènent à l'instabilité puisque l'effort proximal atteint une valeur négative quand le couple à l'actionneur est augmenté. En (b), on traite les configurations *pw5*, *pw6*, *pw7* et *pw8* qui sont respectivement illustrées par des lignes de niveaux de gris de plus en plus pâles. Toutes les configurations sont stables, mais des valeurs relativement élevées d'effort proximal (en trait pointillé) sont atteintes pour les configurations *pw6* et *pw7*.

La dernière étape de l'étude du comportement du mécanisme initial est l'analyse de l'effort à la butée pendant la prise de pincée. La valeur du moment généré à la liaison actionnée passivement par la force sur la butée mécanique est montrée à la Figure 4.41(a). On voit que les trois configurations mènent à l'instabilité (valeur négative de f_b), donc à un mouvement relatif entre les phalanges. En (b), la force distale atteint des valeurs qui se comparent à celles obtenues pour les deux autres mécanismes étudiés.

On veut maintenant améliorer les performances du mécanisme en résolvant le système de 19 équations et 11 inconnues et en obtenant un mécanisme qui approxime les objectifs visés à travers ces équations. À l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss* (14 minutes et 12 secondes de temps-CPU, 4 objectifs intermédiaires (principe de continuation), 16 itérations au total), on obtient le mécanisme (MEC31) présenté à la Figure 4.42 en configurations extrêmes. Les valeurs finales des variables se retrouvent dans la Tableau 4.5 et les performances des mécanismes initial et final sont données au Tableau 4.6.

Les performances du nouveau mécanisme pour la période de contact de la prise

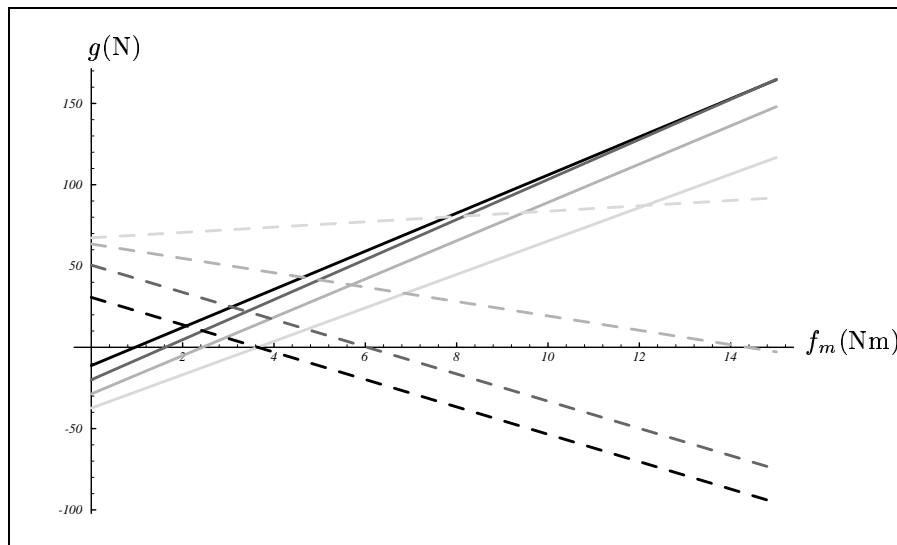
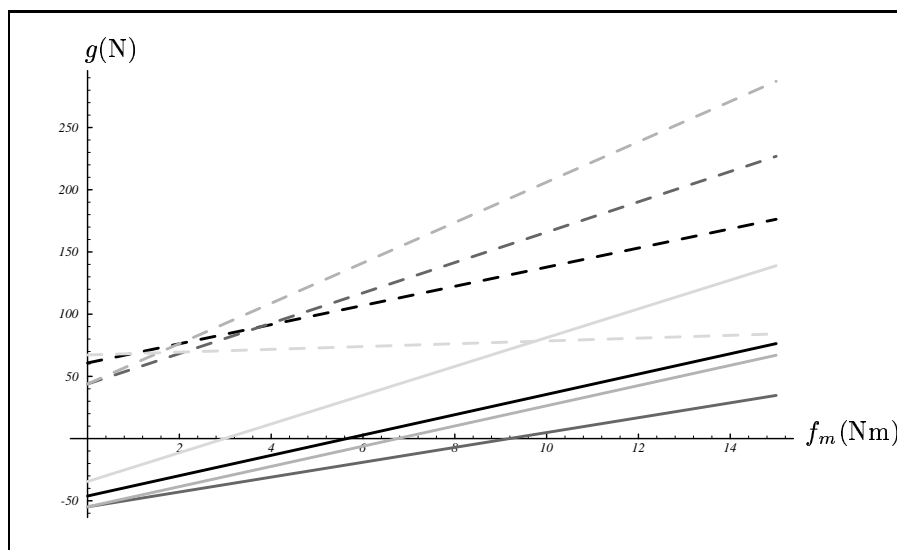
(a) Configurations $pw1$ à $pw4$.(b) Configurations $pw5$ à $pw8$.

Figure 4.40: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (EST3).

ferme sont montrées à la Figure 4.43. En (a), on voit que pour les configurations les plus fermées des trois séries de configurations ($\theta_7 = 90^\circ$), la force proximale atteint des valeurs élevées (plus élevées que pour le mécanisme initial). On visait une valeur de $80 N$, objectif qui n'a vraisemblablement pas été atteint. En (b), la valeur du couple à l'actionneur atteint les deux tiers de la valeur maximale. On tolère ces valeurs pour

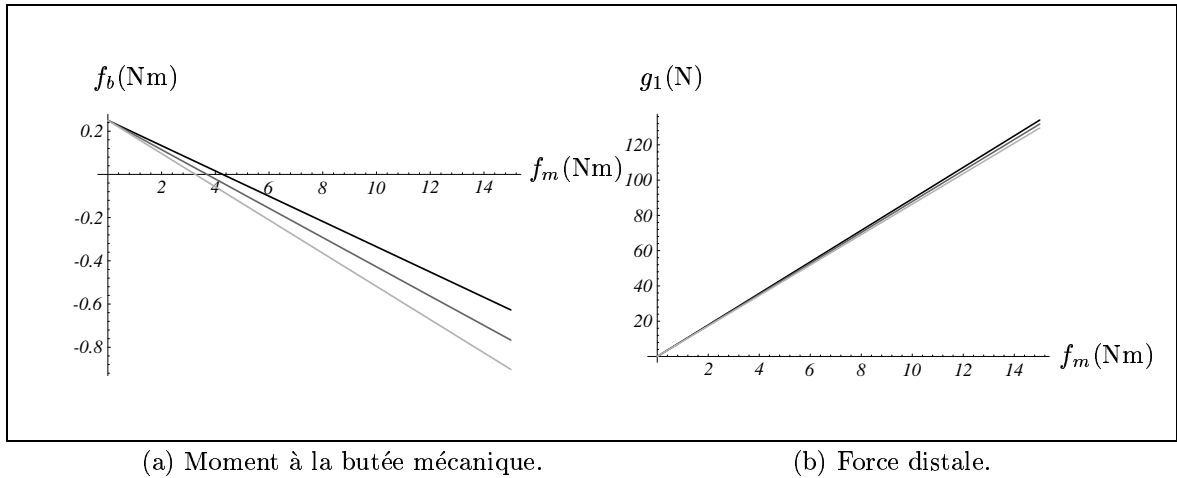


Figure 4.41: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (EST3).

l'instant puisqu'elles permettent d'améliorer les performances du mécanisme durant les autres étapes de saisie, mais on voudra minimiser ces valeurs pendant l'optimisation.

Les forces proximale et distale générées durant la période de serrage de la prise ferme sont montrées à la Figure 4.44. En (a), on traite les configurations $pw1$, $pw2$, $pw3$ et $pw4$ qui sont respectivement illustrées par des lignes de niveaux de gris de plus en plus pâles. De plus, l'effort distal g_1 est représenté en trait continu et l'effort proximal g_2 en trait pointillé. On voit qu'il y a encore instabilité pour les configurations $pw1$ et $pw2$ puisque la force proximale atteint une valeur négative. On note par contre une

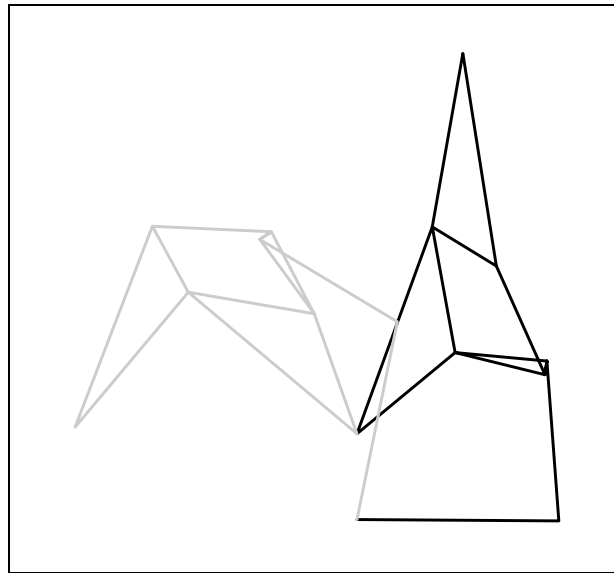


Figure 4.42: Mécanisme MEC31 en configurations extrêmes.

	$l_1(\text{m})$	$l_2(\text{m})$	$l_3(\text{m})$	$l_4(\text{m})$	$l_5(\text{m})$	$l_6(\text{m})$
EST3	0.0290	0.0220	0.0130	0.0570	0.0650	0.0460
MEC31	0.0688	0.0546	0.0313	0.0315	0.0405	0.0256

	$l_9(\text{m})$	$l_{11}(\text{m})$	$\alpha_1(\text{deg.})$	$\alpha_2(\text{deg.})$	$\alpha_3(\text{deg.})$
EST3	0.0180	-0.0120	30.00	-18.00	120.00
MEC31	0.0434	-0.0292	30.41	-8.59	111.44

Tableau 4.5: Valeurs des variables pour les mécanismes EST3 et MEC31.

	$g_1(\text{N})$							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
EST3	164.58	164.81	148.00	116.734	76.3506	34.7037	66.99	138.94
MEC31	134.21	144.01	131.25	101.09	61.20	20.71	61.15	129.34
Obj.	170.00	170.00	160.00	125.00	85.00	40.00	75.00	145.00

	$g_2(\text{N})$							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
EST3	-95.61	-74.97	-2.80	91.94	176.26	226.88	287.19	84.11
MEC31	-6.99	-21.59	30.49	112.43	186.54	228.83	281.41	100.29
Obj.	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

	$g_2(\text{co1})(\text{N})$		$f_b(\text{Nm})$
	θ_{7max}	θ_{7min}	$pc3$
EST3	17.27	153.45	-0.90
MEC31	22.46	156.231	0.23
Obj.	22.00	80.00	0.20

Tableau 4.6: Performances des mécanismes EST3 et MEC31 et objectifs visés.

nette amélioration. Tout d'abord, la configuration $pw3$ est maintenant stable. De plus, l'instabilité associée aux configurations $pw1$ et $pw2$ survient pour des valeurs f_m qui sont près de sa valeur maximale, donc vers la fin de la période de serrage. Il faut se rappeler que le but de cette première étape de traitement est d'obtenir un mécanisme adéquat pour servir d'estimé initial dans un algorithme d'optimisation. On est donc

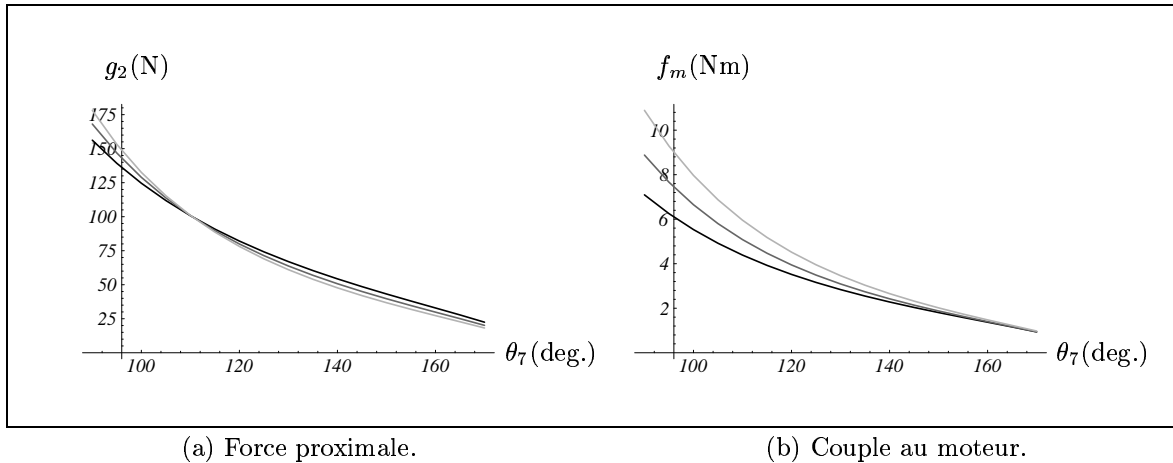


Figure 4.43: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC31).

suffisamment proche d'un mécanisme stable pour être satisfait de ces résultats.

On ne note pas de changement significatif des performances pour ce qui est des configurations *pw5*, *pw6*, *pw7* et *pw8* (Figure 4.44(b)).

Finalement, la Figure 4.45 présente les performances du mécanisme MEC31 pour la prise de pincée. En (a), on voit que le mécanisme génère maintenant une prise stable pour toutes les configurations. En effet, le moment généré par l'effort sur la butée mécanique est positif en tout temps. La force distale générée pendant la prise atteint des valeurs plus élevées que pour le mécanisme initial (Figure 4.45(b)).

4.4 Conclusion sur l'étude du comportement des préhenseurs sous-actionnés

Les trois étapes de saisie qui représentent des risques d'instabilité ou d'éjection de l'objet ont été présentées dans ce chapitre. Ces étapes sont: les périodes de contact et de serrage de la prise ferme et l'étape de serrage de la prise de pincée. Les conditions de stabilité pertinentes aux trois étapes ont été discutées. On a obtenu les équations régissant le comportement de trois mécanismes à deux degrés de liberté de topologie différente. Ces équations sont issues de la modélisation de ces mécanismes faite au Chapitre 3.

On veut optimiser un mécanisme en fonction de critères spécifiques à l'application

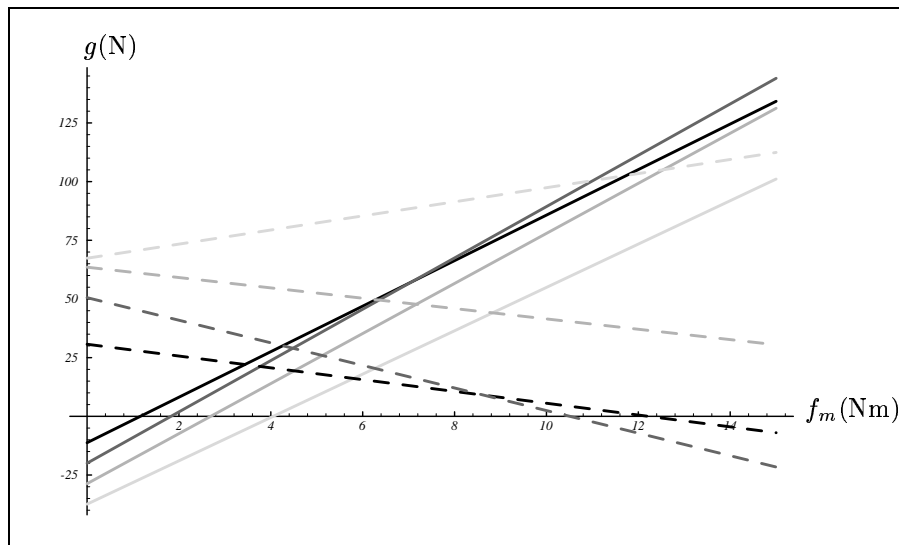
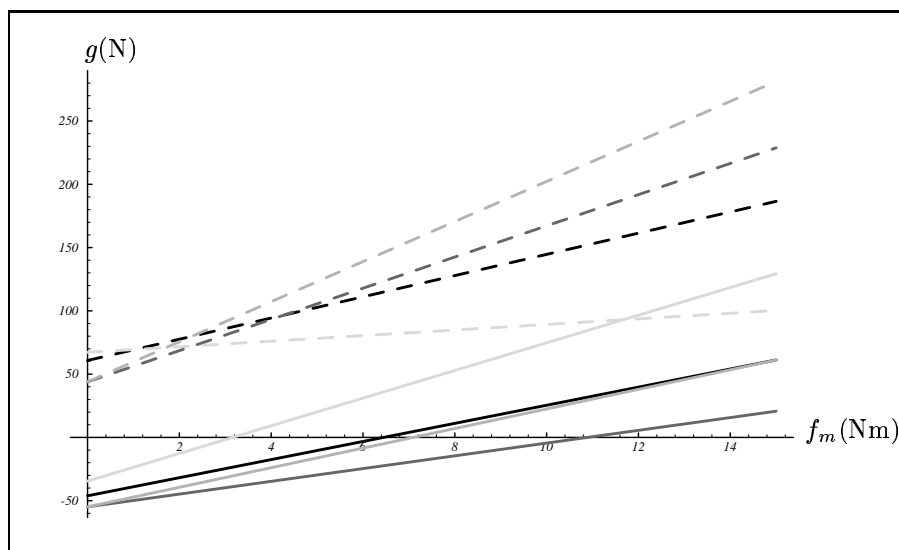
(a) Configurations *pw1* à *pw4*.(b) Configurations *pw5* à *pw8*.

Figure 4.44: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC31).

visée. On tente donc d'obtenir le meilleur estimé initial possible afin de faciliter la convergence de l'algorithme d'optimisation, présenté au prochain chapitre. On vise le mécanisme satisfaisant le mieux les critères associés à la réalisation des tâches visées. Pour ce faire, on génère une série d'équations qui représentent chacune un critère de stabilité ou une caractéristique désirée. On choisit les variables du problème de façon

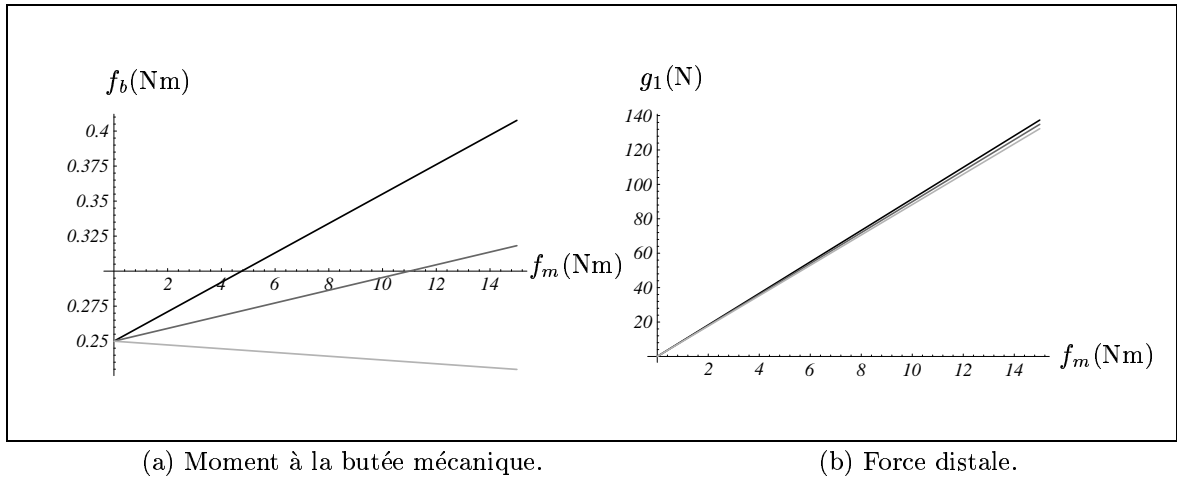


Figure 4.45: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC31).

à donner la plus grande flexibilité possible à la résolution du problème sans toutefois s'embarasser de paramètres dont la valeur peut être dictée par l'application. On résout le système d'équations résultant à l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss* et on obtient, pour les trois mécanismes étudiés, un mécanisme qui représente un estimé initial de bonne qualité qui permettra de démarrer l'algorithme d'optimisation.

La première étape de raffinement de la solution étant accomplie, on présente au Chapitre 5 l'étape finale menant à l'obtention d'un mécanisme capable d'effectuer avec succès et de façon sécuritaire des tâches spécifiques.

CHAPITRE 5

OPTIMISATION DE MÉCANISMES SOUS-ACTIONNÉS

5.1 Introduction sur l'optimisation

L'analyse détaillée des mécanismes sous-actionnés faite au chapitre précédent a permis la mise en équation du comportement statique de ces mécanismes sujets à l'instabilité. On utilise maintenant ces équations aux fins d'optimisation. L'algorithme est développé de façon à permettre le design d'un mécanisme selon les critères de stabilité établis, mais aussi selon des critères propres à l'utilisation du préhenseur.

La partie optimisation du design de mécanismes sous-actionnés est donc motivée par la présence de ces mécanismes dans certains préhenseurs qui doivent accomplir des tâches très particulières dans des environnements souvent très exigeants. Le comportement des mécanismes sous-actionnés est quelquefois imprévisible dû à l'intensité des forces et aux points d'application de celles-ci sur les membrures. La possibilité d'intervention sur ce comportement via la commande est assez limitée lorsque le design

est terminé. En effet, il n'est pas possible d'imposer la configuration d'un doigt à trois degrés de liberté, par exemple, alors qu'un seul actionneur motorisé n'est disponible pour les contrôler.

On peut, par essais et erreurs, obtenir un mécanisme qui approxime assez bien les tâches à accomplir, ce qui est souvent le cas pour des tâches relativement simples. L'optimisation du mécanisme en fonction d'indices de performance permet de simplifier le mécanisme, d'accomplir une tâche de façon plus efficace et rapide, ou simplement de s'assurer la stabilité des prises pour toutes les configurations.

Les méthodes d'optimisation sont utilisées dans l'optique d'obtenir la meilleure géométrie possible, dite optimale, compte tenu des objectifs visés. Dans la plupart des cas, l'objectif de l'optimisation est l'amélioration d'une géométrie existante. Il s'agit donc de fixer les limites acceptables d'écart entre les objectifs visés et atteints, afin de pouvoir qualifier un mécanisme d'optimal. La première étape de l'optimisation est d'obtenir un modèle mathématique qui permet l'analyse du mécanisme. Ce modèle a été développé dans la première partie de ces travaux.

La deuxième étape est celle de la génération de mécanismes sous-actionnés susceptibles de permettre d'accomplir les tâches liées à la saisie d'objets divers. Cette synthèse de mécanismes est la partie intuitive du design, soit celle qui fait appel à l'imagination et à l'expérience. On doit donc générer les meilleurs mécanismes possibles compte tenu des objectifs visés. La pré-optimisation est donc le choix des mécanismes les plus performants (encombrement, débattement, simplicité). On fixe dès le départ la topologie du mécanisme, soit: le nombre de membrures et la façon dont celles-ci sont liées entre elles (graphe), le nombre d'actionneurs motorisés et passifs, l'emplacement de ceux-ci, la nature des actionneurs (prismatique ou rotoïde), le nombre de degrés de liberté du mécanisme et la dimension du système de mouvement considéré (plan ou spatial).

La troisième étape est l'utilisation d'un modèle mathématique afin d'améliorer les performances du mécanisme étudié en faisant varier la valeur des variables associées au problème. Il faut de toute évidence alterner entre l'analyse mathématique et l'analyse topologique du mécanisme afin de favoriser la convergence du modèle vers les objectifs visés. La partie mathématique de l'optimisation comporte donc quatre étapes:

1. Le choix des variables et des paramètres fixes du problème.

2. Le choix de la fonction objectif (indice de performance).
3. Le choix des contraintes à satisfaire.
4. La minimisation de la fonction objectif en respectant les contraintes.

5.1.1 Choix des variables

Il est important de choisir les variables du problème en fonction de leur importance dans le processus d'optimisation. Les paramètres qui influencent peu les performances du mécanisme doivent être fixés afin de simplifier le problème. Après quelques essais, on en vient à définir le vecteur de variables de décision \mathbf{x} , de dimension n , comme

$$\mathbf{x} = [l_1 \quad \dots \quad l_m] \quad (5.1)$$

où les l_i désignent les paramètres dimensionnels du mécanisme (longueur des membrures et angles autres que les angles de configuration).

L'analyse faite au Chapitre 4 a permis de conclure que les actionneurs passifs devraient permettre de maintenir le doigt en position complètement ouverte (phalanges reposant contre les butées) peu importe l'orientation du préhenseur (poids des phalanges). De plus, ces actionneurs doivent permettre aux doigts de demeurer en configuration ouverte lors des accélérations communiquées au préhenseur (considérations dynamiques). On veut également minimiser les efforts générés aux actionneurs passifs car ces efforts doivent être combattus par les actionneurs motorisés. Enfin, le moment généré à l'actionneur passif devrait être minimal afin de limiter la valeur de la force proximale durant la période de contact de la prise ferme. Pour toutes ces raisons, les caractéristiques de l'actionneur passif peuvent être fixées dès le départ et donc être éliminées des variables du problème.

On peut aussi supposer que dans la majorité des mécanismes de préhension, la longueur des membrures de contact, soit les phalanges, sont des paramètres fixés dès le départ.

5.1.2 Définition de la fonction objectif

La fonction objectif permet de définir des critères propres aux tâches pour lesquelles le préhenseur est développé. Elle permet de plus de définir des objectifs liés à la répartition adéquate des efforts sur l'objet. On peut par exemple, pour chaque configuration de la prise ferme, viser une valeur précise de rapport entre les forces proximale et distale. On peut aussi se servir de ces objectifs pour obtenir une force résultante orientée vers la paume (pour éviter l'éjection de l'objet).

Il est aussi possible de viser des valeurs de rapports entre les forces proximales associées aux différentes configurations de la prise ferme afin d'adapter les performances du mécanisme en fonction de la forme et la dimension de l'objet.

On peut viser des valeurs précises d'efforts internes. On peut par exemple vouloir minimiser les efforts sur les butées mécaniques.

Il existe donc une multitude de façons de définir la fonction objectif. Quelques exemples seront donnés dans les sections qui suivent.

5.1.3 Détermination des contraintes

Le vecteur de contraintes doit être défini de façon à permettre le design d'un mécanisme de préhension capable d'effectuer une saisie efficace et sécuritaire. On n'a qu'à penser à des critères comme la stabilité de la prise, l'intensité des efforts appliqués sur l'objet (pour éviter d'endommager l'objet ou le préhenseur), l'intensité des efforts générés aux actionneurs motorisés (limite de puissance des moteurs) ainsi que les efforts internes du mécanisme (résistance des matériaux).

On impose des conditions strictes de stabilité pour toutes les prises visées et pour tous les objets à saisir. Il faut donc respecter l'unilatéralité du contact entre la phalange et l'objet (pour les prises fermes) et l'unilatéralité du contact entre la phalange distale et la butée mécanique (pour les prises de pincée). On s'assure du respect de ces conditions en imposant des valeurs limites adéquates de forces cartésiennes et d'efforts aux butées mécaniques. Il est aussi souhaitable que les efforts sur la phalange proximale soient faibles tant que le doigt n'est pas complètement immobilisé contre l'objet (étape de

contact de la prise ferme). On évite ainsi l'éjection de l'objet en cours de saisie.

On peut aussi tenir compte d'un bon nombre de contraintes sur le design en définissant adéquatement le problème. Ces contraintes sont, par exemple:

- Les longueurs minimale et maximale des membrures.
- L'interférence mécanique entre les membrures.
- Le respect de la cohésion du mécanisme (assemblage des membrures).
- Le débattement angulaire maximum et minimum des membrures.
- La dimension globale du mécanisme (côté pratique et esthétique).
- L'efficacité de transmission des efforts (limite sur les efforts internes).

Le choix des contraintes prend une importance capitale au niveau de la convergence de l'algorithme vers une solution optimale. En effet, si les contraintes sont trop restrictives, contradictoires ou non nécessaires, il se peut que le domaine de faisabilité soit nul et qu'aucune solution n'existe. Il faut donc prioriser le choix des contraintes et ne pas perdre de vue les objectifs visés. Il est préférable d'imposer le moins de contraintes possibles et d'en ajouter au besoin.

5.1.4 Choix de la méthode d'optimisation

Le choix d'une méthode d'optimisation (maximisation ou minimisation) doit être fait en fonction de la nature du problème à traiter et des critères de performance les plus pertinents par rapport à l'application visée. Encore faut-il définir ces critères de performance: rapidité de convergence, robustesse de la méthode, facilité d'implantation, recherche d'extremums locaux ou globaux, importance de la qualité de l'estimé initial. Chaque problème est particulier et plusieurs méthodes peuvent s'y appliquer. Le choix final réside dans l'analyse en profondeur du problème et dans l'étude de l'application possible des méthodes pour ce problème précis. Même après une étude approfondie du problème, il n'est pas dit que la méthode choisie sera optimale.

Deux grandes catégories de méthodes existent pour l'optimisation de fonctions objectifs (Press *et al.* 1992; Papalambros et Wilde 1988; Luenberger 1984; Legras 1980; Converse 1970). La première regroupe les méthodes qui nécessitent le calcul de la fonction objectif à plusieurs reprises (Simplex, Directions Set et autres) afin d'orienter la recherche d'extremums, tandis que les méthodes de la deuxième catégorie utilisent l'information issue de la dérivée de la fonction pour se diriger vers les extremums (Gradient, Gradient Conjugé, Descente Maximale, Quasi-Newton et autres). Ces dernières nécessitent donc le calcul de la fonction objectif et de sa dérivée. Elles permettent toutefois d'orienter la recherche de façon plus systématique.

On décide donc de chercher dans cette deuxième catégorie de méthodes, qui s'avèrent souvent plus efficaces pour le problème qui nous intéresse.

La méthode recherchée doit aussi permettre de traiter les équations de contrainte. Il existe plusieurs façons d'optimiser une fonction objectif contrainte. La première consiste à traiter les équations de contraintes et la fonction objectif en parallèle en considérant le tout comme un système d'équations à satisfaire. La deuxième façon consiste à approximer les équations de contrainte à l'aide de fonctions secondaires qui sont ajoutées à la fonction objectif. On doit donc traiter une nouvelle fonction objectif modifiée de façon à tenir compte des contraintes. La fonction de pénalité est une fonction secondaire qui prescrit un coût élevé dans le cas où une contrainte n'est pas respectée. Pour ce qui est de la fonction de frontière, elle a tendance à favoriser les points à l'intérieur du domaine de faisabilité par rapport aux points situés près des frontières. Ces fonctions demeurent toutefois une approximation des contraintes. Il est possible d'approximer les équations de contraintes de façon assez fidèle, mais meilleure est l'approximation, moins rapide est la convergence.

On peut aussi traiter les équations de contraintes en les intégrant à la fonction objectif à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. On obtient alors une nouvelle fonction objectif (plus compliquée) à minimiser, qui contient des variables supplémentaires (les multiplicateurs de Lagrange). Le problème n'est donc plus contraint et on peut minimiser la nouvelle fonction objectif à l'aide de n'importe quelle méthode.

Enfin, on peut traiter simultanément les équations de contrainte et la fonction objectif en utilisant l'algorithme de *décomposition orthogonale*. Cette méthode est décrite

à l'Annexe B. Elle est particulièrement intéressante car elle permet de respecter les critères les plus importants pour le problème que nous traitons, soient:

- La robustesse de la méthode par rapport aux fonctions irrégulières et aux matrices singulières (par l'utilisation de l'algorithme de *décomposition en valeurs singulières*).
- La possibilité de partir d'un estimé initial de qualité moyenne et de pouvoir quand même converger vers un extremum (principe de continuation).
- La simplicité de la méthode qui la rend facile à implanter (en langage Mathematica par exemple).
- La fiabilité de la méthode, utilisée dans des problèmes similaires à celui qui nous intéresse (problème géométrique inverse associé aux manipulateurs redondants).
- Le traitement simultané de la fonction objectif et des contraintes.
- Cheminement vers un extremum de façon systématique dû à l'utilisation de l'information contenue dans la dérivée de la fonction (dérivée numérique).

Bien qu'elle soit très rapide, cette méthode n'est pas forcément optimale au point de vue de la rapidité de convergence. Cependant, ce critère est ici un objectif secondaire puisque la méthode est appliquée dans le cadre d'un design et non pour une application en temps réel (commande de robot par exemple).

5.2 Algorithme de décomposition orthogonale

L'algorithme de décomposition orthogonale est utilisé, entre autres, pour traiter le problème géométrique inverse associé aux manipulateurs redondants, où la tâche secondaire consiste par exemple à minimiser la déviation des variables articulaires autour de leur position moyenne (Anderson et Angeles 1989). Il peut aussi être utilisé pour la conception de mécanismes (Angeles *et al.* 1990) ou pour tout autre problème d'optimisation non-linéaire avec contraintes.

L'optimisation de mécanismes sous-actionnés est un problème contraint. Pour faire un parallèle avec le problème géométrique inverse associé aux manipulateurs redondants, la tâche principale est ici le respect des contraintes alors que la tâche secondaire est la minimisation de la fonction objectif.

Le problème qui nous intéresse est non-linéaire. L'algorithme de *décomposition orthogonale* permet de solutionner itérativement ce problème non-linéaire à l'aide d'une séquence de problèmes quadratiques linéaires. En effet, à partir d'un estimé initial \mathbf{x}^0 , une séquence $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots$ sera générée en utilisant

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \quad (5.2)$$

La méthode consiste donc à minimiser un indice de performance quadratique d'une fonction vectorielle de dimension m , soit la norme euclidienne du vecteur objectif $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, lorsque le vecteur de variables articulaires \mathbf{x} , de dimension n , est soumis à p équations de contraintes regroupées dans le vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. On définit donc l'indice de performance quadratique comme

$$\min_{\Delta \mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (5.3)$$

soumis aux contraintes

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

avec

$$\mathbf{e} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F} \Delta \mathbf{x} \quad (5.5)$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ est de dimension $m \times n$ et représente la Jacobienne de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et \mathbf{W} est une matrice de pondération (définie positive), de dimension $m \times m$, qui permettra éventuellement de prioriser certaines variables du problème. On a

$$m \geq n - p \quad (5.6)$$

de façon à obtenir un système surdéterminé d'équations à résoudre.

On retrouve une description plus détaillée de l'algorithme de *décomposition orthogonale* à l'Annexe B.

5.3 Optimisation de mécanismes

L'utilisation de l'algorithme de *Newton-Gauss* au Chapitre 4 a permis d'obtenir un mécanisme qui représente un bon estimé initial pour l'optimisation. L'utilisation de l'algorithme de *décomposition orthogonale* permet dans un deuxième temps de générer un mécanisme répondant à des critères spécifiques.

On applique l'algorithme d'optimisation aux trois mécanismes analysés au Chapitre 4. Les objectifs et les contraintes utilisés dans l'algorithme servent à illustrer des cas particuliers d'utilisation des mécanismes. On veut démontrer que l'algorithme est applicable à tout mécanisme destiné à des tâches de préhension diverses. Les fonctions objectif et les vecteurs contraintes dépendent directement des tâches visées et des priorités fixées par l'utilisateur.

Plusieurs exemples d'optimisation sont présentés. On utilise différents estimés initiaux et différentes fonctions objectifs. Les contraintes varient d'une optimisation à l'autre et le nombre de variables utilisées change. On utilise aussi différentes variables. Ces nombreux essais permettent d'obtenir des mécanismes qui approximent très bien le comportement recherché.

5.3.1 Mécanisme 1: 2 degrés de liberté (rotoïde, 5 barres)

L'optimisation du mécanisme 1 fait suite à l'analyse de celui-ci et à la génération du mécanisme stable de la section 4.3.1.4. Ce dernier sert d'estimé initial pour l'optimisation qui suit.

Les variables du problème sont l_1 , l_2 , l_3 , l_6 et α_1 . L'estimé initial utilisé est issu du mécanisme MEC11 du Tableau 4.1. On modifie par contre deux variables et deux paramètres. On fixe les caractéristiques de l'actionneur passif à $k = 0.7 \text{ Nm/rad}$ et $f_{po} = 0.1 \text{ Nm}$. Ces valeurs sont inspirées de l'utilisation récente de ressorts comme système de retour passif d'un doigt sous-actionné. La conséquence directe de ce changement est la diminution de la valeur de la force proximale durant la période de contact de la prise ferme. En effet, de l'équation (4.17) on voit l'influence directe de ces paramètres sur la valeur de g_2 . L'autre conséquence notable de ce changement se manifeste à la prise de pincée. En réduisant la valeur de f_{po} , on réduit par le fait même la marge

de sécurité regardant la stabilité de la prise. En effet, on diminue alors la valeur de l'ordonnée à l'origine (b_{fp}) de la courbe générale de la Figure 4.7.

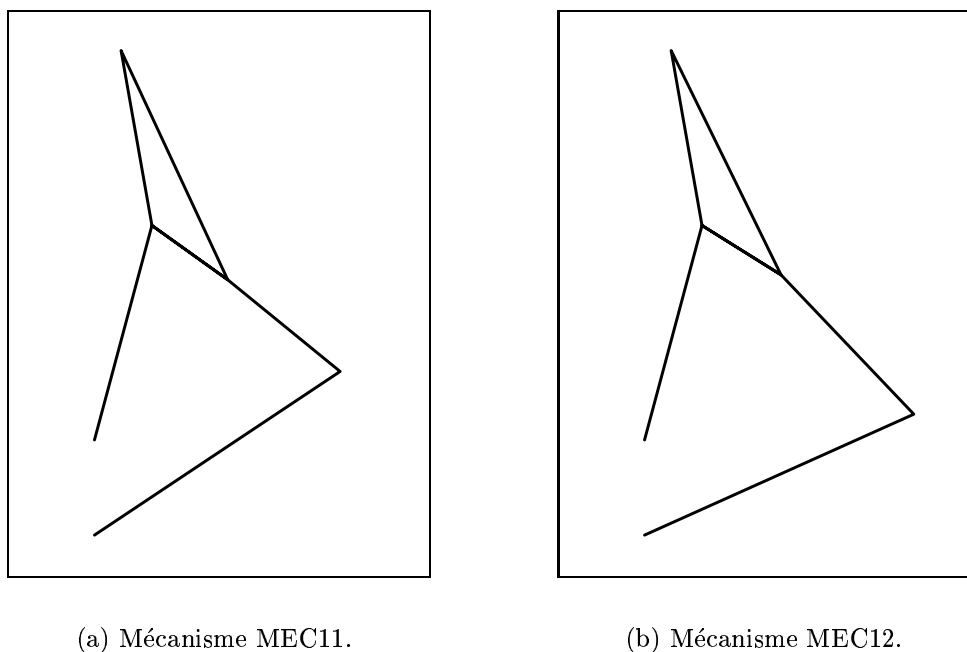


Figure 5.1: Nouvel estimé initial du mécanisme 1.

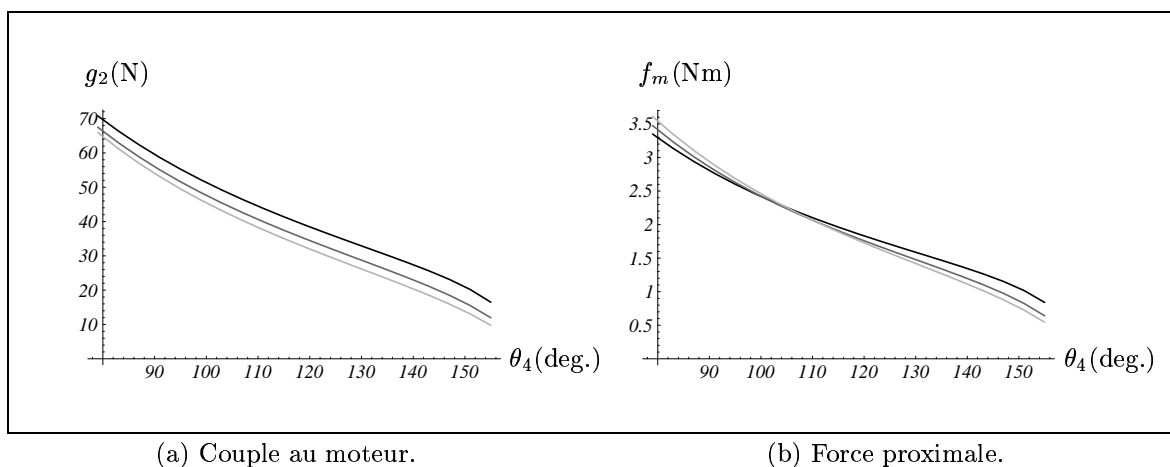


Figure 5.2: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC12).

Après quelques essais d'optimisation avec le mécanisme MEC11 comme estimé initial, on s'aperçoit que l'algorithme prend une direction qui mène à un démembrement du mécanisme. En effet, la longueur l_2 (Figure 3.2) diminue jusqu'à ce que le mécanisme ne permette plus d'atteindre certaines configurations (les configurations les plus fermées). On décide donc de changer la valeur initiale de l_2 et de l'augmenter à 0.065 m (valeur

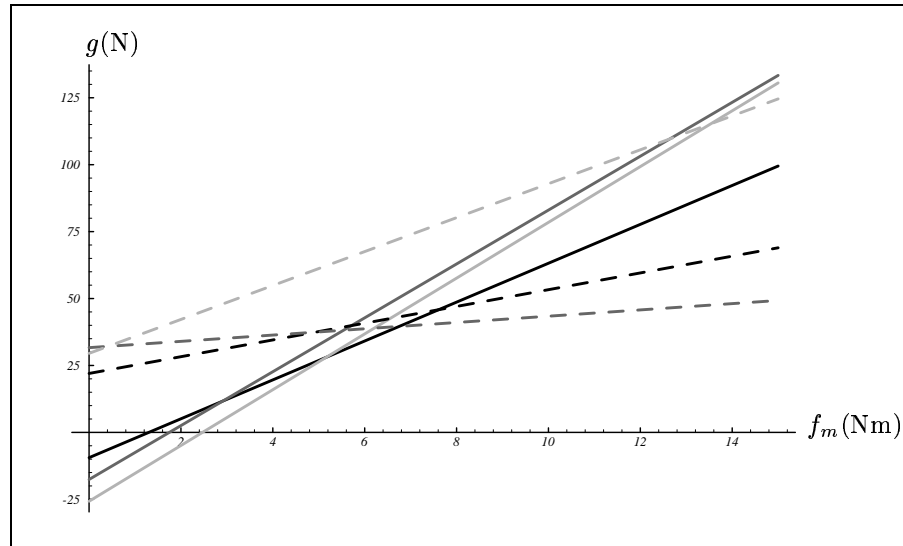
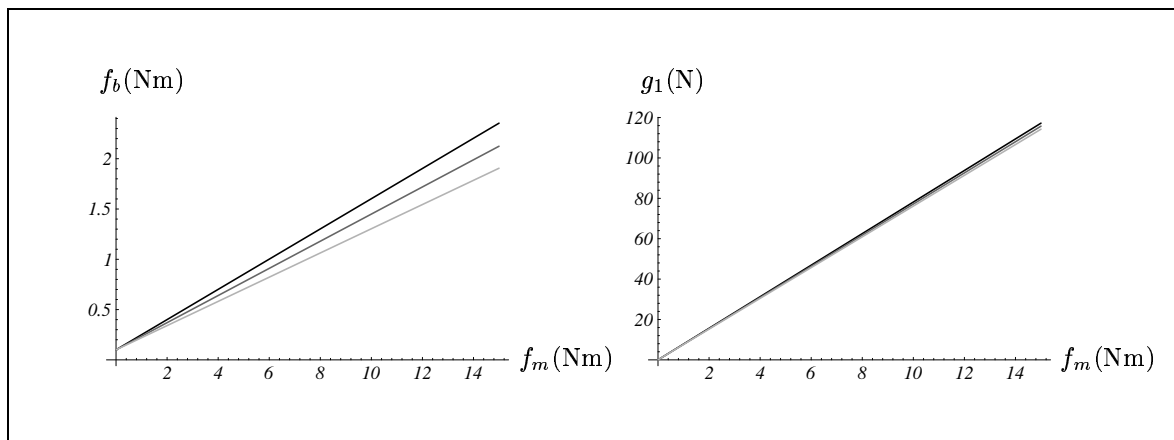


Figure 5.3: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC12).

initiale de 0.049 m). Par contre, en augmentant cette valeur, le mécanisme ne respecte plus une condition imposée par la présence d'une butée, soit la valeur exclusivement positive de l'angle θ_3 . Pour palier à cette conséquence et afin de ne pas trop s'éloigner du mécanisme qui devait nous servir d'estimé initial, on change aussi la valeur de l'angle α_1 . On fixe donc la nouvelle valeur à $\alpha_1 = 132^\circ$ (valeur initiale de 135.6°). La Figure 5.1 illustre le mécanisme MEC11 d'abord considéré et le mécanisme légèrement modifié, que l'on nomme MEC12, qui sert maintenant de nouvel estimé initial.



(a) Moment à la butée mécanique.

(b) Force distale.

Figure 5.4: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC12).

On peut comparer les performances des deux mécanismes en regardant les Figures 4.18, 4.19 et 4.20 de la section 4.3.1.4 pour le mécanisme MEC11 et les Figures 5.2, 5.3 et 5.4 pour le nouvel estimé initial (MEC12). On voit que, comme prévu, la valeur de la force proximale a diminué pour toute la période de contact de la prise ferme et pour toutes les configurations. Les efforts de contact durant la période de serrage de la prise ferme varient quelque peu, mais la stabilité des prises n'en est nullement affectée. Enfin, la valeur du moment généré par l'effort sur la butée mécanique diminue légèrement, mais n'affecte en rien la stabilité de la prise.

On retrouve les dimensions exactes du mécanisme MEC12 au Tableau 5.1. Les paramètres fixes ont les valeurs suivantes:

$$l_4 = 0.075 \text{ m}, l_5 = 0.030 \text{ m}, l_7 = 0.000 \text{ m}, k = 0.700 \text{ Nm/rad}, f_{po} = 0.100 \text{ Nm}$$

On décrit maintenant les contraintes imposées dans le cadre de l'optimisation du mécanisme 1. Le problème comprend six contraintes. On voit tout d'abord à la stabilité de la prise de pincée pour la configuration la plus instable (*pc3*). Contrairement à ce qui a été fait pour la génération du mécanisme stable, on n'impose pas de valeur fixe pour ce qui est du moment généré par la force sur la butée mécanique. On voit plutôt à ce que la valeur de ce moment demeure positive pour toute la durée de la prise, donc jusqu'à $f_m = 15 \text{ Nm}$. On a

$$f_b > 0 \text{ Nm pour } (f_m)_{\max} \text{ pour } pc3 \quad (5.7)$$

La deuxième contrainte est appliquée sur la valeur de la force proximale durant la période de contact de la prise ferme. On limite la valeur de l'effort proximal pour la configuration la plus fermée de la série de configurations la plus susceptible à l'instabilité (*co1*). Cette contrainte prend la forme de

$$g_2 < 60 \text{ N pour } (\theta_4)_{\min} \text{ pour } co1 \quad (5.8)$$

On fixe donc la borne supérieure à 60 N qui représente une valeur raisonnable d'effort proximal. En effet, les configurations étudiées garantissent un effort proximal nécessairement dirigé vers la phalange proximale du mécanisme travaillant en opposition ou encore mieux, un effort dirigé vers la paume ($\theta_5 \leq 0^\circ$). Aussi, une valeur limite trop faible rendra difficile le respect des autres contraintes imposées. On doit donc fixer les contraintes de façon à ne pas trop restreindre le domaine de faisabilité de la fonction.

Les quatre dernières contraintes sont définies afin de s'assurer de la stabilité de la prise ferme pour toutes les configurations utilisées. On utilise quatre configurations puisque plusieurs équations seront nécessaires pour bâtir la fonction objectif. On définit donc ces configurations comme

$$\begin{aligned} pw1: \theta_4 &= 140^\circ, \theta_5 = -5^\circ \\ pw2: \theta_4 &= 120^\circ, \theta_5 = -25^\circ \\ pw3: \theta_4 &= 100^\circ, \theta_5 = -45^\circ \\ pw4: \theta_4 &= 120^\circ, \theta_5 = -35^\circ \end{aligned}$$

On s'assure que la force proximale demeure positive jusqu'à ce que la période de serrage soit complétée, soit pour $f_m = 15 Nm$. On a donc

$$g_2 > 0 \quad N \quad \text{pour} \quad (f_m)_{\max} \quad \text{pour} \quad pw1, pw2, pw3, pw4 \quad (5.9)$$

On a donc un total de six contraintes d'inégalité qui sont transformées en contraintes d'égalité, introduisant ainsi six nouvelles inconnues (ρ_1 à ρ_6). On donne un exemple d'une telle transformation avec l'inéquation (5.7). On obtient

$$f_b - \rho^2 = 0 \quad \text{pour} \quad (f_m)_{\max} \quad \text{pour} \quad pc3 \quad (5.10)$$

On obtient donc les six équations qui composent le vecteur contrainte, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Le nombre de variables du problème est porté à onze. Afin d'obtenir un système d'équations surdéterminé, un minimum de douze équations est nécessaire, incluant les équations de contrainte et les équations comprises dans le vecteur objectif.

On bâtit donc le vecteur objectif à l'aide de six équations. On vise des objectifs qui ne seront pas nécessairement atteints mais que l'algorithme tentera de satisfaire. On génère des équations qui représentent des caractéristiques du mécanisme souhaitables pour les applications visées. On inclut quatre équations qui visent un rapport d'efforts précis entre les forces proximale et distale de chacune des configurations. Ce rapport dépend de la dimension de l'objet à saisir, donc de la configuration. Il dépend aussi de la nature de l'objet à saisir, c'est-à-dire sa masse et les considérations dynamiques s'y rattachant. On vise donc les rapports suivants pour les quatre configurations étudiées pour la prise ferme:

$$\frac{g_1}{g_2} = 1.25 \quad \text{pour} \quad pw1 \quad (5.11)$$

$$\frac{g_1}{g_2} = 2.6 \text{ pour } pw2 \quad (5.12)$$

$$\frac{g_1}{g_2} = 0.9 \text{ pour } pw3 \quad (5.13)$$

$$\frac{g_1}{g_2} = 1 \text{ pour } pw4 \quad (5.14)$$

Pour obtenir un effort réparti sur les deux phalanges, on doit viser un rapport $\frac{g_1}{g_2} = 1$. Pour favoriser un effort total dirigé vers la paume, on doit viser un rapport $\frac{g_1}{g_2} > 1$. Les valeurs visées sont basées sur ces deux critères et inspirées des valeurs obtenues avec l'estimé initial.

Les deux dernières équations du vecteur objectif visent à orienter les performances du mécanisme vers des valeurs précises d'efforts. On spécifie la valeur de l'effort généré par la butée mécanique (f_b) pour la configuration la moins stable ($pc3$). On veut que cet effort soit positif, mais pas nécessairement élevé. De plus, on spécifie la valeur de la force proximale (g_2) pour la configuration critique de l'étape de contact de la prise ferme ($(\theta_4)_{min}$ de la série de configurations $co1$). On veut minimiser cet effort, mais aussi s'assurer que d'autres caractéristiques ne sont pas négligées par cette minimisation. On a

$$f_b = 1.75 \text{ Nm pour } pc3 \quad (5.15)$$

$$g_2 = 55 \text{ N pour } (\theta_4)_{min} \text{ pour } co1 \quad (5.16)$$

Avec ces deux équations, on veut montrer qu'il est possible de favoriser des caractéristiques propres à une application particulière. Ces valeurs dépendent évidemment des tâches visées et des configurations pertinentes à ces tâches. On pourrait donc inclure une multitude d'équations visant des caractéristiques spécifiques (valeurs précises d'efforts pour certaines configurations, minimisation des efforts internes). Les équations (5.11) à (5.16) sont rassemblées dans un vecteur pour former le vecteur objectif $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

On utilise maintenant l'algorithme de *décomposition orthogonale* pour résoudre le système d'équations non-linéaires contraint développé plus haut. Afin de faciliter la convergence, on utilise le principe de *continuation* (Angeles et Rojas 1987) notamment utilisé dans la résolution du problème géométrique inverse d'un manipulateur sériel. On utilise cette technique dans le cas où l'estimé initial est loin de la solution. Dans le cas qui nous préoccupe, il s'agit de calculer la valeur de chacune des composantes du vecteur objectif pour l'estimé initial et de la comparer à la valeur objectif visée. L'écart

entre les deux valeurs est divisé par le nombre total d'objectifs visés, soit le nombre d'objectifs intermédiaires plus un (objectif global). On génère ainsi une série d'objectifs qui seront successivement visés. Pour l'optimisation qui nous intéresse, on utilise un total de sept objectifs (six objectifs intermédiaires). L'algorithme d'optimisation est donc divisé en sept étapes, donc sept séries d'itérations visant un objectif intermédiaire différent qui mèneront éventuellement à l'objectif global.

On utilise aussi un *facteur d'amortissement* (Angeles et Rojas 1987) sur la valeur de l'incrément des variables. En effet, si la fonction est de la forme d'une longue vallée ou si l'estimé initial est loin de la solution finale, il peut arriver que la k ème itération produise une valeur de \mathbf{x}_{k+1} (équation (5.2)) qui conduise à une augmentation de la fonction objectif. On utilise alors un *facteur d'amortissement*, noté η , qui permet de réduire la norme du pas calculé $\Delta\mathbf{x}_k$, afin de produire une diminution de la fonction objectif. On a

$$\Delta\mathbf{x}_{k,\text{eff}} = \eta\Delta\mathbf{x}_k \quad (5.17)$$

où $\Delta\mathbf{x}_k$ est la valeur calculée à partir de l'algorithme de *décomposition orthogonale*, $\Delta\mathbf{x}_{k,\text{eff}}$ est la valeur effectivement utilisée pour le calcul du prochain pas et où l'on a

$$0 < \eta < 1 \quad (5.18)$$

Les valeurs finales des variables obtenues par optimisation (11 minutes et 2 secondes de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires (principe de continuation), 32 itérations au total) sont présentées au Tableau 5.1. Le mécanisme résultant, que l'on nomme OPT1 est montré en configurations extrêmes à la Figure 5.5.

	l_1 (m)	l_2 (m)	l_3 (m)	l_6 (m)	α_1 (deg.)
MEC12	0.0990	0.0650	0.0310	-0.0320	132.00
OPT1	0.0481	0.0431	0.0134	-0.0030	136.67

Tableau 5.1: Valeurs des variables pour les mécanismes MEC12 et OPT1.

Les performances du mécanisme OPT1 en période de contact sont présentés à la Figure 5.6. Les trois séries de configurations étudiées sont celles définies à la section 4.3.1.2. Les séries *co1*, *co2* et *co3* sont respectivement illustrées par des traits de niveaux de gris de plus en plus pâles. On voit que la valeur de la force proximale est en tout temps inférieure à 60 N. La contrainte imposée a donc été respectée.

	$g_1(N)$			$g_2(N)$			$g_2 (co1)(N)$		$f_b(Nm)$
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw1$	$pw2$	$pw3$	θ_{3max}	θ_{3min}	$pc3$
MEC12	99.50	133.35	130.544	68.95	49.28	124.57	16.50	64.37	1.91
OPT1	125.30	159.46	174.30	94.44	91.59	167.76	13.65	56.60	1.75

Tableau 5.2: Comparaison des performances des mécanismes MEC12 et OPT1.

La stabilité de la prise ferme est assurée pour toutes les configurations étudiées (Figure 5.7). Les configurations $pw1$, $pw2$ et $pw3$ sont respectivement illustrées par des traits de niveaux de gris de plus en plus pâles. Les forces proximale et distale sont respectivement illustrées en traits pointillé et continu. Les configurations représentées sont celles définies à la section 4.3.1.2. En effet, on veut pouvoir comparer les résultats obtenus pour le mécanisme OPT1 avec ceux obtenus pour le mécanisme MEC12 (Tableau 5.2). Pour chaque configuration, les forces sont bien réparties sur les deux phalanges. La force distale (en trait continu) est plus élevée que la force proximale, ce qui est souhaitable pour obtenir une force résultante orientée vers la paume.

Finalement, les résultats obtenus pour la prise de pincée sont montrés à la Figure 5.8. Les configurations utilisées sont celles de la section 4.3.1.2 où $pc1$, $pc2$ et $pc3$ sont

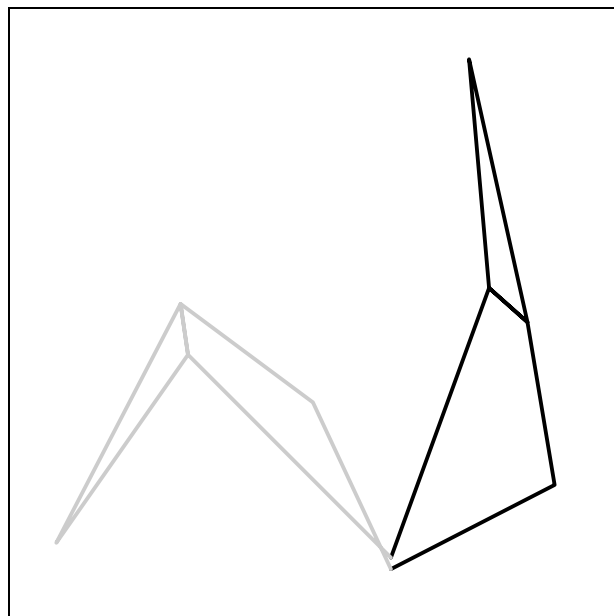
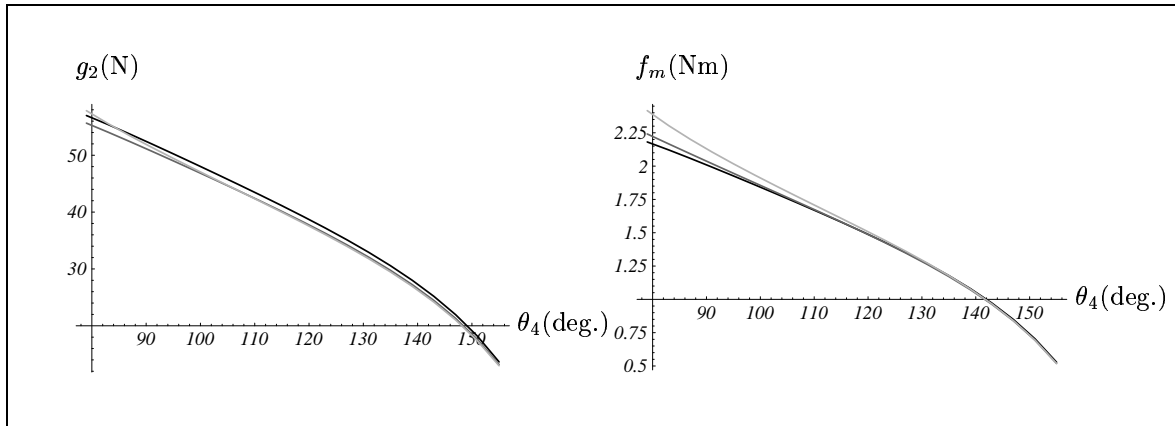


Figure 5.5: Mécanisme OPT1 en configurations extrêmes.



(a) Force proximale.

(b) Couple au moteur.

Figure 5.6: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT1).

respectivement illustrées par des traits de niveaux de gris de plus en plus pâles. La prise de pincée est stable pour toutes les configurations et la force distale appliquée est élevée.

Le Tableau 5.3 montre les valeurs imposées dans le vecteur contrainte et les valeurs obtenues avec le mécanisme optimal. La Tableau 5.4 montre les résultats de l'optimisation. On y trouve les valeurs visées dans la fonction objectif et les résultats obtenus avec le mécanisme optimal. Pour les deux tableaux, les configurations *pw1*, *pw2*, *pw3* et *pw4* sont celles définies dans la présente section.

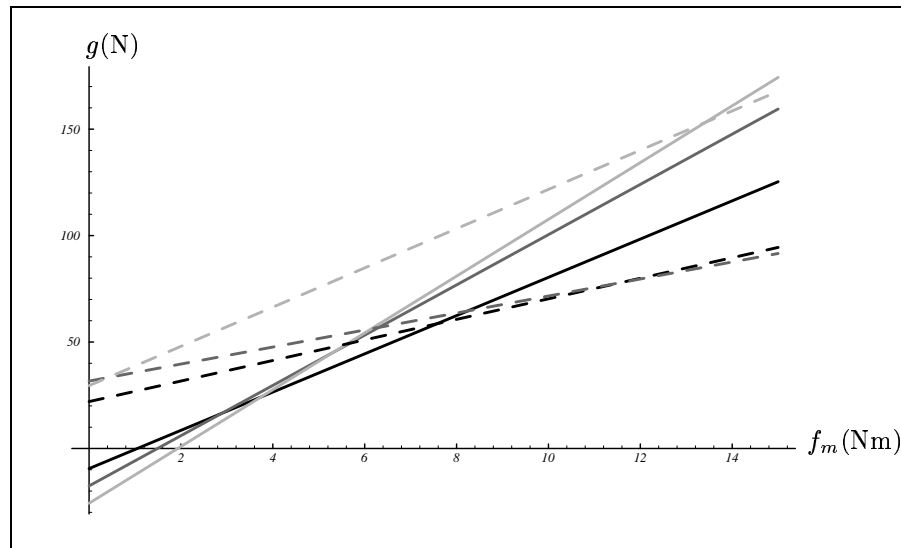
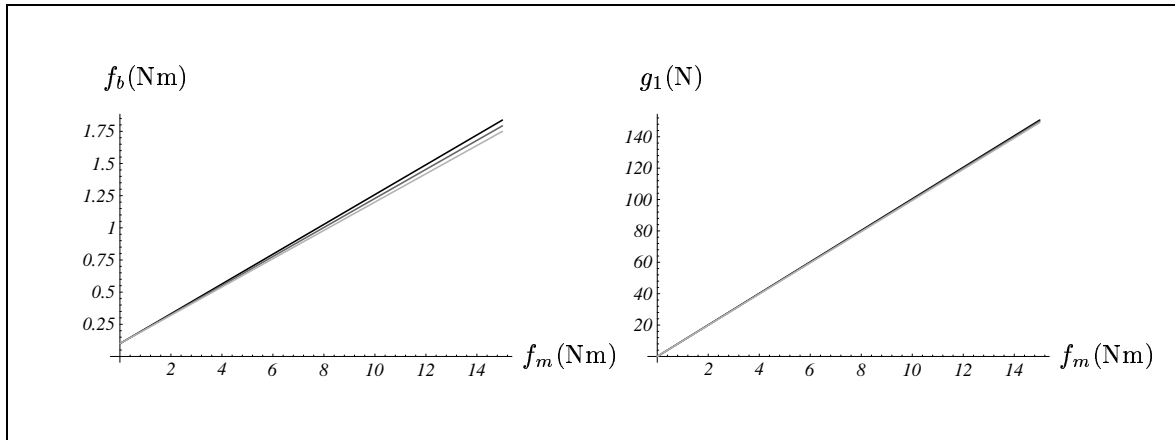


Figure 5.7: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT1).



(a) Moment à la butée mécanique.

(b) Force distale.

Figure 5.8: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT1).

	g_2 (N)				g_2 (col)	f_b
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	(N)	(Nm)
OPT1	94.44	91.59	167.76	90.21	54.57	1.75
Contraintes	>0	>0	>0	>0	<60	>0

Tableau 5.3: Performances du mécanisme OPT1 et contraintes imposées.

	$\frac{g_1}{g_2}$				g_2 (col)	f_b
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	(N)	(Nm)
OPT1	1.33	1.74	1.04	1.75	54.57	1.75
Objectifs	1.25	2.60	0.90	1.00	55.00	1.75

Tableau 5.4: Performances du mécanisme OPT1 et objectifs visés.

On peut donc affirmer que le mécanisme obtenu par optimisation est un mécanisme respectant toutes les contraintes et approximant les objectifs visés de façon satisfaisante. Le minimum trouvé est sans doute un minimum local, mais il représente le meilleur mécanisme exempt d'interférence mécanique qui a pu être généré à partir de différents estimés initiaux et différentes fonctions objectif utilisés.

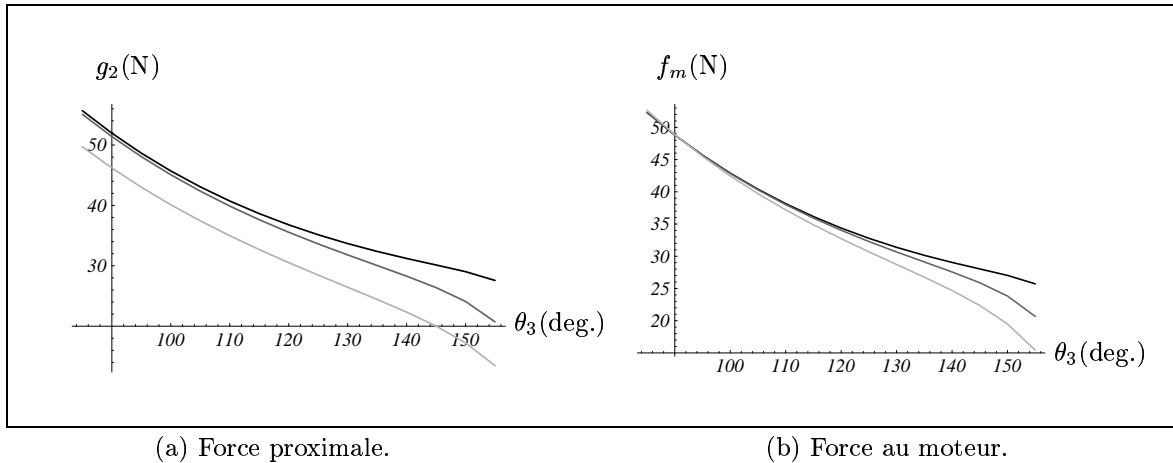


Figure 5.9: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC22).

5.3.2 Mécanisme 2: 2 degrés de liberté (prismatique, 5 barres)

L'optimisation de ce mécanisme fait suite à la génération du mécanisme stable de la section 4.3.2.4. On se sert de ce dernier comme estimé initial pour l'algorithme de *décomposition orthogonale*.

Les variables du problème sont l_1 , l_4 , l_5 et α_1 . Les valeurs finales obtenues pour le mécanisme stable sont répétées au Tableau 5.5 (mécanisme MEC22). On change par contre les caractéristiques de l'actionneur passif afin de favoriser la minimisation de l'effort proximal durant la période de contact de la prise ferme. On utilise donc le même actionneur passif que pour le mécanisme 1. Les performances du mécanisme avec les nouvelles caractéristiques de l'actionneur passif (MEC22) sont montrées aux Figures 5.9, 5.10 et 5.11 qui présentent respectivement l'effort proximal durant la période de contact de la prise ferme, les efforts proximal et distal durant la période de serrage de la prise ferme et le moment généré par la butée mécanique durant la prise de pincée. On peut comparer ces résultats avec ceux du même mécanisme muni de l'actionneur passif original (MEC21) en regardant les Figures 4.30, 4.31 et 4.32.

On voit une nette amélioration des performances du mécanisme au point de vue de l'effort proximal durant la période de contact de la prise ferme. Pour ce qui est des efforts proximal et distal pendant la période de serrage de la prise ferme, leur valeur varie quelque peu mais la stabilité des prises n'est pas affectée. Enfin, on n'observe aucun changement notable dans les performances du mécanisme pendant la prise de pincée.

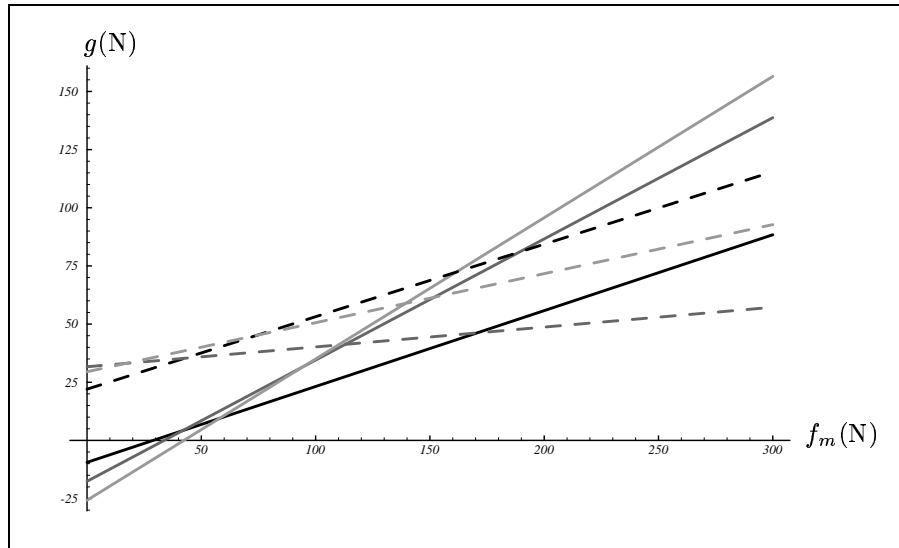
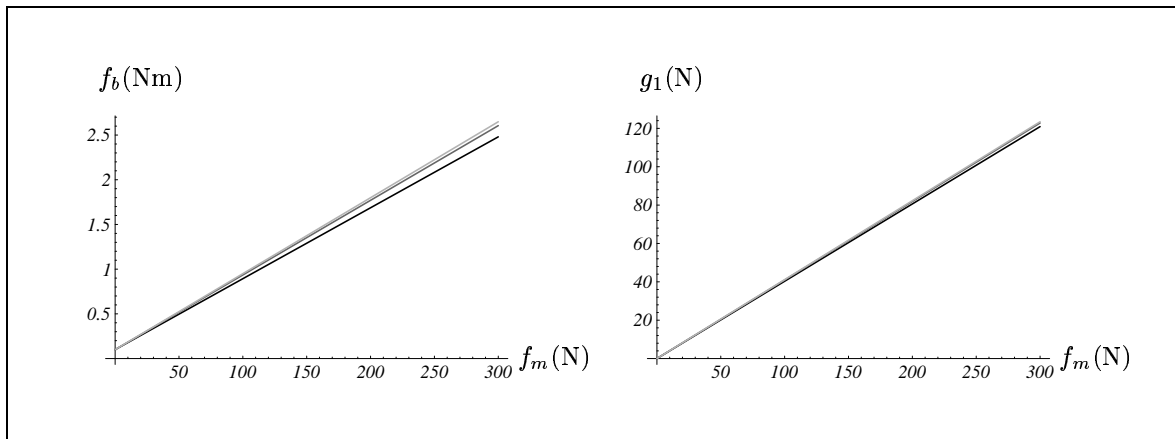


Figure 5.10: Forces proximale et distale en fonction de la force au moteur (MEC22).



(a) Moment à la butée mécanique.

(b) Force distale.

Figure 5.11: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC22).

On répète ici la valeur des paramètres préalablement fixés:

$$l_2 = 0.030 \text{ m}, l_3 = 0.075 \text{ m}, k = 0.700 \text{ Nm/rad}, f_{p0} = 0.100 \text{ Nm}$$

Les cinq contraintes imposées pour l'optimisation sont basées sur les critères de stabilité développés au Chapitre 4. On veut tout d'abord s'assurer de la stabilité de la prise de pincée en imposant le respect de l'unilatéralité du contact entre la phalange distale et la butée mécanique. Les configurations étudiées pour toutes les étapes de saisie sont celles définies à la section 4.3.2.2. On a donc

$$f_b > 0 \text{ Nm pour } (f_m)_{\max} \text{ pour } pc3 \quad (5.19)$$

Une seconde contrainte est imposée sur la valeur de l'effort proximal pendant la période de contact de la prise ferme. On applique cette contrainte pour la configuration la plus fermée de la série de configurations la plus instable, soit *co1*. On l'exprime comme

$$g_2 < 65 N \text{ pour } (\theta_3)_{\min} \text{ pour } co1 \quad (5.20)$$

Comme pour le mécanisme 1, on considère que la valeur de cette borne supérieure permet d'orienter la convergence sans toutefois être limitatif au point de vue des autres étapes de saisie. Les trois dernières contraintes assurent la stabilité de la prise ferme durant la période de serrage associée à cette prise. On vise donc une valeur positive d'effort proximal durant toute la période de serrage. On exprime ces contraintes comme

$$g_2 > 0 N \text{ pour } (f_m)_{\max} \text{ pour } pw1, pw2, pw3 \quad (5.21)$$

On transforme ces cinq contraintes d'inégalité en cinq contraintes d'égalité qui composent alors le vecteur contraintes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Ces transformations introduisent cinq nouvelles variables, soient ρ_1 à ρ_5 .

Le vecteur objectif contient huit éléments qui portent le nombre d'équations du problème à treize, pour neuf inconnues. Les six premières équations du vecteur objectif sont liées à trois caractéristiques recherchées en prise ferme. On veut tout d'abord obtenir un effort réparti sur les deux phalanges, donc sur l'objet. De plus, on veut obtenir un effort distal légèrement supérieur à l'effort proximal. Cette dernière caractéristique assure une force résultante dirigée vers la paume, quoique les configurations utilisées pour la prise ferme favorisent déjà ce phénomène. Enfin, on veut obtenir un comportement qui ne varie pas trop en fonction de la configuration. On vise donc des valeurs d'efforts proximal et distal pour chacune des configurations. On définit ces équations comme

$$g_1 = 140 N \text{ pour } pw1 \quad (5.22)$$

$$g_1 = 130 N \text{ pour } pw2 \quad (5.23)$$

$$g_1 = 130 N \text{ pour } pw3 \quad (5.24)$$

$$g_2 = 90 N \text{ pour } pw1 \quad (5.25)$$

$$g_2 = 130 N \text{ pour } pw2 \quad (5.26)$$

$$g_2 = 100 N \text{ pour } pw3 \quad (5.27)$$

Ces valeurs sont fixées de façon à obtenir le comportement désiré à partir des performances du mécanisme initial (MEC22). Elles ont été fixées suite à plusieurs essais et elles représentent les valeurs qui orientent le mieux l'algorithme d'optimisation vers les objectifs visés.

Les deux dernières équations du vecteur objectif se rapportent à l'étape de contact de la prise ferme. Une contrainte limite la valeur de la force proximale à 65 N pour la configuration la plus fermée de la série *co1*. On vise maintenant des valeurs précises pour les deux configurations extrêmes de cette série de configurations. On définit donc les deux dernières équations comme

$$g_2 = 30\text{ N pour } (\theta_3)_{\max} \text{ pour } co1 \quad (5.28)$$

$$g_2 = 30\text{ N pour } (\theta_3)_{\min} \text{ pour } co1 \quad (5.29)$$

qui représente des objectifs assez sévères.

Les équations (5.22) à (5.29) forment le vecteur objectif $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. À l'aide de l'algorithme de *décomposition orthogonale* (2 minutes et 23 secondes de temps-CPU, 4 objectifs intermédiaires, 17 itérations au total), on obtient le mécanisme optimal OPT2, dont la valeur finale des variables se retrouve au Tableau 5.5. Le mécanisme résultant est montré en configurations extrêmes à la Figure 5.12.

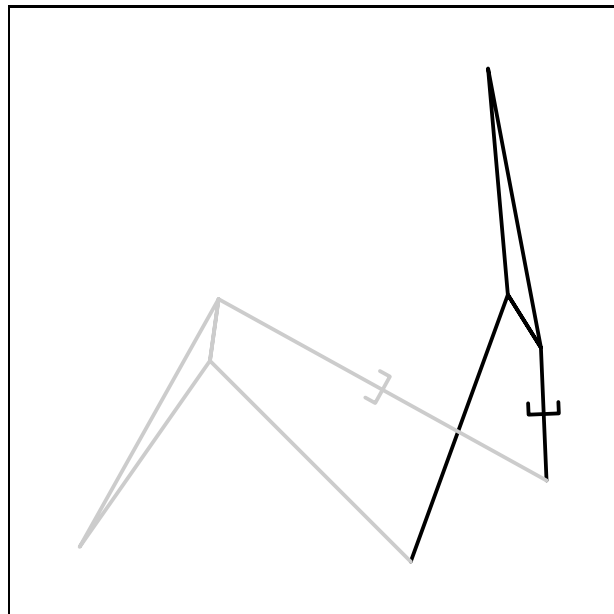


Figure 5.12: Mécanisme OPT2 en configurations extrêmes.

	l_1 (m)	l_4 (m)	l_5 (m)	α_1 (deg.)
MEC22	0.0183	0.0169	0.0366	163.8
OPT2	0.0165	0.0214	0.0359	153.0

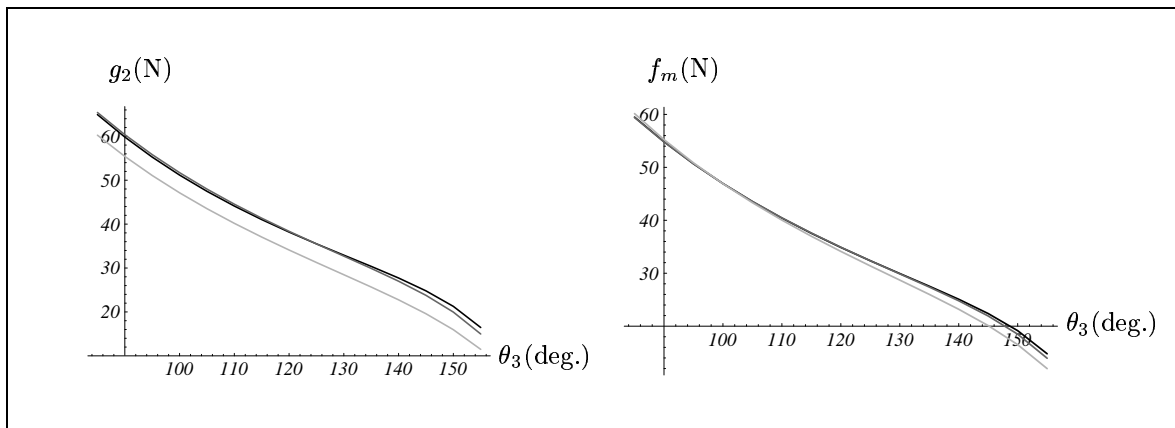
Tableau 5.5: Valeurs des variables pour les mécanismes MEC22 et OPT2.

	g_1 (N)			g_2 (N)			g_2 (co1)(N)		f_b (Nm)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$\theta_{3\max}$	$\theta_{3\min}$	$pc3$
MEC22	88.40	138.72	156.46	115.51	57.24	92.76	27.58	55.69	2.65
OPT2	102.84	134.21	138.78	94.20	82.83	131.57	16.45	64.94	1.98

Tableau 5.6: Comparaison des performances des mécanismes MEC22 et OPT2.

Le Tableau 5.6 permet de comparer les performances des mécanismes estimé initial (MEC22) et optimal (OPT2). Les Figures 5.13, 5.14 et 5.15 permettent d'analyser en détails les performances du nouveau mécanisme.

À la Figure 5.13, on voit que la force proximale pour la configuration la plus critique (série de configurations *co1* avec $\theta_{3\min}$) est légèrement plus élevée que celle trouvée pour le mécanisme initial (courbe en noir). Cette augmentation représente un compromis qui permet de s'approcher des objectifs fixés pour la période de serrage de la prise ferme. On note par contre une amélioration au niveau de la valeur de la force proximale pour les configurations plus ouvertes ($\theta_{3\max}$).



(a) Force proximale.

(b) Force au moteur.

Figure 5.13: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT2).

	$g_2(N)$			$g_2 (col)$ (N)	f_b (Nm)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$		
OPT2	94.20	82.83	131.57	64.94	1.98
Contraintes	>0	>0	>0	<65	>0

Tableau 5.7: Performances du mécanisme OPT2 et contraintes imposées.

Les performances en période de serrage de prise ferme sont illustrées à la Figure 5.14. Elles montrent l'effort proximal en trait pointillé et l'effort distal en trait continu. On note un regroupement des courbes par rapport au mécanisme MEC22, ce qui signifie que les efforts sur l'objet sont maintenant mieux répartis entre les deux phalanges. On voit aussi que pour les trois configurations, l'effort distal est plus élevé que l'effort proximal en fin de serrage. Ce phénomène favorise une force résultante dirigée vers la paume.

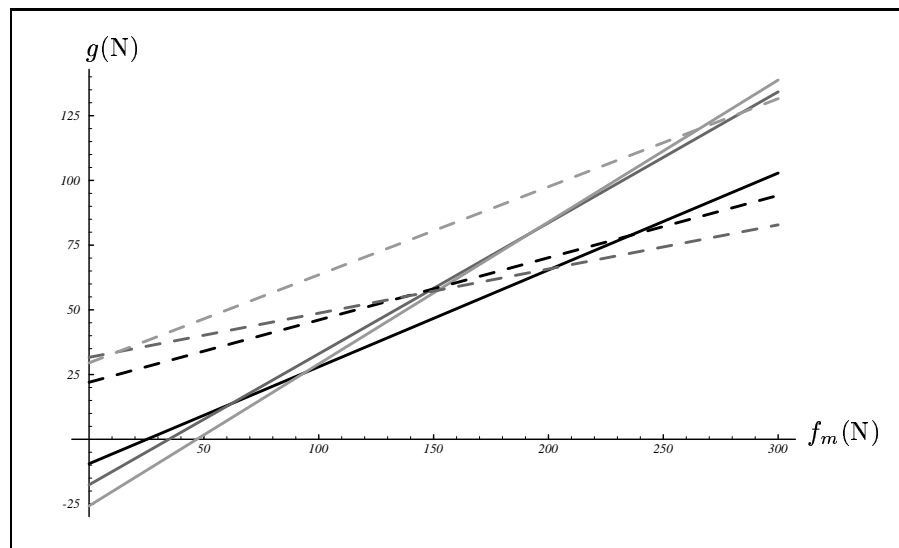


Figure 5.14: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT2).

Enfin, on voit que la prise de pincée est stable pour les trois configurations étudiées (Figure 5.15). L'effort distal atteint une valeur maximale intéressante (120 N).

Le Tableau 5.7 permet de comparer les valeurs obtenues par rapport aux contraintes imposées tandis que la Tableau 5.8 permet de comparer les valeurs obtenues aux valeurs visées par la fonction objectif.

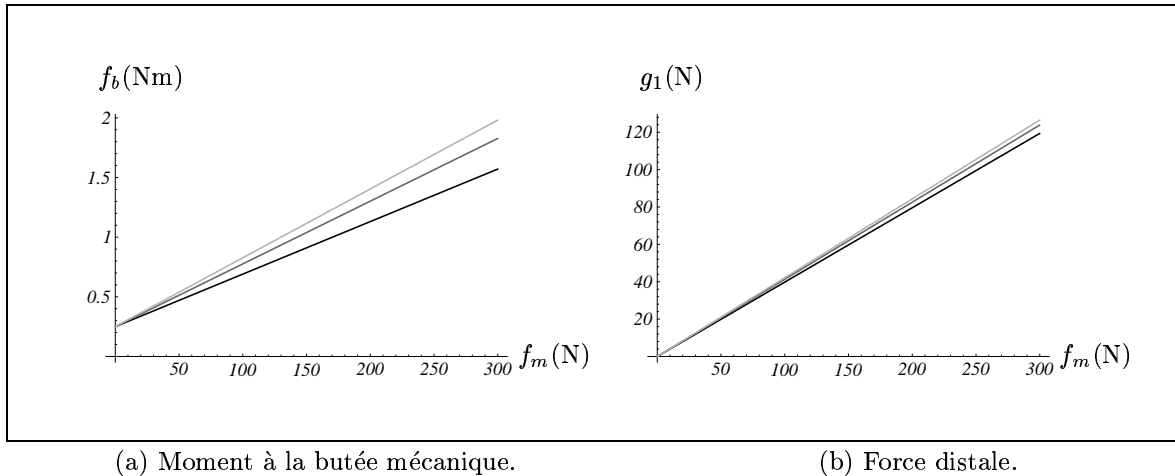


Figure 5.15: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT2).

	g_1 (N)			g_2 (N)			g_2 (co1)(N)	
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw1$	$pw2$	$pw3$	θ_{3max}	θ_{3min}
OPT2	102.84	134.21	138.78	94.20	82.83	131.57	16.45	64.94
Objectifs	140.00	130.00	130.00	90.00	130.00	100.00	30.00	30.00

Tableau 5.8: Performances du mécanisme OPT2 et objectifs visés.

5.3.3 Mécanisme 3: 2 degrés de liberté (rotoïde, 7 barres)

Le mécanisme stable développé à la section 4.3.3.4 est utilisé intégralement comme estimé initial pour l'optimisation du mécanisme à sept barres de la Figure 3.6.

Les variables du problème sont $l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_9, l_{11}, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 . On fixe donc la valeur de l_1 afin de diminuer le nombre de variables sans affecter la généralité du problème. Le mécanisme trouvé sera donc optimal pour la longueur l_1 déterminée. Les valeurs utilisées comme estimé initial sont répétées au Tableau 5.9 (MEC32). Les configurations relatives à chaque étape de saisie sont les mêmes que celles utilisées à la section 4.3.3.2.

Comme pour les deux premiers mécanismes, on change les caractéristiques de l'actionneur passif. On fixe donc la valeur du moment initial à $f_{po} = 0.100 Nm$ et la valeur de la raideur du ressort $k = 0.700 Nm/rad$. La conséquence principale de ces changements est la réduction de la valeur de la force proximale durant la période de contact de la

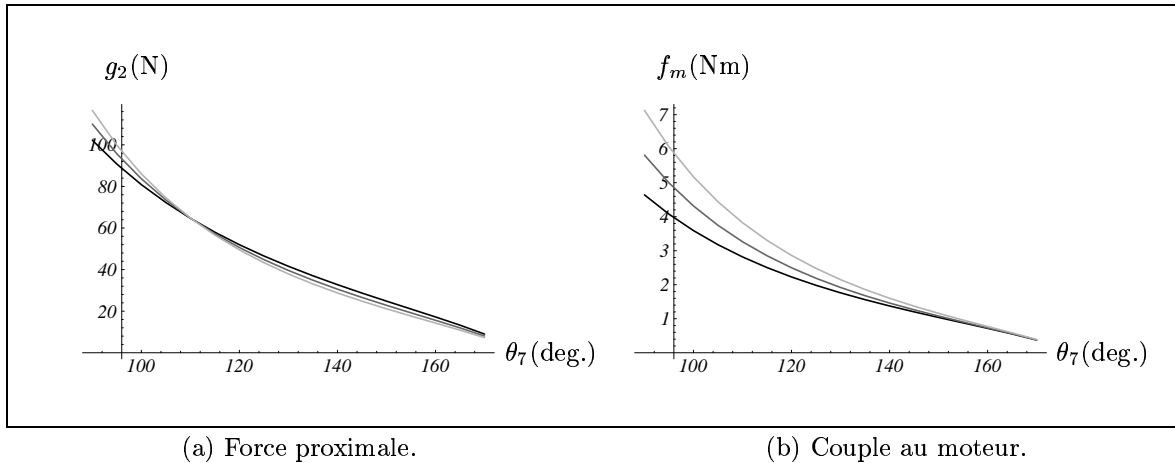


Figure 5.16: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (MEC32).

prise ferme. Les performances du mécanisme estimé initial muni de ce nouvel actionneur passif (MEC32) sont illustrées à la Figure 5.16 où les séries de configurations *co1*, *co2* et *co3* sont respectivement représentées par les courbes de niveaux de gris de plus en plus pâles. On note une diminution de la valeur de g_2 de l'ordre de 50 N par rapport aux valeurs de la Figure 4.43 (MEC31). On note aussi que la série de configurations *co3* présente la valeur critique de g_2 pour la configuration la plus fermée de cette série. Les performances du mécanisme pour les autres étapes de saisie montrent que la stabilité du mécanisme est légèrement affectée par les nouvelles caractéristiques de l'actionneur passif. On étudie la période de serrage de la prise ferme à la Figure 5.17(a), où les configurations *pw1* à *pw4* sont respectivement illustrées par des courbes de niveaux de gris de plus en plus pâles. À la Figure 5.17(b), les configurations *pw5* à *pw8* sont respectivement illustrées par des courbes de niveaux de gris de plus en plus pâles. La force proximale est représentée en trait pointillé alors que la force distale est représentée en trait continu. On peut comparer ces performances avec le mécanisme avant modifications (MEC31) en regardant la Figure 4.44. On peut effectuer la même comparaison pour la prise de pincée en regardant les Figures 5.18 et 4.45 où les configurations *pc1*, *pc2* et *pc3* sont respectivement représentées par les courbes de niveaux de gris de plus en plus pâles.

On définit maintenant les cinq équations composant le vecteur contrainte $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. On impose une première contrainte en vue d'assurer la stabilité de la prise de pincée. On définit

$$f_b > 0\text{ Nm pour } (f_m)_{\max} \text{ pour } pc3 \quad (5.30)$$

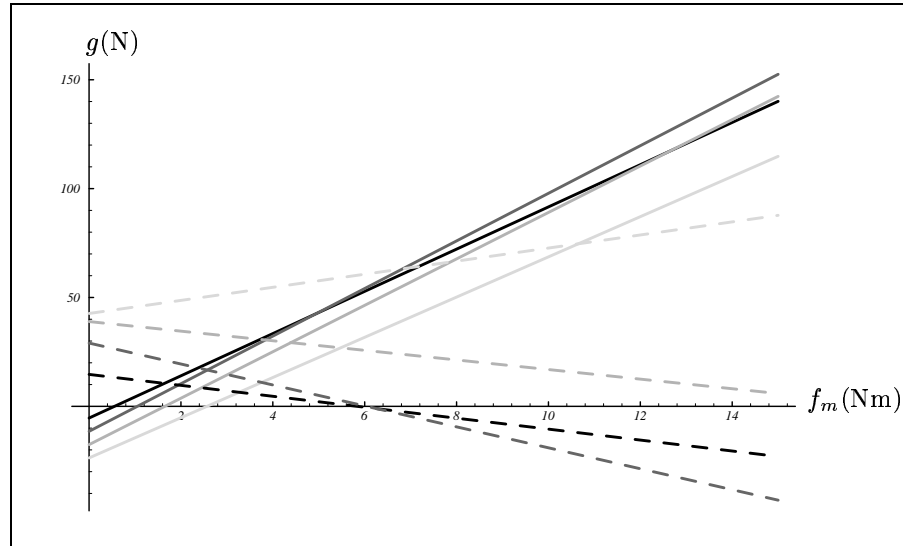
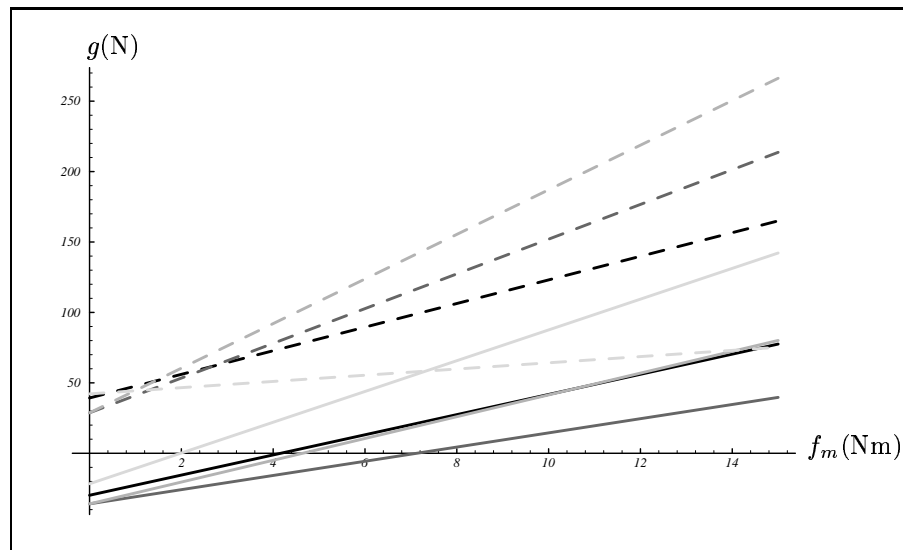
(a) Configurations *pw1* à *pw4*.(b) Configurations *pw5* à *pw8*.

Figure 5.17: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (MEC32).

Une seconde contrainte tente de limiter la valeur de l'effort proximal durant la période de contact de la prise ferme. On a

$$g_2 < 100 \text{ N} \text{ pour } (\theta_7)_{\min} \text{ pour } col \quad (5.31)$$

où on est beaucoup moins sévère que pour les deux autres mécanismes. En effet,

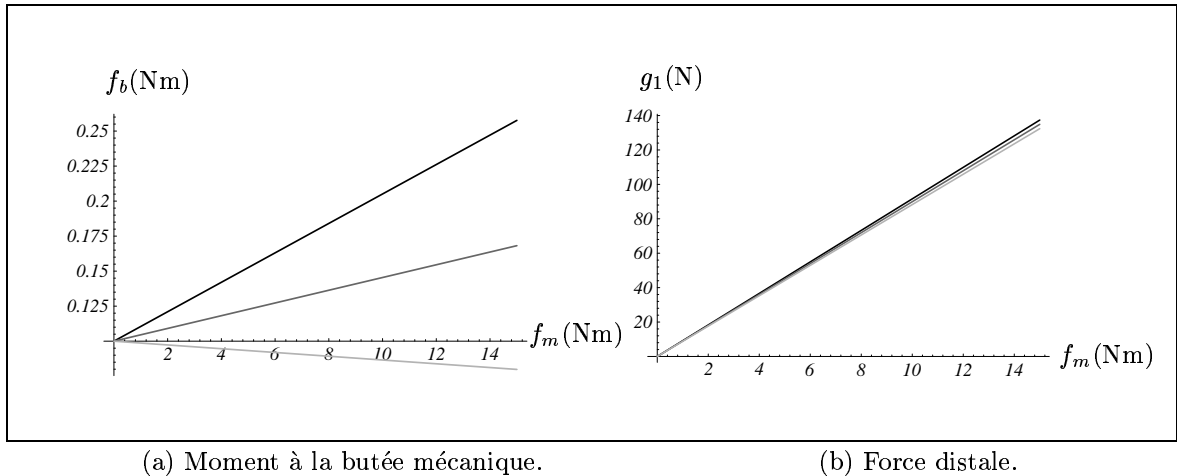


Figure 5.18: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (MEC32).

puisque l'estimé initial n'est pas stable pour toutes les configurations pertinentes à la période de serrage de la prise ferme, on cherche à garder le plus de latitude possible afin d'atteindre ces objectifs. On s'appuie donc sur le fait que les configurations visées pour la période de contact permettent de générer une force proximale dirigée vers la paume, réduisant ainsi les risques d'éjection de l'objet.

Les trois dernières contraintes sont appliquées sur les trois configurations instables de la prise ferme. On impose donc une valeur minimum de force proximale et on obtient

$$g_2 > 40 N \text{ pour } (f_m)_{\max} \text{ pour } pw1, pw2, pw3 \quad (5.32)$$

On transforme ces cinq contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité, introduisant par le fait même cinq nouvelles variables (ρ_1 à ρ_5). Ces cinq nouvelles équations sont regroupées dans le vecteur contraintes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$

On définit maintenant le vecteur objectif $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. On utilise seize nouvelles équations, ce qui porte le nombre total d'équations à 21, incluant les équations de contrainte. Le problème comprend quinze variables, incluant celles introduites par les équations de contrainte. Les huit premières équations du vecteur objectif visent un rapport d'effort entre les forces distale et proximale. On veut ce rapport supérieur à 1 de façon à obtenir un effort distal plus élevé que l'effort proximal. On a donc

$$\frac{g_1}{g_2} = 1.5 \text{ pour } pw1 \text{ à } pw8 \quad (5.33)$$

On utilise sept autres équations afin d'obtenir un comportement uniforme pour toutes les configurations. On se base sur la valeur de l'effort distal de la configuration $pw1$ et

on vise cette même valeur d'effort distal pour les 7 autres configurations. On a donc

$$\frac{g_{1pw1}}{g_{1pwi}} = 1 \quad i = 2, \dots, 8 \quad (5.34)$$

Avec la dernière équation, on vise une valeur précise d'effort proximal pour la configuration la plus ouverte de la série de configurations *co1*. Cette dernière est définie comme

$$g_2 = 35 N \text{ pour } (\theta_7)_{\max} \text{ pour } co1 \quad (5.35)$$

La fonction objectif et le vecteur contrainte étant déterminés, on se sert de l'algorithme de *décomposition orthogonale* (5 minutes et 40 secondes de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires, 9 itérations au total) pour obtenir un nouveau mécanisme que l'on nomme OPT31 et qui est montré à la Figure 5.19 en configurations extrêmes. Les valeurs finales des variables associées à ce mécanisme sont présentées au Tableau 5.9.

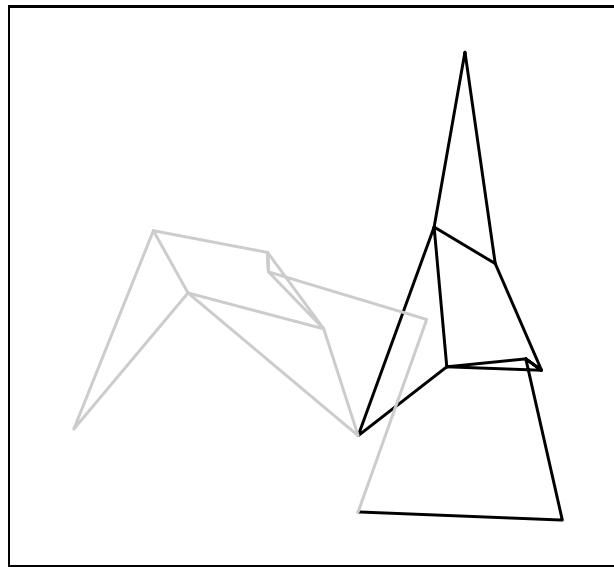


Figure 5.19: Mécanisme OPT31 en configurations extrêmes.

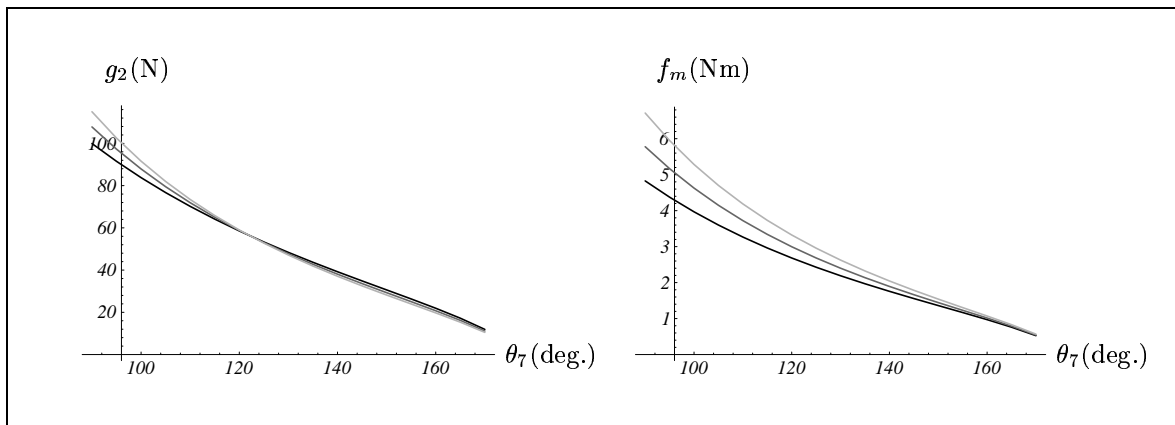
Les performances du mécanisme OPT31 en période de contact de la prise ferme sont présentées à la Figure 5.20. On voit que la contrainte imposée sur la valeur de g_2 pour $(\theta_7)_{\min}$ de *co1* a été respectée ($< 100 N$). On note que la série *co3* présente des valeurs plus élevées d'effort proximal. L'orientation de la phalange proximale pour cette série de configurations génère par contre un effort nécessairement dirigé vers la paume.

On traite maintenant la période de serrage de la prise ferme, qui est maintenant stable pour toutes les configurations étudiées (Figure 5.21). En (a), la valeur des efforts

	$l_2(\text{m})$	$l_3(\text{m})$	$l_4(\text{m})$	$l_5(\text{m})$	$l_6(\text{m})$
MEC32	0.0546	0.0313	0.0315	0.0405	0.0256
OPT31	0.0558	0.0268	0.0320	0.0393	0.0241
OPT32	0.0545	0.0251	0.0327	0.0373	0.0225

	$l_9(\text{m})$	$l_{11}(\text{m})$	$\alpha_1(\text{deg.})$	$\alpha_2(\text{deg.})$	$\alpha_3(\text{deg.})$
MEC32	0.0434	-0.0292	30.41	-8.59	111.44
OPT31	0.0379	-0.0257	32.14	-7.82	110.91
OPT32	0.0302	-0.0171	24.84	-0.82	116.14

Tableau 5.9: Valeurs des variables pour les mécanismes MEC32, OPT31 et OPT32.



(a) Force proximale.

(b) Couple au moteur.

Figure 5.20: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT31).

n'est pas trop élevée (valeur maximale de 120N) et la force distale (en trait continu) est plus élevée que la force proximale (en trait pointillé) pour trois des configurations. En (b), la valeur de l'effort proximal atteint des valeurs très élevées (jusqu'à 250N). De plus, la force proximale est plus élevée que la force distale pour les quatre configurations. Les objectifs sur le rapport $\frac{g_1}{g_2}$ n'ont donc pas été atteints.

La Figure 5.22 présente les résultats obtenus pour le prise de pincée. Toutes les configurations permettent de générer une prise stable et l'effort distal résultant atteint une valeur satisfaisante (120N).

Les résultats obtenus avec le mécanisme OPT31 sont présentés en détails au Tableau 5.10.

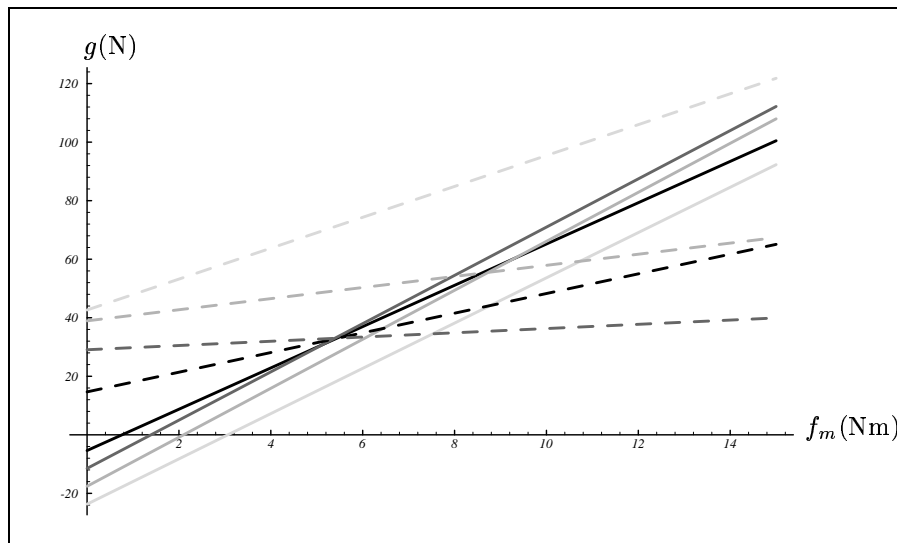
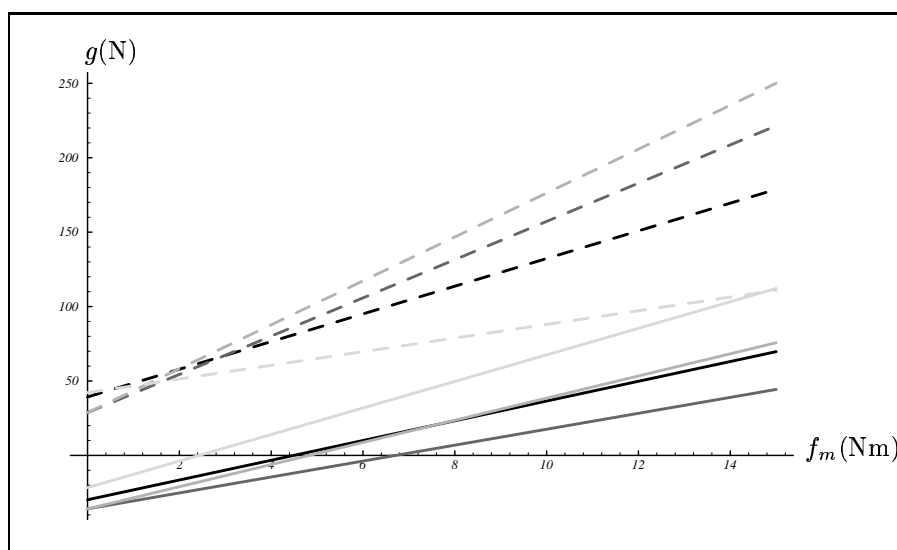
(a) Configurations *pw1* à *pw4*.(b) Configurations *pw5* à *pw8*.

Figure 5.21: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT31).

Les Tableaux 5.11 et 5.12 montrent les résultats de l'optimisation. On y trouve les valeurs visées dans le vecteur contraintes et la fonction objectif ainsi que les résultats obtenus avec le mécanisme OPT31.

Les résultats obtenus avec le mécanisme OPT31 sont satisfaisants, mais comme ils dépendent directement de la façon dont la fonction objectif est définie, on tente

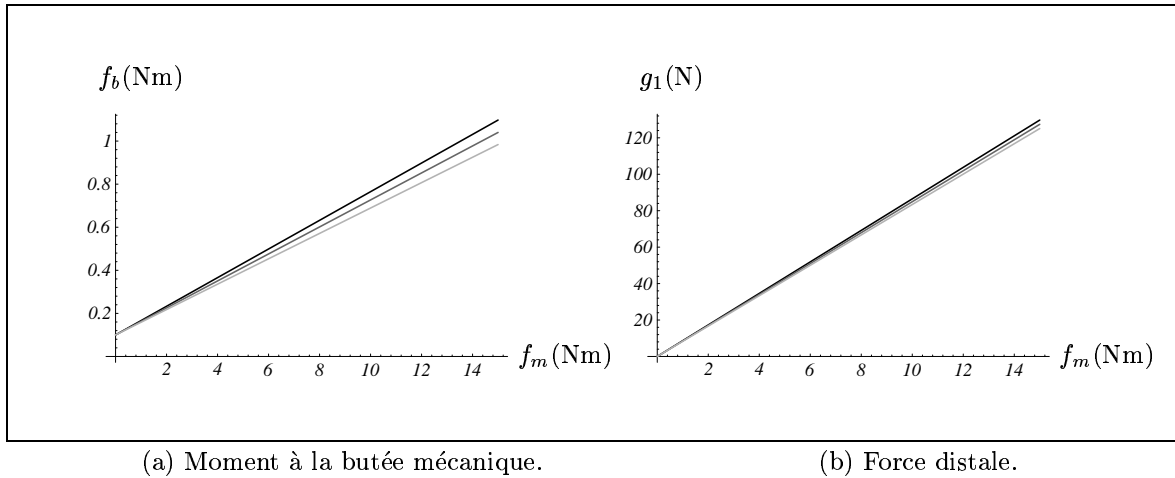


Figure 5.22: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT31).

d'améliorer ces résultats en définissant une deuxième fonction objectif. On veut notamment réduire la valeur de la force proximale durant la période de contact et obtenir un rapport $\frac{g_1}{g_2}$ supérieur à 1 pour toutes les configurations relatives à la prise ferme.

On modifie premièrement le vecteur contraintes. On est plus sévère sur la valeur maximale de la force proximale durant l'étape de contact de la prise ferme. On limite cette valeur à $70 N$. De plus, on ajoute une contrainte supplémentaire pour la série de configurations *co3* puisqu'elle se révèle comme la plus critique pour le mécanisme OPT31. On a donc

$$g_2 < 70 N \text{ pour } (\theta_7)_{\min} \text{ pour } co1 \text{ et } co3 \quad (5.36)$$

Les contraintes appliquées aux deux autres cas de saisie demeurent inchangées.

La fonction objectif est redéfinie au complet. On vise maintenant des valeurs précises d'effort plutôt que des rapports. On vise en quelque sorte les mêmes objectifs que pour le mécanisme OPT31 (rapport $\frac{g_1}{g_2}$ de 1.5), mais formulés de façon différente. On veut donc un effort distal plus important que l'effort proximal et un comportement assez uniforme d'une configuration à l'autre. On impose les mêmes conditions pour les huit configurations, soit

$$g_1 = 150 N \text{ et } g_2 = 100 N \text{ pour } pw1 \text{ à } pw8 \quad (5.37)$$

Une dernière équation est utilisée pour viser une valeur précise d'effort proximal durant la période de contact de la prise ferme. On a

$$g_2 = 50 N \text{ pour } (\theta_7)_{\min} \text{ pour } co1 \quad (5.38)$$

	$g_1(N)$							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
MEC32	140.09	152.50	142.35	114.81	77.54	39.67	80.11	142.19
OPT31	100.47	112.18	107.96	92.30	69.70	44.32	75.69	112.15
OPT32	93.66	112.01	119.08	117.94	112.55	112.30	130.23	125.15
OPT33	95.79	112.52	118.27	116.87	114.44	145.20	172.40	125.87

	$g_2(N)$							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
MEC32	-23.03	-43.09	5.89	87.72	165.00	213.66	266.2	75.26
OPT31	65.08	39.93	67.39	121.81	178.77	221.46	250.02	110.95
OPT32	77.42	40.25	50.69	92.96	149.28	203.04	214.12	85.40
OPT33	73.58	40.00	52.66	94.38	145.85	175.61	176.62	83.59

	$g_2 (co1)(N)$		$f_b(Nm)$
	$\theta_{7\max}$	$\theta_{7\min}$	$pc3$
MEC32	8.98	102.244	0.079
OPT31	11.91	99.93	0.98
OPT32	12.64	68.80	1.12
OPT33	12.39	54.23	1.07

Tableau 5.10: Performances des mécanismes optimaux.

	$g_2(N)$			$g_2 (\theta_{7\min}, co1)$ (N)	f_b (Nm)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$		
OPT31	65.08	39.93	67.39	99.93	0.98
Contraintes	>40	>40	>40	<100.00	>0

Tableau 5.11: Performances du mécanisme OPT31 et contraintes imposées.

Ces nouvelles équations sont implantées et l'algorithme d'optimisation (9 minutes et 1 seconde de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires, 14 itérations au total) génère un nouveau mécanisme que l'on nomme OPT32, dont les valeurs finales des variables se retrouvent au Tableau 5.9. Le mécanisme OPT32 est montré en configurations extrêmes

	$\frac{g_1}{g_2}$							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
OPT31	1.5	2.8	1.6	0.8	0.4	0.2	0.3	1.0
Objectifs	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

	$\frac{g_{1pw1}}{g_{1pwi}}$							$g_2 (\theta_{7\max}, co1)$
	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$	(N)
OPT31	0.9	0.9	1.1	1.4	2.3	1.3	0.9	17.23
Objectifs	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	35.00

Tableau 5.12: Performances du mécanisme OPT31 et objectifs visés.

à la Figure 5.23.

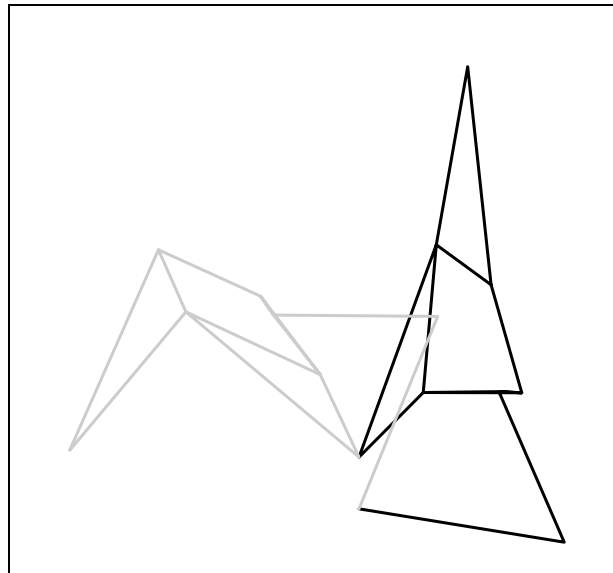
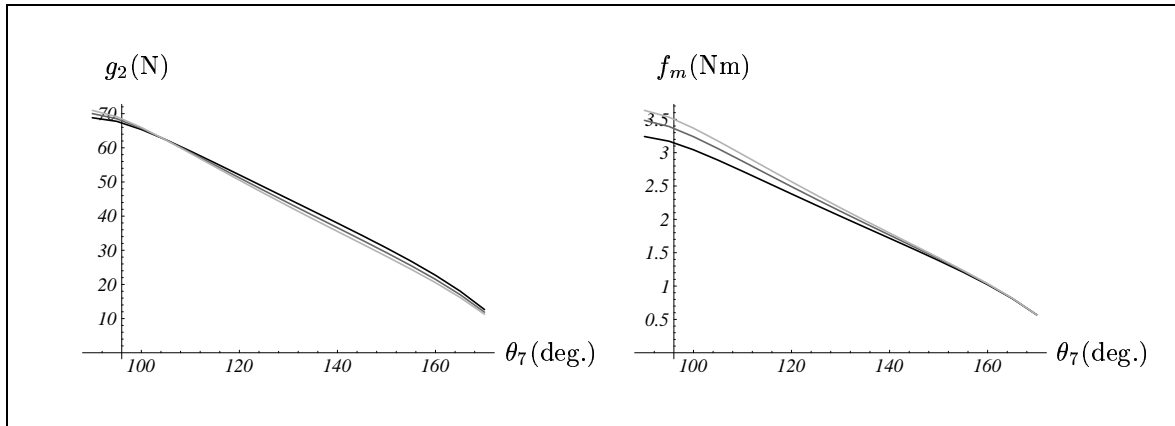


Figure 5.23: Mécanisme OPT32 en configurations extrêmes.

La Figure 5.24 montre une nette amélioration au niveau de la valeur de g_2 durant la période de contact de la prise ferme. La valeur maximale est maintenant de $70 N$ par rapport à $100 N$ pour l'estimé initial (MEC32). L'effort nécessaire à l'actionneur pour générer cette force est lui aussi réduit considérablement.

Les résultats obtenus pour la période de serrage de la prise ferme sont illustrés à la Figure 5.25. En comparant au Tableau 5.10, on voit que les efforts distal et proximal sont maintenant mieux répartis et que les valeurs d'efforts qui dépassaient largement



(a) Force proximale.

(b) Couple au moteur.

Figure 5.24: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT32).

la valeur de 200 N ont été réduites à des valeurs plus raisonnables (200 N). Seulement trois configurations ne permettent pas d'obtenir un rapport $\frac{g_1}{g_2}$ supérieur à 1. Ce sont les configurations *pw5*, *pw6* et *pw7* illustrées à la Figure 5.25(b) (les trois courbes représentées par les trois niveaux de gris les plus foncés).

Finalement, les performances du mécanisme OPT32 en prise de pincée sont présentées à la Figure 5.26. La prise est stable pour les trois configurations et la force distale générée atteint une valeur comparable aux résultats obtenus jusqu'à présent (120 N).

Les résultats obtenus sont comparés aux contraintes imposées (Tableau 5.13) et aux objectifs visés (Tableau 5.14).

	$g_2(\text{N})$			$g_2(\text{N}) (\theta_{7\min})$		f_b (Nm)
	<i>pw1</i>	<i>pw2</i>	<i>pw3</i>	<i>co1</i>	<i>co3</i>	
OPT32	77.42	40.25	50.69	68.80	70.46	1.12
Contraintes	>40	>40	>40	<70.00	<70.00	>0

Tableau 5.13: Performances du mécanisme OPT32 et contraintes imposées.

Jusqu'à présent, on a procédé à l'optimisation du mécanisme 3 en utilisant dix variables dimensionnelles, accompagnées des variables supplémentaires liées aux équations de contrainte. On décide maintenant de scinder le vecteur variables \mathbf{x} en deux sous-vecteurs afin de simplifier le problème. On réduit ainsi le nombre de variables impliquées

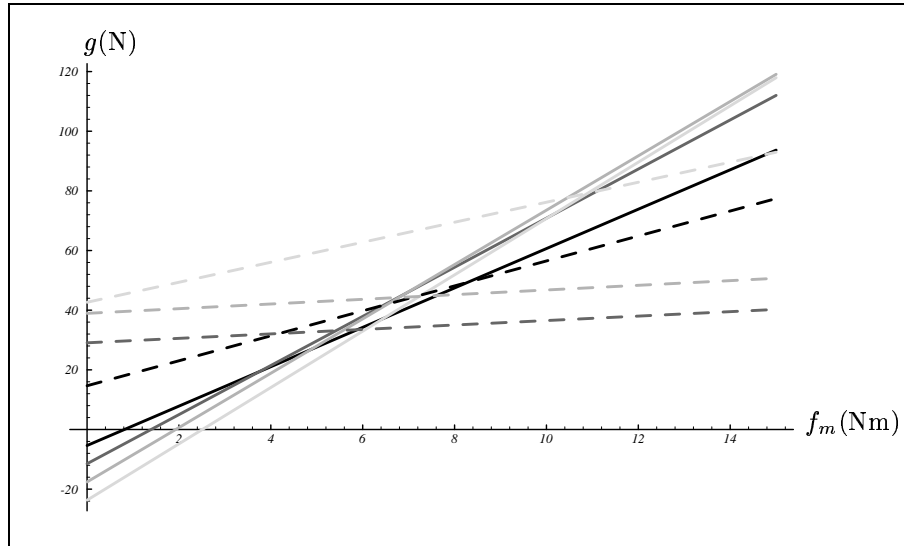
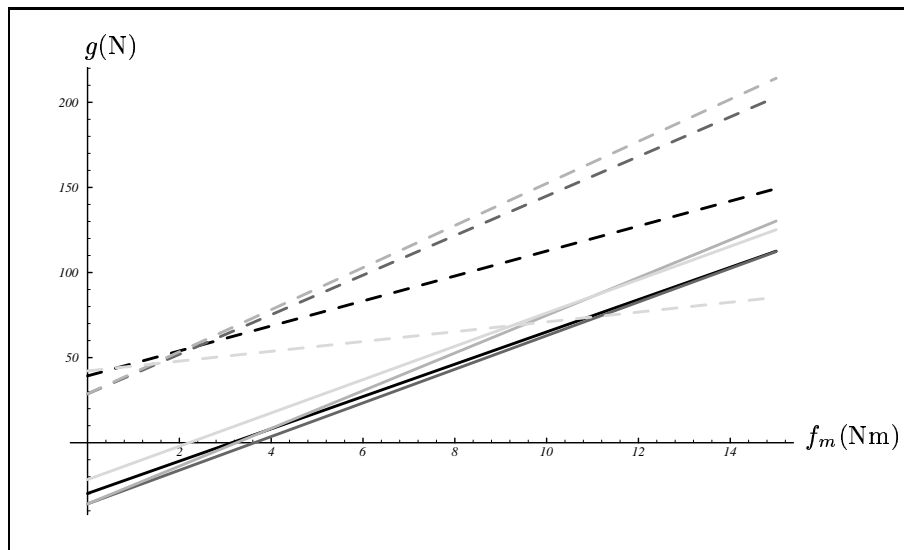
(a) Configurations *pw1* à *pw4*.(b) Configurations *pw5* à *pw8*.

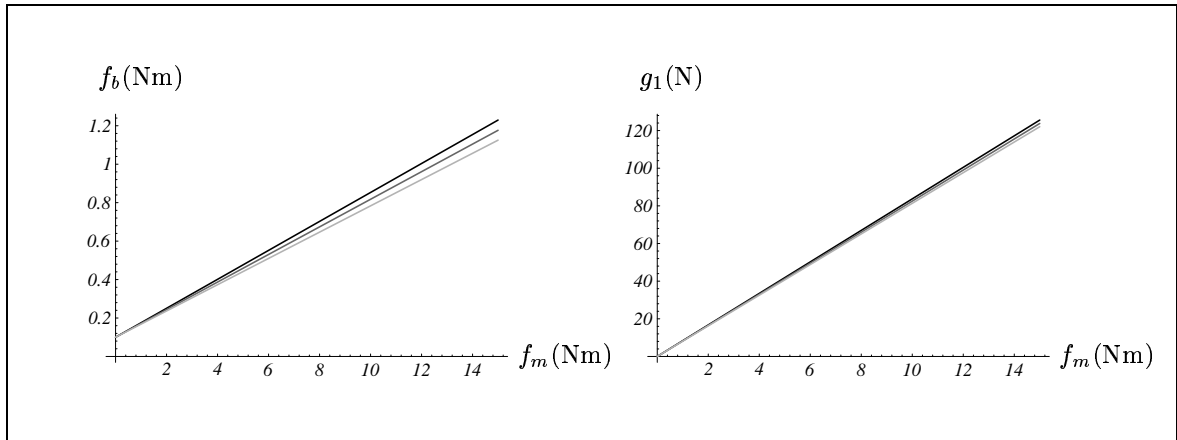
Figure 5.25: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT32).

dans le processus d'optimisation. On définit

$$\mathbf{x} = \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5 \quad l_6 \quad l_9 \quad l_{11} \right]^T = \left[\mathbf{x}_a^T \quad \mathbf{x}_b^T \right]^T \quad (5.39)$$

où

$$\mathbf{x}_a = \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \right]^T \quad (5.40)$$



(a) Moment à la butée mécanique.

(b) Force distale.

Figure 5.26: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT32).

	g_1 (N)							
	<i>pw1</i>	<i>pw2</i>	<i>pw3</i>	<i>pw4</i>	<i>pw5</i>	<i>pw6</i>	<i>pw7</i>	<i>pw8</i>
OPT32	93.66	112.01	119.08	117.94	112.55	112.30	130.23	125.15
Objectifs	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00

	g_2 (N)							
	<i>pw1</i>	<i>pw2</i>	<i>pw3</i>	<i>pw4</i>	<i>pw5</i>	<i>pw6</i>	<i>pw7</i>	<i>pw8</i>
OPT32	77.42	40.25	50.69	92.96	149.28	203.04	214.12	85.40
Objectifs	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

	g_2 (N)
OPT32	68.80
Objectifs	50.00

Tableau 5.14: Performances du mécanisme OPT32 et objectifs visés.

$$\mathbf{x}_b = [l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5 \ l_6 \ l_9 \ l_{11}]^T \quad (5.41)$$

On conclut donc les essais avec une itération d'optimisations. L'optimisation se fera par étapes, chacune des étapes utilisant un groupe de variables différent. On utilise la même fonction objectif que celles utilisées pour obtenir le mécanisme OPT32. De plus, on utilise ce dernier mécanisme comme estimé initial puisque ses performances pour les différentes étapes de saisies sont déjà très satisfaisantes. Le vecteur contrainte

	$l_2(\text{m})$	$l_3(\text{m})$	$l_4(\text{m})$	$l_5(\text{m})$	$l_6(\text{m})$	$l_9(\text{m})$
OPT32	0.0545	0.0251	0.0327	0.0373	0.0225	0.0302
ALGO1(OPT33)	0.0545	0.0251	0.0327	0.0373	0.0225	0.0302
ALGO2(OPT34)	0.0545	0.0226	0.0312	0.0392	0.0221	0.0294
ALGO1(OPT35)	0.0545	0.0226	0.0312	0.0392	0.0221	0.0294
ALGO2(OPT36)	0.0547	0.0211	0.0301	0.0404	0.0220	0.0290

	$l_{11}(\text{m})$	$\alpha_1(\text{deg.})$	$\alpha_2(\text{deg.})$	$\alpha_3(\text{deg.})$	Erreur
OPT32	-0.0171	24.84	-0.82	116.14	21834.6
ALGO1(OPT33)	-0.0171	27.85	-3.49	113.89	14683.8
ALGO2(OPT34)	-0.0174	27.85	-3.49	113.89	15838.7
ALGO1(OPT35)	-0.0174	28.00	-5.89	113.59	15676.9
ALGO2(OPT36)	-0.0176	28.00	-5.89	113.59	16155.5

Tableau 5.15: Mécanismes issus de la séquence d'optimisation.

utilisé comprend les mêmes équations, à l'exception des équations limitant la valeur de g_2 durant la période de contact de la prise ferme. En effet, la limite supérieure passe de $70 N$ à $60 N$.

On définit deux algorithmes qui seront utilisés à tour de rôle. Le premier, nommé ALGO1, implique le vecteur variables \mathbf{x}_a . Le système de 23 équations (objectifs et contraintes) comprend neuf inconnues, incluant les six inconnues générées par les équations de contrainte. Le deuxième algorithme, nommé ALGO2, implique le vecteur variables \mathbf{x}_b , donc un total de treize inconnues.

Le Tableau 5.15 présente les résultats de la séquence d'algorithmes utilisée. On utilise OPT32 comme estimé initial à ALGO1 et on obtient le mécanisme OPT33 (4 minutes et 9 secondes de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires, 9 itérations au total). Ce dernier est utilisé comme estimé initial à ALGO2 et on obtient le mécanisme OPT34 (4 minutes et 16 secondes de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires, 8 itérations au total) qui est utilisé comme estimé initial à ALGO1 et ainsi de suite. On obtient finalement les mécanismes OPT35 (3 minutes et 49 secondes de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires, 8 itérations au total) et OPT36 (4 minutes et 32 secondes de temps-CPU, 6 objectifs intermédiaires, 8 itérations au total). De la séquence d'optimisations

utilisée, le mécanisme OPT33 est le mécanisme avec lequel l'erreur sur la fonction globale est minimale. La fonction globale est en fait un vecteur qui inclut tous les termes du vecteur contraintes et tous les termes du vecteur objectif. Au Tableau 5.15, on montre les valeurs d'erreur pour chaque mécanisme. Ces erreurs ne sont utilisées qu'à titre comparatif, puisque leur signification physique dépend de la façon dont elles sont définies. Les autres étapes de l'optimisation successive ne permettent que de s'approcher de la valeur d'erreur obtenue avec OPT33. Ce dernier est illustré en configurations extrêmes à la Figure 5.27.

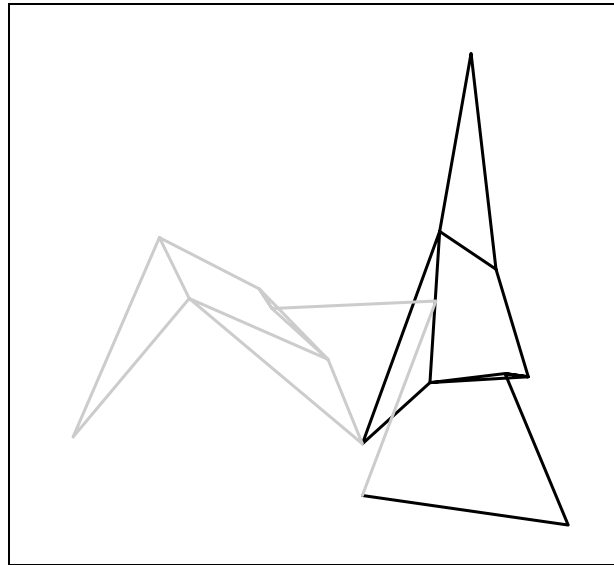


Figure 5.27: Mécanisme OPT33 en configurations extrêmes.

Au Tableau 5.10, on compare les performances du mécanisme OPT33 avec celles des autres mécanismes. En se basant sur les performances de l'estimé initial (MEC32), les améliorations notables se situent d'abord dans la stabilité de la prise ferme pour toutes les configurations (spécialement pour les configurations *pw1* et *pw2* de la Figure 5.17(a)). On note ensuite une nette amélioration en ce qui concerne la répartition des efforts pour la prise ferme, notamment pour les configurations *pw5*, *pw6* et *pw7* (Figure 5.17(b)). Enfin, la diminution de la valeur de la force proximale durant la période de contact de la prise ferme est d'une importance non-négligeable.

Les performances du mécanisme OPT33 durant la période de contact de la prise ferme sont illustrées à la Figure 5.28. L'effort g_2 atteint une valeur maximale d'environ 65 N qui représente une nette amélioration par rapport à l'estimé initial MEC32 (g_2

d'environ 100 N).

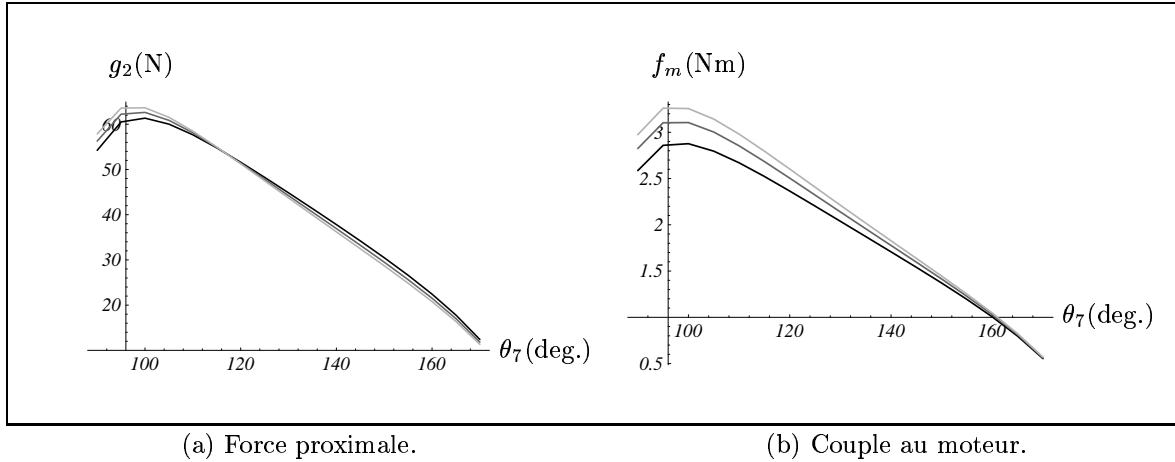


Figure 5.28: Fermeture de la phalange distale sur l'objet (OPT33).

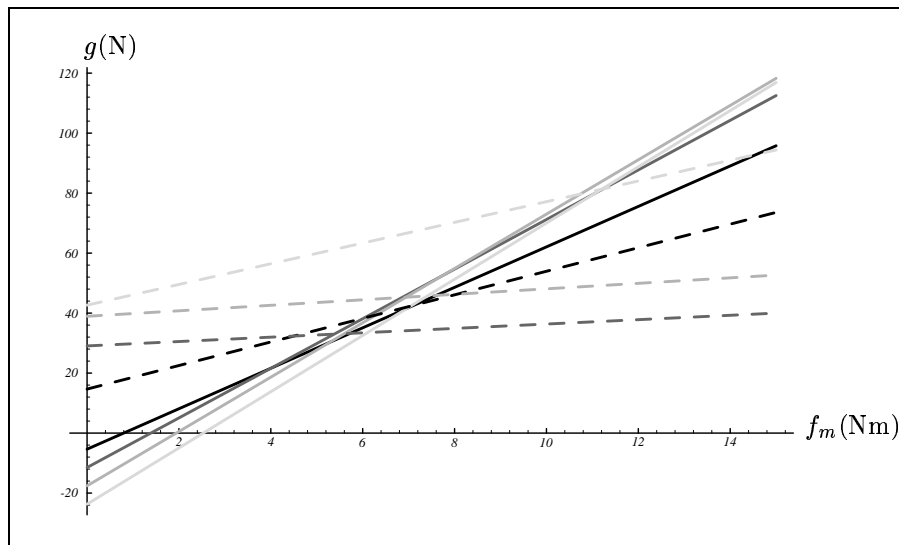
La Figure 5.29 montre le comportement du mécanisme durant la prise ferme. On voit qu'il y a regroupement des courbes (comportement plus uniforme d'une configuration à l'autre) et que les valeurs extrêmes ont été ramenées à des valeurs plus raisonnables. On obtient donc un mécanisme qui génère des forces bien réparties sur les deux phalanges et qui permet d'obtenir un rapport $\frac{g_1}{g_2}$ supérieur à 1 pour cinq configurations et près de 1 pour les autres configurations (Tableau 5.17). On visait une valeur supérieure à 1 de façon à favoriser une force résultante dirigée vers la paume.

La Figure 5.30 présente les résultats obtenus pour la prise de pincée et montre qu'une prise stable est effectuée pour toutes les configurations.

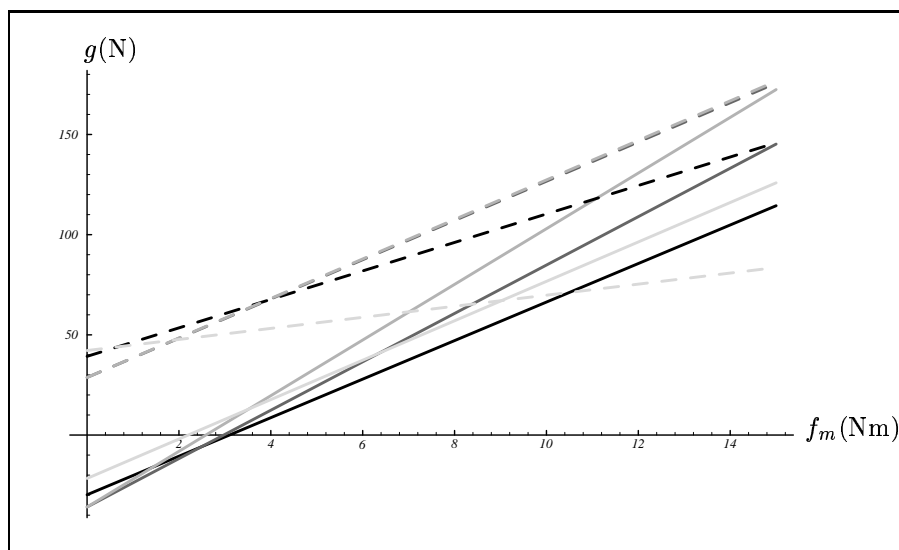
On présente les résultats de l'optimisation qui a permis de générer le mécanisme OPT33 au Tableaux 5.16 et 5.17. On y voit les contraintes imposées, les objectifs visés et les performances du mécanisme optimal. On y montre aussi le rapport $\frac{g_1}{g_2}$ afin de le comparer à la valeur visée dans la première optimisation, soit 1.5.

	$g_2(N)$			$g_2(N) (\theta_{7\min})$		f_b (Nm)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$co1$	$co3$	
OPT33	73.58	40.00	52.66	54.23	57.85	1.07
Contraintes	>40	>40	>40	<60.00	<60.00	>0

Tableau 5.16: Performances du mécanisme OPT33 et contraintes imposées.



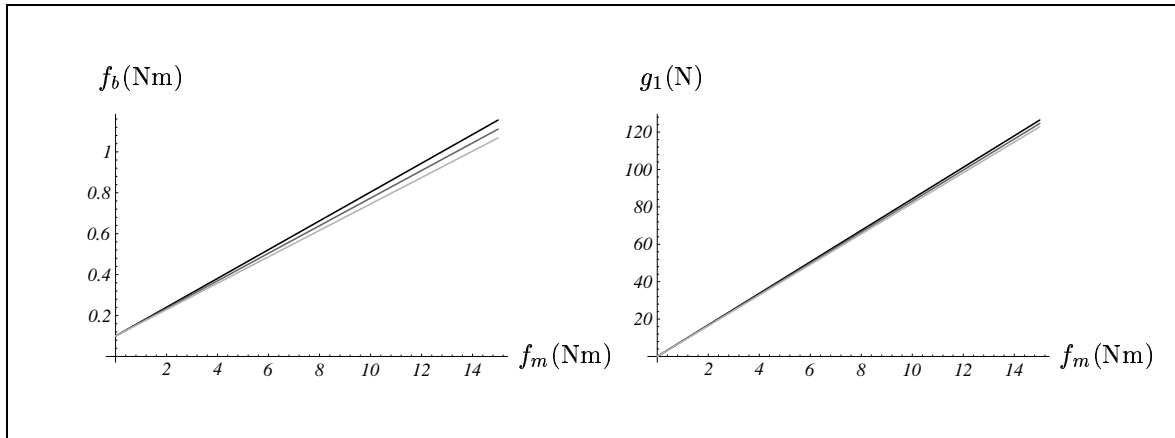
(a) Configurations pw1 à pw4.



(b) Configurations pw5 à pw8.

Figure 5.29: Forces proximale et distale en fonction du couple au moteur (OPT33).

Les performances du mécanisme OPT33 correspondent de façon très satisfaisante aux comportements visés au début de l'optimisation. On peut qualifier le mécanisme d'optimal par rapport à la formulation des objectifs visés. Plusieurs algorithmes ont été développés dans la philosophie de l'optimisation séquentielle, utilisant à tour de rôle des groupes de variables différents. La plupart de ces essais n'ont par contre pas donné de



(a) Moment à la butée mécanique.

(b) Force distale.

Figure 5.30: Évolution de f_b et de g_1 en fonction de f_m (OPT33).

	g_1 (N)							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
OPT33	95.79	112.52	118.27	116.87	114.44	145.20	172.40	125.87
Objectifs	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00	150.00

	g_2 (N)							
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$
OPT33	73.58	40.00	52.66	94.38	145.85	175.61	176.62	83.59
Objectifs	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

	$\frac{g_1}{g_2}$								g_2 (N)
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw4$	$pw5$	$pw6$	$pw7$	$pw8$	$\theta_{7\min}(co1)$
OPT33	1.3	2.8	2.2	1.2	0.8	0.8	1.0	1.5	54.23
Objectifs	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	50.00

Tableau 5.17: Performances du mécanisme OPT33 et objectifs visés.

résultats satisfaisants. En effet, les groupes de variables doivent être choisis de façon à laisser assez de flexibilité à l'algorithme pour pouvoir se diriger vers un minimum intéressant.

Parmi les dix variables utilisées pour l'optimisation, on suspecte que certaines d'entre elles ne sont pas totalement indépendantes. Leur dépendance n'est cependant pas directe et les expressions algébriques résultant de la modélisation du mécanisme

ne permettent pas de déduire simplement les relations entre les variables. Il serait intéressant de pouvoir éliminer certaines variables afin de simplifier le problème sans pour autant en affecter la généralité.

5.3.3.1 Mécanismes équivalents

Les nombreuses tentatives d'optimisation réalisées pour le mécanisme 3 ont parfois mené à des résultats qui à première vue, semblaient inutilisables. Par exemple, il est souvent arrivé que l'algorithme converge vers un mécanisme ayant un comportement inadéquat. Pourtant, un phénomène intéressant s'est produit lorsqu'en fournissant deux estimés initiaux différents au même algorithme, on obtint deux mécanismes ayant un comportement instable très similaire. L'erreur sur la fonction objectif était la même, mais la morphologie des mécanismes était très différente. Une étude plus poussée de ce phénomène a mené à l'élaboration du théorème 5.1.

Théorème 5.1 *Il existe une infinité de mécanismes, de même topologie que le mécanisme illustré à la Figure 3.6, ayant un comportement statique identique.*

On veut prouver qu'il est possible de construire une infinité de mécanismes basés sur la topologie du mécanisme 3 mais avec une géométrie différente, capables de générer les mêmes efforts cartésiens pour toutes les étapes de saisies, pour toutes les configurations et pour la même valeur d'effort à l'actionneur. On suppose évidemment que l'actionneur passif est le même pour tous les mécanismes. On suppose aussi que la longueur des phalanges proximale et distale ne change pas d'un mécanisme à l'autre.

La Figure 5.31 présente un schéma du mécanisme 3 avec les différents paramètres géométriques s'y rattachant. Pour les besoins de la démonstration, on crée deux polygones à partir des deux boucles indépendantes du mécanisme de base (Figure 5.31(a)). On définit le *polygone 1* à cinq côtés formé par les segments reliant les liaisons O_1 , O_2 , O_3 , O_4 , O_8 et O_1 . On définit le *polygone 2* à quatre côtés formé par les segments reliant les liaisons O_4 , O_5 , O_6 , O_7 et O_4 .

À partir d'un mécanisme de base, on tente de construire un mécanisme dit *homologue* ayant en tout temps le même comportement statique que le premier. On fait une hypothèse importante à propos des deux mécanismes équivalents. Puisqu'on étudie

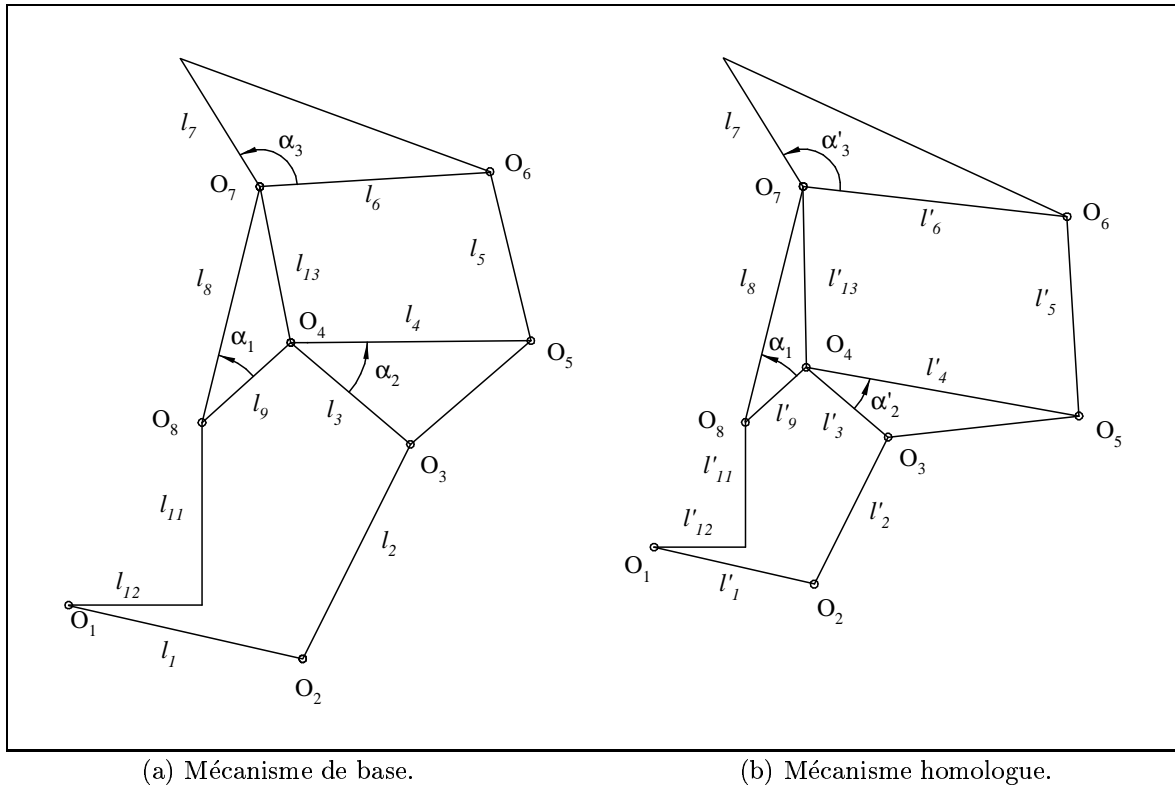


Figure 5.31: Modélisation des mécanismes équivalents.

les deux mécanismes alors qu'ils sont dans la même configuration, il va de soi que les angles configuratifs θ_7 et θ_8 sont les mêmes pour les deux mécanismes. On suppose maintenant que tous les autres angles configuratifs dépendants (θ_1 à θ_6) et ceux composant les *polygones 1 et 2* sont les mêmes pour les deux mécanismes. Cette hypothèse est basée sur le fait qu'il existe une relation entre les deux mécanismes, relative à leur configuration et valide pour toutes les configurations, qui résulte en un comportement statique identique.

On se base donc sur un mécanisme existant pour en construire un qui sera statiquement équivalent. On applique un facteur d'échelle λ sur une longueur quelconque du mécanisme de base. On choisit ici la longueur l_1 . La variable associée au mécanisme de base est l_1 et la variable associée au mécanisme homologue est l'_1 . On a

$$\lambda = \frac{l'_1}{l_1} \quad (5.42)$$

L'application de cette transformation linéaire de concert avec le respect de l'hypothèse faite sur les angles résulte en une solution unique pour la génération de la première boucle fermée du mécanisme homologue de la Figure 5.31(b). En effet, si on veut

maintenir la valeur des angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et θ_8 constante (Figure 3.6), on doit appliquer la transformation linéaire λ aux longueurs $l_1, l_2, l_3, l_9, l_{11}$ et l_{12} en plus de maintenir la valeur de l'angle α_1 constante. On applique donc la transformation linéaire λ au *polygone 1*.

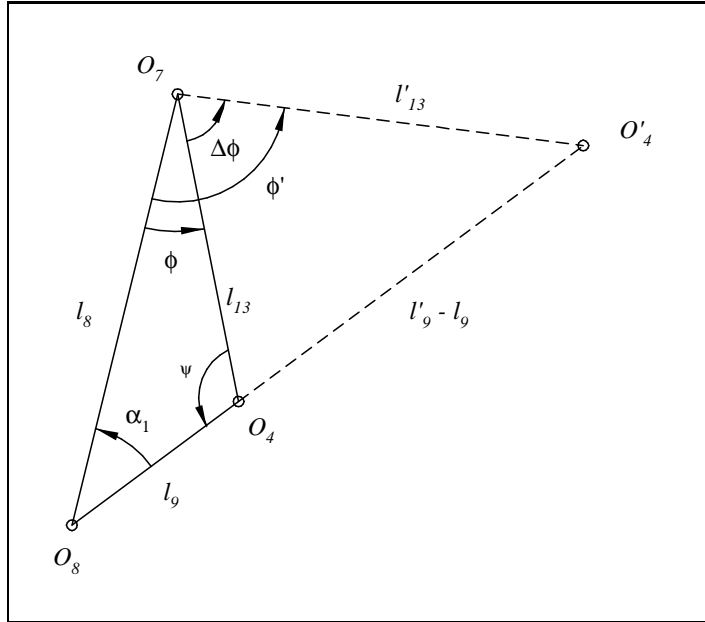


Figure 5.32: Modélisation de la phalange proximale du mécanisme 3.

La phalange proximale du mécanisme de base ($O_8-O_4-O_7$) et celle du mécanisme homologue ($O_8-O'_4-O_7$) sont modélisées à la Figure 5.32. Puisque que l'angle α_1 et les longueurs l'_9 et l_8 (longueur de la phalange proximale) sont fixés, la nouvelle longueur l'_{13} est elle aussi fixée. En effet, à l'aide de la loi des *cosinus* on obtient

$$l'_{13} = \sqrt{l_8^2 + l_9^2 \lambda^2 - 2l_8 l_9 \lambda \cos \alpha_1} \quad (5.43)$$

où on a remplacé l'_9 par son expression selon les paramètres de base, soit λl_9 . On définit un deuxième facteur d'échelle, β , dépendant du premier, qui s'applique sur les longueurs associées à la deuxième boucle fermée. On a

$$\beta = \frac{l'_{13}}{l_{13}} = \frac{\sqrt{l_8^2 + l_9^2 \lambda^2 - 2l_8 l_9 \lambda \cos \alpha_1}}{\sqrt{l_8^2 + l_9^2 - 2l_8 l_9 \cos \alpha_1}} \quad (5.44)$$

Puisqu'on veut que les angles constituant le *polygone 2* demeurent constants, les côtés de ce polygone doivent tous varier selon le même facteur β . On applique donc cette transformation pour obtenir les longueurs l'_4, l'_5 et l'_6 (Figure 5.31).

L'angle ϕ varie de $\Delta\phi$ avec la nouvelle longueur l'_{13} (Figure 5.32). Les angles α_2 et α_3 doivent donc varier de façon à maintenir les angles du *polygone 2* constants. Les nouveaux angles sont définis par

$$\alpha'_2 = \alpha_2 + \Delta\phi \quad (5.45)$$

$$\alpha'_3 = \alpha_3 - \Delta\phi \quad (5.46)$$

Cette dernière transformation permet d'obtenir un nouveau mécanisme, identique au premier au niveau de son comportement statique. On fait maintenant la démonstration du théorème 5.1.

On développe les expressions algébriques des forces proximale et distale en faisant les diagrammes de corps libre de chacune des membrures du mécanisme 3 (Figure 4.33). La force distale du mécanisme de base est définie comme

$$g_1 = \frac{f_m \sin \theta_3 \sin \theta_6 l_3 l_6}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l_1 l_4 l_7} - \frac{f_p}{l_7} \quad (5.47)$$

La force distale du mécanisme homologue est définie comme

$$g'_1 = \frac{f_m \sin \theta_3 \sin \theta_6 l'_3 l'_6}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l'_1 l'_4 l_7} - \frac{f_p}{l_7} \quad (5.48)$$

où f_m , f_p , l_7 (longueur de la phalange distale) et tous les angles configuratifs ne varient pas. On veut démontrer que pour toutes configurations, la valeur de la force distale est égale pour les deux mécanismes, soit

$$g_1 = g'_1 \quad (5.49)$$

Dans l'équation (5.48), on remplace les valeurs de l'_1 , l'_3 , l'_4 et l'_6 par leur expression en fonction des variables du mécanisme de base et on obtient

$$g'_1 = \frac{f_m \sin \theta_3 \sin \theta_6 l_3 \lambda l_6 \beta}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l_1 \lambda l_4 \beta l_7} - \frac{f_p}{l_7} \quad (5.50)$$

Les variables λ et β s'éliminent facilement et on obtient

$$g_1 = g'_1 \quad (5.51)$$

ce qui prouve que les forces distales des deux mécanismes sont égales pour n'importe quelle configuration.

On procède à la même démonstration pour la force proximale. On veut montrer que

$$g_2 = g'_2 \quad (5.52)$$

En faisant la somme des moments sur la phalange proximale ($\Sigma M_{O_8} = 0$ pour la membrure 6 de la Figure 4.33) on obtient

$$g_2 = \frac{2}{l_8}(P \sin \theta_8 - Q \cos \theta_8 + f_p) \quad (5.53)$$

où

$$P = g_1 l_8 \sin \gamma_3 + f_2 l_8 \sin \gamma_2 + f_1 l_9 \sin(\gamma_1 + \alpha_1) - f_2 l_9 \cos \gamma_2 \sin \alpha_1 - f_2 l_9 \sin \gamma_2 \cos \alpha_1 \quad (5.54)$$

$$Q = g_1 l_8 \cos \gamma_3 + f_2 l_8 \cos \gamma_2 + f_1 l_9 \cos(\gamma_1 + \alpha_1) - f_2 l_9 \cos \gamma_2 \cos \alpha_1 + f_2 l_9 \sin \gamma_2 \sin \alpha_1 \quad (5.55)$$

Des équations (4.83) et (4.84) on tire les expressions des forces f_1 et f_2 , d'où

$$f_1 = \frac{f_m}{\sin \theta_2 l_1} \quad (5.56)$$

$$f_2 = \frac{f_m \sin \theta_3 l_3}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l_1 l_4} \quad (5.57)$$

Les angles sont définis comme

$$\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_2) \quad (5.58)$$

$$\gamma_2 = (\gamma_1 + \pi + \theta_3 + \theta_5 + \alpha_2) \quad (5.59)$$

$$\gamma_3 = (\pi - \theta_7 - \theta_8) \quad (5.60)$$

On note que les équations (4.96) et (5.53) sont équivalentes. Seuls les angles ont été définis différemment de façon à éliminer α_{43} et α_{45} . De plus, les constantes présentes dans la définition des angles sont conservées afin de faciliter le suivi du cheminement de l'auteur.

De façon similaire, on développe l'expression de la force proximale du mécanisme homologue. On obtient

$$g'_2 = \frac{2}{l_8}(P' \sin \theta_8 - Q' \cos \theta_8 + f_p) \quad (5.61)$$

où

$$\begin{aligned} P' = & g_1 l_8 \sin \gamma_3 + f'_2 l_8 \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) + f'_1 l'_9 \sin(\gamma_1 + \alpha_1) - \\ & f'_2 l'_9 \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) \sin \alpha_1 - f'_2 l'_9 \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$Q' = g_1 l_8 \cos \gamma_3 + f_2' l_8 \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) + f_1' l_9 \cos(\gamma_1 + \alpha_1) - f_2' l_9 \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) \cos \alpha_1 + f_2' l_9 \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) \sin \alpha_1 \quad (5.63)$$

où $g_1 = g_1'$ (équation (5.51)) et où α_2' a été remplacé par l'expression $\alpha_2 + \Delta\phi$ (équation (5.45)). On a

$$f_1' = \frac{f_m}{\sin \theta_2 l_1'} = \frac{f_m}{\sin \theta_2 l_1 \lambda} = \frac{f_1}{\lambda} \quad (5.64)$$

$$f_2' = \frac{f_m \sin \theta_3 l_3'}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l_1' l_4'} = \frac{f_m \sin \theta_3 l_3 \lambda}{\sin \theta_2 \sin \theta_5 l_1 \lambda l_4 \beta} = \frac{f_2}{\beta} \quad (5.65)$$

Les équations (5.62) et (5.63) peuvent donc être réécrites sous la forme

$$P' = g_1 l_8 \sin \gamma_3 + \frac{f_2 l_8 \sin(\gamma_2 + \Delta\phi)}{\beta} + f_1 l_9 \sin(\gamma_1 + \alpha_1) - \frac{f_2 l_9 \lambda \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) \sin \alpha_1}{\beta} - \frac{f_2 l_9 \lambda \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) \cos \alpha_1}{\beta} \quad (5.66)$$

$$Q' = g_1 l_8 \cos \gamma_3 + \frac{f_2 l_8 \cos(\gamma_2 + \Delta\phi)}{\beta} + f_1 l_9 \cos(\gamma_1 + \alpha_1) - \frac{f_2 l_9 \lambda \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) \cos \alpha_1}{\beta} + \frac{f_2 l_9 \lambda \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) \sin \alpha_1}{\beta} \quad (5.67)$$

Si la force proximale du mécanisme homologue est égale à celle du mécanisme de base, les forces définies aux équations (5.53) et (5.61) doivent être égales entre elles. En substituant ces deux expressions dans l'équation (5.52) et en développant les expressions, de nombreux termes sont égaux et s'éliminent de part et d'autre de l'équation. On obtient

$$\cos \theta_8 A_1 - \sin \theta_8 A_2 = \cos \theta_8 B_1 - \sin \theta_8 B_2 \quad (5.68)$$

où

$$A_1 = l_8 \cos \gamma_2 - l_9 \cos \gamma_2 \cos \alpha_1 + l_9 \sin \gamma_2 \sin \alpha_1 \quad (5.69)$$

$$A_2 = l_8 \sin \gamma_2 - l_9 \cos \gamma_2 \sin \alpha_1 - l_9 \sin \gamma_2 \cos \alpha_1 \quad (5.70)$$

$$B_1 = \frac{l_8 \cos(\gamma_2 + \Delta\phi)}{\beta} - \frac{l_9 \lambda \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) \cos \alpha_1}{\beta} + \frac{l_9 \lambda \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) \sin \alpha_1}{\beta} \quad (5.71)$$

$$B_2 = \frac{l_8 \sin(\gamma_2 + \Delta\phi)}{\beta} - \frac{l_9 \lambda \cos(\gamma_2 + \Delta\phi) \sin \alpha_1}{\beta} - \frac{l_9 \lambda \sin(\gamma_2 + \Delta\phi) \cos \alpha_1}{\beta} \quad (5.72)$$

Puisque les termes multipliés par $(\cos \theta_8)$ et $(\sin \theta_8)$ ne dépendent pas de l'angle θ_8 , on fait correspondre les coefficients des deux côtés de l'équation (5.68). On obtient

$$A_1 = B_1 \quad (5.73)$$

$$A_2 = B_2 \quad (5.74)$$

qui représentent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour démontrer que la force proximale des deux mécanismes équivalents est égale pour toutes configurations.

Pour démontrer l'équation (5.73), on développe B_1 en fonction des paramètres du mécanisme de base. On développe donc les fonctions trigonométriques afin d'en extraire les termes $\Delta\phi$. En effet, on sait que

$$\sin(\gamma_2 + \Delta\phi) = \cos \gamma_2 \sin \Delta\phi + \sin \gamma_2 \cos \Delta\phi \quad (5.75)$$

$$\cos(\gamma_2 + \Delta\phi) = \cos \gamma_2 \cos \Delta\phi - \sin \gamma_2 \sin \Delta\phi \quad (5.76)$$

On obtient donc

$$B_1 = \frac{\cos \Delta\phi}{\beta} B_{11} + \frac{\sin \Delta\phi}{\beta} B_{12} \quad (5.77)$$

où

$$B_{11} = (l_8 \cos \gamma_2 - l_9 \lambda \cos \gamma_2 \cos \alpha_1 + l_9 \lambda \sin \gamma_2 \sin \alpha_1) \quad (5.78)$$

$$B_{12} = (-l_8 \sin \gamma_2 + l_9 \lambda \sin \gamma_2 \cos \alpha_1 + l_9 \lambda \cos \gamma_2 \sin \alpha_1) \quad (5.79)$$

On développe les expressions pour $\sin \Delta\phi$ et $\cos \Delta\phi$ à partir de la Figure 5.32. On obtient

$$\sin \Delta\phi = \frac{l_8 l_9 \sin \alpha_1 (\lambda - 1)}{l_{13}^2 \beta} \quad (5.80)$$

$$\cos \Delta\phi = \frac{l_{13}^2 \beta^2 + l_{13}^2 - l_9^2 (\lambda - 1)^2}{2l_{13}^2 \beta} \quad (5.81)$$

où on a

$$l_{13} = \sqrt{l_8^2 + l_9^2 - 2l_8 l_9 \cos \alpha_1} \quad (5.82)$$

$$l'_{13} = \sqrt{l_8^2 + l_9^2 \lambda^2 - 2l_8 l_9 \lambda \cos \alpha_1} = l_{13} \beta \quad (5.83)$$

On substitue ces expressions dans l'équation (5.77) et on obtient

$$B_1 = \frac{2l_8^2 - 2l_8 l_9 \lambda \cos \alpha_1 - 2l_8 l_9 \cos \alpha_1 + 2l_9^2 \lambda}{2l_{13}'^2} B_{11} + \frac{2l_8 l_9 \lambda \sin \alpha_1 - 2l_8 l_9 \sin \alpha_1}{2l_{13}'^2} B_{12} \quad (5.84)$$

On substitue alors cette nouvelle expression dans l'équation (5.73) et on multiplie par le terme $2l_{13}'$ pour obtenir

$$2l_{13}'^2 A_1 = (2l_8^2 - 2l_8 l_9 \lambda \cos \alpha_1 - 2l_8 l_9 \cos \alpha_1 + 2l_9^2 \lambda) B_{11} + (2l_8 l_9 \lambda \sin \alpha_1 - 2l_8 l_9 \sin \alpha_1) B_{12} \quad (5.85)$$

On remplace l_{13}' par son expression de l'équation (5.83) et on développe les deux côtés de l'équation (5.85). On obtient alors une équation de la forme

$$C_1\lambda^2 + D_1\lambda + E_1 = C_2\lambda^2 + D_2\lambda + E_2 \quad (5.86)$$

où

$$C_1 = C_2 = 2l_8l_9^2 \cos \gamma_2 - 2l_9^3 \cos \alpha_1 \cos \gamma_2 + 2l_9^3 \sin \alpha_1 \sin \gamma_2 \quad (5.87)$$

$$D_1 = D_2 = 4l_8l_9^2 \cos \alpha_1^2 \cos \gamma_2 - 4l_8^2l_9 \cos \alpha_1 \cos \gamma_2 - 4l_8l_9^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \sin \gamma_2 \quad (5.88)$$

$$E_1 = E_2 = 2l_8^3 \cos \gamma_2 - 2l_8^2l_9 \cos \alpha_1 \cos \gamma_2 + 2l_8^2l_9 \sin \alpha_1 \sin \gamma_2 \quad (5.89)$$

On procède de la même façon pour démontrer l'égalité de l'équation (5.74). On obtient une équation de la forme

$$C_3\lambda^2 + D_3\lambda + E_3 = C_4\lambda^2 + D_4\lambda + E_4 \quad (5.90)$$

où

$$C_3 = C_4 = 2l_8l_9^2 \sin \gamma_2 - 2l_9^3 \cos \alpha_1 \sin \gamma_2 - 2l_9^3 \sin \alpha_1 \cos \gamma_2 \quad (5.91)$$

$$D_3 = D_4 = 4l_8l_9^2 \cos \alpha_1^2 \sin \gamma_2 - 4l_8^2l_9 \cos \alpha_1 \sin \gamma_2 + 4l_8l_9^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \gamma_2 \quad (5.92)$$

$$E_3 = E_4 = 2l_8^3 \sin \gamma_2 - 2l_8^2l_9 \cos \alpha_1 \sin \gamma_2 - 2l_8^2l_9 \sin \alpha_1 \cos \gamma_2 \quad (5.93)$$

On conclut donc que

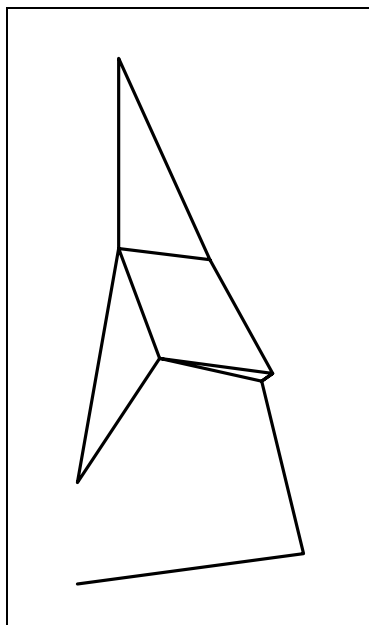
$$g_2 = g_2' \quad (5.94)$$

Les équations (5.51) et (5.94) sont vérifiées, ce qui prouve qu'il est possible, à partir de la topologie du mécanisme 3, de construire des mécanismes dont le comportement statique est identique.

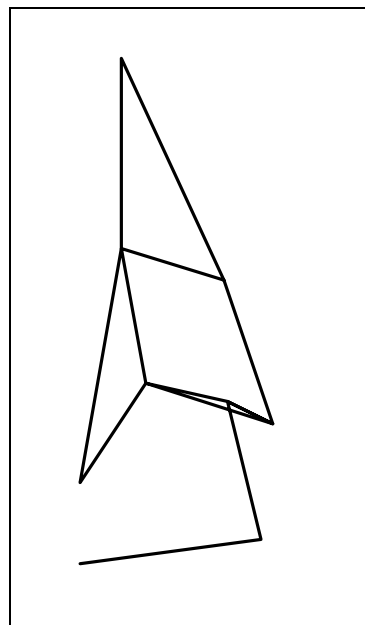
La procédure décrite plus haut qui permet de produire ces mécanismes équivalents est appliquée au mécanisme de la Figure 5.33(a). Les paramètres géométriques de ce dernier sont

$$\begin{aligned} l_1 = 0.072 \text{ m}, l_2 = 0.056 \text{ m}, l_3 = 0.033 \text{ m}, l_4 = 0.036 \text{ m}, l_5 = 0.041 \text{ m}, l_6 = 0.029 \text{ m}, \\ l_7 = 0.030 \text{ m}, l_8 = 0.075 \text{ m}, l_9 = 0.047 \text{ m}, l_{11} = -0.032 \text{ m}, l_{12} = 0.000 \text{ m}, \alpha_1 = 23.5^\circ, \\ \alpha_2 = 5^\circ, \alpha_3 = 97^\circ \end{aligned}$$

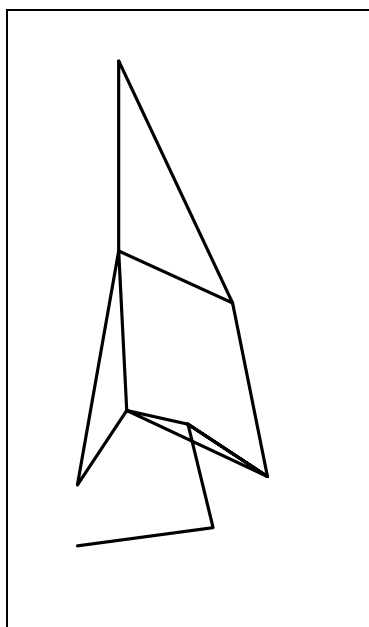
On applique des facteurs λ de 0.8, 0.6 et 0.4 qui donnent respectivement les mécanismes présentés à la Figure 5.33 en (b), (c) et (d). Pour toutes configurations, ces quatre



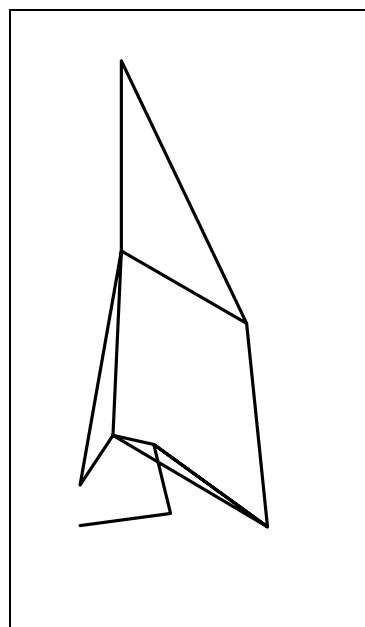
(a) Mécanisme de base.



(b) Mécanisme homologue 1
($\lambda = 0.8$).



(c) Mécanisme homologue 2
($\lambda = 0.6$).



(d) Mécanisme homologue 3
($\lambda = 0.4$).

Figure 5.33: Génération de mécanismes équivalents.

mécanismes génèrent exactement les mêmes forces proximale et distale pour un effort donné à l'actionneur. Seuls les efforts internes ne sont pas les mêmes. En effet, on voit que lorsque la première boucle rétrécit (Figure 5.31), la longueur du bras de levier l_1 diminue ($l'_1 = \lambda l_1$), ce qui fait que pour le même couple généré à l'actionneur, la valeur de l'effort dans la membrure 1 (nommée f_1 à la Figure 4.33) est augmentée ($f'_1 = f_1/\lambda$). Puisque la longueur l_3 est aussi réduite d'un facteur λ , le moment généré par f'_1 sur la membrure 3 demeure le même. La variation des efforts dans la deuxième boucle se fait similairement via l'application du facteur β sur les longueurs et les forces.

La courbe de la Figure 5.34 présente l'ensemble des mécanismes équivalents présentés sous la forme des ratios $\frac{l_1}{l_5}$ correspondants à ces mécanismes. On y retrouve les quatre mécanismes de la Figure 5.34 respectivement identifiés par m_b (mécanisme de base), m_1 , m_2 et m_3 .

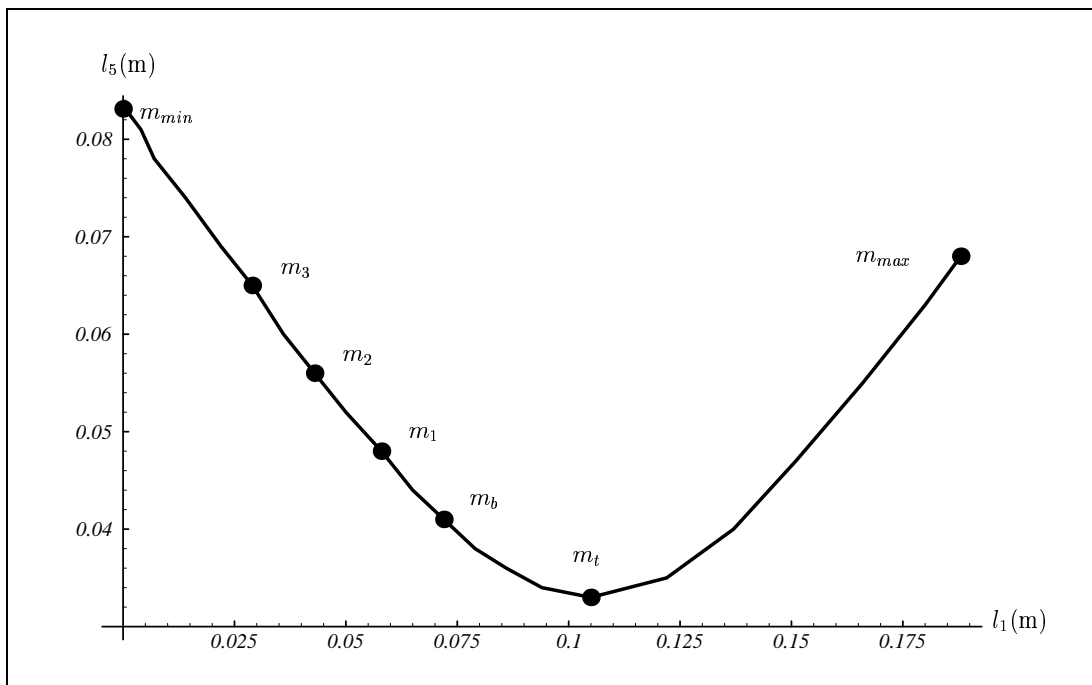


Figure 5.34: Longueurs l_1 et l_5 des mécanismes équivalents.

En observant la Figure 5.33, on peut observer les modifications de la géométrie du mécanisme original. Si l'angle ψ du mécanisme de base (Figure 5.32) a une valeur supérieure à 90° , ce qui est le cas ici, et qu'on applique un facteur λ inférieur à 1 à la première boucle, celle-ci rétrécira. La boucle supérieure, à l'inverse, grossira. La limite inférieure du facteur λ applicable est 0. On obtient alors la condition limite exprimée

par m_{\min} sur le graphique de la Figure 5.34. La valeur de λ est nulle, donc $l_1 = 0 m$. La valeur de β est trouvée à l'aide de l'équation (5.44). On pose $\lambda = 0$ dans cette équation et on obtient

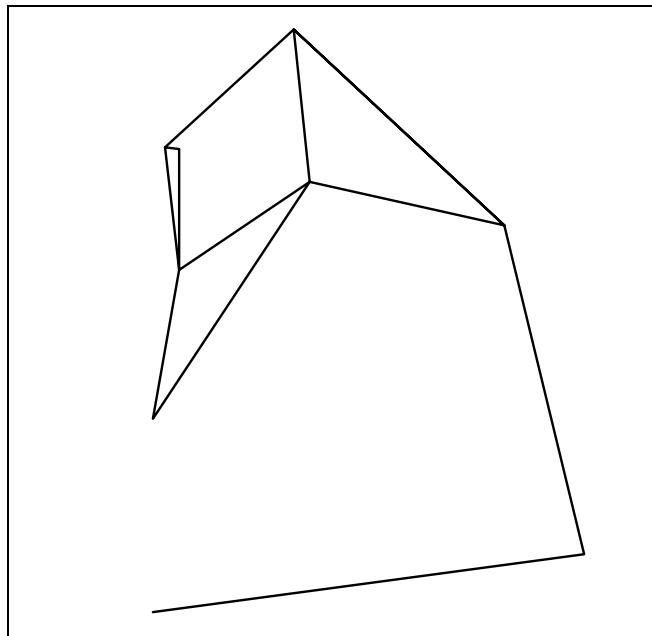
$$\beta_{\min} = \frac{\sqrt{l_8^2}}{\sqrt{l_8^2 + l_9^2 - 2l_8l_9 \cos \alpha_1}} \quad (5.95)$$

La valeur résultante pour le mécanisme de base étudié est $\beta_{\min} = 2.027$. On obtient donc $l_{5\min} = l_5\beta_{\min} = 0.08312 m$.

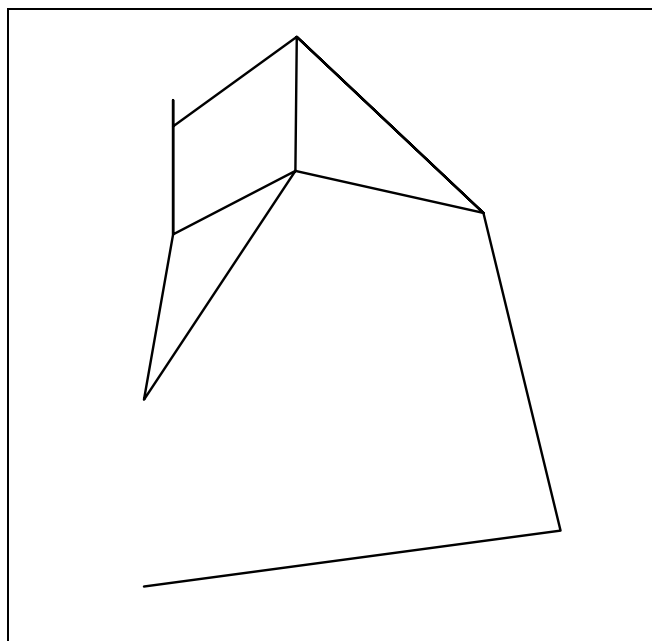
Toujours en considérant que l'angle ψ du mécanisme de base a une valeur supérieure à 90° , on applique maintenant un facteur λ supérieur à 1. La première boucle grossit alors que la deuxième rétrécit, jusqu'à ce que la valeur de l'angle ψ atteigne la valeur de 90° . À ce moment, les deux boucles grossissent si on continue d'augmenter la valeur du facteur λ . Cette transition est représentée par le minimum (m_t) de la courbe de la Figure 5.34. Une simple observation de la géométrie de la phalange proximale à la Figure 5.32 montre qu'au moment où l'angle ψ atteint une valeur inférieure à 90° , les longueurs l_9 et l_{13} augmentent de concert.

La limite supérieure de la valeur de λ est atteinte lorsque la valeur de $\Delta\phi$ est égale à la valeur de l'angle α_3 du mécanisme de base. En effet, pour des valeurs de λ plus élevées, la géométrie de la phalange distale ne permet plus de contact entre la surface de celle-ci et l'objet. Un exemple d'un tel mécanisme est illustré à la Figure 5.35(a). Pour le mécanisme de base, $\alpha_3 = 97^\circ$. La valeur maximale de λ est donc de 2.608 ($\Delta\phi = 97^\circ$). Le mécanisme correspondant est exprimé par m_{\max} sur la courbe de la Figure 5.34 et est illustré à la Figure 5.35(b).

On voit donc qu'il est possible de construire une infinité de mécanismes qui permettent d'accomplir exactement les mêmes tâches. L'avantage principal de la génération de mécanismes équivalents est la flexibilité qu'offre cette multiplicité de mécanismes au point de vue de l'encombrement, de la position de l'actionneur et des configurations pouvant être atteintes.



(a) Mécanisme homologue inadéquat ($\lambda = 3.0$).



(b) Mécanisme homologue pour $\lambda_{\max} = 2.608$.

Figure 5.35: Mécanismes homologues générés avec $\lambda > 1$.

5.4 Comparaison des mécanismes

Pour les trois topologies de mécanisme étudiées, on a réussi à générer des mécanismes permettant d'atteindre les objectifs visés. Une application particulière peut nécessiter l'utilisation d'une topologie plutôt qu'une autre. On tente donc, à titre d'exemple, d'émuler le comportement du mécanisme OPT1, résultat de l'optimisation faite à la section 5.3.1, à partir de mécanismes de topologies différentes.

La méthode utilisée pour l'émulation est semblable à celle utilisée lors de la génération de mécanismes stables. On visait alors des objectifs qui permettaient de générer un mécanisme capable d'effectuer des prises stables pour toutes les configurations. Pour ce qui est de l'émulation, les objectifs sont simplement les performances de OPT1 pour toutes les étapes de saisies et pour toutes les configurations. On génère un nombre suffisant d'équations qui permet d'obtenir un système d'équations surdéterminé qui est résolu à l'aide de l'algorithme de *Newton-Gauss*.

On utilise quinze équations pour définir les comportements que l'on tente d'imiter. Ce nombre est adéquat pour traiter les topologies des mécanismes 2 et 3. Toutes les configurations utilisées sont celles définies pour l'étude du mécanisme 1 à la section 4.3.1.2. Les caractéristiques de l'actionneur passif sont $f_{po} = 0.100 Nm$ et $k = 0.700 Nm/rad$.

On retrouve la valeur des objectifs visés au Tableau 5.19 (OPT1). Pour les trois configurations liées à la période de serrage de la prise ferme, on fixe des objectifs pour les forces proximale (g_2) et distale (g_1) pour la valeur maximale d'effort à l'actionneur. On obtient ainsi les six premières équations. Pour la période de contact de la prise ferme, on fixe des objectifs sur la force proximale pour les configurations ouverte (θ_{max}) et fermée (θ_{min}) de chacune des trois séries de configurations. On obtient alors six équations supplémentaires. Enfin, les trois dernières équations sont liées à des objectifs sur la valeur de la force distale (g_1) pour les trois configurations pertinentes à la prise de pincée.

Le premier algorithme est développé pour le mécanisme 2 (cinq barres, actionneur prismatique) pour lequel on utilise quatre variables, soit l_1 , l_4 , l_5 et α_1 . On utilise le mécanisme OPT2 (de la section 5.3.2) comme estimé initial à l'algorithme de *Newton-Gauss*. Les valeurs initiale et finale des variables sont présentées au Tableau 5.18. Les

	l_1 (m)	l_4 (m)	l_5 (m)	α_1 (deg.)
OPT2	0.0165	0.0214	0.0359	153.0
EMUL2	0.0201	0.0313	0.0392	147.9

Tableau 5.18: Valeurs des variables pour les mécanismes OPT2 et EMUL2.

performances du mécanisme obtenu (1 minutes et 2 secondes de temps-CPU, 4 objectifs intermédiaires (principe de continuation), 10 itérations au total), que l'on nomme EMUL2, sont présentées au Tableau 5.19. Le mécanisme est illustré à la Figure 5.36.

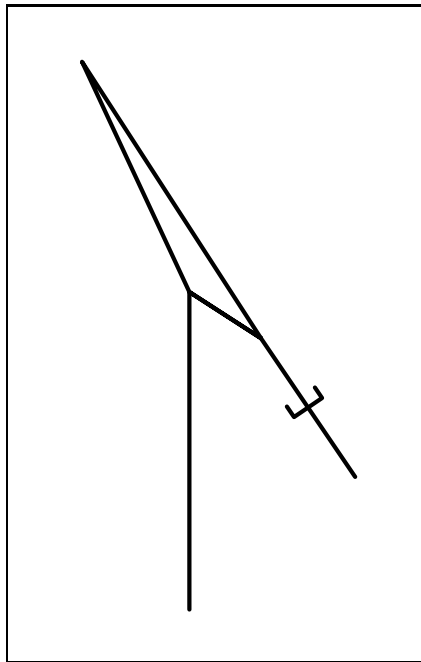


Figure 5.36: Mécanisme EMUL2.

À l'aide du Tableau 5.19, on voit que la topologie du mécanisme 2 permet de très bien approximer les comportements du mécanisme 1 et ce, pour tous les cas de saisie et pour toutes les configurations. La relation entre les mécanismes OPT1 et EMUL2 est basée sur la correspondance entre le couple qui doit être généré à l'actionneur rotoïde (mécanisme 1) et la force à l'actionneur prismatique qui le remplace (mécanisme 2). La valeur correspondante n'est en fait qu'une approximation.

La topologie du mécanisme 3 fait appel à un total de dix variables. Après quelques essais, la méthode la plus efficace s'avère être l'utilisation de deux groupes de variables

	$g_1(N)$ - Ferme			$g_2(N)$ - Ferme			$g_1(N)$ - Pincée		
	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pw1$	$pw2$	$pw3$	$pc1$	$pc2$	$pc3$
OPT1	125.30	159.46	174.30	94.44	91.59	167.76	150.64	149.85	149.08
EMUL2	128.51	168.90	175.16	100.07	90.47	160.08	138.91	146.76	151.08
EMUL3	122.65	156.65	177.29	98.05	92.35	165.62	151.42	150.42	149.46

	$g_2(\theta_{\max})(N)$ - Contact			$g_2(\theta_{\min})(N)$ - Contact		
	$co1$	$co2$	$co3$	$co1$	$co2$	$co3$
OPT1	13.65	13.19	12.98	56.60	55.25	57.25
EMUL2	17.00	15.48	11.64	68.88	70.69	66.61
EMUL3	14.38	14.42	14.45	58.45	58.45	58.44

Tableau 5.19: Résultats des émulations.

soumis à tour de rôle au même algorithme. Les deux vecteurs variables, qui ont déjà été définis dans le cadre de l'optimisation du mécanisme 3, sont

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}^T \quad (5.96)$$

$$\mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_9 & l_{11} \end{bmatrix}^T \quad (5.97)$$

On soumet donc à l'algorithme un estimé initial du vecteur \mathbf{x}_a . Les valeurs utilisées pour cette estimé initial proviennent du mécanisme OPT33 développé à la section 5.3.3. On obtient un nouveau mécanisme qui sert d'estimé initial à l'algorithme pour lequel le vecteur variables est maintenant \mathbf{x}_b . On utilise l'algorithme en alternant les vecteurs variables jusqu'à ce que l'erreur sur la fonction définie par les quinze équations objectifs cesse de décroître. On a donc utilisé la séquence suivante: \mathbf{x}_a , \mathbf{x}_b , \mathbf{x}_a et \mathbf{x}_b . Les résultats obtenus sont présentés au Tableau 5.20. Les performances de ce mécanisme, que l'on nomme EMUL3 sont présentées au Tableau 5.19. On obtient un mécanisme dont les performances se rapprochent de façon étonnante du mécanisme OPT1 que l'on tente d'émuler.

Les mécanismes OPT1 et EMUL3 sont présentés à la Figure 5.37. On y note un phénomène très intéressant. En effet, on voit que la géométrie du mécanisme EMUL3 fait en sorte que sa topologie se rapproche jusqu'à un certain point de celle du mécanisme OPT1. Les Figures 3.3 et 3.7 permettent de comparer les deux topologies. Avec des longueurs l_9 et l_{11} près de zéro, on peut associer les membrures 3, 4, 5 et

	$l_2(\text{m})$	$l_3(\text{m})$	$l_4(\text{m})$	$l_5(\text{m})$	$l_6(\text{m})$
OPT33	0.0545	0.0251	0.0327	0.0373	0.0225
EMUL3	0.0758	0.0345	0.0659	0.0309	0.0146

	$l_9(\text{m})$	$l_{11}(\text{m})$	$\alpha_1(\text{deg.})$	$\alpha_2(\text{deg.})$	$\alpha_3(\text{deg.})$
OPT33	0.0302	-0.0171	27.85	-3.49	113.89
EMUL3	-0.0081	-0.0022	32.25	18.39	127.48

Tableau 5.20: Valeurs des variables pour les différents mécanismes.

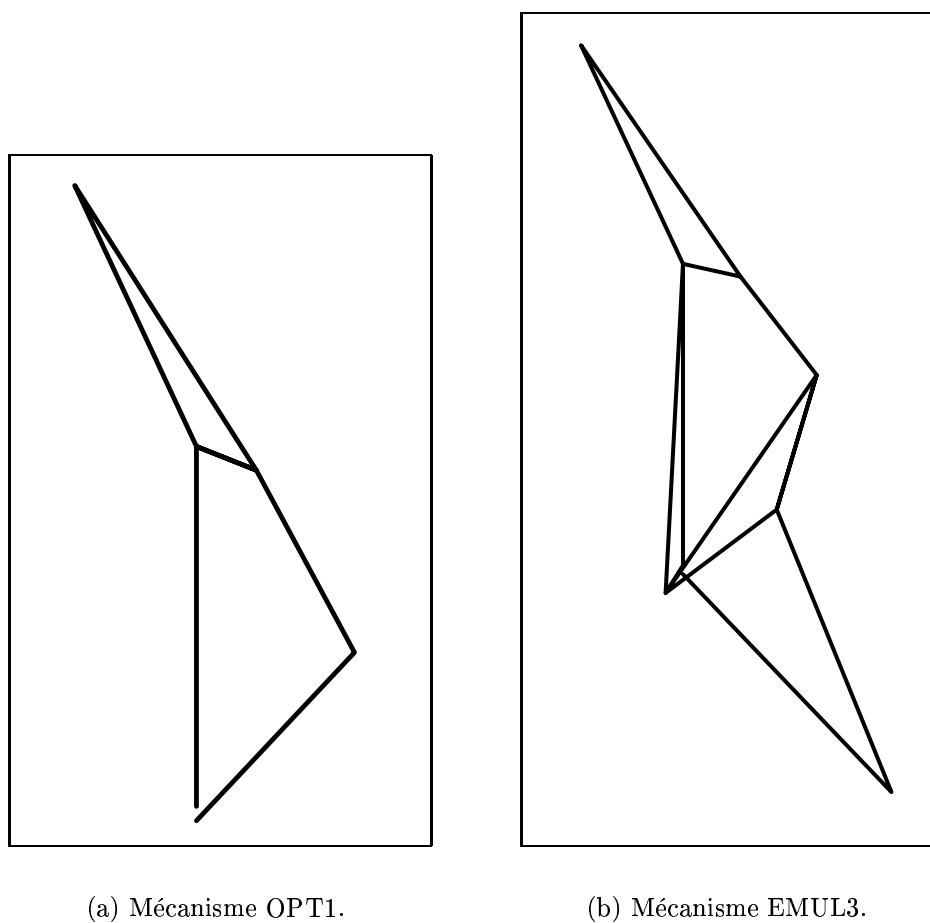


Figure 5.37: Comparaison des mécanismes OPT1 et EMUL3.

6 du mécanisme EMUL3 respectivement aux membrures 1, 2, 3 et 4 du mécanisme OPT1. On obtient donc un mécanisme à sept barres dont les mouvements, en changement de configuration, s'approchent beaucoup d'un mécanisme à cinq barres. Le côté

pratique de la géométrie de EMUL3 laisse par contre à désirer. En effet, la surface de contact entre la phalange proximale et l'objet n'est pas celle désirée dû à une valeur de l_9 négative. Il est toutefois intéressant de voir que l'algorithme converge vers un mécanisme plus simple qui présente les mêmes performances.

Il est donc possible de construire des mécanismes de topologies différentes dont les performances sont assez proches pour pouvoir offrir de la flexibilité au niveau du choix du mécanisme en fonction de l'application visée.

5.5 Conclusion sur l'optimisation

Dans ce chapitre, on a démontré que l'utilisation de l'algorithme de *décomposition orthogonale* pour le problème d'optimisation de mécanismes sous-actionnés est adéquate. On doit définir de façon systématique la fonction objectif à laquelle est soumise une série de contraintes, définies de façon tout aussi minutieuse. Le côté intuitif du design permet de faire les ajustements nécessaires pour favoriser la convergence de l'algorithme vers une solution satisfaisante. On note qu'il a été observé que les caractéristiques de l'actionneur passif ont une influence non-négligeable sur les performances des mécanismes. Puisque ces caractéristiques dépendent de l'utilisation du mécanisme et du poids des membrures (considérations dynamiques), on doit porter une attention particulière aux actionneurs passifs afin de ne pas imposer des caractéristiques limitatives.

Trois topologies différentes ont été étudiées et pour chacune d'elles, un mécanisme performant a été développé. La topologie du mécanisme 3 a la particularité de permettre la génération d'une infinité de mécanismes de géométries différentes ayant le même comportement statique. Enfin, il est démontré qu'il est possible d'obtenir une famille de mécanismes de topologies différentes qui ont un comportement statique similaire.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

6.1 Contributions de la thèse

La main humaine permet d'accomplir des tâches de préhension et de manipulation extrêmement complexes. Plusieurs prototypes de mains articulées anthropomorphes ont été développés, mais un des obstacles majeurs rencontrés est le grand nombre d'actionneurs nécessaires au mouvement des différents degrés de liberté. Les mécanismes sous-actionnés, dans lesquels on retrouve moins d'actionneurs que de degrés de liberté, permettent de construire des préhenseurs plus compacts qui peuvent accomplir des tâches de préhension complexes. L'élimination de certains actionneurs et leur remplacement par des éléments passifs donnent au mécanisme résultant la propriété d'adaptabilité de forme qui caractérise les mécanismes sous-actionnés.

Une première contribution de cette thèse est le développement d'un modèle général d'analyse des mécanismes sous-actionnés appliqué aux préhenseurs. Le modèle permet de modéliser des mécanismes plans et spatiaux à n degrés de liberté. Il permet

d'exprimer les vitesses cartésiennes des points de contact entre les phalanges et l'objet en fonction des variables articulaires actionnées. On peut par la suite développer le modèle statique qui permet d'exprimer les efforts sur les phalanges en fonction des efforts générés aux actionneurs et aux éléments passifs.

Le modèle a été appliqué à cinq mécanismes plans de topologie différente. Les mécanismes 1, 2 et 3 sont modélisés au Chapitre 3 tandis que les mécanismes 4 et 5 sont modélisés à l'Annexe A.

Une seconde contribution est l'identification des différents cas de saisie pour lesquels une attention particulière doit être apportée. En effet, les étapes de contact et de serrage de la prise ferme et l'étape de serrage de la prise de pincée présentent des risques d'instabilité liés à l'utilisation de mécanismes sous-actionnés pour la saisie d'objets.

Trois critères de stabilité ont été développés et appliqués au design de préhenseurs. Le premier critère s'applique à la phase de contact de la prise ferme et dicte la minimisation de la valeur de l'effort proximal durant toute la période de contact. On minimise ainsi les risques d'éjection de l'objet et avec une stratégie de saisie adéquate (choix des configurations pertinentes à cette étape de saisie), on élimine complètement les risques d'éjection de l'objet. Le deuxième critère de stabilité développé s'applique à l'étape de serrage de la prise ferme. Afin d'éviter tout mouvement des phalanges pendant cette étape de saisie, la valeur de la force proximale doit demeurer positive. En effet, si cette condition n'est pas respectée, on observe un mouvement de la phalange proximale qui s'éloigne alors de l'objet à saisir. Le troisième critère de stabilité développé s'applique à la prise de pincée. La prise de pincée est effectuée alors que la phalange distale est en pleine extension, reposant alors contre une butée mécanique située sur la phalange proximale. Le *point critique* est défini comme étant le point d'application de la force sur la phalange distale, alors que le doigt est en pleine extension, pour lequel la valeur de l'effort sur la butée mécanique est nulle. Toutes forces appliquées plus loin de la liaison distale que le *point critique* génèrera une prise stable, la valeur de l'effort sur la butée mécanique étant positive. Une force appliquée entre le *point critique* et la liaison distale génèrera un mouvement relatif entre les deux phalanges et il y aura possiblement perte de l'objet.

Dans une phase d'optimisation préliminaire, une méthode permettant d'obtenir

des mécanismes stables a été développée. Cette méthode s'appuie sur l'algorithme de *Newton-Gauss* et permet de générer des mécanismes qui servent d'estimés initiaux pour l'optimisation de mécanismes.

Un algorithme d'optimisation a été développé, basé sur l'algorithme de *décomposition orthogonale*. Ce dernier est notamment utilisé pour la résolution du problème géométrique inverse associé aux manipulateurs redondants. Suite au développement d'un algorithme dérivé, on conclut que l'application de l'algorithme de *décomposition orthogonale* est pertinente au problème d'optimisation de mécanismes sous-actionnés. L'algorithme permet d'imposer des contraintes liées à la stabilité des prises et de minimiser un indice de performance lié aux caractéristiques du mécanisme nécessaires à la réalisation des tâches visées. Pour les topologies associées aux mécanismes 1, 2 et 3, on obtient d'excellents résultats, soit des mécanismes performants par rapport aux critères imposés.

Un théorème a été développé concernant les mécanismes de topologie associée au mécanisme 3. Il a en effet été prouvé qu'il est possible de générer une infinité de mécanismes de cette topologie ayant exactement le même comportement statique. Cette caractéristique permet le développement de mécanismes de géométries variées offrant diverses possibilités face à des contraintes liées à l'encombrement.

Enfin, il a été démontré que des mécanismes de topologies diverses peuvent avoir un comportement très similaire, permettant encore plus de latitude face aux exigences des tâches visées.

Certains résultats présentés dans cette thèse se retrouvent dans des articles publiés (Montambault et Gosselin 1994; 1996).

6.2 Développements futurs

La prochaine étape du projet *Analyse et optimisation de préhenseurs mécaniques sous-actionnés* pourrait être l'application du modèle général à de nouvelles topologies. Le modèle pourrait être appliqué à des mécanismes spatiaux, qui représentent des cas plus réalistes de préhenseurs utilisables en industrie. De plus, le modèle général pourrait être modifié de façon à pouvoir s'appliquer aux mécanismes à tendons, qui se retrouvent

dans la majorité des prototypes de mains articulées sous-actionnées développées jusqu'à présent. Il serait aussi intéressant, pour un mécanisme de topologie et géométrie fixes, de comparer les résultats obtenus en changeant l'emplacement des éléments passifs. Enfin, on pourrait utiliser les Jacobiennes développées à l'aide du modèle pour évaluer certains indices de performance (dextérité par exemple).

Un ajout intéressant au modèle serait les équations liées au phénomène de friction qui pourraient être implantées afin de simuler de façon plus réaliste la saisie d'objet. On pourrait aussi considérer l'aspect dynamique du préhenseur, aspect qui n'a pas été traité dans cette thèse. Enfin, on pourrait implanter des équations qui tiendraient compte de la rigidité des membrures et des liaisons.

Le modèle d'analyse développé dans cette thèse représente un outil de design très intéressant. Il est présentement implanté en langage *Mathematica* qui permet à l'utilisateur de modifier les différents paramètres du mécanisme étudié et de visualiser les résultats pendant l'exécution du programme. Il serait intéressant de pouvoir implanter ce modèle dans un logiciel utilisant une librairie graphique telle que *OpenInventor*. En effet, un outil de design puissant pourrait être développé, permettant à l'utilisateur de voir en temps réel l'influence de chacun des paramètres du mécanisme. On pourrait ainsi détecter l'interférence mécanique et afficher les performances statiques du mécanisme. On pourrait aussi y inclure une banque de topologies de mécanismes applicables au sous-actionnement qui faciliterait l'utilisation du logiciel.

De la même façon, on pourrait implanter l'algorithme d'optimisation afin de modifier facilement l'estimé initial, de visualiser ses performances (pour juger de sa qualité) et de suivre en temps réel l'évolution de l'algorithme (géométrie du mécanisme, comportements statiques, interférences mécaniques). L'utilisateur pourrait facilement modifier la fonction objectif, le vecteur contraintes et les indices de performances de l'algorithme.

Il est possible de modéliser les prototypes de mains articulées sous-actionnées existants et de comparer les résultats expérimentaux (si disponibles) aux résultats issus de l'analyse théorique et de la simulation maintenant possibles. Ces mécanismes peuvent être optimisés en fonction de critères précis et de nouveaux préhenseurs applicables à des tâches particulières peuvent être construits.

Enfin, toute la méthodologie développée dans cette thèse s'applique directement au

design de mains artificielles (prothèses). Il est possible de l'utiliser pour développer une prothèse compacte qui permet d'effectuer des tâches complexes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Anderson, k., et Angeles, J., 1989, 'Kinematic Inversion of Robotic Manipulators in the Presence of Redundancies', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 8, No. 6, pp. 80–97.
- [2] Ali, M.S., Kyriakopoulos, K.J., et Stephanou, H.E., 1993, 'The Kinematics of Anthrobot-2 Dextrous Hand', Proceedings of the *IEEE Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, pp. 705–710.
- [3] Angeles, J., Anderson, K., et Gosselin, C., 1990, 'Constrained Design Optimization Using Orthogonal Decomposition', *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, No. 2, pp. 255–256.
- [4] Angeles, J., 1985, 'On the Numerical Solution of the Inverse Kinematic Problem', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 2, pp. 21–37.
- [5] Angeles, J., and Rojas, A.A., 1987, 'Manipulator Inverse Kinematics via Condition Number Minimization and Continuation', *The International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 2, No. 2, pp. 61–69.
- [6] Arai, H., et Tachi, S., 1991, 'Position Control of a Manipulator with Passive Joints using Dynamic Coupling', *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7, No. 4, pp. 528–534.

- [7] Arai, H., Tanie, K., et Tachi, S., 1993, 'Dynamic Control of a Manipulator with Passive Joints in Operational Space', *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 1, pp. 85–93.
- [8] Bartholet, S.J., 1992, U.S. Patent Number 5,108,140.
- [9] Bekey, G.A., Tomovic, R., et Zeljkovic, I., 1990, 'Control Architecture for the Belgrad/USC Hand', in *Dextrous Robot Hands* (S.T. Venkataraman et T. Iberall eds.), Springer-Verlag, New-York, pp. 136–153.
- [10] Bonivento, S., Faldella, E., et Vassura, G., 1991, 'The University of Bologna Robotic Hand Project: Current State and Future Developments', *Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Robotics*, Pise, pp. 349–356.
- [11] Boissonnat, J.D., Faverjon, B., et Merlet, J.P., 1988, 'Techniques de la Robotique', Chapitre 9 (Mécanique de la Préhension), Hermès, Paris, Tome I, pp. 285–318.
- [12] Caldwell, D.G., et Lavest, B., 1991, 'A Multi-Degree of Freedom Hand Powered by Two Actuators', *Proceedings of the International Conference on Control*, pp. 57–62.
- [13] Chao, E.Y., Opgrande, J.D., et Axmear, F.E., 1976, 'Three-Dimensional Force Analysis of Finger Joints in Selected Isometric Hand Functions', *Journal of Biomechanics*, Vol. 9, pp. 387–396.
- [14] Chen, F.Y., 1982, 'Gripping Mechanisms for Industrial Robots: An Overview', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 17, No. 5, pp. 299–311.
- [15] Converse, A.O., 1970, 'Optimization', Holt, Rinhart and Winston Inc., 295 pages.
- [16] Crisman, J.D., Kanojia C., et Zeid I., 1996, 'GRASPAR: A Flexible, Easily Controllable Robotic Hand', *IEEE Robotics and Automation Magazine*, June, pp. 32–38.
- [17] Crowder, R.M., 1991, 'An Anthropomorphic Robotic End Effector', *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 7, pp. 253–268.
- [18] Crowder, R.M., et Whatley, D. R., 1989, 'Robotic Gripping Device Having Linkage Actuated Finger Sections', US Patent 4834443.

- [19] Cutkosky, M.R., 1985, 'Robotic Grasping and Fine Manipulation', Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [20] Cutkosky, M.R., 1989, 'On Grasp Choice, Grasp Models, and the Design of Hands for Manufacturing Tasks', *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 3, pp. 269–279.
- [21] Dario P., et Buttazzo G., 1987, 'An Anthropomorphic Robot Finger for Investigating Artificial Tactile Perception', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 6, No. 3, pp. 25–48.
- [22] De Sam Lazaro, A., 1990, 'Multifingered Gripping (Robotic Hands)', *Proceedings of Manufacturing International*, Atlanta, pp. 193–198.
- [23] Doll, T.J., et Schneebeli, H.J., 1988, 'The Karlsruhe Hand', the *2nd IFAC Symposium*, Karlsruhe, pp. 383–388.
- [24] Engler, C.D.Jr., et Groover, M.P., 1989, 'Design of an Anthropomorphic Electro-Mechanical Hand with Exoskeletal Control to Emulate Human Hand Dexterity', *Proceedings of the 1989 World Conference on Robotics Research*, pp. 41–59.
- [25] Erb, R.A., 1992, 'Hand with Conformable Grasp', US Patent 3080681.
- [26] Golub, G.H., et Van Loan, C.F., 1983, 'Matrix Computations', John Hopkins University Press, Baltimore, pp. 642.
- [27] Gosselin, C.M., 1992, 'Optimisation et conception d'une main articulée robuste pour manipulateur', Rapport technique pour l'IRSST, Université Laval, Québec.
- [28] Gosselin, C.M., 1996, 'Analysis and Synthesis of Underactuated Force Generating Mechanisms', *Proceedings of the 1996 ASME Design Automation Conference*, Irvine, Ca.
- [29] Gosselin, C.M., et Angeles, J., 1991, 'A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robotic Manipulators', *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 113, No. 3, pp. 220–226.
- [30] Gosselin, C.M., Montambault, S., et Gosselin, C.J., 1993, 'MANUS COLOBI: Preliminary Results on the Design of a Mechanical Hand for Industrial Applications',

Proceedings of the *1993 ASME Design Automation Conference*, Albuquerque, New Mexico.

- [31] Graham, D.F., 1993, 'Artificial Hand and Digit Therefor', US Patent 5200679.
- [32] Grupen, R.A., Henderson, T.C., et McCammon, I.D., 1989, 'A Survey of General Purpose Manipulation', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 8, No. 1, pp. 38–62.
- [33] Guo G., Gruver, W.A., et Qian, X., 1992a, 'A New Design for a Dexterous Robotic Hand Mechanism', *IEEE Control Systems*, August, pp. 35–38.
- [34] Guo G., Lee, T.T., Gruver, W.A., et Zhang, J., 1990, 'Design of a Planar Multi-jointed Prosthetic Finger Mechanism', Proceedings of the *21st ASME Mechanisms Conference*, DE-Vol. 26, pp. 165–170.
- [35] Guo, G., Qian, X., et Gruver, W.A., 1992b, 'A Single-DOF Multi-Function Prosthetic Hand Mechanism with an Automatically Variable Speed Transmission', *Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems*, Vol. 45, pp. 149–154.
- [36] Harary, F., 1969, 'Graph Theory', Addison-Wesley Publishing Company inc.
- [37] Hirose, S., et Umetami, Y., 1978, 'The Development of Soft Gripper for the Versatile Robot Hand', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 13, pp. 351–359.
- [38] Ichiro, k., 1982, 'Mechanical Hands, Illustrated', Survey Tokyo, 155 pages.
- [39] Itoh, H., 1975, 'Mechanical Hand', US Patent 3927424.
- [40] Jacobsen, S.C., Wood, J.E., Knutti, D.F., et Biggers, K.B., 1984, 'The Utah/ MIT Hand: Work in Progress', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 4, pp. 21–50.
- [41] Jacobsen, S.C., Iversen, E.K., Knutti, D.F., Johnson, R.T., et Biggers, K.B., 1986, 'Design of the Utah/MIT Dexterous Hand', Proceedings of the *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Fransisco, pp. 1520–1532.
- [42] Jacobsen, S.C., Smith, F.M., Iversen, E.K., et Backman, D.K., 1990, 'High Performance, High Dexterity, Force Reflective Teleoperator', *ANS winter meeting*, Washington.

- [43] Jacobsen, S.C., Smith, F.M., Backman, D.K., et Iversen, E.K., 1991, 'High Performance, High Dexterity, Force Reflective Teleoperator II', *ANS Topical meeting on Robotics and Remote Systems*, Albuquerque, New Mexico.
- [44] Jain, A., et Rodriguez, G., 1993, 'An Analysis of the Kinematics and Dynamics of Underactuated Manipulators', *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 4, pp. 411–422.
- [45] Jau, B.M., 1992, 'Man Equivalent Telepresence Through Four Fingered Human-Like Hand System', *Proceedings of the IEEE International Conferences on Robotics and Automation*, Nice, pp. 843–848.
- [46] Kaneko, M., et Hayashi, T., 1993, 'Standing-up Characteristic of Contact Force during Self-Posture Changing Motions', *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 202–208.
- [47] Kaneko, M., et Tanie, K., 1990, 'Contact Point Detection for Grasping of an Unknown Object Using Self-Posture Changeability (SPC)', *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 864–869.
- [48] Kerr, J., et Roth, B., 1986, 'Analysis of Multifingered Hands', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 4, pp. 3–17.
- [49] Kobayashi, H., 1985, 'Control and Geometrical Considerations for an Articulated Robot Hand', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 1, pp. 3–12.
- [50] Laliberté, T., et Gosselin, C.M., 1996, 'Simulation and Design of Two-Degree-of-Freedom Underactuated Mechanical Fingers', *Proceedings of the 1996 ASME Design Automation Conference*, Irvine, Ca.
- [51] Leaver, S.O., et McCarthy, J.M., 1987, 'The Design of Three Jointed Two-Degree-of-Freedom Robot Fingers', *Proceedings of the ASME Design Technology Conferences - The Design Automation Conference*, pp. 127–133.
- [52] Lee, S., 1990, 'Artificial Dexterous Hand', US Patent 4946380.
- [53] Legras, J., 1980, 'Algorithmes et Programmes d'Optimisation Non-Linéaires avec Contraintes', Éditions Masson, 188 pages.

- [54] Lessard, J., Lavallée, J., Girard, P., et McGee, J.-Y., 1992, 'Research and Developments in Telerobotics at Hydro-Québec for the Introduction of a Live Line Telemanipulation System: Study on the Use of a Stereoscopic Vision System', Rapport technique, IREQ-Hydro-Québec, Varennes, Québec.
- [55] Lian, D., Donath, M., et Peterson, S., 1983, 'A Three-Fingered, Articulated, Robotic Hand', *13th ISIR/Robots 7 Conference*, Chicago, Illinois.
- [56] Luenberger, D.G., 1984, 'Linear and Non-Linear Programming, Second Edition', Addison-Wesley Publishing Company, 491 pages.
- [57] Maciejewski, A.A., et Klein, C.A., 1989, 'The Singular Value Decomposition: Computation and Application to Robotics', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 8, No. 6, pp. 63–79.
- [58] Mason, M.T., et Salisbury Jr., J.K., 1985, 'Robot Hands and the Mechanics of Manipulation', The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [59] Melchiorri, C., et Vassura, G., 1992, 'Mechanical and Control Features of the University of Bologna Hand Version 2', Proceedings of the *1992 IEEE/RSU International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 187–193.
- [60] Mirza, k., Hanes, D.H., et Orin, D.E., 1995, 'Dynamic Simulation of Enveloping Power Grasps', Proceedings of the *1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 430–435.
- [61] Montambault, S. et Gosselin, C.M. , 1994, 'Conception Cinématique de Préhenseurs Sous-Actionnés', Comptes-Rendus du *12ième Colloque sur les Applications Techniques de la Mécanique*, Université McGill, Montréal, Québec, pp. 253–261.
- [62] Montambault, S. et Gosselin, C.M. , 1996, 'Kinematic Modeling of Underactuated Mechanical Grippers', Proceedings of the *1996 ASME Design Automation Conference*, Irvine, Ca.
- [63] Montambault, S., 1992, 'Conception d'une Main Articulée Robuste pour Manipulateur', Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec.

- [64] Montana, D.J., 1991, 'The Condition for Contact Grasp Stability', Proceedings of the *1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, pp. 412–417.
- [65] Mukherjee, R., et Chen, D., 1993, 'Control of Free Flying Underactuated Space Manipulators to Equilibrium Manifolds', *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, pp. 561–520.
- [66] Mukherjee, R., et Waldron, K.J., 1992, 'An Exact Optimization of Interaction Forces in Three-Fingered Manipulation', *Transaction of the ASME Journal of Mechanical Design*, March, Vol. 114, pp. 48–54.
- [67] Mullen, J.F., 1972, 'Mechanical Hand', US Patent 3694021.
- [68] Okada, T., 1979, 'Object-Handling System for Manual Industry', *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 9, No. 2, pp. 79–89.
- [69] Okada, T., 1982, 'Computer Control of Multijointed Finger System for Precise Object-Handling', *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 12, No. 3, pp. 289–299.
- [70] Okada, T., 1986, 'Optimization of Mechanisms for Force Generation by Using Pulleys and Spring', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, pp. 77–89.
- [71] Oomichi, T., et Okino, A., 1992, 'Study on Multi-Fingered Manipulation for Real Tasks', *Advanced Robotics*, Vol. 6, No. 1, pp. 127–140.
- [72] Ortega, J. M., and Rheinbodlt, W. C., 1970, 'Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables ', Academic Press, New York.
- [73] Pagé, J.M., 1994, 'Les Prothèses Articulaires des Membres Supérieurs, Deuxième Partie', *Le Clinicien*, février, pp. 161–175.
- [74] Papalambros, P.Y., et Wilde, D.J., 1988, 'Principles of Optimal Design, Modeling and Computation', Cambridge University Press, 416 pages.
- [75] Park, Y.C., et Starr, G.P., 1992, 'Grasp Synthesis of Polygonal Objects Using a Three-Fingered Robot Hand', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 3, pp. 163–184.

- [76] Phillips, C.G., 1986, 'Movements of the Hand', Liverpool University Press.
- [77] Press, W.H., Vetterling, W.T., Teukolsky S.A., et Flannery B.P., 1992, 'Numerical Recipes in C, the Art of Scientific Computing', Cambridge University Press, 994 pages.
- [78] Rakic, M., 1989, 'Multifingered Robot Hand with Selfadaptability', *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 5, No. 2/3, pp. 269–276.
- [79] Reynaerts, D., et Van Brussel, H., 1993, 'Two-Fingered Full Envelope Dextrous Manipulation', Proceedings of the *IEEE Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, pp. 436–441.
- [80] Rovetta, A., 1979, 'On Biomechanics of Human Hand Motion in Grasping: A Mechanical Model', *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 14, pp. 25–29.
- [81] Rovetta, A., 1981, 'On Functionality of a New Mechanical Hand', *Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, pp. 277–280.
- [82] Russell, H.T., Funda, J., Eldridge, B., Gomory, S., Gruben, K., LaRose, D., Talamini, M., Kavoussi, L., et Anderson, J., 1995, 'A Telerobotic Assistant for Laparoscopic Surgery', *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, Vol. 14, No. 3, pp. 279–287.
- [83] Saliba, M., et De Silva, C.W., 1991, 'An Innovative Robotic Gripper for Grasping and Handling Research', Proceedings of the *International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, pp. 975–979.
- [84] Salisbury, J.K., et Craig, J.J., 1982, 'Articulated Hands: Force Control and Kinematic Issues', *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 1, No. 1, pp. 4–17.
- [85] Shimojima, H., Yamamoto, K., et Kawakita, K., 1987, 'A Study of Grippers with Multiple Degrees of Mobility', *JSME International Journal*, Vol. 30, No. 201, pp. 515–522.
- [86] Shirkohdaie, H., et Soni, A.H., 1988, 'Manipulation and Simulation of Five-Finger Robot Hand with Coupled Joints', Proceedings of the *USA-Japan Symposium*

- on Flexible Automation Crossing Bridges: Advances in Flexible Automation and Robotics*, pp. 515–521.
- [87] Siegel, D.M., 1991, 'Finding the Pose of an Object in a Hand', Proceedings of the *1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, pp. 406–411.
- [88] Sinatra, R., et Angeles, J., 1995, 'A New Tool in the Teaching of Planar Mechanism and Machine Theory', Proceedings of the *Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Milan, Vol. 4, pp. 3181–3186.
- [89] Tomovic, R., et Boni, G., 1962, 'An Adaptive Artificial Hand', *IRE Transactions on Automatic Control*, pp. 3–10.
- [90] Tubiana, R., et Thomine, J.-M., 1990, 'La Main: Anatomie Fonctionnelle et Examen Clinique', Éditions Masson, Paris.
- [91] Ulrich, N., et Kumar, V., 1988, 'Grasping Using Fingers with Coupled Joints', Proceedings of the *1988 ASME, Trends and Developments in Mechanisms, Machines and Robotics*, Vol. 3., pp. 201–207.
- [92] Ulrich, N., Paul, R., et Bajcsy, R., 1988, 'A Medium Complexity Complaint End Effector', Proceedings of the *1988 IEEE Conference on Robotics and Automation*, pp. 434–436.
- [93] Venkataraman, S.T., et Iberall, T., 1990, 'Dextrous Robot hands', Springer-Verlag, New-York.
- [94] Vinet, R., 1990, 'Main Artificielle pour Amputés', Rapport technique, École Polytechnique de Montréal.
- [95] Zhang, J., Guo, G., et Gruver, W.A., 1992, 'Optimal Design of a Six-Bar Linkage for an Antropomorphic Three-Jointed Finger Mechanism', *Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems*, Vol. 45, pp. 299–304.

ANNEXE A

MODÉLISATION DE MÉCANISMES À 3 DEGRÉS DE LIBERTÉ

A.1 Mécanisme 4: 3 degrés de liberté (rotoïde, 8 barres)

Le mécanisme à trois degrés de liberté présenté à la Figure A.1 comporte un actionneur motorisé et deux actionneurs passifs. On retrouve un actionneur rotoïde en O_1 et un ressort en torsion ainsi qu'une butée mécanique en O_7 et en O_8 . Le point O_4 représente la liaison entre les membrures 3 et 7 (Figure A.2(a)) tandis que O_8 représente la liaison entre les membrures 6 et 7. Les variables articulaires sont θ_1 à θ_9 . On écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.1})$$

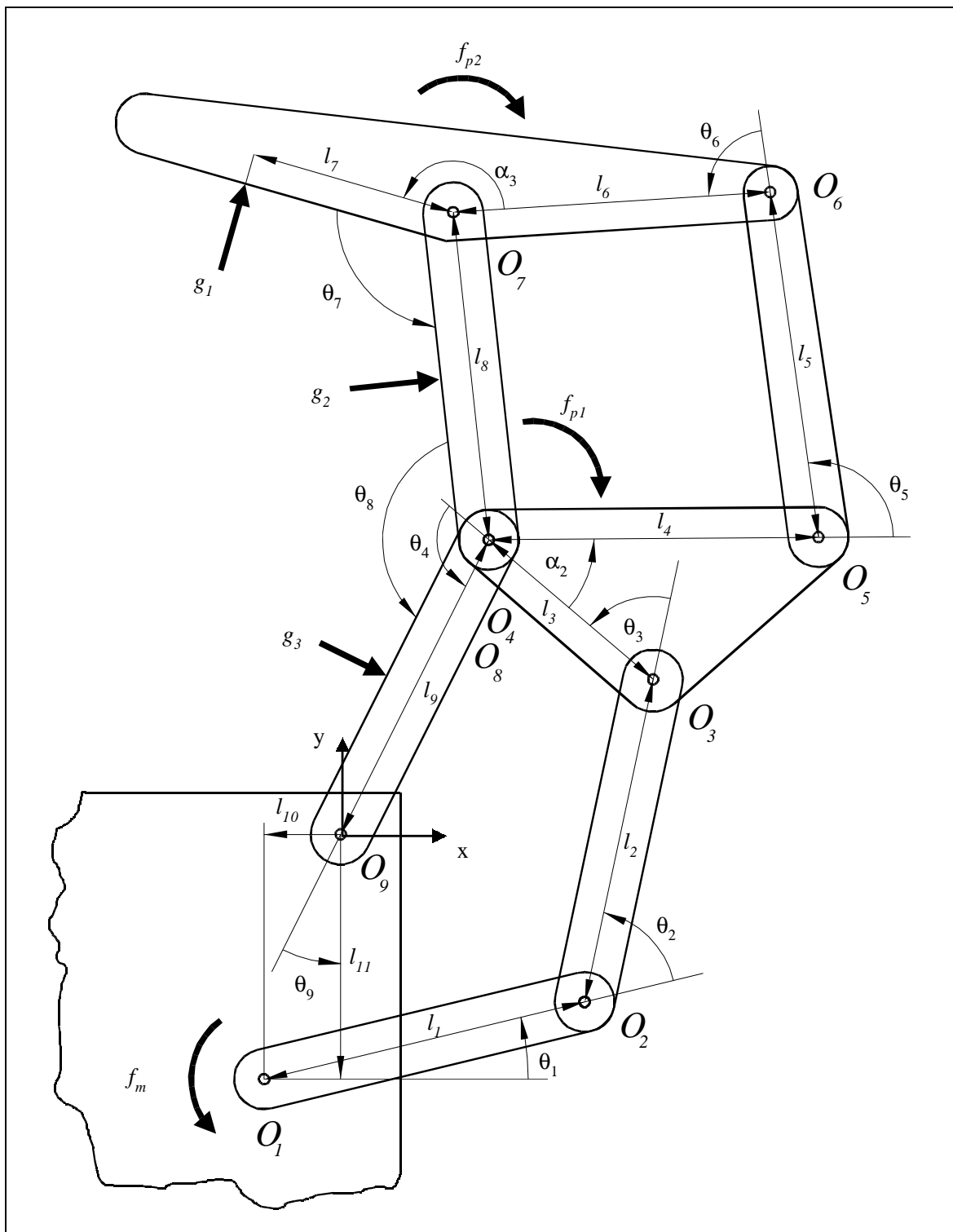


Figure A.1: Paramétrisation du mécanisme 4.

où le vecteur \mathbf{v} est défini comme suit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

puisque le préhenseur comprend trois phalanges. Le vecteur des vitesses articulaires est défini par

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ est le vecteur des vitesses articulaires des liaisons actionnées qui contient la vitesse articulaire de la liaison motorisée, $\dot{\theta}_m$, et le vecteur vitesse des liaisons actionnées passivement, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_p$,

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_7 \\ \dot{\theta}_8 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

et où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ est le vecteur vitesse des articulations dépendantes

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_9 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.5})$$

Des équations (A.1) et (A.2), on tire trois équations qui sont

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{J}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.8})$$

On détermine maintenant ces trois matrices \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 et \mathbf{J}_3 . L'équation (A.6) permet de modéliser la chaîne arborescente qui a comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_1 . On emprunte donc le chemin passant par les liaisons O_1 , O_2 , O_3 , O_5 et O_6 . La matrice Jacobienne associée à cette chaîne cinématique, tirée de l'équation (3.7) aura la forme suivante:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{21} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{51} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{61} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

On remarque que les liaisons O_4 , O_7 , O_8 et O_9 n'interviennent pas dans cette chaîne. On trouve donc les vecteurs \mathbf{r}_{j1} qui relient le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont

$$\mathbf{r}_{61} = \begin{bmatrix} r_{61x} \\ r_{61y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} + l_7 c_{1a3} \\ l_6 c_{16} + l_7 c_{1a3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{r}_{51} = \begin{bmatrix} r_{51x} \\ r_{51y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 c_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{61} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{r}_{31} = \begin{bmatrix} r_{31x} \\ r_{31y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{51} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{r}_{21} = \begin{bmatrix} r_{21x} \\ r_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 c_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{31} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{bmatrix} r_{11x} \\ r_{11y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{21} \quad (\text{A.14})$$

où on définit

$$c_1 = \cos \theta_1 \quad (\text{A.15})$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.16})$$

$$c_{13} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (\text{A.17})$$

$$c_{14} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (\text{A.18})$$

$$c_{1a2} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2) \quad (\text{A.19})$$

$$c_{15} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5) \quad (\text{A.20})$$

$$c_{16} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6) \quad (\text{A.21})$$

$$c_{1a3} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_3) \quad (\text{A.22})$$

$$c_{17} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_3 + \theta_7) \quad (\text{A.23})$$

$$c_{18} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_3 + \theta_7 + \theta_8) \quad (\text{A.24})$$

et où à chaque c_i correspond un s_i qui représente le sinus du même angle. On obtient donc

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}r_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{21} & \mathbf{E}r_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{51} & \mathbf{E}r_{61} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Après multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la première boucle

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 & 0 & -r_{21y} & -r_{31y} & 0 & -r_{51y} & -r_{61y} & 0 \\ r_{11x} & 0 & 0 & r_{21x} & r_{31x} & 0 & r_{51x} & r_{61x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

On peut exprimer cette Jacobienne sous la forme présentée à l'équation (3.10) et on obtient

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 & 0 \\ r_{11x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} -r_{21y} & -r_{31y} & 0 & -r_{51y} & -r_{61y} & 0 \\ r_{21x} & r_{31x} & 0 & r_{51x} & r_{61x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

De la même façon, on détermine la Jacobienne de la deuxième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme point terminal le point d'application de la force g_2 . On emprunte donc le chemin passant par les liaisons O_1, O_2, O_3, O_5, O_6 et O_7 . On obtient alors

$$\mathbf{J}_2 = \left[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{12} \quad \mathbf{e}_7 \times \mathbf{r}_{72} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{22} \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{32} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{52} \quad \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{62} \quad \mathbf{0} \right] \quad (\text{A.29})$$

qui ne fait pas intervenir O_4, O_8 et O_9 . On obtient les nouvelles valeurs de \mathbf{r}_{j2} qui sont

$$\mathbf{r}_{72} = \begin{bmatrix} r_{72x} \\ r_{72y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_8}{2} c_{17} \\ \frac{l_8}{2} s_{17} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{r}_{62} = \begin{bmatrix} r_{62x} \\ r_{62y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} \\ l_6 c_{16} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{72} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{r}_{52} = \begin{bmatrix} r_{52x} \\ r_{52y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 c_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{62} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{r}_{32} = \begin{bmatrix} r_{32x} \\ r_{32y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{52} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{r}_{22} = \begin{bmatrix} r_{22x} \\ r_{22y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 c_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{32} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} r_{12x} \\ r_{12y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{22} \quad (\text{A.35})$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{72y} & 0 & -r_{22y} & -r_{32y} & 0 & -r_{52y} & -r_{62y} & 0 \\ r_{12x} & r_{72x} & 0 & r_{22x} & r_{32x} & 0 & r_{52x} & r_{62x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Sous la forme de l'équation (3.10) on obtient

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{72y} & 0 \\ r_{12x} & r_{72x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} -r_{22y} & -r_{32y} & 0 & -r_{52y} & -r_{62y} & 0 \\ r_{22x} & r_{32x} & 0 & r_{52x} & r_{62x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Enfin, on détermine la Jacobienne de la troisième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_3 . On emprunte le chemin passant par les liaisons $O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_7$ et O_8 . On obtient alors

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{13} & \mathbf{e}_7 \times \mathbf{r}_{73} & \mathbf{e}_7 \times \mathbf{r}_{83} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{23} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{53} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{63} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

qui ne fait pas intervenir O_4 et O_9 . On obtient les nouvelles valeurs de \mathbf{r}_{j3} qui sont:

$$\mathbf{r}_{83} = \begin{bmatrix} r_{83x} \\ r_{83y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_8}{2} c_{18} \\ \frac{l_8}{2} s_{18} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{r}_{73} = \begin{bmatrix} r_{73x} \\ r_{73y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{17} \\ l_8 s_{17} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{83} \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{r}_{63} = \begin{bmatrix} r_{63x} \\ r_{63y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} \\ l_6 c_{16} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{73} \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{r}_{53} = \begin{bmatrix} r_{53x} \\ r_{53y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 c_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{63} \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{r}_{33} = \begin{bmatrix} r_{33x} \\ r_{33y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{53} \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{r}_{23} = \begin{bmatrix} r_{23x} \\ r_{23y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 c_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{33} \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{r}_{13} = \begin{bmatrix} r_{13x} \\ r_{13y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{23} \quad (\text{A.46})$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} -r_{13y} & -r_{73y} & -r_{83y} & -r_{23y} & -r_{33y} & 0 & -r_{53y} & -r_{63y} & 0 \\ r_{13x} & r_{73x} & r_{83x} & r_{23x} & r_{33x} & 0 & r_{53x} & r_{63x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Sous la forme de l'équation (3.10) on obtient

$$\mathbf{J}_{a3} = \begin{bmatrix} -r_{13y} & -r_{73y} & -r_{83y} \\ r_{13x} & r_{73x} & r_{83x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{J}_{d3} = \begin{bmatrix} -r_{23y} & -r_{33y} & 0 & -r_{53y} & -r_{63y} & 0 \\ r_{23x} & r_{33x} & 0 & r_{53x} & r_{63x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

On note que pour la génération des Jacobiennes \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 et \mathbf{J}_3 , plusieurs autres chemins auraient pu être empruntés.

Maintenant que les trois phalanges sont traitées, on trace le graphe associé à la chaîne cinématique globale et on trouve deux boucles indépendantes. Comme on peut le voir à la Figure A.2, les deux boucles ont comme origine O_1 et comme organe terminal le point O_9 . La première emprunte le chemin O_1, O_2, O_3, O_4, O_9 et la deuxième emprunte le chemin $O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_7, O_8$ et O_9 qui représentent les contraintes d'assemblage du mécanisme. On note que pour la deuxième boucle, on aurait pu emprunter le chemin O_5, O_6, O_7, O_8 et O_4 . On inclut la sous-matrice \mathbf{A} dans les Jacobiennes \mathbf{J}_4 et \mathbf{J}_5 qui

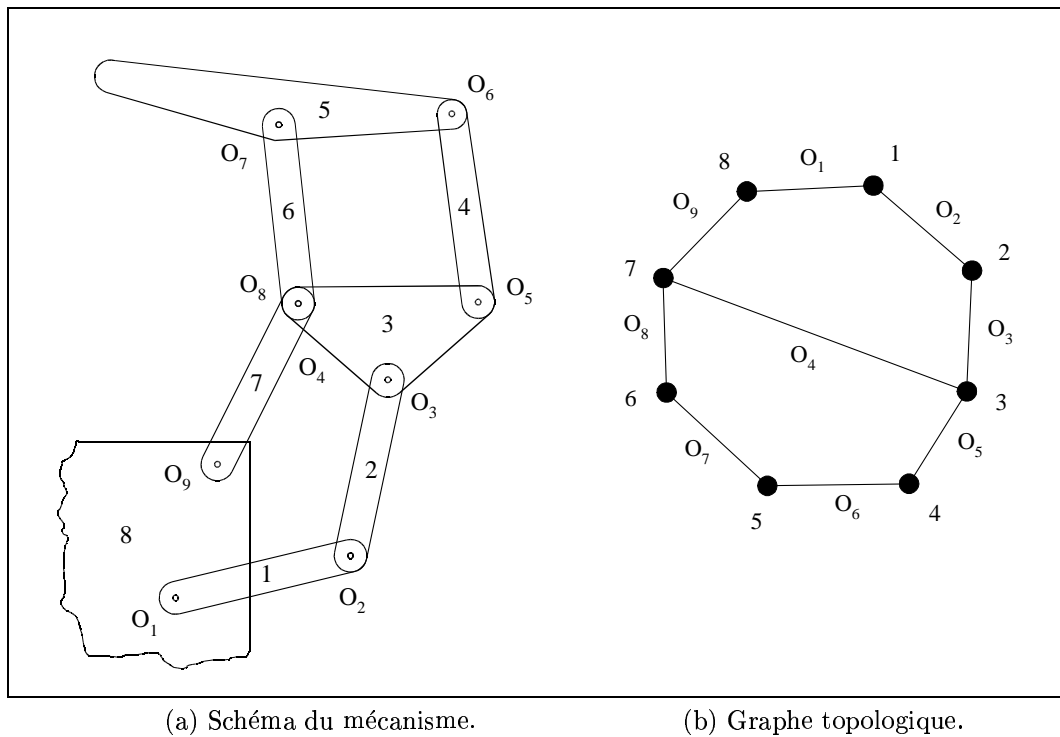


Figure A.2: Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 4).

modélisent les chaînes cinématiques fermées. En effet, on sait que la vitesse angulaire de la base par rapport à l'organe terminal est nulle pour les deux boucles. On a donc

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{E}r_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{24} & \mathbf{E}r_{34} & \mathbf{E}r_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j4} comme suit:

$$\mathbf{r}_{44} = \begin{bmatrix} r_{44x} \\ r_{44y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{14} \\ l_9 s_{14} \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

$$\mathbf{r}_{34} = \begin{bmatrix} r_{34x} \\ r_{34y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} \\ l_3 s_{13} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{44} \quad (\text{A.52})$$

$$\mathbf{r}_{24} = \begin{bmatrix} r_{24x} \\ r_{24y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{34} \quad (\text{A.53})$$

$$\mathbf{r}_{14} = \begin{bmatrix} r_{14x} \\ r_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{24} \quad (\text{A.54})$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (A.50), on obtient

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -r_{14y} & 0 & 0 & -r_{24y} & -r_{34y} & -r_{44y} & 0 & 0 & 0 \\ r_{14x} & 0 & 0 & r_{24x} & r_{34x} & r_{44x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

On a

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a4} & \mathbf{K}_{d4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

où

$$\mathbf{K}_{a4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -r_{14y} & 0 & 0 \\ r_{14x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{K}_{d4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -r_{24y} & -r_{34y} & -r_{44y} & 0 & 0 & 0 \\ r_{24x} & r_{34x} & r_{44x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

De la même façon, on a

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{15} & \mathbf{Er}_{75} & \mathbf{Er}_{85} & \mathbf{Er}_{25} & \mathbf{Er}_{35} & \mathbf{0} & \mathbf{Er}_{55} & \mathbf{Er}_{65} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j5} comme suit:

$$\mathbf{r}_{85} = \begin{bmatrix} r_{85x} \\ r_{85y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{18} \\ l_9 s_{18} \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{r}_{75} = \begin{bmatrix} r_{75x} \\ r_{75y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{17} \\ l_8 s_{17} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{85} \quad (\text{A.61})$$

$$\mathbf{r}_{65} = \begin{bmatrix} r_{65x} \\ r_{65y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} \\ l_6 s_{16} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{75} \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbf{r}_{55} = \begin{bmatrix} r_{55x} \\ r_{55y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{65} \quad (\text{A.63})$$

$$\mathbf{r}_{35} = \begin{bmatrix} r_{35x} \\ r_{35y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{55} \quad (\text{A.64})$$

$$\mathbf{r}_{25} = \begin{bmatrix} r_{25x} \\ r_{25y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{35} \quad (\text{A.65})$$

$$\mathbf{r}_{15} = \begin{bmatrix} r_{15x} \\ r_{15y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{25} \quad (\text{A.66})$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (A.59), on obtient

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r_{15y} & -r_{75y} & -r_{85y} & -r_{25y} & -r_{35y} & 0 & -r_{55y} & -r_{65y} & 0 \\ r_{15x} & r_{75x} & r_{85x} & r_{25x} & r_{35x} & 0 & r_{55x} & r_{65x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

On a

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a5} & \mathbf{K}_{d5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.68})$$

où

$$\mathbf{K}_{a5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -r_{15y} & -r_{75y} & -r_{85y} \\ r_{15x} & r_{75x} & r_{85x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{K}_{d5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r_{25y} & -r_{35y} & 0 & -r_{55y} & -r_{65y} & 0 \\ r_{25x} & r_{35x} & 0 & r_{55x} & r_{65x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.70})$$

L'étape suivante vise à exprimer les vitesses articulaires dépendantes en fonction des vitesses articulaires actionnées. À partir du modèle présenté à l'équation (3.17), on peut dire

$$\mathbf{K}_a \dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_d \dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad (\text{A.71})$$

où

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a4} \\ \mathbf{K}_{a5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d4} \\ \mathbf{K}_{d5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

Les vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ sont définis respectivement par les équations (A.4) et (A.5). On peut maintenant trouver la matrice \mathbf{C} de l'équation (3.21) qui donne

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}_d^{-1}\mathbf{K}_a \quad (\text{A.74})$$

Cette matrice \mathbf{C} nous permet, à l'aide de l'équation (3.20), d'exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des vitesses articulaires des liaisons actionnées. De cette nouvelle forme, on tire une matrice résultante \mathbf{J}_r que l'on exprime selon l'équation (3.23) où

$$\mathbf{J}_{r1} = \mathbf{J}_{a1} + \mathbf{J}_{d1}\mathbf{C} \quad (\text{A.75})$$

$$\mathbf{J}_{r2} = \mathbf{J}_{a2} + \mathbf{J}_{d2}\mathbf{C} \quad (\text{A.76})$$

$$\mathbf{J}_{r3} = \mathbf{J}_{a3} + \mathbf{J}_{d3}\mathbf{C} \quad (\text{A.77})$$

On peut maintenant exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des trois vitesses articulaires pertinentes ($\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_7$ et $\dot{\theta}_8$), soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_r \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (\text{A.78})$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r1} \\ \mathbf{J}_{r2} \\ \mathbf{J}_{r3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

A.2 Mécanisme 5: 3 degrés de liberté (rotoïde, 10 barres)

Le mécanisme à trois degrés de liberté présenté à la Figure A.3 comporte un actionneur motorisé et deux actionneurs passifs. On a un actionneur rotoïde en O_1 et un ressort en torsion ainsi qu'une butée mécanique en O_{10} et en O_{11} . Les variables articulaires sont θ_1 à θ_{12} . On écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.80})$$

où le vecteur \mathbf{v} est défini comme suit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.81})$$

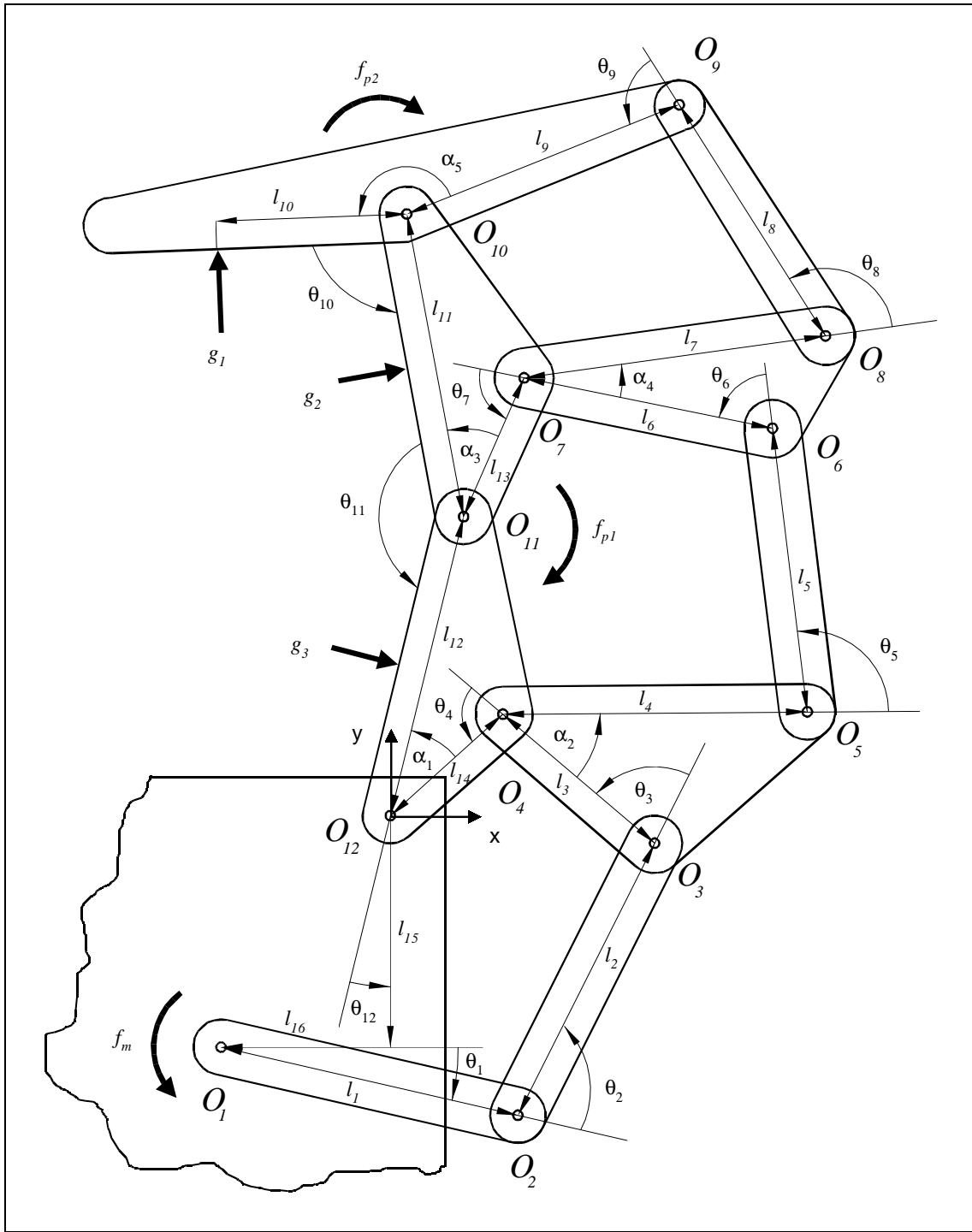


Figure A.3: Paramétrisation du mécanisme 5.

puisque le préhenseur comprend trois phalanges. Le vecteur des vitesses articulaires est défini par

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ est le vecteur des vitesses articulaires des liaisons actionnées qui contient la vitesse articulaire de la liaison motorisée, $\dot{\theta}_m$, et le vecteur des vitesses articulaires des liaisons actionnées passivement, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_p$,

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.83})$$

et où $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ est le vecteur des vitesses articulaires des liaisons dépendantes

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_7 & \dot{\theta}_8 & \dot{\theta}_9 & \dot{\theta}_{12} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.84})$$

Des équations (A.80) et (A.81), on tire trois équations qui sont

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.85})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.86})$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{J}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.87})$$

On détermine maintenant ces trois matrices \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 et \mathbf{J}_3 . L'équation (A.85) permet de modéliser la chaîne arborescente qui a comme origine O_1 et qui a comme organe terminal le point d'application de la force g_1 . On emprunte donc le chemin passant par les liaisons O_1 , O_2 , O_3 , O_5 , O_6 , O_8 et O_9 . La matrice Jacobienne associée à cette chaîne cinématique, tirée de l'équation (3.7) aura la forme suivante:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{a1} & \mathbf{J}_{d1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.88})$$

où

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.89})$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{21} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{51} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{61} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_8 \times \mathbf{r}_{81} & \mathbf{e}_9 \times \mathbf{r}_{91} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.90})$$

On remarque que les liaisons O_4 , O_7 , O_{10} , O_{11} et O_{12} n'interviennent pas dans cette chaîne. On trouve donc les vecteurs \mathbf{r}_{j1} qui relient le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont:

$$\mathbf{r}_{91} = \begin{bmatrix} r_{91x} \\ r_{91y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{19} + l_{10} c_{1a5} \\ l_9 s_{19} + l_{10} s_{1a5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.91})$$

$$\mathbf{r}_{81} = \begin{bmatrix} r_{81x} \\ r_{81y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{18} \\ l_8 s_{18} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{91} \quad (\text{A.92})$$

$$\mathbf{r}_{61} = \begin{bmatrix} r_{61x} \\ r_{61y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} + l_7 c_{1a4} \\ l_6 s_{16} + l_7 s_{1a4} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{81} \quad (\text{A.93})$$

$$\mathbf{r}_{51} = \begin{bmatrix} r_{51x} \\ r_{51y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{61} \quad (\text{A.94})$$

$$\mathbf{r}_{31} = \begin{bmatrix} r_{31x} \\ r_{31y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{51} \quad (\text{A.95})$$

$$\mathbf{r}_{21} = \begin{bmatrix} r_{21x} \\ r_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{31} \quad (\text{A.96})$$

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{bmatrix} r_{11x} \\ r_{11y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{21} \quad (\text{A.97})$$

où on définit

$$c_1 = \cos \theta_1 \quad (\text{A.98})$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.99})$$

$$c_{13} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (\text{A.100})$$

$$c_{14} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad (\text{A.101})$$

$$c_{1a2} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2) \quad (\text{A.102})$$

$$c_{15} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5) \quad (\text{A.103})$$

$$c_{16} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6) \quad (\text{A.104})$$

$$c_{1a4} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_4) \quad (\text{A.105})$$

$$c_{17} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \quad (\text{A.106})$$

$$c_{18} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_4 + \theta_8) \quad (\text{A.107})$$

$$c_{19} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_4 + \theta_8 + \theta_9) \quad (\text{A.108})$$

$$c_{1a5} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_4 + \theta_8 + \theta_9 + \alpha_5) \quad (\text{A.109})$$

$$c_{110} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \pi + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_4 + \theta_8 + \theta_9 + \alpha_5 + \theta_{10}) \quad (\text{A.110})$$

$$c_{111} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \alpha_2 + \theta_5 + \theta_6 + \alpha_4 + \theta_8 + \theta_9 + \alpha_5 + \theta_{10} + \theta_{11}) \quad (\text{A.111})$$

et où à chaque c_i correspond un s_i qui représente le sinus du même angle.

On obtient donc

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}r_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.112})$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}r_{21} & \mathbf{E}r_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{51} & \mathbf{E}r_{61} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{81} & \mathbf{E}r_{91} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.113})$$

Après multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la première boucle

$$\mathbf{J}_{a1} = \begin{bmatrix} -r_{11y} & 0 & 0 \\ r_{11x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.114})$$

$$\mathbf{J}_{d1} = \begin{bmatrix} -r_{21y} & -r_{31y} & 0 & -r_{51y} & -r_{61y} & 0 & -r_{81y} & -r_{91y} & 0 \\ r_{21x} & r_{31x} & 0 & r_{51x} & r_{61x} & 0 & r_{81x} & r_{91x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.115})$$

De la même façon, on détermine la Jacobienne de la deuxième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme point terminal le point d'application de la force g_2 . On emprunte donc le chemin passant par les liaisons $O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_8, O_9$ et O_{10} . On a

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{a2} & \mathbf{J}_{d2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.116})$$

où

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{12} & \mathbf{e}_{10} \times \mathbf{r}_{102} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.117})$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{22} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{52} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{62} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_8 \times \mathbf{r}_{82} & \mathbf{e}_9 \times \mathbf{r}_{92} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.118})$$

On remarque que les liaisons O_4, O_7, O_{11} et O_{12} n'interviennent pas dans cette chaîne. On trouve donc les vecteurs \mathbf{r}_{j2} qui relient le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont

$$\mathbf{r}_{102} = \begin{bmatrix} r_{102x} \\ r_{102y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_{11}}{2} c_{110} \\ \frac{l_{11}}{2} s_{110} \end{bmatrix} \quad (\text{A.119})$$

$$\mathbf{r}_{92} = \begin{bmatrix} r_{92x} \\ r_{92y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{19} \\ l_9 s_{19} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{102} \quad (\text{A.120})$$

$$\mathbf{r}_{82} = \begin{bmatrix} r_{82x} \\ r_{82y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{18} \\ l_8 s_{18} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{92} \quad (\text{A.121})$$

$$\mathbf{r}_{62} = \begin{bmatrix} r_{62x} \\ r_{62y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} + l_7 c_{1a4} \\ l_6 s_{16} + l_7 s_{1a4} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{82} \quad (\text{A.122})$$

$$\mathbf{r}_{52} = \begin{bmatrix} r_{52x} \\ r_{52y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{62} \quad (\text{A.123})$$

$$\mathbf{r}_{32} = \begin{bmatrix} r_{32x} \\ r_{32y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{52} \quad (\text{A.124})$$

$$\mathbf{r}_{22} = \begin{bmatrix} r_{22x} \\ r_{22y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{32} \quad (\text{A.125})$$

$$\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} r_{12x} \\ r_{12y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{22} \quad (\text{A.126})$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{r}_{12} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{102} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.127})$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{r}_{22} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{52} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{62} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{82} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{92} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.128})$$

Après multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la deuxième boucle

$$\mathbf{J}_{a2} = \begin{bmatrix} -r_{12y} & -r_{102y} & 0 \\ r_{12x} & r_{102x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.129})$$

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{bmatrix} -r_{22y} & -r_{32y} & 0 & -r_{52y} & -r_{62y} & 0 & -r_{82y} & -r_{92y} & 0 \\ r_{22x} & r_{32x} & 0 & r_{52x} & r_{62x} & 0 & r_{82x} & r_{92x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.130})$$

Enfin, on détermine la Jacobienne de la troisième boucle, soit celle ayant comme origine O_1 et qui a comme point terminal le point d'application de la force g_3 . On emprunte donc le chemin passant par les liaisons $O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_8, O_9, O_{10}$ et O_{11} . On a

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{a3} & \mathbf{J}_{d3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.131})$$

où

$$\mathbf{J}_{a3} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{13} & \mathbf{e}_{10} \times \mathbf{r}_{103} & \mathbf{e}_{11} \times \mathbf{r}_{113} \end{bmatrix} \quad (\text{A.132})$$

$$\mathbf{J}_{d3} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r}_{23} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_5 \times \mathbf{r}_{53} & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{r}_{63} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_8 \times \mathbf{r}_{83} & \mathbf{e}_9 \times \mathbf{r}_{93} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.133})$$

On remarque que les liaisons O_4, O_7 et O_{12} n'interviennent pas dans cette chaîne. On trouve donc les vecteurs \mathbf{r}_{j3} qui relient le repère local de la membrure j à l'organe terminal et qui sont

$$\mathbf{r}_{113} = \begin{bmatrix} r_{113x} \\ r_{113y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_{12}}{2} c_{111} \\ \frac{l_{12}}{2} s_{111} \end{bmatrix} \quad (\text{A.134})$$

$$\mathbf{r}_{103} = \begin{bmatrix} r_{103x} \\ r_{103y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} c_{110} \\ l_{11} s_{110} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{113} \quad (\text{A.135})$$

$$\mathbf{r}_{93} = \begin{bmatrix} r_{93x} \\ r_{93y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{19} \\ l_9 s_{19} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{103} \quad (\text{A.136})$$

$$\mathbf{r}_{83} = \begin{bmatrix} r_{83x} \\ r_{83y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{18} \\ l_8 s_{18} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{93} \quad (\text{A.137})$$

$$\mathbf{r}_{63} = \begin{bmatrix} r_{63x} \\ r_{63y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} + l_7 c_{1a4} \\ l_6 s_{16} + l_7 s_{1a4} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{83} \quad (\text{A.138})$$

$$\mathbf{r}_{53} = \begin{bmatrix} r_{53x} \\ r_{53y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{63} \quad (\text{A.139})$$

$$\mathbf{r}_{33} = \begin{bmatrix} r_{33x} \\ r_{33y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{53} \quad (\text{A.140})$$

$$\mathbf{r}_{23} = \begin{bmatrix} r_{23x} \\ r_{23y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{33} \quad (\text{A.141})$$

$$\mathbf{r}_{13} = \begin{bmatrix} r_{13x} \\ r_{13y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{23} \quad (\text{A.142})$$

On obtient alors la matrice

$$\mathbf{J}_{a3} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{r}_{13} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{103} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{113} \end{bmatrix} \quad (\text{A.143})$$

$$\mathbf{J}_{d3} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{r}_{23} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{53} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{63} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{83} & \mathbf{E} \mathbf{r}_{93} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.144})$$

Après multiplications, on obtient la matrice Jacobienne de la troisième boucle

$$\mathbf{J}_{a3} = \begin{bmatrix} -r_{13y} & -r_{103y} & -r_{113y} \\ r_{13x} & r_{103x} & r_{113x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.145})$$

$$\mathbf{J}_{d3} = \begin{bmatrix} -r_{23y} & -r_{33y} & 0 & -r_{53y} & -r_{63y} & 0 & -r_{83y} & -r_{93y} & 0 \\ r_{23x} & r_{33x} & 0 & r_{53x} & r_{63x} & 0 & r_{83x} & r_{93x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.146})$$

On note que pour la génération des Jacobiennes \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 et \mathbf{J}_3 , plusieurs autres chemins auraient pu être empruntés.

Maintenant que les trois phalanges sont traitées, on trace le graphe associé à la chaîne cinématique globale et on trouve trois boucles indépendantes (Figure A.4). Les trois ont comme origine O_1 et comme point terminal le point O_{12} . La première emprunte le chemin $O_1, O_2, O_3, O_4, O_{12}$, la deuxième emprunte le chemin $O_1, O_2, O_3,$

O_5, O_6, O_7, O_{11} et O_{12} et la troisième emprunte le chemin $O_1, O_2, O_3, O_5, O_6, O_8, O_9, O_{10}, O_{11}$ et O_{12} . Ces trois boucles représentent les contraintes d'assemblage du mécanisme. On note que d'autres combinaisons de boucles auraient pu être utilisées comme contraintes d'assemblage. On inclut la sous-matrice \mathbf{A} dans les Jacobiennes \mathbf{J}_4 ,

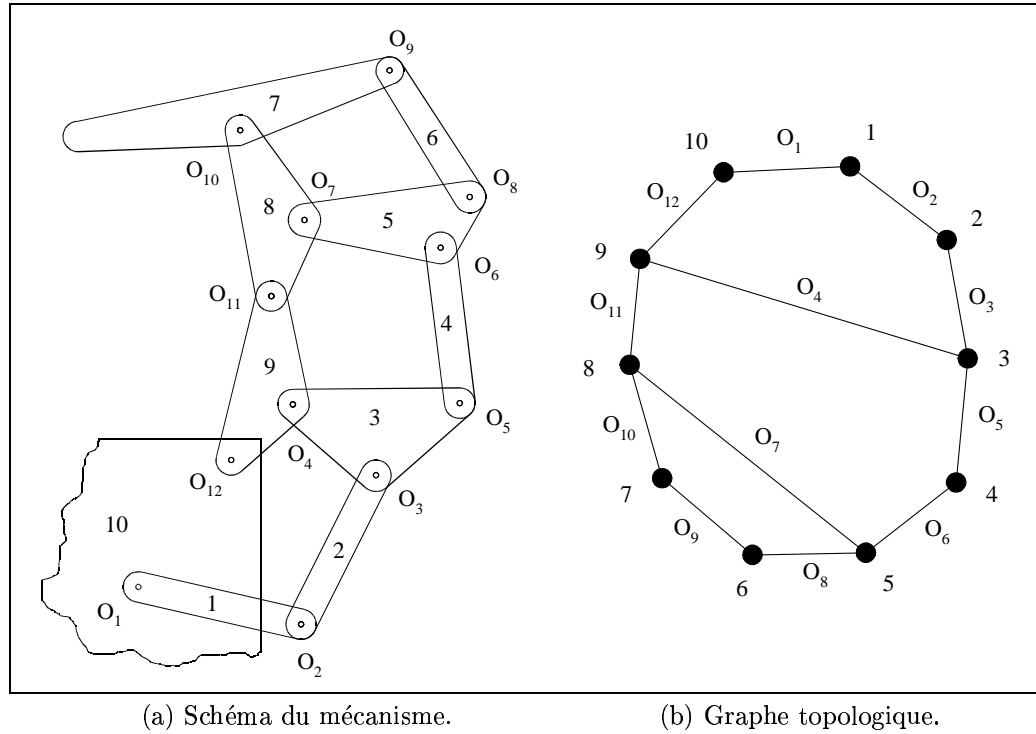


Figure A.4: Détermination du nombre de boucles indépendantes (mécanisme 5).

\mathbf{J}_5 et \mathbf{J}_6 qui modélisent les chaînes cinématiques fermées. En effet, on sait que la vitesse angulaire de la base par rapport à l'organe terminal est nulle pour les deux boucles. On a donc

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a4} & \mathbf{K}_{d4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.147})$$

où

$$\mathbf{K}_{a4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{E}r_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.148})$$

$$\mathbf{K}_{d4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{E}r_{24} & \mathbf{E}r_{34} & \mathbf{E}r_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.149})$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j4} comme suit:

$$\mathbf{r}_{44} = \begin{bmatrix} r_{44x} \\ r_{44y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{14} \\ l_9 s_{14} \end{bmatrix} \quad (\text{A.150})$$

$$\mathbf{r}_{34} = \begin{bmatrix} r_{34x} \\ r_{34y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} \\ l_3 s_{13} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{44} \quad (\text{A.151})$$

$$\mathbf{r}_{24} = \begin{bmatrix} r_{24x} \\ r_{24y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{34} \quad (\text{A.152})$$

$$\mathbf{r}_{14} = \begin{bmatrix} r_{14x} \\ r_{14y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{24} \quad (\text{A.153})$$

On obtient donc

$$\mathbf{K}_{a4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -r_{14y} & 0 & 0 \\ r_{14x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.154})$$

$$\mathbf{K}_{d4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r_{24y} & -r_{34y} & -r_{44y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{24x} & r_{34x} & r_{44x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.155})$$

De la même façon, on a

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a5} & \mathbf{K}_{d5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.156})$$

où

$$\mathbf{K}_{a5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{E}r_{15} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{115} \end{bmatrix} \quad (\text{A.157})$$

$$\mathbf{K}_{d5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{E}r_{25} & \mathbf{E}r_{35} & \mathbf{0} & \mathbf{E}r_{55} & \mathbf{E}r_{65} & \mathbf{E}r_{75} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.158})$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j5} comme suit:

$$\mathbf{r}_{115} = \begin{bmatrix} r_{115x} \\ r_{115y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} c_{a11} \\ l_{12} s_{a11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.159})$$

$$\mathbf{r}_{75} = \begin{bmatrix} r_{75x} \\ r_{75y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{13} c_{17} \\ l_{13} s_{17} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{115} \quad (\text{A.160})$$

$$\mathbf{r}_{65} = \begin{bmatrix} r_{65x} \\ r_{65y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} \\ l_6 s_{16} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{75} \quad (\text{A.161})$$

$$\mathbf{r}_{55} = \begin{bmatrix} r_{55x} \\ r_{55y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{65} \quad (\text{A.162})$$

$$\mathbf{r}_{35} = \begin{bmatrix} r_{35x} \\ r_{35y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{55} \quad (\text{A.163})$$

$$\mathbf{r}_{25} = \begin{bmatrix} r_{25x} \\ r_{25y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{35} \quad (\text{A.164})$$

$$\mathbf{r}_{15} = \begin{bmatrix} r_{15x} \\ r_{15y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{25} \quad (\text{A.165})$$

On obtient donc

$$\mathbf{K}_{a5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -r_{15y} & 0 & -r_{115y} \\ r_{15x} & 0 & r_{115x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.166})$$

$$\mathbf{K}_{d5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -r_{25y} & -r_{35y} & 0 & -r_{55y} & -r_{65y} & -r_{75y} & 0 & 0 & 0 \\ r_{25x} & r_{35x} & 0 & r_{55x} & r_{65x} & r_{75x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.167})$$

Pour la dernière boucle et de la même façon,

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a6} & \mathbf{K}_{d6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.168})$$

où

$$\mathbf{K}_{a6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{16} & \mathbf{Er}_{106} & \mathbf{Er}_{116} \end{bmatrix} \quad (\text{A.169})$$

$$\mathbf{K}_{d6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{Er}_{26} & \mathbf{Er}_{36} & \mathbf{0} & \mathbf{Er}_{56} & \mathbf{Er}_{66} & \mathbf{0} & \mathbf{Er}_{86} & \mathbf{Er}_{96} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.170})$$

On définit maintenant les vecteurs \mathbf{r}_{j6} comme suit:

$$\mathbf{r}_{116} = \begin{bmatrix} r_{116x} \\ r_{116y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} c_{111} \\ l_{12} s_{111} \end{bmatrix} \quad (\text{A.171})$$

$$\mathbf{r}_{106} = \begin{bmatrix} r_{106x} \\ r_{106y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} c_{110} \\ l_{11} s_{110} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{116} \quad (\text{A.172})$$

$$\mathbf{r}_{96} = \begin{bmatrix} r_{96x} \\ r_{96y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_9 c_{19} \\ l_9 s_{19} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{106} \quad (\text{A.173})$$

$$\mathbf{r}_{86} = \begin{bmatrix} r_{86x} \\ r_{86y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_8 c_{18} \\ l_8 s_{18} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{96} \quad (\text{A.174})$$

$$\mathbf{r}_{66} = \begin{bmatrix} r_{66x} \\ r_{66y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_6 c_{16} + l_7 c_{1a4} \\ l_6 s_{16} + l_7 s_{1a4} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{86} \quad (\text{A.175})$$

$$\mathbf{r}_{56} = \begin{bmatrix} r_{56x} \\ r_{56y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_5 c_{15} \\ l_5 s_{15} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{66} \quad (\text{A.176})$$

$$\mathbf{r}_{36} = \begin{bmatrix} r_{36x} \\ r_{36y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{13} + l_4 c_{1a2} \\ l_3 s_{13} + l_4 s_{1a2} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{56} \quad (\text{A.177})$$

$$\mathbf{r}_{26} = \begin{bmatrix} r_{26x} \\ r_{26y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{36} \quad (\text{A.178})$$

$$\mathbf{r}_{16} = \begin{bmatrix} r_{16x} \\ r_{16y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \end{bmatrix} + \mathbf{r}_{26} \quad (\text{A.179})$$

On obtient donc

$$\mathbf{K}_{a6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -r_{16y} & -r_{106y} & -r_{116y} \\ r_{16x} & r_{106x} & r_{116x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.180})$$

$$\mathbf{K}_{d6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -r_{26y} & -r_{36y} & 0 & -r_{56y} & -r_{66y} & 0 & -r_{86y} & -r_{96y} & 0 \\ r_{26x} & r_{36x} & 0 & r_{56x} & r_{66x} & 0 & r_{86x} & r_{96x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.181})$$

L'étape finale vise à exprimer les vitesses articulaires dépendantes en fonction des vitesses articulaires actionnées. À partir du modèle présenté à l'équation (3.17), on peut dire

$$\mathbf{K}_a \dot{\boldsymbol{\theta}}_a + \mathbf{K}_d \dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{0} \quad (\text{A.182})$$

où

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{a4} \\ \mathbf{K}_{a5} \\ \mathbf{K}_{a6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.183})$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d4} \\ \mathbf{K}_{d5} \\ \mathbf{K}_{d6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.184})$$

Les vecteurs $\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_d$ sont définis respectivement par les équations (A.83) et (A.84). On peut maintenant trouver la matrice \mathbf{C} de l'équation (3.21) qui donne

$$\mathbf{C} = -\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{K}_a \quad (\text{A.185})$$

Cette matrice \mathbf{C} nous permet, à l'aide de l'équation (3.20), d'exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des vitesses articulaires des liaisons actionnées. De cette nouvelle forme, on tire une matrice résultante \mathbf{J}_r que l'on exprime selon l'équation (3.23) où

$$\mathbf{J}_{r1} = \mathbf{J}_{a1} + \mathbf{J}_{d1}\mathbf{C} \quad (\text{A.186})$$

$$\mathbf{J}_{r2} = \mathbf{J}_{a2} + \mathbf{J}_{d2}\mathbf{C} \quad (\text{A.187})$$

$$\mathbf{J}_{r3} = \mathbf{J}_{a3} + \mathbf{J}_{d3}\mathbf{C} \quad (\text{A.188})$$

On peut maintenant exprimer les vitesses cartésiennes en fonction des trois vitesses articulaires pertinentes ($\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_{10}$ et $\dot{\theta}_{11}$), soit

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_r \dot{\boldsymbol{\theta}}_a \quad (\text{A.189})$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{r1} \\ \mathbf{J}_{r2} \\ \mathbf{J}_{r3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.190})$$

ANNEXE B

ALGORITHME DE DÉCOMPOSITION ORTHOGONALE

L'algorithme de décomposition orthogonale est utilisé, entre autres, pour traiter le problème géométrique inverse associé aux manipulateurs redondants, où la tâche secondaire consiste par exemple à minimiser la déviation des variables articulaires autour de leur position moyenne (Anderson et Angeles 1989).

Il peut aussi être utilisé pour l'optimisation de mécanismes, qui est un problème contraint, la tâche principale étant ici le respect de ces contraintes alors que la tâche secondaire étant la minimisation de la fonction objectif (Angeles *et al.* 1990).

Le problème qui nous intéresse en est un non-linéaire. L'algorithme de décomposition orthogonale permet de solutionner itérativement ce problème non-linéaire à l'aide d'une séquence de problèmes quadratiques linéaires. On en fait ici une description détaillée qui est reprise de (Angeles *et al.* 1990). À partir d'un estimé initial \mathbf{x}^0 , une séquence $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots$ sera générée en utilisant

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \tag{B.1}$$

La méthode consiste donc à minimiser un indice de performance quadratique d'une fonction vectorielle de dimension m , soit le vecteur objectif $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, lorsque le vecteur de variables articulaires \mathbf{x} , de dimension n , est soumis à p équations de contraintes regroupées dans le vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. On définit donc l'indice de performance quadratique comme

$$\min_{\Delta \mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (\text{B.2})$$

soumis aux contraintes

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\mathbf{e} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F} \Delta \mathbf{x} \quad (\text{B.4})$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ est de dimension $m \times n$ et représente la Jacobienne de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et \mathbf{W} est une matrice de pondération (définie positive), de dimension $m \times m$, qui permettra éventuellement de prioriser certaines variables du problème. On a

$$m \geq n - p \quad (\text{B.5})$$

de façon à obtenir un système surdéterminé d'équations à résoudre. En dérivant l'équation (B.3), on obtient

$$\mathbf{G} \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.6})$$

où $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$, de dimension $p \times n$, est la matrice Jacobienne de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Comme la matrice \mathbf{W} est une matrice définie positive, on peut l'exprimer sous la forme

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} \quad (\text{B.7})$$

L'algorithme de décomposition orthogonale est basé sur le principe que le noyau d'une matrice et l'image (ou espace colonne) de sa transposée sont des sous-espaces orthogonaux, leur somme produisant tout l'espace \mathfrak{R}^n . On peut donc dire que tout vecteur $\Delta \mathbf{x}$ peut être décomposé de façon unique en un vecteur dans le noyau de \mathbf{G} et un vecteur dans l'espace colonne de \mathbf{G}^T . On définit donc

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x}_o + \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (\text{B.8})$$

où \mathbf{L} est une matrice de dimension $n \times (n - p)$, dont l'image est dans le noyau de \mathbf{G} , c'est-à-dire

$$\mathbf{G} \mathbf{L} = \mathbf{0}_{pn'} \quad (\text{B.9})$$

où $\mathbf{0}_{pn'}$ est la matrice nulle de dimension $p \times (n - p)$. Le vecteur $\mathbf{L}\mathbf{u}$ est donc le vecteur dans le noyau de \mathbf{G} tandis que $\Delta\mathbf{x}_o$ est le vecteur dans l'espace colonne de \mathbf{G}^T puisqu'il est défini comme

$$\Delta\mathbf{x}_o = -\mathbf{G}^\dagger \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.10})$$

où \mathbf{G}^\dagger est un inverse généralisé de \mathbf{G} défini comme

$$\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \quad (\text{B.11})$$

On utilise la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) afin d'éviter l'instabilité numérique due à la présence de l'inverse du produit de matrice de l'équation (B.11). La DVS permet de décomposer la matrice \mathbf{G} comme suit

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{M}_d\mathbf{R}^T \quad (\text{B.12})$$

où la matrice \mathbf{M}_d est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de \mathbf{G} . Les matrices \mathbf{U} et \mathbf{R}^T sont deux matrices orthogonales dans le sens où leurs colonnes sont orthogonales. Les détails relatifs à l'algorithme de Décomposition en Valeurs Singulières se retrouvent à l'Annexe C.

Maintenant, on peut exprimer l'inverse généralisé de \mathbf{G} comme

$$\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{R}\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{U}^T \quad (\text{B.13})$$

La DVS de \mathbf{G} offre un avantage supplémentaire non-négligeable en nous permettant de déduire la matrice de projection dans le noyau de \mathbf{G} , soit la matrice \mathbf{L} . En effet, on obtient le noyau de \mathbf{G} en créant une matrice composée des colonnes de \mathbf{R}^T qui correspondent aux lignes de \mathbf{M}_d qui contiennent les valeurs singulières nulles.

Le vecteur $\Delta\mathbf{x}_o$ et la matrice \mathbf{L} étant déterminés, on doit trouver \mathbf{u} . Pour ce faire, il faut revenir à l'équation (B.4) où on pose \mathbf{e} égal à zéro, on obtient alors

$$\mathbf{F}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.14})$$

En multipliant chaque côté de l'équation (B.14) par la matrice \mathbf{V} obtenue de la décomposition de \mathbf{W} , on obtient

$$\mathbf{V}\mathbf{F}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.15})$$

En remplaçant $\Delta\mathbf{x}$ par sa décomposition orthogonale de l'équation (B.8) on obtient

$$\mathbf{V}\mathbf{F}\Delta\mathbf{x}_o + \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{L}\mathbf{u} = -\mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.16})$$

qui devient, en isolant \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = (\mathbf{VFL})^\dagger [-\mathbf{Vf}(\mathbf{x}) - \mathbf{VF}\Delta\mathbf{x}_o] \quad (\text{B.17})$$

La matrice résultant du produit de matrices (\mathbf{VFL}) n'est pas carrée. La DVS de ce produit permet alors de trouver la solution de l'équation (B.17).

Maintenant que le vecteur $\Delta\mathbf{x}$ est connu, on incrémente les variables du problème et on entre dans une suite d'itérations semblables qui doivent faire converger la fonction vers un minimum, tout en respectant les contraintes.

ANNEXE C

ALGORITHME DE DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

L'algorithme de *Décomposition en Valeurs Singulières* (DVS) est utilisé dans la solution du problème d'optimisation défini à l'Annexe B. Une brève description de la DVS est maintenant donnée. Cette description est reprise de (Press et *al* 1992).

Lors de la résolution de systèmes d'équations qui sont soit singuliers, soit proches de la singularité, l'emploi de l'élimination de Gauss ou de la décomposition **LU** conduit dans plusieurs cas à des résultats erronés. Par contre, une méthode connue sous le nom de *Décomposition en Valeurs Singulières*, saura donner un diagnostic du problème et même contourner le problème du mauvais conditionnement afin de nous donner une solution.

La DVS est basée sur le théorème d'algèbre linéaire suivant (Golub et Van Loan 1983):

Théorème C.1 *Toute matrice \mathbf{A} de dimension $m \times n$, où $m \geq n$, peut être exprimée sous la forme d'un produit de trois matrices, soit:*

$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times n} \mathbf{W}_{n \times n} \mathbf{V}_{n \times n}^T$ où les colonnes de \mathbf{U} sont orthogonales entre elles, où \mathbf{W} est une matrice diagonale contenant des éléments soit positifs, soit nuls. La matrice \mathbf{V} , pour sa part est orthogonale, i.e.: $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{1}$.

La DVS peut être accomplie en tout temps, peu importe le niveau de mauvais conditionnement de la matrice \mathbf{A} . L'algorithme de la DVS ne sera pas présenté ici, puisqu'il origine de concepts d'analyse numérique dépassant le cadre de cette thèse. Une présentation détaillée de la théorie sous-jacente à cet algorithme est présentée dans des ouvrages spécialisés (Golub et Van Loan 1983; Maciejewski et Klein 1989).

Pour les matrices singulières, les notions d'image et de noyau sont très importantes. Considérons le système linéaire suivant:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{C.1}$$

où \mathbf{A} est une matrice carrée, \mathbf{x} et \mathbf{b} sont des vecteurs. L'équation C.1 indique que \mathbf{A} est une transformation linéaire dirigée du vecteur \mathbf{x} vers le vecteur \mathbf{b} . Si \mathbf{A} est singulière, alors il existe un sous-espace de \mathbf{x} , nommé le noyau, qui est transformé vers $\mathbf{b}=\mathbf{0}$. La dimension du noyau correspond au nombre d'éléments sur la diagonale de \mathbf{W} qui sont nuls et est appelée la *dégénérescence* de \mathbf{A} . D'autre part, il existe un sous-espace de \mathbf{b} qui peut être atteint grâce à \mathbf{A} , dans le sens qu'il existe différents vecteurs \mathbf{x} vérifiant l'équation $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, où \mathbf{b} est non-nul. Ce sous-espace de l'espace vectoriel dans lequel est défini le vecteur \mathbf{b} est nommé l'*image* de \mathbf{A} et sa dimension est appelée le *rang* de \mathbf{A} . La DVS construit des bases orthogonales pour le noyau et l'image de la matrice \mathbf{A} . De façon spécifique, à tout élément non-nul w_j de \mathbf{W} situé sur la diagonale, correspond la j ième colonne de \mathbf{U} , l'ensemble des colonnes engendrant la base de \mathbf{A} . De la même façon, les colonnes de \mathbf{V} correspondant aux éléments nuls w_j de \mathbf{W} engendrent une base orthogonale pour le noyau de \mathbf{A} . On peut donc définir la matrice \mathbf{H} qui projettera tout vecteur \mathbf{y} dans le noyau de \mathbf{A} . On a

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \tag{C.2}$$

où

$$\mathbf{S} = [V^i, V^j, \dots, V^p] \tag{C.3}$$

et où V^i correspond à la i ième colonne de \mathbf{V} , et les colonnes de \mathbf{V} définissant \mathbf{S} sont obtenues de la façon suivante

$$\{\forall V^i \in \mathbf{S}, w_{ii} = 0 \wedge w_{ii} \in \mathbf{W}\} \quad (\text{C.4})$$

Un autre point important doit être soulevé ici: certains éléments de \mathbf{W} , sans être nuls, adopteront des valeurs si faibles que les erreurs d'arrondi prennent le pas sur la vraie valeur. Ainsi lors du calcul de \mathbf{W}^{-1} , ces valeurs risquent d'être fort éloignées de la vraie valeur de $\frac{1}{w_j}$. Dans ce cas, l'algorithme de la DVS prescrit de remplacer ces fausses valeurs de $\frac{1}{w_j}$ par zéro. Il peut sembler paradoxal de procéder tel que mentionné précédemment puisque cela correspond à se débarrasser d'une combinaison linéaire du système d'équations que l'on désire résoudre. En fait, on se débarrasse justement d'une combinaison linéaire corrompue par les erreurs d'arrondi qui, au mieux sera inutile, le plus souvent entraînera le vecteur solution \mathbf{x} tellement loin dans une certaine direction qu'il fera presque partie du noyau de \mathbf{A} . En procédant tel qu'indiqué on amoindrit le problème généré par les erreurs d'arrondi et on génère un résidu $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|$ plus petit.